Я. Г. Синай

# ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

R&C Dynamics

Я. Г. СИНАЙ

# ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

## СТРОГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

**СИНАЙ Я. Г. Теория фазовых переходов.** Строгие результаты.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

В теории фазовых переходов в последнее время широко применяются современные математические методы исследования. Ряд этих методов отражен в книге. В основе лежит формализм, позволяющий изучать непосредственно бесконечные системы статистической механики в пространстве или на решетке. Последовательное применение этого формализма дает возможность строить фазовые диаграммы решетчатых систем при низких температурах (вторая глава), исследовать отсутствие или наличие спонтанного нарушения непрерывной симметрии (третья глава). В четвертой, последней, главе развивается математический подход к методу ренормгруппы Вильсона — Каданова — Фишера.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов и аспирантов в области теоретической и математической физики.

С $\frac{20402-130}{053(02)-80}$ 120-80 1704020000

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея написания этой книги появилась во время моих лекций по математическим проблемам статистической физики, которые я читал в Институте математики Академии наук Венгрии летом 1976 года. Замысел ее состоял в том, чтобы изложить ряд строгих результатов, группирующихся около основных идей теории фазовых переходов. В ней нет систематического изложения основных понятий, общих теорем и т. п. статистической механики. Однако почти все факты изложены в книге со всей полнотой, и поэтому читатель, разобравший тот или иной ее раздел, сможет довольно быстро включиться в одно из разнообразных актуальных направлений теории фазовых переходов. Таким образом, следует считать, что книга получилась рассчитанной или на специалистов в области статистической физики или на тех, кто намерен ею непосредственно и всерьез заняться.

Книга состоит из четырех глав. В первой главе приведены определения гамильтониана, его группы симметрии и предельного распределения Гиббса, отвечающего данному гамильтониану. Изложение ведется для решетчатого случая, поскольку только этот случай в дальнейшем в основном обсуждается. Мы приводим различные примеры гамильтонианов: гамильтониан модели Изинга, гамильтонианы с непрерывной симметрией, гамильтонианы решетчатых моделей квантовой теории поля, гамильтонианы решетчатых полей Янга — Миллса и т. п. Далее излагаются общие результаты о существовании предельных распределений Гиббса. В качестве примера показывается существование предельных распределений Гиббса для решетчатых моделей квантовой теории поля.

Во второй главе рассматриваются фазовые диаграммы решетчатых моделей при низких температурах. Здесь вводятся понятия основного состояния гамильтониана и устойчивости множества основных состояний. В случае периодических конфигураций основные состояния можно определить как конфигурации с наименьшей удельной энергией. Условие устойчивости основных состояний, которое мы называем условием Пайерлса, состоит, грубо говоря, в том, что разность энергий локального возмущения основного состояния и самого основного состояния пропорциональна площади границы, разделяющей области, занятые различными основными состояниями. В предположении конечности числа периодических основных состояний и выполнения условия Пайерлса доказывается общее утверждение, связывающее структуру множества периодических предельных распределений Гиббса с множеством основных состояний. Этот результат получен при помощи обобщения так называемого контурного метода Пайерлса, предложенного им для доказательства существования дальнего порядка в модели Изинга при больших значениях параметра $\beta$. Из педагогических соображений в начале главы мы приводим отдельно доказательство для модели Изинга. В конце главы обсуждается понятие основного состояния для двумерных моделей квантовой теории поля. Несколько неожиданным оказывается, что когда константа взаимодействия стремится к бесконечности, число основных состояний не зависит от части гамильтониана, описывающей взаимодействие.

В третьей главе приводятся основные теоремы о фазовых переходах в решетчатых моделях с непрерывной симметрией: в двумерном случае теорема Добрушина — Шлосмана о симметрии любого предельного распределения Гиббса относительно группы симметрии гамильтониана, являющаяся естественным обобщением теоремы Мермина — Вагнера, и теорема Саймона — Спенсера — Фрелиха о наличии спонтанного нарушения непрерывной симметрии в моделях размерности три и выше при больших $\beta$. Перед доказательством этих теорем дается эвристическое объяснение роли размерности в духе общей теории Голдстоуна.

Четвертая глава посвящена фазовым переходам второго рода и связанной с ними теории автомодельных распределений вероятностей. Подробно обсуждаются иерархические модели Дайсона, на примере которых можно проследить особенности основного метода теории — метода ренормгруппы. Центральное понятие теории — понятие автомодельного распределения вероятностей. Такие распределения важны потому, что они возникают как предельные распределения для блок-спинов в критической точке. Автомодельные распределения легко найти в классе гауссовских стационарных распределений. Гораздо более трудным является вопрос о виде негауссовских автомодельных распределений, которые встречаются в наиболее интересных задачах. При построении таких распределений и, вообще, во всей теории важную роль играет понятие линеаризованной ренормгруппы и ее спектра. Для гауссовских автомодельных распределений спектр линеаризованной ренормгруппы вычисляется в явном виде. Благодаря этому находятся значения параметра, при котором в спектре появляется собственное значение, равное 1. В окрестности таких значений на основе теории бифуркаций строятся формальные ряды типа хорошо известных $\varepsilon$-разложений для негауссовских автомодельных распределений.

В конце каждой главы приведена библиография вместе с небольшими комментариями. Число работ, относящихся к математической теории фазовых переходов в статистической механике и квантовой теории поля, составляет уже несколько сотен. Приводимый нами список литературы заведомо неполон и включает в себя только работы, так или иначе связанные с текстом.

При написании этой книги существенную помощь мне оказали мои коллеги из Будапешта А. Крамли, П. Майер, Д. Сас и И. Фритц. Без их энтузиазма и большого труда, который они вложили, эта книга не была бы написана. Содержание книги я неоднократно и с большой пользой для себя обсуждал с И. М. Лифшицем. Р. Л. Добрушин прочитал рукопись и сделал много полезных замечаний. Большую помощь оказали мои ученики П. М. Блехер, Е. И. Динабург, Д. Г. Мар-

тиросян, С. А. Пирогов, Е. В. Гусев, Э. Жалис, М. Д. Миссаров, Н. А. Монина, А. Наимжанов и К. М. Ханин, как своими замечаниями по поводу текста, так и непосредственным участием в оформлении рукописи.

Я искренне благодарю за это участие и приношу всем свою самую сердечную признательность.

*Я. Г. Синай*

# ГЛАВА 1

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА

## § 1. Гамильтонианы

В теории случайных процессов всякий случайный процесс задается системой своих конечномерных распределений. Фундаментальная теорема Колмогорова утверждает, что этими распределениями однозначно определяется распределение вероятностей на всей $\sigma$-алгебре измеримых подмножеств, порождаемой конечномерными цилиндрическими множествами. Задача теории случайных процессов — по конечномерным распределениям исследовать свойства процесса, например, свойства типичных реализаций, значения вероятностей для того или иного типа поведения случайного процесса и т. п.

В задачах равновесной классической статистической механики мы встречаемся с иной ситуацией. Здесь в основе теории лежит формальное выражение, называемое гамильтонианом, при помощи которого можно находить всевозможные условные распределения вероятностей для случайного процесса или случайного поля внутри любой конечной области при условии, что фиксированы значения процесса или поля вне этой области. Основная проблема состоит в выяснении, во-первых, того, когда существует хотя бы одно распределение вероятностей, для которого выражения, найденные с помощью гамильтониана, дают отвечающие этому распределению условные вероятности и, во-вторых, в изучении структуры множества всех таких распределений вероятностей.

Вся проблематика оказывается тем самым естественным обобщением проблематики теории обычных цепей Маркова, где также решается вопрос о построении распределений вероятностей по системе переходных вероятностей. Как мы увидим, вся теория конечных цепей Маркова с положительными вероятностями перехода вкладывается в теорию определяемых далее предельных гиббсовских распределений как тривиальный частный случай, а гамильтонианы можно рассматривать как естественные обобщения переходных вероятностей, точнее, их логарифмов.

Переходя к точным определениям, рассмотрим подробно случайные поля с дискретным временем. Как правило, мы будем рассматривать пространства $\Omega$, состоящие из функций $\varphi = \varphi(x)$, определенных на $d$-мерной решетке. Другие ситуации всегда будут специально оговорены. Вид решетки не играет существенной роли в обсуждаемых далее вопросах. Поэтому, как правило, мы будем считать, что $x = (x_1, \ldots, x_d)$ пробегает обычную целочисленную решетку $\mathbf{Z}^d$ с метрикой $\|x' - x''\| = \max\limits_{\substack{1 \leq i \leq d \\ x', x'' \in \mathbf{Z}^d}} |x'_i - x''_i|$. Наоборот, вид пространства возможных значений $\varphi(x)$ может существенно упростить или усложнить теорию. Во всяком случае, мы всегда предполагаем, что пространство $\Phi$ возможных значений переменной $\varphi(x)$ не зависит от $x$ и представляет собой измеримое пространство. Отметим сразу же следующие основные частные случаи:

1. $\Phi$ — конечное множество;
2. $\Phi$ — компактное метрическое пространство, в частности, однородное пространство компактной группы Ли с естественной $\sigma$-алгеброй борелевских множеств;
3. $\Phi = R^1$ или $R^n$ с $\sigma$-алгеброй борелевских множеств; в последнем случае часто говорят о векторных моделях.

Пространство $\Omega$, тем самым, также оказывается измеримым пространством с естественной $\sigma$-алгеброй $\mathfrak{S}$ измеримых подмножеств.

Функция $\varphi = \{\varphi(x)\}$ называется конфигурацией системы. Ограничение $\varphi$ на любое подмножество $V \subset \mathbf{Z}^d$ обозначим $\varphi(V)$, т. е. $\varphi(V) = \{\varphi(x), x \in V\}$. Пространство всех таких $\varphi(V)$ обозначим $\Omega(V)$.

Предположим теперь, что для всевозможных непустых конечных подмножеств $V \subset \mathbf{Z}^d$ заданы функции $\mathfrak{J}(\varphi(V))$, определенные на конфигурациях $\varphi(V)$. Значения этих функций интерпретируются как энергии совместного взаимодействия переменных $\varphi(x)$ в множестве $V$. Набор функций $\mathfrak{J}(\varphi(V))$ называется потенциалом. Для любой точки $x_0 \in \mathbf{Z}^d$ образуем сумму

$$U(\varphi(x_0);\ \varphi(x),\ x \neq x_0) = \sum \frac{1}{|V|} \mathfrak{J}(\varphi(V)),$$

где суммирование происходит по всем конечным подмножествам $V$, содержащим точку $x_0$. Величину $U(\varphi(x_0);\ \varphi(x),\ x \neq x_0)$ естественно интерпретировать как энергию (или потенциал) взаимодействия переменной $\varphi(x_0)$ со всеми переменными $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$.

Вообще говоря, ряд, определяющий $U$, может расходиться. В случае компактных $\Phi$ мы будем всегда иметь дело с такими потенциалами, когда этот ряд сходится абсолютно. Для этого достаточно предположить, что при каждом $V$

$$\sup_{\varphi(V)} |\mathfrak{J}(\varphi(V))| \leqslant \frac{\mathrm{const} \cdot k}{p^{\alpha d} \cdot C_{p^d}^{k-2}},$$

где $p = \operatorname{diam} V$, $k = |V|$, $\alpha > 1$ — постоянная.

Пример 1. *Бинарное взаимодействие.* Если $\mathfrak{J}$ отлично от нуля только при $|V| = 2$, то потенциал $\mathfrak{J}$ называется бинарным. Написанное выше условие означает, что для $V = (s', s'')$

$$|\mathfrak{J}(\varphi(s'), \varphi(s''))| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\| s' - s'' \|^{\alpha d}}, \qquad \alpha > 1.$$

Пример 2. *Радиус взаимодействия.* Пусть для потенциала $\mathfrak{J}$ можно найти число $R$, при котором $\mathfrak{J}(\varphi(V)) \equiv 0$, если $\operatorname{diam} V > R$. Наименьшее число с этим свойством называется радиусом взаимодействия. В таком случае сумма, определяющая $U$, конечна и имеет смысл при всех $\varphi$. Если такого $R$ не существует, то $\mathfrak{J}$ называется потенциалом с бесконечным радиусом взаимодействия. Когда радиус взаимодействия бесконечен, ряд для $U$ может расходиться за счет роста переменных $\varphi(x)$ на бесконечности.

Для любого конечного подмножества $W$ положим

$$H(\varphi(W)) = \sum_{V \subseteq W} \mathfrak{J}(\varphi(V))$$

и будем называть $H(\varphi(W))$ энергией конфигурации $\varphi$ в объеме $W$. Сумму

$$H\big(\varphi(W) \,|\, \varphi(\mathbf{Z}^d - W)\big) = \sum_{\substack{V \cap W \neq \varnothing \\ V \cap (\mathbf{Z}^d - W) \neq \varnothing}} \mathfrak{J}(\varphi(V))$$

будем называть энергией взаимодействия конфигурации $\varphi(W)$ с $\varphi(\mathbf{Z}^d - W)$, рассматриваемой как граничное условие. В случае компактного $\Phi$ при сделанном выше предположении эта величина всегда конечна. Если радиус взаимодействия $R$ конечен, то в последней сумме участвуют подмножества, отстоящие от $W$ на расстояние, не превосходящее $R$. В общем случае считаем, что величина $H(\varphi(W) | \varphi(\mathbf{Z}^d - W))$ определена, если отвечающий ей ряд сходится абсолютно. Величину

$$H(\varphi(W)) + H\big(\varphi(W) \,|\, \varphi(\mathbf{Z}^d - W)\big)$$

будем называть полной энергией конфигурации $\varphi(W)$ при граничном условии $\varphi(\mathbf{Z}^d - W)$.

Мы будем рассматривать формальный ряд

$$H(\varphi) = \sum_{V \subset \mathbf{Z}^d} \mathfrak{J}(\varphi(V)) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} U(\varphi(x);\ \varphi(y),\ y \neq x),$$

где суммирование происходит по всем непустым конечным подмножествам $V$. Этот ряд называется гамильтонианом. Его нельзя ни в каком смысле рассматривать как функцию на пространстве $\Omega$, но, к счастью, это и не понадобится. Для нас существенно, что с помощью $H$ можно находить $H(\varphi(W))$ и $H(\varphi(W) | \varphi(\mathbf{Z}^d - W))$. Часто также имеют смысл разности $H(\varphi') - H(\varphi'')$ для конфигураций $\varphi'$, $\varphi''$, совпадающих почти всюду, т. е. всюду, кроме конечного числа точек.

*Группы симметрии гамильтониана.* Весьма важным для многих примеров и приложений теории является понятие группы симметрии гамильтониана. Мы начнем с нескольких примеров.

Пусть $\{T^y, y \in \mathbf{Z}^d\}$ — группа пространственных сдвигов в пространстве $\Omega$, т. е. $(T^y\varphi)(x) = \varphi(x - y)$. Гамильтониан $H(\varphi)$ называется трансляционно-инвариантным, если $H(\varphi) = H(T^y\varphi)$ при всех $y \in \mathbf{Z}^d$, т. е. если $\mathfrak{J}(\varphi(V)) = \mathfrak{J}((T^y\varphi)(V + y))$. Иными словами, функция $\mathfrak{J}(\varphi(V))$ одинакова для подмножеств $V$, получающихся друг из друга сдвигом по решетке. В случае бинарного взаимодействия трансляционная инвариантность означает, что вид функции $\mathfrak{J}(\varphi(x'), \varphi(x''))$ зависит только от разности $x'' - x'$.

В общем случае пусть $\mathbf{Z}_d^0$— подгруппа $\mathbf{Z}^d$ конечного индекса и $\{T^y, y \in \mathbf{Z}_0^d\}$ — отвечающая ей подгруппа группы пространственных сдвигов. Гамильтониан $H$ называется периодическим (точнее, $\mathbf{Z}_0^d$-периодическим), если $H(\varphi) = H(T^y\varphi)$ при всех $y \in Z_0^d$. Это означает, что при фиксированном $V$ вид функции $\mathfrak{J}(\varphi(V + y))$ зависит от класса смежности $y$ по подгруппе $\mathbf{Z}_0^d$.

Допустим теперь, что на пространстве значений $\Phi$ действует группа $G$. Продолжим это действие на все $\Omega$, положив $(g\varphi)(x) = g\varphi(x)$ для любого $g \in G$. Назовем гамильтониан $H$ $G$-инвариантным, если $H(g\varphi) = H(\varphi)$ для любого $g \in G$, т. е.

$$\mathfrak{J}(\varphi(V)) = \mathfrak{J}((g\varphi)(V)).$$

Пример 1. $\Phi = \{-1, 1\}$. Этот пример является основным. Группа $G$ состоит из двух элементов: тождественного отображения $e$ и симметрии $g\varphi = -\varphi$, т. е. $(g\varphi)(x) = -\varphi(x)$ для любого $x$. Такая симметрия часто называется «$\pm$»-симметрией. Если $\Phi = -\Phi \subset R^1$, то любой гамильтониан с бинарным взаимодействием вида

$$H(\varphi) = \sum \mathfrak{J}(x', x'')\, \varphi(x')\, \varphi(x'')$$

$G$-инвариантен.

Пример 2. Пусть $\Phi = S^1$ и $G$ — абелева группа вращений окружности. Той же буквой обозначим действие $G$ на $\Omega$. Тогда гамильтониан $H(\varphi) = \sum \mathcal{J}(x', x'')(\varphi(x'), \varphi(x''))$ будет очевидно, $G$-инвариантным.

Введем теперь общее определение. Пусть $G$ — топологическая группа, действующая измеримым образом на пространстве $\Phi$. Это означает, что для любой измеримой функции $f$ на $\Phi$ функция $f(g\varphi)$ есть измеримая функция на прямом произведении $G \times \Phi$.

Рассмотрим группу $\widehat{G}$ преобразований пространства $\Omega$, где отдельное преобразование $\widehat{g} \in \widehat{G}$ задается точкой $z \in \mathbf{Z}^d$ и $G$-значной функцией $g(y)$, определенной на $\mathbf{Z}^d$. Преобразование $\widehat{g} = (z, g(y))$ действует на конфигурацию $\varphi$ по формуле: $(\widehat{g}\varphi)(x) = g(x)\varphi(x-z)$, $x \in \mathbf{Z}^d$. Закон композиции таких преобразований имеет вид

$$(z, g(y)) \circ (z', g'(y)) = (z + z', g(y)g'(y-z)).$$

В $\widehat{G}$ можно ввести естественную топологию, при которой она станет топологической группой. В этой топологии последовательность $\widehat{g}_n = (z_n, g_n(y)) \in \widehat{G}$ сходится к элементу $\widehat{g} = (z, g(y))$, если существует такое $N$, что $z_n = z$ при всех $n > N$ и $g_n(y)$ сходится при $n \to \infty$ к $g(y)$ равномерно по $y \in \mathbf{Z}^d$.

Для любого конечного подмножества $V$ и преобразования $\widehat{g} = (z, g) \in \widehat{G}$ выполняется очевидное равенство:

$$(\widehat{g}\varphi)(V) = ((\widehat{g}\varphi)(y),\ y \in V) =$$
$$= (g(y)\varphi(y-z),\ y \in V) = (g(z+y)\varphi(y),\ y \in V - z).$$

Обозначим последнее выражение через $\widehat{g}\varphi(V-z)$.

Определение 1.1. Пусть $S$ — замкнутая подгруппа группы $\widehat{G}$. Потенциал $H(\varphi)$ называется $S$-инвариантным, если для любого $\widehat{g} = (z, g) \in S$, любого конечного подмножества $V$ и любой конфигурации $\varphi \in \Omega$ выполняется равенство

$$\mathfrak{I}(\varphi(V)) = \mathfrak{I}((\widehat{g}\varphi)(V-z)).$$

Ниже мы приведем примеры гамильтонианов с разнообразными группами симметрии.

## § 2. Примеры гамильтонианов

1. *Одномерные цепи Маркова.* Пусть $\Omega$ есть пространство реализаций конечной цепи Маркова с $r$ состояниями, т. е. множество значений $\Phi$ состоит из $r$ элементов, а $P$ — мера в $\Omega$, отвечающая стационарной

цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ и стационарным распределением $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$. Ограничимся для простоты случаем, когда все $\pi_{ij} > 0$. Для $V = (k, k+1, \ldots, k+m)$ вероятность любой конфигурации $\varphi(V) = (\varphi(k), \varphi(k+1), \ldots, \varphi(k+m))$ равна

$$\pi_{\varphi(k)} \cdot \pi_{\varphi(k)\varphi(k+1)} \cdot \pi_{\varphi(k+1)\varphi(k+2)} \cdot \ldots \cdot \pi_{\varphi(k+m-1)\varphi(k+m)} = \exp\left\{\ln \pi_{\varphi(k)} + \sum_{i=k}^{k+m-1} \ln \pi_{\varphi(i)\varphi(i+1)}\right\}.$$

Введем гамильтониан

$$H(\varphi) = -\sum_{i=-\infty}^{i=\infty} \ln \pi_{\varphi(i)\varphi(i+1)}.$$

Функция $\mathfrak{J}(\varphi(V))$ в этом примере отлична от нуля только в том случае, когда $V = (i, i+1)$ и $\mathfrak{J}(\varphi(i), \varphi(i+1)) = -\ln \pi_{\varphi(i)\varphi(i+1)}$. Написанный гамильтониан естественно считать гамильтонианом цепи Маркова.

2. *$d$-мерная модель Изинга.* Пусть пространство $\Phi$ значений переменных $\varphi(x)$ состоит из двух точек $\Phi = (1, -1)$. Рассмотрим гамильтониан $H$, для которого $\mathfrak{J}(\varphi(V))$ равно нулю во всех случаях, кроме $V = (x, y)$, $\|x - y\| = 1$, и в этом случае $\mathfrak{J}(\varphi(V)) = \mathcal{J}\varphi(x)\varphi(y)$, т. е.

$$H = \mathcal{J} \sum_{(x,y)\,:\,\|x-y\|=1} \varphi(x)\,\varphi(y).$$

Система с таким гамильтонианом называется $d$-мерной моделью Изинга (с нулевым внешним полем). При $\mathcal{J} < 0$ она называется ферромагнитной моделью Изинга, а при $\mathcal{J} > 0$ — антиферромагнитной. Причины для таких названий будут ясны позднее. Гамильтониан $H$ трансляционно-инвариантен и допускает еще группу симметрии $\mathbb{Z}_2$, состоящую из двух элементов: $e$ — тождественного преобразования и симметрии $g$, при которой $(g\varphi)(x) = -\varphi(x)$. Эта группа и есть упомянутая выше группа «±»-симметрии.

Моделью Изинга с внешним полем $h$ называется модель с гамильтонианом

$$H = \mathcal{J} \sum_{\|x-y\|=1} \varphi(x)\,\varphi(y) + h \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \varphi(x).$$

В этом случае гамильтониан только трансляционно-инвариантен.

3. *XY-модель.* Пусть $d=2$, а пространство значений $\Phi$ представляет собой обычную окружность $S^1$. Удобно представлять себе конфигурацию $\varphi$ в виде бесконечного набора единичных векторов, выходящих из каждой точки $x$ решетки $\mathbf{Z}^d$, и под $\varphi(x)$ понимать угол, образованный вектором, выходящим из точки $x$, с положительным направлением горизонтальной оси координат, $-\pi<\varphi(x)\leqslant\pi$. Возьмем какую-либо четную функцию $U(\varphi)$, определенную на $S^1$, и рассмотрим гамильтониан

$$H=\sum_{(x,y):\,\|x-y\|=1} U(\varphi(x)-\varphi(y)).$$

Непосредственно $XY$-модель получается в случае $U(\varphi)=\cos\varphi$. Большой интерес представляет также модель, для которой $U(\varphi)$ пропорциональна логарифму $\theta$-функции, где

$$\theta(\varphi)=\sum_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2}\cdot\mathrm{e}^{in\varphi}=\mathrm{const}\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(\varphi-2\pi n)^2}.$$

Гамильтониан $H$, очевидно, трансляционно-инвариантен. Кроме того, он инвариантен относительно группы $S^1$, где для любого $g\in S^1$ имеем $(g\varphi)(x)=\varphi(x)+g$. Считается, что $g$ — число, $0\leqslant g<2\pi$, а сложение понимается по модулю $2\pi$. Рассматриваемая модель есть простейшая модель с непрерывной группой симметрии.

4. *Классический ротатор.* Пусть $d\geqslant 1$ произвольно, а пространство значений $\Phi$ есть $m$-мерная сфера, $\Phi=S^m$. Классическим ротатором называется модель с гамильтонианом $H=\mathcal{J}\sum\limits_{\|x-y\|=1}(\varphi(x),\,\varphi(y))$. Такой гамильтониан инвариантен относительно группы $O(n)$, где для любого $g\in O(n)$ полагаем $(g\varphi)(x)=g\varphi(x)$.

5. *Решетчатое поле Янга — Миллса.* Рассмотрим при $d\geqslant 2$ вместо решетки $\mathbf{Z}^d$ множество, элементами которого являются ориентированные ребра решетки $\mathbf{Z}^d$ длины 1. Каждое такое ребро $l$ задается упорядоченной парой $l=(x,\ y)$, $x$ — начальная, а $y$ — конечная точки ребра. Под точкой $-l$ будем понимать упорядоченную пару $(y,\ x)$. В качестве пространства значений

$\Phi$ возьмем группу $SO(n)$. Рассмотрим пространство конфигураций $\varphi = \{\varphi(l)\}$, удовлетворяющих условию $\varphi(-l) = \varphi^{-1}(l)$ при всех $l$. Гамильтонианом Янга — Миллса называется гамильтониан

$$H = \sum \mathrm{Tr}\,(\varphi(x_1, x_2)\,\varphi(x_2, x_3)\,\varphi(x_3, x_4)\,\varphi(x_4, x_1)),$$

где $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ — набор вершин одной двумерной ячейки исходной решетки, так что $x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$ есть обход ячейки в положительном направлении, а суммирование происходит по всем таким ячейкам. В последнем соотношении вместо Tr можно взять произвольный характер группы $SO(n)$.

Гамильтониан Янга — Миллса обладает очень богатой группой симметрии. А именно, пусть $g = \{g(x)\}$ — произвольная функция на решетке $\mathbf{Z}^d$ со значениями в группе $SO(n)$. Положим для $l = (x, y)$

$$(g\varphi)(l) = g^{-1}(x)\varphi(l)g(y).$$

Тогда каждое слагаемое в формуле для $H$, а вместе с ним и весь гамильтониан сохранятся при действии $g$. Таким образом, $H$ инвариантен относительно группы $\prod\limits_{x \in \mathbf{Z}^d} SO(n)(x)$.

Поля Янга — Миллса естественно представлять себе следующим образом. Пусть в каждой точке решетки $\mathbf{Z}^d$ имеется $n$-мерное евклидово пространство $R^n(x)$. Будем рассматривать $\varphi(l)$, $l = (x, y)$ как преобразование, устанавливающее изометрию пространств $R^n(x)$ и $R^n(y)$, а всю конфигурацию $\varphi = \{\varphi(l)\}$ как «связность» во всем множестве этих пространств. Гамильтониан $H$ не меняется, если любое пространство $R^n(x)$ подвергнуть автоморфизму, порождаемому элементом $g(x)$.

## § 3. Предельные распределения Гиббса

Пусть дан гамильтониан $H$, и для каждого $V$ на пространстве конфигураций $\varphi(V)$ определена мера, являющаяся прямым произведением меры $\chi$ на пространстве $\Phi$. Мера $\chi$ не обязательно нормированная. Для любого конечного множества $V$ рассмотрим такую конфигурацию $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$, что $H(\varphi(V)|\varphi(\mathbf{Z}^d - V))$ конечно для любой конфигурации $\varphi(V)$ и конечен интеграл

$$\Xi = \int \exp\{-H(\varphi(V)) - H(\varphi(V) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V))\} \times \prod_{s\in V} d\chi(\varphi(s)). \qquad (1.1)$$

Этот интеграл называется статистической суммой.

Определение 1.2. Условным распределением Гиббса в объеме $V$ при граничном условии $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$ называется распределение вероятностей на пространстве $\Omega(V)$ конфигураций $\varphi(V)$, плотность которого по мере $\prod\limits_{s\in V} d\chi(\varphi(s))$ имеет вид

$$p(\varphi(V) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V)) = \Xi^{-1} \exp\{-H_V(\varphi)\}, \qquad (1.2)$$
$$H_V(\varphi) = H(\varphi(V)) + H(\varphi(V) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V)).$$

В случае конечного радиуса взаимодействия или компактного пространства $\Phi$ энергия конфигурации $\varphi$ в объеме $V$ $H_V(\varphi)$ имеет смысл для любой конфигурации $\{\varphi(x),\ x\in\mathbf{Z}^d\}\in\Omega$.

Пусть $V_1 \subset V_2$ и даны конфигурации $\varphi(V_1)$, $\varphi(V_2 - V_1)$, $\varphi(\mathbf{Z}^d - V_2)$. Из определения 1.2 непосредственно вытекает:

$$p(\varphi(V_1) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V_1)) = \frac{p(\varphi(V_2) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V_2))}{p(\varphi(V_2 - V_1) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V_2))},$$

где знаменатель равен интегралу

$$\int p(\varphi(V_2) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V_2)) \prod_{s\in V_1} d\chi(\varphi(s)).$$

Заметим, что такому же равенству удовлетворяют почти всюду условные вероятности $p(\varphi(V) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V))$, отвечающие любому распределению вероятностей $P$ на $\Omega$.

Следующее определение является центральным определением всей теории.

Определение 1.3. Распределение вероятностей $P$ на пространстве $\Omega$ называется предельным распределением Гиббса, отвечающим гамильтониану $H$, если для любого конечного $V \subset \mathbf{Z}^d$

1) множество тех конфигураций $\varphi \in \Omega$, для которых конечны $H(\varphi(V)|\varphi(\mathbf{Z}^d - V))$, $\Xi$ (см. (1.1)), имеет $P$-вероятность 1;

2) с $P$-вероятностью 1 индуцированное распределением $P$ условное распределение на $\Omega(V)$ при фиксированном граничном условии $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$ абсолютно непрерывно относительно меры $\prod\limits_{s \in V} d\chi(\varphi(s))$ и его плотность относительно этой меры равна

$$p(\varphi(V)|\varphi(\mathbf{Z}^d - V)) = \\ = \frac{\exp\{-H_V(\varphi)\}}{\Xi} = \frac{\exp\{-H(\varphi(V)) - H(\varphi(V)|\varphi(\mathbf{Z}^d - V))\}}{\Xi}. \tag{1.3}$$

Иными словами, с $P$-вероятностью 1 это условное распределение является условным распределением Гиббса при граничном условии $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$.

Если $\Phi$ компактно, радиус взаимодействия конечен и все функции $\mathfrak{I}(\varphi(V))$ непрерывны, то (1.1)—(1.3) имеют смысл для всякой конфигурации $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$. В то же время общая теория вероятностей гарантирует существование условных вероятностей лишь почти всюду. Таким образом, определение 1.3) требует, чтобы выражение, определенное почти всюду, совпадало с выражением, определенным всюду. Это обстоятельство связано с тем, что теория меры всегда строится «с точностью до множеств меры 0».

Основная проблема равновесной статистической физики — описать для данного гамильтониана все отвечающие ему предельные распределения Гиббса. Эта проблема полностью решается лишь в отдельных сравнительно простых случаях. По существу, все последующее содержание книги посвящено изложению ряда известных строгих результатов, относящихся к этой проблеме.

Определения 1.2, 1.3 допускают естественное расширение. Пусть $\mu_0$ — произвольная вероятностная мера на пространстве $\Omega$. Для любого конечного множества $V$ введем условные распределения $\mu_0(\cdot|\varphi(\mathbf{Z}^d - V))$, заданные на пространстве конфигураций $\Omega(V)$. Опять-таки эти распределения определены только $\mu_0$-почти всюду.

Но мы предположим, что их можно определить всюду, и при этом для любых конечных $V_1 \subset V_2$ будет выполнено равенство

$$\int\limits_{C_2} \mu_0 \left(C_1 \mid \varphi\left(\mathbf{Z}^d - V_1\right)\right) d\mu_0 \left(\varphi\left(V_2 - V_1\right) \mid \varphi\left(\mathbf{Z}^d - V_2\right)\right) = \\ = \mu_0\left(C_1 \times C_2 \mid \varphi\left(\mathbf{Z}^d - V_2\right)\right).$$

Здесь $C_1$, $C_2$ — произвольные измеримые подмножества в пространствах $\Omega(V_1)$, $\Omega(V_2)$ соответственно, $d\mu_0(\varphi(V_2 - V_1) | \varphi(\mathbf{Z}^d - V_2))$ — условное распределение вероятностей на конфигурациях $\varphi(V_2 - V_1)$ при фиксированной конфигурации $\varphi(\mathbf{Z}^d - V_2)$.

Рассмотрим теперь вместо (1.1), (1.2)

$$\Xi\left(\varphi\left(\mathbf{Z}^d - V\right)\right) = \int \exp\left\{- H\left(\varphi\left(V\right) \mid \varphi\left(\mathbf{Z}^d - V\right)\right) - \right. \\ \left. - H\left(\varphi\left(V\right)\right)\right\} d\mu_0 \left(\varphi\left(V\right) \mid \varphi\left(\mathbf{Z}^d - V\right)\right), \quad (1.1')$$

$$p(\varphi(V) | \varphi(\mathbf{Z}^d - V)) = \Xi^{-1} \exp\{-H_V(\varphi)\} \qquad (1.2')$$

и условные распределения на пространствах конфигураций $\varphi(V)$, абсолютно непрерывные относительно $\mu_0(\cdot | \varphi(\mathbf{Z}^d - V))$, плотность которых по $\mu_0(\cdot | \varphi(\mathbf{Z}^d - V))$ равна (1.2′). Теперь естественно ввести следующее определение.

Определение 1.3′. Предельным распределением Гиббса, построенным по гамильтониану $H$ и мере $\mu_0$, называется распределение вероятностей $P$, для которого индуцированные условные вероятности почти всюду абсолютно непрерывны относительно $\mu_0(\cdot | \varphi(\mathbf{Z}^d - V))$ и плотность по $\mu_0(\cdot | \varphi(\mathbf{Z}^d - V))$ равна (1.2′).

В качестве меры $\mu_0$ можно взять предельные распределения Гиббса, отвечающие потенциалу с конечным радиусом взаимодействия. По существу, определения 1.3, 1.3′ указывают естественный способ перехода от одной вероятностной меры к другой.

*Предельные распределения Гиббса и группы симметрии гамильтониана.* Пусть $S$ — группа симметрии гамильтониана $H$. Предположим, что мера $\mu_0$ также инвариантна относительно группы $S$. В таком случае при некоторых естественных дополнительных предположениях группа $S$ действует и на множестве предельных распределений Гиббса. Таким образом, все множество предельных распределений Гиббса распадается на орбиты группы $S$.

*Периодические граничные условия.* Во многих задачах часто возникает потребность рассматривать распределения Гиббса с периодическими граничными условиями. Покажем, как строятся такие распределения. Возьмем $d$-мерный прямоугольник $V$, одной из вершин которого служит точка $0=(0, \ldots, 0)$ решетки. Тогда $V$ можно рассматривать как фундаментальный прямоугольник некоторой подгруппы $\mathbf{Z}_0^d \subset \mathbf{Z}^d$ конечного индекса. Рассмотрим периодические конфигурации $\varphi=\{\varphi(x),\ x \in \mathbf{Z}^d\}$ с периодом $V$. Для этих конфигураций $T^t\varphi=\varphi$ для любого $t \in \mathbf{Z}_0^d$. Потенциал $U(\varphi(x);\ \varphi(y),\ y \neq x)$ в случае $\mathbf{Z}_0^d$-периодической конфигурации $\varphi$ будет $\mathbf{Z}_0^d$-периодической функцией на решетке. Распределением Гиббса в объеме $V$ с периодическими граничными условиями называется распределение вероятностей на пространстве $\mathbf{Z}_0^d$-периодических конфигураций, для которого плотность по мере $\prod_{s \in V} d\chi(\varphi(s))$ равна

$$\Xi^{-1} \exp\left\{-\sum_{x \in V} U(\varphi(x);\ \varphi(y),\ y \neq x)\right\},$$

$\Xi$ — нормирующий множитель:

$$\Xi=\int \exp\left\{-\sum_{x \in V} U(\varphi(x);\ \varphi(y),\ y \neq x)\right\} \prod_{s \in V} d\chi(\varphi(s)).$$

Предполагается, что $\Xi<\infty$.

*Свободные граничные условия.* Часто рассматриваются также распределения Гиббса в объеме $V$ при так называемых свободных граничных условиях. Под этим подразумеваются распределения вероятностей на пространствах $\Omega(V)$, плотность которых по мере $\prod_{s \in V} d\chi(\varphi(s))$ имеет вид $\Xi^{-1} \exp\{-H(\varphi(V))\}$.

Предельные распределения Гиббса строятся с помощью гамильтонианов или порождающих их потенциалов. Таким образом, гамильтонианы естественно рассматривать как параметры, задающие предельные распределения Гиббса. Эти параметры достаточно просты, и задача теории предельных гиббсовских распределений может быть сформулирована как задача изучения свойств строящихся вероятностных распределений как функций от гамильтонианов.

## § 4. Примеры

1. *Цепи Маркова как предельные распределения Гиббса.* Гамильтониан, отвечающий цепи Маркова, был уже описан ранее. Возьмем в качестве меры $\chi$ меру Бернулли, при которой вероятность любого значения $\varphi(x)$ равна $1/r$ ($r$ — общее число состояний). Тогда стационарная цепь Маркова будет предельным распределением Гиббса. Обычную эргодическую теорему Маркова можно переформулировать так, что из нее будет следовать единственность предельного распределения Гиббса в этом случае.

2. *Системы с конечным радиусом взаимодействия как марковские поля с многомерным временем.* Если радиус взаимодействия гамильтониана $H$ конечен и $\Phi$ — конечное множество, то условные вероятности (1.2) определены всюду. Формулы (1.2) показывают, что условная вероятность конфигурации $\varphi(V)$ зависит не от всей конфигурации $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$, а лишь от конфигурации в $R$-окрестности границы, $R$ — радиус взаимодействия. Таким образом, предельные распределения Гиббса для таких гамильтонианов можно рассматривать как марковские поля памяти $R$ с многомерным временем. Теория таких полей при $d > 1$ существенно отличается от теории при $d = 1$, т. е. от теории сложных цепей Маркова памяти $R$. В следующей главе будет показано, что при $d > 1$ во многих естественных случаях одному гамильтониану отвечает несколько предельных распределений Гиббса.

3. *Гауссовские стационарные поля как предельные распределения Гиббса.* Рассмотрим гауссовское стационарное случайное поле на $d$-мерной решетке $\mathbf{Z}^d$. Пространство реализаций $\Omega$ такого поля с принятой здесь точки зрения состоит из бесконечных конфигураций $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbf{Z}^d\}$, где отдельная переменная $\varphi(x)$ принимает произвольные действительные значения. Гауссовское распределение вероятностей $P_G$ в $\Omega$ — это

такое распределение, при котором любой набор $\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_r)\}$ подчинен $r$-мерному гауссовскому распределению. Мы предположим, что $E\varphi(x)=0$, $E\varphi(x)\,\varphi(y)=b(x-y)=\int \exp\{2\pi i(\lambda,\ \ x-y)\}\,\rho(\lambda)\,d\lambda$. Функция $\rho(\lambda)$ есть спектральная плотность гауссовского распределения $P_G$. Она неотрицательна, и $\int \rho(\lambda)\,d\lambda<\infty$.

Предположим, что $1/\rho(\lambda)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, т. е.

$$\frac{1}{\rho(\lambda)}=\sum a(x)\exp\{-2\pi i(\lambda, x)\},$$

и

$$A=\sum_{x\in \mathbf{Z}^d}|a(x)|<\infty.$$

Теорема 1.1. Гауссовское распределение $P_G$ является предельным распределением Гиббса, отвечающим гамильтониану

$$H=\frac{1}{2}\sum a(x-y)\,\varphi(x)\,\varphi(y), \tag{1.4}$$

причем мерой $\chi$ служит лебегова мера на прямой.

Доказательство. Фиксируем конечное подмножество $V\subset \mathbf{Z}^d$ и для каждого $t\in \mathbf{Z}^d$ рассмотрим ряд $\psi(t)=\sum\limits_{y\in \mathbf{Z}^d-V} a(t-y)\,\varphi(y)$. Этот ряд сходится в $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{S}, P_G)$, поскольку формальное выражение для

$$E\psi^2(t)=\sum_{y_1, y_2\in \mathbf{Z}^d-V} a(t-y_1)\,a(t-y_2)\,b(y_1-y_2)$$

конечно, так как

$$\sum_{y_1, y_2\in \mathbf{Z}^d}|a(t-y_1)\,a(t-y_2)\,b(y_1-y_2)|\leqslant$$
$$\leqslant b(0)\sum_{y_1, y_2\in \mathbf{Z}^d}|a(t-y_1)|\,|a(t-y_2)|\leqslant b(0)\,A^2.$$

Следовательно, $\psi(t)$ можно рассматривать как гауссовские случайные величины, конечные с вероятностью 1. Заметим, что в гауссовском случае из условия

$\sum |a(x)| < \infty$ вытекает, что ряды, определяющие $\psi(t)$, сходятся с вероятностью 1.

Для предельного распределения Гиббса, отвечающего гамильтониану (1.4), плотность условного распределения $\varphi(V)$ при фиксированных $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d - V$ имеет вид

$$\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{x, y\in V} a(x-y)\,\varphi(x)\,\varphi(y) + 2\sum_{x\in V}\varphi(x)\,\psi(x)\right]\right\}}{\Xi(\psi)} =$$

$$= \mathrm{const}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B\left(\varphi + B^{-1}\psi\right),\ \left(\varphi + B^{-1}\psi\right)\right)\right\}, \qquad (1.5)$$

т. е. является многомерным гауссовским распределением с вектором математических ожиданий $-B^{-1}\psi$, матрица $B = \|a(x-y)\|_{x,\, y\in V}$. Мы покажем, что условное распределение переменных $\varphi(x)$, $x \in V$ при фиксированных $\varphi(y)$, $y \in \mathbf{Z}^d - V$, отвечающее гауссовскому распределению $P_G$, имеет вид (1.5).

Покажем вначале, что случайные величины $\varphi(x) + (B^{-1}\psi)(x)$, $x \in V$ независимы (в смысле распределения $P_G$) от всех случайных величин $\varphi(y)$, $y \in \mathbf{Z}^d - V$. Так как $B$ — невырожденная матрица, то достаточно проверить независимость

$$(B\varphi)(x) + \psi(x) = \sum_{t\in V} a(x-t)\,\varphi(t) + \\ + \sum_{t\in \mathbf{Z}^d - V} a(x-t)\,\varphi(t) = \sum_{t\in \mathbf{Z}^d} a(x-t)\,\varphi(t).$$

Имеем для любого $y \in \mathbf{Z}^d - V$

$$E\left(\sum a(x-t)\,\varphi(t)\ \ \varphi(y)\right) = \sum_t a(x-t)\,b(t-y).$$

Последний ряд абсолютно сходится и, следовательно, он равен $\delta_{xy}$. Так как $x \in V$, $y \in \mathbf{Z}^d - V$, то $\delta_{xy} = 0$.

Из доказанного утверждения вытекает, что вектор $-B^{-1}\psi$ есть вектор условных математических ожиданий случайных величин $\varphi(x)$, $x \in V$ при фиксированных $\varphi(y)$, $y \in \mathbf{Z}^d - V$.

Остается показать, что матрица дисперсий вектора

$$\varphi' = \{\varphi(x) + (B^{-1}\psi)(x),\quad x \in V\}$$

есть $B^{-1}$. Пусть

$$\varphi'' = B\varphi' = \left\{\sum_{y\in V} a(x-y)\,\varphi(y) + \psi(x),\ x\in V\right\} = \\ = \left\{\sum_{y\in \mathbf{Z}^d} a(x-y)\,\varphi(y),\ x\in V\right\}.$$

Требуемое утверждение эквивалентно тому, что матрица дисперсий вектора $\varphi''$ равна $B$. Имеем теперь

$$E\varphi''(x_1)\,\varphi''(x_2) = \\ = \sum_{y_1, y_2\in \mathbf{Z}^d} a(x_1-y_1)\,b(y_1-y_2)\,a(y_2-x_2) = \\ = \sum_{y_1\in \mathbf{Z}^d} a(x_1-y_1)\,\delta_{y_1x_2} = a(x_1-x_2).$$

Ряды в последнем выражении сходятся абсолютно, поэтому все преобразования законны. Итак, показано, что матрица дисперсий вектора $\varphi''$ есть $B$ и, тем самым, матрица дисперсий вектора $\varphi'$ есть $B^{-1}$. Теорема доказана.

Рассмотренный пример поучителен во многих отношениях. Во-первых, (1.5) имеет смысл не для всех граничных условий $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$, а только для тех, где все $\psi(x)$, $x\in V$ конечны. Во-вторых, во многих задачах квантовой теории поля и статистической механики встречаются квадратичные гамильтонианы (гамильтонианы свободных полей), и переменные $\varphi(x)$ принимают произвольные действительные значения. Простейшим примером такого гамильтониана служит гамильтониан $H = \int\limits_{R^d} \left((\nabla\varphi)^2 + m_0^2\varphi^2\right) dx$. Его решетчатый аналог в случае решетки с шагом $h$ имеет вид

$$H = \sum_{x\in h\cdot \mathbf{Z}^d} \left[\sum_{i=1}^{d} \frac{(\varphi(x_1, \ldots, x_i+h, \ldots, x_d) - \varphi(x_1, \ldots, x_d))^2}{h^2} + \right. \\ \left. + m_0^2\varphi^2(x)\right] h^d.$$

Здесь внешнее суммирование происходит по всем точкам $x = (x_1, \ldots, x_d)$ вида $x_i = n_i h$, $n_i$ — целые, $-\infty < n_i < \infty$. В решетчатом случае, как было показано, среди отвечающих таким гамильтонианам предельных распределений Гиббса находятся стационарные гауссовские распределения.

4. *Решетчатые модели двумерной квантовой теории поля.* Пусть $d = 2$. Рассмотрим, как и в конце предыдущего примера, решетку $h\mathbf{Z}^2$ с шагом $h$. Здесь мы воспользуемся способом построения предельного распределения Гиббса, описанным в определении 1.3′. А именно, возьмем в качестве меры $\mu_0$ гауссовское стационарное распределение с нулевым средним, отвечающее гамильтониану

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_x \left[(\varphi(x_1 + h, x_2) - \varphi(x_1, x_2))^2 + \right.$$
$$\left. + (\varphi(x_1, x_2 + h) - \varphi(x_1, x_2))^2 + m_0^2 h^2 \varphi^2(x_1, x_2)\right].$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$ пробегает точки решетки $h\mathbf{Z}^2$. Гамильтониан $H_0$ имеет радиус взаимодействия $h$, и поэтому отвечающие ему условные распределения $\mu_0(\cdot|\varphi(\mathbf{Z}^d - V))$ определены всюду и зависят только от точек множества $\mathbf{Z}^d - V$, отстоящих от $V$ на расстояние, не превосходящее $h$. Поэтому $\mu_0$ можно использовать для построения с помощью него предельных распределений Гиббса.

Отдельная случайная величина $\varphi(x)$ подчинена гауссовскому распределению с нулевым средним и дисперсией $\sigma_h \sim \text{const} \cdot \ln h^{-1}$. Для любого $p > 1$ обозначим через $G_p(t) = t^p + \ldots$ обычный полином Эрмита степени $p$, старший коэффициент которого равен единице. Через $G_p^{(h)}(t)$ обозначим полином Эрмита $\sigma_h^{p/2} G_p(t/\sqrt{\sigma_h}) = t^p + \ldots$ Введем гамильтониан

$$H^{(\text{int})} = \sum_{p=1}^{2r} a_p \sum_{x \in h\mathbf{Z}^2} G_p^{(h)}(\varphi(x)),$$

$a_p$ — постоянные, $a_{2r} > 0$. В квантовой теории поля часто пользуются обозначениями Вика $G_p^{(h)}(\varphi(x)) = {:}\varphi^p(x){:}_{\sigma_h}$. Символ $:\,:_{\sigma_h}$ означает, что коэффициенты полиномов Эрмита строятся по гауссовскому распределению с дисперсией $\sigma_h$. (Более подробно свойства полиномов Эрмита обсуждаются в гл. 4.)

При исследовании моделей двумерной квантовой теории поля естественно возникают предельные распределения Гиббса, строящиеся при помощи свободного поля $\mu_0$ и гамильтониана взаимодействия $H^{(\mathrm{int})}$. Если $a_p=0$ при нечетных $p$, то гамильтониан обладает «$\pm$»-симметрией. Можно было бы строить сразу предельные распределения Гиббса, беря в качестве $\chi$ прямое произведение мер Лебега на прямой, а в качестве гамильтониана

$$H=H_0+H^{(\mathrm{int})}.$$

Формальный предельный переход $h\to 0$ приводит в этом случае к гамильтонианам непрерывных полей вида

$$H=\iint\left((\nabla\varphi,\,\nabla\varphi)+m_0^2\varphi^2+\lambda:P(\varphi):\right)dx_1dx_2,$$

$$P(\varphi)=\sum_{p=1}^{2r}a_p\varphi^p.$$

Коэффициент $m_0$ называется массой свободного или голого поля, $\lambda$ — константа взаимодействия. Свойства предельных распределений Гиббса зависят от безразмерного параметра $\lambda/m_0^2$.

5. *Преобразование Березинского XY-модели.* Пусть $V$ — прямоугольник на плоскости. Рассмотрим для $XY$-модели с потенциалом $U$ распределение Гиббса в объеме $V$ со свободными граничными условиями и с мерой $\chi_V$ в виде прямого произведения мер Хаара. Статистическая сумма в этом случае имеет вид

$$\Xi=\int\prod_{\|x'-x''\|=1}\exp\{-U(\varphi(x')-\varphi(x''))\}\prod_{x\in V}d\varphi(x) \qquad (1.6)$$

Существенный момент — форма записи последнего произведения. Будем считать, что произведение берется по неупорядоченным парам $(x',\,x'')$, $\|x'-x''\|=1$, определяющим ребро решетки. Предположим, что для каждого такого ребра выбрана ориентация, и ориентированное ребро обозначим $l$, т. е. $l=(x',\,x'')$ и теперь $x'$ — начальная точка ребра, а $x''$ — конечная точка ребра. Через $-l$ обозначим ориентированное ребро $(x'',\,x')$. Теперь произведение $\prod\limits_{\|x'-x''\|=1}\exp\{-U(\varphi(x')-\varphi(x''))\}$

можно рассматривать следующим образом: выбран набор $\mathscr{L}$ ориентированных ребер $l = (x', x'')$, причем в набор $\mathscr{L}$ из каждой пары $l$, $-l$ входит одно и только одно ребро, произведение берется по ребрам из $\mathscr{L}$, а в множителе $\exp\{-U(\varphi(x') - \varphi(x''))\}$ вначале стоит начальная точка ребра, а затем — конечная точка.

Так как $U$ — непрерывная функция на окружности, то $\exp\{-U\}$ — также непрерывная функция, и мы можем написать

$$\exp\{-U(\varphi)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{2\pi i n\varphi\}.$$

Подставим это разложение в (1.6) и поменяем местами порядок суммирования и умножения, тогда

$$\begin{aligned}\Xi &= \int \prod_{\|x'-x''\|=1} \exp\{-U(\varphi(x') - \varphi(x''))\} \prod_{x\in V} d\varphi(x) = \\ &= \int \prod_{x\in V} d\varphi(x) \prod_{l\in\mathscr{L}} \sum_n c_n \exp\{2\pi i n(\varphi(x') - \varphi(x''))\} = \\ &= \sum \prod_{l\in\mathscr{L}} c_{n(l)} \int \prod_{x\in V} d\varphi(x) \exp\{2\pi i \varphi(x)\,\Delta n(x)\}. \qquad (1.7)\end{aligned}$$

Естественно в сомножителе $\sum\limits_n c_n \exp\{2\pi i n(\varphi(x') - \varphi(x''))\}$ индекс суммирования считать зависящим от $l$ и внешнее суммирование производить по всевозможным целочисленным функциям $n(l)$, определенным на $\mathscr{L}$. Множитель $\Delta n(x)$ есть сумма слагаемых по всем ребрам $l \in \mathscr{L}$, содержащим $x$ в качестве вершины, причем слагаемое входит со знаком $+$, если $x$ — начальная точка ребра, и со знаком $-$ в противоположном случае.

Любую функцию $n(l)$, определенную на $\mathscr{L}$, мы можем продолжить на множество $\mathscr{L}^{(0)}$ всех ориентированных ребер решетки в прямоугольнике $V$, положив для $l \in \mathscr{L}$ $n(l) = -n(-l)$. Теперь $\Delta n(x)$ примет особенно простой вид:

$$\Delta n(x) = \sum n(l), \qquad (1.8)$$

где суммирование происходит по четырем ребрам $l \in \mathscr{L}^{(0)}$, имеющим $x$ своей начальной точкой.

Произведем интегрирование в (1.7). Тогда, если $\Delta n(x) \neq 0$ хотя бы для одного $x$, то интеграл равен 0. В противном случае он равен 1. В результате получим

$$\Xi = \sum_{\substack{\Delta n(x)=0 \\ \text{для всех} \\ x\in V}} \prod_{l\in\mathscr{L}} c_{n(l)}. \tag{1.9}$$

Иными словами, в (1.9) стоит суммирование по всевозможным функциям $n(l)$, определенным на множестве ориентированных ребер $l \in \mathscr{L}^{(0)}$, удовлетворяющих условию $\Delta n(x) = 0$ для всех $x \in V$, где $\Delta n(x)$ см. (1.8), а каждой функции $n(l)$ сопоставлен вес $\prod\limits_{l\in\mathscr{L}^{(0)}} c_{n(l)}$. Из четности $U$ вытекает, что $e^{-U}$ также четна и поэтому $c_{n(-l)} = c_{n(l)}$. В результате

$$\prod_{l\in\mathscr{L}} c_{n(l)} = \sqrt{\prod_{l\in\mathscr{L}^{(0)}} c_{n(l)}}.$$

Если все $c_{n(l)} > 0$, как, например, в случае, когда $U$ есть логарифм $\theta$-функции, то

$$\sqrt{\prod_{l\in\mathscr{L}^{(0)}} c_{n(l)}} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{l\in\mathscr{L}^{(0)}} \ln c_{n(l)}\right\}.$$

Введем решетку $\widetilde{\mathbf{Z}}^2$, двойственную к $\mathbf{Z}^2$, точки которой имеют вид $\left(x_1+\frac{1}{2},\ x_2+\frac{1}{2}\right)$, $x_1$, $x_2$ — целые, $-\infty < x_1,\ x_2 < \infty$.

Лемма. Пусть $\widetilde{V}$ — множество точек решетки $\widetilde{\mathbf{Z}}^2$, отстоящих от $V$ на расстояние, не превосходящее 1. Тогда для всякой целочисленной функции $n(l)$, определенной на $\mathscr{L}^{(0)}$, для которой

1) $n(l) = -n(-l)$,

2) $\Delta n(x) = \sum\limits_{l=(x,y)} n(l) = 0$,

найдется функция $m(\widetilde{x})$, определенная на $\widetilde{V}$ и такая, что $n(l) = m(\widetilde{x}') - m(\widetilde{x}'')$, где $\widetilde{x}'$, $\widetilde{x}''$ — центры ячеек решетки $\mathbf{Z}^2$, для которых ориентированное ребро $l$ служит общей границей, причем $x'$ находится слева, а $x''$ — справа от $l$. Функция $m(\widetilde{x})$ определена однозначно, с точностью до константы.

Доказательство. Утверждение леммы легко получить с помощью теории когомологий. Мы приведем прямое доказательство. Возьмем произвольное ребро $l \in \mathscr{L}^{(0)}$ и отвечающие ему левую и правую точки $\widetilde{x}'$, $\widetilde{x}''$. Возьмем $m(\widetilde{x}')$ произвольным и положим $m(\widetilde{x}'') = m(\widetilde{x}') - n(l)$. Далее мы можем таким же образом распространить определение $m(\widetilde{x})$ еще на одну вершину, отстоящую от $\widetilde{x}'$, $\widetilde{x}''$ на расстояние 1, и т. д. В силу свойств 1), 2) это определение не будет зависеть от пути, по которому строится продолжение. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что имеется взаимно однозначное соответствие между функциями $n(l)$, удовлетворяющими условиям 1), 2) леммы, и функциями $m(\widetilde{x})$, $\widetilde{x} \in V$, для которых $\sum\limits_{\widetilde{x} \in V} m(\widetilde{x}) = 0$. Теперь (1.6) принимает окончательный вид

$$\Xi = \sum_{\substack{m(\widetilde{x}), \\ \sum\limits_{\widetilde{x} \in \widetilde{V}} m(\widetilde{x}) = 0}} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum \ln c_{m(\widetilde{x}') - m(\widetilde{x}'')}\right\}. \qquad (1.10)$$

Рассмотрим модель, в которой переменные $\varphi(x)$ определены на двойственной решетке $\widetilde{\mathbf{Z}}^2$ и принимают целые значения,

$$\mathfrak{J}(\varphi(\widetilde{x}'), \varphi(\widetilde{x}'')) = -\frac{1}{2} \ln c_{\varphi(\widetilde{x}') - \varphi(\widetilde{x}'')}.$$

Тогда (1.10) означает, что исходная статистическая сумма $\Xi$ модели есть статистическая сумма для модели с гамильтонианом $\widetilde{H}(\varphi) = \sum \mathfrak{J}(\varphi(\widetilde{x}'), \varphi(\widetilde{x}''))$ и дополнительным условием $\sum\limits_{\widetilde{x}' \in V} \varphi(\widetilde{x}') = 0$. Если в качестве исходного потенциала взаимодействия взять минус логарифм $\theta$-функции, то $\mathfrak{J}(\varphi(\widetilde{x}'), \varphi(\widetilde{x}'')) = C(\varphi(\widetilde{x}') - \varphi(\widetilde{x}''))^2$. Построенную модель иногда называют целочисленной моделью Изинга. В качестве меры $\chi$ здесь естественно взять меру, которая на любой функции $\varphi(\widetilde{x})$ равна 1. Построенную модель естественно рассматривать как двойственную к исходной $XY$-модели. Можно установить соответствие и между конечномерными распределениями исходной и двойственной модели.

## § 5. Существование предельных распределений Гиббса

Первая проблема, которая возникает в связи с определениями §§ 1—3, есть проблема существования: для каких гамильтонианов существует хотя бы одно предельное распределение Гиббса. Мы начнем с первого простого результата, относящегося к этой проблеме.

Пусть $\Phi$ — метрический компакт. Тогда по теореме Тихонова $\Omega$ — также метрический компакт в топологии прямого произведения. Предположим, что для любого конечного множества $V \subset \mathbf{Z}^d$ функция $H_V(\varphi) = H(\varphi(V)) + H(\varphi(V)|\varphi(\mathbf{Z}^d - V))$ представляет собой непрерывную функцию на $\Omega$, а мера $\chi$ (см. определение 1.2) конечна.

Теорема 1.2. При описанных условиях для гамильтониана $H$ существует, по крайней мере, одно предельное распределение Гиббса.

Доказательство. Возьмем произвольную возрастающую последовательность конечных подмножеств $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots$, $\bigcup\limits_n V_n = \mathbf{Z}^d$ и произвольную последовательность граничных условий $\varphi(\mathbf{Z}^d - V_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Выбранные последовательности подмножеств $V_k$ и конфигураций $\varphi(\mathbf{Z}^d - V_k)$ определяют последовательность вероятностных мер $P_k$ на пространстве $\Omega$

$$P_k(d\varphi(V_k)\,|\,\varphi(\mathbf{Z}^d - V_k)) = p(\varphi(V_k)\,|\,\varphi(\mathbf{Z}^d - V_k)) \prod_{x \in V_k} d\chi(\varphi(x)),$$

$$P_k(\varphi(\mathbf{Z}^d - V_k)) = 1,$$

где $p$ дается равенством (1.2). В силу компактности $\Omega$ последовательность $P_k$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому вероятностному распределению $P$ на $\Omega$. Для простоты будем считать, что сама последовательность $P_k$ слабо сходится к $P$. Докажем, что $P$ есть предельное распределение Гиббса для гамильтониана $H$.

Достаточно проверить, что для любых двух конечных непересекающихся подмножеств $V$, $W$ и для любых непрерывных ограниченных функций $f(\varphi(V))$, $g(\varphi(W))$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\Omega} f(\varphi(V))\, g(\varphi(W))\, dP(\varphi) =$$
$$= \int g(\varphi(W))\, dP(\varphi) \left[\int f(\varphi(V))\, p(\varphi(V) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V)) \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{x \in V} d\chi(\varphi(x))\right].$$

Аналогичное равенство справедливо для распределений $P_k$, если $k$ настолько велико, что $V_k \supset V$, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} f(\varphi(V))\, g(\varphi(W))\, dP_k(\varphi) = \int g(\varphi(W))\, dP_k(\varphi) \times$$
$$\times \left[\int f(\varphi(V))\, p\big(\varphi(V) \mid \varphi\big(\mathbf{Z}^d - V\big)\big)\right] \prod_{x \in V} d\chi(\varphi(x)).$$

Интеграл $\int f(\varphi(V)) p(\varphi(V) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - V))] \prod\limits_{x \in V} d\chi(\varphi(x))$ есть непрерывная функция от $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$ в силу непрерывности $H_V(\varphi)$. Поэтому, переходя в обеих частях равенств к пределу при $k \to \infty$, получим нужное утверждение. Теорема доказана.

Перейдем теперь к теореме существования предельных распределений Гиббса в случае, когда пространство $\Phi$ значений переменных $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$ есть сепарабельное полное метрическое пространство. Тогда для любого конечного $V \subset \mathbf{Z}^d$ пространство $\Omega(V)$ конечных конфигураций $\varphi(V) = \{\varphi(x),\ x \in V\}$ также, очевидно, представляет собой полное сепарабельное метрическое пространство.

Определение 1.4. Пусть $M$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Непрерывная функция $h$ на $M$ называется компактной, если для любого $t$, $-\infty < t < \infty$, множество $\{m\colon\ h(m) \leqslant t\}$ есть компакт в $M$.

Определение 1.5. Семейство вероятностных мер $\{P\}$ на $M$ называется относительно компактным, если из всякой последовательности $\{P_n\} \subset \{P\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Следующая теорема представляет собой переформулировку известного критерия Прохорова относительной компактности.

Теорема Прохорова. Семейство вероятностных мер $\{P\}$ относительно компактно, если найдется непрерывная компактная неотрицательная функция $h(m)$, $m \in M$ и константа $C$, для которых $\int\limits_M h(m) \times dP(m) < C$ при всех $P \in \{P\}$.

Возвращаясь к пространству $\Omega$ бесконечных конфигураций $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbf{Z}^d\}$, фиксируем растущую последовательность конечных подмножеств $V_p \subset \mathbf{Z}^d$, $V_p \subset V_{p+1}$, $\bigcup\limits_p V_p = \mathbf{Z}^d$. Если $\Phi$ — полное сепарабельное метрическое пространство, то $\Omega$ также можно превратить в полное сепарабельное метрическое пространство, положив для любых

$$\bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}(x),\ x \in \mathbf{Z}^d\}, \qquad \bar{\bar{\varphi}} = \{\bar{\bar{\varphi}}(x),\ x \in \mathbf{Z}^d\}$$

из $\Omega$

$$d(\bar{\varphi}, \bar{\bar{\varphi}}) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \frac{1}{2^{\|x\|}} \frac{d(\bar{\varphi}(x), \bar{\bar{\varphi}}(x))}{1 + d(\bar{\varphi}(x), \bar{\bar{\varphi}}(x))}.$$

Поэтому можно говорить о слабой сходимости вероятностных мер на $\Omega$.

Нетрудно показать, что последовательность вероятностных мер $\{P_n\}$ на $\Omega$ слабо сходится, если и только если для всех $V_p$, $p \geqslant 1$, ограничение $P_n$ на $\Omega(V_p)$ есть слабо сходящаяся последовательность вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве $\Omega(V_p)$. Положим $P^{(p)} = \lim\limits_{n \to \infty} P_n | \Omega(V_p)$. Очевидно, что меры $P^{(p)}$ согласованы и по теореме Колмогорова определяют единственную меру $\bar{P}$ на всей $\sigma$-алгебре $\mathfrak{S}$ пространства $\Omega$, ограничение $\bar{P}$ на $\Omega(V_p)$ совпадает с $P^{(p)}$. Ясно также, что предел $\bar{P}$ не зависит от выбора последовательности $\{V_p\}$.

Теорема 1.3. Семейство вероятностных мер $\{P\}$ на $\Omega$ будет относительно компактным, если для каждого $x \in \mathbf{Z}^d$ найдутся постоянная $C_x > 0$ и неотрицательная непрерывная компактная функция $h_x(\varphi)$ на $\Phi$, такие, что

$$\int_{\Omega} h_x(\varphi(x))\, dP < C_x$$

для любого $P \in \{P\}$.

Доказательство. Действительно, функция $h_{V_p}(\varphi(V_p)) = \max_{x \in V_p} h_x(\varphi(x))$ — неотрицательная компактная функция на пространстве $\Omega(V_p)$ и $\int h_{V_p} dP \leqslant \leqslant \sum_{x \in V_p} C_x$. Далее следует применить теорему Прохорова. Теорема доказана.

Перейдем теперь непосредственно к формулировке условий теоремы существования предельных распределений Гиббса.

Предположим, что для гамильтониана $H$ можно найти:

1) компактную неотрицательную функцию $h$ на пространстве $\Phi$;

2) набор чисел $\{c(x, y),\ x \in \mathbf{Z}^d,\ y \in \mathbf{Z}^d\}$ и константу $c$, $0 < c < 1$, $\sum_y |c(x, y)| \leqslant c$ при всех $x \in \mathbf{Z}^d$, и число $K > 0$, такие, что для конечного $V \subset \mathbf{Z}^d$ и любого граничного условия $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$, такого, что $\max_{x \in V} \sum_{y \in \mathbf{Z}^d - V} |c(x, y)|\, h(\varphi(y)) < \infty$, условное распределение Гиббса (см. определение 1.2) определено и

$$\int h(\varphi(x))\, p\left(\varphi(V) \mid \varphi\left(\mathbf{Z}^d - V\right)\right) \prod_{y \in V} d\chi(\varphi(y)) \leqslant$$
$$\leqslant K + \sum_{y:\ y \neq x} c(x, y)\, h(\varphi(y)). \qquad (1.11)$$

Теорема Добрушина. Пусть выполнены сформулированные выше условия и, дополнительно,

3) для любого $x \in \mathbf{Z}^d$ и любой непрерывной ограниченной функции $g(\varphi)$ на $\Phi$ найдутся последовательность конечных подмножеств $W_n \subset \mathbf{Z}^d$, $\bigcup_n W_n = \mathbf{Z}^d - - \{x\}$, набор неотрицательных чисел $d^{(n)}(x, y)$, $y \neq x$,

$\sum\limits_{y\in \mathbf{Z}^d} d^{(n)}(x, y) \leqslant D^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность непрерывных ограниченных функций $f_n(\varphi(W_n))$, таких, что

$$\left| \int g(\varphi(x))\, p\left(\varphi(x) \,|\, \varphi\left(\mathbf{Z}^d - \{x\}\right)\right) d\chi(\varphi(x)) - f_n(\varphi(W_n)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant D^{(n)} + \sum_{y \neq x} d^{(n)}(x, y)\, h(\varphi(y))$$

для любого граничного условия $\varphi\left(\mathbf{Z}^d - \{x\}\right)$, $\sum\limits_{y\neq x} |c(x, y)|\, h(\varphi(y)) < \infty$.

Тогда для гамильтониана $H$ множество предельных распределений Гиббса не пусто.

Доказательство. Фиксируем растущую последовательность подмножеств $V_n \subset \mathbf{Z}^d$ и граничных условий $\overline{\varphi}(\mathbf{Z}^d - V_n)$, таких, что $h(\overline{\varphi}(y)) \leqslant A$, $y \in \mathbf{Z}^d - V_n$ при некоторой постоянной $A$. Построим последовательность вероятностных мер $P_n$ на $\Omega$, где

$$P_n\left(\overline{\varphi}\left(\mathbf{Z}^d - V_n\right)\right) = 1, \quad P\left(d\varphi(V_n) \,|\, \overline{\varphi}\left(\mathbf{Z}^d - V_n\right)\right) =$$
$$= p\left(\varphi\left(V^{(n)}\right) \,|\, \overline{\varphi}\left(\mathbf{Z}^d - V_n\right)\right) \prod_{y\in V_n} d\chi(\varphi(y))$$

(см. (1.3)). Покажем вначале, что $P_n$ есть слабо компактная последовательность. Это вытекает из приведенной выше теоремы и из следующей леммы.

Лемма. $\sup\limits_n \int h(\varphi(x))\, dP_n \leqslant \dfrac{K}{1-c} + \dfrac{A}{1-c} = K_0$.

Доказательство. Покажем, что для любого $n$

$$m = \max_{x\in V_n} \int h(\varphi(x))\, p(\varphi(V_n) \,|\, \overline{\varphi}(\mathbf{Z}^d - V_n)) \prod_{y\in V_n} d\chi(\varphi(y)) \leqslant K_0.$$

Если бы мы знали, что $m < \infty$, то из (1.11)

$$\int h(\varphi(x))\, p\left(\varphi(x) \,|\, \varphi(V_n - \{x\});\right.$$

$$\left.\overline{\varphi}\left(\mathbf{Z}^d - V_n\right)\right) d\chi(\varphi(x)) \leqslant K + \sum c(x, y)\, h\, \varphi(y) + cA.$$

Возьмем то $x$, при котором достигается $m$. Тогда, интегрируя обе части последнего неравенства по распределению $P_n$, получим, что число $m$ удовлетворяет неравенству

$$m \leqslant K + \Sigma c(x,\ y)m + cA \leqslant K + mc + cA$$

или $m \leqslant \dfrac{K+cA}{1-c} \leqslant K_0$.

Поскольку неизвестно, что $m < \infty$, придется эти рассуждения несколько усовершенствовать. Мы покажем, что всякая неотрицательная функция $h(\varphi(x))$, для которой

$$\int h(\varphi(x))\, p\big(\varphi(x) \,|\, \varphi(V_n - x),\ \varphi(\mathbf{Z}^d - V_n)\big)\, d\chi(\varphi(x)) \leqslant \\ \leqslant \sum_{y \neq x} c(x,\ y)\, h(y) + K,$$

интегрируема по мере $P_n$ и ее интеграл не превосходит $(K+A)(1-c)^{-1}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ введем множество $\mathscr{E}_\varepsilon$ измеримых функций $e(\varphi(V_n))$, таких, что $0 \leqslant e(\varphi(V_n)) \leqslant 1$, $\int e(\varphi(V_n))\, dP_n \geqslant 1 - \varepsilon$. Положим

$$G_\varepsilon = \inf_{e \in \mathscr{E}_\varepsilon} \max_{x \in V_n} \int h(\varphi(x))\, e(\varphi(V_n))\, dP_n.$$

Ясно, что $G_\varepsilon < \infty$. Мы покажем, что $G_\varepsilon \leqslant (K+A) \times \times (1-c)^{-1}$, откуда, по лемме Фату, будет следовать требуемое утверждение.

Возьмем $\delta > 0$ и найдем такую функцию $e_0 \in \mathscr{E}_\varepsilon$, что

$$\max_{x \in V_n} \int h(\varphi(x))\, e_0(\varphi(V_n))\, dP_n \leqslant G_\varepsilon (1 + \delta)$$

и хотя бы для одной точки $x_0 \in V_n$

$$\int h(\varphi(x_0))\, e_0(\varphi(V_n))\, dP_n \geqslant G_\varepsilon (1 - \delta).$$

Выберем $e_0$ так, чтобы мощность множества точек $x_0$, удовлетворяющих последнему неравенству, была минимальна. Это возможно, поскольку $V_n$ — конечное множество.

Положим $\tilde{e}_0(\varphi(V_n)) = \tilde{e}_0(\varphi(V_n - x_0)) = \int e_0(\varphi(V_n)) \times \times p\big(\varphi(x_0) \,\big|\, \varphi(V_n - x_0);\ \varphi(\mathbf{Z}^d - V_n)\big) d\chi(\varphi(x_0))$.

Ясно, что $\tilde{e}_0 \in \mathscr{E}_\varepsilon$ и для всякого $x \in V_n - \{x_0\}$

$$\int h(\varphi(x))\, \tilde{e}_0 dP_n = \int h(\varphi(x))\, e_0 dP_n \leqslant G_\varepsilon (1+\delta).$$

Отсюда в силу минимальности $e_0$ вытекает, что

$$\int \tilde{e}_0 (\varphi(V_n))\, h(\varphi(x_0))\, dP_n \geqslant G_\varepsilon (1-\delta).$$

Из условия теоремы

$$G_\varepsilon (1-\delta) \leqslant \int \tilde{e}_0 (\varphi(V_n))\, h(\varphi(x_0))\, dP_n =$$
$$= \int \tilde{e}_0 (\varphi(V_n - x_0))\, dP_n (\varphi(V_n - x_0)) \int h(\varphi(x_0)) \times$$
$$\times p(\varphi(x_0) \mid \varphi(V_n - x_0);\ \varphi(\mathbf{Z}^d - V_n))\, d\chi(\varphi(x_0)) \leqslant$$
$$\leqslant \int \tilde{e}_0 (\varphi(V_n - x_0)) \left( \sum_{y \in V_n - x_0} c(x_0, y)\, h(\varphi(y)) + cA \right) dP_n \leqslant$$
$$\leqslant K + \sum_y c(x_0, y)\, G_\varepsilon (1+\delta) + cA \leqslant K + cG_\varepsilon (1+\delta) + cA$$

или

$$G_\varepsilon (1 - \delta - c(1+\delta)) \leqslant A + K.$$

Ввиду произвольности $\delta$

$$G_\varepsilon \leqslant (K + A)(1-c)^{-1}.$$

Лемма доказана.

Итак, последовательность $P_n$ относительно компактна. Не уменьшая общности, можно считать, что $P_n$ слабо сходится к пределу $\overline{P}$, $\overline{P} = \lim_{n \to \infty} P_n$. Покажем, что $\overline{P}$ есть предельное распределение Гиббса для гамильтониана $H$.

Предварительно заметим, что из слабой сходимости $P_n$ к $P$ и из непрерывности $h$ вытекает, что $\int h(\varphi(x))\, d\overline{P}(\varphi) \leqslant K_0$ при любом $x \in \mathbf{Z}^d$. Поэтому среднее значение функции $\sum_{y \in \mathbf{Z}^d} |c(x, y)|\, h(\varphi(y))$ также конечно и, следовательно, с $\overline{P}$-вероятностью 1 ряд $\sum c(x, y)\, h(\varphi(y))$ абсолютно сходится. Отсюда вытекает, что для любого конечного $V$ $\overline{P}$-вероятность тех граничных условий $\varphi(\mathbf{Z}^d - V)$, где $\sum\limits_{y \in \mathbf{Z}^d - V} |c(x, y)| h(\varphi(y)) < \infty$, равна 1. Покажем, что условное распределение на пространстве $\Omega(V)$ конфигураций $\varphi(V)$ есть условное распределение Гиббса. В силу сказанного выше достаточно ограничиться граничными условиями, для которых ряды $\sum |c(x, y)| h(\varphi(y))$ сходятся.

Далее, достаточно проверить это утверждение для одноточечных подмножеств $V$. Это вытекает из следующего известного факта теории меры: пусть $(M, \mathfrak{S})$ есть прямое произведение измеримых пространств $(M_i, \mathfrak{S}_i)$, т. е. $(M, \mathfrak{S}) = \bigotimes\limits_{i=1}^{I} (M_i, \mathfrak{S}_i)$. Тогда всякая вероятностная мера $P$ на $M$, абсолютно непрерывная относительно произведения мер $\prod\limits_{i=1}^{I} d\chi(x_i)$, однозначно определяется своими условными вероятностями $P(\cdot \mid m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n)$, заданными на $\mathfrak{S}_i$ при почти каждых $(m_1, m_2, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n)$, $i = 1, 2, \ldots, I$; $m_i \in M_i$.

Фиксируем $x \in \mathbf{Z}^d$, $V \subset \mathbf{Z}^d - x$, непрерывные ограниченные функции $u$, $U$, определенные на $\Phi$, $\Omega(V)$ соответственно. Достаточно показать, что

$$\int U(\varphi(V))\, u(\varphi(x))\, d\bar{P}(\varphi) = \\ = \int\limits_{\Omega} U(\varphi(V))\, d\bar{P} \int u(\varphi(x))\, p\big(\varphi(x) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - x)\big)\, d\chi(\varphi(x)). \tag{1.12}$$

Для любого распределения $P_n$ написанное равенство, очевидно, выполнено: если $V \subset V_n$, то

$$\int U(\varphi(V))\, u(\varphi(x))\, dP_n(\varphi) = \\ = \int\limits_{\Omega} U(\varphi(V))\, dP_n(\varphi) \int u(\varphi(x)) p\big(\varphi(x) \mid \varphi(\mathbf{Z}^d - x)\big) d\chi(\varphi(x)). \tag{1.13}$$

Левая часть (1.13) при $n \to \infty$ сходится к левой части (1.12) по определению слабой сходимости.

Для исследования правой части (1.13) воспользуемся условием 3), приведенным в формулировке теоремы, для функции $u$

$$\left|\int u(\varphi(x))\, p\left(\varphi(x)\,|\,\varphi\left(\mathbf{Z}^d - x\right)\right) d\chi(\varphi(x)) - f_p(\varphi(W_p))\right| \leqslant \leqslant D^{(p)} + \sum_{y \neq x} d^{(p)}(x, y)\, h(\varphi(y)). \qquad (1.14)$$

Тогда

$$\int u(\varphi(x))\, p\left(\varphi(x)\,|\,\varphi\left(\mathbf{Z}^d - x\right)\right) d\chi(\varphi(x)) = = f_p(\varphi(W_p)) + \varepsilon_p(\varphi),$$

где $|\varepsilon_p| \leqslant D^{(p)} + \sum_{y \neq x} d^{(p)}(x, y)\, h(\varphi(y))$. Подставляя это в (1.13), получим

$$\int U(\varphi(V))\, u(\varphi(x))\, dP_n(\varphi) = = \int U(\varphi(V))\, (f_p(\varphi(W_p)) + \varepsilon_p)\, dP_n(\varphi).$$

Перейдем в этом соотношении к пределу при $n \to \infty$

$$\int U(\varphi)\, f_p(\varphi(W_p))\, d\bar{P} - D^{(p)}(1 + K_0) \max |U(\varphi)| \leqslant \leqslant \int U(\varphi(V))\, u(\varphi(x))\, d\bar{P}(\varphi) \leqslant \leqslant \int U(\varphi(V))\, f_p(\varphi(W_p))\, d\bar{P} + D^{(p)}(1 + K_0) \max_{\varphi} \|U(\varphi)\|.$$

Из (1.14) и из леммы следует, что $f_p$ при $p \to \infty$ сходится к $\int u(\varphi(x))\, p(\varphi(x)\,|\,\varphi(\mathbf{Z}^d - x))\, d\chi(\varphi(x))$ в пространстве $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{S}, \bar{P})$. Поэтому в последнем неравенстве мы можем устремить $p \to \infty$ и получить (1.12). Теорема доказана.

Замечания:

1. Если $\Phi$ — компакт, то можно положить $h \equiv 0$.

2. Если $p(\varphi(x)|\varphi(\mathbf{Z}^d - x))$ определена всюду и есть непрерывная функция в тихоновской топологии, то условие 3), приведенное в формулировке теоремы Добрушина, выполнено с $d^{(n)}(x, y) \equiv 0$.

3. Если гамильтониан $H$ трансляционно-инвариантен, то для всякого предельного распределения Гиббса

$\bar{P}$ его сдвиг $(T^x)^*\bar{P}$ также будет предельным распределением Гиббса. Описанную конструкцию нетрудно видоизменить так, чтобы $\bar{P}$ было бы трансляционно-инвариантным.

4. Методы доказательства существования предельных распределений Гиббса дают возможность получить следующее «конструктивное» описание множества $G(H)$ предельных распределений Гиббса, отвечающих данному гамильтониану $H$. Пусть $G_V^0(H)$ есть множество конечных выпуклых линейных комбинаций условных распределений Гиббса в конечном объеме $V$ с различными граничными условиями и $G_V(H)$ — замыкание $G_V^0(H)$ в пространстве распределений вероятностей со слабой топологией. При некоторых естественных условиях регулярности, заведомо выполненных в случае потенциалов с конечным радиусом взаимодействия, $G(H)$ имеет следующую структуру:

a$_1$) $P \in G(H)$ в том и только в том случае, когда можно найти возрастающую последовательность объемов $V_n \subset \mathbf{Z}^d$ и $P_n \in G_{V_n}^0(H)$, таких, что $V_n \to \infty$, $P = \lim P_n$. Это утверждение показывает смысл названия «предельное распределение Гиббса»;

a$_2$) $G(H)$ есть непустое, выпуклое, компактное множество в пространстве всех вероятностных распределений на $\Omega$, и $G(H) = \bigcap G_V(H)$, где пересечение берется по всем конечным $V \subset \mathbf{Z}^d$. Крайние точки $G(H)$ называются неразложимыми предельными распределениями Гиббса;

a$_3$) $P \in G(H)$ неразложимо в том и только в том случае, когда $P$ регулярно, т. е. для любого $A \in \mathfrak{S}$ и любой последовательности $B_n$

$$\lim_{n\to\infty} |P(A \cap B_n) - P(A)P(B_n)| = 0,$$

где $B_n$ принадлежит σ-алгебре, порожденной случайными величинами $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d - V_n$, $V_n \to \infty$;

a$_4$) Различные крайние точки множества $G(H)$ взаимно сингулярны, так что $G(H)$ есть симплекс Шоке.

Пример. *Существование предельного распределения Гиббса для решетчатых моделей квантовой теории поля.* В этих моделях $\Phi = R^1$, а гамильтониан мы запишем в виде (см. § 4, пример 4):

$$H = H_0 + H^{\text{int}} =$$
$$= \sum_{\|x-y\|=1} (\varphi(x) - \varphi(y))^2 + m_0^2 \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \varphi^2(x) + \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} Q(\varphi(x)), \tag{1.15}$$

где $Q(t) = \sum_{p=1}^{2r} a_p t^p, \quad a_{2r} > 0, \quad r \geqslant 1,$

$$H_0 = \sum_{\|x-y\|=1} (\varphi(x) - \varphi(y))^2 + m_0^2 \sum \varphi^2(x).$$

Гамильтониан (1.15) — бинарный, трансляционно-инвариантный с радиусом взаимодействия $R = 2$. В качестве меры $\chi$ возьмем меру Лебега. Условные распределения в любом конечном объеме $V$ определены при любых граничных условиях. Мы покажем, пользуясь теоремой Добрушина, что в этом случае существует хотя бы одно предельное распределение Гиббса для гамильтониана (1.15).

При $r = 1$ мы имеем квадратичный гамильтониан, которому отвечает гауссовское стационарное распределение (см. § 4, пример 3). Ниже предполагается поэтому, что $r > 1$. Возьмем в качестве компактной функции $h(\varphi) = \operatorname{ch} \varphi$. Тогда задача сводится к нахождению таких постоянных $K$, $c(x, y)$, $0 < c < 1$, $\sum_y |c(x, y)| \leqslant \leqslant c < 1$, что

$$\frac{\int \operatorname{ch} \varphi(x) \exp\left\{2\varphi(x) \sum_{\|x-y\|=1} \varphi(y) - m_0^2 \varphi^2(x) - Q(\varphi(x))\right\} d\varphi(x)}{\int \exp\left\{2\varphi(x) \sum_{\|x-y\|=1} \varphi(y) - m_0^2 \varphi^2(x) - Q(\varphi(x))\right\} d\varphi(x)} \leqslant$$
$$\leqslant K + \sum_{y \neq x} c(x, y) \operatorname{ch} \varphi(y). \tag{1.16}$$

Положим $c(x, y) = (4d)^{-1}$ при $\|x - y\| = 1$ и 0 в остальных случаях. Ясно, что $\sum_y |c(x, y)| = 2^{-1}$. Остается найти $K$. Мы покажем, что нахождение требуемого $K$ вытекает из некоторых формул, получаемых с помощью асимптотического метода Лапласа. Рассмотрим интеграл

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{a\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, d\varphi,$$

$$\mathscr{P}(\varphi) = \sum_{p=1}^{2r} c_p \varphi^p, \quad c_{2r} > 0.$$

Лемма. При $|a| \to \infty$ имеет место асимптотика

$$F(a) \sim \exp[af(a) - \mathscr{P}(f(a))] \sqrt{\frac{2\pi}{\mathscr{P}''(f(a))}},$$

где $f(a)$ — минимум функции $[at - \mathscr{P}(t)]$, единственный при достаточно больших $|a|$.

Мы докажем лемму чуть позже. Положим в (1.16)

$$b = 2 \sum_{y:\ \|y-x\|=1} \varphi(y), \quad \mathscr{P}(\varphi) = Q(\varphi) + m_0^2\varphi^2,$$

$$D(b) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}\varphi \exp\{b\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, a\varphi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{b\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, d\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{(b+1)\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, d\varphi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{b\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, d\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{(b-1)\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, d\varphi}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{b\varphi - \mathscr{P}(\varphi)\}\, d\varphi} = D_1(b) + D_2(b).$$

Тогда на основании леммы

$$D_1(b) \sim \frac{1}{2} \exp\{(b+1) f(b+1) - \mathscr{P}'(f(b+1)) - \\ - bf(b) + \mathscr{P}'(f(b))\},$$

$$D_2(b) \sim \frac{1}{2} \exp\{(b-1) f(b-1) - \mathscr{P}'(f(b-1)) - \\ - bf(b) + \mathscr{P}'(f(b))\}.$$

Положим $L(b)=bf(b)-Q(f(b))$ при достаточно больших $|b|$. Тогда $L'(b)=f(b)$. Предположим, что $b>0$. Случай $b<0$ рассматривается аналогично. Поскольку $f(b)\to\infty$ при $b\to\infty$, то

$$D_1(b)\sim\frac{1}{2}\exp\{L(b+1)-L(b)\}\to\infty \quad \text{при} \quad b\to\infty,$$

$$D_2(b)\sim\frac{1}{2}\exp\{L(b-1)-L(b)\}\to 0 \quad \text{при} \quad b\to 0,$$

и по теореме Лагранжа при некотором $\theta(b)$, $0<\theta(b)<1$,

$$D(b)\sim D_1(b)\sim\frac{1}{2}\exp\{L(b+1)-L(b)\}\sim\frac{1}{2}\exp\{f(b+\theta(b))\}.$$

Легко видеть, что $f(b)\sim\mathrm{const}\cdot b^{1/(2r-1)}$ при $b\to\infty$ и поэтому $f(b+\theta(b))-f(b)\to 0$ при $b\to\infty$. Окончательно получаем теперь

$$D(b)\sim\frac{1}{2}\exp\{|f(b)|\} \quad \text{при} \quad |b|\to\infty.$$

Пусть $A$ таково, что одновременно $D(b)<\exp\{|f(b)|\}$ и $\exp\{|f(b)|\}<\frac{1}{2}\operatorname{ch}\frac{b}{4d}$ при $|b|>A$. Положим $K=\max\limits_{|b|\leqslant A} D(b)$. Тогда при $|b|\leqslant A$

$$D(b)\leqslant K\leqslant K+\sum_{\|x-y\|=1} c(x,y)\operatorname{ch}\varphi(y),$$

а при $|b|>A$

$$D(b)\leqslant\exp\{|f(b)|\}<\frac{1}{4d}\operatorname{ch}\left(\frac{b}{4d}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2d}\sum_{\|y-x\|=1}\varphi(y)\right)\leqslant\frac{1}{4d}\sum_{\|x-y\|=1}\operatorname{ch}\varphi(y)\leqslant K+\sum_{\|x-y\|=1} c(x,y)\operatorname{ch}\varphi(y)$$

на основании неравенства Иенсена для выпуклых функций.

Доказательство. Полагая $\varphi = f(a) + t$, получим $F(a) = \exp\{af(a) - \mathscr{P}(f(a))\} \times$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\mathscr{P}''(f(a))}{2!}t^2 - \ldots - \frac{\mathscr{P}^{(2r)}(f(a))}{(2r)!}t^{2r}\right\}dt.$$

Разобьем область интегрирования на две части: $|t| < a^{\frac{3/2-2r}{2r-1}}$, и $|t| > a^{\frac{3/2-2r}{2r-1}}$. Поскольку $f(a) = \mathscr{O}\left(a^{\frac{1}{2r-1}}\right)$, то $\mathscr{P}^{(k)}(f(a)) = \mathscr{O}\left(a^{\frac{2r-k}{2r-1}}\right)$ и в первой области интегрирования

$$|\mathscr{P}^{(k)}(f(a))\, t^{2k}| \leqslant \text{const} \cdot a^{\frac{2r-k}{2r-1} + \frac{3/2-2r}{2r-1}} = \text{const} \cdot a^{\frac{3/2-k}{2r-1}}.$$

При $k \geqslant 2$ последнее выражение стремится к 0. Отсюда легко получить, что в первой области интегрирования интеграл эквивалентен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\mathscr{P}''(f(a))}{2}t^2\right\}dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathscr{P}''(f(a))}}.$$

Далее, во второй области интегрирования при некоторой постоянной $\alpha$, $0 < \alpha < 1$, функция $\frac{\mathscr{P}''(f(a))}{2} \times \times (1-\alpha)t^2 + \ldots + \frac{\mathscr{P}^{(2r)}(f(a))}{(2r)!}t^{2r}$ неотрицательна.

Отсюда непосредственно вытекает, что интеграл по второй области интегрирования мал по сравнению с интегралом по первой области интегрирования. Лемма доказана.

## § 6. Предельные распределения Гиббса для непрерывных полей и для точечных полей

Имеется еще два класса случайных полей, где конструкция предельного распределения Гиббса играет важную роль. Мы только упомянем эти классы и в последующих главах почти не будем их касаться. Подчеркнем только, что изучение этих классов полей — чрезвычайно важная и еще не исследованная до конца область теории гиббсовских распределений.

Начнем со случайных $d$-мерных полей с непрерывным временем. Пусть $\Omega$ — какое-либо линейное, топологическое пространство вещественнозначных функций $\varphi(x)=\varphi(x_1, \ldots, x_d)$, определенных на $R^d$, и $\mu_0$ — распределение вероятностей, определенное на борелевской $\sigma$-алгебре подмножеств $\Omega$, называемое свободным полем. Например, $\mu_0$ может быть гауссовским распределением. Возьмем функцию $U(\varphi)$, такую, что для любой открытой области $V\subset R^d$ $\int \exp\left[-\int\limits_V U(\varphi(x))\,dx\right]\times$ $\times d\mu_0(\varphi)<\infty$. Тогда, зафиксировав значения функции $\varphi$ вне $V$, т. е. реализацию $\varphi(R^d-V)$, мы можем построить условные распределения $\mu_0(\cdot|\varphi(R^d-V))$ на реализациях $\varphi(V)$ внутри области $V$ и ввести условные распределения $P(\cdot|\varphi(R^d-V))$, абсолютно непрерывные относительно $\mu_0(\cdot|\varphi(R^d-V))$, для которых

$$\frac{dP(\varphi(V)\,|\,\varphi(R^d-V))}{d\mu_0(\varphi(V)\,|\,\varphi(R^d-V))}=\frac{\exp\left[-\int\limits_V U(\varphi(x))\,dx\right]}{\Xi(\varphi(R^d-V))},$$

$$\Xi\left(\varphi\left(R^d-V\right)\right)= \qquad (1.17)$$
$$=\int \exp\left\{-\int\limits_V U(\varphi(x))\,dx\right\}\,d\mu_0\left(\varphi(V)\,|\,\varphi\left(R^d-V\right)\right).$$

Определение 1.6. Мера $P$ называется предельным распределением Гиббса, если для почти всех (по распределению $P$) условий $\varphi(R^d-V)$ условное распределение, индуцированное $P$ на реализациях $\varphi(V)$, определяется (1.17).

Приведенное определение допускает естественное обобщение на случай, когда $\mu_0$ есть распределение вероятностей, отвечающее обобщенному случайному полю. При этом появляется один из наиболее важных примеров предельных распределений Гиббса, возникающий в двумерной квантовой теории поля. А именно, пусть $\mu_0$ — двумерное стационарное симметричное гауссовское случайное поле с гамильтонианом

$$H=\int\left[(\nabla\varphi,\nabla\varphi)+m_0^2\varphi^2\right]dx_1dx_2=$$
$$=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+m_0^2\varphi^2\right]dx_1dx_2.$$

Такое случайное поле можно определить лишь как обобщенное гауссовское стационарное случайное поле с корреляционным оператором, являющимся преобразованием Фурье функции $1/\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+m_0^2\right)$.

Рассмотрим для любой области $V$ случайную величину

$$\int_V \sum_{k=1}^{2r} a_k :\varphi^k(x_1, x_2): dx_1\, dx_2 = H_V^{(\mathrm{int})}(\varphi).$$

Эту случайную величину можно определить либо с помощью предельного перехода по описанным выше решетчатым моделям квантовой теории поля, либо с помощью кратных стохастических интегралов Эрмита — Ито (см. [19], [90]). А именно, если

$$\varphi(x_1, x_2) = \int \exp\{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\}\, d\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$$

— разложение Фурье обобщенного случайного поля, то

$$H_V^{(\mathrm{int})}(\varphi) = \sum_{k=1}^{2r} a_k' \int_V :\varphi^k(x_1, x_2): dx_1 dx_2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{2r} a_k' \int d\Phi\left(\lambda^{(1)}\right)\cdot \ldots \cdot d\Phi\left(\lambda^{(k)}\right)\times$$

$$\times \int_V S\left(\exp\left\{2\pi i\left(x, \sum_{p=1}^{k}\lambda^{(p)}\right)\right\}\right) dx,$$

где $S$ — симметризация функции, стоящей в скобках, и справа стоит кратный стохастический интеграл Ито. Э. Нельсон [103] показал, что при $a_{2r}>0$ $E\left(\exp\left\{-H_V^{(\mathrm{int})}(\varphi)\right\}\right)<\infty$ для $V$ с достаточно хорошей границей. Поэтому для таких областей можно построить условные распределения Гиббса. Нетрудно понять, что свободное поле $\mu_0$ является здесь марковским в том смысле, что условное распределение в области $V$ зависит лишь от реализации поля в сколь угодно малой окрестности границы. Тогда условное распределение Гиббса будет марковским в том же смысле, и предельное распределение Гиббса в этом случае есть марковское случайное поле. Придать точный смысл всем этим утверждениям далеко не просто.

Другой класс предельных распределений Гиббса возникает в случае точечных случайных полей. Наиболее распространенной является ситуация, когда рассматривается пространство $\Omega$, точками которого $\varphi$ служат счетные подмножества $R^d$, $d \geqslant 1$, такие, что пересечение $\varphi$ с любым компактным подмножеством $V \subset R^d$ конечно. В качестве начальной меры, играющей роль меры $\chi$, здесь естественно взять пуассоновское поле с параметром $\lambda$. В задачах статистической механики часто встречается случай, когда условное распределение Гиббса в объеме $V$ абсолютно непрерывно относительно $\mu_0$ и плотность

$$\frac{dP}{d\mu_0} = \frac{1}{\Xi} \exp\left\{- \sum_{x', x'' \in V} U(|x' - x''|) - \sum_{\substack{x' \in V \\ x'' \in R^d - V}} U(|x' - x''|)\right\}.$$

Здесь $U(r)$ — функция, называемая потенциалом парного взаимодействия, которое изотропно, т. е. зависит только от $r$ и не зависит от направления. Часто предполагается, что $U(r) = \infty$ при $r \leqslant a$ и монотонно убывает на бесконечности так, что $\int^{\infty} r^{d-1} |U(r)| \, dr < \infty$. Определение предельного распределения Гиббса такое же, как и выше. Существование предельного распределения Гиббса доказывается в точности так же, как в компактном случае. Можно доказать существование предельного распределения Гиббса и при более слабых предположениях о характере стремления $U(r)$ к бесконечности в окрестности нуля. Описанные примеры — это основные примеры равновесной статистической механики непрерывных систем.

### Библиографические замечания к главе 1

1. Общее определение предельного распределения Гиббса появилось в работах Р. Л. Добрушина [13], [16] и О. Лэнфорда и Д. Рюэлля [95]. Частный случай этого понятия появился гораздо раньше в работе Н. Н. Боголюбова и Б. И. Хацета [9]. Расширенный и модернизированный вариант этой работы см. в статье Н. Н. Боголюбова, Д. Я. Петрины и Б. И. Хацета [8].

Упомянем также работы Р. А Минлоса [25], [26] и Д. Рюэлля [109].

Теоретико-вероятностные аспекты теории предельных распределений Гиббса см. также в книге К. Престона [107].

2. Гауссовские распределения с точки зрения теории предельных распределений Гиббса обсуждались в работах Ю. А. Розанова [38], Ф. Спитцера [115], Р. Л. Добрушина [57]. Интересный пример гауссовского поля, встречающегося в квантовой электродинамике, приведен в статье Ф. Гуэрры [82].

3. Поля Янга — Миллса интенсивно изучаются в литературе по квантовой теории поля, и им посвящена обширная литература. Проблемы, относящиеся к решетчатым полям Янга — Миллса, рассматривались впервые, по-видимому, в работах К. Вильсона [116] и А. М. Полякова. Математические вопросы теории таких полей изложены в недавнем обзоре К. Остервальдера и Э. Зайлера [104].

4. Двумерные модели квантовой теории поля представляют собой с точки зрения теории предельных распределений Гиббса один из самых интересных объектов исследования, и им посвящена многочисленная литература. Идея строить предельные распределения Гиббса, отвечающие двумерным моделям квантовой теории поля, и первые теоремы существования принадлежат Э. Нельсону [103]. Глубокие методы созданы в этой области Дж. Глиммом и А. Джаффе. Мы упомянем только обзорные статьи [73], [75], где можно найти и другие ссылки. В книге Б. Саймона [41] и в статье Ф. Гуэрры, Л. Розена и Б. Саймона [81] непрерывные и решетчатые модели квантовой теории поля изучались с точки зрения статистической механики и теории предельных распределений Гиббса.

Интересные результаты в этой области принадлежат Ю. Фрелиху, который, в частности, при наиболее широких предположениях доказал существование предельного распределения Гиббса для непрерывных двумерных моделей квантовой теории поля [63]. Модель $:\varphi^4:_3$ изучалась в глубокой работе Дж. Глимма и А. Джаффе [75] и в основанной на ней работе Дж. Фельдмана и К. Остервальдера [62].

5. Двойственность Березинского была введена и изучалась в его диссертации [3].

6. Приведенные в § 5 теорема существования и ее доказательство принадлежат Р. Л. Добрушину [13], [16]. Пример использования этой теоремы, относящийся к решетчатым моделям квантовой теории поля, был рассмотрен студентом МГУ К. М. Ханиным. В его работе изучен несколько более общий случай.

Теоремы существования предельного распределения Гиббса для моделей, где $\varphi(x)$ принимает неограниченные значения, рассматривались также в работе Дж. Либовица и Э. Презутти [97].

7. Критерий Прохорова рассмотрен в книге П. Биллингсли «Сходимость вероятностных распределений».— М.: Наука, 1977.

ГЛАВА 2

# ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМ КОНТУРНЫЙ МЕТОД ПАЙЕРЛСА

## § 1. Введение

В равновесной статистической механике рассматривается обычно не один гамильтониан $H$, а однопараметрическое семейство гамильтонианов $\beta H$, где параметр $\beta$ пропорционален обратной температуре. Предельные распределения Гиббса, введенные в предыдущей главе, можно строить как пределы условных распределений Гиббса в конечных объемах при определенных граничных условиях, когда объем стремится к бесконечности (см. гл. 1, § 5). Естественная задача, которая при этом возникает, состоит в описании всех таких пределов для заданного гамильтониана $\beta H$. Эта задача весьма трудная, и более или менее окончательные результаты получаются лишь при малых $\beta$. Если переменная $\varphi(x)$ принимает конечное число значений, а мера $\chi$ нормирована, то при $\beta = 0$ условное распределение Гиббса (1.2) не зависит от граничных условий, переменные $\varphi(x)$ статистически независимы и распределение каждой из них совпадает с $\chi$. Переход в этом случае к пределу $V \to \infty$ тривиален: предельное распределение Гиббса при $\beta = 0$ единственно, и по отношению к нему переменные $\varphi$ независимы и имеют распределение $\chi$. При широких предположениях точка $\beta = 0$ является устойчивой в том смысле, что при достаточно малых $\beta$, т. е. при высоких температурах, предельное распределение Гиббса по-прежнему единственно, а переменные $\varphi(x)$ образуют набор слабо зависимых случайных величин. Точные утверждения подобного рода изложены в книге Д. Рюэлля [39] и в работах Р. Л. Добрушина [13—15]. Доказательства обычно проводятся с помощью так называемых систем корреляционных уравнений для корреляционных функций.

Гораздо более интересной и разнообразной оказывается ситуация в окрестности точки $\beta=\infty$. Если формально записать распределение Гиббса в виде $\mathrm{const}\cdot e^{-\beta H}$, то при $\beta\to\infty$ такое распределение должно вырождаться в распределение, сосредоточенное на конфигурациях, где $H$ достигает своего минимума, т. е. на основных состояниях гамильтониана $H$. Разумеется, это высказывание не имеет никакого определенного смысла из-за того, что рассматриваются конфигурации на всей бесконечной решетке. Но основные, вводимые далее понятия, по существу, преследуют цель сделать его более точным. Мы покажем, что точка $\beta=\infty$ также часто является устойчивой. Мы введем понятие основного состояния гамильтониана, и для гамильтонианов, у которых число периодических основных состояний конечно и выполнены некоторые условия устойчивости этих основных состояний (условие Пайерлса, см. далее), установим, что для гамильтонианов $\beta H$ при больших $\beta$ возникают предельные распределения Гиббса, сосредоточенные около этих основных состояний.

В этой главе мы будем рассматривать системы, у которых множество $\Phi$ значений отдельной переменной $\varphi(x)$ конечно, а гамильтонианы $\beta H$ периодичны или трансляционно-инвариантны и имеют конечный радиус взаимодействия. Тогда естественно, по крайней мере вначале, искать для гамильтониана $\beta H$ периодические или трансляционно-инвариантные неразложимые предельные распределения Гиббса. Неразложимость означает с формальной точки зрения, что предельное распределение Гиббса не представимо в виде линейной комбинации других предельных распределений Гиббса. Именно неразложимые предельные распределения Гиббса описывают статистические свойства чистых термодинамических фаз. Если $H$ зависит еще от параметров $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (внешних полей), т. е. мы имеем дело с $k$-параметрическим семейством гамильтонианов $H_\mu = H_{\mu_1,\ldots,\mu_k}$, $H=H_0$, то множество неразложимых периодических распределений Гиббса для гамильтониана $\beta H_\mu$ становится функцией $\mu$. В частности, число таких распределений также будет функцией $\mu$.

Фазовый диаграммой семейства гамильтонианов $\beta H_\mu$ называется разбиение пространства параметров $\mu$ на множества постоянства этой функции. Мы покажем, что при широких условиях для больших $\beta$ фазовая диаграмма семейства гамильтонианов $\beta H_\mu$ мало зависит от $\beta$ и устроена так же, как фазовая диаграмма, описывающая структуру множества основных состояний семейства гамильтонианов $H_\mu$. Отсюда, в частности, вытекает, что появление нескольких неразложимых предельных распределений Гиббса связано с наличием у исходного гамильтониана $H_0$ нескольких основных состояний, т. е. с вырождением основного состояния. У гамильтонианов, обладающих какой-либо группой симметрии, вырождение основного состояния обычно вызывается тем, что основные состояния сами по себе несимметричны и переходят друг в друга под действием преобразований из группы симметрии. Иными словами, группа симметрии действует на пространстве основных состояний. Поэтому появление в таких системах нескольких неразложимых предельных распределений Гиббса называется спонтанным нарушением симметрии. Вообще же, для появления нескольких предельных распределений Гиббса требуется не специальная симметрия гамильтониана, а только лишь вырождение основного состояния.

При больших $\beta$ исследование фазовых диаграмм часто проводится на интуитивном уровне с помощью введения поверхностного натяжения. Приведем сейчас соответствующие рассуждения на примере ферромагнитной модели Изинга*). Удобно иметь дело с так называемым малым каноническим ансамблем и отвечающими ему малыми статистическими суммами. Для объема $V$ и любого $c$, $-1 \leqslant c \leqslant 1$, положим

$$Z(V; c, \beta) = \sum_{\varphi(V):\ \sum\limits_{x\in V} \varphi(x) = [c|V|]} e^{-\beta H^{(I)}(\varphi(V))}.$$

*) Приводимый ниже текст был написан в результате плодотворных и полезных для меня бесед с И. М. Лифшицем.

Здесь $H^{(I)}$ — гамильтониан ферромагнитной модели Изинга, $|V|$ — число точек в объеме $V$, $[\cdot]$ — знак целой части числа.

Согласно известной теореме Ван-Хова (см. [39]) существует предел

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{|V|}\ln Z(V; c, \beta) = \beta f(c, \beta),$$

равный свободной энергии Гиббса. Функция $f$ всегда является выпуклой по $c$. Неединственность предельного распределения Гиббса эквивалентна существованию плоского участка в графике $f$ как функции $c$. При $\beta = \infty$ функция $f(c, \infty)$ равна константе (см. рис. 1), равной удельной энергии любой из конфигураций $\varphi(x) \equiv 1$, $\varphi(x) \equiv -1$, вычисленной с помощью $H^{(I)}$

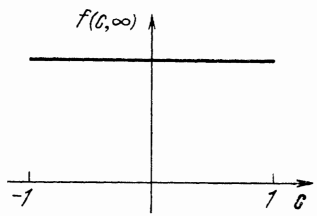


Рис. 1.

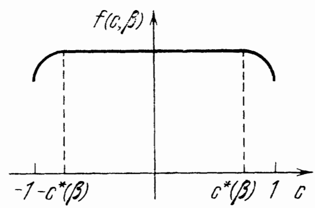


Рис. 2.

Устойчивость точки $\beta = \infty$ проявляется в том, что при $\beta \gg 1$ график функции $f(c, \beta)$ имеет вид, изображенный на рис. 2, где на отрезке $[-c^*(\beta), c^*(\beta)]$ функция $f$ линейна. Величина $c^*(\beta) \to 1$ при $\beta \to \infty$.

Обычное доказательство такой устойчивости заключается в следующем. Пусть $c$ близко к 1 и фиксировано. Рассмотрим большой объем $V$ с граничными условиями $+1$ вне $V$. Тогда типичная конфигурация $\varphi(V)$ с такими граничными условиями состоит из моря $+1$ с редкими вкраплениями другой фазы, т. е. $-1$. Эти вкрапления однозначно задаются своей границей $\Gamma$, т. е. вне всех границ $\Gamma$ стоят 1, а изнутри к $\Gamma$ примыкают $-1$. Далее внутри $\Gamma$ $\pm 1$ могут чередоваться произвольно, лишь бы изнутри к $\Gamma$ примыкал слой $-1$. На рис. 3 представлен вид типичной конфигурации.

Зададим для каждой границы Г концентрацию $\varkappa(\Gamma)$, с которой она встречается в конфигурации $\varphi(V)$, и $\nu_\beta(\Gamma)$ — среднее число $-1$ внутри Г, вычисленное по условному распределению Гиббса внутри Г. Тогда

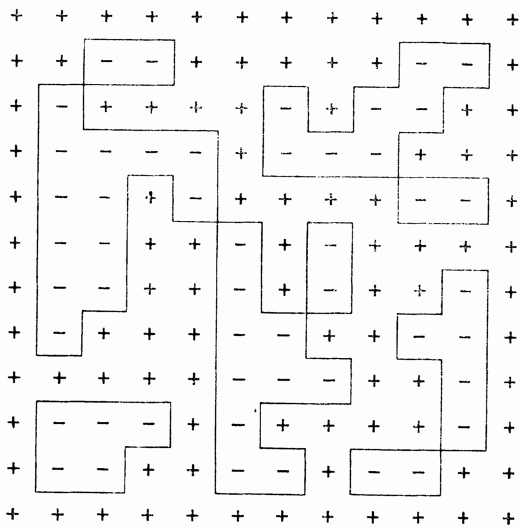

Рис. 3.

статистическая сумма по конфигурациям с заданными $\varkappa(\Gamma)$ имеет вид

$$K(\{\varkappa(\Gamma)\}) \exp\{V \sum \varkappa(\Gamma) F(\Gamma; \beta)\},$$

где $K(\{\varkappa(\Gamma)\})$ — число способов расположить $\varkappa(\Gamma)|V|$ контуров типа Г в объеме $V$; $F(\Gamma; \beta)$ — логарифм статистической суммы в объеме, ограниченном контуром Г. Набор чисел $\varkappa(\Gamma)$ должен удовлетворять условию $\sum \varkappa(\Gamma) \nu_\beta(\Gamma) = 1 - c$. Если $1 - c$ мало и суммарная концентрация объемов внутри контуров Г мала, то можно пренебречь пересечениями контуров и написать, что $K(\{\varkappa(\Gamma)\}) = \exp\{-V \sum \varkappa(\Gamma) \ln \varkappa(\Gamma)\}$. Последнее выражение получилось, если бы мы располагали контуры Г независимо друг от друга. Нахождение функции $f(c; \beta)$ сводится в таком приближении к нахождению максимума $\max\left[-\sum \varkappa(\Gamma) \ln \varkappa(\Gamma) + \right.$

$+\sum \varkappa(\Gamma) F(\Gamma; \beta)]$, взятого по всевозможным наборам $\varkappa(\Gamma)$, для которых $\sum \varkappa(\Gamma)\, \nu_\beta(\Gamma) = 1 - c$.

Будем рассматривать каждую область, ограниченную $\Gamma$, как зародыш фазы с преимущественной концентрацией $-1$. В таком случае $\nu_\beta(\Gamma)$ близко к объему $|\vartheta(\Gamma)|$, ограниченному контуром $\Gamma$. Обычное допущение состоит в том, что функция $F(\Gamma; \beta)$ допускает представление в виде $F(\Gamma, \beta) = \alpha_\beta |\vartheta(\Gamma)| - \chi_\beta(\Gamma)|\Gamma|$, где $|\Gamma|$ — длина контура $\Gamma$ и $\alpha_\beta$ не зависит от $\Gamma$, а зависит только от $\beta$, а $\chi_\beta(\Gamma)$ есть поверхностное натяжение, $\chi_\beta(\Gamma) \sim \mathrm{const}\cdot\beta$ при $\beta \to \infty$. Величина $\alpha_\beta \sim e^{-\mathrm{const}\cdot\beta}$ при $\beta \to \infty$.

Подставляя выражение для $F(\Gamma; \beta)$, получим, что задача сводится к максимизации выражения

$$-\sum \varkappa(\Gamma) \ln \varkappa(\Gamma) + \sum \varkappa(\Gamma)\,(\alpha_\beta\,|\vartheta(\Gamma)| - \chi_\beta(\Gamma)\,|\Gamma|)$$

по всем $\varkappa(\Gamma)$ при условии $\sum \varkappa(\Gamma)\,\nu_\beta(\Gamma) = 1 - c$. Обычный метод множителей Лагранжа приводит к такому результату:

$$\varkappa(\Gamma) = \exp\{-1 + \alpha_\beta\,|\vartheta(\Gamma)| - \mu\nu_\beta(\Gamma) - \chi_\beta(\Gamma)\,|\Gamma|\},$$

где множитель $\mu$ подбирается из условия $\sum \varkappa(\Gamma)\,\nu(\Gamma) = 1 - c$.

Из последнего выражения видно, что должно быть $\mu \geqslant -\alpha_\beta$, причем значению $\mu = -\alpha_\beta$ отвечает как раз величина $c^*$. Параметр $\beta$ должен быть настолько большим, что ряд $\sum \nu(\Gamma)\, e^{-\chi_\beta(\Gamma)\Gamma} < 1$. При таком условии можно показать, что функция $f(c; \beta)$ является гладкой функцией при $-1 < c < -c^*$ и $c^* < c < 1$, а при $-c^* < c < c^*$ наиболее выгодные конфигурации, т. е. конфигурации, сумма по которым вносит основной вклад в малую статистическую сумму $Z(V; c, \beta)$, таковы, что имеется один большой контур, ограничивающий объем $V^-$, $\frac{V^-}{V}(-c^*) + \left(1 - \frac{V^-}{V}\right)c^* = c$, внутри которого большая концентрация $-1$, а вне этого объема большая концентрация $+1$. Иными словами, основной вклад в малую статистическую сумму вносят конфигурации, у которых происходит конденсация и пространственное разделение фаз.

При последовательном и более аккуратном проведении всех этих рассуждений необходимо, в первую очередь, показать возможность представления логарифма статистической суммы $\ln \Xi(\Gamma|\beta) = F(\Gamma;\ \beta)$ в виде

$$F(\Gamma;\ \beta) = \alpha_\beta |\vartheta(\Gamma)| - \chi_\beta(\Gamma)|\Gamma|,$$

т. е., по существу, определить поверхностное натяжение. Как известно, поверхностное натяжение не является термодинамическим потенциалом. Поэтому его последовательное определение из распределения Гиббса весьма трудно. Более того, его можно определить только вне точек фазового перехода второго рода, где поверхностное натяжение вообще равно бесконечности. Для рассматриваемого в этой главе класса решетчатых систем из приводимых далее рассуждений комбинаторного характера вытекает возможность определения поверхностного натяжения из распределения Гиббса при больших $\beta$. Другая, менее принципиальная, трудность состоит в том, чтобы действительно показать, что конфигурации с пространственным разделением фаз вносят основной вклад в малую статистическую сумму. Для модели Изинга это было показано в [28], [29].

Предлагаемое в этой главе исследование фазовых диаграмм решетчатых систем при больших $\beta$ идет в несколько другом направлении. Мы проводим все рассмотрения в рамках большого канонического ансамбля и показываем, что статистические суммы в конечных объемах удовлетворяют специальной системе рекуррентных уравнений, из которых вытекает, что эти суммы имеют весьма специальный комбинаторный характер и, в частности, связаны со специальными контурными моделями, введенными в [28], [29], и с контурными моделями с параметром, введенным в [34]. После этого получение нужной информации о фазовых диаграммах уже не требует большого труда. Можно было бы вернуться к приведенным выше рассуждениям и показать их законность, но мы уже этого не делаем.

Перейдем теперь к более последовательному изложению.

В этой главе мера $\chi$ представляет собой равномерное распределение на $\Phi$, т. е. $\chi(\varphi)=1/|\Phi|$ для любого $\varphi\in\Phi$. Насколько это возможно, мы будем использовать обозначения главы 1. Запись $\varphi=\psi(a.\ s.)$ для произвольных $\varphi,\ \psi\in\Omega$ означает, что неравенство $\varphi(x)\neq\psi(x)$ выполняется лишь для конечного множества $x$. Далее, для $W\subset\mathbf{Z}^d$ через $\delta(W)$ обозначается диаметр $W$, т. е. $\delta(W)=\sup\limits_{x,y\in W}\|x-y\|$,

$$d(x, W)=\min_{y\in W}\|x-y\|,\qquad d(V, W)=\min_{\substack{x\in V\\ y\in W}}\|x-y\|.$$

Куб с центром в точке $x$ и со стороной $2s$ обозначается $W_s(x)$, т. е. $W_s(x)=\{y\in\mathbf{Z}^d\,|\,\|x-y\|\leqslant s\}$. Для множества $V\subset\mathbf{Z}^d$ через $\overline{V}$ обозначено дополнение к $V$, т. е. $\overline{V}=\mathbf{Z}^d-V$, граница $\partial V$ множества $V$ есть $\partial V=\{x\,|\,x\in V,\ d(x,\ \overline{V})=1\}$.

Радиус взаимодействия, отвечающий потенциалу $\mathfrak{I}$, обозначается $R$, т. е. $\mathfrak{I}(\varphi(V))\equiv 0$, если $\operatorname{diam} V>R$. Удобно также в ряде случаев использовать функцию

$$U_x(\varphi)=\sum_{W:\,x\in W}\frac{1}{|W|}\mathfrak{I}(\varphi(W)).$$

Мы рассмотрим однопараметрические семейства гамильтонианов $\beta H,\ 0\leqslant\beta<\infty,\ H=\sum\limits_{V\subset\mathbf{Z}^d}\mathfrak{I}(\varphi(V))$.

Условные вероятности для условного распределения Гиббса имеют вид

$$p\left(\varphi(V)\,|\,\overline{\varphi}\left(\mathbf{Z}^d-V\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\Xi\left(V;\ \beta;\ \overline{\varphi}\left(\mathbf{Z}^d-V\right)\right)}\cdot\exp\left\{-\beta\sum_{W:\ V\cap W\neq\varnothing}\mathfrak{I}(\varphi(W))\right\}.\qquad(2.1)$$

В дальнейшем удобно пользоваться относительным гамильтонианом $H(\varphi|\psi)$, определенным для произвольных $\varphi,\ \psi\in\Omega$, $\varphi=\psi(a.\,s.)$, где

$$H(\varphi\,|\,\psi)=\sum_V\left(\mathfrak{I}(\varphi(V))-\mathfrak{I}(\psi(V))\right).\qquad(2.2)$$

В этой сумме только конечное число слагаемых отлично от нуля. Условные вероятности (1.2) удовлетворяют соотношению

$$\frac{p(\varphi(V) \mid \overline{\varphi}(\mathbf{Z}^d - V))}{p(\psi(V) \mid \overline{\varphi}(\mathbf{Z}^d - V))} = \exp\{-\beta H(\varphi \mid \psi)\}, \tag{2.3}$$

где $\varphi(\psi)$ совпадает с $\varphi(V)(\psi(V))$ на $V$ и $\overline{\varphi}(\mathbf{Z}^d - V)$ вне $V$.

В самом деле,

$$\frac{p_V(\varphi)}{p_V(\psi)} = \exp\{-\beta H(\varphi \mid \psi)\}, \tag{2.4}$$

если $\varphi(x) = \psi(x)$ для таких $x$, что $d(x, \overline{V}) < R$,— эквивалентное определение условных вероятностей в терминах относительного гамильтониана $H(\varphi|\psi)$.

Естественное требование на взаимодействие — требование его трансляционной инвариантности. Нам, однако, будет удобно рассматривать несколько более широкий класс взаимодействий, а именно периодические взаимодействия, в которых $\mathfrak{I}$ инвариантно относительно подгруппы $\mathbf{Z}_0^d \subset \mathbf{Z}^d$ конечного индекса.

## § 2. Основные состояния

Мы будем говорить, что однопараметрическое семейство $P_\beta$, $\beta \to \infty$, предельных распределений Гиббса для гамильтонианов $\beta H$ представляет собой малое отклонение от фиксированной конфигурации $\psi \in \Omega$, если для любого $s > 0$

$$\lim_{\beta \to \infty} \sup_{x \in \mathbf{Z}^d} P_\beta(\varphi(W_s(x)) \neq \psi(W_s(x))) = 0.$$

Формальный переход к пределу при $\beta \to \infty$ в (2.3) показывает, что типичные конфигурации, отвечающие условным распределениям Гиббса, при больших $\beta$ должны быть близки к конфигурациям с минимальной энергией в данном объеме (основным состояниям). Поэтому естественно надеяться, что при больших $\beta$ существуют предельные распределения Гиббса, представляющие собой малые отклонения от основных состояний гамильтониана. Для подтверждения этих эвристических соображений мы введем определение основного состояния гамильтониана и покажем, что при условии устойчивости этого основного состояния, называемого условием Пайерлса, можно действительно доказать, что существуют однопараметрические семейства предельных распределений Гиббса, представляющие собой малые отклонения от основных состояний, однако доказательство, как будет видно, довольно длинное.

Определение 2.1. Конфигурация $\psi$ называется основным состоянием гамильтониана $H$, если $H(\varphi|\psi) \geqslant 0$ для любой конфигурации $\varphi = \psi(a.\,s.)$. Основное состояние $\psi$ изолировано, если из того факта, что $\varphi \neq \psi$, $\varphi = \psi(a.\,s.)$, следует, что $H(\varphi|\psi) > 0$.

Множество периодических основных состояний гамильтониана $H$ обозначим через $g(H)$.

Можно дать более наглядное определение периодических основных состояний. А именно, обозначим множество всех периодических конфигураций с произвольным периодом через $\hat{\Omega}$ и для $\varphi \in \hat{\Omega}$ положим

$$h(\varphi) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{|W_s(0)|} \sum_{x\in W_s(0)} U_x(\varphi).$$

Иными словами, $h(\varphi)$ есть удельная энергия $\varphi$. Поскольку $\mathfrak{J}$ периодичен, то $h(\varphi)$ определена и конечна на $\hat{\Omega}$. Введем

$$\underline{h} = \inf_{\varphi\in\hat{\Omega}} h(\varphi).$$

Ясно, что $\underline{h} > -\infty$.

Лемма 1. Множество периодических основных состояний гамильтониана $H$ совпадает с множеством

$$g_1(H) = \{\psi : \psi \in \hat{\Omega},\ h(\psi) = \underline{h}\}.$$

Доказательство. Покажем вначале, что $g(H) \subseteq \subseteq g_1(H)$. Если $\varphi \in \hat{\Omega}$, $h(\varphi) > \underline{h}$, а $\psi \in g_1(H)$, то для конфигурации $\psi^{(s)}$, совпадающей с $\psi$ в $W_s(0)$ и с $\varphi$ вне $W_s(0)$, будем, очевидно, иметь

$$H(\psi^{(s)}|\varphi) = (\underline{h} - h(\varphi))\,|W_s(0)| + \mathcal{O}(|\partial W_s(0)|) < 0$$

при достаточно больших $s$. Следовательно, $\varphi$ не может быть основным состоянием.

Для доказательства обратного включения возьмем $\psi \in g_1(H)$ и допустим, что найдется конфигурация $\psi' \in \in \Omega$, $\psi' = \psi(a.\,s.)$, для которой $H(\psi'|\psi) < 0$. Построим с помощью $\psi'$ конфигурацию $\varphi \in \hat{\Omega}$, для которой $h(\varphi) < h(\psi)$. Для этого возьмем $\psi'(W_s(0))$ и продолжим ее периодически на всю решетку $\mathbf{Z}^d$. Полученная конфигурация $\varphi \in \hat{\Omega}$ и для нее $h(\varphi) = h(\psi) + \frac{1}{|W_s(0)|} H(\psi' \mid \psi)$ при достаточно больших $s$, что противоречит определению $\underline{h}$. Лемма доказана.

Интуитивно ясно, что именно изолированные основные состояния должны быть связаны с неразложимыми периодическими предельными распределениями Гиббса при больших $\beta$. В дальнейшем, важную роль будет играть условие Пайерлса, выражающее тот факт, что периодические основные состояния изолированы и в определенном смысле равномерно устойчивы.

Определение 2.2. Рассмотрим периодический гамильтониан с конечным радиусом взаимодействия $R$ и $0 < |g(H)| < \infty$. Обозначим через $N$ общий период для $H$ и его периодических основных состояний, и пусть $s \geqslant \max\{N, R\}$. Границей $\partial\varphi$ конфигурации $\varphi \in \Omega$ называется множество

$$\partial\varphi = \bigcup_{x \in \mathbf{Z}^d} \{W_s(x)\colon \varphi(W_s(x)) \neq \psi(W_s(x)),\ \psi \in g(H)\}.$$

Граница не обязательно конечна, но это безусловно так, если $\varphi = \psi(a.\,s.)$ для некоторого $\psi \in g(H)$. Определение $\partial\varphi$ зависит от $s$ и $g(H)$, но его зависимость от $s$ не очень существенна, потому что

$$\partial\varphi \subset \partial'\varphi \subset \bigcup_{x \in \partial\varphi} W_{s'}(x), \tag{2.5}$$

если $\partial'\varphi$ — граница, определенная при помощи $s' > s$, т. е.

$$|\partial\varphi| \leqslant |\partial'\varphi| \leqslant [4s' + 1]^d |\partial\varphi|. \tag{2.6}$$

Мы ожидаем, что $H(\varphi|\psi)$ приблизительно пропорционален $|\partial\varphi|$, если $\psi \in g(H)$, поскольку $h(\psi) = \underline{h}$ на $g(H)$. Оценка сверху

$$H(\varphi|\psi) \leqslant C|\partial\varphi|, \quad \varphi \in \Omega, \quad \psi \in g(H), \quad \varphi = \psi(a.\,s.)$$

может быть легко получена, однако нам важна оценка снизу.

Определение 2.3. Гамильтониан $H$ удовлетворяет условию Пайерлса, если существует $\rho > 0$ такое, что $H(\varphi|\psi) \geqslant \rho|\partial\varphi|$ для любой конфигурации $\varphi = \psi(a.s.)$, $\psi \in g(H)$. Учитывая (2.5), можно утверждать, что справедливость условия Пайерлса не зависит от $s$, хотя $\rho$ уменьшается при возрастании $s$. Следующая гипотеза кажется верной, но не доказана.

Гипотеза. $|g(H)| < \infty \Rightarrow$ условие Пайерлса*).

Поскольку $|\partial\varphi| > 0$, если $\varphi \neq \psi$, $\psi \in g(H)$, из условия Пайерлса следует, что периодические основные состояния изолированы.

## § 3. Основные состояния возмущенного гамильтониана

Рассмотрим периодический гамильтониан с конечным радиусом взаимодействия $H_0$ и предположим, что число его периодических основных состояний конечно и положительно и $H_0$ удовлетворяет условию устойчивости Пайерлса. Пусть $g(H_0) = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r\}$. Целью этой главы является описание при больших $\beta$ предельных распределений Гиббса для $(r-1)$-параметрического семейства гамильтонианов

$$H_\mu = H_0 + \mu_1 H_1 + \ldots + \mu_{r-1} H_{r-1}, \tag{2.7}$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{r-1})$, $|\mu| = \max\limits_{1 < i < r} |\mu_i|$ и каждый гамильтониан $H_i$, $i = 1, \ldots, r-1$, также предполагается периодическим и с конечным радиусом взаимодействия. Гамильтонианы $H_i$ играют роль внешних полей. Существенно (см. далее), что их число на 1 меньше, чем число основных состояний.

Пусть $\overline{N}$ и $\overline{R}$ обозначают общий период и максимальный радиус взаимодействия $H_i$-х. Удельная энергия любой периодической конфигурации $\varphi$ по отношению к $H_\mu$ обозначается через $h_\mu(\varphi)$, $\underline{h}_\mu = \min\limits_{1 < q \leqslant r} h_\mu(\psi_q)$, и граница конфигурации будет определяться с помощью $s > \max\{\overline{N}, \overline{R}\}$. Эти предположения и обозначения будут использоваться в дальнейшем без дополнительных ссылок. Лемма 2 проясняет структуру $g(H_\mu)$.

---

*) Недавно эта гипотеза была опровергнута Печерским.

Лемма 2. Существует $\varepsilon_0 > 0$, зависящее лишь от $H_0, H_1, \ldots, H_{r-1}$, такое, что для $|\mu| < \varepsilon_0$

$$\varnothing \neq g(H_\mu) \subset g(H_0),$$

$$g(H_\mu) = \{\psi : \psi \in g(H_0), \quad h_\mu(\psi) = \underline{h}_\mu\},$$

и $H_\mu$ удовлетворяет условию Пайерлса.

Более того, если $|\mu| < \varepsilon_0$, то $H_\mu(\varphi|\psi) \geqslant \rho_0 |\partial\psi|$ при $\varphi = \psi(a.s.)$, $\psi \in g(H_\mu)$, $\partial\varphi$ определяется с помощью $g(H_0)$ и $\rho_0 > 0$ не зависит от $\mu$. Кроме того,

$$H_\mu(\varphi|\psi) \geqslant \rho_\mu |\partial_\mu \varphi| \quad \text{при} \quad \varphi = \psi(a.s.),\ \psi \in g(H_\mu),$$

где $\partial_\mu \varphi$ обозначает границу, определенную с помощью $g(H_\mu)$, $|\mu| < \varepsilon_0$. Константа $\rho_\mu > 0$ — функция $\mu$, удовлетворяющая условию Липшица по $\mu$ на множествах, где $g(H_\mu)$ не меняется.

Доказательство. Обозначим через $h_i(\varphi)$ удельную энергию $\varphi \in \widehat{\Omega}$ по отношению к $H_i$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$. В первой части доказательства граница конфигурации $\varphi \in \widehat{\Omega}$ определяется по отношению к $g(H_0)$ и $s = 1 + \max\{\overline{N}, \overline{R}\}$. Для любой конфигурации $\varphi \in \Omega$ рассмотрим компоненты

$$\vartheta_q(\varphi) = \{x : x \notin \partial\varphi,\ \varphi(W_s(x)) = \psi_q(W_s(x))\},\quad q = 1, \ldots, r.$$

Поскольку $H_i$ — гамильтониан с конечным радиусом взаимодействия, существуют константы $C_i$, зависящие лишь от $H_i$, $\overline{N}$, $\overline{R}$, $d$, при которых

$$\left| H_i(\varphi|\psi) - \sum_{q=1}^{r} |\vartheta_q(\varphi)| (h_i(\psi_q) - h_i(\psi)) \right| \leqslant C_i |\partial\varphi|, \tag{2.8}$$

если $\varphi = \psi(a.s.)$, $\psi \in g(H_0)$, и $i > 0$, в то время как

$$H_0(\varphi|\psi) \geqslant \rho |\partial\varphi| \tag{2.9}$$

из условия Пайерлса для $H_0$. Таким образом, если $\varphi \in \widehat{\Omega}$ и

$$\tilde{\varphi}_L = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при } \|x\| \leqslant L, \\ \psi(x), & \text{при } \|x\| > L, \end{cases}$$

мы получим из (2.8) и (2.9) при $\lim L = \infty$, что

$$\left| h_i(\varphi) - \sum_{q=1}^{r} \pi_q(\varphi)\, h_i(\psi_q) \right| \leqslant 2C_i \pi_0(\varphi) \tag{2.10}$$

для $i > 0$ и

$$h_0(\varphi) \geqslant h_0(\psi) + \rho\pi_0(\varphi), \tag{2.11}$$

где

$$\sum_{q=0}^{r} \pi_q(\varphi) = 1, \quad \pi_q(\varphi) \geqslant 0, \quad q = 0, \ldots, r, \tag{2.12}$$

$$\pi_0(\varphi) = \lim_{L\to\infty} \frac{|\partial\tilde{\varphi}_L \cap W_L(0)|}{|W_L(0)|}, \tag{2.13}$$

$$\pi_q(\varphi) = \lim_{L\to\infty} \frac{|\vartheta_q(\tilde{\varphi}_L) \cap W_L(0)|}{|W_L(0)|}, \quad q > 0. \tag{2.14}$$

Пусть $\varphi \in \hat{\Omega}$, $\psi \in g(H_0)$, тогда

$$h_\mu(\varphi) = h_0(\varphi) + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i h_i(\varphi),$$

и из (2.10)—(2.12) следует

$$h_\mu(\varphi) \geqslant h_0(\psi) + \pi_0(\varphi)\left[\rho - 2\sum_{i=1}^{r-1} |\mu_i| \cdot C_i\right] + \\ + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \sum_{q=1}^{r} \pi_q(\varphi)\, h_i(\psi_q) = h_\mu(\psi) - \pi_0(\varphi) \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i h_i(\psi) - \\ - \sum_{q=1}^{r} \pi_q(\varphi)\,[h_\mu(\psi) - h_0(\psi)] + \sum_{q=1}^{r} \pi_q(\varphi)\,[h_\mu(\psi_q) - \\ - h_0(\psi_q)] \geqslant h_\mu(\psi) + \pi_0(\varphi)\,[\rho - 3C|\mu|] + \\ + \sum_{q=1}^{r} \pi_q(\varphi)\,[h_\mu(\psi_q) - h_\mu(\psi)],$$

где $C = \sum_{i=1}^{r-1} C_i$, т. е.

$$h_\mu(\varphi) \geqslant h_\mu(\psi) + \frac{1}{4}\rho\pi_0(\varphi) + \sum_{q=1}^{r} \pi_q(\varphi)\,[h_\mu(\psi_q) - h_\mu(\psi)], \tag{2.15}$$

если $\varphi \in \hat{\Omega}$, $\psi \in g(H_0)$, $|\mu| < \varepsilon_0 = \rho/4C$.

Таким образом, $h_\mu(\varphi) \geqslant h_\mu(\psi)$, если $\psi \in g(H_0)$, такова, что $h_\mu(\psi) = \underline{h}_\mu$, и неравенство будет строгое, если $\varphi \notin g(H_0)$ или $\varphi \in g(H_0)$, но $h_\mu(\varphi) > \underline{h}_\mu$.

Тем самым первое и второе утверждения леммы доказаны.

Чтобы доказать условие Пайерлса при $|\mu| < \varepsilon_0$, определим границу с помощью $g(H_0)$. В этом случае условие Пайерлса можно получить как простое следствие (2.8) и (2.9). Действительно, если $|\mu| < \varepsilon_0$ и $\varphi = \psi(a.\,s.)$, $\psi \in g(H_\mu)$, тогда

$$H_\mu(\varphi \mid \psi) \geqslant H_0(\varphi \mid \psi) + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \sum_{q=1}^{r} |\vartheta_q(\varphi)| (h_i(\psi_q) - h_i(\psi)) - |\mu| C |\partial\varphi| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3}{4} \rho |\partial\varphi| + \sum_{q=1}^{r} |\vartheta_q(\varphi)| (h_\mu(\psi_q) - h_\mu(\psi)), \qquad (2.16)$$

причем последняя сумма неотрицательна. Заметим теперь, что

$$\partial_\mu\varphi = \partial\varphi \cup \bigcup_{q\,:\,\psi_q \notin g(H_\mu)} \vartheta_q(\varphi),$$

тогда

$$H(\varphi \mid \psi) \geqslant \rho_\mu |\partial_\mu\varphi|,$$

где

$$\rho_\mu = \min\left\{\frac{3}{4}\rho, \min_{\psi_q \notin g(H)} (h_\mu(\psi_q) - \underline{h}_\mu)\right\},$$

чем и завершается доказательство.

Следующее условие означает, что любое непустое подмножество $g(H_0)$ является множеством периодических основных состояний $H_\mu$, когда $\mu$ пробегает куб $|\mu| < \varepsilon_0$. Оно выражает некую линейную независимость возмущающих гамильтонианов $H_i$, $i = 1, \ldots, r-1$. Именно здесь нам важно, что их число в точности равно $r-1$.

Определение 2.4. Пусть $t_\mu = (t_\mu(\psi_1), \ldots, t_\mu(\psi_r))$, где $t_\mu(\psi_q) = h_\mu(\psi_q) - \underline{h}_\mu$. Будем говорить, что семейство $H_\mu$ полностью снимает вырождение основного состояния $H_0$, если $t_\mu$ отображает пространство параметров

$\mu$ на всю границу

$$O_r = \left\{a : a = (a_1, \ldots, a_r),\ \min_{1 \leqslant q \leqslant r} a_q = 0\right\}$$

положительного $r$-мерного октанта.

Основываясь на этом условии, мы докажем, что топологическая структура множества периодических предельных распределений Гиббса для семейства гамильтонианов $H_\mu$ при больших $\beta$ и малых $\mu$ имеет такую же структуру, что и $O_r$.

## § 4. Фазовые переходы в двумерной ферромагнитной модели Изинга

Теперь мы отступим от изложения общей теории и рассмотрим основной пример, с которого началось развитие всей теории, излагаемой в этой главе. Речь пойдет о ферромагнитной двумерной модели Изинга, т. е. о модели с гамильтонианом

$$H_0 = -J \sum_{\|t'-t''\|=1} \varphi(t')\varphi(t''), \quad \varphi(t) = \pm 1, \qquad t', t'' \in \mathbf{Z}^2.$$

В ферромагнитном случае $J > 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $J = 1$. Суммирование происходит по парам $t'$, $t''$, $\|t'-t''\| = 1$. Очевидно, что эта модель имеет два основных периодических состояния $\psi^+ = \{\varphi(t) \equiv 1\}$, $\psi^- = \{\varphi(t) \equiv -1\}$, и гамильтониан $H_0$ с этими двумя основными состояниями удовлетворяет условию Пайерлса.

Теорема Пайерлса (см. [105]). Существует такое $\beta_0$, что при всех $\beta > \beta_0$ гамильтониан $\beta H_0$ имеет, по крайней мере, два трансляционно-инвариантных предельных распределения Гиббса. Как функции $\beta$ эти распределения образуют малые возмущения основных состояний $\psi^+$, $\psi^-$.

Доказательство. Фиксируем объем $V \subset \mathbf{Z}^2$ и граничные условия $\varphi(\mathbf{Z}^2 - V)$. Условное распределение Гиббса в объеме $V$ при граничных условиях $\bar\varphi(\mathbf{Z}^2 - V)$ имеет в рассматриваемом случае вид

$$p_\beta(\varphi(V) \mid \bar\varphi(\mathbf{Z}^2 - V)) =$$
$$= \frac{1}{\Xi(V; \beta; \bar\varphi(\mathbf{Z}^2 - V))} \exp\left\{-\beta \sum_{\substack{t' \in V \\ \|t'-t''\|=1}} \varphi(t')\varphi(t'')\right\},$$

$\Xi(V;\ \beta;\ \bar{\varphi}(\mathbf{Z}^2 - V))$ — статистическая сумма, $\beta > 0$ — параметр. При нашей записи каждая пара $t'$, $t''$, где хотя бы одно из $t'$, $t''$ принадлежит $V$, встречается один раз.

Проведем вспомогательные построения. Объем $V$ всегда будем выбирать в виде квадрата $W_L(0)$. Зададим граничные условия в виде $+1$ вне $V$. Соответствующее условное распределение Гиббса обозначим $P_+$. В данном случае границу конфигурации можно определить проще и естественнее, чем в общем случае. Имея конфигурацию $\varphi(V)$, рассмотрим $V' \subseteq V$, $V' = \{t \in V | \varphi(t) = 1\}$. Окружим каждую точку $V'$ замкнутым единичным квадратом с центром в этой точке. Объединение этих квадратов обозначим $\varepsilon(V')$. Границу множества $\varepsilon(V')$ будем называть границей конфигурации $\varphi(V)$ и обозначать $\partial(\varphi(V))$. Контуром границы $\partial(\varphi(V))$ называется замкнутая несамопересекающаяся кривая, принадлежащая $\partial(\varphi(V))$. Всякая граница однозначно распадается на контуры.

По границе $\partial(\varphi(V))$ можно однозначно восстановить конфигурацию $\varphi(V)$. Для этого, двигаясь от границы $V$ внутрь, будем ставить $+1$ до тех пор, пока не дойдем до первого контура. Пересекая контур, будем ставить $-1$ и т. д.

В основе доказательства теоремы лежит неравенство Пайерлса.

Неравенство Пайерлса (см. [105]). Пусть $\gamma$ — фиксированный контур, $p_+(\gamma)$ — вероятность того, что $\gamma \in \partial(\varphi(V))$, вычисленная с помощью распределения $P_+$. Тогда

$$p_+(\gamma) \leqslant \exp\{-2\beta|\gamma|\},$$

$|\gamma|$ — длина контура $\gamma$.

Доказательство. Для любой конфигурации $\varphi$, которая совпадает с $\psi^+$ вне $V$,

$$H_V(\varphi) = H(\varphi(V)) + H(\varphi(V)|\psi^+(\mathbf{Z}^2 - V)) = \\ = -2|V| + 2|\partial\varphi(V)|.$$

В самом деле,

$$H_V(\varphi) = -\sum_{\{t',t''\}:\{t',t''\}\cap V \neq \varnothing} \varphi(t')\,\varphi(t'') = -\Sigma^+ - \Sigma^-,$$

где $\Sigma^+(\Sigma^-)$ есть часть суммы, взятая по таким парам $\{t', t''\}$, что $\varphi(t') = \varphi(t'')(\varphi(t') = -\varphi(t''))$. Заметим теперь, что $-\Sigma^- = |\partial(\varphi(V))|$, поскольку единичное ребро, разделяющее $t'$ и $t''$, принадлежит границе $\partial(\varphi(V))$. Общее число пар $\{t', t''\}$, $\{t', t''\} \cap V \neq \varnothing$, равно $2|V|$, а $\Sigma^+$ — число пар, где $\varphi(t') = \varphi(t'')$. Поэтому

$$\Sigma^+ = 2|V| - |\Sigma^-| = 2V + \Sigma^-.$$

Окончательно

$$H_V(\varphi) = -2V - 2\Sigma^- = -2V + 2|\partial(\varphi(V))|.$$

Далее, по определению

$$p_+(\gamma) = \frac{\sum\limits_{\varphi(V):\ \gamma\subset\partial(\varphi(V))} \exp\{-\beta H_V(\varphi)\}}{\sum\limits_{\varphi(V)} \exp\{-\beta H_V(\varphi)\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\varphi(V):\ \gamma\subset\partial(\varphi(V))} \exp\{2\beta|V| - 2\beta|\partial(\varphi(V))|\}}{\sum\limits_{\varphi(V)} \exp\{2\beta|V| - 2\beta|\partial\varphi(V)|\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\varphi(V):\ \gamma\subset\partial(\varphi(V))} \exp\{-2\beta|\partial(\varphi(V))|\}}{\sum\limits_{\varphi(V)} \exp\{-2\beta|\partial(\varphi(V))|\}}.$$

Пусть $\Phi_\gamma$ — множество конфигураций $\varphi(V)$, для которых $\gamma \subset \partial(\varphi(V))$, $\Phi_\gamma^-$ — множество конфигураций $\varphi(V)$, для которых $\partial(\varphi(V)) \cap \gamma = \varnothing$. Установим взаимно однозначное соответствие $\chi_\gamma$ между конфигурациями из $\Phi_\gamma$ и $\Phi_\gamma^-$. Для этого, взяв конфигурацию $\varphi(V) \in \Phi_\gamma$, уничтожим у нее контур $\gamma$, заменив внутри $\gamma$ все знаки на противоположные. Полученная конфигурация $\chi_\gamma(\varphi(V)) \in \Phi_\gamma^-$. Очевидно, что

$$\partial\varphi(V) = \partial(\chi_\gamma(\varphi(V))) \cup \gamma,$$

$$|\partial\varphi(V)| = |\partial(\chi_\gamma(\varphi(V)))| + |\gamma|.$$

При заданном $\gamma$ отображение $\chi_\gamma$ взаимно однозначно.

Теперь можно написать

$$p_+(\gamma) = \\ = \frac{\sum\limits_{\varphi(V)\in\Phi_\gamma} \exp\{-2\beta\,|\,\partial\varphi(V)\,|\}}{\sum\limits_{\varphi(V)} \exp\{-2\beta\,|\,\partial\varphi(V)\,|\}} \leqslant \frac{\sum\limits_{\varphi(V)\in\Phi_\gamma} \exp\{-2\beta\,|\,\partial\varphi(V)\,|\}}{\sum\limits_{\varphi(V)\in\Phi_\gamma^-} \exp\{-2\beta\,|\,\partial\varphi(V)\,|\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\varphi(V)\in\Phi_\gamma} \exp\{-2\beta\,|\,\partial\varphi(V)\,|\}}{\sum\limits_{\varphi(V)\in\Phi_\gamma} \exp\{-2\beta\,|\,\partial(\chi_\gamma(\varphi(V)))\,|\}} = \exp\{-2\beta\,|\,\gamma\,|\,\}.$$

Неравенство Пайерлса доказано.

Следствия неравенства Пайерлса:

I. При достаточно больших $\beta$ существует постоянная $C(\beta)=C>0$, $C(\beta)\to 0$ при $\beta\to\infty$ такая, что $P_+\{\varphi(V)\colon |\gamma|>C\ln|V|$ хотя бы для одного $\gamma\in\partial(\varphi(V))\}\to 0$ при $|V|\to\infty$.

Доказательство. Каждому контуру припишем начало — его крайнюю левую нижнюю точку. Тогда все множество контуров распадается на классы контуров, имеющих началом данную фиксированную точку (заметим, что «начала» не являются точками объема $V$, ибо в точках объема решетки могут быть только плюсы или минусы).

Подсчитаем вероятность того, что точка $t_0$ является началом контура длины, большей, чем $C_1\ln|V|$ ($C_1$ определим позднее). Заметим прежде всего, что если $N_{t_0}(r)$ — число контуров длины $r$ с началом в точке $t_0$, то справедлива следующая оценка:

$$N_{t_0}(r)\leqslant 3^{r-1},$$

так как, отправляясь от точки $t_0$, мы будем каждый раз иметь не более трех возможностей для продолжения контура, кроме первого шага (строго вправо). Пусть также $3e^{-2\beta}<1$, т. е. $\beta>\frac{1}{2}\ln 3$. Тогда на основании неравенства Пайерлса

$P_+\{\varphi(V)\colon\ t_0$ — начало контура $\gamma\subset\partial(\varphi(V))$ длины $r\}\leqslant 3^{r-1}\cdot e^{-2\beta r}$,

$P_+\{\varphi(V)$: $t_0$ — начало контура $\gamma\subset\partial(\varphi(V))$ длины большей, чем $C_1\ln|V|\}\leqslant\sum\limits_{r\geqslant C_1\ln|V|}3^{r-1}e^{-2\beta r}\leqslant\dfrac{3^{(C_1-2\beta C_1)\ln|V|}}{1-3e^{-2\beta}}=$

$$=\frac{|V|^{C_1(1-2\beta)\ln 3}}{1-3e^{-2\beta}}.$$

$P_+\{\varphi(V)$: найдется контур $\gamma\subset\partial(\varphi(V))$ длины, большей, чем $C_1\ln|V|\}\leqslant\dfrac{|V|^{C_1(1-2\beta)\ln 3+1}}{1-3e^{-2\beta}}$.

Последнее выражение стремится к нулю при $|V|\to\to\infty$, если $C_1(1-2\beta)\ln 3+1<0$, т. е. $C_1<\dfrac{1}{(2\beta-1)\ln 3}$. Выберем $C_1$ удовлетворяющим этому условию.

Следствие I доказано.

II. Пусть $0=(0,\ 0)$ — точка внутри объема $V$. Тогда равномерно по $V$ $P_+\{\varphi(0)=-1\}\to 0$, $\beta\to\infty$.

Доказательство. Если $\varphi(0)=-1$, то точка $0=(0,\ 0)$ лежит внутри некоторого контура. Запишем это так: $0\in\operatorname{Int}\gamma$. При больших $\beta$ и $V\to\infty$ с большой вероятностью этот контур не будет иметь слишком большую длину (не больше $C_1\ln|V|$). Начало каждого контура $\gamma$, для которого $0\in\operatorname{Int}\gamma$, определяется парой целых чисел $(p,\ q)$, причем в силу следствия I достаточно рассматривать $p$ и $q$ меняющимися от 0 до $C_1\ln|V|$ (иначе контур, имеющий начало в $(p,\ q)$ и содержащий точку 0 внутри себя, будет большей длины, чем $C_1\ln|V|$). Заметим, что длина наименьшего контура с началом в $(p,\ q)$, содержащего $(0,\ 0)$ внутри себя, равна $2(p+q)+4$.

Тогда

$P_+\{\varphi(V)$: $0\in\operatorname{Int}\gamma$, где $\gamma$ начинается в $(p,\ q)$, $|\gamma|<$

$$<C_1\ln|V|\}\leqslant\sum_{r=2(p+q)+4}^{C_1\ln|V|}3^{r-1}\cdot e^{-2\beta r}\leqslant\frac{3^{2(p+q)+3}\cdot e^{-4\beta(p+q+2)}}{1-3e^{-2\beta}}.$$

$$P_+\{\varphi(0)=-1\}\leqslant P_+\{0\in\operatorname{Int}\gamma\subset\partial\varphi(V)\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{p,q=0\\|p|+|q|=0}}^{C_1\ln|V|}\frac{27e^{-8\beta}}{1-3e^{-2\beta}}\sum_{p+q=1}^{2C_1\ln|V|}(9e^{-4\beta})^{p+q}2(p+q+1)+$$

$+P_+\{$хотя бы один контур $\gamma\subset\partial(\varphi(V))$ таков, что

$|\gamma| \geqslant C_1 \ln |V|\} \leqslant C_2 e^{-4\beta} + P_+$ {хотя бы один контур $\gamma \subset \partial\varphi(V)$ таков, что

$|\gamma| \geqslant C_1 \ln |V|\} \leqslant C_2 e^{-4\beta} + (1 - 3e^{-2\beta})^{-1} |V|^{C_1(1-2\beta)\ln 3+1}$

в силу следствия I. Ясно, что последнее выражение стремится к 0 при $\beta \to \infty$ равномерно по всем $V$. Следствие доказано.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим последовательность расширяющихся квадратов $V$ с граничными условиями $+1$. Предельное распределение Гиббса как предельная точка такой последовательности распределений в расширяющихся объемах существует. Обозначим это предельное распределение, полученное по последовательности объемов с граничными условиями $+1$, через $P_+^{(0)}$. Из предыдущего следует, что при достаточно больших $\beta$

$$P_+^{(0)} \{\varphi(0) = -1\} < \frac{1}{2}.$$

Проведя такие же рассуждения, заменив граничные условия $+1$ на $-1$, получим аналогично, что

$$P_-^{(0)} \{\varphi(0) = +1\} < \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad P_-^{(0)} \{\varphi(0) = -1\} > \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $P_-^{(0)} \neq P_+^{(0)}$, т. е. существует по крайней мере два предельных гиббсовских распределения. Нетрудно исследовать типичные конфигурации для $P_-^{(0)}$ и $P_+^{(0)}$. В первом случае типичные конфигурации будут состоять из «моря» плюсов с «островками» минусов, во втором случае — наоборот. Из следствия II легко следует, что предельное распределение Гиббса $P_+^{(0)}$ $(P_-^{(0)})$ представляет собой малое возмущение основного состояния $\psi^+(\psi^-)$.

## § 5. Основное утверждение и его следствия

Возвращаясь к ситуации § 3, обозначим через $H_0$ периодический гамильтониан с периодическими основными состояниями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$; $H_1, H_2, \ldots, H_{r-1}$ — произвольные периодические гамильтонианы с конечными радиусами взаимодействия. Мы предположим, что $H_0$ удовлетворяет условию устойчивости Пайерлса и

$H_\mu = H_0 + \mu_1 H_1 + \ldots + \mu_{r-1} H_{r-1}$ — возмущение, полностью снимающее вырождение периодических основных состояний $H_0$. Через $P^{(q)}_{\beta,\mu}$ обозначим предельное распределение Гиббса для гамильтониана $\beta H_\mu$, являющееся предельной точкой последовательности условных распределений Гиббса в конечных объемах $V$ при граничных условиях $\psi_q$ вне $V$. Будем говорить, что $P^{(q)}_{\beta,\mu}$ является чистой фазой, если существует слабый предел

$$P^{(q)}_{\beta,\mu} = \lim_{V \to \infty} P_V,$$

где $P_V$ — указанное условное распределение Гиббса. Смысл этого названия в том, что эти пределы в рассматриваемом нами случае окажутся трансляционно-инвариантными или периодическими распределениями вероятностей с быстрым убыванием корреляций, являющимися малыми возмущениями соответствующих основных состояний. Основным результатом этой главы служит следующая теорема.

Теорема 2.1. Существуют такие положительные константы $\beta_0$ и $\varepsilon_0$, зависящие только от $H_0, H_1, \ldots$ $\ldots, H_{r-1}$ и $d$, что для $\beta \geqslant \beta_0$ и $\mu \in U_0 = \{\mu\colon |\mu| < \varepsilon_0\}$

1). Существует точка $\bar{\mu}(\beta) \in U_0$ такая, что каждое предельное распределение Гиббса $P^{(q)}_{\beta,\bar{\mu}(\beta)}$, $q = 1, 2, \ldots, r$, является чистой фазой, и все они различны.

2). Существуют такие открытые кривые $\gamma_1(\beta)$, $\gamma_2(\beta), \ldots, \gamma_r(\beta) \subset U_0$, начинающиеся в $\bar{\mu}(\beta)$, что $P^{(1)}_{\beta,\mu}, \ldots, P^{(q-1)}_{\beta,\mu}, P^{(q+1)}_{\beta,\mu}, \ldots, P^{(r)}_{\beta,\mu}$ являются различными чистыми фазами, если $\mu \in \gamma_q(\beta)$, $q = 1, 2, \ldots, r$.

3). Существуют такие открытые двумерные поверхности $\gamma_{ij}(\beta) \subset U_0$, $1 \leqslant i < j \leqslant r$, что граница $\gamma_{ij}(\beta)$ состоит из $\gamma_i(\beta)$, $\gamma_j(\beta)$, $\bar{\mu}(\beta)$, и поля $P^{(q)}_{\beta,\mu}$ являются различными чистыми фазами при $\mu \in \gamma_{ij}(\beta)$ и $q \neq i$ и $q \neq j$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$r-1$). Существуют такие непересекающиеся открытые подмножества $\gamma^{(1)}(\beta), \ldots, \gamma^{(r)}(\beta)$ в $U_0$, ограниченные $(r-2)$-мерными поверхностями сосуществования двух фаз, что их замыкания покрывают $U_0$, и $P^{(q)}_{\beta,\mu}$ является чистой фазой при $\mu \in \gamma^{(q)}(\beta)$.

Приведем другую эквивалентную формулировку этой теоремы.

Теорема 2.1′. Существуют такие положительные константы $\beta_0$ и $\varepsilon_0$, зависящие только от $H_0, H_1, \ldots, H_{r-1}$ и $d$, что для всех $\beta \geqslant \beta_0$ существует гомеоморфизм $J_\beta = J_\beta(\mu)$ окрестности $U_0 = \{\mu: |\mu| < \varepsilon_0\}$ такой, что образ $J_\beta U_0$ содержит целиком окрестность 0 на $O_r$, и $P^{(q)}_{\beta,\mu}$, $q = 1, 2, \ldots, r$, являются различными чистыми фазами для тех значений $q$, при которых $b_q = 0$, $J_\beta(\mu) = (b_1, b_2, \ldots, b_r)$.

Заметим, что в тех случаях, когда $H_0$ обладает дополнительной симметрией, отображение $J_\beta$, описанное выше, также обладает той же симметрией. Чтобы сформулировать этот полезный факт более точно, предположим, что мы имеем группу перестановок $G$, действующую в пространстве значений $\Phi$. Той же буквой обозначим действие группы в пространстве $\Omega$. Допустим, что $H_0$ $\widehat{G}$-инвариантен (см. § 1, гл. 1) и $G$ отображает семейство $H_\mu = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i H_i$ гамильтонианов на себя.

Ясно, что $\widehat{G}$ действует на множестве основных состояний $g(H_0)$. Поэтому $\widehat{G}$ порождает подгруппу группы перестановок множества $\{1, \ldots, r\}$, определенную равенством $\psi_{gq} = g\psi_q$, и равенство $gH_\mu = H_{g\mu}$ определяет действие $\widehat{G}$ в пространстве параметров. Будем говорить, что наше отображение $J_\beta$ $\widehat{G}$-инвариантно, если $J_\beta(g\mu) = gJ_\beta(\mu)$ для всех $\mu$ и $g$; символ $gJ_\beta$ означает, что компоненты $b_1, b_2, \ldots, b_r$ вектора $J_\beta(\mu)$ переставлены в соответствии с действием $g$ на множестве $\{1, 2, \ldots, r\}$. Как непосредственное следствие из теоремы 2.1 оказывается, что $\widehat{G}$-инвариантность $H_0$ и семейства $H_\mu$ влечет $\widehat{G}$-инвариантность $J_\beta$ в указанном смысле. Этот факт будет полезен для ряда приложений.

Продемонстрируем теперь утверждение теорем 2.1 и 2.1′ на некоторых примерах.

Пример 1. *Малые возмущения ферромагнитной модели Изинга.* Пусть $\Phi = \{+1, -1\}$, $d \geqslant 2$,

$$H_0(\varphi) = -\sum_{\|x-y\|=1} \varphi(x)\varphi(y),$$

$$M(\varphi) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \varphi(x), \quad H = H_0 + \varepsilon H_1 + hM,$$

где $H_1$ — такой трансляционно-инвариантный гамильтониан с конечным радиусом взаимодействия, что удельная энергия конфигураций $\psi^+$ и $\psi^-$ по отношению к $H_1$ одна и та же ($\psi^+(x) \equiv +1$, $\psi^-(x) \equiv -1$, $x \in \mathbf{Z}^d$). Тогда для достаточно малых значений $\varepsilon$ $g(H_0 + \varepsilon H_1) = \{\psi^+, \psi^-\}$, и условие Пайерлса выполняется, поскольку $|g(\beta H)| = 1$ при $h \neq 0$. Таким образом, справедлива теорема 2.2.

Теорема 2.2 (см. [35]) Существуют такие положительные константы $\beta_0$ и $\varepsilon_0$ и функция $h = h(\beta, \varepsilon)$, определенная для $\beta \geqslant \beta_0$ и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, что для значения параметра $h = h(\beta, \varepsilon)$ у гамильтониана $\beta H$ существуют две различные чистые фазы.

Пример 2. *Ферромагнитная модель Изинга с несколькими значениями спина.* Пусть $\Phi = \{1, 2, \ldots, r\}$, $d \geqslant 2$ и

$$H_0 = -\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \sum_{\|x-y\|=1} \delta_{\varphi(x), \varphi(y)},$$

тогда $g(H_0) = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r\}$, где $\psi_q(x) \equiv q$ для всех $x$. $H_0$ удовлетворяет условию устойчивости Пайерлса.

Теорема 2.3. Существует такое $\beta_0 > 0$, что при всех $\beta > \beta_0$ у гамильтониана $\beta H_0$ существует $r$ предельных распределений Гиббса. Как функции $\beta$ эти распределения распадаются на $r$ кривых, каждая из которых является малым возмущением одного из основных состояний.

Доказательство. Введем $r-1$ внешнее поле с помощью формальных гамильтонианов

$$H_q = \sum U_q(\varphi(x)), \qquad q = 1, 2, \ldots, r-1,$$

где $U_q(m) = 1$ при $m = q$ и $U_q(m) = 0$ в остальных случаях. Возмущение $H_\mu = H_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i H_i$ полностью снимает вырождение $g(H_0)$. Таким образом, для всех $\beta > \beta_0$ существует такая точка $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\beta)$, что все $P^{(q)}_{\beta, \bar{\mu}(\beta)}$, $q = 1, 2, \ldots, r$, являются различными чистыми фазами. Из-за симметрии относительно группы перестановок множества $\{1, \ldots, r\}$ $\overline{\mu}(\beta) = 0$.

В этом простом случае предельные распределения Гиббса для возмущенного гамильтониана также могут быть определены.

Пример 3. *Антиферромагнитная модель Изинга* (см. [13]—[15]). Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$, $d \geqslant 2$ и

$$H_0 = \sum_{x \in Z^d} \sum_{y: \|x-y\|=1} \varphi(x)\varphi(y) + h \sum_{x \in Z^d} \varphi(x).$$

Поскольку

$$H_0 = \sum_{x \in Z^d} \sum_{y: \|x-y\|=1} \left[\varphi(x)\varphi(y) + \frac{h}{4d}(\varphi(x) + \varphi(y))\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x \in Z^d} \sum_{y: \|x-y\|=1} \left[(\varphi(x) + \varphi(y))^2 + \frac{h}{4d}(\varphi(x) + \right.$$

$$\left. + \varphi(y)) - 2\right],$$

мы видим, что основные состояния $H_0$ являются конфигурациями типа шахматной доски: $\varphi(x) = -\varphi(y)$, если $\|x - y\| = 1$, по крайней мере при $|h| < 4d$. Легко проверить, что в этом случае условие Пайерлса удовлетворяется с константой, пропорциональной $4d - |h|$.

Теорема 2.4. *Пусть* $|h| < 4d$. *Тогда существует такое* $\beta_0 = \beta_0(h) > 0$, *что для* $\beta > \beta_0$ *основным состояниям* $\psi_1$ *и* $\psi_2$ *соответствуют различные чистые фазы, являющиеся малыми возмущениями этих основных состояний.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что, по крайней мере, одна чистая фаза, связанная с $\psi_1$ или $\psi_2$, есть. Поскольку $\psi_1$, $\psi_2$ — периодические основные состояния с периодом 2, то эта чистая фаза также будет периодическим распределением вероятностей (см. далее предположение 6). Сдвигая его, получим другую чистую фазу.

## § 6. Контуры

Каждое предельное распределение Гиббса, связанное с основным состоянием $\psi \in g(H_0)$, строится как слабый предел условных распределений Гиббса с граничными условиями $\varphi(\mathbf{Z}^d - V) = \psi(\mathbf{Z}^d - V)$ при $V \to \infty$. Граница конфигураций играет важную роль в изучении этих распределений, так как $H(\varphi|\psi)$ является в действительности функцией пары $(\partial\varphi, \varphi(d\varphi))$. Анализ предельных распределений Гиббса, о которых идет речь в теоремах 2.1 и 2.1′, основывается на исследовании границ раздела между областями, занятыми разными основными состояниями. Эти границы называются контурами. Они представляют собой естественное обобщение контуров, использованных при анализе двумерной модели Изинга в § 4. В этом разделе предыдущие обозначения используются без каких-либо ссылок, $\partial\varphi$ определяется с помощью $g(H_0)$ и $s > \max(\overline{N}, \overline{R})$.

Понятие контура использует топологическую структуру $\mathbf{Z}^d$. Тем не менее наши методы легко переносятся и на другие решетки.

Подмножество $M$ решетки $\mathbf{Z}^d$ называется связанным, если любые две точки $x, y \in M$ связаны конечной цепью $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ так, что $x_i \in M$, $|x_i - x_{i+1}| = 1$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Два подмножества $M_1$ и $M_2$ далеки друг от друга, если $d(M_1, M_2) > 1$. Подмножество $M \subset W$ называется компонентой $W$, если $M$ является максимальным связанным подмножеством $W$, т. е. из $M \subset M' \subset W$, $M' \neq M$ следует, что $M'$ не связано. Следует отметить, что любое подмножество является объединением своих компонент, это представление единственно, и различные компоненты далеки друг от друга.

Определение 2.5. Пара $\Gamma = (M, \varphi(M))$, где $M = \operatorname{supp}\varphi(M)$ является конечным связанным множеством, называется контуром конфигурации $\varphi$, если $M$ есть компонента границы $\partial\varphi$ конфигурации $\varphi$. Пара $\Gamma = (M, \varphi(M))$ называется контуром, если существует хотя бы одна конфигурация $\varphi \in \Omega$ такая, что $\Gamma$ — контур $\varphi$.

Множество всех возможных контуров обозначается $\vartheta$. Конечно, конфигурация $\varphi(M)$ на носителе контура $\Gamma = (M, \varphi(M))$ не может быть произвольной, так как она должна совпадать с одним из основных состояний в точках $M$ около границы. Пусть $\Gamma = (M, \varphi(M))$ — контур, рассмотрим компоненты $A_\alpha$ множества $\overline{M} = \mathbf{Z}^d - M$. Мы покажем, что с каждой компонентой $A_\alpha$

связано определенное единственным образом основное состояние $\psi_q(A_\alpha)$. Так как $A_\alpha$ может содержать внутри себя другие контуры, $q(A_\alpha)$ лучше определить через $\partial A_\alpha = \{x: d(x, M) = 1, x \in A_\alpha\}$.

Легко проверить, что $\partial A_\alpha$ — также связанное множество (напомним, что $s$ в определении границы больше, чем период любого основного состояния). Таким образом, если $\Gamma$ — контур конфигурации $\varphi$, то $\varphi(W_s(x)) = \psi(W_s(x))$ на $\partial A_\alpha$ с одним и тем же $\psi \in g(H_0)$; номер соответствующего основного состояния и есть $q(A_\alpha)$. При данном $\Gamma$ число $q(A_\alpha)$ не зависит от выбора $\varphi$.

Важным выводом из предыдущего является замечание о том, что любой контур $\Gamma = (M, \varphi(M))$ определяет единственную конфигурацию $\varphi_\Gamma$, такую, что $\Gamma$ — единственный контур $\varphi_\Gamma$. Эта $\varphi_\Gamma$ совпадает с $\varphi(M)$ на $M$ и с $\psi_{q(A_\alpha)}$ на компоненте $A_\alpha$ из $\overline{M}$. При $d \geqslant 2$ одна и только одна из компонент $A_\alpha$, отвечающая $M = \operatorname{supp}\Gamma$, неограничена и будет обозначаться $\operatorname{Ext}\Gamma$ (внешность $\Gamma$). Через $\operatorname{Int}_m\Gamma$ обозначено объединение таких конечных компонент $A_\alpha$ из $\overline{M}$, что $q(A_\alpha) = m$, $\operatorname{Int}\Gamma = \bigcup_{m=1}^{r} \operatorname{Int}_m\Gamma$ (внутренность $\Gamma$).

Если $q(\operatorname{Ext}\Gamma) = m$, то мы говорим, что $\Gamma$ — контур с граничным условием $\psi_m$. Индекс $q$ в записи $\Gamma^q$ подчеркивает граничные условия для $\Gamma$, $\vartheta_q$ — множество контуров $\Gamma^q$. Очевидно, что $\varphi_{\Gamma^q} = \psi_q$ (a. s). Дальнейшие обозначения:

$$V_m(\Gamma) = |\operatorname{Int}_m\Gamma|, \qquad V(\Gamma) = |\operatorname{Int}\Gamma|, \qquad |\Gamma| = |\operatorname{supp}\Gamma|.$$

Если $V \subset \mathbf{Z}^d$, $\Gamma \in \vartheta$, то $\Gamma \subset V$ означает, что $\operatorname{supp}\Gamma \subset V$, $\operatorname{Int}\Gamma \subset V$ и $d(\operatorname{supp}\Gamma, \overline{V}) > 1$. Если $\Gamma$ и $\Gamma'$ — контуры одной конфигурации, то из $\operatorname{supp}\Gamma \subset \operatorname{Ext}\Gamma'$ и $\operatorname{supp}\Gamma' \subset \operatorname{Ext}\Gamma$ следует, что $\Gamma \subset \operatorname{Ext}\Gamma'$ и $\Gamma' \subset \operatorname{Ext}\Gamma$. Аналогично, $\operatorname{supp}\Gamma \subset \operatorname{Int}\Gamma' \Rightarrow \operatorname{supp}\Gamma \subset \operatorname{Ext}\Gamma'$ и $\operatorname{Ext}\Gamma' \subset \operatorname{Ext}\Gamma'$. Так как включения $\operatorname{supp}\Gamma \subset \operatorname{Int}\Gamma'$ и $\operatorname{supp}\Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma$ не могут выполняться одновременно, то $\Gamma \subset \operatorname{Int}\Gamma'$ вводит частичное упорядочивание в $\vartheta$, причем $\Gamma^q \subset \operatorname{Int}_m\Gamma'$ невозможно, если $q \neq m$.

Описание чистых фаз будет основано на статистических свойствах внешних контуров.

Определение 2.6. Контур $\Gamma$ конфигурации $\varphi$ называется внешним контуром $\varphi$, если $\Gamma \subset \operatorname{Ext} \Gamma'$ для любого другого контура $\Gamma'$ конфигурации $\varphi$. Иными словами, внешние контуры являются максимальными элементами в множестве контуров конфигурации $\varphi$ по отношению к введенному выше частичному упорядочению.

Так как граница $\partial\varphi$ конечна, то множество внешних контуров конфигурации $\varphi$ — однозначно определенное непустое множество, и любой другой контур содержится во внутренности одного из внешних контуров. В этом случае все внешние контуры имеют одно и то же граничное условие. Все последующие доказательства этой главы основаны на свойствах следующих вариантов статистических сумм.

Определение. 2.7. Обозначим через $\Omega(\Gamma^q)$ множество конфигураций $\varphi$, $\varphi = \psi_q(a.\ s.)$, для которых $\Gamma^q$ является единственным внешним контуром $\varphi$; тогда

$$Z(\Gamma^q \mid \beta H) = \sum_{\varphi \in \Omega(\Gamma^q)} \exp\{-\beta H(\varphi \mid \psi_q)\}$$

называется кристаллической статистической суммой для $\Gamma^q$.

Определение 2.8. Пусть $V$ — конечное подмножество $\mathbf{Z}^d$. Обозначим через $\Omega_q(V)$ множество таких конфигураций $\varphi$, $\varphi = \psi_q(a.\ s.)$, что $\Gamma \subset V$, если $\Gamma$ есть контур $\partial\varphi$; тогда

$$Z_q(V \mid \beta H) = \sum_{\varphi \in \Omega_q(V)} \exp\{-\beta H(\varphi \mid \psi_q)\}$$

называется разреженной статистической суммой в $V$. $Z(\Gamma^q|\beta H)$ и $Z_q(V|\beta H)$ связаны друг с другом следующей системой рекуррентных уравнений.

Лемма 3. Для каждого конечного $V \subset \mathbf{Z}^d$

$$Z_q(V \mid \beta H) = \sum \prod_{i=1}^{n} Z(\Gamma_i^q \mid \beta H), \tag{2.17}$$

где сумма берется по множеству всех возможных семейств $\{\Gamma_1^q, \ldots, \Gamma_n^q\}$ внешних контуров в $V$ т. е. $\Gamma_i^q \subset V$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\Gamma_i^q \subset \operatorname{Ext} \Gamma_j^q$, $\Gamma_j^q \subset \operatorname{Ext} \Gamma_i^q$, если $i \neq j$. Условимся считать, что произведение по пустому семейству равно 1.

Для контура $\Gamma^q$ имеем

$$Z(\Gamma^q \mid \beta H) = \exp\left[-\beta H(\Gamma^q)\right] \prod_{m=1}^{r} Z_m(\mathrm{Int}_m \Gamma^q \mid \beta), \quad (2.18)$$

где $H(\Gamma^q) = H(\varphi_{\Gamma^q} \mid \psi_q)$ — относительная энергия $\Gamma^q$.

Лемма 4. Пусть даны функции $Z(\Gamma^q)$ на множествах $\vartheta_q$ контуров с граничными условиями $\psi_q$, $1 \leqslant q \leqslant r$, и $Z_q(V)$ определяется с помощью системы (2.17) по $Z(\Gamma^q)$. Если величины $Z(\Gamma^q)$ и $Z_q(V)$ удовлетворяют системе (2.18) для любого контура $\Gamma^q$, то $Z(\Gamma^q) = Z(\Gamma^q \mid \beta H)$ на $\vartheta_q$.

Доказательство этих лемм тривиально, но они очень важны, поскольку описывают системы рекуррентных уравнений для $Z(\Gamma^q \mid \beta H)$, в которые входит функционал $H(\Gamma^q)$. Как будет показано, благодаря условию Пайерлса для больших $\beta$ эта система уравнений может быть записана в виде сжимающегося оператора в соответствующем банаховом пространстве функций на $\vartheta_q$; это и будет основным средством доказательства теоремы.

## § 7. Контурные модели

Для исследования системы рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют $Z(\Gamma^q \mid \beta H)$, мы будем применять теорию контурных моделей. Контурная модель — это система вероятностных распределений на множестве границ, образованных согласованными наборами контуров с одинаковыми граничными условиями. Оговоримся, что согласованному набору контуров не обязательно должна соответствовать конфигурация, граница которой и есть этот набор контуров, но внешние контуры границы будут внешними контурами конфигурации. Более точно, пусть $\vartheta_q$ — множество контуров с граничным условием $\psi_q$. Мы будем говорить, что контуры $\Gamma'$, $\Gamma''$ согласованы, если $d(\mathrm{supp}\,\Gamma', \mathrm{supp}\,\Gamma'') > 1$. В частности, может быть так, что $\Gamma'' \subset \mathrm{Int}_m \Gamma'$, $m \neq q$.

Определение 2.9. Конечное или счетное подмножество $\partial \subset \vartheta_q$ называется границей, если любые два контура $\Gamma'$, $\Gamma'' \subset \partial$ согласованы. Множество всех границ обозначим через $D$, $[\partial]$ — множество контуров, которые не согласованы с некоторым $\Gamma \in \partial$, $|\partial|$ обозначает число контуров в $\partial$, $\|\partial\| = \sum_{\Gamma\in\partial} |\Gamma|$, $\partial \subset V$, где $V$ — подмножество $\mathbf{Z}^d$, означает, что $\Gamma \subset V$ для всякого $\Gamma \in \partial$,

$$\chi_V(\partial) = \begin{cases} 1, & \partial \subset V, \\ 0, & \partial \not\subset V. \end{cases}$$

Пустая граница тоже принадлежит $D$.

$D_\Gamma = \{\partial: \Gamma \in \partial\}$ — множество границ, содержащих $\Gamma \in \vartheta_q$. Следующая комбинаторная лемма будет часто использоваться в дальнейшем.

Лемма 5. Пусть $x \in \mathbf{Z}^d$ фиксировано. Тогда существует константа $a > 0$, зависящая только от размерности решетки и $|\Phi|$, такая, что

$$|\{\Gamma: \Gamma \in \vartheta_q,\ |\operatorname{supp}\Gamma| = n,\ d(x, \operatorname{supp}\Gamma) \leqslant 1\}| \leqslant e^{an}.$$

Доказательство. Мы будем подсчитывать число связанных множеств $M = \operatorname{supp}\Gamma$, так как число возможных конфигураций на $M$ не больше, чем $|\Phi|^n$. Пусть, как и прежде $W_i(x)$ — шар радиуса $i$ с центром в точке $x$, $k_i(M) = \partial W_i(x) \cap M$, $k_0(M) = \{x\} \cap M$, $k_i = |k_i(M)|$. Поскольку $M$ связано и $n \geqslant 4$,

$$M = \bigcup_{i=0}^{n-1} k_i(M), \qquad n = \sum_{i=0}^{n-1} k_i.$$

Множество $k_i(M)$ может быть выбрано не более чем $2^{2k_{i-1}+2k_i} d^{k_i}$ способами, если $k_{i-1}$ и $k_i$ заданы, $k_0$ однозначно определяется $k_0(M)$. Связность означает, что $k_j(M) = 0$ при $j > n$. Поскольку число разбиений $n = \sum_{i=0}^{n-1} k_i$ не больше, чем $2^{n+1}$, то число контуров, рассматриваемых в лемме, не превосходит

$$|\Phi|^n 2^{n+1} d^n \prod_{i=1}^{n-1} 2^{2(k_{i-1}+k_i)} \leqslant \mathrm{const}\cdot|\Phi|^n 2^{(3+\ln d)n}.$$

Поэтому $a = \ln|\Phi| + 3 + \ln d + \mathrm{const}$ удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Мы рассмотрим теперь действительные функционалы $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\Gamma)$ на $\vartheta_q$ с нормой

$$\|\mathscr{F}\| = \frac{\sup|\mathscr{F}(\Gamma)|}{|\Gamma|},$$

$\mathscr{F}$ называется $\tau$-функционалом, $\tau > 0$, если $\mathscr{F}(\Gamma) \geqslant \tau|\Gamma|$.

Аддитивное расширение

$$\mathscr{F}(\partial) = \sum_{\Gamma \in \partial} \mathscr{F}(\Gamma), \quad \mathscr{F}(\varnothing) = 0, \quad \partial \in D$$

тоже удовлетворяет неравенству $\mathscr{F}(\partial) \geqslant \tau \|\partial\|$, которое здесь играет ту же роль, что условие Пайерлса. Контурный функционал $\mathscr{F}$-периодический, если существует такая подгруппа $\widehat{\mathbf{Z}} \subset \mathbf{Z}^d$ конечного индекса, что $\mathscr{F}(T_x\Gamma) = \mathscr{F}(\Gamma)$ для любого $x \in \widehat{\mathbf{Z}}$,

$$T_x\Gamma = (T_xM,\ T_x\varphi(M)), \quad T_xM = \{y\colon y = x + z,\ z \in M\},$$
$$\Gamma = (M,\ \varphi(M)).$$

Определение 2.10. Пусть $\mathscr{F}$ — $\tau$-функционал на $\vartheta_q$. Определим разреженную и кристаллическую контурные статистическуе суммы, соответственно, соотношениями

$$Z(V \mid \mathscr{F}) = \sum_{\partial \subset V} e^{-\mathscr{F}(\partial)},$$
$$Z(\Gamma \mid \mathscr{F}) = e^{-\mathscr{F}(\Gamma)} \sum_{\substack{\partial:\Gamma \in \partial,\ \Gamma' \subset \operatorname{Int}\Gamma \\ \text{для любого} \\ \Gamma' \subset \partial, \Gamma' \neq \Gamma}} e^{-\mathscr{F}(\partial)},$$

где $V \subset \mathbf{Z}^d$ — конечное и $\Gamma \subset \vartheta_q$. Множество вероятностных распределений $P_V(\partial)$ на $D$, определяемых соотношением

$$P_V(\partial) = \chi_V(\partial) Z^{-1}(V \mid \mathscr{F}) e^{-\mathscr{F}(\partial)},$$

называется контурной моделью.

Лемма 4 для контурных моделей может быть переформулирована так:

Лемма 6. Разреженная контурная статистическая сумма выражается через кристаллическую статистическую сумму при помощи равенства

$$Z(V \mid \mathscr{F}) = \sum \prod_{\Gamma \in \partial} Z(\Gamma \mid \mathscr{F}), \tag{2.19}$$

где суммирование ведется по всем границам $\partial \subset V$, состоящим из внешних контуров (по отношению к $\partial$). Для кристаллической контурной статистической суммы

$$Z(\Gamma \mid \mathscr{F}) = e^{-\mathscr{F}(\Gamma)} \prod_{m=1}^{r} Z(\operatorname{Int}_m\Gamma \mid \mathscr{F}). \tag{2.20}$$

Контурные модели выглядят как очень частный класс взаимодействующих систем. Более точно, взаимодействие происходит только благодаря тому, что не каждая конфигурация контуров образует границу. Естественно ожидать, что при больших $\tau$ контурные модели имеют «хорошие» корреляционные функции.

Определение 2.11. Корреляционная функция $\rho_V(\partial)$ границы $\partial$ есть $P_V$-вероятность события, состоящего в том, что $\partial$ является подмножеством границы, т. е.

$$\rho_V(\partial) = \sum_{\tilde{\partial} \in D, \partial \subset \tilde{\partial}} P_V(\tilde{\partial}).$$

Лемма 7. Корреляционные функции контурной модели удовлетворяют неравенству Пайерлса

$$\rho_V(\partial) \leqslant e^{-\mathscr{F}(\partial)}$$

и уравнениям Кирквуда — Зальцбурга

$$\rho_V(\partial) = \chi_V(\partial)\, e^{-\mathscr{F}(\partial)} \left[1 + \sum_{|\partial'|=1}^{|[\partial]|} (-1)^{|\partial'|} \sum_{\partial' \subset [\partial]} \rho_V(\partial')\right]. \tag{2.21}$$

Доказательство. Из определений имеем

$$\rho_V(\partial) = e^{-\mathscr{F}(\partial)} \sum_{\substack{\partial \cup \partial' \in D \\ \partial \cap \partial' = \varnothing}} P_V(\partial') =$$

$$= e^{-\mathscr{F}(\partial)} \left[1 - \sum_{\partial' : \partial \cup \partial' \notin D} P_V(\partial')\right].$$

Отсюда немедленно следует неравенство Пайерлса, так как $\partial \cap \partial' \notin D$ тогда и только тогда, когда $[\partial] \cap \cap\, \partial' \neq 0$, т. е. $\partial' \in \bigcup_{\Gamma \in [\partial]} D_\Gamma$.

С другой стороны,

$$\rho_V(\partial') = P_V\left(\bigcap_{\Gamma \in \partial'} D_\Gamma\right),$$

и, используя известное выражение для вероятности суммы событий, мы получаем, что

$$\sum_{\partial' : \partial \cup \partial' \in D} P_V(\partial') = P_V\left(\bigcup_{\Gamma \in [\partial]} D_\Gamma\right) =$$

$$= \sum_{|\partial'|=1}^{|[\partial]|} (-1)^{|\partial'|+1} \sum_{\partial' \subset [\partial]} \rho_V(\partial'),$$

что доказывает (2.21).

Изучение корреляционных функций основывается на уравнении (2.21). Методы изучения аналогичны методам, применяемым для изучения распределений Гиббса при малых $\beta$ или малых плотностях. Основной вопрос — поведение $\rho_V$ при $V \uparrow \mathbf{Z}^d$ (в смысле Ван-Хова). Этот вопрос решается в следующем параграфе в предположении, что модель задается $\tau$-функционалом $\mathcal{F}$ с достаточно большим $\tau$.

## § 8. Корреляционные функции для контурных моделей в бесконечном объеме

Мы рассматриваем правую часть (2.21) как оператор в банаховом пространстве граничных функционалов. Граничный функционал $\xi = \xi(\partial)$ — это действительная функция, определенная на множестве $D_0 = \{\partial\colon \partial \in D, \|\partial\| < \infty\}$ конечных границ. Множество граничных функционалов образует линейное пространство, включающее $\|\partial\|$, $|\partial|$ и $\tau$-функционалы, аддитивно расширенные на $D$. Пусть $a$ обозначает абсолютную константу в лемме 5. Так как $d \geqslant 2$ и $|\Phi| \geqslant 2$, то $e^{-a} \leqslant 2^{-22}$.

Пусть даны $\tau$-функционал $\mathcal{F}$ с $\tau > 3a$ и конечное подмножество $W \subset \mathbf{Z}^d$ (допускается $W = \varnothing$). Мы введем следующую норму $\|\xi\|_W$ граничного функционала $\xi$ так:

$$\|\xi\|_W = \sup_{\partial \subset D_0} \frac{|\xi(\partial)|}{\exp\left[a\|\partial\| - \mathcal{F}(\partial) + (a-\tau)\, d(\partial, \overline{W})\right]}, \qquad (2.22)$$

где

$$d(\partial, \overline{W}) = \min_{\Gamma \in \partial} d(\operatorname{supp}\Gamma, \overline{W}), \qquad \overline{W} = \mathbf{Z}^d - W.$$

Каждая такая норма определяет банахово пространство $\mathcal{B}_W$ граничных функционалов. Правая часть уравнения (2.21) определяет оператор $A$ на граничных функционалах, действующий по формуле

$$(A\xi)(\partial) = e^{-\mathcal{F}(\partial)} \sum_{|\partial'|=1}^{|[\partial]|} (-1)^{|\partial'|} \sum_{\partial' \subset [\partial]} \xi(\partial'). \qquad (2.23)$$

$\chi_V = \chi_V(\partial)$ и $e^{-\mathcal{F}} = e^{-\mathcal{F}(\partial)}$ являются граничными функционалами, но будут также интерпретироваться как мультипликативные операторы. Используя введенные обозначения, уравнение (2.21) можно записать в виде

$$\xi = \chi_V e^{-\mathcal{F}} + \chi_V A \chi_V \xi, \qquad V \subset \mathbf{Z}^d \text{ конечно.} \tag{2.24}$$

Корреляционные функции $\rho_V(\partial)$ удовлетворяют (2.24). Решение уравнения

$$\xi = e^{-\mathcal{F}} + A\xi \tag{2.25}$$

будет интерпретироваться как корреляционные функции в бесконечном объеме, так как мы докажем, что $\rho = \lim \rho_V$ существует при $V \uparrow \mathbf{Z}^d$, где $V$ пробегает последовательность $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i = \mathbf{Z}^d$ (или, более общо, $V$ пробегает последовательность $V_1$, $V_2, \ldots, V_n, \ldots$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(x, \overline{V}_n) = \infty$ для любого $x \in \mathbf{Z}^d$).

Лемма 8. Существует абсолютная константа $\tau_0 > 3a$ такая, что $\|A\|_W \leqslant 2^{-10}$ для любого $W$, если $\mathcal{F}$ — $\tau$-функционал, и $\tau > \tau_0$.

Доказательство. Предположим, что $\|\xi\|_W \leqslant 1$. Тогда

$$(A\xi)(\partial)| \leqslant \\ \leqslant e^{-\mathcal{F}(\partial)} \sum_{\partial' \subset [\partial]} \exp\left[(a-\tau)\left(\|\partial'\| + d(\partial', \overline{W})\right)\right], \tag{2.26}$$

так как $\mathcal{F}(\partial') \geqslant \tau\|\partial'\|$.

В зависимости от того, верно или нет неравенство $d(\partial', \overline{W}) \geqslant d(\partial, W)$, мы разбиваем сумму на две части, во второй части $\partial'$ содержит большой контур. В обоих случаях мы оценим сумму $\sum e^{-c\|\partial'\|}$, $\partial' \subset [\partial]$, и во втором случае мы получим нужную оценку для $|\max \Gamma|$, $\Gamma \in \partial'$. Эта оценка может быть получена так.

Пусть $|\partial'| = k$ фиксировано. Выберем $k$ различных точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ из множества $M = \cup \operatorname{supp} \Gamma$, $\Gamma \in \partial$. Выбирая контур $\Gamma_i'$ так, что $d(x_i, \operatorname{supp} \Gamma_i') \leqslant 1$, каждую границу $\partial' \subset [\partial]$ можно получить как $\partial' = \{\Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_k'\}$. Так как $M$ — объединение больших кубов и контуры в $\partial'$ далеки друг от друга, то мы видим, что $|\partial'| \leqslant \|\partial\|$, если $\partial' \subset [\partial]$. Поэтому, используя лемму 5, получаем при $c \geqslant a$

$$\sum_{\partial' \subset [\partial]} e^{-c\|\partial'\|} \leqslant \sum_{k=1}^{\|\partial\|} C^k_{\|\partial\|} \prod_{i=1}^{k} \Big( \sum_{d(x_i, \Gamma_i) \leqslant 1} e^{-c|\Gamma_i|} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\|\partial\|} C^k_{\|\partial\|} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{(a-c)n} \right]^k = \left[1 - e^{a-c}\right]^{-\|\partial\|}. \qquad (2.27)$$

Во втором случае $d(\partial', \overline{W}) \leqslant d(\partial, \overline{W})$, что возможно, только если $\delta(\partial') \geqslant 2d(\partial, \overline{W}) - 2d(\partial', \overline{W})$, где

$$\delta(\partial') = \max_{\Gamma' \in \partial'} |\Gamma'|. \qquad (2.28)$$

Поэтому имеем

$$\sum_{\substack{\partial' \subset [\partial] \\ \delta(\partial') \geqslant s}} e^{-c\|\partial'\|} \leqslant \sum_{k=1}^{\|\partial\|} C^k_{\|\partial\|} k \left( \frac{e^{a-c}}{1 - e^{a-c}} \right)^{k-1} \frac{e^{s(a-c)}}{1 - e^{a-c}} =$$

$$= e^{s(a-c)} \|\partial\| \left[1 - e^{a-c}\right]^{-\|\partial\|}. \qquad (2.29)$$

Полагая $d(\partial', \overline{W}) = p$ и применяя (2.27) и (2.28) к первой и второй части суммы в правой части (2.26), мы получаем

$$|(A\xi)(\partial)| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[-\mathscr{F}(\partial) + (a - \tau)\, d(\partial, \overline{W})\right] \left[1 - e^{2a-\tau}\right]^{-\|\partial\|} +$$

$$+ \|\partial\| \left[1 - e^{2a-\tau}\right]^{-\|\partial\|} e^{-\mathscr{F}(\partial)} \sum_{p=0}^{d(\partial, \overline{W})-1} \exp\left[2\left(d(\partial, \overline{W}) - p\right) \times\right.$$

$$\left.\times (2a - \tau) + p(a - \tau)\right] \leqslant \left[1 - e^{2a-\tau}\right]^{-\|\partial\|} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\|\partial\|}{e^{\tau - 3a} - 1}\right] \exp\left[a\|\partial\| - \mathscr{F}(\partial) + (a - \tau)\, d(\partial, \overline{W})\right].$$

Мы можем теперь описать слабый предел

$$\rho(\cdot \mid \mathscr{F}) = \lim_{V \to \infty} \rho_V(\cdot \mid \mathscr{F}), \qquad (2.30)$$

$V \to \infty$, как обычно, означает, что $V = V_n$, $n = 1, 2, \ldots$,— последовательность конечных подмножеств $\mathbf{Z}^d$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} d(x, \overline{V}_n) = \infty$. $\rho(\cdot \mid \mathscr{F})$ будет вероятностной мерой на $\sigma$-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами $D_\Gamma$, $\Gamma \in \vartheta_q$.

Предложение 1. Пусть $\mathcal{F}$ — $\tau$-функционал, $\tau > \tau_0$. Тогда для любой конечной границы $\partial \in \widetilde{D}_0$ существует корреляционная функция в бесконечном объеме $\rho(\partial) = \lim \rho_V(\partial)$, $V \to \infty$, $\rho$ удовлетворяет неравенству Пайерлса

$$\rho(\partial) \leqslant e^{-\mathcal{F}(\partial)}$$

и

$$|\rho(\partial) - \rho_V(\partial)| \leqslant \exp[(a-\tau)(\|\partial\| + d(\partial, \overline{V}))],$$

если $\partial \subset V$, $a$ и $\tau_0$ обозначают константы, введенные в леммах 5 и 8 соответственно.

Доказательство. Мы определим $\rho$ как решение уравнения $\rho = e^{-\mathcal{F}} + A\rho$. Так как $\|A\| < 1$, $\|e^{-\mathcal{F}}\| \leqslant e^{-9a}$, то $\rho$ единственно и задается выражением

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} A^n e^{-\mathcal{F}}. \tag{2.31}$$

С другой стороны, $\rho_V = \chi_V e^{-\mathcal{F}} + \chi_V A \chi_V \rho_V$. Так как $\chi_V$ — проекция, то

$$\chi_V\rho - \rho_V = \chi_V A(\rho - \chi_V\rho) + \chi_V A(\chi_V\rho - \rho_V),$$

и так как $\chi_V\rho - \rho_V$ — опять неподвижная точка, то

$$\chi_V\rho - \rho_V = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_V A)^n (\chi_V A\rho - \chi_V A \chi_V \rho). \tag{2.32}$$

Для оценки нормы $\eta = \chi_V A\rho - \chi_V A\chi_V\rho$ заметим, что $(\rho - \chi_V\rho)(\partial') = 0$ при $\partial' \subset V$ и $(\rho - \chi_V\rho)(\partial') = \rho(\partial')$ при $\partial' \subset V$. Во втором случае, $\partial' \subset [\partial]$ влечет $\delta(D') \geqslant 2d(\partial, \overline{V})$, и из (2.29) мы получаем

$$|\eta(\partial)| \leqslant e^{-\mathcal{F}(\partial)} \sum_{\partial' \subset [\partial]} |(\rho - \chi_V\rho)(\partial')| \leqslant$$

$$\leqslant \|\rho\| \|\partial\| \left[1 - e^{2a-\tau}\right]^{-\|\partial\|} \exp[2d(\partial, \overline{V})(2a-\tau) - \mathcal{F}(\partial)] \leqslant$$

$$\leqslant \|\rho\| \|\partial\| \left[\frac{e^{-a}}{1 - e^{2a-\tau}}\right]^{\|\partial\|} \exp[a\|\partial\| - \mathcal{F}(\partial) + (a-\tau)\, d(\partial, \overline{V})],$$

так как $\tau > 3a$. Это означает, что

$$\|\eta_V\| \leqslant \|\rho\| \leqslant e^{-9a}(1 - \|A\|)^{-1}, \tag{2.33}$$

т. е.

$$\|\chi_V\rho - \rho_V\|_V \leqslant e^{-9a}(1-\|A\|)^{-1}(1-\|A\|_V)^{-1},$$

отсюда сразу вытекают утверждения предложения 1.

Следующие результаты показывают, что контурные модели описывают малые возмущения основного состояния.

Предложение 2. Если $\tau > \tau_0$ для $\tau$-функционала $\mathcal{F}$, то существует слабый предел

$$p(\cdot|\mathcal{F}) = \lim p_V(\cdot|\mathcal{F}), \qquad V \to \infty$$

и

$$p(x \in \operatorname{Int}\Gamma,\ \Gamma \in \partial,\ |\Gamma| = n|\mathcal{F}) \leqslant e^{(2a-\tau)n} \tag{2.34}$$

для любого $x \in \mathbf{Z}^d$. Более того, если $\vartheta(\partial)$ — множество внешних контуров в бесконечной границе $\partial \in D_q$, то $\vartheta(\partial)$ полно с вероятностью 1 в том смысле, что любой контур из $\partial$ лежит внутри единственного внешнего контура. Поэтому средняя плотность точек в общей внешности всех внешних контуров стремится к 1, когда $\tau$ стремится к $\infty$.

Доказательство. Так как число контуров в конечном объеме конечно, то $D$ — компактное метрическое пространство и существование $p(\cdot|\mathcal{F}) = \lim p_V(\cdot|\mathcal{F})$ — прямое следствие существования предельных корреляционных функций. Фиксируем $x \in \mathbf{Z}^d$ и прямую $L \subset \mathbf{Z}^d$, проходящую через $x$. Тогда $x \notin \operatorname{Int}\Gamma$, $\Gamma \in \vartheta_q$ возможно только, если $d(L, \operatorname{supp}\Gamma) \leqslant 1$. Поэтому, из леммы 5, число контуров таких, что $x \in \operatorname{Ext}\Gamma$, $|\Gamma| = n$, не может превышать $ne^{an} \leqslant e^{2an}$, откуда следует неравенство (2.34), так как по неравенству Пайерлса $p(\Gamma) = p(\Gamma \in \partial|\mathcal{F}) \leqslant e^{-\mathcal{F}(\Gamma)}$.

Предположим теперь, что мы имеем бесконечную последовательность контуров такую, что $\operatorname{supp}\Gamma_n \subset \operatorname{Ext}\Gamma_{n-1}$, $|\Gamma_{n+1}| \geqslant |\Gamma_n|$, и существует точка $x \in \mathbf{Z}^d$ такая, что $x \in \operatorname{Int}\Gamma_n \cup \operatorname{supp}\Gamma_n$ для любого $n$. Так как $\sum\limits_n e^{(2a-\tau)n} < \infty$, применяя лемму Бореля — Кантелли, получаем, что такая ситуация осуществляется только с вероятностью 0, т. е. $\vartheta(\partial)$ корректно определено и полно. Последнее утверждение предложения следует непосредственно из (2.34).

Как мы увидим, чистым фазам, являющимся малым возмущением основного состояния $\psi_q$, будет отвечать $\tau$-функционал $\mathscr{F}_q$ такой, что $Z(\Gamma^q|\beta H) = Z(\Gamma^q|\mathscr{F}_q)$ для всех $\Gamma^q$, причем $\tau$ пропорционально $\beta$.

## § 9. Контурная статистическая сумма

В этом параграфе мы получим некоторые оценки для $Z(V|\mathscr{F})$. Они понадобятся при отождествлении кристаллических статистических сумм чистой фазы и соответствующей контурной модели.

Предложение 3. Пусть $\hat{\mathbf{Z}}$ — подгруппа конечного индекса $\mathbf{Z}^d$. Мы рассматриваем $\hat{\mathbf{Z}}$-периодические $\tau$-функционалы, $\tau > \tau_0$. Тогда справедливо следующее представление для $Z(V|\mathscr{F})$:

$$\ln Z(V|\mathscr{F}) = s(\mathscr{F})|V| + \Delta(V|\mathscr{F}),$$

$$s(\mathscr{F}) = \lim_{V\to\infty} \frac{\ln Z(V|\mathscr{F})}{|V|}, \qquad V\to\infty$$

в смысле Ван-Хова, т. е. $\frac{|\partial V|}{|V|}\to 0$. Остаточный член $\Delta(V|\mathscr{F})$ удовлетворяет неравенствам

$$|\Delta(V|\mathscr{F})| \leqslant \varepsilon(\hat{\mathbf{Z}}, \tau)|\partial V|,$$

$$\lim_{\tau\to\infty} s(\mathscr{F}) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \varepsilon(\hat{\mathbf{Z}}, \tau) = 0;$$

оба соотношения выполняются равномерно по $\tau$-функционалам $\mathscr{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}_t = t\mathscr{F}$, $t \geqslant 1$. Введем вероятности $p_V(\Gamma, t)$, $p(\Gamma, t)$ того, что граница $\partial$ содержит контур $\Gamma$. Заметим, что

$$\frac{d\ln Z(V|\mathscr{F}_t)}{dt} = -\sum_{\Gamma\subset V} \mathscr{F}(\Gamma)\, p_V(\Gamma, t)$$

и $\ln Z(V|\mathscr{F}_\infty) = 0$, так как пустая граница также принадлежит $D_q$. Поэтому

$$\ln Z(V|\mathscr{F}) = \int_1^\infty \sum_{\Gamma\subset V} \mathscr{F}(\Gamma)\, p_V(\Gamma, t)\, dt. \tag{2.35}$$

Для вычисления правой части в (2.35) необходимы следующие оценки, получаемые из предложения 1 и леммы 5:

$$\Delta_1(V \mid \mathcal{F}) = \int_1^\infty \sum_{\Gamma \subset V} \mathcal{F}(\Gamma) \mid p_V(\Gamma, t) - p(\Gamma, t) \mid dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^\infty \sum_{\Gamma \subset V} \mathcal{F}(\Gamma) \exp\left[a \mid \Gamma \mid - t\mathcal{F}(\Gamma) + (a - t\tau)\, d(\Gamma, \overline{V})\right] dt =$$

$$= \sum_{\Gamma \subset V} \frac{\mathcal{F}(\Gamma)}{\mathcal{F}(\Gamma) + \tau d(\Gamma, \overline{V})} \exp\left[a \mid \Gamma \mid - \mathcal{F}(\Gamma) + \right.$$

$$\left. + (a - \tau)\, d(\Gamma, \overline{V})\right] \leqslant \sum_{\Gamma \subset V} \exp\left[(a - \tau)\left(\mid \Gamma \mid + d(\Gamma, \overline{V})\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mid \partial V \mid \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (2k+1)^d e^{an} \exp\left[(a - \tau)(n + k)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \mid \partial V \mid \frac{\exp\left[2a - \tau\right]}{\left(1 - \exp\left[2a - \tau\right]\right)^2}. \qquad (2.36)$$

Далее, пусть $N$ — индекс подгруппы $\hat{\mathbf{Z}}$, тогда

$$\Delta_2(V \mid \mathcal{F}) = \int_1^\infty \sum_{d(\Gamma, \partial V) \leqslant N} \mathcal{F}(\Gamma)\, p(\Gamma, t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_1^\infty \sum_{d(\Gamma, \partial V) \leqslant N} \mathcal{F}(\Gamma)\, e^{-t\mathcal{F}(\Gamma)} dt \leqslant \sum_{d(\Gamma, \partial V) \leqslant N} e^{-\tau \mid \Gamma \mid} \leqslant$$

$$\leqslant \mid \partial V \mid (2N+1)^d \sum_{n=1}^{\infty} e^{(a-\tau)n} = \mid \partial V \mid \frac{(2N+1)^d e^{a-\tau}}{1 - e^{a-\tau}}. \qquad (2.37)$$

Что касается (2.35), то

$$\ln Z(V \mid \mathcal{F}) \leqslant \int_1^\infty \sum_{\Gamma \subset V} \mathcal{F}(\Gamma)\, e^{-t\mathcal{F}(\Gamma)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\Gamma \subset V} e^{-\tau \mid \Gamma \mid} \leqslant \mid V \mid \sum_{n=1}^{\infty} e^{(a-\tau)n} = \mid V \mid \frac{e^{a-\tau}}{1 - e^{a-\tau}}.$$

Рассмотрим разложение

$$\ln Z(V\mid\mathscr{F}) = \int_1^\infty \sum_{\Gamma\subset V} \mathscr{F}(\Gamma)\, p(\Gamma, t)\, dt + \\ + \int_1^\infty \sum_{\Gamma\subset V} \mathscr{F}(\Gamma)\,(p_V(\Gamma, t) - p(\Gamma, t))\, dt.$$

Вторая сумма ограничена по модулю $\Delta_1(V|\mathscr{F})$, а относительно первой суммы можно считать, что в нее входит точно $|V|/N$ контуров из каждого класса $\widehat{\mathbf{Z}}$-конгруэнтных контуров (контуры $\Gamma'$ и $\Gamma''$ называются $\widehat{\mathbf{Z}}$-конгруэнтными, если существует $z\in\widehat{\mathbf{Z}}$ такой, что $\Gamma'' = T_z\Gamma'$). Сумма этих членов дает $|V|s(\mathscr{F})$, а сумма остальных слагаемых (положительных или отрицательных) ограничена $\Delta_2(V|\mathscr{F})$. Это доказывает предложение.

Далее,

$$s(\mathscr{F}) \leqslant \frac{e^{a-\tau}}{N(1-e^{a-\tau})},$$

$$|\Delta(V\mid\mathscr{F})|\,|\partial V| \leqslant \Delta_1(V\mid\mathscr{F}) + \Delta_2(V\mid\mathscr{F}).$$

Изучение дальнейших свойств $Z(V|\mathscr{F})$ потребует введения новой нормы для $\tau$-функционалов. А именно, возьмем константу $c>1$ и положим

$$|||\mathscr{F}||| = \sup_\Gamma \frac{|\mathscr{F}(\Gamma)|}{(|\Gamma| + V(\Gamma))\, c^{\delta(\Gamma)}},$$

где $\delta(\Gamma) = \operatorname{diam}(\operatorname{supp}\Gamma)$.

Предложение 4. Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ — периодические $\tau$-функционалы, $\tau > a + \ln c$, то

$$|s(\mathscr{F}) - s(\mathscr{F}')| \leqslant \varepsilon(\tau, c)\, |||\mathscr{F} - \mathscr{F}'|||,$$

где $\lim\limits_{\tau\to\infty} \varepsilon(\tau, c) = 0$, $c$ фиксировано.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$|\ln Z(V\mid\mathscr{F}) - \ln Z(V\mid\mathscr{F}')| \leqslant \varepsilon(\tau, c)\cdot|V|\cdot|||\mathscr{F}-\mathscr{F}'|||.$$

Но из неравенства Пайерлса следует:

$$\left|\frac{\partial \ln Z(V\mid\overline{\mathscr{F}})}{\partial\overline{\mathscr{F}}(\Gamma)}\right| = p_V(\Gamma) \leqslant e^{-\overline{\mathscr{F}}(\Gamma)},$$

и $\bar{\mathcal{F}} = t\mathcal{F} + (1-t)\mathcal{F}'$ — снова τ-функционал. Поэтому

$$|\ln Z(V \mid \mathcal{F}) - \ln Z(V \mid \mathcal{F}')| \leqslant \sum_{\Gamma \subset V} e^{-\tau|\Gamma|} |\mathcal{F}(\Gamma) - \mathcal{F}'(\Gamma)| \leqslant$$

$$\leqslant \||\mathcal{F} - \mathcal{F}'\|| \sum_{\Gamma \subset V} e^{-\tau|\Gamma|} (|\Gamma| + V(\Gamma)) c^{\delta(\Gamma)} \leqslant$$

$$\leqslant |V| \||\mathcal{F} - \mathcal{F}'\|| \sum_{n=1}^{\infty} (n + n^d) c^n e^{(a-\tau)n},$$

так как $\delta(\Gamma) \leqslant |\Gamma|$, $|V(\Gamma)| \leqslant |\Gamma|^d$, и предложение доказано.

Определение 2.12. Пусть $b \geqslant 0$, $\mathcal{F}$ — τ-функционал на $\vartheta_q$, тогда

$$Z(V \mid \mathcal{F}, b) = \sum_{\partial \subset V} \prod_{\Gamma \in \vartheta(\partial)} e^{bV(\Gamma)} e^{-\mathcal{F}(\partial)}$$

называется параметрической контурной статистической суммой.

Легко видеть, что $Z(V|\mathcal{F}, 0) = Z(V|\mathcal{F})$, и так как $b \geqslant 0$, $0 \leqslant V(\Gamma) \leqslant |V|$ при $\Gamma \subset V$, то

$$Z(V|\mathcal{F}) \leqslant Z(V|\mathcal{F}, b) \leqslant Z(V|\mathcal{F}) e^{b|V|}.$$

Для $\hat{\mathbf{Z}}$-периодического τ-функционала $\mathcal{F}$ мы получаем из предложения 3

$$-b|V| + \varepsilon(\hat{\mathbf{Z}}, \tau)|\partial V| \leqslant$$

$$\leqslant \ln Z(V|\mathcal{F}, b) - (s(\mathcal{F}) + b)|V| \leqslant \varepsilon(\hat{\mathbf{Z}}, \tau)|\partial V|, \quad (2.38)$$

где $\varepsilon(\hat{\mathbf{Z}}, \tau)$ определяется в предложении 3. Более полное описание свойств параметрической контурной статистической суммы дается в следующем предложении.

Предложение 5. Определим $\Delta(V|\mathcal{F}, b)$ для периодического τ-функционала $\mathcal{F}$ соотношением

$$\ln Z(V|\mathcal{F}, b) = (s(\mathcal{F}) + b)|V| + \Delta(V|\mathcal{F}, b).$$

Если $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ — периодические τ-функционалы, $\tau > a + \ln c$, $b$, $b' > 0$, то

$$|\Delta(V \mid \mathcal{F}', b') - \Delta(V \mid \mathcal{F}'', b'')| \leqslant$$

$$\leqslant 2|b - b'||V| + \left(\frac{1}{c-1} + \varepsilon(\tau, c)\right) c^{\delta(V)} |V| \||\mathcal{F}' - \mathcal{F}''\||,$$

где $\varepsilon(\tau, c)$ определяется в предложении 4.

Доказательство. Мы рассмотрим только два частных случая: $b' = b''$ и $\mathscr{F}' = \mathscr{F}''$. Во втором случае имеем:

$$\left|\frac{\partial \ln Z(V \mid \mathscr{F}, b)}{\partial b}\right| \leqslant |V|,$$

а отсюда немедленно вытекает утверждение предложения. В первом случае:

$$\Delta(V \mid \mathscr{F}', b) - \Delta(V \mid \mathscr{F}'', b) | \leqslant | s(\mathscr{F}') - s(\mathscr{F}'') | \, |V| + \\ + |\ln Z(V \mid \mathscr{F}'', b) - \ln Z(V \mid \mathscr{F}'', b)|.$$

Из предложения 4 следует

$$| s(\mathscr{F}') - s(\mathscr{F}'') | \leqslant \varepsilon(\tau, c) \, |||\mathscr{F}' - \mathscr{F}''|||,$$

и нам остается доказать, что

$$|\ln Z(V \mid \mathscr{F}', b) - \ln Z(V \mid \mathscr{F}'', b)| \leqslant \\ \leqslant |V| \frac{c^{\delta(V)}}{c-1} |||\mathscr{F}' - \mathscr{F}''|||. \qquad (2.39)$$

Пусть $\rho_V(\cdot \mid \mathscr{F}, b)$ — вероятностное распределение на множестве границ $\partial \subset V$,

$$\rho_V(\partial \mid \mathscr{F}, b) = Z^{-1}(V \mid \mathscr{F}, b) \prod_{\Gamma \in \vartheta(\partial)} e^{bV(\Gamma)} e^{-\mathscr{F}(\partial)}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial \ln Z(V \mid \mathscr{F}, b)}{\partial \mathscr{F}(\Gamma)} = -\sum_{\Gamma \in \partial} \rho_V(\partial \mid \mathscr{F}, b),$$

$$\ln Z(V \mid \mathscr{F}', b) - \ln Z(V \mid \mathscr{F}'', b) = \\ = -\sum_{\Gamma \subset V} \sum_{\partial \ni \Gamma} \rho_V(\partial \mid \overline{\mathscr{F}}, b)(\mathscr{F}'(\Gamma) - \mathscr{F}''(\Gamma)),$$

где $\overline{\mathscr{F}} = t\mathscr{F}' + (1-t)\mathscr{F}''$ для некоторого $t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$-\sum_{\Gamma \subset V} \sum_{\Gamma \in \partial} \rho_V(\partial \mid \overline{\mathscr{F}}, b)(\mathscr{F}'(\Gamma) - \mathscr{F}''(\Gamma)) = \\ = -\sum_{\partial \subset V} \rho_V(\partial \mid \overline{\mathscr{F}}, b)(\mathscr{F}'(\partial) - \mathscr{F}''(\partial)),$$

откуда получаем

$$|\ln Z(V \mid \mathscr{F}', b) - \ln Z(V \mid \mathscr{F}'', b)| \leqslant \\ \leqslant |||\mathscr{F}' - \mathscr{F}''||| \sum_{\partial \subset V} \rho_V(\partial \mid \overline{\mathscr{F}}, b) \sum_{\Gamma \in \partial} (|\Gamma| + V(\Gamma)) c^{\delta(\Gamma)}.$$

Остается доказать, что

$$\alpha(V) = \max_{\partial \subset V} \frac{1}{|V|} \sum_{\Gamma \in \partial} (|\Gamma| + V(\Gamma))\, c^{\delta(\Gamma)} \leqslant \frac{c^{\delta(V)}}{c-1}. \qquad (2.40)$$

Обозначим $\gamma(n) = \max\limits_{\delta(V) \leqslant n} \alpha(V)$, тогда

$$\sum_{\Gamma \in \partial} (|\Gamma| + V(\Gamma))\, c^{\delta(\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\Gamma \in \vartheta(\partial)} (|\Gamma| + V(\Gamma))\, c^{\delta(\Gamma)} + \sum_{\Gamma \in \vartheta(\partial)} V(\Gamma)\, \alpha(\operatorname{Int}\Gamma) \leqslant$$
$$\leqslant |V| \left[c^{\delta(V)-1} + \gamma(\delta(V) - 1)\right],$$

так как $\delta(\Gamma)$, $\delta(\operatorname{Int}\Gamma) \leqslant \delta(V) - 1$, если $\Gamma \subset V$, а $\sum\limits_{\Gamma \in \vartheta(\partial)} (|\Gamma| + V(\Gamma)) \leqslant |V|$ при $\partial \subset V$. Мы получаем

$$\alpha(V) \leqslant c^{\delta(V)-1} + \gamma(\delta(V) - 1).$$

Отсюда следует

$$\gamma(n) \leqslant c^{n-1} + \gamma(n-1),$$
$$\gamma(n) \leqslant c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c + 1 = \frac{c^n - 1}{c - 1},$$

откуда немедленно вытекает (2.40).

Доказательство закончено.

## § 10. Доказательство основной теоремы 2.1

Основная идея доказательства состоит в описании статистических свойств чистых фаз, соответствующих периодическим основным состояниям. Для этого используются контурные модели так, что для каждой фазы совместные распределения внешних контуров в точности совпадают с соответствующими распределениями в подходящим образом подобранной контурной модели. Поэтому предложение 2 может быть переформулировано в том смысле, что чистая фаза характеризуется как малое возмущение соответствующего основного состояния.

Контуры, как и ранее, определяются по отношению к множеству периодических основных состояний исходного гамильтониана $H_0$, $\widehat{\mathbf{Z}}$ обозначает наибольшую подгруппу $\mathbf{Z}^d$, такую, что все основные состояния и гамильтонианы $H_0, H_1, \ldots, H_{r-1}$ $\hat{\mathbf{Z}}$-инвариантны.

Рассмотрим теперь малое возмущение $H_\mu = H_0 + \mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \ldots + \mu_{r-1} H_{r-1}$ основного гамильтониана $H_0$. Энергия контура $\Gamma^q$ может быть разложена следующим образом:

$$H_\mu(\Gamma^q) = \Psi_\mu(\Gamma^q) + \sum_{m=1}^{r} [h_\mu(\psi_m) - h_\mu(\psi_q)] V_m(\Gamma^q), \tag{2.41}$$

где $\Psi_\mu$ — контурный функционал, определяемый соотношением (2.41), $h_\mu(\psi_m)$ — удельная энергия $\psi_m$ по отношению к $H_\mu$. Для $\mu = 0$ мы получаем $\Psi_0(\Gamma^q) = H_0(\Gamma^q)$ из леммы 1, а по предположению $H_0$ удовлетворяет условию устойчивости Пайерлса $H_0(\Gamma^q) \geqslant \rho|\Gamma^q|$ с положительной константой $\rho$ (см. определение 2.3). С другой стороны, $H_1, H_2, \ldots, H_{r-1}$ определены посредством ограниченных локальных гамильтонианов, так что существует $\varepsilon_0 > 0$, при котором

$$|\Psi_\mu(\Gamma^q) - H_0(\Gamma^q)| \leqslant \frac{\rho}{2} |\Gamma^q|,$$

если

$$|\mu| = \max_{1 \leqslant i \leqslant r-1} |\mu_i| < \varepsilon_0,$$

откуда следует

$$\Psi_\mu(\Gamma^q) \geqslant \frac{\rho}{2} |\Gamma^q| \quad \text{при} \quad |\mu| < \varepsilon_0. \tag{2.42}$$

На основании леммы 2 мы можем предположить, что $\varepsilon_0 > 0$ так мало́, что помимо (2.42) выполняется также и соотношение $g(H) \subset g(H_0)$.

Предложение 6. Существуют такие константы $\bar{\tau} > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, зависящие только от $H_0, H_1, \ldots, H_r$, что для любых $\mu, \tau, \beta$, таких, что $|\mu| \leqslant \varepsilon_0$, $\tau \geqslant \bar{\tau}$, $\beta \geqslant \bar{\beta} = 2(\bar{\tau}+1)/\rho$, существует и единственно множество $\hat{\mathbf{Z}}$-периодических $\tau$-функционалов

$$\hat{\mathscr{F}} = (\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_r), \quad \mathscr{F}_q = \mathscr{F}_q(\Gamma^q), \quad \Gamma^q \in \vartheta_q,$$

таких, что для любого $\Gamma^q \in \vartheta_q$,

$$Z(\Gamma^q \mid \beta H_\mu) = \exp\left[b_q V(\Gamma^q)\right] \cdot Z(\Gamma^q \mid \mathcal{F}_q). \qquad (2.43)$$

Здесь

$$b_q = \beta h_\mu(\psi_q) - s(\mathcal{F}_q) + \alpha, \qquad q = 1, \ldots, r, \quad (2.44)$$

а $\alpha$ определяется из равенства

$$\min_{1 \leqslant q \leqslant r} b_q = 0, \qquad (2.45)$$

т. е. $b = (b_1, \ldots, b_r) \in O_r$. Более того, это единственное решение непрерывно зависит от параметров $\beta$ и $\mu$ в слабой топологии.

Доказательство. Заметим, что при заданных $\beta$ и $H_\mu$ (2.43) задает систему уравнений относительно $\widehat{\mathcal{F}}$. Для доказательства существования единственного решения мы перепишем (2.43) в виде $\widehat{\mathcal{F}} = \beta \widehat{\Psi}_\mu + T(\widehat{\mathcal{F}}_\mu, \beta, \mu)$, где $\widehat{\Psi}_\mu = (\Psi_\mu(\Gamma^1), \ldots, \Psi_\mu(\Gamma^r))$, а $T$ — сжимающее отображение при малых $|\mu|$, $\beta^{-1}$. Действительно, сравнивая (2.43) и определение 2.12, можно получить из (2.43)

$$Z_q(V \mid \beta H_\mu) = Z(V \mid \mathcal{F}_q, b_q) \qquad (2.43')$$

и, подставляя (2.43) и (2.43′) в (2.18), написать

$$\exp\left[b_q V(\Gamma^q)\right] Z(\Gamma^q \mid \mathcal{F}_q) = \\ = \exp\left[-\beta H_\mu(\Gamma^q)\right] \prod_{m=1}^{r} Z(\mathrm{Int}_m \Gamma^q \mid \mathcal{F}_m, b_m). \qquad (2.46)$$

Уравнение (2.46) эквивалентно (2.43). С другой стороны, используя (2.20) и разложения предложений 3 и 5, мы имеем:

$$\ln Z(\Gamma^q \mid \mathcal{F}_q) = \\ = s(\mathcal{F}_q) V(\Gamma^q) - \mathcal{F}_q(\Gamma^q) + \sum_m \Delta(\mathrm{Int}_m \Gamma^q \mid \mathcal{F}_q);$$

$$\ln Z(\mathrm{Int}_m \Gamma^q \mid \mathcal{F}_m, b_m) = \\ = [s(\mathcal{F}_m) + b_m] V_m(\Gamma^q) + \Delta(\mathrm{Int}_m \Gamma^q \mid \mathcal{F}_m, b_m),$$

и соотношение (2.46) перепишется в виде:

$$[b_q + s(\mathcal{F}_q)]\, V(\Gamma^q) - \mathcal{F}_q(\Gamma^q) + \sum_{m=1}^{r} \Delta\left(\operatorname{Int}_m \Gamma^q \,\middle|\, \mathcal{F}_q\right) = \\ = -\beta H_\mu(\Gamma^q) + \sum_{m=1}^{r} [s(\mathcal{F}_m) + b_m]\, V_m(\Gamma^q) + \\ + \sum_{m=1}^{r} \Delta\left(\operatorname{Int}_m \Gamma^q \,\middle|\, \mathcal{F}_m, b_m\right). \quad (2.47)$$

Окончательно, используя (2.41) и (2.44), получим

$$\mathcal{F}(\Gamma^q) = \beta \Psi_\mu(\Gamma^q) + T_q(\widehat{\mathcal{F}}, \beta, h_\mu), \qquad (2.48)$$

где $h_\mu = (h_\mu(\psi_1), \ldots, h_\mu(\psi_r))$ и

$$T_q(\widehat{\mathcal{F}}, \beta, h_\mu) = \\ = \sum_{m=1}^{r} \left[\Delta\left(\operatorname{Int}_m \Gamma^q \,\middle|\, \mathcal{F}_q\right) - \Delta\left(\operatorname{Int}_m \Gamma^q \,\middle|\, \mathcal{F}_m, b_m\right)\right]$$

— функционал на $\vartheta_q$; мы рассматриваем $b$ как функцию от $\widehat{\mathcal{F}}$, $\beta$ и $h_\mu$, определяемую (2.44) и (2.45). Вводя обозначение $\widehat{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_r)$, мы можем сокращенно переписать (2.48) в виде:

$$\widehat{\mathcal{F}} = \beta \widehat{\Psi}_\mu + \widehat{T}(\widehat{\mathcal{F}}, \beta, h_\mu), \qquad (2.43'')$$

$\widehat{\Psi}_\mu$ и $h_\mu$ — линейные функции от $\mu$. Уравнение (2.43″) снова эквивалентно (2.43), и, как легко следует из (2.43), (2.18) и (2.20), любое периодическое решение (2.43) обязательно является $\widehat{\mathbf{Z}}$-периодическим. С этого момента мы предполагаем, что $\varepsilon_0$ достаточно мало для выполнения леммы 2 и соотношения (2.42), и рассматриваем (2.43″) как уравнение в банаховом пространстве $B$ $\widehat{\mathbf{Z}}$-периодических контурных функционалов $\widehat{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_r)$ с нормой $|||\widehat{\mathcal{F}}||| = \max_q |||\mathcal{F}_q|||$, где константа $c$, участвующая в определении $|||\mathcal{F}_q|||$, равна 13.

Обозначим через $B_\tau$ множество таких контурных функционалов $\widehat{\mathcal{F}} \subset B$, что каждая компонента $\mathcal{F}_q$ является $\tau$-функционалом на соответствующем $\vartheta_q$. Ясно, что $B_\tau$ — замкнутое, выпуклое подмножество $B$. Мы покажем вначале, что $(\beta\widehat{\Psi}_\mu+\widehat{T})$ отображает $B_\tau$ в себя, если $\tau$ и $\beta$ достаточно велики.

Действительно, пусть $\tau_1>0$ так велико, что выполняются предложения 1—5 для $\tau\geqslant\tau_1$. Тогда, используя (2.39) и предложение 3, получаем

$$T_q(\widehat{\mathscr{F}},\beta,h_\mu)\geqslant-2\varepsilon(\widehat{\mathbf{Z}},\tau)\sum_{m=1}^{r}\left|\partial\left(\operatorname{Int}_m\Gamma^q\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant-2\cdot9^d\varepsilon(\widehat{\mathbf{Z}},\tau)\left|\Gamma^q\right|,\quad\widehat{\mathscr{F}}\in B_\tau,\quad\tau\geqslant\tau_1.\tag{2.49}$$

Выберем $\bar\tau$ таким большим, что $\bar\tau>\tau_1$ и при $\tau>\bar\tau$

$$2\cdot9^d\varepsilon(\widehat{\mathbf{Z}},\tau)<1.\tag{2.50}$$

Далее, если $\beta\rho\geqslant2(\tau+1)$, $\tau\geqslant\bar\tau$ и $\widehat{\mathscr{F}}\in B_\tau$, то

$$\beta\Psi_\mu\left(\Gamma^q\right)+T_q(\widehat{\mathscr{F}},\beta,h_\mu)\geqslant\tau\left|\Gamma^q\right|,\tag{2.51}$$

т. е. $\beta\widehat{\Psi}_\mu+\widehat{T}\in B_\tau$, так как $\widehat{\Psi}_\mu\in B$, $\widehat{T}(\widehat{\mathscr{F}},\beta,h_\mu)\in B$, что следует из (2.39). Заметим теперь, что предложения 4 и 5 дают

$$T_q(\widehat{\mathscr{F}},\beta,h)\left(\Gamma^q\right)-T_q(\widehat{\mathscr{F}}',\beta,h')\left(\Gamma^q\right)|\leqslant$$

$$\leqslant2\sum_{m=1}^{r}\left|b_m-b_m'\right|V_m\left(\Gamma^q\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{c-1}+\varepsilon(\tau,c)\right)\sum_{m=1}^{r}c^{\delta\left(\operatorname{Int}_m\Gamma^q\right)}V_m\left(\Gamma^q\right)|||\mathscr{F}_m-\mathscr{F}_m'|||\leqslant$$

$$\leqslant2\left[\beta\left|h-h'\right|+\varepsilon(\tau,c)\,|||\,\widehat{\mathscr{F}}-\widehat{\mathscr{F}}'\,|||\,\right]V\left(\Gamma^q\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{c-1}+\varepsilon(\tau,c)\right)|||\,\widehat{\mathscr{F}}-\widehat{\mathscr{F}}'\,|||\,V\left(\Gamma^q\right)c^{\delta\left(\Gamma^q\right)},$$

$$\left|h-h'\right|=\max_q\left|h(\psi_q)-h'(\psi_q)\right|.$$

Отсюда сразу следует:

$$|||\,\widehat{T}(\widehat{\mathscr{F}},\beta,h)-\widehat{T}(\widehat{\mathscr{F}}',\beta,h')\,|||\leqslant$$

$$\leqslant2\left(\frac{1}{12}+2\varepsilon(\tau,13)\right)|||\,\widehat{\mathscr{F}}-\widehat{\mathscr{F}}'\,|||+2\beta\left|h-h'\right|.\tag{2.52}$$

Предположим, что $\bar{\tau}$ выбрано так, чтобы помимо (2.48) и $\bar{\tau} > \tau_1$ выполнялось еще соотношение $\varepsilon(\tau, 13) \leqslant 1/12$, если $\tau \geqslant \bar{\tau}$. Тогда при $h = h'$ из (2.52) следует

$$|||\hat{T}(\hat{\mathscr{F}}, \beta, h) - \hat{T}(\hat{\mathscr{F}}', \beta, h')||| \leqslant \frac{1}{2} |||\hat{\mathscr{F}} - \hat{\mathscr{F}}'|||,$$

что доказывает утверждение предложения.

Вернемся к доказательству основной теоремы. Из предложения 6 следует, что для любых $\beta > \bar{\beta}$ и $\mu \in U_0 = \{\mu: |\mu| \leqslant \varepsilon_0\}$ существует набор $\hat{\mathscr{F}} = \hat{\mathscr{F}}(\beta, \mu)$ контурных функционалов $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_r$, удовлетворяющих (2.43). Более того, каждый $\mathscr{F}_q$ является $\hat{\mathbf{Z}}$-периодическим $\tau$-функционалом, $\tau = \frac{1}{2}\beta\rho - 1$, и из (2.52) следует, что

$$\frac{1}{2} |||\hat{\mathscr{F}}(\beta, \mu) - \hat{\mathscr{F}}(\beta, \mu')||| \leqslant \beta |||\hat{\Psi}_\mu - \hat{\Psi}_{\mu'}||| + 2\beta |h_\mu - h_{\mu'}|. \tag{2.53}$$

Так как $\hat{\Psi}_\mu - \hat{\Psi}_{\mu'}$ и $h_\mu - h_{\mu'}$ — однородные и линейные функции $\mu$, то (2.53) означает, что $\hat{\mathscr{F}}(\beta, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица относительно $\beta \cdot \mu$ с константой, не зависящей от $\beta$. Перепишем (2.44), (2.45) в виде $b = E_\beta(\mu)$. Из (2.53) и предложения 4 следует, что $E_\beta(\mu)$ удовлетворяет условию Липшица относительно $\beta \cdot \mu$. Мы покажем, что при достаточно больших $\beta$ отображение $E_\beta$ осуществляет гомеоморфизм $U_0$ в $O_r$, причем

$$E_\beta U_0 \supset V_0 = \left\{b;\ b \in O_r,\ \max_q b_q \leqslant 1\right\}.$$

Чтобы доказать это, рассмотрим систему линейных уравнений относительно $\mu$

$$h_\mu(\Psi_q) - h_\mu(\Psi_{q+1}) = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i [h_i(\Psi_q) - h_i(\Psi_{q+1})],$$
$$q = 1, 2, \ldots, r - 1.$$

Поскольку возмущение $H = H_0 + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i H_i$ полностью снимает вырождение $g(H_0)$, то $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{q-1}, \psi_{q+1}, \ldots, \psi_r\} = g(H_\mu)$ при некоторых $\mu$ возможно для любого $q$, поэтому матрица $\|h_{iq}\| = \|h_i(\Psi_q) - h_i(\Psi_{q+1})$ имеет ранг $r-1$, и каждое $\mu_i$ может быть выражено как линейная комбинация разностей $h(\psi_q) - h(\psi_{q+1})$. Подставляя это выражение в равенство

$$\beta h(\psi_q) - \beta h(\psi_{q+1}) = b_q - b_{q+1} + s(\mathscr{F}_q) - s(\mathscr{F}_{q+1}),$$

мы получаем систему нелинейных уравнений для нахождения отображения, обратного к $E_\beta$:

$$\mu_i = \frac{1}{\beta} \sum_{q=1}^{r} a_{iq}(b_q + s(\mathscr{F}_q)), \tag{2.54}$$

коэффициенты $a_{iq}$ зависят только от величин $h_i(\psi_q)$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$; $q = 1, 2, \ldots, r$, а $s(\mathscr{F}_q)$ — функция от $\beta\mu$. Предположим, что $E_\beta(\mu) = E_\beta(\mu')$ для некоторых $\mu$, $\mu' \in U_0$. Из (2.49) и из предложения 4 следует, что

$$|\mu - \mu'| \leqslant L(\beta)|\mu - \mu'|, \qquad \lim_{\beta\to\infty} L(\beta) = 0.$$

С другой стороны, по предложению 3 $\lim\limits_{\beta\to\infty} s(\mathscr{F}_q) = 0$ равномерно по $\mu \in U_0$ для всех $q$. Поэтому мы можем выбрать $\beta_0 \geqslant \bar{\beta}$ так, что $L(\beta) < 1$ при $\beta > \beta_0$, и правая часть (2.49) отображает $U_0$ в себя для всех $b \in U_0$ и $\beta \geqslant \beta_0$. Это доказывает наше утверждение. Для вывода последнего утверждения основной теоремы нам остается только заметить, что отображение $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots, \mathscr{F}_r) = \hat{\mathscr{F}}(\beta, \mu)$ определяет $\tau$-функционалы $\mathscr{F}_q$ для тех $q$, для которых $b_q = 0$, порождающие контурные модели, которые соответствуют предельным распределениям Гиббса, отвечающим $\beta H_\mu$. Для них распределение внешних контуров такое же, как и в соответствующей контурной модели, поэтому из предложения 2 следует, что различные фазы сосуществуют в соответствии с фазовой диаграммой, описанной в основной теореме 2.1.

Предложение 6 является основным при доказательстве теоремы. Оно связывает контурные модели и контурные модели с параметром с решетчатыми моделями. Оказывается, что статистические суммы

$Z(\Gamma^q|\beta H_\mu)$ при всех $\Gamma^q$ в точности равны статистическим суммам либо соответствующей контурной модели, либо соответствующей параметрической контурной модели. Этот факт представляется довольно неожиданным, но именно его обнаружение открыло путь к доказательству основной теоремы. С другой стороны, предложение 6 содержит в себе условие равновесия фаз.

В самом деле, рассмотрим такой набор параметров $\mu$, когда $b_q=0$ при всех $q=1, 2, \ldots, r$, т. е. когда все статистические суммы равны статистическим суммам соответствующих контурных моделей. Возьмем какой-либо контур $\Gamma^q$. Тогда естественно представить себе, что в $\operatorname{Int}_m(\Gamma^q)$ содержится $m$-я фаза и $\Gamma^q$ есть граница раздела фаз. Возьмем конечный объем $W_q$ с граничными условиями $\psi_q$ вне $W_q$ и оценим вероятность внешнего контура $\Gamma^q\subset W_q$. Фиксируем конфигурацию $\varphi(W_q-(\operatorname{Int}\Gamma^q\cup\Gamma^q))$ вне $\Gamma^q$. Тогда статистическая сумма по конфигурациям внутри $\Gamma^q$ равна в силу предложения 6

$$e^{h(\psi_q)V(\Gamma^q)}Z\left(\Gamma^q\,|\,\beta H_\mu\right)=e^{h(\psi_q)V(\Gamma_q)}Z\left(\Gamma^q\,|\,\mathscr{F}_q\right).$$

С другой стороны, при той же $\varphi(W_q-(\operatorname{Int}\Gamma^q\cup\Gamma^q))$ статистическая сумма по конфигурациям, у которых все внешние контуры лежат либо в $\operatorname{Int}\Gamma^q$, либо вне $\Gamma^q$, отличается множителем $e^{h_\mu(\psi_q)V(\Gamma^q)}$ от разреженной статистической суммы $Z(\Gamma^q|\beta H_\mu)$, которая в силу леммы 3 и предложения 6 равна $Z_q(\Gamma^q|\mathscr{F}_q)$. Отсюда получаем, что вероятность внешнего контура $\Gamma^q$ не превосходит $Z(\Gamma^q|\mathscr{F}_q)/Z_q(\Gamma^q|\mathscr{F}_q)$. Если $\mathscr{F}_q$ — $\tau$-функционал, то последнее выражение не превосходит $\exp\{-\mathrm{const}\cdot\tau|\Gamma^q|\}$. Более трудно, но также возможно, получить аналогичную оценку снизу.

Оценки такого типа как раз выражают условие равновесия фаз: выигрыш в свободной энергии от замены в какой-либо области одной фазы другой порядка длины границы, а не объема!

При произвольных значениях $\mu$ приведенные выше рассуждения переносятся на статистические суммы, описываемые контурными моделями. Смысл параметрических контурных моделей в том, чтобы описать термодинамически невыгодные, т. е. неустойчивые фазы. В работах Д. Г. Мартиросяна [23] исследуется статистика конфигураций, отвечающих параметрическим контурным моделям с параметром. Основным результатом является «теорема о полоске», утверждающая, что при неустойчивых граничных условиях типичные конфигурации устроены так, что только небольшая полоска около границы чувствует влияние граничных условий, а у типичных конфигураций вне этой полоски расположены устойчивые фазы. Исследования в этом направлении было бы интересно продолжить с тем, чтобы в полном объеме доказать утверждение: построенные в основной теореме чистые периодические предельные распределения Гиббса исчерпывают все периодические предельные распределения Гиббса!

## § 11. Дополнительные замечания

1°. Введенное в § 2 этой главы определение основного состояния применимо не только к периодическим конфигурациям. Могут быть, разумеется, и основные состояния, не являющиеся периодическими конфигурациями. Например, пусть $H_0$ — гамильтониан $d$-мерной ферромагнитной модели Изинга, $\psi_{a,i}$ — конфигурация, для которой $\varphi(x)=+1$ для $x=(x_1, \ldots, x_d)$ при $x_i<a$ и $\varphi(x)=-1$ в остальных случаях. Тогда, как легко видеть, $\psi_{a,i}$ — основное состояние. Однако вопрос о том, когда $\psi_{a,i}$ порождает при больших $\beta$ гиббсовское поле, являющееся малым возмущением $\psi_{a,i}$, далеко не прост. Дж. Галлавотти и С. Миракль-Соль [68] и А. Мессаже [102] показали, что при $d=2$ и больших $\beta$ такие основные состояния не приводят ни к каким новым предельным распределениям Гиббса. Причина этого та же, что и причина, вызывающая отсутствие фазовых переходов в одномерном случае: отклонения от основного состояния могут быть большими по своим размерам, но разность энергий при этом может оставаться конечной и не зависящей от размеров отклонения. Иными словами, такое основное состояние естественно считать неустойчивым. Наоборот, при $d>2$ это уже не так. Р. Л. Добрушин доказал, что при $d \geqslant 3$ и достаточно больших $\beta$ существуют предельные гиббсовские распределения, являющиеся малым отклонением от основного состояния (см. [17]). Красивое доказательство этого утверждения для модели Изинга было получено Х. Ван Бейереном [46]. Было бы чрезвычайно интересно получить общую теорему, которая показывала бы, при каких условиях непериодическое основное состояние порождает при больших $\beta$ близкие к нему гиббсовские состояния.

2°. В недавних работах Дж. Глимма, А. Джаффе и Т. Спенсера [77], [78] было показано существование фазового перехода в модели квантовой теории поля $\lambda:\varphi^4:_2$ при достаточно больших $\lambda/m_0^2$. Применяемая ими техника достаточно сложна, и мы не можем остановиться на этом подробно. Мы поясним, однако, что понимается в моделях квантовой теории поля под основными состояниями и почему при больших $\lambda/m_0^2$ происходит вырождение основных состояний, которое и является причиной фазового перехода. При изложении этого вопроса мы следуем [106].

Проще всего рассмотреть решетку $\mathbf{Z}^2$ с шагом $h$ и в окончательном выражении устремить $h \to 0$. Итак, рассмотрим решетчатую модель, в которой основные переменные $\varphi(x)$ принимают действительные значения $-\infty < \varphi(x) < \infty$, $x = (x_1, x_2)$ и гамильтониан $H$ имеет вид

$$H = \sum_{x=(x_1,x_2)} \Big[\Big(\frac{1}{2}\varphi(x_1+h, x_2) - \varphi(x_1, x_2)\Big)^2 + (\varphi(x_1, x_2+h) - \varphi(x_1, x_2))^2 + \frac{1}{2} m_0^2 :\varphi^2(x):_{m_0^2} h^2 + \lambda :P(\varphi(x)):_{m_0^2} h^2\Big] = H_{m_0^2} + \lambda \sum_x :P(\varphi(x)):_{m_0^2} h^2.$$

Здесь

$$P(\varphi) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \varphi^k, \quad :P(\varphi):_{m_0^2} = \sum_{k=1}^{2n} a_k :\varphi^k:_{\sigma\left(m_0^2\right)},$$

где $:\varphi^k:_{\sigma\left(m_0^2\right)}$ — $k$-й полином Эрмита, вычисленный по гауссовскому распределению случайной величины $\varphi(x)$

с дисперсией $\sigma(m_0)$, порожденному свободным полем $H_{m_0^2}$. Заметим, что $\sigma(m_0) \sim \mathrm{const} \cdot \ln h^{-1}$ при $h \to 0$ и $\sigma(m_0) - \sigma(m_1) \sim \mathrm{const} \cdot \ln (m_1/m_0)$ при $m_1 \to \infty$ равномерно по $h$.

Если пытаться определить основное состояние приведенного гамильтониана как периодическую конфигурацию поля с минимальной удельной энергией, то мы легко найдем, что значение этой конфигурации будет стремиться к $\pm\infty$ при $h \to 0$. Это показывает, что прямое применение соответствующего определения для решетчатых моделей здесь не подходит, поскольку оно предполагает, что колебания поля около основного состояния абсолютно малы. В рассматриваемом же случае естественно ожидать, что эти флуктуации малы только в среднем, когда производится усреднение по малым областям, не зависящим от $h$.

Корректное определение основного состояния делается следующим образом. Будем искать основные состояния, являющиеся константами, т. е. $\varphi(x) \equiv A$ для всех $x$. Положим $\varphi = A + \psi$ и подставим это выражение в гамильтониан. Допустим, что результат может быть записан в виде

$$H = H(\psi) = \frac{1}{2} \sum \Big[ (\psi(x_1 + h, x_2) - \psi(x_1, x_2))^2 + \\ + (\psi(x_1, x_2 + h) - \psi(x_1, x_2))^2 + h^2 \Big( m^2 :\psi^2:_{\sigma(m)} + \\ + \sum_{k=3}^{2n} q_k(A) :\psi^k:_{\sigma(m)} \Big) + V(A) \Big],$$

где $V(A)$ — постоянная, $q_k$ — коэффициент, $m = m(A) > > 0$.

Последнее выражение показывает, что гамильтониан $H(\psi)$ содержит часть, отвечающую свободному полю с массой $m$, а $\sum_{k=3}^{2n} q_k(A) :\psi^k:_{\sigma(m)}$ — взаимодействие.

При этом $A$ — состояние локального минимума. Разумеется, $A$ и $m$ должны зависеть от единственного безразмерного параметра теории $\lambda/m_0^2$.

Определение 2.13. Пусть существуют непрерывные функции $A(\lambda/m_0^2)$, $m(\lambda/m_0^2)$ такие, что $q_k/m^2 \to 0$, $3 \leqslant k \leqslant 2n$, при $\lambda/m_0^2 \to \infty$. Тогда пара $A(\lambda/m_0^2)$, $m(\lambda_0/m_0^2)$ называется асимптотическим локальным основным состоянием (а. л. о. с.) с голой массой $m = m(\lambda_0/m_0^2)$.

Определение 2.14. А. л. о. с. $(A(\lambda/m_0^2), m(\lambda/m_0^2))$ называется абсолютным а. л. о. с., если $V(A) = \min V(A')$, где минимум берется по всем а. л. о. с. $A'$.

Естественно ожидать, что только абсолютные а. л. о. с. порождают предельные распределения Гиббса при больших $\lambda/m_0^2$.

Сейчас мы выведем уравнения для $A$, $m$. Воспользуемся следующим свойством полиномов Эрмита (см., например, Б. Саймон [41]): пусть $\sigma_0 > \sigma_1 > 0$, $E = \sigma_0 - \sigma_1$. Тогда

$$:\varphi^k:_{\sigma_0} = :(:\varphi^k:_E):_{\sigma_1}.$$

Положим $\sigma_0 = \sigma(m_0)$, $\sigma_1 = \sigma(m)$, $E = \sigma_0 - \sigma_1$. При фиксированных $m_0$, $m$ предел $\lim\limits_{h\to 0}(\sigma(m_0) - \sigma(m))$ существует и пропорционален $\ln(m/m_0)$. Можем теперь написать

$$H(\psi) = \frac{1}{2}\sum\Big[(\psi(x_1+h, x_2) - \psi(x_1, x_2))^2 + (\psi(x_1, x_2+h) - \psi(x_1, x_2))^2 + h^2\Big(m_0^2 :(\psi+A)^2:_{\sigma(m_0)} + \lambda\sum_{k=1}^{2n} a_k :(\psi+A)^k:_{\sigma(m_0)}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum\Big[(\psi(x_1+h, x_2) - \psi(x_1, x_2))^2 + (\psi(x_1, x_2+h) - \psi(x_1, x_2))^2 + h^2\Big(\Big(m_0^2 :(\psi+A)^2:_E + \lambda\sum_{k=1}^{2n} a_k :(\psi+A)^k:_E\Big)_{\sigma(m)}\Big)\Big].$$

Обозначим $:\psi^k:_E = H_E^{(k)}(\psi)$. Тогда из последнего выражения

$$\lambda \sum_{k=1}^{2n} a_k H_E^{(k)}(A) = V(A), \tag{2.55}$$

$$2m_0^2 A + \lambda \sum_{k=1}^{2n} a_k \frac{dH_E^{(k)}(A)}{dA} = 0, \tag{2.56}$$

$$2m_0^2 + \lambda \sum_{k=1}^{2n} a_k \frac{d^2 H_E^{(k)}(A)}{dA^2} = m^2. \tag{2.57}$$

Последние два выражения служат для определения $A$ и $m$.

В квантовой теории поля вначале производится предельный переход $h \to 0$, а затем исследуется асимптотика $\lambda/m_0^2 \to \infty$. Поэтому все асимптотические выражения должны иметь смысл при $h \to 0$. Положим $M = m^2/m_0^2$. При $\lambda/m_0^2 \to \infty$ естественно ожидать, что $M \to \infty$, $E \to \infty$. Ввиду $H_E^{(k)}(t) = E^{2/k} H_1^{(k)}\left(t/E^{1/2}\right)$ (2.57) можно переписать в виде

$$2 + E^{n-1} \frac{\lambda}{m_0^2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} H_1^{(2n)}(A/E^{1/2}) + \ldots \right] = 2M^2,$$

где многоточие означает члены, содержащие $E^{1/2}$ в отрицательной степени. Полагая $B = A/E^{1/2}$, получим в главном порядке

$$\frac{\lambda}{m_0^2} \left[ \frac{d^2}{dt^2} H_1^{(2n)}(B) \right] = \frac{2M^2}{E^{n-1}}. \tag{2.58}$$

При $h \to 0$ правая часть становится пропорциональной $M^2/(\ln M^2)^{n-1}$. Уравнение (2.56) принимает вид

$$a_{2n} \frac{dH_1^{(2n)}(B)}{dt} + \ldots = 0. \tag{2.59}$$

Будем рассматривать (2.58) как уравнение относительно $A$ при известных $m$, $E$. Обозначим $b_i$ корни многочлена $dH_1^{(2n)}(b_i)/dt$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-1$. С помощью обычной теории возмущений легко показать, что (2.59) имеет решения в окрестности тех $b_i$, при которых

$d^2H_1^{(2n)}(b_i)/dt^2 \neq 0$. Эти решения имеют вид $B_i = b_i + \ldots$, где многоточие означает члены, стремящиеся к 0 при $E \to \infty$. Очевидно, что при таких $i$ для достаточно больших $E$ будет $d^2H_1^{(2n)}(B_i)/dt^2 \neq 0$. Локальные минимумы получаются при таких $b_i$, когда $d^2H_1^{(2n)}(B_i)/dt^2 > 0$.

Итак, мы видим, что основные состояния $A$ имеют вид: $A = E^{1/2}B_i = E^{1/2}(b_i + \ldots)$. Если подставить выражение для $B_i$ в (2.58), получим замкнутое уравнение для $M$

$$\frac{\lambda}{m_0^2}\left(\frac{d^2H_1^{(2n)}(B_i)}{dt^2} + \ldots\right) = \frac{M^2}{E^{n-1}},$$

из которого

$$M_i^2 \sim \text{const}\cdot\left(\frac{\lambda}{m_0^2}\right)\left[\ln\frac{\lambda}{m_0^2}\right]^{n-1}, \quad h \to 0.$$

Далее, $q_k(A_i) \sim \text{const}\cdot\lambda\left[\ln\frac{\lambda}{m_0^2}\right]^{n-k/2}$, $k = 3, \ldots$, откуда $q_k(A_i)/m_i^2 \to 0$ при $\lambda/m_0^2 \to 0$, т.е. $(E^{1/2}B_i, m_i)$ есть а. л. о. с.

Теперь обратимся к выражению $V(A_i)$. Имеем

$$V(A_i) = V(E^{1/2}B_i) \sim \lambda a_{2n}E^n\left(H_1^{(2n)}(B_i) + \ldots\right),$$

откуда

$$\frac{V\left(A_{i_1}\right)}{V\left(A_{i_2}\right)} \sim \frac{H_1^{(2n)}\left(B_{i_1}\right)}{H_1^{(2n)}\left(B_{i_2}\right)}.$$

Мы приходим к важному заключению: абсолютные минимумы $V(A_i)$ соответствуют абсолютным минимумам $H_1^{(2n)}(t)$. Известно *) (см. книгу Г. Бейтмен и А. Эрдейи «Высшие трансцендентные функции».— М.: Наука, 1966), что четный полином Эрмита имеет только два абсолютных минимума. Таким образом, естественно ожидать, что при любом $P$ и достаточно больших $\lambda/m_0^2$ существует только два трансляционно-инвариантных предельных распределения Гиббса, отвечающих гамильтониану $H$.

*) Мы обязаны этим замечанием Ф. Калоджеро.

3°. Полезно привести еще одну переформулировку основной теоремы этой главы. Рассмотрим вначале функцию действительного переменного $y=f(x)$, которая имеет $r$ одинаковых невырожденных минимумов $a_1, a_2, \ldots, a_r$, т. е. $f(a_i)=f(a_j)=\overline{f}$ и $f(x)>\overline{f}$ при $x\neq \neq a_1, \ldots, a_r$. Такая функция, разумеется, не является функцией общего вида, и для нее можно построить версальное семейство в смысле общей теории особенностей (см. [1]), т. е. построить семейство функций $y=f(x, \lambda)$, зависящих от $r-1$ параметров $\lambda=(\lambda_1, \ldots \ldots, \lambda_r)$ так, что $f(x;\ 0)=f(x)$, и пространство параметров $\lambda$ допускает стратификацию, т. е. распадается на точку $\lambda=0$, $r$ кривых, $C_r^2$ двумерных поверхностей и т. д., при которой $f(x, 0)$ имеет $r$ одинаковых минимумов, на каждой из $r$ кривых $r-1$ одинаковых минимума, а один минимум при этом вообще пропадает, на каждой из $C_r^2$ двумерных поверхностей имеется $r-2$ одинаковых минимума и т. д. Эта стратификация является в определенном смысле универсальной.

В рассматриваемой нами ситуации гамильтониан $H_0(\varphi)$ нельзя рассматривать как функцию действительного переменного, и его основные состояния, удовлетворяющие условию Пайерлса, нельзя рассматривать как точки изолированного минимума. Тем не менее, разбиение окрестности пространства параметров имеет тот же вид, что и стратификация, производимая версальным семейством описанного типа. Было бы интересно, во-первых, подробнее исследовать свойства гладкости стратов, строящихся в теореме, и, во-вторых, сформулировать для наших задач понятие версального семейства и показать, что семейство гамильтонианов $H_0+\mu_1 H_1+\ldots+\mu_{r-1}H_{r-1}$ является версальным семейством для гамильтониана $H_0$, имеющего несколько основных состояний.

## Библиографические замечания к главе 2

1. Единственность предельного распределения Гиббса для гамильтониана $\beta H$ при малых $\beta$ доказана в книге Д. Рюэлля [39] и в статьях Р. Л. Добрушина [13], [16].

2. Многомерная модель Изинга ($d\geqslant 2$) при больших $\beta$ была рассмотрена в работе Р. Пайерлса [105] в 1936 г. В этой

работе появилось основное неравенство для вероятности контура, приведенное в § 3. В таком же духе модель Изинга была рассмотрена в работах Р. Гриффитса [79] и Р. Л. Добрушина [13].

3. Анализ предельных распределений Гиббса, основанный на изучении статистики контуров, называется часто контурным методом Пайерлса. Этим методом удалось исследовать различные классы решетчатых моделей. Упомянем известные нам работы: Ф. А. Березин, Я. Г. Синай [2], Ж. Жинибр, А. Гроссман, Д. Рюэлль [72], Р. Л. Добрушин [55], В. М. Герцик, Р. Л. Добрушин [10], В. М. Герцик [11], О. Хейлман и Е. Либ [84], О. Хейлман [85], С. А. Пирогов [33], [34], С. А. Пирогов и Я. Г. Синай [35], М. Кассандро, М. Да Фано, Дж. Оливерери [51], Л. Руннелс [111]. Условие устойчивости основных состояний, названное в главе 2 условием Пайерлса, было введено в работе В. М. Герцика [11]. Интересные результаты получены в статьях В. Хольштинского и И. Славного [86], И. Славного [114]. Основная теорема, излагаемая в этой главе, содержится в работах С. А. Пирогова и Я. Г. Синая [36], [37].

В работах А. Бортца и Р. Гриффитса [49], В. А. Малышева [100] и Э. Либа [98] доказывается существование фазовых переходов для некоторых дискретных моделей, где $\varphi(x)$ принимает непрерывные значения. Было бы интересно перенести общую теорему этой главы на этот случай.

Интересные результаты, основанные на идее некоторой двойственности алгебраического характера, представлены в книге Ш. Грубера, А. Хинтермана и Д. Мерлини [80].

4. Основные состояния для некоторых решетчатых моделей исследованы в работе И. А. Кашапова [21]. Ряд общих результатов о структуре множества основных состояний получен в работах В. Хольштинского и И. Славного [87].

Контурные модели были введены в работах Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая [27—29]. Там же были изучены предельные и другие свойства отвечающих им корреляционных функций.

5. В работе Д. Галлавотти и С. Миракль-Соля [68] было показано, что у модели Изинга при больших $\beta$ имеется только два трансляционно-инвариантных предельных распределения Гиббса. Этот результат потом обобщался в работе А. Мессаже и С. Миракль-Соля [102]. Д. Г. Мартиросян в [23] показал, что для тех значений параметров $\mu$, при которых в основной теореме доказано существование $r$ или $r-1$ периодического предельного распределения Гиббса, других периодических предельных распределений Гиббса не существует. Другие относящиеся сюда результаты имеются в [24].

6. Существование при больших $\beta$ непериодических предельных распределений Гиббса, связанных с непериодическими основными состояниями, было установлено Р. Л. Добрушиным [17], см. также Х. Ван Бейерен [46].

7. Общий подход к построению гамильтонианов с несколькими предельными распределениями Гиббса был развит в работах Д. Рюэлля [40], [110], который, в свою очередь, опирался на весьма общие теоремы Р. Израэля [89]. Взаимосвязь между

подходом, описанным в этой главе, и подходом Д. Рюэлля, не вполне ясна.

8. Основная теорема этой главы может интерпретироваться как вариант математически строгого доказательства правила фаз Гиббса (см. также работу Дж. Либовица [96]).

9. Неединственность предельного распределения Гиббса для двумерных моделей квантовой теории поля была установлена в работах Дж. Глимма, А. Джаффе и Т. Спенсера [77], [78]. Описанное исследование структуры множества основных состояний в этом случае следует работе С. А. Пирогова и Я. Г. Синая [106]. Недавно интересные результаты были получены в этом круге вопросов К. Гаведским [71].

ГЛАВА 3

# РЕШЕТЧАТЫЕ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНОЙ СИММЕТРИЕЙ

## § 1. Введение

В этой главе мы рассмотрим классические решетчатые системы с непрерывной симметрией. Пространство $\Phi$ значений спиновой переменной $\varphi(s)$ будет однородным пространством некоторой компактной группы Ли $G$. Основной пример: $\Phi = S^\nu$ — $\nu$-мерная сфера, $G = SO(\nu+1)$ —группа $(\nu+1)$-мерных ортогональных матриц с определителем 1. Взаимодействие предполагается трансляционно-инвариантным, с конечным радиусом взаимодействия. Гамильтониан такой системы задается потенциалом $U(\varphi(W_R(s)))$, где $W_R(s)$ — шар радиуса $R$ с центром в точке $s$, $\varphi(W_R(s))$ — конфигурация $\{\varphi(t),\ t \in W_R(s)\}$. Потенциал $U(\varphi(W_R(s)))$ характеризует взаимодействие переменной $\varphi(s)$ с ее соседями в шаре $W_R(s)$. Потенциал $U(\varphi(W_R(s)))$ называется инвариантным относительно группы $G$, если $U(\varphi(W_R(s))) = U(g\varphi(W_R(s)))$ для любого элемента $g \in G$, где $g\varphi(W_R(s)) = \{g\varphi(t),\ t \in W_R(s)\}$.

Гамильтониан формально записывается в виде

$$H(\varphi) = \sum_{s \in Z^d} U(\varphi(W_R(s))). \tag{3.1}$$

Если потенциал $U$ инвариантен относительно $G$, то гамильтониан $H$ также инвариантен относительно группы $G$. Предположим, что на $\Phi$ задана нормированная мера $\mu$, инвариантная относительно действия группы $G$. Обычным способом можно построить с помощью гамильтониана (3.1) и $\mu$ условные распределения Гиббса на пространстве конфигураций $\varphi(V)$ при фиксированных $\overline{\varphi}(\mathbf{Z}^d - V)$ и отвечающие им предельные распределения Гиббса.

Как и в дискретном случае, подробно исследованном в главе 2, структура множества предельных распределений Гиббса, отвечающая гамильтониану $\beta H$ при больших $\beta$, тесно связана с основными состояниями $H$, только эта связь оказывается не такой простой, как в дискретном случае. Говоря точнее, оказывается весьма существенным свойство устойчивости основного состояния, более тонкое, чем условие Пайерлса.

Как и в дискретном случае, основным состоянием гамильтониана $H$ будем называть такую конфигурацию $\psi = \{\psi(s),\ s \in \mathbf{Z}^d\}$, что $H(\varphi|\psi) = H(\varphi) - H(\psi) \geqslant 0$ для любой конфигурации $\varphi$, совпадающей с $\psi$ почти всюду. Если гамильтониан $H$ инвариантен относительно $G$ и $\psi$ — основное состояние для $H$, то $g\psi$ — также основное состояние при любом $g \in G$. Таким образом, множество основных состояний представляет собой $G$-пространство.

Рассмотрим следующий частный случай: $U(\varphi(W_R(s)))$ есть функция класса $C^\infty$ на $\bigotimes_{t \in W_R(s)} \Phi(t)$, $U(\varphi(W_R(s))) = 0$, если $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ при любых $t_1, t_2 \in W_R(s)$ и $U(\varphi(W_R(s))) > 0$ в остальных случаях. Иными словами, $U$ достигает своего минимума на диагонали

$$D \subset \bigotimes_{t \in W_R(s)} \Phi(t), \quad D = \{\varphi(W_R(s)) \colon \varphi(t) = \mathrm{const}\}.$$

Ясно, что в этом случае периодическое состояние $\psi$, имеющее вид: $\psi = \{\psi(s) = \mathrm{const}\}$,— основное состояние, и множество таких основных состояний естественно изоморфно $\Phi$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости основных состояний. Пусть $\overline{\varphi} \in \Phi$ и $\psi_{\overline{\varphi}} = \{\psi(s) \equiv \overline{\varphi}\}$. Обозначим $\mathcal{T}_{\overline{\varphi}}$ касательное пространство к $\Phi$ в точке $\overline{\varphi}$ и рассмотрим формально бесконечную последовательность касательных векторов $\tau = \{\tau(s) \in \mathcal{T}_{\overline{\varphi}},\ s \in \mathbf{Z}^d\}$. Запишем, опять-таки формально, малое возмущение основного состояния $\psi_{\overline{\varphi}}$ в виде $\tilde{\psi} = \{\overline{\varphi} + \varepsilon\tau(s),\ s \in \mathbf{Z}^d\}$, $\varepsilon$ — малый параметр. При этом $\overline{\varphi} + \varepsilon\tau(s)$ может рассматриваться как точка пространства $\Phi$, получаемая, например, с помощью экспоненциального отображения. Каждое слагаемое в гамильтониане $U(\varphi(W_R(s)))$ дифференцируемо по $\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$, и мы можем написать

$$H(\widetilde{\psi}) = H(\psi_{\bar{\varphi}}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{s \in \mathbf{Z}^d} \sum_{t_1, t_2} \left( \frac{\partial^2 U(\varphi(W_R(s)))}{\partial \varphi(t_1)\, \partial \varphi(t_2)} \bigg|_{\varphi(t) = \bar{\varphi}} \tau(t_1),\ \tau(t_2) \right) + o(\varepsilon^2). \qquad (3.2)$$

Линейные по $\varepsilon$ члены пропадут, так как $\psi_{\bar{\varphi}}$ — основное состояние. Здесь при фиксированных $t_1$, $t_2$ величину $\dfrac{\partial^2 U(\varphi(W_R(s)))}{\partial \varphi(t_1)\, \partial \varphi(t_2)}$ следует рассматривать как оператор, отображающий $\mathcal{T}_{\bar{\varphi}}$ на сопряженное пространство $\mathcal{T}^*_{\bar{\varphi}}$. Если $\tau(t) = \tau$, то

$$\sum_{t_1} \frac{\partial^2 U(\varphi(W_R(s)))}{\partial \varphi(t_1)\, \partial \varphi(t_2)} \tau = 0,$$

поскольку вся диагональ $D$ состоит из минимумов функции $U(\varphi(W_R(s)))$. Поэтому квадратичную форму в (3.2) можно записать в виде

$$H_1(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{s \in \mathbf{Z}^d} \times \sum_{t_1, t_2} \left( \frac{\partial^2 U(\varphi(W_R(s)))}{\partial \varphi(t_1)\, \partial \varphi(t_2)} (\tau(t_1) - \tau(t_2)),\ (\tau(t_1) - \tau(t_2)) \right).$$

Рассмотрим гауссовское распределение на пространстве последовательностей $\tau = \{\tau(s),\ s \in \mathbf{Z}^d\}$ с гамильтонианом $H_1(\tau)$ (см. гл. 1, § 4, п. 3). Такое распределение вероятностей может оказаться обобщенным, т. е. среднее значение $(\tau(s),\ \tau(s))$, вычисленное по этому распределению, будет бесконечным. Это означает, что конечными будут средние типа $(\tau(s_1) - \tau(s_2),\ \tau(s_1) - \tau(s_2))$ или средние, включающие разности более высокого порядка, т. е. $\tau$ порождает процесс со стационарными приращениями конечного порядка. Мы будем говорить, что в этом случае основное состояние $\psi_{\bar{\varphi}}$ неустойчиво. Смысл состоит в том, что малое изменение энергии (порядка $\varepsilon^2 H_1$) получается за счет больших $\tau$, т. е. флуктуации около $\psi_{\bar{\varphi}}$ велики. Наоборот, если среднее от $(\tau(s), \tau(s))$ конечно, то такое основное состояние мы будем называть устойчивым.

Пример. *Классическая модель Гейзенберга.* В этом примере $\Phi = S^{d-1}$, радиус взаимодействия $R = 1$ и $U(\varphi\ (W_1(s_1))) = 1 - \frac{1}{2d} \sum_{\|s_1 - s_2\| = 1} (\varphi(s_1), \varphi(s_2))$. Далее

$$H(\widetilde{\psi}) = H\left(\psi_{\bar{\varphi}} + \varepsilon\tau\right) =$$

$$= \sum_{s \in \mathbf{Z}^d} \left[1 - \frac{1}{2d} \sum_{\|s_1 - s_2\| = 1} \frac{(\bar{\varphi} + \varepsilon\tau(s_1),\ \bar{\varphi} + \varepsilon\tau(s_2))}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\tau(s_1)\|^2}\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\tau(s_2)^2\|}}\right] =$$

$$= H\left(\widetilde{\psi}_{\bar{\varphi}}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2d} \sum_{\|s_1 - s_2\| = 1} (\tau(s_1) - \tau(s_2),\ \tau(s_1) - \tau(s_2)).$$

Нетрудно проверить, что при $d = 2$ любое основное состояние $\psi_{\bar{\varphi}}$ неустойчиво, а при $d \geqslant 3$, наоборот, устойчиво.

Основная гипотеза, касающаяся рассматриваемого класса решетчатых систем, состоит в том, что при больших $\beta$ не существует предельных распределений Гиббса, являющихся малыми возмущениями неустойчивых основных состояний и, наоборот, для устойчивых основных состояний такие предельные распределения Гиббса существуют.

В этой главе мы приведем доказательства двух важных результатов в поддержку этой гипотезы. В § 2 будет доказана теорема Добрушина — Шлосмана о том, что у двумерных систем с непрерывной симметрией при достаточно общих условиях всякое предельное распределение Гиббса инвариантно относительно группы $G$. Этот результат следует рассматривать как уточнение известного неравенства Мермина — Вагнера, из которого вытекает инвариантность бинарной корреляционной функции относительно группы $G$. В параграфе 3 приводится теорема Саймона — Спенсера — Фрелиха о том, что при $d \geqslant 3$ у классической модели Гейзенберга при больших $\beta$ существует дальний порядок, фактически означающий существование предельных распределений Гиббса, являющихся малыми возмущениями основных состояний $\psi_{\overline{\varphi}}$.

## § 2. Отсутствие спонтанного нарушения непрерывной симметрии в двумерных моделях

Пусть $\Phi = G$ — единичная окружность, рассматриваемая как компактная абелева группа в мультипликативной записи, $\mu$ — мера Хаара на $G$. Рассмотрим классическую решетчатую двумерную модель с трансляционно-инвариантным потенциалом $U(\varphi(W_R(s)))$ конечного радиуса взаимодействия $R$. Предположим, что потенциал $U$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция своих аргументов и

$$\max\left|\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi(t_1)\,\partial\varphi(t_2)}\right| \leqslant L. \tag{$*$}$$

Теорема Добрушина — Шлосмана ([56]). Всякое предельное распределение Гиббса, отвечающее гамильтониану $\beta H$, $0 \leqslant \beta < \infty$, инвариантно относительно группы $G$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\beta = 1$. Введем квадраты $V_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $V_n = \{t = (t_1, t_2) \in \mathbf{Z}^2,\ |t_1| \leqslant n,\ |t_2| \leqslant n\}$. Для любых целых чисел $n_0$, $m$, $n_0 < m$, введем слои

$$F_j = \begin{cases} V_{n_0}, & j = 1; \\ V_{2jR+n_0} - V_{2(j-1)R+n_0}, & j = 2, \ldots, m; \\ \overline{V}_{mR} = \mathbf{Z}^2 - V_{2mR+n_0}, & j = m+1. \end{cases}$$

Имеет место следующее неравенство:

$$|p\{g\varphi(F_1)\,|\,\varphi(F_{m+1})\} - p\{\varphi(F_1)\,|\,\varphi(F_{m+1})\}| \leqslant \\ \leqslant Km^{-\gamma}p\{\varphi(F_1)\,|\,\varphi(F_{m+1})\} \tag{3.3}$$

для любых конфигураций $\varphi(F_1)$, $\varphi(F_{m+1})$ и любого $g \in G$. Здесь $K$, $\gamma$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от конфигураций и $m$. Из (3.3) вытекает утверждение теоремы. В самом деле, для любого измеримого подмножества $\mathscr{B} \subset \Omega(V_{n_0})$ из (3.3) получаем для любого предельного распределения Гиббса $P$, интегрируя по условиям:

$$|P\{g\mathscr{B}\} - P\{\mathscr{B}\}| \leqslant Km^{-\gamma}.$$

Устремив $m \to \infty$, получим, что $P\{g\mathscr{B}\} = P\{\mathscr{B}\}$, т. е. инвариантность $P$ относительно $G$. Таким образом, дело сводится к доказательству (3.3).

Идея доказательства неравенства (3.3) состоит в следующем. Мы хотим показать, что условная плотность распределения вероятности конфигурации $g\varphi(F_1)$ при фиксированной конфигурации $\varphi(F_{m+1})$ почти не зависит от $g$. Справедливо более сильное утверждение, которое мы сейчас приведем и докажем.

Рассмотрим пространство $\mathscr{F}$, точки которого $f$ имеют вид $f = \{\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_m)\}$. Ясно, что $\mathscr{F}$ легко превратить в измеримое пространство, и условное распределение Гиббса при фиксированной $\varphi(F_{m+1})$ порождает распределение вероятностей на $\mathscr{F}$. Построим измеримое разбиение $\mathscr{F}$, считая, что $f = \{\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_m)\} \sim f' = \{\varphi'(F_1), \ldots, \varphi'(F_m)\}$, если найдутся такие $g_1, g_2, \ldots, g_m \in G$, при которых $\varphi'(F_i) = g_i\varphi(F_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Нетрудно проверить, что это есть действительно отношение эквивалентности, определяющее разбиение $\xi$ пространства $\mathscr{F}$. Если $C_\xi$ — элемент разбиения $\xi$, то $g_1, g_2, \ldots, g_m \in G$ можно рассматривать как координаты на $C_\xi$. Важное замечание состоит в том, что плотность условного распределения вероятностей на $C_\xi$ в переменных $g_1, g_2, \ldots, g_m$ может быть записана в виде:

$$p\,(g_1\varphi\,(F_1), g_2\varphi\,(F_2), \ldots, g_m\varphi\,(F_m)\,|\,\varphi\,(F_{m+1})) =$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \rho_i\,(g_i g_{i+1}^{-1})\right] \rho_0\,(g_m\,|\,\varphi\,(F_{m+1}));$$

это означает, что относительные повороты $g_i \cdot g_{i+1}^{-1}$, $i = 1, \ldots, m-1$, и $g_m$ образуют последовательность независимых случайных величин (в этом условном распределении). В сказанном проще всего убедиться, заметив, что

$$\frac{p\,\{g_1\varphi\,(F_1), g_2\varphi\,(F_2), \ldots, g_m\varphi\,(F_m)\,|\,\varphi\,(F_{m+1})\}}{p\,\{\varphi\,(F_1), \varphi\,(F_2), \ldots, \varphi\,(F_m)\,|\,\varphi\,(F_{m+1})\}} =$$
$$= \exp\{G_1\,(g_1 g_2^{-1}) + G_2\,(g_2 g_3^{-1}) +$$
$$+ G_3\,(g_3 g_4^{-1}) + \ldots + G_{m-1}\,(g_{m-1} g_m^{-1}) + G_0\,(g_m)\}.$$

Будет показано, что на каждом элементе $C_\xi$ разбиения $\xi$ условное распределение «координаты» $g_1$ почти не зависит от $\varphi(F_{m+1})$, откуда и будет следовать (3.3). В силу сказанного выше это условное распределение можно представить как распределение суммы независимых случайных величин со значениями в $S^1$. Требуемое утверждение будет следовать из некоторой предельной теоремы о произведении независимых случайных величин, принимающих значения на единичной окружности. В этой предельной теореме необходимо, чтобы отдельные члены произведения имели достаточно большую дисперсию, что, как будет показано, выполняется в двумерной модели.

Чтобы избежать некоторых трудностей, связанных с измеримыми разбиениями, мы будем доказывать (3.3) несколько иначе. Пусть $\mathfrak{S}$ — борелевская $\sigma$-алгебра на $G = S^1$, $\mu$ — мера Хаара с нормировкой $\mu(G) = 1$. Определим измеримое пространство $(M, \mathfrak{B}, \nu)$, где $M = \Omega(V_{2mR+n_0}) \times G^m, \mathfrak{B} = \mathfrak{S}_{V_{2mR+n_0}} \times \widehat{\mathfrak{S}}^m, \nu = \mu_{V_{2mR+n_0}} \times \mu^m$, $G^m$ — $m$-кратное прямое произведение группы $G$, $\widehat{\mathfrak{S}}^m$ и $\mu^m$ — $\sigma$-алгебра и мера прямого произведения измеримых пространств. Фиксируем конфигурацию $\varphi(F_{m+1})$ на $F_{m+1}$. Определим вероятностную меру $P\{\cdot|\varphi(F_{m+1})\}$ на $(M, \mathfrak{B})$, которая имеет следующую плотность относительно меры $\nu$:

$$\frac{dP\{\varphi(V_{2mR+n_0}), g_1, \ldots, g_m \mid \varphi(F_{m+1})\}}{d\nu} =$$
$$= \exp\{-U(g_1\varphi(F_1), g_2\varphi(F_2), \ldots, g_m\varphi(F_m) \mid \varphi(F_{m+1}))\} \times$$
$$\times \Bigl(\int\limits_{\Omega_{V_{2mR+n_0}}} \exp\{-U(\varphi(V_{2mR+n_0}) \mid \varphi(F_{m+1}))\} \times$$
$$\times \mu^{2mR+n_0}(d\varphi(V_{2mR+n_0})\Bigr)^{-1}.$$

Ниже мы будем опускать $\varphi(F_{m+1})$ в $P\{\cdot|\varphi(F_{m+1})\}$ и писать просто $P$.

Меру $P$ можно интерпретировать так: возьмем условное распределение Гиббса для конфигураций $\Omega(V_{2mR+n_0})$ при условии $\varphi(F_{m+1})$ в $\Omega(\mathbf{Z}^2 - V_{2mR+n_0})$ и выберем некоторые $g_i \in G$, $i = 1, 2, \ldots, m$, наудачу. Повернем конфигурацию в $F_i$ с помощью элемента $g_i^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, тогда $P\{\varphi(V_{2mR+n_0}), g_1, \ldots, g_m\}$ — плотность вероятности того, что мы выбрали элементы $g_1, \ldots, g_m$, и $\varphi(V_{2mR+n_0})$ — конфигурация, которая получилась после поворотов. Запись $P\{g\varphi(F_1)\} \sim P\{g'\varphi(F_1)\}$ означает, что $g\varphi(F_1)$ и $g'\varphi(F_1)$ имеют почти одинаковую плотность вероятности по условному гиббсовскому распределению $P\{\cdot|\varphi(F_{m+1})\}$, а это как раз то, что мы хотим доказать, поэтому мы будем изучать $P\{g\varphi(F_1)\}$. Для любого $g \in G$

$$P\{g\ \varphi(F_1)\} = P\{g\varphi(F_1)\,|\,\varphi(F_{m+1})\} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega(V_{2mR+n_0})} \exp\{-U(\varphi(V_{2mR+n_0})|\,\varphi(F_{m+1}))\}\, d\mu(\varphi(V_{2mR+n_0})) \times$$

$$\times \Bigg[\int\limits_{\Omega(V_{2mR}-F_1)\times G} \exp\{-U(g\varphi(F_1), \varphi(V_{2mR+n_0} -$$

$$- F_1)\,|\,\varphi(F_{m+1}))\}\, d\mu(\varphi(V_{2mR+n_0} - F_1))\, d\mu(g)\Bigg]^{-1}.$$

Поэтому (3.3) эквивалентно

$$|P\{g\varphi(F_1)\} - P\{e\varphi(F_1)\}| \leqslant Km^{-\gamma} P\{e\varphi(F_1)\},$$

где $e$ — единичный элемент $G$. Мы докажем, что $|P\{g\varphi(F_1)\} - 1| \leqslant Km^{-\gamma}$. Так как

$$P\{g\ \varphi(F_1)\} = \int\limits_{\Omega(V_{2mR+n_0}-F_1)} P\{g\ \varphi(V_{2mR+n_0})\} \times$$

$$\times P\{\varphi(V_{2mR+n_0} - F_1)\,|\,\varphi(F_1)\}\, d\mu(\varphi(V_{2mR+n_0} - F_1)),$$

то достаточно показать, что

$$|P\{g|\varphi(V_{2mR+n_0})\} - 1| \leqslant Km^{-\gamma}. \tag{3.4}$$

Для того чтобы доказать последнее соотношение, рассмотрим условную плотность $P\{g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_m|\varphi(V_{2mR+n_0})\}$. Вначале мы вычислим $U(g_1\varphi(F_1)$, $g_2\varphi(F_2), \ldots, g_s\varphi(F_s)|\varphi(F_{s+1}))$. Заметим, что из-за финитности радиуса взаимодействия или $W_R(s) \subset F_i$, или $W_R(s) \subset F_i \cup F_{i+1}$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому

$$U\left(g_1\varphi(F_1), g_2\varphi(F_2), \ldots, g_m\varphi(F_m) \mid \varphi(F_{m+1})\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s\in F_j} U(\varphi(W_R(s))) + \sum_{\substack{s:\ W_R(s)\cap V_{2mR+n_0}\neq\varnothing \\ s\notin V_{2mR+n_0}}} U(\varphi(W_R(s))) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} U_j(\varphi(F_j)) + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{R}_j\left(g_i g_{i+1}^{-1}\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})\right), \qquad (3.5)$$

где $g_{m+1}=e$, а $U_j$ и $\mathcal{R}_j$ — суммы в первом и втором слагаемом соответственно, зависящие от соответствующих переменных. Положим $g_i g_{i+1}^{-1} = h_i$, $i=1, 2, \ldots, m$. Легко видеть, что

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial h_j^2}\mathcal{R}_j(h_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))\right| \leqslant C_1 j \qquad (3.6)$$

для некоторого $C_1 = C_1(L, R)$. Действительно, каждое слагаемое в $\mathcal{R}_j(h_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))$ имеет вид $U(\varphi(W_R(s)))$, где

$$W_R(s)\cap F_j \neq \varnothing, \qquad W_R(s)\cap F_{j+1} = \varnothing.$$

Дифференцируя дважды каждый член, мы получаем сумму не более чем $jf(R)$ слагаемых, каждое из которых не превосходит $L$ по условию $(*)$. Теперь мы имеем

$$P\{g_1, \ldots, g_m \mid \varphi(V_{2mR+n_0})\} = \exp\{-U(g_1\varphi(F_1), \ldots, g_m\varphi(F_m) \mid \varphi(F_{m+1}))\} \times$$

$$\times \left[\int_{G^m} \exp\{-U(g_1\varphi(F_1), \ldots, g_m\varphi(F_m) \mid \varphi(F_{m+1}))\} \times d\mu(g_1)\ldots d\mu(g_m)\right]^{-1} =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\mathcal{R}_j(h_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))\right\}}{\int_{G^m}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{m}\mathcal{R}_j(h_j\varphi(F_j), \varphi(F_{i+1}))\right\}\prod_{j=1}^{m} d\mu(h_j)} =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \rho_j(h_j \mid \varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})),$$

где

$$\rho_j(h\,|\,\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})) = \frac{\exp\{-\mathscr{R}_j(h\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))\}}{\int\limits_G \exp\{-\mathscr{R}_j(h\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))\}\,d\mu(h)}.$$

Мы видим, что переменные $h_i = g_i g_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, условно независимы при условии $\varphi(V_{2mR+n_0})$, плотность вероятности $h_i$ — функция $\rho_i(h|\varphi(F_i), \varphi(F_{i+1}))$, $g_1 = h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$. Поэтому справедливо равенство

$$P\{\cdot|\varphi(V_{2mR})\} = \rho_1(\cdot|\varphi(F_1), \varphi(F_2)) * \\ * \rho_2(\cdot|\varphi(F_2)\varphi(F_3)) * \ldots * \rho_m(\cdot\,|\,\varphi(F_m), \varphi(F_{m+1})), \qquad (3.7)$$

где $*$ означает свертку распределений на единичной окружности.

Оценим теперь $\max\limits_{h\in G} \rho_j(h\,|\,\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))$. Пусть $v_j$ — точка минимума для $\mathscr{R}_j(h\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))$, т. е.

$$\mathscr{R}_j(v_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})) = \min_{h\in G} \mathscr{R}_j(h\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})).$$

Применяя формулу Тейлора в форме Лагранжа и оценку (3.6), получаем

$$\mathscr{R}_j(h\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})) \leqslant \mathscr{R}_j(v_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})) + \frac{C_1 j}{2}|h - v_j|^2,$$

$$\int\limits_G \exp[-\mathscr{R}_j(h\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))]\,d\mu(h) \geqslant$$

$$\geqslant \exp[-\mathscr{R}_j(v_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))] \int\limits_0^1 \exp[-C_1 j\,|y - v_j|^2]\,dy \geqslant \\ \geqslant \exp[-\mathscr{R}_j(v_j\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1}))]\cdot C_2^{-1} j^{-1/2}.$$

Поэтому

$$\rho_j(h|\varphi(F_j), \varphi(F_{j+1})) \leqslant C_3\sqrt{j}.$$

Теперь, имея в виду (3.7) и последнюю оценку, для доказательства (3.4) достаточно воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Пусть $\rho_1(g), \ldots, \rho_m(g)$ — плотности распределений вероятностей на единичной окружности $G$.

Предположим, что $\rho_j(g) \leqslant C\sqrt{j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, с некоторой константой $C$.

Тогда для плотности распределения $\rho(g) = \rho_1 * \ldots \ldots * \rho_m(g)$ справедливо неравенство $|\rho(g) - 1| \leqslant Km^{-\gamma}$, где $\gamma = \frac{2}{3}(\pi C^{-1})^2$, и $K$ зависит только от $C$.

Доказательство представляет собой естественное применение техники преобразования Фурье к нашему случаю. Мы можем предположить, что $G = [0, 1)$ со сложением mod 1. Рассмотрим ряды Фурье:

$$\rho_j(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{k,j} e^{2\pi ikx} + a_{-k,j} e^{-2\pi ikx}\right),$$
$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Ряд Фурье для $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{2\pi ikx} + A_{-k} e^{-2\pi ikx}\right),$$

где $A_k = \prod_{j=1}^{\infty} a_{k,j}$. Мы оценим коэффициенты Фурье $a_{k,j}$ при $k \neq 0$

$$|a_{k,j}| = \left|\int_0^1 e^{-2\pi ikx} \rho_j(x)\, dx\right| = \left|\int_0^1 e^{-2\pi ikx} \rho_j(x + \alpha_{j,k})\, dx\right| =$$
$$= \left|1 - \int_0^1 [1 - \cos 2\pi kx]\, \rho_j(x + \alpha_{j,k})\, dx\right| \leqslant 1 - c_j,$$

где $c_j = \frac{2\pi^2}{3C^2 j} - \frac{2\pi^4}{15C^4 j^2}$, а $\alpha_{j,k}$ определены так, что

$$\int_0 \sin 2\pi kx \rho_j(x + \alpha_{j,k})\, dx = 0.$$

Последнее неравенство выполняется, так как если $\mathbf{P}$ — множество функций таких, что

$$\mathbf{P} = \left\{\rho(x)\colon 0 \leqslant \rho(x) \leqslant C\sqrt{j},\ x \in [0, 1),\ \int_0^1 \rho(x)\, dx = 1\right\},$$

то

$$\min_{\rho\in P}\int_0^1 [1-\cos 2\pi kx]\,\rho(x)\,dx=\int_0^1 [1-\cos 2k\pi x]\,\rho^*(x)\,dx,$$

где

$$\rho^*(x)=\begin{cases} C\sqrt{j}, & x\in\left[\frac{i}{k},\ \frac{i}{k}+\frac{1}{kC\sqrt{j}}\right],\quad i=0,1,\ldots,k-1;\\ 0 & \text{при остальных } x.\end{cases}$$

По формуле Парсеваля

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_{k,j}|^2+|a_{-k,j}|^2)=\int_0^1 \rho_j^2(x)\,dx\leqslant (C\sqrt{j})^2.$$

Положим

$$A_{k,l}=\prod_{j=1}^{l}a_{k,j},\quad -\infty<k<\infty,\quad k\neq 0,$$

$$l=1,2,\ldots,m;$$

$$A_{0,l}=0,\quad l=1,2,\ldots,m.$$

Тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|A_{k,2}|\leqslant\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{k,1}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{k,2}|^2\right)^{1/2}\leqslant 2C^2.$$

Если $l>2$, мы имеем по индукции

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_{k,l}|\leqslant$$

$$\leqslant(1-c_l)\sum_{k=-\infty}^{\infty}|A_{k,l-1}|\leqslant 2C\prod_{j=3}^{l}(1-c_j)\leqslant$$

$$\leqslant K\exp\left(-\sum_{j=1}^{l}\frac{2\pi^2}{3C^2j}\right)\leqslant K\exp\left(-\frac{2\pi^2\ln l}{3C^2}\right).$$

Итак, в силу непрерывности $\rho(x)$ и равномерной сходимости ряда $\sum|A_k|$

$$|\rho(x)-1|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(|A_k|+|A_{-k}|)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(|A_{k,m}|+|A_{-k,m}|)\leqslant Km^{-2\pi^2/3C^2},$$

что и требовалось доказать. Тем самым (3.3) и теорема полностью доказаны.

С помощью доказанной теоремы Добрушина — Шлосмана можно показать отсутствие нарушения симметрии для некоторых двумерных моделей с другими группами симметрии.

Пусть, например, $G$ — тор, т. е. прямое произведение конечного числа окружностей $G = G_1 \otimes \ldots \otimes G_r$ и $G$ действует на пространстве $\Phi$. Поскольку гамильтониан инвариантен относительно каждого $G_i$, то из доказанной теоремы всякое предельное распределение Гиббса $P_\beta$ будет инвариантно относительно $G$. На основании этого замечания покажем, что в двумерной модели Гейзенберга не происходит спонтанного нарушения симметрии, т. е. не существует предельных распределений Гиббса, не инвариантных относительно группы $G$.

В этой модели $\Phi = S^{d-1}$ — единичная сфера в $d$-мерном пространстве, $\mu$ — мера Лебега на $S^{d-1}$, а потенциал имеет вид

$$U(\varphi(W_1(s))) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}(\varphi(s), \varphi(s')), & \text{если } \|s - s'\| = 1, \\ 0, & \text{если } \|s - s'\| > 1. \end{cases}$$

Мера $\mu$ и потенциал $U$ инвариантны относительно действия группы $G = SO(d)$ — группы собственных вращений в $d$-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^d$. Мы докажем следующее следствие из доказанной теоремы.

Следствие. В двумерной модели Гейзенберга любое предельное распределение Гиббса $P_\beta$ инвариантно относительно $G = SO(d)$ при любом $\beta$.

Доказательство. Мы хотим показать, что для любой матрицы $A \in G$ распределение $P_\beta$ инвариантно относительно действия $A$. Из линейной алгебры известно, что в подходящей системе координат матрица $A$ разлагается в прямое произведение ортогональных матриц $2 \times 2$ и $1 \times 1$ с детерминантом $\pm 1$. Это эквивалентно тому, что $\boldsymbol{R}^d$ разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств, инвариантных относительно $A$: $\boldsymbol{R}^\nu = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$, $\dim B_i \leqslant 2$, $B_i$ инвариантно относительно $A$ и сужение $A$ на $B_i$ — вращение.

Пусть $G_i$ — группа вращений $B_i$, тогда $G^* = G_1 \otimes \ldots \ldots \otimes G_s$ — тор, $A \in G^*$. Гамильтониан модели Гейзенберга инвариантен относительно каждого $G_i$, поэтому $P_\beta$ инвариантно относительно $A$. Хорошо известно, что если $G$ — компактная связная группа Ли и $g \in G$, то существует картановская подгруппа $G_0 \subset G$, $g \in G_0$, изоморфная тору. Поэтому доказанная теорема может быть перенесена на произвольные компактные связные группы Ли.

Условия теоремы могут быть несколько ослаблены. Условие конечности радиуса взаимодействия можно заменить условием экспоненциального убывания взаимодействия. Условия дифференцируемости, вероятно, существенны.

## § 3. Теорема Саймона — Спенсера — Фрелиха о существовании спонтанной намагниченности в классической модели Гейзенберга

Рассмотрим $d$-мерную классическую модель Гейзенберга, $d \geqslant 3$. Значения отдельной переменной $\varphi(s) \in \in S^{d-1}$, гамильтониан $H = -\sum\limits_{\|s_1 - s_2\| = 1} (\varphi(s_1), \varphi(s_2))$.

Через $V = V_n$ обозначим $d$-мерный куб с ребром, содержащим $n$ точек решетки $\mathbf{Z}^d$, $|V| = n^d$. Мы будем изучать распределения вероятностей на конфигурациях $\varphi(V)$, порождаемые гамильтонианом $H$ при обратной температуре $\beta$ с периодическими граничными условиями. Через $\sigma$ обозначим меру Лебега на $S^{d-1}$. Тогда распределение вероятностей, о котором идеть речь, может быть записано в виде

$$dP_V = \frac{e^{-\beta H_V}}{\Xi_V} \prod_{s \in V} d\sigma_s,$$

$H_V = -\sum\limits_{\substack{\|s_1 - s_2\| = 1 \\ s_1 \in V,\, s_2 \in V}} (\varphi(s_1), \varphi(s_2))$ (с учетом периодических граничных условий), $\sigma_s$ — мера Хаара на сфере значений $\varphi(s)$. Положим $\varphi_V = \frac{1}{|V|} \sum\limits_{s \in V} \varphi(s)$. Тогда $\varphi_V$ есть $d$-мерный вектор.

Теорема Саймона — Спенсера — Фрелиха (см. [64—67]). Существует $\beta_c > 0$ такое, что при $\beta > \beta_c$

$$M = \lim_{V \to \infty} E(\varphi_V, \varphi_V) > 0;$$

$E$ — знак математического ожидания по отношению к распределению $P_V$ *).

Замечания:

1. Из приводимого доказательства следует значение

$$\beta_c = d \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^{d} (1 - \cos p_k) \right)^{-1} dp_1 \ldots dp_d.$$

2. Теорема обобщается на системы с гамильтонианом

$$H_V = - \sum_{s_1, s_2 \in V} U(s_1 - s_2)(\varphi(s_1), \varphi(s_2))$$

с потенциалом $U$, имеющим конечный радиус взаимодействия и таким, что

$$U(t) \geqslant 0,$$
$$U(t) = U(t_1, t_2, \ldots, t_d) = U(\pm t_1, \pm t_2, \ldots, \pm t_d).$$

Доказательство. Пусть $V = V_n$, $p = \frac{2\pi}{n} q$, $q \in V$,

$$\tilde{\varphi}^{(m)}(p) = |V|^{-1/2} \sum_{s \in V} \exp\{i(s, p)\} \cdot \varphi^{(m)}(s),$$

где $\varphi^{(m)}(s)$ — $m$-я координата $\varphi(s) \in S^{d-1} \subset R^d$, $1 \leqslant m \leqslant d$. Тогда $\tilde{\varphi}^{(m)}(p) = \overline{\tilde{\varphi}^{(m)}(-p)}$, $E(\tilde{\varphi}^{(m)}(p) \tilde{\varphi}^{(m)}(p')) = 0$, если $p + p' \neq 0 \pmod{2\pi}$.

Основная лемма. $E(\tilde{\varphi}^{(m)}(p) \cdot \tilde{\varphi}^{(m)}(-p)) \leqslant (\beta E_p)^{-1}$, где $E_p = \sum_{j=1}^{d} (1 - \cos p_j)$, $m = 1, \ldots, d$.

*) Приводимое ниже доказательство рассказывалось Б. Саймоном на IV Международном симпозиуме по теории информации в Репино, июнь 1976 г. Обработка доклада принадлежит П. М. Блехеру. Наш текст близко следует тексту Блехера.

Вывод теоремы из основной леммы. Имеем

$$\|\varphi_V\|^2\cdot|V|=|\tilde{\varphi}(0)|^2=\sum_{m=1}^{d}|\tilde{\varphi}^{(m)}(0)|^2.$$

Из равенства Парсеваля

$$\sum_{p\in V^*}\|\tilde{\varphi}(p)\|^2=\sum_{s\in V}\|\varphi(s)\|^2,$$

где $V^*=\left\{p\colon p=\frac{2\pi}{n}q,\ q\in V\right\}$. Так как $\|\varphi(s)\|=1$, то правая часть равна $|V|$. Следовательно,

$$|V|=\sum_{p\in V^*,\,p\neq 0}\|\tilde{\varphi}(p)\|^2+\|\tilde{\varphi}(0)\|^2=$$
$$=\sum_{p\in V^*,\,p\neq 0}\|\tilde{\varphi}(p)\|^2+|V|\,\|\varphi_V\|^2.$$

Возьмем от обеих частей последнего равенства среднее по распределению $P_V$ и воспользуемся утверждением основной леммы:

$$|V|\,(1-E(\|\varphi_V\|^2))<d\sum_{p\in V^*,\,p\neq 0}(\beta E_p)^{-1}.$$

При $d\geqslant 3$ интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}E_p^{-1}dp_1\ldots dp_d$ сходится и

$$|V|^{-1}\sum_{p\in V^*,\,p\neq 0}E_p^{-1}\to\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}E_p^{-1}dp_1\ldots dp_d.$$

Поэтому

$$\lim_{V\to\infty}(1-E(\|\varphi_V\|^2))\leqslant c_0\beta^{-1},\quad c_0=d\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}E_p^{-1}dp.$$

Иными словами,

$$\lim_{V\to\infty}E\,\|\varphi_V\|^2>1-c_0\beta^{-1}.$$

Полагая $\beta_c=c_0$, получим утверждение теоремы.

Доказательство основной леммы. Обозначим $V_\Gamma$ множество единичных ребер в объеме $V$. Каждое такое ребро задается парой $(s,\ k)$, $s\in V$ и $k$

соответствует единичному вектору $\delta_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots, 0)$. Пусть $h(s, k)$ — произвольная функция на $V_\Gamma$ со значениями в $R^1$, $\lambda \in R^1$. Положим при любом $m$, $1 \leqslant m \leqslant d$,

$$I_\lambda(\{h(s, k)\}) = \\ = E\left(\exp\left(\frac{\lambda}{2}\sum_{(s,k)\in V_\Gamma} h(s, k)\left(\varphi^{(m)}(s+\delta_k) - \varphi^{(m)}(s)\right)\right)\right).$$

Имеет место следующая основная оценка:

$$I_\lambda(\{h(s, k)\}) \leqslant \exp\left\{\beta^{-1}\lambda^2 \sum_{(s,k)\in V_\Gamma} |h(s, k)|^2\right\}.$$

В ы в о д  о с н о в н о й  л е м м ы  и з  о с н о в н о й  о ц е н к и. Запишем

$$\frac{d}{d\lambda} I_\lambda(\{h(s, k)\})\Big|_{\lambda=0} = \\ = \sum_{(s,k)\in V_\Gamma} h(s, k)\, E\left(\varphi^{(m)}(s+\delta_k) - \varphi^{(m)}(s)\right) = \\ = \sum_{(s,k)\in V_\Gamma} h(s, k)\left(E\varphi^{(m)}(s+\delta_k) - E\varphi^{(m)}(s)\right) = 0,$$

ввиду периодических граничных условий. Поэтому из основной оценки следует, что

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} I_\lambda(\{h(s, k)\})\Big|_{\lambda=0} \leqslant \\ \leqslant \frac{d^2}{d\lambda^2}\exp\left(\lambda^2\beta^{-1}\sum_{(s,k)\in V_\Gamma} |h^2(s, k)|\right)\Big|_{\lambda=0}$$

или

$$E\left|\sum_{(s,k)\in V_\Gamma} h(s, k)\left(\varphi^{(m)}(s+\delta_k) - \varphi^{(m)}(s)\right)\right|^2 \leqslant \\ \leqslant 2\beta^{-1}\sum_{(s,k)\in V_\Gamma} |h(s, k)|^2. \qquad (3.8)$$

Воспользуемся последним неравенством при $h(s, k) = \operatorname{Re}\left(e^{i(p,(s+\delta_k))} - e^{i(p,s)}\right)$. Введем оператор $\nabla_k$

$$g = \{g(s),\ s \in V\} \to \nabla_k g = \{g(s+\delta_k) - g(s),\ s \in V\},$$

и пусть

$$h_k = \{h(s, k)\}, \quad \varphi^{(m)} = \{\varphi^{(m)}(s)\},$$

$$(h_k, \varphi^{(m)}) = \sum_{s \in V} h(s, k)\, \varphi^{(m)}(s).$$

Тогда $h_k = \operatorname{Re} \nabla_k e^{i(p,s)}$ и

$$\sum_{(s,k) \in V_\Gamma} h(s, k)\,(\varphi^{(m)}(s + \delta_k) - \varphi^{(m)}(s)) =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_k (\nabla_k e^{i(p,s)}, \nabla_k \varphi^{(m)}) = \operatorname{Re} \sum_k \left(\nabla_k^* \nabla_k e^{i(p,s)}, \varphi^{(m)}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\,(e^{i(p,s)}, \varphi^{(m)}) \sum_k \left(2 - e^{ip_k} - e^{-ip_k}\right) =$$

$$= 2\,|V|^{1/2} \operatorname{Re} \widetilde{\varphi}^{(m)}(p) \sum_{k=1}^{d} (1 - \cos p_k) =$$

$$= 2E_p\,|V|^{1/2} \operatorname{Re} \widetilde{\varphi}^{(m)}(p).$$

Таким образом, левая часть (3.8) равна

$$L = 4\,|V|\,E_p^2 \cdot E\left(\operatorname{Re} \widetilde{\varphi}^{(m)}(p)\right)^2$$

или

$$4\,|V|\,E_p^2 \cdot E\left(\operatorname{Re} \widetilde{\varphi}^{(m)}(p)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\beta^{-1} \sum_{s,k)} \left(\operatorname{Re}\left(e^{i(p,(s+\delta_k))} - e^{i(p,s)}\right)\right)^2.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если воспользоваться неравенством (3.8) при $h(s, k) = \operatorname{Im}\left(e^{i(p,(s+\delta_k))} - e^{i(p,s)}\right)$, то можно получить оценку для мнимых частей

$$4\,|V|\,E_p^2 E\left(\operatorname{Im} \widetilde{\varphi}^{(m)}(p)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\beta^{-1} \sum_{(s,k)} \left(\operatorname{Im}\left(e^{i(p,s+\delta_k)} - e^{i(p,s)}\right)\right)^2.$$

Складывая эти оценки, получим

$$4\,|V|\,E_p^2 E\,|\widetilde{\varphi}^{(m)}(p)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\beta^{-1} \sum_{(s,k)} |e^{i(p,s+\delta_k)} - e^{i(p,s)}|^2 =$$

$$= 2\beta^{-1} \sum_{(s,k)} |e^{ip_k} - 1|^2 = 4\beta^{-1}\,|V| \sum_k (1 - \cos p_k) =$$

$$= 4\beta^{-1}\,|V|\,E_p.$$

Таким образом,

$$E\,|\,\widetilde{\varphi}^{(m)}(p)\,|^2 \leqslant \beta^{-1} E_p^{-1}.$$

Основная лемма доказана.

Доказательство основной оценки. Если переобозначить $\lambda h(s, k)$ через $h(s, k)$, то задача сводится к частному случаю $\lambda = 1$. Далее, по определению

$$I_1(\{h(s, k)\}) = \\ = Z^{-1}\int \exp\Big\{\frac{1}{2}\beta\sum_{(s,k)}(\varphi(s), \varphi(s+\delta_k)) + \\ + \sum_{(s,k)} h(s, k)\,(\varphi^{(m)}(s+\delta_k) - \varphi^{(m)}(s))\Big\}\prod_{s\in V} d\sigma(\varphi(s)),$$

$$Z = \Big[\int \exp\Big\{-\frac{\beta}{4}\sum \|\varphi(s+\delta_k) - \varphi(s)\|^2\Big\}\times \\ \times\prod_{s\in V} d\sigma(\varphi(s))\Big]\exp\{\mathrm{const}\,|V|\}.$$

Так как

$$-(\varphi(s), \varphi(s+\delta_k)) = \\ = \frac{1}{2}\,((\varphi(s+\delta_k) - \varphi(s), \varphi(s+\delta_k) - \varphi(s)) - \\ - \frac{1}{2}[(\varphi(s+\delta_k), \varphi(s+\delta_k)) + (\varphi(s), \varphi(s))] = \\ = \frac{1}{2}\|\varphi(s+\delta_k) - \varphi(s)\|^2 - 1,$$

то величину $I_1(\{h(s, k)\})$ можно записать в виде

$$I_1(\{h(s, k)\}) = \\ = Z^{-1}\int \exp\Big\{-\frac{\beta}{4}\sum_{(s,k)}\|\varphi(s+\delta_k) - \varphi(s)\|^2 + \\ + \sum_{(s,k)}(h(s, k), (\varphi(s+\delta_k) - \varphi(s)))\Big\}\prod_s d\sigma(\varphi(s)),$$

где через $h(s, k)$ обозначен вектор $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, h(s, k),$

0, ..., 0). Отсюда

$$I_1(\{h(s,k)\}) = \\ = Z^{-1}\int \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum\left\|\varphi(s+\delta_k)-\varphi(s)-\frac{2}{\beta}h(s,k)\right\|^2\right\}\times \\ \times\prod_{s\in V} d\sigma(\varphi(s))\, J(\{h(s,k)\}),$$

$$J(\{h(s,k)\}) = \exp\left\{\beta^{-1}\sum_{(s,k)}|h(s,k)|^2\right\},$$

совпадает с правой частью доказываемой нами основной оценки. Таким образом, основная оценка будет доказана, если мы установим, что

$$Z^{-1}\int \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{(s,k)}\left\|\varphi(s+\delta_k)-\varphi(s)-\frac{2}{\beta}h(s,k)\right\|^2\right\}\times \\ \times\prod_{s\in V} d\sigma(\varphi(s)) \leqslant 1.$$

Вводя обозначение

$$Z(\{h(s,k)\}) = \\ = \int \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{(s,k)}\|\varphi(s+\delta_k)-\varphi(s)-2\beta^{-1}h(s,k)\|^2\right\}\times \\ \times\prod_{s\in V} d\sigma(\varphi(s)),$$

последнее неравенство можно записать в виде

$$Z(\{h(s,k)\}) \leqslant Z(\{0\}). \tag{3.9}$$

Для его доказательства достаточно показать, что максимум статистической суммы $Z(\{h(s,k)\})$ достигается при $h\equiv 0$. Обозначим

$$V^{(r)} = \{s=(s_1,\ldots,s_d)\in V\,|\,s_1=r\},\quad r=1,\ldots,n,$$
$$\varphi=\{\varphi(s),\ s\in V\},\quad \varphi^{(r)}=\{\varphi(s),\ s\in V^{(r)}\}.$$

Множество всех конфигураций $\varphi^{(r)}$ при фиксированном $r$ представляет собой многообразие $M = \bigotimes_{s\in V^{(r)}} S^{d-1}$ с мерой $d\mu(\varphi) = \prod_{s\in V^{(r)}} d\sigma(\varphi(s))$.

Рассмотрим в пространстве $\mathscr{L}^2(M, \mu(d\varphi))$ операторы $\widehat{F}_1, \widehat{T}_1, \widehat{F}_2, \widehat{T}_2, \ldots, \widehat{F}_n, \widehat{T}_n$ определяемые следующим образом. Оператор $\widehat{F}_r$ является оператором умножения на функцию

$$F_r(\varphi^{(r)}) = \\ = \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{s\in V^{(r)},\,k\neq 1}\|\varphi(s+\delta_k)-\varphi(s)-2\beta^{-1}h(s,k)\|^2\right\}.$$

Оператор $\widehat{T}_r$ задается ядром

$$\widehat{T}_r\left(\varphi^{(r)},\varphi^{(r+1)}\right) = \\ = \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{s\in V^{(r)}}\|\varphi(s+\delta_1)-\varphi(s)-2\beta^{-1}h(s,1)\|^2\right\}.$$

Легко видеть, что

$$Z(\{h(s,k)\}) = \\ = \int\ldots\int\mu(d\varphi^{(1)})\ldots\mu(d\varphi^{(n)})\,F_1(\varphi^{(1)})\times \\ \times T_1(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)})\ldots F_n(\varphi^{(n)})\,T_n(\varphi^{(n)},\varphi^{(1)}) = \\ = \mathrm{Tr}\left(\widehat{F}_1\widehat{T}_1\ldots\widehat{F}_n\widehat{T}_n\right). \quad (3.10)$$

Пусть оператор $\widehat{T}_0$ задается ядром

$$T_0(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}) = \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{s\in V^{(1)}}\|\varphi(s+\delta_1)-\varphi(s)\|^2\right\},$$

$$\{\varphi(s)\}=\varphi^{(1)},\quad \{\varphi(s+\delta_1)\}=\varphi^{(2)}.$$

Легко видеть, что $\widehat{T}_0>0$, см. лемму 1 ниже. Запишем

$$Z(\{h(s,k)\}) = \mathrm{Tr}\left(\widehat{F}_1\widehat{T}_1\ldots\widehat{F}_n\widehat{T}_n\right) = \\ = \mathrm{Tr}\left(\widehat{T}_0^{1/2}\widehat{F}_1\widehat{T}_0^{1/2}\widehat{T}_0^{-1/2}\widehat{T}_1\times\right. \\ \left.\times\widehat{T}_0^{-1/2}\widehat{T}_0^{1/2}\widehat{F}_2\widehat{T}_0^{1/2}\ldots\widehat{T}_0^{1/2}\widehat{F}_n\widehat{T}_0^{1/2}\widehat{T}_0^{-1/2}\widehat{T}_n\widehat{T}_0^{-1/2}\right) = \\ = \mathrm{Tr}\,(A_1\cdot B_1\cdot\ldots\cdot A_n\cdot B_n), \quad (3.11)$$

где $A_r=\widehat{T}_0^{1/2}\widehat{F}_r\widehat{T}_0^{1/2}$, $B_r=\widehat{T}_0^{-1/2}\widehat{T}_r\widehat{T}_0^{-1/2}$.

Лемма 1. $\widehat{T}_0>0$, $A_r>0$, $r=1,\ldots,n$.

Лемма 2. $\mathrm{Tr}\,(A_1B_1\cdot\ldots\cdot A_nB_n)\leqslant\|B_1\|\cdot\ldots\cdot\|B_n\|\cdot(\mathrm{Tr}\,A_1^n)^{1/n}\cdot\ldots\cdot(\mathrm{Tr}\,A_n^n)^{1/n}$.

Лемма 3. $\|B_r\|\leqslant 1$, $r=1,\ldots,n$.

Доказательство лемм мы приведем чуть ниже, а сейчас закончим вывод основной оценки. Из лемм 2 и 3 и формулы (3.11) следует, что

$$Z\,(\{h\,(s,k)\}) \leqslant \left(\operatorname{Tr} A_1^n\right)^{1/n} \ldots \left(\operatorname{Tr} A_n^n\right)^{1/n},$$

поэтому требуемое неравенство (3.9) будет доказано, если мы установим, что

$$\operatorname{Tr} A_r^n \leqslant Z\,(\{0\}), \quad r = 1, \ldots, n.$$

Запишем

$$\operatorname{Tr} A_r^n = \operatorname{Tr}\left(\widehat{T}_0^{1/2}\cdot\widehat{F}_r\cdot\widehat{T}_0^{1/2}\cdot\ldots\cdot\widehat{T}_0^{1/2}\cdot\widehat{F}_r\cdot\widehat{T}_0^{1/2}\right) = \\ = \operatorname{Tr}\left(\widehat{F}_r\widehat{T}_0\widehat{F}_r\widehat{T}_0\ldots\widehat{F}_r\widehat{T}_0\right).$$

Сравнивая это равенство с (3.10), мы видим, что

$$\operatorname{Tr} A_r^n = Z\left(\{\widetilde{h}\,(s,k)\}\right),$$

где $\widetilde{h}(s, 1) = 0$ для всех $s \in V$ и $\widetilde{h}(s, k) = h(s', k)$, где $s' = (r, s_2, \ldots, s_d)$ при $k \neq 1$. Следовательно, наша задача состоит в доказательстве неравенства

$$Z(\{\widetilde{h}(s, k)\}) \leqslant Z(\{0\}), \tag{3.12}$$

аналогичного неравенству (3.9). Таким образом, доказательство неравенства (3.9) для произвольного набора $\{h(s, k)\}$ свелось к доказательству этого же неравенства для набора $\{\widetilde{h}(s, k)\}$, обладающего тем свойством, что $\widetilde{h}(s, 1) = 0$ для всех $s \in V$. Повторив это рассуждение для второй оси, мы сведем неравенство (3.12) к аналогичному неравенству с набором $\{\widetilde{\widetilde{h}}(s, k)\}$ таким образом, что $h(s, 1) = \widetilde{\widetilde{h}}(s, 2) = 0$ для всех $s \in V$ и т. д. Ясно, что, перебрав все оси, мы докажем неравенство (3.9). Основная оценка, таким образом, вытекает из лемм 1—3.

Доказательство леммы 1. Так как

$$T_0\,(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = \exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum_{s\in V^1}\|\,\varphi\,(s+\delta_1) - \varphi\,(s)\,\|^2\right\} = \\ = T_0\,(\varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}),$$

то оператор $\widehat{T}_0$ симметричен. Покажем, что

$$(\widehat{T}_0 f, f) \geqslant 0$$

для любой функции $f\in\mathscr{L}^2(M,\ d\sigma)$. Многообразие $M = \bigotimes_{s\in V^{(r)}} S^{d-1}$ лежит в пространстве $M' = \bigotimes_{s\in V^{(r)}} R^d$. Рассмотрим в $M'$ оператор $\widehat{T}_0^1$ с тем же ядром $T_0(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$, что и $\widehat{T}_0$, и обозначим

$$f^1(\varphi^{(1)}) = f(\varphi^{(1)})\cdot\prod_{s\in V}\delta(\|\varphi(s)\| - 1).$$

Тогда

$$(\widehat{T}_0 f, f) = (\widehat{T}_0^1 f^1, f^1)',$$

где $(\cdot,\ \cdot)'$ — скалярное произведение по лебеговой мере в $M'$. Переходя к преобразованию Фурье, мы имеем

$$(\widehat{T}_0^1 f^1, f^1)' = (\widetilde{\widehat{T}}{}_0^1 \tilde{f}^1, \tilde{f}^1)'.$$

Поскольку $\widehat{T}_0^1$ — оператор свертки, то $\widetilde{\widehat{T}}{}_0^1$ — оператор умножения на функцию $\exp\left\{-\frac{\beta}{4}\sum\|\varphi(s)\|^2\right\} = C_1\exp\left(-C_2\sum_{s\in V^{(r)}}\|\xi(s)\|^2\right)$. Положительность этой функции доказывает положительность величины $(\widetilde{\widehat{T}}_0\tilde{f}^1, \tilde{f}^1)'$, а отсюда уже следует неравенство $\widehat{T}_0 > 0$. Вторая часть леммы 1 очевидна, поскольку оператор $\widehat{F}_r$ является оператором умножения на положительную функцию, и, таким образом, лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2 мы не приводим, так как оно содержится в книге И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна «Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов».— М.: Наука, 1965 (см. формулу (7.5) на стр. 121 этой книги).

Доказательство леммы 3. Мы должны показать, что

$$(\widehat{T}_0^{-1/2}\widehat{T}_r\widehat{T}_0^{-1/2}f, f) \leqslant (f, f),$$

или

$$(\widehat{T}_r F,\ F) \leqslant (\widehat{T}_0 F,\ F), \tag{3.13}$$

где $F = \widehat{T}_0^{-1/2}f$. Как и в доказательстве леммы 1, введем операторы $\widehat{T}_r^1$ и $\widehat{T}_0^1$, задающиеся теми же ядрами, что и $\widehat{T}_r$, $\widehat{T}_0$, но рассматриваемые в пространстве $M' = \bigoplus_{s \in V^{(r)}} R^d$. Обозначим

$$F^1(\varphi^{(1)}) = F(\varphi^{(1)}) \cdot \prod_{s \in V^{(1)}} \delta(\|\varphi(s)\| - 1).$$

Тогда

$$(\hat{T}_r F, F) = (T_r^1 F^1, F^1)'; \quad (\hat{T}_0 F, F) = (\hat{T}_0^1 F^1, F^1)',$$

где $(\cdot, \cdot)'$ — скалярное произведение функций по лебеговской мере в $M'$. Поэтому неравенство (3.13) сводится к неравенству

$$(\hat{T}_r^1 F^1, F^1)' \leqslant (\hat{T}_0^1 F^1, F^1)'.$$

Переходя к преобразованию Фурье, мы получаем неравенство

$$(\tilde{\hat{T}}_r^1 \tilde{F}^1, \tilde{F}^1)' \leqslant (\tilde{\hat{T}}_0^1 \tilde{F}^1, \tilde{F}^1)'. \tag{3.14}$$

Но $\tilde{\hat{T}}_r^1$ есть оператор умножения на функцию

$$\exp\left\{-\frac{\beta}{4} \sum_{s \in V^{(1)}} |\varphi(s) - h(s, 1)|^2\right\} =$$
$$= \exp\left\{i \sum_{s \in V^{(1)}} (h(s, 1), \xi(s))\right\} \times$$
$$\times C_1 \exp\left\{-C_2 \sum_{s \in V^{(1)}} |\xi(s)|^2\right\},$$

а $\tilde{\hat{T}}_0^1$ — оператор умножения на такую же функцию без множителя $\exp\left\{i \sum_{s \in V^{(1)}} (h(s, 1), \xi(s))\right\}$. Так как $\exp\left\{i \sum_s (h(s, 1), \xi(s))\right\} = 1$, то отсюда следует соотношение (3.14). Тем самым лемма 3 доказана.

Поясним, почему приведенная теорема свидетельствует о наличии дальнего порядка. Пусть $P$ — предельное распределение Гиббса, являющееся предельной точкой распределений $P_V$. Так как все $P_V$ инвариантны относительно действия группы $G = S^1$, то и предельное распределение Гиббса $P$ инвариантно относительно той же группы. Из основной теоремы следует, что $E\|\varphi(s)-\varphi(0)\|^2$ имеет порядок $\beta^{-1}$ при $s\to\infty$ и не стремится к 2 при $s\to\infty$. Это означает, что предел $\lim\limits_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum\limits_{s\in V}\varphi(s)=\bar{\varphi}$, существующий с $P$-вероятностью 1 в силу эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина, отличен от 0. Но тогда распределение «неэргодично» по отношению к группе $S^1$, т. е. $P=\int\limits_{S^1}P_g dg$, где $P_g$ — условное распределение, индуцированное распределением $P$ при фиксированном значении направления вектора $\bar{\varphi}$. Можно показать, что $P_g$ также будет предельным распределением Гиббса, и мы действительно получаем существование континуального семейства предельных распределений Гиббса, параметризованных точками группы $S^1$. Это и есть спонтанное нарушение непрерывной симметрии $S^1$.

## Библиографические замечания к главе 3

1. Общие вопросы спонтанного нарушения непрерывной симметрии и появление так называемых голдстоуновских частиц широко обсуждается в физической литературе. Упомянем в качестве одного из многих примеров лекции В. Б. Берестецкого [4].

2. Отсутствие дальнего порядка в некоторых двумерных классических моделях с непрерывной симметрией было показано Н. Мермином и Х. Вагнером на основании выведенного ими неравенства, представляющего собой следствие известного неравенства Боголюбова (см. [39]). Теорему Добрушина — Шлосмана см. в [56].

3. Теорема Фрелиха — Саймона — Спенсера была доказана в их работе [64]. Подробное обсуждение вместе с новыми приложениями основного метода содержится в ряде статей и обзоров Фрелиха [65—67]. В частности, в [65] показано, что в двумерных системах с непрерывной симметрией и дальнодействующими потенциалами может появляться дальний порядок при больших $\beta$.

4. Фактически при доказательстве теоремы Добрушина — Шлосмана (см. стр. 112) была выведена предельная теорема теории вероятностей, принадлежащая В. А. Статулявичусу (см. «Теория вероятностей и ее применения», 1965, т. 10, в. 3, с. 645).

# ГЛАВА 4

# ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ 2-ГО РОДА И МЕТОД РЕНОРМГРУППЫ

## § 1. Введение

Результаты главы 2 дают представление о структуре фазовых диаграмм классических решетчатых моделей, т. е. о структуре множества трансляционно-инвариантных или периодических предельных распределений Гиббса, отвечающих гамильтонианам $\beta H$ при больших $\beta$. Наоборот, при малых $\beta$ предельное распределение Гиббса, отвечающее гамильтониану $\beta H$, при весьма общих предположениях единственно. Ясно, что при изменении $\beta$ появятся такие значения $\beta_{cr}$, называемые критическими, в окрестности которых структура множества трансляционно-инвариантных или периодических предельных распределений Гиббса меняется. Рассмотрим в качестве примера ферромагнитные модели, т. е. модели, у которых имеется два трансляционно-инвариантных основных периодических состояния, удовлетворяющих условию Пайерлса, переходящих друг в друга при замене знака каждой переменной на противоположный. В этом случае естественно ввести следующее определение.

Определение 4.1. Ферромагнитной критической точкой называется такое число $\beta_{cr}$, что в некоторой его окрестности для любого $\beta < \beta_{cr}$ трансляционно-инвариантное предельное распределение Гиббса единственно, а при $\beta > \beta_{cr}$ имеется ровно два трансляционно-инвариантных предельных распределения Гиббса, причем средние значения $\varphi(x)$ для этих двух распределений различны.

Можно было бы ввести аналогичное определение для антиферромагнитной критической точки или для критической точки, связанной с непериодическим основным состоянием, но мы не будем этого делать, поскольку здесь пока еще нет строгих результатов.

Примеры типа двумерной модели Изинга показывают, что при $\beta=\beta_{cr}$ предельное распределение Гиббса для гамильтониана $\beta_{cr}H$ единственно, но случайные величины $\varphi(x)$ нельзя ни в каком смысле считать слабозависимыми случайными величинами, изучаемыми в классической теории вероятностей. Широко распространенное в физической литературе допущение состоит в том, что совместное распределение подобных случайных величин удовлетворяет определенным условиям масштабной инвариантности или подобия. Это допущение представляет и гораздо более общий интерес, ибо оно показывает, что нарушение непрерывности или гладкости морфологических процессов часто сопровождается появлением величин, подчиняющихся гипотезе подобия.

Мы введем сейчас некоторые параметры, характеризующие структуру множества трансляционно-инвариантных предельных распределений Гиббса в окрестности ферромагнитной критической точки $\beta_{cr}$.

1. Пусть при $\beta=\beta_{cr}$ трансляционно-инвариантное предельное распределение Гиббса $P_0$ таково, что $E\varphi(x)=0$, $E\varphi(x)\cdot\varphi(y)\sim\frac{\text{const}}{\|x-y\|^{d-2+\eta}}$ при $\|x-y\|\to\infty$, где $d$ — размерность системы. Причину того, почему показатель степени пишется именно в таком виде, мы объясним позже. Индекс $\eta$ является основным параметром. Положим $\alpha=1+\frac{2}{d}-\frac{\eta}{d}$. Если $\alpha\geqslant 1$, то для куба $V_L$ со стороной $L$

$$E\Bigl(\sum_{x\in V_L}\varphi(x)\Bigr)^2=\sum_{x,y\in V_L}E\left(\varphi(x)\varphi(y)\right)\sim$$

$$\sim\text{const}\cdot\sum_{x,y\in V_L}\frac{1}{\|x-y\|^{d-2+\eta}}\sim\text{const}\cdot|V_L|^{1+2/d-\eta/d}=$$

$$=\text{const}\cdot|V_L|^{\alpha}.$$

Так как мы рассматриваем случай, когда $\sum_{x \in V_L} \varphi(x)$ принимает ограниченные значения, то должно быть $\alpha \leqslant 2$. Неравенство $\alpha > 1$ свидетельствует о наличии сильнозависимых случайных величин.

2. Рассмотрим трансляционно-инвариантное предельное распределение Гиббса $P(\beta)$ при $\beta < \beta_{cr}$. Предположим, что $E(\varphi(x)) = 0$,

$$E\left(\sum_{x \in V_L} \varphi(x)\right)^2 \sim \sigma(\beta) \, |V_L|.$$

Естественно допустить, что $\sigma(\beta) \uparrow \infty$, когда $\beta \uparrow \beta_{cr}$, и это стремление происходит со степенной скоростью, т. е. $\sigma(\beta) \sim \mathrm{const} \cdot (\beta_{cr} - \beta)^{-\gamma}$ при $\beta \uparrow \beta_{cr}$. Тогда индекс $\gamma$ характеризует «скорость образования зависимости» при $\beta \uparrow \beta_{cr}$.

3. Согласно определению 4.1 при $\beta > \beta_{cr}$ имеется два разных трансляционно-инвариантных предельных распределения Гиббса $P_1(\beta)$, $P_2(\beta)$. Их различие, как правило, проявляется уже на значениях средних $a_1(\beta) = E_{P_1(\beta)}(\varphi(x))$, $a_2(\beta) = E_{P_2(\beta)}(\varphi(x))$, т. е. $a_1 \neq a_2$. Тогда $a_1(\beta) - a_2(\beta) \to 0$ при $\beta \downarrow \beta_{cr}$ и естественно предположить, что $|a_1(\beta) - a_2(\beta)| \sim \mathrm{const} \cdot |\beta - \beta_{cr}|^{\omega}$ при $\beta \downarrow \beta_{cr}$.

Величины $\eta$, $\gamma$, $\omega$ называются критическими индексами. В физической литературе, помимо указанных, используются и другие критические индексы для характеристики статфизических свойств системы в окрестности $\beta_{cr}$. Конечная цель теории критической точки — для заданного гамильтониана определить отвечающие ему критические индексы. Эта задача еще очень далека от своего решения. В этой главе мы изложим некоторые математические результаты, относящиеся к описанной проблеме.

## § 2. Иерархические модели Дайсона

В работе Ф. Дайсона [59], посвященной теории фазовых переходов для одномерных дальнодействующих моделей, были построены вспомогательные модели, названные им иерархическими. Потом выяснилось, что иерархические модели представляют не меньший интерес в связи с теорией критической точки. В этом параграфе мы определим иерархические модели Дайсона, а дальше получим ряд результатов о критической точке для этих моделей.

Иерархические модели, точнее, их гамильтонианы, строятся индуктивно. На $n$-м шагу рассматривается объем $V^{(n)}$, $|V^{(n)}|=2^n$, состоящий из двух подобъемов $V_1^{(n-1)}$, $V_2^{(n-1)}$, $|V_1^{(n-1)}|=|V_2^{(n-1)}|=2^{n-1}$. Конфигурацией $\varphi$ в объеме $V^{(n)}$ мы называем функцию $\varphi(V^{(n)})=\{\varphi(x),\ x\in V^{(n)}\}$, заданную на $V^{(n)}$ и принимающую значения $\pm 1$. Гамильтониан $H_n(\varphi(V^{(n)}))$ определяется параметром $c$, $1<c<2$, и имеет вид

$$H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)=$$
$$=H_{n-1}(\varphi(V_1{}^{(n-1)}))+H_{n-1}\left(\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)\right)-\frac{c^n}{2^{2n}}\left[\sum_{x\in V^{(n)}}\varphi(x)\right]^2. \tag{4.1}$$

Таким образом, если рассматриваются $n\geqslant n_0$, то для полного построения гамильтониана необходимо задать «начальные условия» в виде начального или затравочного гамильтониана $H_{n_0}\left(\varphi\left(V^{(n_0)}\right)\right)$.

При любом $n\geqslant n_0$ объем $V^{(n)}$ состоит из двух одинаковых подобъемов $V_1^{(n-1)}$, $V_2^{(n-1)}$, каждый из которых, в свою очередь, состоит из двух одинаковых подобъемов $V_{i_1i_2}^{(n-2)}$, каждый из которых состоит из двух одинаковых подобъемов $V_{i_1i_2i_3}^{(n-3)}$ и т. д. Через $\xi^{(m)}$ обозначим разбиение $V^{(n)}$ на подобъемы $V_{i_1i_2\ldots i_m}^{(m)}$, а через $G_{n_0}^n$ обозначим подгруппу группы перестановок пространства $V^n\,|\,\xi^{(n-n_0)}$, сохраняющих все разбиения $\xi^{(m)}$, $n-n_0\leqslant m\leqslant n$. Последнее означает, что перестановка $g\in G_{n_0}^n$ переводит элемент любого разбиения $\xi^{(m)}$ в элемент того же разбиения. Легко видеть, что гамильтониан $H_n$ инвариантен относительно группы $G_{n_0}^n$, т. е.

$$H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)=H_n\left(g\varphi\left(V_{n_0}^{(n)}\right)\right),\quad g\in G^n.$$

Слагаемое в (4.1) $-c^n 2^{-2n}\left[\sum\limits_{x\in V^{(n)}}\varphi(x)\right]^2$ описывает взаимодействие между конфигурациями $\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right)$ и $\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)$. Важно, что это взаимодействие бинарное и является функцией только от сумматорных величин $\sum\limits_{x\in V_1^{(n-1)}}\varphi(x)$ и $\sum\limits_{x\in V_2^{(n-1)}}\varphi(x)$. Этот факт дальше будет чрезвычайно существенно использоваться. Знак минус означает, что мы имеем дело с ферромагнитной моделью. Параметр $c$ принимает значения в интервале $1<c<2$, поскольку при $c<1$ взаимодействие $c^n 2^{-2n}\left(\sum\limits_{x\in V^{(n)}}\varphi(x)\right)^2$ стремится к 0 при $n\to\infty$ равномерно по всем конфигурациям, а при $c>2$ энергия конфигурации $\{\varphi(x)\equiv 1\}$ растет по модулю быстрее, чем объем, и в таком случае невозможен термодинамический предельный переход. Пограничные случаи $c=1,\ 2$ требуют специального анализа.

Допустим, что $n_0=1$. Для любых двух точек $x_1$, $x_2\in V^{(n)}$ рассмотрим наибольшее $k$, при котором точки $x_1$, $x_2$ принадлежат разным элементам разбиения $\xi^{(k)}$, и положим $d(x_1, x_2)=2^{n-k}$. В частности, для $x_1\in\in V_1^{(n-1)}$, $x_2=V_2^{(n-1)}$ имеем $k=1$, $d(x_1, x_2)=2^{n-1}$. Для таких $x_1$, $x_2$ слагаемое $-c^n2^{-2n}\varphi(x_1)\varphi(x_2)$, описывающее взаимодействие $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$, равно $-\dfrac{c}{4}\,\dfrac{\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)}{d^\alpha(x_1, x_2)}$, $\alpha=2-\log_2 c$. Ясно, что $1<\alpha<2$.

Аналогично можно рассмотреть любые пары точек $x_1$, $x_2$. В результате получим, что гамильтониан $H_n(\varphi(V^{(n)}))$ записывается в виде

$$H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)=\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-n_0}} H_{n_0}\left(\varphi\left(V^{(n_0)}_{i_1 i_2\ldots i_{n-n_0}}\right)\right)-$$

$$-\sum_{\substack{x_1\in V^{(n_0)}_{i_1\ldots i_{n-n_0}}\\ x_2\in V^{(n_0)}_{j_1 j_2\ldots j_{n-n_0}},\\ (i_1,\ldots,i_{n-n_0})\neq(j_1,\ldots,j_{n-n_0})}}\frac{a^{(n)}_{n_0}(x_1, x_2)}{d^\alpha(x_1, x_2)}\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2),$$

где коэффициенты $a_{n_0}^{(n)}(x_1, x_2)$ ограничены сверху и снизу постоянными, не зависящими от $n$, $n_0$. Введем величину $f_n(t;\ \beta)$, равную вероятности того, что сумма $\Phi\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right) = \sum\limits_{x \in V^{(n)}} \varphi(x)$ приняла значение $t$, т. е.

$$f_n(t;\ \beta) = \frac{\sum\limits_{\varphi(V^{(n)}):\ \Phi(\varphi(V^{(n)})=t} \exp\left\{-\beta H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)\right\}}{\sum\limits_{\varphi(V^{(n)})} \exp\left\{-\beta H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\Xi_n(\beta)} \sum_{\varphi(V^{(n)}):\ \Phi(\varphi(V^{(n)}))=t} \exp\left\{-\beta H_n\left(\varphi\left(V_n\right)\right)\right\},$$

$$\Xi_n(\beta) = \sum_{\varphi(V^{(n)})} \exp\left\{-\beta H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)\right\}.$$

Тогда мы можем написать, пользуясь видом $H_n$:

$$f_n(t;\ \beta) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\varphi(V^{(n)}):\ \Phi(\varphi(V^{(n)}))=t} \exp\left\{-\beta H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)\right\}}{\Xi_n(\beta)} =$$

$$= \frac{1}{\Xi_n(\beta)} \sum_{t_1} \sum_{\substack{\varphi(V^{(n)}):\ \Phi\left(\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right)\right)=t_1, \\ \Phi\left(\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)\right)=t-t_1,}} \exp\left\{-\beta H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Xi_n(\beta)} \sum_{t_1} \sum_{\substack{\varphi(V^{(n)}):\ \Phi\left(\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right)\right)=t_1, \\ \Phi\left(\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)\right)=t-t_1}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\beta H_{n-1}\left(\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right)\right) - \beta H_{n-1}\left(\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)\right) +\right.$$

$$\left. + \beta c^n 2^{-2n} t^2\right\} = \frac{\Xi_{n-1}^2(\beta)}{\Xi_n(\beta)} \exp\left\{\beta c^n 2^{-2n} t^2\right\} \times$$

$$\times \sum_{t_1} \sum_{\substack{\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right):\ \Phi\left(\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right)\right)=t_1 \\ \varphi\left(V_2^{(n-1)}\right):\ \Phi\left(\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)\right)=t-t_1}} \times$$

$$\times \frac{\exp\left\{-\beta H_{n-1}\left(\varphi\left(V_1^{(n-1)}\right)\right)\right\}}{\Xi_{n-1}(\beta)} \frac{\exp\left\{-\beta H_{n-1}\left(\varphi\left(V_2^{(n-1)}\right)\right)\right\}}{\Xi_{n-1}(\beta)} =$$

$$= \frac{\Xi_{n-1}^2(\beta)}{\Xi_n(\beta)} \exp\left\{\beta c^n 2^{-2n} t^2\right\} \sum_{t_1} f_{n-1}(t_1;\ \beta)\, f_{n-1}(t - t_1;\ \beta).$$

Последнее соотношение показывает, что распределение $f_n$ выражается рекуррентно через распределение $f_{n-1}$. Численный множитель $\Xi_{n-1}^2(\beta)\left(\Xi_n(\beta)\right)^{-1}$ определяется из условия нормировки. Теперь можно вообще забыть о гамильтониане $H_n$ и иметь дело только с последовательностью рекуррентных соотношений

$$f_n(t;\ \beta) = \\ = K_n(\beta)\, e^{\beta c^n 2^{-2n} t^2} \sum_{t_1=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} f_{n-1}(t_1;\ \beta)\, f_{n-1}(t - t_1;\ \beta), \tag{4.2}$$

$$K_n^{-1}(\beta) = \\ = \sum_{t=-2^n}^{2^n} e^{\beta c^n 2^{-2n} t^2} \sum_{t_1=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} f_{n-1}(t_1;\ \beta)\, f_{n-1}(t - t_1;\ \beta), \tag{4.3}$$

$t$ и $t_1$ четны.

Наша цель — изучить поведение иерархических моделей в окрестности $\beta_{cr}$. Мы ожидаем, что при $\beta < \beta_{cr}$ типичные значения переменной $\Phi(\varphi(V^{(n)}))$ имеют порядок $t \sim 2^{n/2}$. При таких $t$ множитель $\exp\{\beta c^n 2^{-2n} t^2\} \to 1$ при $n \to \infty$, и последовательность функций $f_n(t;\ \beta)$ должна вести себя асимптотически как последовательность обычных сверток.

Наоборот, при $\beta > \beta_{cr}$ типичные значения $t$ имеют порядок $2^n$, и множитель $\exp\{\beta c^n 2^{-2n} t^2\}$ становится основным. Сделаем теперь следующее предположение, справедливость которого будет вытекать из всего последующего анализа: точка $\beta = \beta_{cr}$ характеризуется тем, что при этом $\beta_{cr}$ типичные значения $t$ таковы, что $c^n 2^{-2n} t^2 \sim 1$. Если это так, то естественно положить $t = z 2^n c^{-n/2}$ и считать, что $z \sim 1$ при $\beta = \beta_{cr}$. Далее, пусть функция $g_n(z;\ \beta) = f_n(z 2^n c^{-n/2};\ \beta) 2^{n+1} c^{-n/2}$. Тогда,

подставляя последнее выражение в (4.2), мы получим
$$g_n(z;\beta)=L_n(\beta)\,e^{\beta z^2}\sum_{\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z}{\sqrt{c}}} g_{n-1}(z_1;\beta)g_{n-1}(z_2;\beta)\,c^{n/2}2^{-n-1}, \tag{4.4}$$
$z$ пробегает значения вида $z=2jc^{n/2}2^{-n}$, $|j|\leqslant 2^n$. Множитель $L_n(\beta)$ по-прежнему определяется из условия нормировки. Если наше предположение верно, то естественно ожидать, что при $n\to\infty$ функции $g_n(z;\beta)$ сходятся к пределу, и предельная функция $g(z;\beta)$ удовлетворяет уравнению
$$g(z;\beta)=L(\beta)\,e^{\beta z^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)g\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)du, \tag{4.5}$$
$$L^{-1}(\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\beta z^2}dz\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)g\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)du. \tag{4.5$'$}$$
Тем самым дело сводится к нахождению положительных решений нелинейного интегрального уравнения
$$g(z;\beta)=e^{\beta z^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)g\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)du, \tag{4.6}$$
поскольку из решений последнего уравнения интересующие нас решения можно построить с помощью нормировки. Заметим также, что если $g(z;\beta_0)$ — решение уравнения (4.5) при каком-либо $\beta_0$, то решение (4.6) при любом другом $\beta$ получается из равенства $g(z;\beta)=g\left(\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}\,z;\beta_0\right)\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}$. Таким образом, естественно рассматривать однопараметрические семейства функций $\{g(z;\beta)\}$, удовлетворяющие при каждом $\beta$, $0<\beta<\infty$, уравнению (4.6), также зависящему от $\beta$.

Теперь мы можем уточнить постановку задачи о критической точке для иерархических моделей. Пусть дано семейство решений $g(z;\beta)$ уравнений (4.5), (4.5$'$). Требуется описать множество $U$ начальных гамильтонианов $H_{n_0}\left(\left\{\varphi\left(V^{(n_0)}\right)\right\}\right)$, обладающих следующим свойством: для любого $H_{n_0} \in U$ найдется такое $\beta_{cr}\left(H_{n_0}\right)$, что

1) распределение вероятностей, описываемое функцией $g_n(z;\ \beta_{cr})$, при $n \to \infty$ слабо сходится к распределению вероятностей с плотностью $g(z;\ \beta_{cr})$;

2) при $\beta < \beta_{cr}$ найдется такая функция $\sigma(\beta)$, что при $n \to \infty$

$$f_n(t;\ \beta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\beta)\, 2^n}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma(\beta)\, 2^n}\right\}$$

для $t$ таких, что $|t2^{-n/2}| \leqslant A$ при любом $A$, не зависящем от $n$, и $\sigma(\beta) \sim \mathrm{const} \cdot (\beta_{cr} - \beta)^{-\gamma}$ при $\beta \uparrow \beta_{cr}$; при этом критический индекс $\gamma$ не зависит от $H_{n_0}$, а определяется только решениями $g(z;\ \beta)$;

3) при $\beta > \beta_{cr}$ найдется функция $m(\beta)$ такая, что средний спин $\frac{1}{2^n}\Phi\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)$ сходится при $n \to \infty$ к $\pm m(\beta)$ по вероятности, отвечающей распределению Гиббса для гамильтониана $\beta H_{n_0}$; при этом $m(\beta) \sim \sim \mathrm{const} \cdot |\beta - \beta_{cr}|^{\omega}$, где число $\omega$ не зависит от $H_{n_0}$, а определяется только решением $g(z;\ \beta)$ *).

В связи со сказанным естественно ввести следующее определение.

Определение 4.2. Решение $g(z;\ \beta)$ уравнения (4.6) называется термодинамически устойчивым, если найдется такое $n_0$, при котором описанное выше множество $U$ будет открытым (в естественной топологии гамильтонианов, удовлетворяющих условию симметрии) **).

---

*) Свойства 2), 3) сформулированы в виде, наиболее естественном с точки зрения теории вероятностей.

**) Опишем подробнее топологию, которая имеется в виду. Пространство всех возможных начальных гамильтонианов $H\left(\varphi\left(V_{n_0}\right)\right)$ есть векторное пространство размерности $2^{n_0}$ с обычной топологией. Пространство симметричных гамильтонианов, т. е. гамильтонианов, удовлетворяющих равенству $H\left(\varphi\left(V_{n_0}\right)\right) = H\left(-\varphi\left(V_{n_0}\right)\right)$, есть замкнутое подмножество этого пространства. Топология, которая имеется в виду, есть индуцированная топология на этом подмножестве.

Опишем теперь подход, общепринятый в физической литературе, для решения поставленной задачи. Будем рассматривать (4.4) как нелинейное преобразование $T(\beta)$, переводящее $g_{n-1}(z;\ \beta)$ в $g_n(z;\ \beta)$. Рассмотрим кривую $\{g(z;\ \beta)\} = g$ (как однопараметрическую функцию $\beta$) решений (4.5). Каждая точка $g(z;\ \beta)$ этой кривой является неподвижной точкой нелинейного преобразования $T(\beta)$: $g(z;\ \beta) = T(\beta)g(z;\ \beta)$. Как в обычной теории нелинейных отображений, исследуем $g(z;\ \beta)$ на устойчивость в линейном приближении и предположим, что касательное пространство в точке $g(z;\ \beta)$ состоит из одномерного неустойчивого подпространства и устойчивого подпространства коразмерности 1. В конечномерной теории из этого следует, что через каждую точку $g(z;\ \beta)$ проходит устойчивое подмногообразие $\Gamma^{(s)}(\beta)$ этой точки коразмерности 1, состоящее из таких $g'$, что $T^n(\beta)g' \to g(z;\ \beta)$ при $n \to \infty$. Объединение этих подмногообразий по всем $\beta$ представляет собой некоторую окрестность кривой $g$.

Рассмотрим ветвь затравочных распределений $g_{n_0} = \{g_{n_0}(z;\ \beta)\}$. Из приведенной геометрической картины ясно, что $\beta_{cr}$ определяется тем, что $g_{n_0}(z;\ \beta_{cr}) \in \Gamma^{(s)}(\beta_{cr})$. Накопленный опыт теории нелинейных преобразований показывает, что явное построение устойчивых многообразий $\Gamma^{(s)}(\beta)$, как правило, невозможно, поскольку они являются решениями сложных функциональных уравнений, для построения которых применяется тот или иной метод последовательных приближений, приводящий только к доказательству существования таких многообразий. То, что обычно известно и чего достаточно для большинства задач,— это касательное пространство $\mathscr{T}^{(s)}(\beta)$ к $\Gamma^{(s)}(\beta)$ в точке $g(z;\ \beta)$, порожденное устойчивыми собственными векторами линеаризованной задачи. Объединение таких касательных пространств также содержит окрестность $g$.

Предположим, что $n_0$ велико и начальный гамильтониан выбран так, что кривая $g_{n_0}$ достаточно близка к кривой $g$, и мы можем рассмотреть функцию $\bar{\beta} = \lambda(\beta)$, определенную соотношением $g_{n_0}(z;\ \beta) \in \mathscr{T}^{(s)}_{\bar{\beta}}$. Если считать, что $\mathscr{T}^{(s)}_{\beta}$ дает приблизительное представление о $\Gamma_\beta^{(s)}$, то приближенным значением для $\beta_{cr}$ является решение уравнения $\beta=\lambda(\beta)$. В случае термодинамически устойчивого решения в окрестности приближенного решения уравнения $\beta=\lambda(\beta)$, определяемого затравочным гамильтонианом, должна лежать истинная критическая точка.

Приведенные выше рассуждения надо рассматривать как эвристические соображения, приводящие нас к следующей программе действий:

1) имея решения $g(z;\ \beta)$, исследовать их на устойчивость в линейном приближении и найти среди них те, которым отвечает только одно неустойчивое направление:

2) построить начальный гамильтониан $H_{n_0}$ так, чтобы отвечающая ему функция $\lambda(\beta)$ имела бы трансверсальное пересечение с диагональю $\bar\beta=\beta$;

3) показать, что найдется точка $\beta_{cr}$, близкая к решению уравнения $\beta=\lambda(\beta)$, для которой $g_n(z;\ \beta_{cr})\to \to g(z;\ \beta)$;

4) исследовать поведение $g_n(z;\ \beta)$ при $\beta$, близких к $\beta_{cr}$.

Ниже мы покажем, как эта программа проводится для некоторых частных решений (4.6).

## § 3. Гауссовское решение

Уравнение (4.5), (4.5′) имеет при любом $c$, $1<c<2$, гауссовское решение $g^{(0)}(z;\ \beta)= =\sqrt{\dfrac{a_0(\beta)}{\pi}}\exp\{-a_0(\beta)z^2\}$, $a_0(\beta)=\beta c/(2-c)$. В соответствии с описанной программой мы должны начать с анализа устойчивости этого решения. Несколько проще иметь дело с уравнением (4.6). Полагая в (4.6) $g(z;\ \beta)=\exp\{-a_0(\beta)z^2\}h(z;\ \beta)$, получим

$$h(z;\ \beta)= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-2a_0(\beta)u^2\}h\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)h\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)du=Q(\beta)h. \tag{4.7}$$

Гауссовскому решению соответствует решение (4.7) $h_0(z;\beta)=C(\beta)=\sqrt{\frac{2a_0(\beta)}{\pi}}$. Так как решения (4.7) при разных $\beta$ также связаны соотношением

$$h_0(z;\beta)=h_0\left(\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}\,z;\beta_0\right)\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}},$$

то достаточно в (4.7) рассматривать $\beta_0$, при котором $2a_0(\beta)=1/2$. По этой причине всюду ниже аргумент $\beta_0$ опущен. Для исследования устойчивости положим $h(z)=h_0(z)+\varepsilon G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\varepsilon G(z)$ и напишем

$$Q(h_0(z)+\varepsilon G(z))=Q(h_0(z))+\varepsilon A(G(z))+\ldots,$$

где многоточием отмечены члены более высокого порядка по $\varepsilon$. Линейный оператор $A$ есть дифференциал нелинейного преобразования $Q=Q(\beta_0)$. В данном случае он представляет собой известный интегральный оператор Гаусса (см. Г. Бейтмен и А. Эрдейи «Высшие трансцендентные функции».— М.: Наука, 1966)

$$(AG)(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}G\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)du. \qquad (4.8)$$

Ниже нам понадобится также оператор $A(\beta)$, определенный при любом $\beta$ равенством

$$(A(\beta))G)(z)=$$
$$=2\sqrt{\frac{2a_0(\beta)}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-2a_0(\beta)u^2}G\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)du. \qquad (4.8')$$

Ясно, что если $G(z)=z^n+\ldots$ — полином степени $n$, то $AG$ — также полином степени $n$, коэффициент которого при $z^n$ равен $2c^{-n/2}$. Отсюда вытекает, что при каждом $n$ можно построить полином $G_n$ степени $n$, являющийся собственным вектором оператора $A$ с собственным значением $\lambda_n=2c^{-n/2}$.

Покажем, что $G_n$ является полиномом Эрмита, строящимся по гауссовскому распределению с плотностью $\exp\left\{-\frac{c-1}{2c}z^2\right\}$. В самом деле, заметим, что оператор $A$ является симметрическим оператором в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2\left(R^1, \exp\left(-\frac{c-1}{2c}z^2\right)\right)$. Действительно, для любых $G'$, $G''$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}(AG')\cdot G''\exp\left\{-\frac{c-1}{2c}z^2\right\}dz =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}-\frac{c-1}{2c}z^2\right\}G'\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)G''(z)\times$$

$$\times dz\,du=\int_{-\infty}^{\infty}G'(w)\,G''(z)\exp\left\{-\frac{w^2}{2}+\frac{wz}{\sqrt{c}}-\frac{z^2}{2}\right\}dw\,dz=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(AG'')\,G'\exp\left\{-\frac{c-1}{2c}z^2\right\}dz.$$

Отсюда следует, что полиномы $G_n$ ортогональны с весом $\exp\left\{-\frac{c-1}{2c}z^2\right\}$. А это и есть, по определению, полиномы Эрмита. Можно дать и другое, чисто вероятностное, доказательство того, почему здесь появляются полиномы Эрмита (см. далее).

Из приведенных рассуждений также следует, что собственные функции $G_n$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $\mathscr{L}^2\left(R^1, \exp\left\{-\frac{c-1}{2c}z^2\right\}\right)$.

Заметим, далее, что в наших задачах мы будем иметь дело с четными гамильтонианами, т. е. гамильтонианами, инвариантными относительно «$\pm$»-симметрии, при которой $\varphi(V^{(n)})\to-\varphi(V^{(n)})$. Поэтому спектр оператора $A$ следует исследовать только в пространстве четных функций, и стало быть, нас интересуют только четные $n=2n'$, $n'=0, 1, 2, \ldots$. Наконец, нас интересуют только такие возмущения $G$, при которых $h_0+\varepsilon G$ с точностью до малых высшего по $\varepsilon$ порядка остается распределением вероятностей. Это означает, что мы должны в результате отбросить константы и рассмотреть спектр оператора $A$ в подпространстве четных функций, интеграл от которых с соответствующим весом равен нулю, т. е. числа $\lambda_2$, $\lambda_4$, $\lambda_6$, $\ldots$. Заметим, что

$\lambda_2 = 2c^{-1} > 1$ при всех $c$, $1 < c < 2$. Далее, $\lambda_4 = 2c^{-2} > \lambda_6 > \ldots$. Возвращаясь к описанной выше общей картине, мы ожидаем, что гауссовское решение термодинамически устойчиво, если $\lambda_4 < 1$, т. е. $c > \sqrt{2}$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть $\sqrt{2} < c < 2$ и фиксированы $\beta_{\text{cr}}^{(0)} > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $n_0$ и открытое множество $U$ в пространстве четных гамильтонианов $H_{n_0}\left(\varphi\left(V_{n_0}\right)\right)$, что для любого $H_{n_0} \in U$ существует $\beta_{\text{cr}} = \beta_{\text{cr}}\left(H_{n_0}\right)$, $\left|\beta_{\text{cr}} - \beta_{\text{cr}}^{(0)}\right| < \varepsilon$ такое, что распределение вероятностей, отвечающее функции $g_n(z;\ \beta_{\text{cr}})$, слабо сходится при $n \to \infty$ к гауссовскому распределению.

Доказательство теоремы удобно проводить, следя за так называемыми малыми статистическими суммами

$$Z_n(t;\ \beta) = f_n(t;\ \beta)\,\Xi_n(\beta),$$
$$\Xi_n(\beta) = \sum_{\varphi(V^{(n)})} e^{-\beta H_n\left(\varphi\left(V^{(n)}\right)\right)}.$$

Из (4.2) следует, что

$$Z_{n+1}(t;\ \beta) = \\ = \exp\left\{\beta c^{n+1} 2^{-2(n+1)} t^2\right\} \sum_{t_1+t_2=t} Z_n(t_1;\ \beta)\, Z_n(t_2;\ \beta). \qquad (4.9)$$

Здесь $t_1$, $t_2$ — четные целые, $|t_1|$, $|t_2| \leqslant 2^n$, $|t| \leqslant 2^{n+1}$. В основе рассуждений лежат индуктивные предположения о структуре $Z_n(t;\ \beta)$. Мы покажем, что из их справедливости на $n$-м шагу вытекает их справедливость на $(n+1)$-м шагу. Затем мы отдельно обсудим выполнение этих предположений при $n = n_0$. Та точка $\beta$, при которой индуктивные предположения выполнены при всех $n$, и окажется критической.

*Индуктивные предположения.* Пусть $D^{(n)} = \{t\colon |t| \leqslant D\sqrt{n} c^{-n/2} 2^n\}$, $D = D(c)$ — постоянная, которую мы потом предположим достаточно большой, $N = N(c)$ — целое, которое также надо будет потом выбрать достаточно большим. Удобно на $n$-м шагу пользоваться вместо переменной $t$ переменной $z$, $z = c^{n/2} 2^{-n-1} t$, возникающей от нормировки в критической точке (см.

выше). Отрезок $D^{(n)}$ в переменных $z$ имеет вид

$$D^{(n)} = \{z\colon |z| \leqslant D\sqrt{n}\}.$$

Предположим, что на $n$-м шагу дан отрезок $\beta^{(n)} = [\beta_-^{(n)}, \beta_+^{(n)}]$ значений параметра $\beta$, при котором выполнены формулируемые ниже индуктивные предположения.

$\mathrm{Ind}_1^{(n)}$) для всех $\beta \in \beta^{(n)}$ и $z \in D^{(n)}$

$$Z_n(t; \beta) = L_n(\beta)\, c^{n/2} 2^{-n-1} \exp\{-a_0(\beta) z^2 - B_2^{(n)}(\beta)\left(2c^{-1}\right)^n G_2(z; \beta) - B_4^{(n)}(\beta)\left(2c^{-2}\right)^n G_4(z; \beta) - \sum_{k=3}^{N} B_{2k}^{(n)}(\beta)\left(2c^{-2}\right)^n \lambda_1^n G_{2k}(z; \beta) - Q^{(n)}(z; \beta) - R^{(n)}(z; \beta)\}. \quad (4.10)$$

Здесь $L_n(\beta)$ — постоянная, зависящая только от $\beta$ и $n$, $G_{2k}(z; \beta)$ — полиномы Эрмита, отвечающие гауссовской плотности $\sqrt{\dfrac{\beta\gamma}{\pi}} \exp\{-\beta\gamma z^2\}$, $\gamma = \dfrac{2a_0(\beta)(c-1)}{\beta c}$, $\lambda_1$ — постоянная, $0 < \lambda_1 < 1$; функция $Q^{(n)}(z; \beta)$ определена при всех действительных $z$, четна по $n$, ограничена и

$$\int Q^{(n)}(z; \beta)\, G_{2k}(z; \beta)\, e^{-\beta\gamma z^2} dz = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant N,$$

$$\left|Q^{(n)}(z; \beta)\right| \leqslant \lambda_1^n \left(2c^{-2}\right)^n \quad \text{при} \quad z \in D^{(n)};$$

функция $R^{(n)}(z; \beta)$ определена при $z = c^{n/2} 2^{-n} t \in D^{(n)}$, $t$ — четное целое, $|t| \leqslant 2^n$ и $\left|R^{(n)}(z; \beta)\right| \leqslant \lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n$. В дальнейшем $\lambda_1$ будет предполагаться достаточно близким к 1.

$\mathrm{Ind}_2^{(n)}$). $B_2^{(n)}(\beta)$ — непрерывная функция $\beta$,

$$B_2^{(n)}\left(\beta_-^{(n)}\right) = \lambda_1^n \cdot c^{-n}, \quad B_2^{(n)}\left(\beta_+^{(n)}\right) = -\lambda_1^n c^{-n}$$

и $\left|B_2^{(n)}(\beta)\right| \leqslant \lambda_1^n c^{-n}$ при всех $\beta \in \beta^{(n)}$.

$\mathrm{Ind}_3^{(n)}$). При всех $t \notin \widetilde{D}^{(n)}$

$$Z_n(t; \beta) \leqslant$$

$$\leqslant L_n(\beta)\, c^{n/2} 2^{-n-1} \exp\{-a_0(\beta)\, c^n 2^{-2n} t^2 - \overline{B}_4^{(n)}(\beta) 2^{-3n} t^4\} =$$

$$= L_n(\beta)\, c^{n/2} 2^{-n-1} \exp\{-a_0(\beta) z^2 - \overline{B}_4^{(n)}(\beta)\left(2c^{-2}\right)^n z^4\},$$

$$\overline{B}_4^{(n)}(\beta) > 0 \text{— постоянная;}\ \ \overline{B}_4^{(n)}(\beta) \leqslant \frac{1}{2} B_4^{(n)}(\beta).$$

$\mathrm{Ind}_4^{(n)}$). Все величины $L_n, B_{2k}^{(n)}, \overline{B}_4^{(n)}$ непрерывно зависят от $\beta$, $Q^{(n)}$ и $R^{(n)}$ непрерывно зависят от $\beta$ при каждом $z$.

Основная лемма. Пусть выполнены $\mathrm{Ind}_1^{(n)}$ — — $\mathrm{Ind}_4^{(n)}$. Тогда найдется такой отрезок $\beta^{(n+1)} \subset \beta^{(n)}$, для которого статистические суммы $Z_{n+1}(t;\beta)$ удовлетворяют $\mathrm{Ind}_1^{(n+1)}$ — $\mathrm{Ind}_4^{(n+1)}$. При этом найдется постоянная $\lambda_2 < 1$ такая, что

$$\left|B_4^{(n)} - B_4^{(n+1)}\right| \leqslant \lambda_2^n,$$

$$\left|B_{2k}^{(n+1)} - c^{-k+2}\lambda_1^{-1} B_{2k}^{(n)}\right| \leqslant \lambda_2^n, \quad k = 3, 4, \ldots, N,$$

$$Q^{(n+1)}(z;\beta) = A(\beta)\left(Q^{(n)}(z;\beta)\right) + Q_1^{(n)}(z;\beta),$$

где $\left|Q_1^{(n)}(z;\beta)\right| \leqslant \mathrm{const}\, n^{2N} \lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n$, const не зависит от $n$, оператор $A(\beta)$ определен в (4.8′). Постоянная $\overline{B}_4^{(n+1)} = \overline{B}_4^{(n)}\left(1 - n^N \lambda_1^{3n/2}\right)$.

Доказательство. Пусть $z \in D^{(n+1)}$. Имеем при $t = z 2^{n+2} c^{-(n+1)/2}$

$$Z_{n+1}(t;\beta) = e^{\beta c^{n+1} 2^{-2(n+1)} t^2} \sum_{t_1+t_2=t} Z_n(t_1;\beta)\, Z_n(t_2;\beta) =$$

$$= e^{\beta z^2} \sum_{z_1+z_2=2z/\sqrt{c}} Z_n\left(z_1 c^{-n/2} 2^{n+1};\beta\right) Z_n\left(z_2 c^{-n/2} 2^{n+1};\beta\right) =$$

$$= e^{\beta z^2} \sum_u Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}} + u\right) 2^{n+1} c^{-n/2};\beta\right) \times$$

$$\times Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}} - u\right) 2^{n+1} c^{-n/2};\beta\right).$$

Здесь $u$ меняется с шагом $\Delta_n = c^{n/2}\cdot 2^{-n-1}$, принимая такие значения, что выражения $\left(\frac{2z}{\sqrt{c}} \pm u\right) 2^{n+1} c^{-n/2}$ будут целыми четными числами, не превосходящими по модулю $2^n$. Разобьем последнюю сумму на две части

$$e^{\beta z^2}\sum_u Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)2^{n+1}c^{-n/2};\,\beta\right)Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)\times\right.$$

$$\left.\times 2^{n+1}c^{-n/2};\,\beta\right)=e^{\beta z^2}\sum_{|u|\leqslant\frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}} Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)\times\right.$$

$$\left.\times 2^{n+1}c^{-n/2};\,\beta\right)Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)2^{n+1}c^{-n/2};\,\beta\right)+$$

$$+e^{\beta z^2}\sum_{|u|>\frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}} Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)2^{n+1}c^{-n/2};\,\beta\right)\times$$

$$\times Z_n\left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)2^{n+1}c^{-n/2};\,\beta\right)=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

Исследуем вначале $\Sigma_1$. Заметим, что при рассматриваемых $u$ выражение $\frac{z}{\sqrt{c}}\pm u\in D^{(n)}$. Поэтому мы можем воспользоваться $\mathrm{Ind}_1^{(n)}$ и подставить вместо $Z_n$ его представление (4.10). Далее, в силу $\mathrm{Ind}_1^{(n)}$, $\mathrm{Ind}_2^{(n)}$

$$|B_2^{(n)}(\beta)(2c^{-1})^nG_2(z;\,\beta)|+|B_4^{(n)}(\beta)(2c^{-2})^nG_4(z;\,\beta)|+$$

$$+\sum_{k=3}^{N}|B_{2k}^{(n)}(\beta)|(2c^{-2})^n\lambda_1^n|G_{2k}(z;\,\beta)|+|Q^{(n)}|+|R^{(n)}|\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\cdot n^N\left(\max_{\substack{\beta\in\beta^{(n)}\\ 1\leqslant k\leqslant N}} B_2^{(n)}(2c^{-1})^n,\,|B_{2k}^{(n)}|(2c^{-2})^n\right),\qquad(4.11)$$

где const зависит от $N$, но не зависит от $n$. Допустим, что лемма уже доказана. Тогда все числа $B_{2k}^{(n)}(\beta)$ ограничены по модулю константой, не зависящей от $n$, $k$, $\beta$, которую мы обозначим $B$. Поэтому $(4.11)\to 0$ при $n\to\infty$, и мы можем разложить соответствующее выражение в $\Sigma_1$ в ряд Тейлора до членов 2-го порядка включительно. Получим

$$\Sigma_1=L_n^2(\beta)\left(\frac{2}{\sqrt{c}}\right)c^{(n+1)/2}2^{-n-2}e^{\beta z^2-2a_0(\beta)c^{-1}z^2}\times$$

$$\times\sum_{|u|\leqslant\frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}} e^{-2a_0(\beta)u^2}c^{n/2}2^{-n-1}\times$$

$$\times\left[1-\sum_{k=1}^{N} B_{2k}^{(n)}\left(G_{2k}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)+G_{2k}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)\right)-\right.$$
$$-\left(Q^{(n)}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)+Q^{(n)}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)\right)-$$
$$\left.-\left(R^{(n)}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)+R^{(n)}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)\right)+T^{(n)}\right].$$

Здесь $T^{(n)}$ — погрешность. Ясно, что $T^{(n)}$ имеет порядок квадрата всего выражения, раскладываемого в ряд. Поэтому из (4.11) получаем, что

$$\left|T^{(n)}\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot B^2\left(2c^{-2}\right)^{2n} n^N. \tag{4.12}$$

Следующий шаг состоит в замене суммы на интеграл. При этом нам придется распространить функции $R^{(n)}$ и $T^{(n)}$ на все значения аргумента. Мы будем считать их кусочно-постоянными, принимающими постоянное значение на каждом отрезке длины $\Delta_n$. Погрешность, возникающую от замены суммы на интеграл, обозначим $r_1^{(n)}$. Теперь можем написать

$$e^{a_0(\beta)z^2}\Sigma_1 = L_n^2(\beta)\,2^{-n-2}c^{(n+1)/2}c^{1/2}2^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}}\times$$
$$\times\left\{\sqrt{\frac{2a_0(\beta)}{\pi}}\int\limits_{|u|\leqslant\frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}} e^{-2a_0(\beta)u^2}du\left[1-\right.\right.$$
$$-2B_2^{(n)}(\beta)\left(2c^{-1}\right)^n G_2\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)-2B_4^{(n)}(\beta)\left(2c^{-2}\right)^n\times$$
$$\times G_4\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)-2\left(\sum_{k=3}^{N}B_{2k}^{(n)}\lambda_1^n\left(2c^{-2}\right)^n G_{2k}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\ \beta\right)+\right.$$
$$+Q^{(n)}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)+R^{(n)}\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)\Bigg)+$$
$$\left.\left.+T^{(n)}\right]+r_1^{(n)}\right\}=L_n^2(\beta)\,2^{-n-2}c^{(n+1)/2}c^{1/2}2^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}}\times$$
$$\times\left(1-B_2^{(n)}(\beta)\left(2c^{-1}\right)^n A(\beta)\,G_2-B_4^{(n)}(\beta)\left(2c^{-2}\right)^n A(\beta)\,G_4-\right.$$

$$- \sum_{k=3}^{N} B_{2k}^{(n)}(\beta)\,\lambda_1^n (2c^{-2})^n A(\beta) G_{2k} - A(\beta) Q^{(n)} -$$
$$- A(\beta)\,R^{(n)} + T_1^{(n)} + r_1^{(n)} + r_2^{(n)}\Big).$$

Через $T_1^{(n)}$ обозначен результат интегрирования $T^{(n)}$, а погрешность $r_2^{(n)}$ появилась из-за того, что в определение оператора $A$ входит интегрирование по всей прямой, а в последнем выражении интегрирование происходит только по $|u| \leqslant \frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}$. В результате получим

$$e^{a_0(\beta) z^2} \Sigma_1 = L_n^2(\beta)\, 2^{-n-2} c^{(n+1)/2} c^{1/2} 2^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}} \times$$
$$\times \Big(1 - B_2^{(n)} (2c^{-1})^{n+1} G_2(z;\beta) - B_4^{(n)} (2c^{-2})^{n+1} G_4(z;\beta) -$$
$$- \sum_{k=3}^{N} B_{2k}^{(n)} (2c^{-k})\,\lambda_1^n (2c^{-2})^n G_{2k}(z;\beta) -$$
$$- A(\beta)\,Q^{(n)} - A(\beta)\,R^{(n)} + T_1^{(n)} + r_1^{(n)} + r_2^{(n)}\Big) =$$
$$= L_n^2(\beta)\, 2^{-n-2} c^{(n+1)/2} c^{-1/2} 2 \sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}} +$$
$$\times \exp\{- B_2^{(n)}(\beta) (2c^{-1})^{n+1} G_2(z;\beta) - B_4^{(n)} (2c^{-2})^{n+1} \times$$
$$\times G_4(z;\beta) - \sum_{k=3}^{N} B_{2k}^{(n)} (c^{-k+2})\,\lambda_1^n (2c^{-2})^{n+1} G_{2k}(z;\beta) -$$
$$- A(\beta)\,Q^{(n)} - A(\beta)\,R^{(n)} + T_1^{(n)} + r_1^{(n)} + r_2^{(n)} + T_2^{(n)}\}$$

Здесь $T_2^{(n)}$ — добавок, возникающий из-за разницы между $1-\varepsilon$ и $e^{-\varepsilon}$. Функция $A(\beta) R^{(n)}$ определена и четна при $z \in D^{(n+1)}$. Продолжим ее на всю прямую, положив равной 0 вне $D^{(n+1)}$. Мы можем написать

$$A(\beta)\,R^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^{N} b_{2k}^{(n)} G_{2k}(z;\beta) + \bar{Q}_1^{(n)}(z;\beta)\right) \chi_{D^{(n+1)}}(z),$$
$$Q_1^{(n)}(z;\beta) = \bar{Q}_1^{(n)}(z;\beta)\,\chi_{D^{(n+1)}}(z),$$

где коэффициенты $b_{2k}^{(n)}$ выбраны так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_1^{(n)}(z;\beta)\, G_{2k}(z;\beta)\, e^{-\beta\gamma z^2} dz = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant N.$$

При этом из неравенств $\left|R^{(n)}\right| \leqslant \lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n$ и $\max\limits_{z\in D_{n+1}} \left|G_{2k}(z;\beta)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot n^k$ следует, что $\left|b_{2k}^{(n)}\right| \leqslant \leqslant \mathrm{const}\cdot n^N \lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n$, и

$$\left|\overline{Q}_1^{(n)}(z;\beta)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot n^N \lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n. \tag{4.13}$$

Теперь мы можем написать основные рекуррентные уравнения

$$B_2^{(n+1)} = B_2^{(n)} + b_2^{(n)}\left(c2^{-1}\right)^{n+1},$$
$$B_4^{(n+1)} = B_4^{(n)} + b_4^{(n)}\left(c^2 2^{-1}\right)^{n+1},$$
$$B_{2k}^{(n+1)} = B_{2k}^{(n)} c^{-k+2}\lambda_1^{-1} + b_{2k}^{(n)}\left(c^2 2^{-1}\right)^{n+1}\lambda_1^{-n-1},$$
$$3 \leqslant k \leqslant N,$$
$$Q^{(n+1)} = A(\beta)\,Q^{(n)} + Q_1^{(n)},$$
$$R^{(n+1)} = T_1^{(n)} + r_1^{(n)} + T_2^{(n)} + \ln\left(1 + \Sigma_2\Sigma_1^{-1}\right),$$
$$L_{n+1} = L_n^2 2c^{-1/2}\sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}}\, e^{b_0^{(n)}}.$$

Из того, что $\left|R^{(n)}\right| \leqslant \lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n$, легко следует, что $\left|b_{2k}^{(n)}\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot n^N\lambda_1^{3n/2}\left(2c^{-2}\right)^n$. Поэтому, если $n$ достаточно велико, то $B_{2k}^{(n+1)}$ удовлетворяет требуемым неравенствам, $k=2, \ldots, N$. Постоянную $\lambda_1$ выберем настолько близкой к 1, чтобы $c\lambda_1 > 1$.

Исследуем теперь убывание $Q^{(n+1)}$. Из рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют $Q^{(n)}$, видно, что

$$Q^{(n+1)} = A^{n-n_0+1}(\beta)\left(Q^{(n_0)}\right) + \sum_{p=n_0}^{n} A^{n-p}(\beta)\left(Q_1^{(p)}\right).$$

Обозначим $\mathscr{H}_N^{\perp}$ подпространство пространства $\mathscr{L}^2\left(R^1, e^{-\gamma\beta z^2}\right)$, состоящее из четных функций $f$, таких, что

$$\int f(z)\, G_{2k}(z;\beta)\, e^{-\gamma\beta z^2} dz = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Ясно, что $\mathscr{H}_N^{\perp}$ инвариантно относительно действия оператора $A(\beta)$ и $\|A(\beta)\|_{\mathscr{H}_N^{\perp}} = 2c^{-N-1}$. Так как все $Q_1^{(p)} \in \mathscr{H}_N^{\perp}$, то

$$A^{n-p}(\beta)\left(Q_1^{(p)}\right) \in \mathscr{H}_N^{\perp}$$

и

$$\left\|A^{n-p}(\beta)\left(Q_1^{(p)}\right)\right\| \leqslant \left(2c^{-N-1}\right)^{n-p}\left\|Q_1^{(p)}\right\|.$$

Лемма 1. Пусть функция $t \in \mathscr{H}_N^{\perp}$ и $|t(z)| \leqslant 1$ при всех $z$. Пусть также $0 < M_1 < \frac{1}{6}\ln c$, $0 < M_2 < \sqrt{\frac{\ln c}{\text{const}}}$, где const будет указана в ходе доказательства. Тогда при достаточно больших $N$ и при любом $p > 1$ справедливо неравенство

$$\left|\left(A^p t\right)(z)\right| \leqslant e^{-M_1 p(N+1)}$$

при $|z| \leqslant M_2\sqrt{pN}$.

Доказательство. Следующие утверждения очевидны:

1) если $|t(z)| \leqslant 1$, то найдется такая абсолютная постоянная $L_1 > 1$, что

$$|(At)(z)| \leqslant L_1, \quad \left|\frac{d}{dz}(At)(z)\right| \leqslant L_1;$$

2) $\|A^p t\| \leqslant (2c^{-N-1})^p \|t\|$.

Здесь имеется в виду норма в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2\left(R^1, e^{-\gamma\beta z^2}\right)$.

Допустим теперь, что при каком-то $z_0$, $|z_0| \leqslant M_2\sqrt{pN}$, выполняется неравенство

$$\left(A^p t\right)(z_0) \geqslant e^{-M_1 p(N+1)}.$$

Случай, когда $(A^p t)(z_0)$ отрицательно, рассматривается аналогично. Из 1) следует, что

$$\left|\frac{d}{dz}\left(A^p t\right)\right| \leqslant L_1^p.$$

Построим функцию $g(z)$:

$$g(z) = \begin{cases} \left(A^p t\right)(z_0) - L_1^p\,|z - z_0|, & |z - z_0| \leqslant \dfrac{e^{-M_1 p(N+1)}}{L_1^p}, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases}$$

Тогда $0 \leqslant g(z) \leqslant (A^p t)(z)$ при $|z - z_0| \leqslant e^{-M_1 p(N+1)} L_1^{-p} = \Gamma$ и поэтому

$$(2c^{-N-1})^p \geqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [(A^p t)(z)]^2 e^{-\beta\gamma z^2} dz} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{|z-z_0| \leqslant \Gamma} e^{-\beta\gamma z^2} \sqrt{\int g^2(z)\, dz} \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{const} \cdot \exp\{-\mathrm{const}\,(M_2 \sqrt{pN} + \Gamma)^2\}\, \Gamma e^{-M_1 p(N+1)}.$$

Возьмем $N$ настолько большим, что $\Gamma \leqslant M_2 \exp\left\{-\frac{1}{2} M_1 p (N+1)\right\}$. Тогда $\exp\{-\mathrm{const} \times (M_2 \sqrt{pN} + \Gamma)^2\}$ не меньше, чем $\exp\{-\mathrm{const} \times M_2^2 pN\}$, а все выражение не меньше, чем

$$\exp\{-\mathrm{const} \cdot M_2^2 pN - p \cdot \mathrm{const} - 2M_1 p (N+1) + \mathrm{const}\}.$$

Здесь выражения, содержащие $L_1$, включены в const. Отсюда $p(N+1)\ln c + p \cdot \mathrm{const} \leqslant \mathrm{const} \cdot M_2^2 pN + 2M_1 p (N+1) + \mathrm{const}$. При больших $N$ левая часть эквивалентна $pN \ln c$. При нашем выборе $M_1$, $M_2$ правая часть при больших $N$ меньше левой. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Доказанная лемма может рассматриваться как аналог теоремы тауберова типа для полиномов Эрмита. Она показывает, что если коэффициенты Фурье по полиномам Эрмита малы, то функция также достаточно мала на отрезке, зависящем от малости коэффициентов Фурье.

С помощью леммы 1 можно теперь оценить $Q^{(n+1)}$. Пусть $n_1 = [n\omega]$ при некотором $\omega$, $0 < \omega < 1$. Тогда при $p \leqslant n_1$ $n - p \geqslant (1-\omega) n$, $M_2 \sqrt{(n-p) N} \geqslant M_2 \sqrt{(1-\omega) N} \cdot \sqrt{n}$. Выберем $N$ столь большим, что $M_2 \sqrt{(1-\omega) N} > D$. Мы можем при этом условии оценить с помощью леммы $A^{n-p}(\beta)\, Q_1^{(p)}$, что даст

$$\lambda_1^p (2c^{-2})^p \exp\{-M_1 (n-p)(N+1)\} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1^p (2c^{-2})^p \exp\{-n M_1 (1-\omega)(N+1)\}.$$

При любом $\omega$ можно так выбрать $N$, что

$\exp\{-M_1\omega(N+1)\} \leqslant \lambda_1^2(2c^{-2})$. Аналогичная оценка справедлива при $p = n_0$. В результате получим

$$|A^{n-n_0+1}(\beta)\,Q^{(n_0)}| + \sum_{p=n_0+1}^{n_1} |A^{n-p}(\beta)\,Q_1^{(p)}| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\,\lambda_1^n(\lambda_1 2c^{-2})^n.$$

При $p, n_1 < p < n$, имеем $|A^{n-p}(\beta)\,Q_1^{(p)}| \leqslant L_1^{n-p}|Q_1^{(p)}| \leqslant$ $\leqslant \mathrm{const}\cdot L_1^{n(1-\omega)} n^N \lambda_1^{3p/2}(2c^{-2})^p$. Суммирование этой оценки по $p$, $n_1 < p \leqslant n$, дает в результате $\mathrm{const}\cdot L_1^{n(1-\omega)} n^N \lambda_1^{3\omega/2}(2c^{-2})^{n_1}$. Выберем $\omega$ столь близким к 1, чтобы $L_1^{1-\omega}\lambda_1^{3\omega/2}(2c^{-2})^{\omega} < \lambda_1(2c^{-2})$. Тогда при достаточно больших $n$ последнее выражение будет меньше, чем $\frac{1}{2}\lambda_1^{n+1}(2c^{-2})^{n+1}$. Складывая это с полученной уже оценкой для $A^{n-n_0+1}(\beta)\,Q^{(n_0)} + \sum\limits_{p=n_0}^{n} A^{n-p}(\beta)\,Q_1^{(p)}$, получим требуемую оценку для $Q^{(n+1)}$. Заметим также, что $\left|\frac{d}{dz}Q^{(n+1)}(z)\right| \leqslant \lambda_1^{3n/2}(2c^{-2})^n$ при $z \in D_{n+1}$. Доказательство проводится так же, как доказательство предыдущей оценки с отличием в том, что член $\frac{d}{dz}Q_1^{(n)}(z)$ должен быть оценен отдельно. Для него можем написать

$$\left|\frac{d}{dz}Q_1^{(n)}(z)\right| = \left|\frac{d}{dz}A(\beta)\,R^{(n)} - \sum_{k=0}^{N} b_{2k}^{(n)} G_{2k}(z;\,\beta)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\cdot n^{2N}(2c^{-2})\,\lambda_1^{3n/2}.$$

Теперь займемся оценкой всех погрешностей. Имеем из (4.12) и предыдущих рассмотрений

$$|T_1^{(n)}| \leqslant L_1\,\mathrm{const}\cdot B^2 n^N (2c^{-2})^{2n} =$$
$$= L_1\,\mathrm{const}\cdot B^2 n^N (2c^{-2})^n (2c^{-2})^n.$$

Выберем $\lambda_1$ так, чтобы $2c^{-2} < \lambda_1^{3/2} < 1$. Тогда при достаточно больших $n$

$$|T_1^{(n)}| < \frac{1}{5}\lambda_1^{3(n+1)/2}(2c^{-2})^{n+1}. \tag{4.14}$$

Погрешность $r_1^{(n)}$ возникает от замены римановой суммы на интеграл. Эта погрешность благодаря выбору интерполяционной формулы будет очень малой в случае, когда суммируется произведение экспоненты на многочлен (достаточен порядок $\Delta_n^2 = c^n 2^{-2n-2}$). При замене суммы на интеграл в выражении, содержащем $Q^{(n)}$, $R^{(n)}$, $T^{(n)}$, погрешность может быть оценена произведением максимума этой величины на шаг интегрирования $\Delta_n = c^{n/2} 2^{-n-1}$. Кроме того, из предыдущих рассуждений вытекает простая оценка для производной $\frac{d}{dz} Q^{(n)}$. Из этих оценок получаем, что

$$|r_1^{(n)}| \leqslant \mathrm{const} \cdot [\lambda_1^n (2c^{-2})^n \Delta_n + \Delta_n^2].$$

Перейдем к оценке $r_2^{(n)}$. Когда речь идет о продолжении интеграла с отрезка $|u| \leqslant \frac{D}{6\sqrt{c}} \sqrt{n}$ на всю прямую от выражения, содержащего произведение многочлена степени не выше $2N$, на экспоненту, то возникающая при этом погрешность не превосходит $C_1 n^N e^{-C_2 D^2 n}$, где $C_1$ зависит от $N$, а $C_2$ от $N$ не зависит. Выберем $D$ столь большим, чтобы $\exp\{-D^2 C_2\} < \lambda_1^2 (2c^{-2})$. Тогда для любого $N$ найдется $n(N)$ такое, что обсуждаемая часть погрешности $r_2^{(n)}$ не превзойдет $\lambda_1^{2n} (2c^{-2})^n$ при $n \geqslant n(N)$.

Чуть-чуть тоньше следует рассуждать при исследовании погрешности, возникающей от интегрирования $Q^{(n)}$. Примем опять во внимание, что $Q^{(n)} = A^{n-n_0} Q^{(n_0)} + \sum_{p=n_0}^{n-1} A^{n-p} Q_1^{(p)}$. Как уже было показано (см. (4.13)), $|Q_1^{(p)}| \leqslant \mathrm{const} \cdot p^{2N} \lambda_1^{3p/2} (2c^{-2})^p$, поэтому $|A^{n-p} Q_1^{(p)}| \leqslant L_1^{n-p} \mathrm{const} \cdot p^N \lambda_1^{3p/2} (2c^{-2})^p \leqslant \mathrm{const} \cdot L_1^n n^N \lambda_1^{3p/2} \times (2c^{-2})^p$. Следовательно, часть погрешности $r_2^{(n)}$, возникающая от слагаемого $A^{n-p} Q_1^{(p)}$, не превосходит $\mathrm{const} \cdot L_1^n e^{-D^2 \mathrm{const} \cdot n} n^{2N} \lambda_1^{3p/2} (2c^{-2})^p$. Просуммировав по $p$, опять-таки получим, что если $D$ достаточно большое (больше некоторой абсолютной константы), то при достаточно больших $n$ погрешность $r_2^{(n)}$ будет меньше, чем $\frac{1}{5}\lambda_1^{3n/2}(2c^{-2})^n$.

Последний шаг — оценка $\ln\left(1+\Sigma_2\Sigma_1^{-1}\right)$. Малость этой величины вытекает из внешней оценки $\mathrm{Ind}_3^{(n)}$ и из быстрого убывания гауссовского распределения. В самом деле,

$$Z_n(zc^{-n/2}2^n;\beta)\leqslant L_n(\beta)\exp\left\{-a_0(\beta)z^2-\frac{\overline{B_4^{(n)}}}{2}z^4(2c^{-2})^n+\right.$$
$$\left.+\frac{\overline{B_4^{(n)}}}{2}(2c^{-2})^n\cdot\mathrm{const}\right\}$$

при всех $z$ и

$$\Sigma_2=\exp(\beta z^2)\sum_{|u|>\frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}}Z_n\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)Z_n\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)\leqslant$$
$$\leqslant L_n^2c^{n/2}2^{-n-1}\exp\{-a_0(\beta)z^2\}\times$$
$$\times\sum_{|u|>\frac{D}{6\sqrt{c}}\sqrt{n}}\exp\left\{-2a_0(\beta)u^2-12\overline{B}_4^{(n)}(2c^{-2})^n\frac{u^2z^2}{c}+\right.$$
$$\left.+\overline{B}_4^{(n)}(2c^{-2})\cdot\mathrm{const}\right\}\leqslant L_n^2(\beta)c^{n/2}2^{-n-1}\times$$
$$\times\exp\{-a_0(\beta)z^2-\mathrm{const}_1\cdot D^2n+\mathrm{const}_2\cdot(2c^{-2})^nD^2n\}.$$

Наоборот, $\Sigma_1\geqslant\mathrm{const}\cdot L_n^2(\beta)\Delta_n\exp\{-a_0(\beta)z^2+\mathrm{const}_3\cdot\cdot(2c^{-2})^nD^2n\}$. Поэтому $\Sigma_2\Sigma_1^{-1}\leqslant\mathrm{const}\cdot\exp\{-\mathrm{const}\cdot D^2n+$ $+\mathrm{const}_4\cdot(2c^{-2})^nD^2n\}$. Из рекуррентных уравнений для $L_n(\beta)$ видно, что $L_n\geqslant\exp\{-\mathrm{const}\cdot n\}$. Следовательно, выбирая $D$ и $n_0$ достаточно большими, мы сможем добиться, чтобы последняя погрешность не превосходила $\frac{1}{5}\lambda_1^{3(n+1)/2}(2c^{-2})^{n+1}$. Суммируя все оценки, находим, что $R^{(n+1)}$ удовлетворяет $\mathrm{Ind}_1^{(n+1)}$. Таким образом, при любом $\beta^{(n+1)}\subseteq\beta^{(n)}$ будут выполнены $\mathrm{Ind}_1^{(n+1)}$.

Формулировка $\mathrm{Ind}_2^{(n+1)}$ сама по себе определяет выбор отрезка $\beta^{(n+1)}$, при котором будет выполнено

$\mathrm{Ind}_2^{(n+1)}$. В самом деле, рассмотрим $B_2^{(n+1)}$. В главном порядке $B_2^{(n+1)} = B_2^{(n)}$. Добавление $b_2^{(n)}$ меняет $B_2^{(n)}$ относительно мало, по крайней мере у концов отрезка $\mathrm{B}^{(n)}$. Из $\mathrm{Ind}_4^{(n)}$ следует, что $b_2^{(n)}$ — непрерывная функция $\beta$. Поэтому $B_2^{(n+1)}(\beta)$ — непрерывная функция $\beta \in \beta^{(n)}$. Выберем $\beta^{(n+1)}$ так, чтобы $B_2^{(n+1)}(\beta)$ удовлетворяла $\mathrm{Ind}_2^{(n+1)}$.

Приведенное рассуждение, при всей его простоте, имеет глубокий смысл: во-первых, оно описывает процедуру нахождения $\beta_{\text{cr}}$ и, во-вторых, с точки зрения геометрической картины, описанной выше, оно соответствует нахождению такого значения параметра $\beta$, при котором начальное распределение вероятностей принадлежит устойчивой сепаратрисе рассматриваемого гауссовского решения основного интегрального уравнения.

Последний шаг — проверка $\mathrm{Ind}_3^{(n+1)}$. Имеем при $z > D\sqrt{n+1}$ (случай $z < -D\sqrt{n+1}$ рассматривается аналогично)

$$
\begin{aligned}
&Z_{n+1}(zc^{-n/2}2^n;\ \beta) \leqslant \\
&\quad \leqslant L_n^2(\beta)\, 2^{-n-1} c^{(n+1)/2} 2c^{-1/2} \exp\{-a_0(\beta) z^2\} \times \\
&\quad\quad \times \Bigg[ \sum_{\substack{\left|\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right| > \frac{D}{2}\sqrt{n} \\ \left|\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right| > \frac{D}{2}\sqrt{n}}} \Delta_n \exp\{-2a_0(\beta) u^2\} \times \\
&\times \exp\left\{-\overline{B}_4^{(n)} (2c^{-2})^n \left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)^4 - \overline{B}_4^{(n)} (2c^{-2})^n \left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)^4\right\} + \\
&\quad + 2 \sum_{\substack{\left|\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right| \leqslant \frac{D}{2\sqrt{c}}\sqrt{n} \\ \left|\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right| > \frac{D}{2\sqrt{c}}\sqrt{n}}} \exp\Bigg\{-2a_0(\beta) u^2 - \overline{B}_4^{(n)} (2c^{-2})^n \times \\
&\quad \times \left(\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)^4 + \left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)^4\right) + B_4^{(n)} D^2 n (2c^{-2})^n \Bigg\}\Bigg] \leqslant \\
&\leqslant L_n^2(\beta)\, \Delta_{n+1} 2c^{-1/2} \exp\{-a_0(\beta) z^2 - \\
&\qquad\qquad - \overline{B}_4^{(n)} (2c^{-2})^{n+1} z^4\} (I_1 + 2I_2).
\end{aligned}
$$

Сумма $I_1$, как и выше, оценивается с помощью сведения к гауссовскому интегралу, что дает $I_1 \leqslant \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}}\left(1+\delta_1^{(n)}\right)$. Погрешность $|\delta_1^{(n)}| \leqslant \mathrm{const} \cdot 2^{-n}$. Что касается $I_2$, то из неравенства $z \geqslant D\sqrt{n+1}$ вытекает, что $|u| > \frac{D}{2\sqrt{c}}\sqrt{n}$, и поэтому $I_2 \leqslant \exp\{-\mathrm{const}\cdot \cdot D^2 n\}$. Окончательно получаем $I_1 + 2I_2 \leqslant (1 + \mathrm{const} \times \times 2^{-n})\sqrt{\frac{\pi}{2a_0(\beta)}}$. Поэтому из рекуррентных соотношений для $L_{n+1}$

$$Z_{n+1}(zc^{-n/2}2^n;\ \beta) \leqslant L_{n+1}(\beta)\, 2\,(2c^{-1/2})^{n+1} \exp\left\{-a_0(\beta)\, z^2 - \right.$$
$$\left. - \overline{B}_4^{(n)}(2c^{-2})^{n+1} z^4 (1-\alpha_{n+1})\right\},$$

где $\alpha_{n+1} = \dfrac{\mathrm{const}\cdot\Delta_n^2 - b_0^{(n)}}{\overline{B}_4^{(n)}(2c^{-2})^{n+1} z^4}$. С помощью оценки для $b_0^{(n)}$ получаем

$$\alpha_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot n^N \lambda_1^{3n/2}}{z^4 \overline{B}_4^{(n)}} \leqslant \mathrm{const}\cdot \frac{n^N \lambda_1^{3n/2}}{D^4 \overline{B}_4^{(n)}} \leqslant n^N \lambda_1^{3n/2},$$

если $D$ достаточно велико. Таким образом, $\mathrm{Ind}_3^{(n+1)}$ выполняется с $\overline{B}_4^{(n+1)} = \overline{B}_4^{(n)}\left(1 - n^N \lambda_1^{3n/2}\right)$. Лемма доказана.

Замечание. Основными параметрами, используемыми в доказательстве, являются константы $\lambda_1$, $D$, $N$, $n_0$. Требование к $\lambda_1$ в ходе доказательства встретилось дважды. После выбора $\lambda_1$ выбирается $D$. Требования к величине $D$ диктуются, в основном, скоростью убывания гауссовской плотности на бесконечности. Затем выбирается $N$ так, чтобы обеспечить нужную малость $Q^{(n)}$. После этого выбирается достаточно большое $n_0$.

Окончим теперь доказательство теоремы. Для точки $\beta_{\mathrm{cr}} \in \bigcap_n \beta^{(n)}$ индуктивные предположения $\mathrm{Ind}^{(n)}$ выполнены при всех $n \geqslant n_0$. Покажем, что дискретное распределение, вероятности которого имеют вид

$$\frac{Z_n\left(z\cdot c^{n/2}2^{-n};\beta_{\mathrm{cr}}\right)}{\Xi(\beta_{\mathrm{cr}})} = g_n(z;\ \beta_{\mathrm{cr}})\,(c^{1/2}2^{-1})^n\, 2^{-1},$$

слабо сходится к гауссовскому распределению с плотностью $\sqrt{\frac{a_0(\beta_{cr})}{\pi}}\exp\{-a_0(\beta_{cr})z^2\}$. В самом деле, при $z\in D^{(n)}$

$$Z_n(zc^{n/2}2^{-n};\beta_{cr}) = L_n(\beta_{cr})\Delta_n\exp\{-a_0(\beta_{cr})z^2\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\sum_{k=1}^{N}B_{2k}^{(n)}(\beta_{cr})G_{2k}(z;\beta_{cr})-Q^{(n)}-R^{(n)}\right\}.$$

Последний множитель в силу $\mathrm{Ind}_1^{(n)}$ при $n\to\infty$ равномерно по $z\in D^{(n)}$ сходится к 1. Из внешней оценки вытекает, что при $z\notin D^{(n)}$

$$Z(zc^{n/2}2^{-n};\beta_{cr})\leqslant$$
$$\leqslant 2L_n(\beta_{cr})\Delta_n\exp\{-a_0(\beta_{cr})z^2-(2c^{-2})^n\overline{B}_4^{(n)}z^4\}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $0<\overline{B}_4^{(n)}<B_4^{(n)}$. Отсюда непосредственно следует утверждение о слабой сходимости $g_n(z;\beta_{cr})$ к гауссовскому пределу, если принять во внимание нормировку.

Теперь необходимо рассмотреть $\beta<\beta_{cr}$ и $\beta>\beta_{cr}$. Мы не будем проводить подробных доказательств, а ограничимся общим описанием хода рассуждений. Пусть вначале $\beta<\beta_{cr}$, но достаточно близко к $\beta$, так что до некоторого $\overline{n}=\overline{n}(\beta)$ точка $\beta\in\beta^{(\overline{n})}$. Мы можем до этого $\overline{n}$ пользоваться индуктивными предположениями $\mathrm{Ind}^{(n)}$. Небольшое уточнение приведенных выше рассуждений показывает, что функцию $B_2^{(n)}(\beta)$ можно считать дифференцируемой функцией $\beta$. При этом ее производная останется ограниченной сверху отрицательной константой, откуда следует, что $B^{(\overline{n})}(\beta)\sim$ $\sim\mathrm{const}\cdot(\beta-\beta_{cr})$ при $\beta\to\beta_{cr}$. При $n>\overline{n}(\beta)$ необходимо перейти к несколько другому представлению для $Z_n(t;\beta)$ *)

$$Z_n(t;\beta)=L_n(\beta)2^{-n/2}\exp\{-2^n(a_0(\beta)\left(\frac{c}{2}\right)^n(2^{-n}t)^2+$$
$$+B_2^{(n)}(\beta)(2^{-n}t)^2+\mathscr{P}^{(n)}(t;\beta)\}.$$

*) Использование вместо координаты $z$ целочисленной координаты $t$ означает, что мы перешли снова к значениям полного спина $\sum_{x\in V^{(n)}}\varphi(x)$.

При этом оказывается, что $\mathscr{P}^{(n)}$ равномерно по $t$, $|t| \leqslant \leqslant \frac{\mathrm{const}\cdot\sqrt{n}\,2^{n/2}}{\sqrt{\beta_{\mathrm{cr}}-\beta}}$ стремится к 0. В результате получим, что $\frac{Z_n(z2^{-n/2};\,\beta)}{\Xi_n(\beta)}\cdot 2^{n/2}$ слабо сходится к гауссовской плотности с дисперсией порядка $\frac{\mathrm{const}}{\beta_{\mathrm{cr}}-\beta}$. Это показывает, что индекс $\gamma = 1$.

При изучении $\beta > \beta_{\mathrm{cr}}$ аккуратные рассуждения более громоздки, и мы поясним только идею. Мы снова пользуемся индуктивным предположением до такого $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{n}}(\beta)$, пока это возможно. При $n = \bar{\bar{n}}$ мы запишем $Z_{\bar{\bar{n}}}(t;\,\beta)$ в виде

$$Z_{\bar{\bar{n}}}(t;\,\beta) = L_{\bar{\bar{n}}}(\beta)\exp\left\{-2^{\bar{\bar{n}}}\left(b_1^{(\bar{\bar{n}})}(\beta) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_2^{(\bar{\bar{n}})}(\beta)\,\xi^2 + b_3^{(\bar{\bar{n}})}\xi^4 + a_0(\beta)\,c^{\bar{\bar{n}}}2^{-2\bar{\bar{n}}}\xi^2 + \mathscr{P}_1^{(\bar{\bar{n}})}(\xi;\,\beta)\right)\right\},$$
$$\xi = t2^{-\bar{\bar{n}}},$$

где $\mathscr{P}_1^{(\bar{\bar{n}})}$ следует рассматривать как погрешности. Величина $b_2^{(\bar{\bar{n}})}(\beta) \sim -\mathrm{const}\cdot(\beta-\beta_{\mathrm{cr}})$, а $\bar{\bar{n}}$ таково, что $\left|b_2^{(\bar{\bar{n}})}(\beta)\right| > c^{\bar{\bar{n}}}2^{-\bar{\bar{n}}}$. Это показывает, что функция

$$\left(b_1^{(\bar{\bar{n}})}(\beta)\right) + \left(b_2^{(\bar{\bar{n}})}(\beta) + a_0(\beta)\,c^{\bar{\bar{n}}}2^{-2\bar{\bar{n}}}\right)\xi^2 + b_3^{(\bar{\bar{n}})}\xi^4$$

имеет вид, изображенный на рис. 4, и следовательно, у нее образуются два минимума в точках $\pm\,\mathrm{const}\cdot\cdot\sqrt{-\left(b_2^{(\bar{\bar{n}})}(\beta) + a_0(\beta)\,c^{\bar{\bar{n}}}2^{-\bar{\bar{n}}}\right)}$. Аккуратные рассуждения показывают, что при $n > \bar{\bar{n}}$ распределение вероятностей $f_n$ асимптотически при $n\to\infty$ ведет себя как полусумма двух гауссовских распределений, сосредоточенных около точек $\xi = \pm\mathrm{const}\cdot\sqrt{\beta-\beta_{\mathrm{cr}}}$. Это показывает, что критический индекс $\omega = 1/2$.

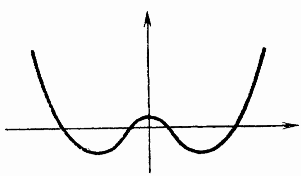

Рис. 4.

Теперь мы обсудим выбор начального гамильтониана. При $n = n_0$ мы имеем дело с объемом из $2^{n_0}$ точек.

Возьмем потенциал взаимодействия в виде

$$H_{n_0}\left(\varphi\left(V^{(n_0)}\right)\right) = C_1\Phi^2\left(\varphi\left(V^{(n_0)}\right)\right) - C_2\Phi^4\left(\varphi\left(V^{(n_0)}\right)\right),$$

$$\Phi\left(\varphi\left(V^{(n_0)}\right)\right) = \sum_{x\in V^{(n_0)}} \varphi(x).$$

Выбор положительных постоянных $C_1$, $C_2$ сейчас будет уточнен. Имеем, очевидно, $Z_{n_0}(t;\beta) = e^{-\beta(C_1t^2+C_2t^4)}\,C_{2^{n_0}}^{2^{n_0-1}-t/2}$. При $t$ порядка $2^{n_0}c^{-n_0/2}$ мы имеем разложение для биномиального коэффициента, полагая $\xi = t2^{-n_0}$:

$$C_{2^{n_0}}^{t} =$$

$$= C_{n_0}\exp\left\{2^{n_0}\left(a_0 - a_2\xi^2 - a_4\xi^4 - \ldots - a_{2N}\xi^{2N} + O\left(\xi^{2N+2}\right)\right)\right\}.$$

Переходя к переменным $z = \xi\cdot c^{n/2}$, получим

$$Z_{n_0}\left(zc^{n/2}\cdot 2^{-n};\beta\right) =$$

$$= L_n'\exp\left\{\beta\left(C_1c^{-n_0}2^{2n_0}z^2 + C_2c^{-2n_0}2^{4n_0}z^4\right) - a_22^{n_0}c^{-n_0}z^2 - a_42^{n_0}c^{-2n_0}z^4 - \ldots - a_{2N}2^{n_0}c^{-Nn_0}z^{2N} + 2^{n_0}o\left(\xi^{2N+2}\right)\right\}.$$

Легко видеть, что за счет выбора $C_1$ показатель экспоненты может быть записан в виде

$$\mathrm{const} - a_0(\beta)\,z^2 + \left(C_3\beta - a_2'2^{n_0}c^{-n_0}\right)G_2(z;\beta) + \left(\beta C_22^{4n_0}c^{-2n_0} - a_4'2^{n_0}c^{-2n_0}\right)G_4(z;\beta) + \ldots,$$

где многоточие означает полиномы Эрмита более высокой степени и погрешности. Выберем $C_3$, являющееся функцией $C_1$, так, чтобы для произвольного заданного заранее $\beta_{\text{cr}}^{(0)}$ было бы $C_3\beta_{\text{cr}}^{(0)} - a_22^{n_0}c^{-n_0} = 0$. Тогда $\beta_{\text{cr}}^{(0)}$ может быть сделано сколь угодно близким к $\beta_{\text{cr}}$ за счет выбора $n_0$. Величина $C_2$ должна быть взята такой, чтобы коэффициент при $G_4$ был отрицательным и по модулю превосходил $\mathrm{const}\cdot(2c^{-2})^{n_0}$. Ясно, что для $H_{n_0}$ и для гамильтонианов $H$, достаточно близких к $H_{n_0}$, предположения $\mathrm{Int}^{(n_0)}$ будут выполнены.

## § 4. Область $c<\sqrt{2}$

При $c=\sqrt{2}$ анализ § 3 нетрудно усовершенствовать так, чтобы охватить и этот случай. Однако при $c<\sqrt{2}$ собственный вектор $G_4$ имеет собственное значение $2c^{-2}>1$, и поэтому нет никаких оснований ожидать, что гауссовское решение термодинамически устойчиво.

Оказывается, что при $c$, достаточно близких к $\sqrt{2}$, уравнение (4.6) имеет негауссовское решение, которое и будет термодинамически устойчивым. Полное доказательство этого утверждения довольно длинное и здесь приводиться не будет (см. [48], [54]). Мы опишем только основные идеи, основанные на теории бифуркаций и теории инвариантных многообразий неподвижных точек диффеоморфизмов.

Замена $g(z;\beta)=h(z;\beta)\exp\left\{-\frac{\beta c}{2-c}z^2\right\}$ переводит (4.6) в уравнение (4.6′)

$$h(z;\beta)=\\ =\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u;\beta\right)h\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u;\beta\right)\exp\left\{-\frac{2\beta c}{2-c}u^2\right\}du. \tag{4.6′}$$

Достаточно рассматривать, как уже указывалось, (4.6′) при каком-либо одном значении параметра $\beta$. Можно выбрать, в частности, $\beta_0=(2-c)(2c)^{-1}$. Тогда мы получим уравнение для $h(z)=h(z;\beta_0)$

$$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\frac{z}{\sqrt{c}}+u\right)h\left(\frac{z}{\sqrt{c}}-u\right)e^{-u^2}du, \tag{4.6″}$$

которое естественно рассматривать как уравнение для неподвижной точки квадратичного преобразования $T_c(h)$, стоящего справа. Уравнение (4.6″) имеет решение $h(z)=\sqrt{\pi}$, не зависящее от $c$. При $c=\sqrt{2}$ в спектре дифференциала $\partial T_c(h) = Ah$ появляется 1; соответствующий собственный вектор есть полином Эрмита $G_4$. Общая теория бифуркаций в конечномерных пространствах говорит о том, что если проекция на $G_4$ результата применения второго дифференциала к $G_4$ отлична от 0, то следует ожидать, вообще говоря, появления новой неподвижной точки. Однако ни конечномерная теория, ни ее обобщения на банаховы пространства непосредственно неприменимы, насколько нам известно, в данном случае, ввиду, главным образом, некомпактности множества значений $z$. Это связано, в частности, с тем, что, по-видимому, не существует негауссовских решений (4.6″), близких к гауссовскому, при $c > \sqrt{2}$. Тем не менее, негауссовские решения удается построить, модифицируя методы теории инвариантных многообразий неподвижных точек нелинейных преобразований.

Для того чтобы показать, как это делается, заметим, что теория возмущений по параметру $\varepsilon = \sqrt{2} - c$ позволяет написать выражение для неподвижной точки с точностью до любой степени $\varepsilon$. Фактически достаточно написать его с точностью до $\varepsilon^2$. Мы получим выражение

$$g_\varepsilon(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2 - \varepsilon a G_4(z) - \varepsilon^2 \mathscr{P}_8(z)}, \quad g_\varepsilon(z) = g(z; \beta_0),$$
$$c = \sqrt{2} - \varepsilon,$$

где $\mathscr{P}_8(z)$ — некоторый полином восьмой степени. Также теория возмущений показывает, что спектр дифференциала преобразования около искомого решения будет иметь одно собственное значение, меньшее 1 (точнее, порядка $1 - \mathrm{const} \cdot \varepsilon$), а весь остальной спектр будет лежать в круге радиуса, меньшего 1 и не зависящего от $\varepsilon$. Это означает, что искомое решение будет неустойчивой, но гиперболической неподвижной точкой нашего преобразования.

Метод нахождения такой точки состоит в следующем: возьмем какую-либо начальную кривую, которая идет по направлению, близкому к направлению неустойчивого собственного вектора искомой неподвижной точки (опять-таки найденного по теории возмущений), и достаточно близка к ней. Такую кривую нетрудно построить и в нашем случае. Если ее выбрать достаточно удачно, то можно надеяться, что она пересечет устойчивое многообразие искомой точки *) и притом только один раз. Из этого представления вытекает естественный путь построения неподвижной точки: выбрав начальную кривую, будем применять к ней преобразование $T_c$ и у образа оставлять только часть, лежащую в выбранной заранее достаточно малой окрестности $g_\varepsilon$. Тогда на начальной кривой будет только одна точка, которая при всех итерациях останется в этой малой окрестности. Эта точка и есть пересечение начальной кривой с устойчивой сепаратрисой, и под действием степеней $T_c$ она будет сходиться к искомой неподвижной точке.

Описанный способ рассуждений проходит в нашем случае. Он приводит к доказательству существования решения $h(z)$, которое при малых $\varepsilon$ на бесконечности убывает как $\exp\{-\mathrm{const}\cdot\varepsilon z^\delta\}$, $\delta=\dfrac{2}{\log_2 c}\sim 4$. Следовательно, плотность предельного распределения вероятностей $h(z;\ \beta)$ убывает на больших расстояниях быстрее, чем гауссовская плотность.

Критические индексы теперь уже зависят от $c$. Оказалось, что если положить размерность системы $d=2(1-\log_2 c)^{-1}$, то индекс $\eta=0$, $\gamma=\log_{\lambda_1}\dfrac{2}{c}$, $\omega=$ $=\dfrac{1}{2}\log_{\lambda_1} c$, $\lambda_1>1$ — неустойчивое собственное значение, отвечающее найденному решению. В [48] были найдены первые члены разложения $\lambda_1$ по параметру $\varepsilon$. В интересной работе П. Колле и Дж. Экмана [54] было показано, что $\lambda_1$ бесконечно дифференцируема по $\varepsilon$. В связи с описанными результатами возникают две естественные проблемы:

1. Показать, что построенная с помощью теории возмущений ветвь решений $g_\varepsilon$ продолжается на самом деле до конца, т. е. до $\varepsilon=\sqrt{2}$; численный счет, проведенный П. М. Блехером и описанный в [48], дает вес-

*) Напомним, что устойчивым многообразием неподвижной точки преобразования называется многообразие, состоящее из таких точек, которые под действием итераций преобразования сходятся к этой точке.

кие основания для предположения о том, что это действительно так. Вполне возможно, что для строгого математического решения проблемы необходимо будет использовать результаты вычислений на ЭВМ.

2. Исследовать аналитическую природу $\lambda_1$ в окрестности $\varepsilon=0$. Не исключено, в частности, что формальный ряд по $\varepsilon$ для $\lambda_1$ допускает суммирование по Борелю. Выяснение этого вопроса было бы вообще важно для изучения природы $\varepsilon$-разложений в теории фазовых переходов.

## § 5. Автомодельные распределения вероятностей

Как уже указывалось в § 1 этой главы, ферромагнитная критическая точка $\beta_{cr}$ характеризуется тем, что при $\beta=\beta_{cr}$ корреляции $E\varphi(x_1)\varphi(x_2)$ убывают настолько медленно, что $E(\Phi(\varphi(V)))^2 \sim \mathrm{const}\cdot|V|^\alpha$ при $V\to\infty$, где $\alpha$ — параметр, $1<\alpha<2$. Средние значения вычисляются с помощью некоторого предельного распределения Гиббса $P_1$, отвечающего гамильтониану $H$. Предположим, что $P_1$ трансляционно-инвариантно. Разобьем решетку $\mathbf{Z}^d$ на кубы $\Delta_k(x)$, содержащие $k^d$ точек, $\Delta_k(x)=\{y\in\mathbf{Z}^d : kx_i\leqslant y_i<k(x_i+1),\ i=1,\ldots,d\}$. При этом набор кубов $\Delta_k(x)$ снова образует исходную решетку. Положим $\varphi_k(x)=\dfrac{1}{k^{d\alpha/2}}\sum\limits_{y\in\Delta_k(x)}\varphi(y)$ и обозначим через $P_k$ индуцированное распределение вероятностей случайных величин $\varphi_k(x)$. Ясно, что $P_k$ также трансляционно-инвариантно. В теории критической точки делается естественное предположение, состоящее в том, что распределения вероятностей $P_k$ слабо сходятся к пределу при $k\to\infty$. Предельное распределение $Q$ уже слабо зависит от исходного гамильтониана $H$ и является в определенном смысле универсальным.

Следуя обычному подходу в теории предельных теорем теории вероятностей, мы начнем с выяснения возможного вида предельного распределения $Q$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ векторное пространство вещественнозначных последовательностей $\varphi=\{\varphi(x),\ x\in\mathbf{Z}^d\}$. На $\mathfrak{M}$ естественно действует группа пространственных сдвигов $\{T^t,\ t\in\mathbf{Z}^d\}$, где $(T^t\varphi)(x)=\varphi(x+t)$. Пусть $k\geqslant1$ — целое. Введем линейный эндоморфизм $\mathfrak{A}_k(\alpha) = \mathfrak{A}_k$ пространства $\mathfrak{M}$, действующий по формуле

$$(\mathfrak{A}_k\varphi)(x) = \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \sum_{y \in \Delta_k(x)} \varphi(y).$$

Эндоморфизмы $\mathfrak{A}_k$ образуют мультипликативную полугруппу: $\mathfrak{A}_{k_1} \cdot \mathfrak{A}_{k_2} = \mathfrak{A}_{k_1 k_2}$. Полугруппу $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_k\}$ естественно рассматривать, когда производится нормировка случайных величин.

Определение 4.1. Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется ренормгруппой. Ясно, что $T^t\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_k T^{tk}$. Обозначим через $\mathfrak{A}^{(0)}$ полугруппу, порожденную всеми $T^t$ и $\mathfrak{A}_k$.

Теорема 4.2. Полугруппа $\mathfrak{A}^{(0)}$ изоморфна полугруппе линейных преобразований пространства $R^d$, действующих по формуле $x \to \frac{x+t}{k}$, где $t \in \mathbf{Z}^d$, $k \geqslant 1$ — целое.

Доказательство. Сопоставим преобразованию $T^t$ сдвиг $x \to x + t$, а преобразованию $\mathfrak{A}$ сжатие $x \to \frac{1}{k} x$. Легко видеть, что сдвиги и сжатия удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и $T^t$, $\mathfrak{A}_k$. Следовательно, порождаемая полугруппа изоморфна $\mathfrak{A}^{(0)}$. Лемма доказана.

Через $(\mathfrak{A}^{(0)})^*$ обозначим сопряженную полугруппу, действующую в пространстве распределений вероятностей на $\mathfrak{M}$, т. е. для любого $S \in \mathfrak{A}^{(0)}$ и любого распределения вероятностей $P$ на $\mathfrak{M}$

$$(S^*P)(C) = P(S^{-1}C), \quad C \subset \mathfrak{M}.$$

Определение 4.2. Распределение вероятностей $Q$ на $\mathfrak{M}$ называется автомодельным, если оно является неподвижной точкой полугруппы $(\mathfrak{A}^{(0)})^*$.

Ясно, что автомодельное распределение $Q$ трансляционно-инвариантно. Очевидно также, что описанные в начале этого параграфа предельные распределения являются автомодельными. Теперь наша задача состоит в описании класса автомодельных распределений.

Эта задача в общем виде достаточно сложная, поскольку автомодельных распределений, по-видимому, довольно много. С точки зрения теории, излагаемой в этой главе, важность того или иного автомодельного распределения определяется классом гамильтонианов $H$, для которых это распределение появляется в качестве предельного при $\beta = \beta_{cr}$.

Перейдем теперь к непрерывным аналогам введенных выше понятий. Удобнее действовать в рамках теории обобщенных случайных процессов. Пусть фиксировано какое-либо пространство $\mathscr{F}$ основных функций, определенных на $R^d$. Предположим, что группы сдвигов и подобия оставляют пространство $\mathscr{F}$ инвариантным, т. е.

$$(T^t f)(x) = f(x+t) \in \mathscr{F},$$

$$(\mathfrak{A}_\lambda f)(x) = f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d) \in \mathscr{F}$$

для любого $\lambda > 0$ и любой функции $f \in \mathscr{F}$. Группа $\mathfrak{A}^{(0)}$, порожденная группой сдвигов $\{x \to x+t\}$ и группой $(x \to \lambda x)$, изоморфна группе линейных преобразований пространства $R^d$ вида $x \to \lambda(x+t)$.

Рассмотрим действие группы $\mathfrak{A}^{(0)}$ на пространстве линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{F}$, действующее по формуле

$$(\mathfrak{A}\varphi, f) = \lambda^a (\varphi, \mathfrak{A}f),$$

где для $\mathfrak{A}x = \lambda(x+t)$ положено $(\mathfrak{A}f)(x) = f(\lambda(x+t))$, $a$ — параметр, аналогичный параметру $\alpha$ в дискретном случае. Через $(\mathfrak{A}^{(0)})^*$ обозначим сопряженную группу, действующую в пространстве распределений вероятностей на $\mathscr{F}'$, т. е. обобщенных случайных процессов.

Определение 4.3. Распределение вероятностей $P$ на $\mathscr{F}'$, т. е. обобщенный случайный процесс, называется автомодельным, если оно инвариантно относительно $(\mathfrak{A}^{(0)})^*$, т. е. $(\mathfrak{A}^*P)(C) = P(\mathfrak{A}^{-1}C)$ для любого $C \subset \mathscr{F}'$.

Выясним связь между двумя введенными определениями. Пусть $\chi_{\Delta(x)}(y)$ — индикатор множества $x_i \leqslant \leqslant y_i < x_i + 1$, $i = 1, \ldots, d$. Предположим, что найдется последовательность функций $f_n \in \mathscr{F}$, сходящихся в каком-либо смысле к $\chi_{\Delta(x)}$ так, что соответствующая последовательность случайных величин $(\varphi, f_n)$ слабо сходится к случайной величине, которую мы обозначим $\psi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$. При естественных предположениях об этой сходимости индуцированное распределение вероятностей случайных величин $\psi(x)$ будет автомодельным распределением вероятностей с $\alpha = -2a/d$. Действительно, автомодельность в непрерывном случае означает, что случайные величины $\int f(y)\,\varphi(y)\,dy$ и $\lambda^a \int \varphi(y)\,f(\lambda y)\,dy$ одинаково распределены. Возьмем $\lambda = k^{-1}$ и $f = \chi_{\Delta_k(x)}$, считая, что это возможно. Тогда мы получим, что $\int\limits_{\Delta_k(0)} \varphi(y)\,dy$ и $k^{-a} \int\limits_{\Delta_1(0)} \varphi(y)\,dy$ одинаково распределены, т. е. получим автомодельное дискретное распределение с $a = -d\alpha/2$. С помощью этого замечания мы объясним ряд формул, возникающих далее.

## § 6. Гауссовские автомодельные распределения

Гауссовские автомодельные распределения сравнительно легко описать. Начнем с дискретного случая и $d = 1$.

Теорема 4.3. Гауссовское стационарное распределение будет автомодельным тогда и только тогда, когда его спектральная плотность $\rho(\lambda)$ имеет вид

$$\rho(\lambda) = C\left|e^{2\pi i\lambda} - 1\right|^2 \sum \frac{1}{|\lambda + m|^{\alpha+1}},$$

$C > 0$ — произвольная постоянная.

Доказательство. Проверим, прежде всего, что гауссовское распределение с такой спектральной плотностью будет автомодельным. Для этого надо убедиться в том, что

$$\left\langle \frac{1}{k^{\alpha/2}} \sum_{s=kx}^{k(x+1)-1} \varphi(s),\ \frac{1}{k^{\alpha/2}} \sum_{s=0}^{k-1} \varphi(s) \right\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(0) \rangle.$$

Левая часть равна

$$\frac{1}{k^{\alpha}} \int_0^1 \sum_{\substack{kx \leqslant s_1 < k(x+1) \\ 0 \leqslant s_2 < k}} e^{2\pi i\lambda(s_1 - s_2)} \rho(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \frac{C}{k^{\alpha}} \int_0^1 e^{2\pi i\lambda kx} \left| \frac{e^{2\pi i\lambda k} - 1}{e^{2\pi i\lambda} - 1} \right|^2 \rho(\lambda)\,d\lambda.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменных $\lambda k = \mu$. Мы получим

$$\frac{C}{k^{\alpha}} \int_0^1 e^{2\pi i \lambda k x} \left| \frac{e^{2\pi i \lambda k} - 1}{e^{2\pi i \lambda} - 1} \right|^2 \rho(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{C}{k^{\alpha+1}} \int_0^k e^{2\pi i \mu x} \left| e^{2\pi i \mu} - 1 \right|^2 \sum_m \frac{1}{\left| \frac{\mu}{k} + m \right|^{\alpha+1}}\, d\mu =$$

$$= C \int_0^k e^{2\pi i \mu x} \left| e^{2\pi i \mu} - 1 \right|^2 \sum_m \frac{1}{\left| \mu + mk \right|^{\alpha+1}}\, d\mu =$$

$$= C \sum_{l=0}^{k-1} \int_0^1 e^{2\pi i \mu x} \left| e^{2\pi i \mu} - 1 \right|^2 \sum \frac{1}{\left| \mu + l + km \right|^{\alpha+1}}\, d\mu =$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i \mu x} \rho(\mu)\, d\mu.$$

Таким образом, гауссовское распределение со спектральной плотностью $\rho$ будет автомодельным. Для того чтобы убедиться, что других таких распределений не бывает, заметим, что условие автомодельности позволяет однозначно найти все корреляции $\langle \varphi(x), \varphi(0) \rangle$ по $\langle \varphi(0), \varphi(0) \rangle$. Таким образом, автомодельные распределения вероятностей образуют однопараметрическое семейство. Так как такое семейство уже построено, то теорема 4.3 доказана.

Естественным обобщением теоремы 4.3 служит следующая теорема.

Теорема 4.4. Пусть $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ — положительная при $\lambda \neq 0$ однородная функция степени $d(\alpha + 1)$. Тогда спектральная плотность

$$\rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \prod_{s=1}^{d} \left| e^{2\pi i \lambda_s} - 1 \right|^2 \sum_{m \in Z^d} \frac{1}{f(\lambda + m)} \tag{4.15}$$

порождает гауссовское автомодельное распределение.

Доказательство этой теоремы представляет собой буквальное повторение рассуждений первой части предыдущей леммы. При $d > 1$ нельзя уже утверждать, что последняя формула описывает все гауссовские автомодельные распределения.

Важная особенность выражений для $\rho(\lambda)$ — наличие интегрируемой особенности в точке $\lambda = 0$. Именно благодаря этой особенности возникает медленное убывание коэффициентов корреляции.

Как уже указывалось в гл. 1, гауссовские распределения можно рассматривать как предельные гиббсовские распределения для квадратичных гамильтонианов вида $H = \sum a(x-y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)$, $a(x) = \int e^{2\pi i(\lambda, x)} \rho^{-1}(\lambda)\, d\lambda$, где $\rho$ — спектральная плотность. Рассмотрим при $d > 2$ функцию $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) = \prod\limits_{l=1}^{d} \lambda_l^2 (\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_d^2)$. Тогда $\rho(\lambda) \sim \mathrm{const} \left( \sum\limits_{l=1}^{d} \lambda_l^2 \right)^{-1}$ при $\lambda \to 0$ и, следовательно, $\rho^{-1}(\lambda) \sim \mathrm{const} \sum\limits_{l=1}^{d} \lambda_l^2$. Можно показать, что в этом случае $\rho^{-1}(\lambda)$ является вещественно-аналитической функцией на $d$-мерном торе. Это значит, что отвечающий ей потенциал $a(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, т. е. является короткодействующим. Отвечающее ему $\alpha$ равно $1 + 2/d$.

Теперь мы можем объяснить, почему индекс $\eta$ вводится способом, описанным в § 1. Считается, что автомодельные распределения, которые появляются при $\beta_{\mathrm{cr}}$ как предельные распределения для распределений Гиббса, отвечающих гамильтонианам с финитным радиусом взаимодействия, должны описываться гамильтонианами с быстро убывающим взаимодействием. В гауссовском случае такие гамильтонианы появляются только при $\alpha = 1 + 2/d$. Поэтому, если $\eta \neq 0$, то это свидетельствует о том, что автомодельное распределение является негауссовским, а величина $\eta$ характеризует степень удаления от гауссовского автомодельного распределения.

## § 7. Пространство гамильтонианов и определение линеаризованной ренормгруппы

В этом параграфе мы обсудим важный аспект теории автомодельных распределений и метода ренормгруппы, связанный с понятием устойчивости автомодельного распределения вероятностей. Неявно это понятие уже фигурировало при исследовании иерархических моделей Дайсона. Вначале мы остановимся на более общем вопросе о пространстве гамильтонианов.

Пусть переменные $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$, принимают вещественные значения, $-\infty < \varphi(x) < +\infty$. Рассмотрим для любого $m \geqslant 1$ $m$-частичный потенциал $U(\varphi) = \sum c(x_1, \ldots, x_m)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)$. При такой записи удобно считать, что каждый индекс $x_i$ независимо пробегает решетку $\mathbf{Z}^d$, и $c(x_1, \ldots, x_m)$ — симметричная функция своих аргументов. Мы не рассматриваем пока вопрос о сходимости ряда для $U$, но предположим, что коэффициенты $c(x_1, \ldots, x_m)$ столь быстро убывают на бесконечности, что сходится ряд $\sum\limits_{x_1, \ldots, x_m} |c(x_1, \ldots, x_m)|$. В таком случае каждому потенциалу $U(\varphi)$ мы можем однозначно сопоставить ряд Фурье $u(\lambda) = \sum \exp\left\{2\pi i \sum\limits_{r=1}^{m} (x_r, \lambda_r)\right\} c(x_1, \ldots, x_m)$, представляющий собой непрерывную симметрическую функцию с абсолютно сходящимся рядом Фурье на $d$-мерном торе. Обозначим через $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$ банахово пространство таких функций с нормой $\|u\| = \sum\limits_{x_1, \ldots, x_m} |c(x_1, \ldots, x_m)|$. Тем самым пространство потенциалов $U(\varphi)$ превращается в банахово пространство, которое мы по-прежнему обозначим $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$. При этом ясно, что если $U \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m_1 d})$, $V \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m_2 d})$, то $U \cdot V \in A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{(m_1+m_2)d}\right)$. Через $A^{(s)}$ обозначим прямую сумму $\sum\limits_{m \geqslant 1} A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{md}\right)$ этих пространств с нормой $\|\cdot\|_{A^{(s)}} = \sum\limits_{m} \|\cdot\|_{A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})}$.

Каждый потенциал $U \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$ однозначно порождает трансляционно-инвариантный гамильтониан

$$H(\varphi) = \sum_{t \in \mathbf{Z}^d} U\left(T^t \varphi\right) =$$

$$= \sum_{x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{Z}^d} \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} c(x_1 + x, \ldots, x_m + x)\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m).$$

Этот ряд имеет формальный смысл, но коэффициент

$d(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{x \in Z^d} c(x_1 + x, \ldots, x_m + x)$ определен однозначно, если $U \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$ и $d(x_1 + x, \ldots, x_m + x) = d(x_1, \ldots, x_m)$.

Может случиться так, что два потенциала $U_1, U_2 \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$ порождают один и тот же гамильтониан в том смысле, что соответствующие коэффициенты $d$ совпадают. Мы будем называть такие потенциалы $U_1$, $U_2$ гомологичными.

Лемма 2. Два потенциала $U_1$, $U_2$ гомологичны тогда и только тогда, когда отвечающие им функции $u_1(\lambda)$, $u_2(\lambda)$ совпадают на $(m-1)d$-мерной диагонали $\sum_{r=1}^{m} \lambda_r \equiv 0 \pmod 1$.

Доказательство. Хорошо известно, что

$$d(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= \int u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, e^{-2\pi i \sum\limits_{p=1}^{m} (\lambda_p, x_p)}\, \delta\left(\sum_{p=1}^{m} \lambda_p\right) \prod_{p=1}^{m} d\lambda_p,$$

где $\delta\left(\sum\limits_{p=1}^{m} \lambda_p\right)$ означает, что интегрирование происходит по упомянутой $(m-1)d$-мерной диагонали. Отсюда вытекает, что по коэффициентам $d$ взаимно однозначно восстанавливается значение $u(\lambda)$ на диагонали. Лемма доказана.

Заметим теперь, что подмножество пространства $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$, состоящее из функций $u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, тождественно равных нулю на $(m-1)d$-мерной диагонали, образует замкнутое пространство $J_0$. Поэтому каждый $m$-частичный гамильтониан $H$ естественно рассматривать как точку фактор-пространства $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}) | J_0 = B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$. Тем самым пространство рассматриваемых $m$-частичных гамильтонианов превращается в банахово пространство. Через $B^{(s)}$ обозначим прямую сумму банаховых пространств $B^{(s)} = \oplus \sum\limits_{m=1} B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$ с нормой

$$\|\cdot\|_{B^{(s)}} = \sum_{m \geq 1} \|\cdot\|_{B^{(s)}(\overline{\mathrm{Tor}}^{md})}.$$

Перейдем теперь к определению линеаризованной ренормгруппы. Пусть $Q$ — автомодельное распределение вероятностей. Для любой функции $f(\varphi) \in \mathscr{L}^1(\mathfrak{M}, Q)$ и любого $k \geqslant 1$ рассмотрим условное математическое ожидание $E(f(\varphi) \mid \mathfrak{A}_k\varphi) = (\partial\mathfrak{A}_k^*) f$, представляющее собой функцию последовательности $\mathfrak{A}_k\varphi$. Ясно что $T^t\partial\mathfrak{A}_k^* = \partial\mathfrak{A}_k^* T^{tk}$ для любого $t \in \mathbf{Z}^d$. Предположим, что автомодельное распределение $Q$ таково, что для любого потенциала $U(\varphi) \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$ $\partial\mathfrak{A}_k^*(U(\varphi)) \in A^{(s)}$. Тогда для гамильтониана $H(\varphi) = \sum\limits_{t \in \mathbf{Z}^d} U(T^t\varphi) \in B^{(s)}$ мы можем положить $(\partial\mathfrak{A}_k^*) H = \sum\limits_{t \in \mathbf{Z}^d} (\partial\mathfrak{A}_k^*) U(T^t\varphi)$. Ясно, что $\partial\mathfrak{A}_k^* H \in B^{(s)}$.

Определение 4.4. Полугруппа $\{\partial\mathfrak{A}_k^*\} = \partial\mathfrak{A}^*$, действующая в пространстве $B^{(s)}$, называется линеаризованной ренормгруппой.

Поясним смысл этого названия. Предположим, что $Q_1$ — распределение вероятностей, абсолютно непрерывное относительно $Q$, и $f(\varphi) = dQ_1/dQ$. Тогда $\mathfrak{A}_k^* Q_1$, как нетрудно проверить, абсолютно непрерывно относительно $\mathfrak{A}_k^* Q_0 = Q_0$ и плотность

$$\frac{d(\mathfrak{A}_k^* Q_1)}{dQ} = (\partial\mathfrak{A}_k^*) f.$$

С точки зрения теории предельных распределений Гиббса, трансляционно-инвариантное распределение, близкое к $Q$, может быть записано в виде $Qe^{-\varepsilon H}$, $H \in B^{(s)}$, а $\varepsilon$ — малый параметр. Тогда формально, с точностью до малых выше первого по $\varepsilon$ порядка

$$\mathfrak{A}_k^*(Qe^{-\varepsilon H}) = \mathfrak{A}_k^*(Q(1 - \varepsilon H + \ldots)) = \\ = Q(1 - \varepsilon\partial\mathfrak{A}_k^* H + \ldots) = Qe^{-\varepsilon\partial\mathfrak{A}_k^* H + \ldots},$$

что поясняет смысл слов «линеаризованная ренормгруппа».

Гамильтониан $H \in B^{(s)}$ называется собственным гамильтонианом (линеаризованной ренормгруппы), если $\partial\mathfrak{A}_k^* H = k^\gamma H$ при некотором $\gamma$. Если $\gamma > 0$, $\gamma < 0$, $\gamma = 0$, то $H$ называется, соответственно, неустойчивым,

устойчивым, нейтральным. В следующем параграфе мы изучим действие линеаризованной ренормгруппы и вид собственных гамильтонианов для гауссовских автомодельных распределений.

## § 8. Линеаризованная ренормгруппа и ее спектр в случае гауссовских автомодельных распределений

Пусть $P$ — произвольное гауссовское распределение вероятностей на пространстве $\mathfrak{M}$ с нулевыми средними. Рассмотрим какое-либо произведение $\varphi(x_1)\,\ldots\,\varphi(x_m)$, $x_p \in \mathbf{Z}^d$, $1 \leqslant p \leqslant m$, являющееся элементом гильбертова пространства $\mathscr{L}^2(\mathfrak{M}, P)$.

Определение 4.5. Полиномом Эрмита — Ито случайной величины $\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)$, обозначаемым далее $:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m):$, называется перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)$ на замкнутое подпространство, порожденное всевозможными случайными величинами $\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_p)$, $p < m$, $y_i \in \mathbf{Z}^d$.

Пусть $H \in B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$, $H = \sum d(x_1, \ldots, x_m)\,\varphi(x_1)\ldots$ $\ldots\varphi(x_m)$. Тогда полиномом Эрмита — Ито гамильтониана $H$ называется формальный ряд

$$:H: = \sum d(x_1, \ldots, x_m) :\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m):.$$

Введем следующие обозначения:

$$:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}): = \{:U(\varphi):,\ U(\varphi) \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})\},$$

$$:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}): = \{:H(\varphi):,\ H \in B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})\}.$$

Каждое из $:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$, $:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$ наделим структурой банахова пространства, полагая норму $:U(\varphi):$, $:H:$, равной норме $U(\varphi)$, $H$ соответственно. После этого мы можем, как и выше, образовать банаховы пространства

$$\oplus \sum_m :A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):, \quad \oplus \sum_m :B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):.$$

Следующая лемма выражает важное свойство полиномов Эрмита — Ито.

Лемма 3. Полином Эрмита — Ито $:\varphi(x_1)\cdot\ldots$ $\ldots\cdot\varphi(x_m):$ есть многочлен степени $m$ от переменных $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)$, старшим коэффициентом которого является $\varphi(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_m)$, и все коэффициенты равномерно (по $x_1, \ldots, x_m$) ограничены.

Доказательство. Мы покажем, что полином Эрмита — Ито $:\varphi(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_m):$ есть перпендикуляр, опущенный из конца вектора $\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)$ на подпространство, порожденное всевозможными случайными величинами $\varphi\left(x_{j_1}\right)\ldots\varphi\left(x_{j_p}\right)$, $p<m$.

Представим каждую величину $\varphi(y)$, $y\neq x_1, \ldots, x_m$, в виде

$$\varphi(y)=\sum_{p=1}^{m} c(y, x_p)\,\varphi(x_p)+\psi(y), \tag{4.16}$$

где $\psi(y)\perp\varphi(x_p)$, $p=1, \ldots, m$. В гауссовском случае ортогональность означает независимость. Удобно далее считать, что если $y$ совпадает с одним из $x_p$, $1\leqslant p\leqslant\leqslant m$, то $c(y, x_p)=\delta(y, x_p)$, а $\psi(y)\equiv 0$. Любое произведение $\varphi(y_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(y_p)$ мы можем записать в виде линейной комбинации произведений вида $\psi(y_1)\ldots\ldots\psi(y_q)\varphi(y_{q+1})\ldots\varphi(y_p)$, где каждое $y_r$, $q+1\leqslant r\leqslant p$, совпадает с одним из $x_1\ldots x_m$. При $q\neq 0$ ортогональность перпендикуляра, о котором идет речь в лемме, к написанному произведению вытекает из независимости $\psi(y)$ и $\varphi(x_p)$, $1\leqslant p\leqslant m$, и из определения перпендикуляра. При $q=0$ это следует непосредственно из определения перпендикуляра. Таким образом, перпендикуляр, о котором идет речь в формулировке леммы, и есть $:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m):$.

Доказанному утверждению можно придать следующий вид. Рассмотрим плотность совместного распределения вероятностей случайных величин $\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)$, которую запишем в виде $\mathrm{const}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(Az, z)\right\}$, $z==(z_1, \ldots, z_m)$ — $m$-мерный вектор. Образуем гильбертово пространство функций $f(z_1, \ldots, z_m)$ с интегрируемым квадратом модуля по этой плотности. Возьмем произведение $z_1, \ldots, z_m$ и ортогонализуем его в смысле этого гильбертова пространства ко всем многочленам степени, меньшей $m$. Полученное выражение представляет собой многочлен степени $m$, старшим коэффициентом которого служит $z_1\ldots z_m$, а остальные коэффициенты ограничены. После этого для получения

$:\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m):$ следует подставить в этот многочлен вместо $z_i$ переменную $\varphi(x_i)$, $1\leqslant i\leqslant m$. Лемма доказана.

Лемма 4. Имеют место следующие утверждения:

1) $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})\subseteq\sum\limits_{m'\leqslant m}:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd}):$;

2) $A^{(s)}=\oplus\sum\limits_{m}A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})=\oplus\sum\limits_{m}:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$;

3) $B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})\subseteq\sum\limits_{m'\leqslant m}:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd}):$;

4) $B^{(s)}=\sum\limits_{m}:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$.

Доказательство. Равенства 1), 3) очевидны при $m=1$, поскольку в этом случае $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})= =:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$; $B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})=:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$. Докажем их при $m>1$ по индукции. В силу леммы 3 $:U(\varphi):= =U(\varphi)+\ldots$, где многоточие представляет собой элемент пространства $\sum\limits_{m'<m}A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd})$. По предположению индукции его можно представить в виде элемента пространства $\sum\limits_{m'<m}:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd}):$. Следовательно, $:U(\varphi):$ есть элемент пространства $A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$, т. е. включение 1) доказано. Равенство 3) непосредственно следует из 1), а 2) и 4) вытекают соответственно из 1) и 3). Лемма доказана.

Первая информация о действии линеаризованной ренормгруппы содержится в следующей лемме.

Лемма 5. Имеют место равенства

$$\partial\mathfrak{A}_k^*(:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):)=:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):,$$
$$\partial\mathfrak{A}_k^*(:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):)=:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$$

при произвольных $k$ и $m$.

Доказательство. Утверждение леммы можно получить как следствие общих свойств гауссовских распределений, но мы предпочитаем дать здесь независимое доказательство. Включения

$$\partial\mathfrak{A}_k^*(:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):)\supset:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):,$$
$$\partial\mathfrak{A}_k^*(:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):)\supset:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$$

очевидны, поскольку на потенциалах $U(\varphi)$, являющихся на самом деле функциями от переменных $\mathfrak{A}_k\varphi$, дифференциал $\partial\mathfrak{A}_k^*$ действует как тождественное преобразование. Для доказательства обратного включения снова воспользуемся индукцией. При $m=1$ требуемые равенства очевидны. Предполагая, что они доказаны при всех $m'<m$, покажем, что они верны и при $m$. Пусть $:U(\varphi):\in :A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$. Тогда для любого $V$, зависящего только от $\mathfrak{A}_k\varphi$, т. е. $V=V(\mathfrak{A}_k\varphi)=$ $=V(\mathfrak{A}_k\varphi)\in :A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd}):$, $m'<m$, можем написать

$$\int \partial\mathfrak{A}_k^*(:U(\varphi):)\cdot V(\varphi)\,d\left(\mathfrak{A}_k^*P_0\right)=$$
$$=\int :U(\varphi):V(\varphi)\,dP_0(\varphi)=0,$$

поскольку $V(\varphi)\in :A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd})$ и $:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):\perp$ $\perp A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{m'd})$ при $m'<m$. Следовательно, $\partial\mathfrak{A}_k^*:U(\varphi):\in$ $\in :A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$. Тем самым первое равенство доказано. Второе равенство доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5 показывает, что подпространства $:A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$, $:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$ инвариантны относительно действия линеаризованной ренормгруппы. Поэтому достаточно изучить ее спектр в каждом из этих подпространств. Начнем со следующей простой леммы.

Л е м м а 6. Пусть $G$ — гауссовское стационарное распределение со спектральной плотностью $\rho_G(\lambda)$. Тогда спектральная плотность гауссовского стационарного распределения $\mathfrak{A}_k^*G$ имеет вид

$$\rho_{\mathfrak{A}_k^*G}(\lambda)=\frac{1}{k^{(\alpha+1)d}}\prod_{r=1}^{d}\left|e^{2\pi i\lambda_r}-1\right|^2\times$$
$$\times\sum_{\substack{0\leqslant p_s<k,\\ 1\leqslant s\leqslant d}}\rho_G\left(\frac{\lambda_1}{k}+\frac{p_1}{k},\ \ldots,\ \frac{\lambda_d}{k}+\frac{p_d}{k}\right)\times$$
$$\times\prod_{r=1}^{d}\left|e^{2\pi i\frac{\lambda_r+p_r}{k}}-1\right|^{-2}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \sum_{y \in \Delta_k(x)} \varphi(y).$$

Тогда

$$E(\varphi_k(x)\cdot\varphi(0)) = \frac{1}{k^{\alpha d}} \int e^{2\pi i k(x,\lambda)} \left| \prod_{r=1}^{d} \frac{e^{2\pi i \lambda_r k} - 1}{e^{2\pi i \lambda_r} - 1} \right|^2 \rho_G(\lambda)\, d\lambda.$$

Замена $k\lambda = \mu$ приводит к нужной формуле. Лемма доказана.

В условиях предыдущей леммы напишем для любого $x \in \mathbf{Z}^d$

$$\varphi(x) = \sum c_k(x, y)\,\varphi_k(y) + \psi(x), \tag{4.17}$$

где коэффициенты $c(x, y)$ подбираются так, чтобы случайные величины $\psi(x)$ были бы независимы от всех случайных величин $\varphi_k(y)$.

Другая интерпретация той же формулы делается в терминах гамильтонианов: если $H(\varphi)$ — гамильтониан, отвечающий гауссовскому распределению $G$, то $H(\varphi) = H_1(\mathfrak{A}_k\varphi) + H(\psi)$. Случайные величины $\psi(x)$ обладают важным свойством: $\sum\limits_{y \in \Delta_k(x)} \psi(y) = 0$ при любых $x$. Действительно, суммируя левую и правую части по точкам внутри любого куба $\Delta_k(x)$, мы получим слева $k^{\alpha d/2}\varphi_k(x)$, а справа линейную комбинацию $\varphi_k$ плюс $\sum\limits_{y \in \Delta_k(x)} \psi(y)$. Иными словами, $\sum\limits_{y \in \Delta_k(x)} \psi(y)$ может быть представлена как линейная комбинация $\varphi_k(y)$. Но из независимости $\psi$ и $\varphi_k$ тогда следует, что $\sum\limits_{y \in \Delta_k(x)} \psi(y)$ есть константа, равная, очевидно, нулю.

Сейчас мы найдем явный вид коэффициентов $c_k(x, y)$. Положим $d_k(x, y) = E\varphi(x)\varphi_k(y)$, $b(x) = b_{\mathfrak{A}_k^* G}(x) = E\varphi_k(x)\,\varphi_k(0)$. Умножая левую и правую части (4.17) на $\varphi_k(z)$ и беря от обеих частей математическое ожидание, получим

$$d_k(x, z) = \sum c_k(x, y)\, b(y - z).$$

Далее,

$$d_k(x, z) = \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \int \exp\{2\pi i(\lambda, x)\} \times$$
$$\times \sum_{\substack{kz_i \leqslant p_i < k(z_i+1), \\ i=1,\ldots,m}} \exp\left\{-2\pi i \sum_{r=1}^{d} \lambda_r p_r\right\} \rho_G(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \int \exp\{2\pi i(\lambda, x - kz)\} \times$$
$$\times \prod_{r=1}^{d} \frac{\exp\{-2\pi i k\lambda_r\} - 1}{\exp\{-2\pi i\lambda_r\} - 1} \rho_G(\lambda)\, d\lambda;$$

если $a(p) = \int \exp\{2\pi i(\lambda, p)\} \rho^{-1}_{\mathfrak{A}^*_k G}(\lambda)\, d\lambda$, то

$$\|a(p - p')\| = \|b(p - p')\|^{-1}$$

и

$$c_k(x, y) = \sum d_k(x, z)\, a(z - y) =$$
$$= \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \sum_{p \in \mathbf{Z}^d} \int \exp\{2\pi i(\lambda, x - kp)\} \times$$
$$\times \prod_{r=1}^{d} \frac{\exp\{-2\pi i k\lambda_r\} - 1}{\exp\{-2\pi i\lambda_r\} - 1} \rho_G(\lambda)\, d\lambda \times$$
$$\times \int \exp\{2\pi i(\mu, p - y)\} \rho^{-1}_{\mathfrak{A}^*_k G}(\mu)\, d\mu =$$
$$= \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \int \exp\{2\pi i(\lambda, x - ky)\} \times$$
$$\times \prod_{r=1}^{d} \frac{\exp(-2\pi i k\lambda_r) - 1}{\exp(-2\pi i\lambda_r) - 1} \frac{\rho_G(\lambda)\, d\lambda}{\rho_{\mathfrak{A}^*_{k(G)}}(\lambda)}.$$

Положим $\rho^{(1)}_G(\lambda) = \prod_{r=1}^{d} (\exp(-2\pi i\lambda_r) - 1)^{-1} \rho_G(\lambda)$ для любого гауссовского распределения $G$. Тогда окончательно можем написать

$$c_k(x, y) = \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \int \exp\{2\pi i(\lambda, x - ky)\} \rho^{(1)}_G(\lambda) \times$$
$$\times \left(\rho^{(1)}_{\mathfrak{A}^*_k G}(\lambda)\right)^{-1} d\lambda. \quad (4.18)$$

Теперь мы можем непосредственно исследовать спектр линеаризованной ренормгруппы для гауссовского автомодельного распределения $G$.

Лемма 7. Пусть $:U:\in :A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$ и $u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — преобразование Фурье $U$, т. е. симметрическая по $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ функция на $md$-мерном торе с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Тогда $\partial\mathfrak{A}_k^*(:U:) = :V:\in :A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{md}\right):$ и преобразование Фурье $v(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ потенциала $V$ имеет вид

$$v(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{1}{k^{md(\alpha/2+1)}} \frac{1}{\prod\limits_{r=1}^{m} \rho_G^{(1)}(\lambda_r)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{0\leqslant p_j<k,\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \prod_{j=1}^{m} \rho_G^{(1)}\left(\frac{\lambda_j}{k}+\frac{p_j}{k}\right) u\left(\frac{\lambda_1+p_1}{k}, \ldots, \frac{\lambda_m+p_m}{k}\right),$$

где запись $0\leqslant p_j<k$ для $d$-мерного вектора $p_j = (p_{j1}, \ldots, p_{jd})$ означает, что $0\leqslant p_{js}<k$ при всех $1\leqslant s\leqslant d$.

Доказательство. Пусть $U(\varphi)=\sum c(x_1, \ldots, x_m)\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)$, $:U(\varphi): = \sum c(x_1, \ldots, x_m)\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)+\ldots$, где многоточием отмечены члены меньшей степени от переменных $\varphi$. Для нахождения $\partial\mathfrak{A}_k^* U$ или $\partial\mathfrak{A}_k^*(:U:)$ следует подставить вместо $\varphi$ правую часть (4.17) и результат проинтегрировать по всем $\psi(y)$. Ясно, что при этом получится

$$:V: = \sum c'(x_1, \ldots, x_m)\,\varphi_k(x_1)\ldots\varphi_k(x_m)+\ldots,$$

$$c'(x_1, \ldots, x_m) =$$

$$= \sum_{y_1, \ldots, y_m\in \mathbf{Z}^d} c_k(y_1, x_1)\ldots c_k(y_m, x_m)\, c(y_1, \ldots, y_m).$$

Так как $c(y_1, \ldots, y_m) = \int \exp\left\{-2\pi i\sum\limits_{p=1}^{m}(\lambda_p, y_p)\right\}\times$ $\times u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\,d\lambda$, то, пользуясь видом коэффициентов

$c_k(y, x)$ (см. (4.18)), получим

$$\sum_{y_1, \ldots, y_m \in Z^d} c_k(y_1, x_1) \ldots c_k(y_m, x_m)\, c(y_1, \ldots, y_m) =$$

$$= \frac{1}{k^{d\alpha m/2}} \sum_{y_1, \ldots, y_m} \int u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, d\lambda \exp\left\{-2\pi i \sum_{p=1}^{m} (\lambda_p, y_p)\right\} \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{m} \int \exp\{2\pi i (\mu_p, y_p - kx_p)\}\, \rho_G^{(1)}(\mu_p) \left(\rho_G^{(1)}(k\mu_p)\right)^{-1} d\mu_p =$$

$$= \frac{1}{k^{d\alpha m/2}} \int u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, d\lambda \times$$

$$\times \int \sum_{y_1, \ldots, y_m} \exp\{-2\pi i \sum ((\lambda_p - \mu_p), y_p)\} \times$$

$$\times \exp\left\{-2\pi i k \sum_{p=1}^{m} (x_p, \mu_p)\right\} \prod_{p=1}^{m} \rho_G^{(1)}(\mu_p) \left(\rho_G^{(1)}(k\mu_p)\right)^{-1} d\mu =$$

$$= \frac{1}{k^{d\alpha/2}} \int \exp\left\{-2\pi i k \sum_{p=1}^{m} (x_p, \lambda_p)\right\} u(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{m} \rho_G^{(1)}(\lambda_p) \left(\rho_G^{(1)}(k\lambda_p)\right)^{-1} d\lambda.$$

После этого замена $k\lambda_p = \mu_p$ приводит к формуле, указанной в формулировке леммы. Лемма доказана.

Из леммы 7 следует, что если $\sum_x |c_k(y, x)| < \text{const} < \infty$ при всех $y$, то $V \in A^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$. Мы покажем, что это так для частного случая, когда функция $f(\lambda)$, фигурирующая в формуле (4.15) для спектральной плотности автомодельного распределения, имеет вид $f(\lambda) = \text{const} \cdot \prod_{p=1}^{d} \lambda_p^2 |\lambda|^{(\alpha-1)d}$. Это предположение ведет к асимптотической изотропности корреляционных функций.

Так как $c_k(y, x) = c_k(y - kx)$ есть коэффициент Фурье функции $\chi(\lambda) = \rho_G^{(1)}(\lambda) \cdot \left(\rho_G^{(1)}(k\lambda)\right)^{-1}$, то достаточно исследовать убывание коэффициентов Фурье функции $\chi(\lambda)$. Ясно, что единственными точками, в окрестности которых функция $\chi(\lambda)$ не гладкая, являются точки вида $\lambda = \{p_j/k,\ 1 \leqslant j \leqslant d\}$. Мы исследуем вначале окрестность точки 0. Легко видеть, что в окрестности 0

$$\rho_G^{(1)}(\lambda) = g_1(\lambda)\left(\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{d} \lambda_j \,|\,\lambda\,|^{(\alpha-1)d}} + g_2(\lambda)\prod_{j=1}^{d}\lambda_j\right),$$

где $g_1$, $g_2$ бесконечно дифференцируемы в окрестности нуля и $g_1(0) \neq 0$, $g_2(0) \neq 0$. Поэтому в окрестности нуля

$$\rho_G^{(1)}(\lambda)\left(\rho_G^{(1)}(k\lambda)\right)^{-1} =$$
$$= \mathrm{const}\cdot g_1(\lambda)\,(g_1(k\lambda))^{-1}\,\frac{1+\prod\limits_{j=1}^{d}\lambda_j^2\,|\,\lambda\,|^{(\alpha-1)d}\,g_2(\lambda)}{1+A\prod\limits_{j=1}^{d}\lambda_j^2\,|\,\lambda\,|^{(\alpha-1)d}\,g_2(k\lambda)}$$

при некоторой постоянной $A$, $A \neq 0, 1$. Иными словами, в окрестности нуля

$$\chi(\lambda) = h_1(\lambda) + \prod_{j=1}^{d}\lambda_j^2\,|\,\lambda\,|^{(\alpha-1)d}\,h_2(\lambda),$$

где $h_1$, $h_2$ бесконечно дифференцируемы и отличны от нуля. Аналогичное рассмотрение в окрестностях точек $\lambda_p = \{p_j/k\}_{j=1}^{d}$, $p = (p_1, \ldots, p_d)$, показывает, что $\chi(\lambda) - \chi(\lambda_p) \sim \mathrm{const}\cdot\prod\limits_{j=1}^{d}\left(\lambda_j - \frac{p_j}{k}\right)|\,\lambda-\lambda_p\,|^{(\alpha-1)d}$. Хорошо известно, что такие особенности приводят к убыванию коэффициентов Фурье со скоростью $\mathrm{const}\cdot|x|^{-\alpha d}$. Это дает требуемый результат.

В дальнейшем мы рассмотрим только случай, когда в (4.15) $f(\lambda) = C\prod\limits_{j=1}^{d}\lambda_j^2\,|\,\lambda\,|^{(\alpha-1)d}$. Из доказанного вытекает, что $\partial\mathfrak{A}_k^*\left(:A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{md}\right):\right) = :A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{md}\right):$ и, следовательно, $\partial\mathfrak{A}_k^*\left(:B^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{md}\right):\right) = :B^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^{md}\right):$.

Пусть $h(\lambda)$ — произвольная однородная функция степени $\gamma$. Образуем функцию

$$\rho_h^{(2)}(\lambda;\tau) = \sum_{m\in \mathbf{Z}^d} \frac{1}{h(\lambda+m)} \exp\{2\pi i(\tau, \lambda+m)\}, \quad \tau\in R^d,$$

и

$$\rho_h^{(3)}(\lambda;\tau) = \rho_h^{(2)}(\lambda;\tau)\left(\rho_G^{(1)}(\lambda)\right)^{-1}.$$

Допустим, что при каждом $\tau \in R^d$ функция $\rho_h^{(3)}(\lambda;\tau) \in A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^d\right) = A\left(\mathrm{Tor}^d\right)$. Построим гауссовский случайный процесс с непрерывным временем $\zeta_h(\varphi;\tau) = \sum \Gamma(x;\tau)\varphi(x)$, где

$$\Gamma(x;\tau) = \Gamma(x-\tau) = \int \exp\{-2\pi i(x,\lambda)\}\cdot \rho_h^{(3)}(\lambda;\tau)\,d\lambda.$$

Тогда $\zeta_h(\varphi;\tau) \in A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^d\right) = :A^{(s)}\left(\mathrm{Tor}^d\right):$ и в силу леммы 7 $\partial\mathfrak{A}_k^*(\zeta_h(\varphi;\tau))$ имеет преобразование Фурье

$$\frac{1}{k^{d(\alpha/2+1)}}\left(\rho_G^{(1)}(\lambda)\right)^{-1}\times \sum_{\substack{0\leqslant p_j<k\\ 1\leqslant j\leqslant d}} \rho_G^{(1)}\left(\frac{\lambda_j}{k}+\frac{p_j}{k}\right)\rho_h^{(3)}\left(\frac{\lambda_j}{k}+\frac{p_j}{k}\right) = \frac{1}{k^{d(\alpha/2+1)-\gamma}}\rho_h^{(3)}(\lambda).$$

Мы можем переписать последнее соотношение в виде $\partial\mathfrak{A}_k^*(\zeta_h(\varphi;\tau)) = k^{\gamma-d(\alpha/2+1)}\zeta_h\left(\mathfrak{A}_k\varphi, \frac{\tau}{k}\right)$. Поэтому и при любом $m>0$

$$\partial\mathfrak{A}_k^*\left[:\zeta_h^m(\varphi;\tau):\right] = k^{m(\gamma-d(\alpha/2+1))} :\zeta_h^m\left(\mathfrak{A}_k\varphi; \frac{\tau}{k}\right):.$$

Теперь мы можем построить собственные гамильтонианы линеаризованной ренормгруппы.

Т е о р е м а 4.5. Гамильтониан $\int_{R^d} :[\zeta_h(\varphi;\tau)]^m: d\tau$ является собственным гамильтонианом линеаризованной ренормгруппы.

Доказательство. Имеем

$$\partial\mathfrak{A}_k^* \int\limits_{R^d} :[\zeta_h(\varphi;\tau)]^m:\,d\tau = \int\limits_{R^d} \partial\mathfrak{A}_k^*\,(:[\zeta_h(\varphi;\tau)]^m:)\,d\tau =$$

$$= k^{m(\gamma-d(\alpha/2+1))} \int\limits_{R^d} :\left[\zeta_h\left(\mathfrak{A}_k\varphi;\,\frac{\tau}{k}\right)\right]^m:\,d\tau.$$

Произведем в последнем интеграле замену переменных $\tau' = \tau/k$. Тогда мы получим

$$\partial\mathfrak{A}_k^* \int\limits_{R^d} :[\zeta_h(\varphi;\tau)]^m:\,d\tau =$$

$$= k^{m(\gamma-d(\alpha/2+1))+d} \int\limits_{R^d} :[\zeta_h(\mathfrak{A}_k\varphi;\tau')]^m:\,d\tau'.$$

Теорема доказана.

Посмотрим теперь, при каких $h$ функция $\rho^{(3)}(\lambda;\,\tau)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Ясно, что для этого необходимо, чтобы $\gamma \leqslant \alpha d$. Можно показать при помощи рассуждений, изложенных выше, что этого и достаточно. В частности, если $\gamma = \alpha d$ и $h = f(\lambda)\left(\prod\limits_{r=1}^{d} \lambda_r\right)^{-1}$, то это так. Соответствующее собственное значение равно $\gamma_m = \left[m\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) + 1\right] d$.

Предыдущие рассуждения можно несколько обобщить. Пусть сейчас $\lambda_j$ — $d$-мерный вектор, $h(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m)$ — однородная функция $dm$-переменных степени $\gamma$ и

$$\rho^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m;\tau) = \sum_{p_1,\ldots p_m\in \mathbf{Z}^d} \frac{1}{h(\lambda_1+p_1, \ldots, \lambda_m+p_m)} \times$$

$$\times \exp\left\{2\pi i \sum_{r=1}^{m} (\tau_r, \lambda_r+p_r)\right\},$$

$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m) \in R^{md}$. Образуем функцию

$$\rho_h^{(3)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m;\tau) = \rho^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m;\tau) \prod_{j=1}^{m} \left(\rho_G^{(1)}(\lambda_j)\right)^{-1}$$

и

$$\Gamma(x;\tau) = \Gamma(x-\tau) = \int \exp\left\{-2\pi i \sum_{r=1}^{m} (x_r, \lambda_r)\right\} \times$$
$$\times \rho_h^{(3)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \tau)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_m,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_m), \quad x_l \in \mathbf{Z}^d, \quad 1 \leqslant l \leqslant m,$$

и построим случайное $dm$-мерное поле

$$\zeta_h(\varphi; \tau) = \sum \Gamma(x-\tau) :\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_m):.$$

Такие же рассуждения, что и выше, показывают, что

$$\partial\mathfrak{A}_k^*(\zeta_h(\varphi;\tau)) = k^{\gamma - md(\alpha/2+1)}\zeta_h(\mathfrak{A}_k\varphi; \tau)$$

и гамильтониан $\int\limits_{R^{md}} \zeta_h(\varphi;\tau)\, d\tau$ является собственным с собственным значением $\gamma_h = \gamma - md\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) + d$.

Обсуждение результатов. По-видимому, не все собственные гамильтонианы, построенные выше, являются существенными. Для обсуждения этого вопроса рассмотрим вначале случай, когда $(\alpha-1)d$ не является четным целым числом. Гамильтониан, отвечающий гауссовскому автомодельному распределению, имеет вид

$$H = \sum a(x-y)\,\varphi(x)\,\varphi(y), \quad a(x) \sim \mathrm{const}\,|x|^{-\alpha d},$$

т. е. порождается дальнодействующим потенциалом. По своему замыслу, линеаризованная ренормгруппа предназначена для обращения с поправками к гамильтониану. Поэтому естественно предположить, что надо рассматривать только такие собственные гамильтонианы, у которых взаимодействие убывает не медленнее, чем $|x|^{-\alpha d-1}$. Если считать, что взаимодействие раскладывается по степеням $|x|^{-\alpha d-p}$, $p$ — целое, то порядок однородности функции $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, участвующей в построении собственных гамильтонианов, должен принимать значения $\gamma = m\alpha$, $m\alpha - 2, \ldots$ Тогда мы получаем собственные значения $\gamma_m = (m(\alpha/2-1)+1)d$, $\gamma_m = (m(\alpha/2-1)+1)d - 2$ и т. д.

Заметим теперь, что поскольку наш анализ предназначен для ферромагнитной критической точки, то следует рассматривать только четные гамильтонианы и, соответственно, только четные $m = 2m_1$.

Имеем теперь $\gamma_2 = (\alpha - 1)d > 0$, т. е. в пространстве квадратичных форм всегда есть неустойчивый собственный гамильтониан. Далее, $\gamma_4 = 2\alpha - 3$. При $\alpha \leqslant 3/2$, очевидно, $\gamma_4 \leqslant 0$. Следовательно, при $\alpha \leqslant 3/2$ только $\gamma_2 \geqslant 0$, и мы получаем необходимое условие термодинамической устойчивости гауссовского распределения в виде $\alpha \leqslant 3/2$. Заметим, что $\gamma_m/d = m(\alpha/2 - 1) + 1$ переходят в логарифмы собственных значений для гауссовского решения иерархической модели, если положить $\alpha = 2 - \log_2 c$, $k = 2$.

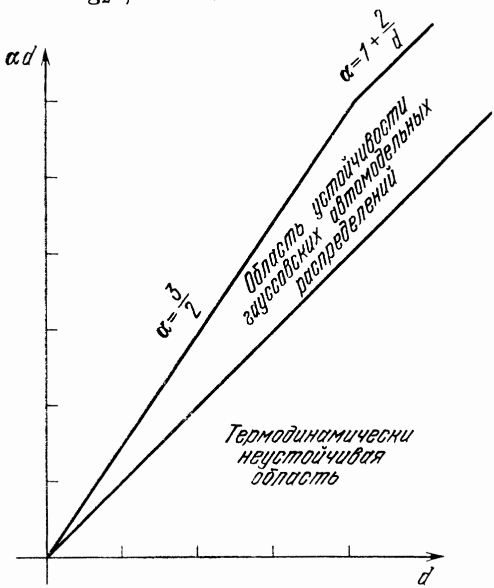


Рис. 5.

Другое необходимое условие получается следующим образом. Рассмотрим при $m = 2$, т. е. в пространстве квадратичных форм, однородную функцию степени однородности $\gamma = d\alpha - 2$. Тогда соответствующее собственное значение равно $(\alpha - 1)d - 2$, и мы приходим к другому необходимому условию устойчивости гауссовского распределения: $(\alpha - 1)d - 2 \leqslant 0$, т. е. $\alpha \leqslant 1 + 2/d$. Оба этих условия изображены графически на рис. 5.

При $(\alpha - 1)d$, являющемся целым числом, гамильтониан гауссовского автомодельного распределения порождается экспоненциально быстро убывающим потенциалом, т. е. является короткодействующим. Отвечающая ему функция на $d$-мерном торе является вещественно-аналитической. В таком случае естественно рассматривать собственные гамильтонианы, соответствующие вещественно-аналитическим функциям. Легко проверить, что при этом не возникает новых условий устойчивости гауссовских распределений.

## § 9. Точки бифуркации, негауссовские автомодельные распределения, ε-разложения

Предыдущий анализ показывает, что при $\alpha_m = 2 - 1/m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, имеются нейтральные собственные гамильтонианы. Как и в случае иерархических моделей, в окрестности таких $\alpha$ естественно ожидать появления новых негауссовских ветвей автомодельных распределений. В этом параграфе мы построим формальное ε-разложение для гамильтонианов этих распределений. Для простоты рассмотрим $m = 1$, $\varepsilon = \alpha - 3/2$.

Пусть $H_0(\varphi)$ — гамильтониан гауссовского автомодельного распределения с данным $\alpha$. Будем искать гамильтониан $H(\varphi)$ искомого негауссовского автомодельного распределения в виде

$$H(\varphi) = H_0(\varphi) + \varepsilon H_1(\varphi) + \varepsilon^2 H_2(\varphi) + \ldots,$$

где $H_i \in B^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Сделаем также следующее упрощающее предположение: будем искать $H(\varphi)$ из условия инвариантности его не относительно всей полугруппы $\mathfrak{A}^{(0)}$, а только относительно полугруппы $\mathfrak{A}_2^{(0)}$, порожденной группой пространственных сдвигов и циклической подполугруппой $\{\mathfrak{A}_{2^k}\}$. Смысл этого упрощения в том, что мы сможем искать трансляционно-инвариантный гамильтониан $H(\varphi)$, исходя из условия его инвариантности относительно единственного преобразования $\mathfrak{A}_2^*$. Запишем (4.17) сокращенно в виде: $\varphi = C_2\varphi_2 + \psi$. Действие оператора $\mathfrak{A}_2^*$ состоит в том, что мы должны подставить в гамильтониан вместо $\varphi$ последнее выражение и проинтегрировать результат по всем $\psi$. Тогда условие автомодельности можно формально записать в виде

$$e^{-H(\varphi_2)}=\int e^{-H(C_2\varphi_2+\psi)}d\psi.$$

Далее, поскольку $H_0(\varphi_2)+H_0(\psi)=H_0(C_2\varphi_2+\psi)$, то для определения поправки $\varepsilon H_1+\varepsilon^2H_2+\ldots$ имеем равенство

$$e^{-\varepsilon H_1-\varepsilon^2H_2-\ldots}=\\ =\int e^{-H_0(\psi)-\varepsilon H_1(C_2\varphi_2+\psi)-\varepsilon^2H_2(C_2\varphi_2+\psi)-\ldots}d\psi. \quad (4.19)$$

Это соотношение есть аналог основного интегрального уравнения теории иерархических моделей. Функциональный интеграл, стоящий справа, будем брать по теории возмущений.

Мы будем искать поправку $\varepsilon H_1+\varepsilon^2H_2$ в виде

$$(\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\varepsilon^3a_3+\ldots)G_4+\varepsilon^2I_2+\varepsilon^3I_3+\varepsilon^4I_4,$$

где $a_1$, $a_2$, $a_3$, ... — числа, не зависящие, разумеется, от $\varepsilon$, $G_4\in :B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md})$: — собственный гамильтониан линеаризованной ренормгруппы с собственным значением $2\alpha-3=2\varepsilon$, $I_j\in B^{(s)}$, $j=2, 3, \ldots,$ — поправочные гамильтонианы, также не зависящие от $\varepsilon$. Покажем, как найти $a_1$ и $I_2$. Разложим правую часть (4.19) формально в ряд по $\varepsilon$, ограничившись членами 2-го порядка по $\varepsilon$ включительно, и произведем интегрирование:

$$\int\exp\{-H_0(\psi)-(\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\ldots)G_4-\varepsilon^2I_2-\\ -\varepsilon^3I_3-\varepsilon^4I_4-\ldots\}d\psi=\\ =\int e^{-H_0(\psi)}d\psi\Big(1-(\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\ldots)G_4+\\ +\frac{\varepsilon^2}{2}a_1^2G_4^2-\varepsilon^2I_2+\ldots\Big)d\psi=\\ =1-2^{2\varepsilon}(\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\ldots)G_4+\\ +\frac{\varepsilon^2}{2}a_1^2\partial\mathfrak{A}_2^*(G_4^2)-\varepsilon^2\partial\mathfrak{A}_2^*(I_2).$$

Выражение $G_4^2$ не есть элемент пространства $B^{(s)}$

однако для него естественно определяется действие $\partial\mathfrak{A}_2^*$ как почленное действие на каждое слагаемое. Результат может быть записан в виде

$$\partial\mathfrak{A}_2^* G_4^2 = G_4^2 + J_2 + J_4 + J_6,$$

где $J_{2j} \in :B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{2jd}):$, $j = 1, 2, 3$. Разлагая формально левую часть (4.19) в ряд по $\varepsilon$ с точностью до малых 2-го порядка включительно, получим

$$e^{-\varepsilon H_1 - \varepsilon^2 H_2 - \ldots} = e^{-(\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots) G_4 - \varepsilon^2 I_2 - \ldots} =$$

$$= 1 - \varepsilon a_1 G_4 + \frac{\varepsilon^2}{2} a_1^2 G_4^2 - \varepsilon^2 a_2 G_4 - \varepsilon^2 I_2 + \ldots$$

Сравнение членов 1-го порядка по $\varepsilon$ приводит к тождественному соотношению. Нетривиальное уравнение получается от сравнения членов 2-го порядка по $\varepsilon$

$$- a_2 G_4 - I_2 =$$

$$= - 2 (\ln 2)\, a_1 G_4 - a_2 G_4 + J_2 + J_4 + J_6 - \partial\mathfrak{A}_2^* I_2$$

или

$$\partial\mathfrak{A}_2^* I_2 - I_2 = - 2 \ln 2 a_1 G_4 + J_2 + J_4 + J_6. \qquad (4.20)$$

Так как $\partial\mathfrak{A}_2^*$ оставляет инвариантным каждое из подпространств $:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{md}):$, то последнее уравнение можно решать по отдельности в каждом из них. Пусть $I_{2j}$ — проекция $I_2$ на $:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{2jd}):$. Тогда (4.20) эквивалентно трем уравнениям:

$$\partial\mathfrak{A}_2^* I_{22} - I_{22} = J_2,$$

$$\partial\mathfrak{A}_2^* I_{24} - I_{24} = - 2 \ln 2 a_1 G_4 + J_4,$$

$$\partial\mathfrak{A}_2^* I_{26} - I_{26} = J_6.$$

В первом и третьем подпространствах спектр $(\partial\mathfrak{A}_2^* - \mathrm{Id})$ равномерно отделен от единицы, и поэтому можно написать

$$I_{22} = (\partial\mathfrak{A}_2^* - \mathrm{Id})^{-1} J_2, \quad I_{26} = (\partial\mathfrak{A}_2^* - \mathrm{Id})^{-1} J_6,$$

$\mathrm{Id}$ — тождественный оператор. В подпространстве $:B^{(s)}(\mathrm{Tor}^{4d}):$ оператор $(\partial\mathfrak{A}_2^* - \mathrm{Id})^{-1}$ имеет собственное значение $(2^{2\varepsilon} - 1)^{-1} \sim 1/(2 \ln 2)\varepsilon$. Для получения решения, не зависящего от $\varepsilon$, необходимо, чтобы правая часть имела нулевую проекцию на соответствующее собственное значение. Это условие приводит к выбору коэффициента $a_1$. А именно, если $\beta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ — функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье, отвечающая $J_4$, то при $a_1 = \beta(0, 0, 0, 0)/2\ln 2$ действительно эта проекция будет равна 0. После этого мы можем написать $I_{24}$ в виде

$$I_{24} = \left(\partial\mathfrak{A}_2^* - \mathrm{Id}\right)^{-1}(-2\ln 2a_1 G_4 + J_4),$$

и решение будет ограничено при малых $\varepsilon$. П. М. Блехер показал, что $a_1 \neq 0$.

Нахождение следующих коэффициентов может быть описано с помощью диаграмм. Мы кратко приведем соответствующие рассуждения. Допустим, что уже найдены коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}$ и гамильтонианы $I_2, \ldots, I_{m-1}$. Разложим формально в (4.19) экспоненту в ряд по $\varepsilon$ до членов $m$-го порядка включительно. Выпишем члены $m$-го порядка и слагаемые при $a_{m-1}$ порядка $\varepsilon^{m-1}$:

$$\varepsilon^{m-1}a_{m-1}G_4 + \varepsilon^m \sum \frac{(-1)^{l_1+\ldots+l_{m-1}}}{l_1!\ldots l_{m-1}!} a_1^{l_1}(G_4)^{l_1} \times \\ \times \prod_{j=2}^{m-1} (I_j + a_j G_4)^{l_j} - \varepsilon^m q_m.$$

Для применения к этой сумме преобразования $\partial\mathfrak{A}_2^*$ следует каждое слагаемое проинтегрировать по $\psi$. При этом придется интегрировать произведения переменных $\psi$ двух типов. К первому типу относятся распадающиеся произведения, когда $\psi(x)$ входят не во все сомножители. Ко второму типу относятся нераспадающиеся произведения, в которых из каждого сомножителя входит хотя бы одно переменное $\psi(y)$. Результат интегрирования нераспадающихся произведений обозначим $p_m$. Тогда уравнение для $q_m$ примет вид

$$a_{m-1}\varepsilon^{m-1}\left(2^{2\varepsilon} - 1\right)G_4 + \varepsilon^m \mathcal{J}_m = \varepsilon^m\left(\partial\mathfrak{A}_2^* I_m - I_m\right).$$

Представим $\mathcal{J}_m$ в виде

$$\mathcal{J}_m = \sum c_l^{(m)} G_{2l} + \widetilde{\mathcal{J}}_m,$$

где $\tilde{\mathcal{J}}_m$ такова, что в ее фурье-представлении все функции равны 0 при $\lambda = 0$, а $G_{2l}$ — собственные гамильтонианы для гауссовского автомодельного распределения. Положим $a_{m-1} = -c_2^{(m)}(2\ln 2)^{-1}$ и будем искать $I_m$ в виде:

$$I_m = \sum d_l^{(m)} G_{2l} + \tilde{I}_m, \quad d_l^{(m)} = c_l^{(m)}\left(2^{\nu_{2l}} - 1\right)^{-1}.$$

Тогда

$$I_m = -\sum_{l=0}^{\infty}\left(\partial\mathfrak{A}_2^*\right)^l \tilde{\mathcal{J}}_m.$$

Это и есть требуемое выражение.

В связи с построенным $\varepsilon$-разложением возникает ряд проблем.

1. Аналитическая природа $\varepsilon$-разложения. Описанная только что процедура нахождения коэффициентов $\tilde{\mathcal{J}}_m$ носит формальный характер. Неясно, принадлежат ли коэффициенты $\tilde{\mathcal{J}}_m$, тем более, $I_m$, исходному пространству $B$. Кроме того, коэффициенты $I_m$ определены лишь для циклической подполугруппы $\{\mathfrak{A}_{2^k}\}_{k=0}^{\infty}$, а их следует определить для всей полугруппы $\{\mathfrak{A}_n\}$. Выяснение этих вопросов упирается в развитие диаграммной техники для получения коэффициентов $I_m$ и в изучение структуры этих диаграмм.

Другой вопрос — поведение всех рядов в комплексной области переменного $\varepsilon$ и, в частности, выяснение аналитической природы асимптотических рядов по $\varepsilon$ для критических индексов, отвечающих строящимся негауссовским автомодельным распределениям.

2. Область притяжения автомодельных распределений. Как уже говорилось выше, одной из основных проблем теории автомодельных распределений является выяснение того, каков вид гамильтонианов $H$, для которых данное автомодельное распределение появляется как предельное распределение для сумм

$$\frac{1}{k^{d\alpha/2}} \sum_{y \in \Delta_k(x)} \varphi(y)$$

(см. § 5) при $k \to \infty$, вычисляемое на основании предельного распределения Гиббса для гамильтониана

$\beta_{cr}$ $H$. В той области значений параметров $\alpha$, $d$ (см. рис. 5), где гауссовское распределение устойчиво, естественно ожидать, что при заданных $\alpha$, $d$ внутри этой области такими гамильтонианами будут локальные возмущения квадратичных гамильтонианов $\sum U(x_1 - x_2)\varphi(x_1)\varphi(x_2)$, где $U(x) \sim f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\Big/\|x\|^{\alpha d}$, $f$ — непрерывная положительная функция на единичной сфере, учитывающая анизотропию взаимодействия. Такие гамильтонианы не являются гауссовскими из-за того, что $\varphi(x)$ принимает значения $\pm 1$ или, в несколько более общем случае, конечное число значений.

Ситуация становится уже не столь ясной в области негауссовских автомодельных распределений, строящихся с помощью описанных выше $\varepsilon$-разложений. Формальная теория возмущений по параметру $\varepsilon$ показывает, что во всех порядках теории возмущений для систем с гамильтонианами, у которых на бесконечности бинарное взаимодействие с таким же убыванием $u(x) \sim f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\Big/\|x\|^{\alpha d}$, что и выше, предельные распределения Гиббса притягиваются к этим негауссовским автомодельным распределениям. Однако из-за асимптотического характера рядов теории возмущений нельзя исключить такой возможности, когда происходит экспоненциально малая (по $\varepsilon$) перенормировка показателя степени потенциала. Наиболее вероятно, что это не так, и перенормировки не происходит, но ситуация в целом не ясна. Можно надеяться, что прояснение произойдет в результате надлежащего обобщения и развития техники, использованной при построении негауссовских решений в случае иерархических моделей.

3. Поведение бифуркационных ветвей. Встанем на точку зрения, согласно которой не происходит дополнительной перенормировки показателя степени потенциала. Тогда построенная ветвь негауссовских автомодельных распределений описывает поведение в окрестности точки $\beta_{cr}$ систем, у которых взаимодействие на больших расстояниях бинарное, и потенциал бинарного взаимодействия при $d = 1, 2, 3$ убывает на бесконечности как $1/r^{d(3/2+\varepsilon)}$. Иными словами, при малых $\varepsilon$

критические индексы зависят от $\varepsilon$, т. е. от асимптотики убывания потенциала взаимодействия. Естественно допустить, что в каждой размерности $d$ существует такое $\varepsilon^*(d)$, начиная с которого критические индексы перестают зависеть от показателя степени и будут такими же, как и в случае короткодействующих потенциалов. Иначе говоря, в каждой размерности существует такой показатель степени потенциала $\gamma^*(d)=d\left(\frac{3}{2}+\varepsilon^*\right)$, начиная с которого системы с такой степенью взаимодействия ведут себя с точки зрения теории фазовых переходов второго рода как короткодействующие системы. Не исключено, что $\varepsilon^*(d)=(4-d)/2d$. В таком случае формальный ряд для негауссовского автомодельного распределения содержит гамильтонианы с экспоненциально убывающим взаимодействием. Если бы этот ряд сходился, то описываемый им гамильтониан был бы с быстро убывающим взаимодействием, и тогда он порождал бы автомодельные распределения, возникающие при $\beta_{cr}$ у систем с короткодействующим потенциалом. Однако при $d=2$ мы получили бы $\alpha^*=2$, что расходится с известным результатом для двумерной модели Изинга, вытекающим из решения Онзагера.

Могут быть и другие, логически допустимые возможности. Например, точка $\varepsilon^*(d)$ может быть точкой жесткой потери устойчивости. Это значит, что при $\varepsilon<\varepsilon^*(d)$ и при $\beta_{cr}$ появляются автомодельные распределения, принадлежащие построенной нами ветви, а при $\varepsilon\geqslant\varepsilon^*(d)$ происходит скачок, и возникают автомодельные распределения, лежащие далеко от этой ветви. Такую ситуацию исключить нельзя, но, впрочем, и нет никаких указаний на возможность ее осуществления.

4. Автомодельные распределения и спонтанное нарушение непрерывной симметрии. Очень интересный вопрос — появление автомодельных распределений при спонтанном нарушении непрерывной симметрии. Весьма вероятно, что при больших $\beta$ трансляционно-инвариантные предельные распределения Гиббса в системах с нарушенной непрерывной симметрией принадлежат области притяжения гауссовских автомодельных распределений.

## Библиографические замечания к главе 4

1. Определение критических индексов имеется практически во всех книгах по статистической механике. Упомянем для примера книгу Г. Стенли [43].

2. Иерархические модели Дайсона были введены в его работе [59]. Исследование этих моделей с точки зрения критической точки было впервые проведено на физическом уровне в работе Дж. Бейкера [45]. Об этих моделях упоминает также К. Вильсон в своих лекциях [94]. Строгий математический анализ гауссовского решения содержится в статье П. М. Блехера и Я. Г. Синая [47]. Изложение в тексте в целом следует ходу рассуждений [47], но многие технические детали существенно упрощены. Случай $c=\sqrt{2}$ рассмотрен отдельно П. М. Блехером в [5]. В работе П. М. Блехера [6] подробно исследуется окрестность $\beta_{cr}$ для гауссовской точки.

3. Негауссовские решения для основного интегрального уравнения иерархических моделей были построены в работе П. М. Блехера и Я. Г. Синая [48]. В этой же работе приведены результаты численного счета негауссовской ветви, проведенного П. М. Блехером. Эти исследования было бы чрезвычайно интересно продолжить. Вероятно, мы сталкиваемся здесь с примером задачи, в которой можно было бы получить строгие результаты на основе машинных экспериментов.

В работе [48] были также найдены первые члены разложения критических индексов по параметру $\varepsilon=\sqrt{2}-c$. В работах К. Томпсона и его сотрудников [83], [93] значения этих коэффициентов были несколько уточнены. Интересные результаты были получены в работе П. Колле и Ж. Экмана [54], которые, в частности, показали, что критические индексы являются бесконечно дифференцируемыми функциями $\varepsilon$. Отметим также работу Дж. Мак-Гайра [101] по сферическим иерархическим моделям.

4. Метод ренормгруппы в теории фазовых переходов был развит главным образом в работах М. Фишера, Л. Каданова и К. Вильсона. С тех пор этот метод стал одним из основных в теории критической точки. Хорошее представление о его использовании физиками можно получить из обзоров Дж. Когута и К. Вильсона [94], М. Фишера [60], С. К. Ма [99], Э. Брезана, Дж. Ле Гийо, Дж. Зен-Жюстина [50], А. З. Паташинского и В. Л. Покровского [31].

5. Понятие автомодельного распределения было введено в работах Я. Г. Синая [42] и Дж. Галлавотти и Дж. Йона-Ласинио [70]. Обсуждение этого понятия помимо названных работ см. в работах Дж. Галлавотти и Х. Кнопса [69], М. Кассандро и Дж. Йона-Ласинио [52], М. Кассандро и Дж. Галлавотти [53], Дж. Йона-Ласинио [88]. Непрерывные автомодельные поля изучаются в работах Р. Л. Добрушина [18], [58]. В одномерном случае автомодельные поля появились еще в довоенной работе А. Н. Колмогорова, связанной с проблемами подобия в теории турбулентности [22] (см. также [32], [44] и доклады Я. Г. Синая [112], [113]). Гауссовские автомодельные поля в дискрет-

ном случае были построены в работе Я. Г. Синая [42]. В работах П. М. Блехера [7] и Р. Л. Добрушина и Х. Такахаши содержатся примеры гауссовских автомодельных полей со спектром, не описываемым (4.15).

6. Общую теорию полиномов Эрмита — Ито см., например, в статьях К. Ито [90], в книге Б. Саймона [41] и в большой обзорной статье Р. Л. Добрушина и Р. А. Минлоса [19].

7. Примерно в том же духе, что и в §§ 7, 8, проводится изучение спектра линеаризованной ренормгруппы для гауссовских автомодельных распределений в статье П. М. Блехера [7]. Ряд результатов §§ 7, 8 в частности, лемма 6 принадлежит студенту МГУ М. Миссарову.

8. На физическом уровне строгости $\varepsilon$-разложения описанного в § 9 типа появились в работах М. Фишера, С. К. Ма и Б. Никеля [61] и Дж. Зака [117]. Негауссовские автомодельные распределения появились в работе М. Розенблатта [108]. На той же примерно идее основаны примеры негауссовских распределений в работах Р. Л. Добрушина [18, 58]. Другие интересные примеры негауссовских автомодельных распределений имеются в работах В. Карвовского и Л. Стрейта [92] и С. А. Молчанова и Ю. Н. Сударева [30].

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее время появилось много новых работ, так или иначе относящихся к проблемам, рассмотренным в этой книге. Здесь мы перечислим некоторые из них.

В связи с содержанием главы 1, а также в связи с некоторыми проблемами главы 4 большой интерес представляет анализ предельных распределений Гиббса для систем, в которых отдельные переменные $\varphi(x)$ принимают произвольные действительные значения. В частности, это относится к системам с гамильтонианами вида

$$H = \sum a(x-y)\,\varphi(x)\,\varphi(y) + \\ + \sum b(x_1, x_2, x_3, x_3)\,\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,\varphi(x_3)\,\varphi(x_4),$$

где на четвертичную часть должны быть наложены некоторые условия положительности. Основная задача состоит в том, чтобы исследовать характер убывания плотностей конечномерных распределений вероятностей при $|\varphi(x)| \to \infty$ у предельных распределений Гиббса. Ряд известных нам результатов в этом направлении получен недавно в работах Дж. Лйбовица и Е. Презутти [97], а также М. Кассандро, Е. Оливьери, А. Пеллегринотти и др. в: Zeitschr für Wahrscheinlichkeitstheorie, 1978, v. 41, p. 313.

Вторая глава книги посвящена анализу фазовых диаграмм решетчатых систем. Имеется серия работ четырех авторов: Ю. Фролиха, Р. Израэля, Э. Либа и Б. Саймона (ФИЛС) (препринты которых публикуются в Comm. Math. Physics u Journal of Statistical Physics), где развивается другой метод доказательства неединственности предельных распределений Гиббса, нежели тот, который описан в книге. В основе этого метода лежит понятие Reflection Positivity, близкое к условию положительной определенности соответствующей transfer-matrix, и специальный метод оценки вероятностей контуров (chessboard method). В работе названных авторов, опубликованной в Comm. Math. Phys., v. 62, № 1, 1978, p. 1, проводится подробное сравнение обоих методов. Со всеми выводами этого сравнения, кроме последнего, относящегося к трудности доказательств, можно в данный момент согласиться. Тем не менее, есть основания надеяться, что при надлежащем развитии методов главы 2 удастся получить многие результаты работ ФИЛС. Основной пример, с которого естественно начать,— проведение доказательства о неединственности предельного распределения Гиббса для моделей квантовой теории поля $:P(\varphi):_2$ методами контурных моделей. Само собой разумеется, что это потребует обобщения понятия контурной модели в направлении построения контурных моделей со взаимодействием.

Другое интересное продолжение исследований — распространение результатов главы 2 на решетчатые системы, где спиновая переменная принимает непрерывные значения. Отметим в этой связи работу В. А. Малышева и Ю. А. Терлецкого и работу Ю. А. Терлецкого (ДАН СССР, т. 246, № 3, 1979, с. 540). В недавней работе Й. Славного (Journal of Statistical Physics, 1979, v. 20, № 5, p. 57) в ряде случаев фазовые диаграммы исследуются по теории возмущений в окрестности $\beta = \infty$.

В связи с § 1 главы 3 отметим работы Т. Спенсера и О. Мак-Брайана (Comm. Math. Phys., 1977 v. 53, № 3, p. 235) и С. Б. Шлосмана (Теор. и матем. физика, т. 37, № 3, 1978, с. 427) об убывании корреляций в двумерных моделях.

Значительного продвижения следует ожидать в исследовании проблем главы 4. В первую очередь, это относится к анализу области устойчивости гауссовских автомодельных распределений. Другая проблема — построение негауссовских автомодельных распределений методами теории бифуркаций и ε-разложения, наподобие того, как это было сделано для иерархических моделей Дайсона (см. [48]). Недавно большой прогресс здесь был достигнут в работах П. М. Блехера и

М. Д. Миссарова, которым в некотором формальном смысле удалось просуммировать ряды в $\varepsilon$-разложении и получить красивые компактные выражения и для соответствующих автомодельных распределений, и для спектра линейной ренормгруппы.

С другой стороны, пока неясно, насколько эти исследования помогут при анализе критических индексов короткодействующих моделей. В связи с этим весьма важно исследовать автомодельные распределения, отвечающие точно решаемым моделям — модели Изинга и модели Бакстера. Чрезвычайно сильные методы здесь развиты в серии недавних работ японского математика М. Сато и его сотрудников. По-видимому, развитие этих исследований — одно из самых перспективных направлений в теории фазовых переходов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Арнольд В. И.*— УМН, 1972, т. 27, № 5, с. 119.
2. *Березин Ф. А., Синай Я. Г.*— В сб.: Труды Московского математического общества, 1967, т. 17, с. 197.
3. *Березинский В. Л.* Автореферат диссертации. ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1974.
4. *Берестецкий В. Б.* В сб. ИТЭФ.: Элементарные частицы, 1973, в. 1, с. 3.
5. *Блехер П. М.*— УМН, 1977, т. 32, в. 6, с. 243.
6. *Блехер П. М.* В сб.: Труды Московского математического общества, 1976, т. 33, с. 155.
7. *Блехер П. М.* В сб.: Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978.
8. *Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И.*— Теор. и мат. физика, 1969, т. 1, № 2, с. 251.
9. *Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И.*— ДАН СССР, 1949, т. 66, № 3, с. 321.
10. *Герцик В. М., Добрушин Р. Л.*— Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 1, с. 12.
11. *Герцик В. М.*— Изв. АН СССР: Сер. мат., 1976, т. 40, № 3, с. 448.
12. *Добрушин Р. Л.*— Теория вероятн. и ее прим., 1965, т. 10, № 2, с. 209.
13. *Добрушин Р. Л.*— Функц. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 4, с. 44.
14. *Добрушин Р. Л.*— Функц. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 4, с. 201.
15. *Добрушин Р. Л.*— Функц. анализ и его прилож., 1969, т. 3, № 1, с. 27.
16. *Добрушин Р. Л.*— Теория вероятн. и ее прим., 1970, т. 15, № 3, с. 469.
17. *Добрушин Р. Л.*— Теория вероятн. и ее прим., 1972, т. 17, № 4, с. 612; 1973, т. 18, № 2, с. 261.
18. *Добрушин Р. Л.*— В сб.: Многокомпонентные случайные системы.— М.: Наука, 1978.
19. *Добрушин Р. Л., Минлос Р. А.*— УМН, 1977, т. 32, № 2, с. 67.
20. *Добрушин Р. Л.*— Матем. сборник, 1974, т. 94, № 1, с. 16.
21. *Кашапов И. А.*— Теор. и мат. физика, 1977, т. 33, № 1, с. 110.
22. *Колмогоров А. Н.*— ДАН СССР, 1940, т. 26, с. 115.
23. *Мартиросян Д. Г.*— УМН, 1975, т. 30, № 6 с. 181.
24. *Мартиросян Д. Г.*— Теор. и мат. физика, 1975, т. 22, № 3, с. 335.

25. *Минлос Р. А.*— Функц. анализ и его прилож., 1967, т. 1, № 2, с. 60.
26. *Минлос Р. А.*— Функц. анализ и его прилож., 1967, т. 1, № 3, с. 40.
27. *Минлос Р. А., Синай Я. Г.* В сб.: Труды Московского математического общества, 1967, т. 17, с. 213.
28. *Минлос Р. А., Синай Я. Г.*— Матем. сборник, 1967, т. 73, № 3, с. 375.
29. *Минлос Р. А., Синай Я. Г.* В сб.: Труды Московского математического общества, 1968, т. 18, с. 113.
30. *Молчанов С. А., Сударев Ю. Н.*— ДАН СССР, 1975, т. 224, № 3, с. 536.
31. *Паташинский А. З., Покровский В. Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1975.
32. *Пинскер М. С.*— Изв. АН СССР: Сер. мат., 1955, т. 19, с. 319.
33. *Пирогов С. А.*— ДАН СССР, 1974, т. 214, № 6, с. 1273.
34. *Пирогов С. А.*— Изв. АН СССР: Сер. мат., 1975, т. 39б, с. 1404.
35. *Пирогов С. А., Синай Я. Г.*— Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 1, с. 25.
36. *Пирогов С. А., Синай Я. Г.*— Теор. и мат. физика, 1975, т. 25, № 3, с. 358.
37. *Пирогов С. А., Синай Я. Г.*— Теор. и мат. физика, 1976, т. 26, № 1, с. 61.
38. *Розанов Ю. А.*— Теория вероятн. и ее прим., 1967, т. 12, № 3, с. 433.
39. *Рюэлль Д.* Статистическая механика.— М.: Мир, 1971.
40. *Рюэлль Д.*— Теор. и мат. физика, 1977, т. 30, № 1, с. 40.
41. *Саймон Б.* Модель $\varphi_2^4$ евклидовой квантовой теории поля.— М.: Мир, 1976.
42. *Синай Я. Г.*— Теория вероятн. и ее прим., 1976, т. 21, № 1, с. 63.
43. *Стенли Г.* Фазовые переходы и критические явления.— М.: Мир, 1973.
44. *Яглом А. М.*— Теория вероятн. и ее прим., 1957, т. 2, № 2, с. 292.
45. *Baker G.*— Phys. Rev. B5, 1972, p. 2622.
46. *Van Beijeren H.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 40, № 1, p. 1.
47. *Bleher P. M., Sinai Ja. G.*— Comm. Math. Phys., 1973, v. 33, № 1, p. 23.
48. *Bleher P. M., Sinai Ja. G.*— Comm. Math. Phys., 1973, v. 45, № 3, p. 247.
49. *Bortz A., Griffiths R.*— Comm. Math. Phys., 1972, v. 26, № 2, p. 102.
50. *Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.*— In: Phase Transitions and Critical Phenomena, edited by Domb and Green, v. VI.
51. *Cassandro M., Da Fano M., Olivereri G.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 44, № 1, p. 45.
52. *Cassandro M., Jona-Lasinio G.* Preprint (Bielefeld), 1976.
53. *Cassandro M., Gallavotti G.*— Nuovo Cimento, 1975, 25B, p. 691.

54. *Collet P., Eckmann J. P.* A Renormalization Group Analysis of Hierarchical Model in Statistical Mechanics, Lecture Notes in Physics, v. 74, 1978, Springer-Verlag.
55. *Dobrushin R. L.*— In: Proc. V Berkeley Symposium, v. III, 1967, p. 73.
56. *Dobrushin R. L., Shlosman S. B.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 42, № 1, p. 31.
57. *Dobrushin R. L.* In: Multicomponent Random Systems. Marcel Dekker Ed. New. York, 1980.
58. *Dobrushin R. L.*— Annals of Probability, 1979, v. 7, № 1, p. 1.
59. *Dyson F.*— Comm. Math. Phys., 1969, v. 12, p. 91; 1971, v. 21, p. 269.
60. *Fisher M. E.*— In: Proc. Nobel Symposium, 1973, v. 24, p. 16
61. *Fisher M. E., Ma S. K., Nickel B. G.*— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 917.
62. *Feldman J., Osterwalder K.*— Annals of Physics, 1976, v. 97, p. 80.
63. *Fröhlich J.*— In: Les Methodes Mathematiques de la Theorie Quantique des Champs — Marseille, 1975, p. 111.
64. *Fröhlich J., Simon B., Spencer T.*— Comm. Math. Phys., 1976, v. 50, № 1, p. 79.
65. *Fröhlich J.*— Acta Physica Austrica, Suppl. 1976, v .15, p. 133.
66. *Fröhlich J.*— Bulletin American Math. Society, 1978, v. 84, № 2, p. 165.
67. *Fröhlich J.*— In: Lectures delivered at the International School of Math. Physics, Erice, Sicily, 1977, Preprint.
68. *Gallavotti G., Miracle-Sole S.*— Phys. Rev., 1972, 5B, p. 2555.
69. *Gallavotti G., Knops H. J. F.*— Comm. Math. Phys., 1974, v. 36, p. 171.
70. *Gallavotti G., Jona-Lasinio G.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 41, № 3, p. 301.
71. *Gawedzki K.*— Preprint, Warsaw University, 1977.
72. *Ginibre J., Grossman A., Ruelle D.*— Comm. Math. Phys., 1966, v. 3, № 2, p. 187.
73. *Glimm J., Jaffe A.*— In: Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Les Houches, 1970, DeWitt and Stora/Ed. Gordon and Breach.
74. *Glimm J., Jaffe A.*— Mathematics of Contemporary Physics, Academic Press, 1972, p. 77.
75. *Glimm J., Jaffe A.*— A tutorial Course in Constructive Field Theory, In: Proc. of Cargese Summer School, 1976, Preprint.
76. *Glimm J., Jaffe A.* Fortschritte der Physik, 1973, B21, H7, s. 327.
77. *Glimm J., Jaffe A., Spencer T.*— Comm. Math. Physics, 1975, v. 45, № 2, p. 203.
78. *Glimm J., Jaffe A., Spencer T.*— Annals of Physics, 1976, v. 101, p. 610; 1976, v. 101, p. 631.
79. *Griffiths R.*— Phys. Rev., 1964, v. 136, № 2A, p. 437.
80. *Gruber C., Hintermann A., Merlini D.* Group Analysis of Classical Lattice Systems, Lecture Notes in Physics, 1977, v. 60, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York.

81. *Guerra F., Rosen L., Simon B.*— Annals of Math., 1975, v. 101, p. 111.
82. *Guerra F.*— In: Proc. of the Conference, «$C^*$-algebras and their Applications in Theoretical Physics».— Rome, 1975, p. 13.
83. *Guttman A. J., Kim D., Thompson C. J.*— J. Phys. A: Math. Gen., 1977, v. 10, № 9, p. 125.
84. *Heilmann O. J., Lieb E. M.*— Comm. Math. Phys., 1972, v. 25, p. 190.
85. *Heilmann O. J.*— Comm. Math. Phys., 1974, v. 36, № 2, p. 91.
86. *Holsztynski W., Slawny J.* Phase Transitions in Ferromagnetic Systems at Low Temperatures, Preprint, 1976.
87. *Holsztynski W., Slawny J.* Peierls Condition and Number of Ground States, Preprint, 1977.
88. *Jona-Lasinio G.*— Nuovo Cimento, 1975, v. 26B, p. 99.
89. *Israel R. B.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 43, № 1, p. 59.
90. *Ito K.*— Journal of Math. Society of Japan, 1951, v. 3, p. 157.
91. *Kadanoff L., Gotze W., Hambler D. et al.*— Reviews of Modern Physics, 1967, v. 39, p. 395.
92. *Karwowski W., Streit L.* A Renormalization Group Model with Non-Gaussian Fixed Point, Preprint, Universität Bielefeld, 1976.
93. *Kim D., Thompson C. J.*— J. Phys. A: Math. Gen., 1977, v. 10, p. 9.
94. *Kogut J., Wilson K.*— Phys. Reports, 1974, 12C, p. 75.
95. *Lanford O. E., Ruelle D.*— Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, p. 194.
96. *Lebowitz J.* J. of Stat. Phys., 1977, v. 16, p. 463.
97. *Lebowitz J., Presutti E.*— Comm. Math. Phys., 1976, v. 50, № 2, p. 195.
98. *Lieb E. H.*— In: Proc. of the Intern. Conf. on the Math. Problems in Theor. Phys.— Rome, 1977, Lecture Notes in Physics, v. 80, p. 59.
99. *Ma S. K.*— Rev. Modern Physics, 1973, v. 45, p. 589.
100. *Malyshev V. A.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 40, № 1, p. 75.
101. Mc. Guire J. B.— Comm. Math. Phys., 1973, v. 32, № 2, p. 215.
102. *Messager A., Miracle-Sole S.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 40, № 2, p. 187.
103. *Nelson E.*— In: Lecture Notes in Physics, 1973, v. 25, p. 94.
104. *Osterwalder K., Seiler E.*— Annals of Physics, 1978, v. 110, p. 440.
105. *Peierls R.*— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, v. 32, part 3, p. 477.
106. *Pirogov S. A., Sinai Ja. G.*— Annals of Physics, 1977, v. 109, № 2, c. 393.
107. *Preston C. H.* Random Fields, Lecture Notes in Math., 1976, v. 534: Springer-Verlag, Berlin — Heidelber — New York.
108. *Rosenblatt M.*— In: Proc. IV Berkeley Symposium on Probability and Math. Statistics, Berkeley, 1961, p. 431.
109. *Ruelle D.*— Helv. Phys. Acta, 1963, v. 36, p. 183.

110. *Ruelle D.*— Comm. Math. Phys., 1977, v. 53, № 3, p. 195.
111. *Runnels L. K.*— Comm. Math. Phys., 1975, v. 40, № 1, p. 37.
112. *Sinai Ya. G.*— In: Proc. Intern. Conf. on Stat. Physics, Budapest, 1975, p. 139.
113. *Sinai Ya. G.*— In: Proc. of the Intern. Conf. on the Math. Problems in Theor. Physics.— Rome, 1977, Lecture Notes in Physics, p. 303.
114. *Slawny J.*— Comm. Math. Physics, 1974, v. 35, № 3, p. 297.
115. *Spitzer F.*— In: Lecture Notes in Math., 1974, v. 390, p. 114.
116. *Wilson K.*— Phys. Rev. D10, 1974, p. 2445.
117. *Zak J.*— Phys. Rev., 1973, B. 8, № 1, p. 281.

*Яков Григорьевич Синай*

ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Строгие результаты

М., 1980 г., 208 стр. с илл.

Редактор *Н. А. Мамонтова*
Техн. редактор *Н. В. Вершинина*
Корректор *О. А. Бутусова*

ИБ № 11588

Сдано в набор 31.03.80. Подписано к печати 09.10.80. Т-17641. Бумага 84×108¹/₃₂. Тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л. 11,59. Тираж 5000 экз. Заказ № 124. Цена книги 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25