И.Х.Сивашинский

ТЕОРЕМЫ И ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ФУНКЦИЯМ

Книга представляет собой сборник задач повышенной трудности по алгебре и элементарным функциям, снабженных решениями. Это пособие предназначено в первую очередь для самообразования. Книга может быть полезной преподавателям и учащимся математических школ, руководителям математических кружков, студентам вузов, а также при подготовке к конкурсным экзаменам в вузы, в которых предъявляются повышенные требования по математике.

Книга состоит главным образом из задач, предлагавшихся в вечерней математической школе при МГУ, учащимся физико-математической школы № 2 г. Москвы и слушателям специального семинара для учителей г. Москвы по решению усложненных задач по математике, руководимого автором в течение ряда лет.

В книгу включены некоторые задачи математических олимпиад всех уровней — от внутришкольных до международных.

В сборнике приведены также наиболее интересные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в те вузы, которые предъявляют повышенные требования по математике.

Пособие охватывает все разделы курса «Алгебра и элементарные функции».

Параграфы 2 (Делимость. Сравнения) и 12 (Комплексные числа) снабжены краткими теоретическими сведениями. Последнее вызвано тем, что «Сравнения» излагаются в школах лишь на факультативных или внеклассных занятиях, а «Тригонометрическая форма комплексного числа» (по мнению автора) изложена в стабильных учебниках неудачно.

В книге приведены решения всех задач. В отдельных случаях, когда задача допускает существенно различные подходы к решению, приведены два решения, а несколько задач решены тремя способами.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга состоит главным образом из задач, предлагавшихся в вечерней математической школе при МГУ, учащимся физико-математической школы № 2 г. Москвы и слушателям специального семинара для учителей г. Москвы по решению усложненных задач по математике, руководимого автором в течение ряда лет.

В книгу включены некоторые задачи математических олимпиад всех уровней — от внутришкольных до международных.

В сборнике приведены также наиболее интересные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в те вузы, которые предъявляют повышенные требования по математике.

Пособие охватывает все разделы курса «Алгебра и элементарные функции».

Параграфы 2 (Делимость. Сравнения) и 12 (Комплексные числа) снабжены краткими теоретическими сведениями. Последнее вызвано тем, что «Сравнения» излагаются в школах лишь на факультативных или внеклассных занятиях, а «Тригонометрическая форма комплексного числа» (по мнению автора) изложена в стабильных учебниках неудачно.

В книге приведены решения всех задач. В отдельных случаях, когда задача допускает существенно различные подходы к решению, приведены два решения, а несколько задач решены тремя способами.

И. Х. Сивашинский

ЗАДАЧИ

§ 1. Целые числа

• **1.** Найти двузначное число, равное сумме квадрата числа единиц и числа десятков.

2. Доказать, что для любого натурального n найдется такое натуральное x, что число $nx+1$ составное.

3. Число является полным квадратом и оканчивается на 5. Доказать, что его третья справа цифра четная.

4. Доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ числа вида $2^{2^n}+1$ оканчиваются цифрой 7.

5. Найти трехзначное число, которое в $^3/_2$ раза больше произведения факториалов его цифр.

6. Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой десятков, а цифра сотен на единицу больше цифры единиц.

7. Найти четырехзначное число, представляющее собой точный квадрат, причем первая цифра в нем одинакова со второй, а третья — с четвертой.

8. Пусть A, B, C — три натуральных числа, записанных по десятичной системе: A — единицами, число которых $2m$, B — единицами, число которых $m+1$, C — шестерками, число которых m. Доказать, что число $A+B+C+8$ — точный квадрат.

• **9.** Доказать, что любое четное число, не кратное четырем, нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

10. Найти трехзначное число, записанное в десятичной системе в виде $\overline{abc}$, равное полусумме чисел $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$, также в десятичной записи.

11. Доказать, что если функция $y=ax^2+bx+c$ при всех целых x принимает целые значения, то $2a$, $a+b$ и c — целые числа. Обратно, если $2a$, $a+b$ и c — целые, то функция $y=ax^2+bx+c$ при всех целых x принимает целые значения.

12. Пусть p — простое число. Доказать, что $8p^2+1$ — простое число лишь при $p=3$.

13. Доказать, что при любом натуральном n числа $21n+4$ и $14n+3$ взаимно простые.

14. Четная степень некоторого числа равна четырехзначному числу, первая цифра которого 3, а последняя 5. Найти это число.

15. Найти четырехзначное число, последние три цифры которого составляют арифметическую прогрессию, причем если читать это число справа налево, то получится число, на 360 меньшее искомого.

16. Найти трехзначное число N^2 такое, что произведение его цифр равно $N-1$.

17. Доказать, что число $N=\underbrace{111\ldots111}_{2n \text{ цифр}}-\underbrace{222\ldots222}_{n \text{ цифр}}$ есть квадрат некоторого числа. Найти $\sqrt{N}$.

18. Доказать, что число 9^n+1 может оканчиваться не более чем одним нулем (n — натуральное число).

19. Найти последние две цифры числа $7^{9^{9^9}}$.

20. Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d таких, что выражение ax^3+bx^2+cx+d равно 1 при $x=19$ и равно 2 при $x=62$.

21. Доказать, что число $N=2n^{3k}+4n^k+10$ ни при каких натуральных n и k не может быть произведением нескольких последовательных натуральных чисел.

22. Найти все натуральные x, для которых выражение $22x+5$ является квадратом натурального числа.

23. Доказать, что из всех трехзначных чисел лишь число 145 равно сумме факториалов своих цифр.

24. Найти четырехзначное число $\overline{abca}$ (в десятичной записи), равное $(5c+1)^2$.

25. Показать, что существует всего 25 двузначных натуральных чисел, которые обладают следующим свойством: каждое из чисел больше числа, написанного теми же цифрами в обратном порядке, на точный квадрат. Найти эти числа.

26. Найти шестизначное число, являющееся точным квадратом, зная, что если разбить его на две части по три цифры, то разность полученных трехзначных чисел тоже является точным квадратом. Известно, что одно из этих чисел в 8 раз больше другого.

27. Найти такое целое число a, при котором многочлен $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

28. Найти два натуральных числа, кратных четырем, разность кубов которых равна четырехзначному числу, кратному 91.

29. Найти все пары натуральных чисел m и n, удовлетворяющих двум условиям:

1) m^2-9n^2 — простое число,

2) $2\lg\frac{n}{m}+1<0$.

30. Наибольший общий делитель двух трехзначных чисел m и n равен 6, а наименьшее общее кратное их является шестизначным числом. Найти знак величины $\operatorname{tg}\frac{m}{350}$.

31. Доказать, что простое число не может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных нечетных чисел.

32. Доказать, что если 2^n+1 — простое число, то n — степень числа 2.

33. Доказать, что если число $2^p - 1$, где p — простое число, само является простым, то число $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ равно сумме всех своих делителей, за исключением его самого.

34. Доказать, что произведение всех делителей натурального числа n равно $n^{\frac{k}{2}}$, где k — число делителей.

35. Известно, что простое число p является разностью квадратов двух натуральных чисел. Найти эти числа.

36. Доказать, что нет простых трехзначных чисел, цифры которых образуют арифметическую прогрессию.

37. Сколько надо взять слагаемых суммы $1 + 2 + 3 + \ldots$, чтобы получить трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

38. Доказать, что $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$ есть натуральное число.

§ 2. Делимость. Сравнения

I. Сравнения

Если два целых числа a и b при делении на натуральное число m дают один и тот же остаток r, где $0 \leqslant r < m$, то числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m.

Сравнимость чисел a и b по модулю m принято записывать так:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

и читать: a сравнимо с b по модулю m.

1. *Если* $a \equiv b \pmod{m}$, *то*

1) $a = b + mt$, *где* t — *целое число.*

2) *Разность* $a - b$ *делится на* m.

Обратно, если 1) $a = b + mt$ *или* 2) $a - b$ *делится на* m, *то* $a \equiv b \pmod{m}$.

Доказательство. 1) Из $a \equiv b \pmod{m}$ следует, что

$$a = mq + r, \quad b = mq_1 + r, \qquad 0 \leqslant r < m;$$

поэтому

$$a - b = m(q - q_1), \text{ т. е. } a = b + mt, \text{ где } t = q - q_1.$$

Обратно, если $a = b + mt$, то из представления числа b в виде $b = mq_1 + r$ следует

$$a = mq + r, \text{ где положено } q = q_1 + t;$$

поэтому $a \equiv b \pmod{m}$, так как числа a и b при делении на m дают один и тот же остаток r.

2) Как уже доказано, из условия $a \equiv b \pmod{m}$ следует, что $a = b + mt$, а поэтому

$$a - b = mt, \quad \text{т. е.} \quad a - b \text{ делится на } m.$$

Обратно, если $a - b$ делится на m, то $a - b = mt$, т. е. $a = b + mt$, а поэтому по доказанному выше $a \equiv b \pmod{m}$.

II. Свойства сравнений

1. *Два числа, сравнимые с третьим по одному и тому же модулю, сравнимы между собой (по этому же модулю).*

Доказательство. Если $a \equiv c \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то каждое из чисел a и b при делении на m дает тот остаток r, который получается при делении c на m; поэтому $a \equiv b \pmod{m}$.

2. *Сравнения по одному модулю можно почленно складывать.*

Доказательство. Пусть

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \quad a_2 \equiv b_2 \pmod{m}, \ \ldots, \ a_n \equiv b_n \pmod{m}.$$

Тогда

$$a_1 = b_1 + mt_1, \ a_2 = b_2 + mt_2, \ \ldots, \ a_n = b_n + mt_n.$$

Поэтому

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + m(t_1 + t_2 + \ldots + t_n),$$

следовательно,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \pmod{m}. \qquad (1)$$

Следствие 1. *Любое слагаемое одной части сравнения можно перенести с противоположным знаком в другую часть.*

Сложив сравнение $a + b \equiv c \pmod{m}$ с очевидным сравнением $-b \equiv -b \pmod{m}$, получим $a \equiv c - b \pmod{m}$.

Следствие 2. *К любой части сравнения можно прибавить произвольное число, кратное модулю.*

Сложив сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ с очевидным сравнением $mk \equiv 0 \pmod{m}$, где k — целое число, получим

$$a + mk \equiv b \pmod{m}.$$

3. *Сравнения по одному модулю можно почленно перемножать.*

Доказательство. Пусть

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \qquad a_2 \equiv b_2 \pmod{m}.$$

Тогда

$$a_1 = b_1 + mt_1, \qquad a_2 = b_2 + mt_2.$$

Поэтому

$$a_1 a_2 = (b_1 + mt_1)(b_2 + mt_2) = b_1 b_2 + mt,$$

где $t = b_1 t_2 + b_2 t_1 + mt_1 t_2$; следовательно, $a_1 a_2 - b_1 b_2 = mt$ делится на m, а поэтому

$$a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}. \qquad (1)$$

Если

$$a_3 \equiv b_3 \pmod{m}, \qquad (2)$$

то, перемножая сравнения (1) и (2), получим

$$a_1 a_2 a_3 = b_1 b_2 b_3 \pmod{m} \text{ и т. д.},$$

т. е. указанное свойство верно для любого числа сравнений.

С л е д с т в и е 1. *Обе части сравнения можно возвысить в одну и ту же степень.*

Действительно, перемножая сравнения

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m}, \\ a \equiv b \pmod{m}, \\ \dots\dots\dots \\ a \equiv b \pmod{m}, \end{array}\right\} n \text{ сравнений},$$

получим $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

С л е д с т в и е 2. *Обе части сравнения можно умножить на одно и то же целое число.*

Действительно, умножив сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ на очевидное сравнение $k \equiv k \pmod{m}$, получим $ak \equiv bk \pmod{m}$.

4. *Обе части сравнения можно разделить на их общий делитель, если этот делитель и модуль — взаимно простые числа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, и наибольший общий делитель m и d равен 1, т. е. m и d — взаимно простые числа. Тогда разность $a - b = (a_1 - b_1) d$ делится на m; но m и d не имеют общих делителей, кроме единицы, а поэтому $a_1 - b_1$ делится на m, т. е. $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$.

5. *Обе части сравнения и модуль можно умножить на одно и то же целое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a = b + mt$, а поэтому $ak = bk + mkt$, где k — целое число; следовательно, $ak \equiv bk \pmod{mk}$.

6. *Обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$, где $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $m = m_1 d$. Тогда

$$a = b + mt \quad \text{или} \quad a_1 d = b_1 d + m_1 dt,$$

поэтому

$$a_1 = b_1 + m_1 t, \quad \text{т. е.} \quad a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}.$$

7. *Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким модулям, то оно имеет место по модулю, равному общему наименьшему кратному этих модулей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$, ..., $a \equiv b \pmod{m_k}$. Тогда разность $a - b$ делится на $m_1, m_2, \dots, m_k$, а поэтому $a - b$ делится на общее наименьшее кратное этих модулей, которое обозначим буквой m, т. е. $a \equiv b \pmod{m}$.

8. *Если сравнение имеет место по модулю m, то оно имеет место по любому модулю d, равному делителю числа m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a - b$ делится на m, а поэтому $a - b$ делится на d (где d — делитель m); следовательно, $a \equiv b \pmod{d}$.

9. *Если одна часть сравнения и модуль делятся на какое-нибудь целое число, то и другая часть сравнения должна делиться на это число.*

Доказательство. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a = b + mt$.

Пусть a и m делятся на число k, т. е. $a = a_1k$, $m = m_1k$. Тогда $b = a - mt = k(a_1 - m_1t)$, т. е. b делится на k.

39. Найти остаток от деления 5^{20} на 24.

40. Доказать, что при любом натуральном n число $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

41. Доказать, что $(3299^5 + 6)^{18} - 1$ делится на 112.

42. Доказать, что $3^{105} + 4^{105}$ делится на 181.

43. Доказать, что $5^{5k+1} + 4^{5m+2} + 3^{5n}$ делится на 11, если k, m, n — натуральные числа.

44. При делении натурального числа N на 3 и на 37 получаются соответственно остатки 1 и 33. Найти остаток при делении N на 111.

45. Доказать, что при любых целых a и b и целом неотрицательном n число $(7a + 3)^{2n+1} + (7b + 25)^{2n+1}$ делится на 7.

46. Доказать, что при любом натуральном n число $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ делится на 25.

47. Найти остаток от деления $(9674^6 + 28)^{15}$ на 39.

48. Доказать, что $2^{60} + 7^{30}$ делится на 13.

49. Доказать, что разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность оснований, т. е. $(a^n - b^n) \vdots (a - b)$ при любых натуральных n, где a и b — различные целые числа (знак $\vdots$ заменяет слово «делится»).

50. Доказать, что сумма одинаковых нечетных степеней двух чисел делится на сумму оснований, т. е. $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a + b)$ при любых натуральных n, где a и b — целые, причем $a + b \neq 0$.

51. Разность одинаковых четных степеней двух целых чисел делится на сумму оснований, т. е. $(a^{2n} - b^{2n}) \vdots (a + b)$ при любом натуральном n $(a + b \neq 0)$. Доказать.

52. Доказать, что $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$, если n — натуральное число.

53. Доказать, что для любых нечетных чисел a_i, не кратных трем, где $i = 1, 2, 3, \ldots, 2n$, число $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \ldots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2$ делится на 24.

54. Доказать, что ни при каких натуральных значениях n и k $(k > 1)$ число $3^{n^k} + 1$ не делится на 5.

55. Доказать, что если сумма двух чисел x и y кратна 7, то сумма $x^7 + y^7$ делится на 49.

56. Доказать, что среди 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

57. При каких целых значениях x число $a(x^3 + a^2x^2 + a^2 - 1)$ делится на 6 для всякого целого a?

58. Доказать, что число $N = 5^{2n-1} 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$ делится на 19 для любого натурального n.

59. Доказать, что остаток от деления простого числа на 30 есть не составное число, т. е. этот остаток либо равен 1, либо есть простое число.

60. Доказать, что число $a^{4n+1}-a$ при любых целых a и $n\geqslant 0$ делится на 30.

61. Доказать, что неделимость целого числа n на 2 и на 3 есть необходимое и достаточное условие делимости числа $4n^2+3n+5$ на 6.

62. Найти все натуральные числа n, для которых число n^2+1 делится на $n+1$.

63. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $N=3^{2(n+1)}\cdot 5^{2n}-3^{3n+2}\cdot 2^{2n}$ делится на 117.

64. Доказать, что ни при каком целом x число x^2+3x+5 не делится на 121.

65. Доказать, что сумма квадратов двух целых чисел a и b делится на 7 только тогда, когда каждое из них делится на 7.

66. Доказать, что при любых целых x и y число

$$N=(x^2y^3-4x^2y)(x^4+x^2-2)$$

делится на 216.

67. Доказать, что число $(n^2-1)^k(n-1)^{k+1}+1$ делится на число n, где n — натуральное число, а k — целое неотрицательное число.

68. Доказать, что число $70a+21b+15c-N$ делится на 105, если a, b, c — остатки от деления целого числа N соответственно на 3, 5 и 7.

69. Натуральные числа a и b взаимно просты. Доказать, что не существует числа d, большего двух, на которое делились бы одновременно числа $a+b$ и a^2+b^2.

70. При делении шестизначного числа, состоящего из одинаковых цифр, на четырехзначное число, состоящее тоже из одинаковых цифр, получилось в частном 233 и некоторый остаток. После отбрасывания в делимом и делителе по одной цифре и нового деления частное не изменилось, а остаток уменьшился на 1000. Найти делимое и делитель.

71. Доказать, что $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ делится на $5(x-y)(y-z)(z-x)$, где x, y, z — целые попарно не равные числа.

72. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $7^{2n}+3^{2n}+30\cdot 21^n$ делится на 16.

73. Доказать, что при любом натуральном n число $N=2^{5n-1}+2^{5n-2}+2^{5n-3}+\ldots+2^2+2+1$ делится на 31.

74. Доказать, что при любом натуральном n число $16^n(2^n+1)+9^n(9^{n+1}-1)+5^n(5^{n+1}-5^n)$ делится на 7.

75. Доказать, что при любом целом n число $n^4-2n^3+11n^2+62n$ делится на 24.

76. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $2n^3-3n^2+n$ делится на 6.

77. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $30^n+4^n(3^n-2^n)-1$ кратно 11.

78. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $2^{2^{6n+2}}+3$ делится на 19.

79. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{3n}$ делится на 8.

80. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4$ делится на 16.

81. Доказать, что при любом натуральном n число $7^{2n}-4^{2n}-33$ делится на 528.

82. Доказать, что при любом натуральном n число $3^{3n+3}-26n-27$ делится на 676.

83. Доказать, что если число делится на 99, то сумма его цифр не менее 18.

84. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $(n+1)^{3n}-n^{2n}(n+3)^n$ делится на число $3n+1$.

85. Доказать, что если m — натуральное число, то разность между суммой цифр m-й степени целого числа и m-й степени суммы цифр того же числа делится без остатка на 9.

86. Доказать, что если a и b — целые взаимно простые числа, то наибольший общий делитель чисел $a-b$ и $a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+$ $+b^{n-1}$ есть делитель числа n.

87. Найти двузначное число, произведение цифр которого является его делителем.

88. Доказать, что если от деления многочлена $M(x)$ на разность $x-a$ в частном получится $Q(x)$, а в остатке R, то $(1-a)S(Q)=$ $=S(M)-R$, где $S(Q)$ — сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$, а $S(M)$ — сумма коэффициентов многочлена $M(x)$.

89. Доказать, что при любом натуральном a число

$$N=1^{2n+1}+2^{2n+1}+3^{2n+1}+\ldots+(2a)^{2n+1}$$

делится на $2a+1$.

90. Доказать, что при любом натуральном n число $N=4^{2n}-$ $-3^{2n}-7$ делится на 84.

91. Доказать, что при любом целом $n\geqslant-1$ число $N=3^{2n+3}+$ $+40n-27$ делится на 64.

92. Доказать, что число p^2-q^2, где p и q — простые числа, большие 3, делится на 24.

93. В какой степени все натуральные числа, кроме чисел, кратных 7, при делении на 7 дают в остатке единицу?

94. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $36^n+10\cdot3^n$ делится на 11.

95. Доказать, что трехчлен $n^2+5n+16$ ни при каком целом n не делится на 169.

96. Доказать, что при любом натуральном n число $n^{8888}-n^{7777}+1$ делится на n^2-n+1.

97. Доказать, что если из любого числа, имеющего нечетное число цифр, вычесть число с обратным порядком тех же цифр, то полученная разность делится на 99.

98. Доказать, что число $N=a^2+b^2$ делится на 441, если известно, что N делится на 21 (a и b — натуральные числа).

99. Пусть K, M и N — три натуральных числа, причем K и M — взаимно простые числа. Доказать, что существует такое натуральное число x, что число $Mx+N$ делится на K.

100. Доказать, что при любом целом значении x число $9x^5-5x^3-4x$ делится на 120.

101. При каких натуральных n число $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$ кратно 10?

102. Доказать, что ни при каком целом n числа n^5+4n^3+3n и n^4+3n^2+1 не имеют общих делителей.

103. Какие остатки могут давать при делении на 9 кубы целых чисел?

104. Доказать, что при любом целом неотрицательном n число $9^n(9^n+1)+1$ делится на число $3^n(3^n+1)+1$.

105. Доказать, что число n^2+3n+5 ни при каком целом n не делится на 121.

106. Доказать, что произведение k последовательных целых чисел делится на $k!$.

107. Доказать, что необходимое и достаточное условие делимости на 7 тех трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 7, состоит в одинаковости цифр десятков и единиц.

108. Доказать, что число $N=19^{19}+69^{69}$ делится на 44.

109. Доказать, что при делении двух целых чисел на их разность получаются равные остатки, а частные отличаются на 1.

110. Доказать, что при любом целом неотрицательном n разность чисел n^9 и n^5 делится на 30.

111. Доказать, что число $N=2(a-1)^{n+1}-(2-a)^n$, где a и n — произвольные натуральные числа, делится на число $2a-3$.

112. Доказать, что при любых нечетных n число

$$S_m=1^n+2^n+3^n+\ldots+m^n$$

делится на число $1+2+3+\ldots+m$.

113. Доказать, что число $20^{15}-1$ делится на произведение $11\cdot31\cdot61$.

114. Доказать, что если натуральное число n не делится ни на 2, ни на 3, то n^2-1 делится на 24.

115. Дано, что ни A, ни B не делятся на нечетное простое число p и что A^2-B^2 делится на p^n, где n — целое положительное число. Доказать, что или сумма, или разность чисел A и B делится на p^n.

116. Пусть $\overline{ab}$ — число, образованное двумя последними цифрами натурального числа N. Доказать, что число N делится на 4 тогда и только тогда, когда $2a+b$ делится на 4.

117. Доказать, что при нечетном $n\geqslant3$ целое число

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)(n-1)!$$

делится на n.

§ 3. Решение уравнений в целых числах

118. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.

119. Решить уравнение $60x - 77y = 1$ в целых числах.

120. Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению $x + y + z = xyz$?

121. Найти целые значения параметра a, при которых уравнение $a(a+1)x^2 + x - a(a-1) = 0$ имеет целый корень. Найти этот корень.

122. Доказать, что уравнение $x^2 - 3y = 17$ не имеет решений в целых числах.

123. Доказать, что уравнение $x^2 + 4x - 8y = 11$ не имеет решений в целых числах.

124. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x + y = (x - y)^2.$$

125. Доказать, что уравнение $x^2 - y^2 = 2xyz$ не имеет решений в целых числах, кроме случаев $x = \pm y$, $z = 0$.

126. Доказать, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет решений в целых числах.

127. Решить в целых положительных числах уравнение $x^2 - y^2 = 105$. Обобщить задачу.

128. Доказать, что уравнение $2x^2 - 5y^2 = 7$ не имеет решений в целых числах.

129. Доказать, что уравнение $3x^2 + 8 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

130. Решить в целых положительных числах уравнение $(x+y)^2 - (x+y) - 2x = 150$.

131. Решить в целых числах уравнение $4x + y + 4\sqrt{xy} - 28\sqrt{x} - 14\sqrt{y} + 48 = 0$.

132. Решить в целых числах уравнение $2xy + 3y^2 = 24$.

133. Решить в целых числах уравнение $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x - 4y - 600 = 0$.

134. Решить в целых числах уравнение $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

135. Доказать, что $2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y = 10$ не имеет решений в целых числах.

136. Решить в целых положительных числах уравнение $2x^2 - xy - y^2 + 2x + 7y = 84$.

137. Решить в целых положительных числах уравнение $x^2 - xy + 2x - 3y = 11$.

138. Решить в целых положительных числах уравнение $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$.

139. Решить в целых положительных числах уравнение $x^2 + y^2 = z^2$. (Дать общие формулы для x, y, z.)

140. Уравнение $x(y+1)^2 = 243y$ решить в целых положительных числах.

141. Доказать, что уравнение $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ имеет единственное решение $x = y = 1$ в целых положительных числах.

142. Уравнение $x^4+2x^7y-x^{14}-y^2=7$ решить в натуральных числах.

143. Доказать, что уравнение $x^2+y^2=4^n$, где n — натуральное число, не имеет решений в целых (отличных от нуля) числах.

144. Решить в целых числах уравнение $2^x+1=y^z$.

145. Решить в целых числах уравнение $3^x=4y+5$.

146. Решить в целых числах уравнение $3^x-2^y=1$.

147. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие уравнению $2^{x^2+x-2}-2^{x^2-4}=992$.

148. Решить в натуральных числах уравнение

$$x^x+y^y=2x+y.$$

149. Доказать, что при любом натуральном n уравнение $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} y=1$ имеет только одно решение в целых числах.

150. Доказать, что если p и q — нечетные числа, то уравнение $x^{10}+px^7+q=0$ не имеет целых решений.

151. Доказать, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений в целых положительных числах, если $n>2$ и $z<1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

152. Доказать, что условием разрешимости уравнения

$$\sqrt[3]{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

в целых положительных числах является $\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<3$, если известно, что x и y не являются точными квадратами.

153. Решить в целых числах уравнение $p(x+y)=xy$, где p — данное простое число.

154. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$$

не имеет целых положительных решений.

155. Решить в целых положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=14, \\ x+yz=19. \end{cases}$$

156. Решить систему

$$\begin{cases} 8x+5y+z=100, \\ x+y+z=20 \end{cases}$$

в целых положительных числах.

157. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1, \\ y+z-x=3. \end{cases}$$

158. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=42, \\ x+y^2=42. \end{cases}$$

159. Решить в целых положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125, & \text{(I)} \\ x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75. & \text{(II)} \end{cases}$$

160. Показать, что система уравнений

$$\begin{cases} x!+y!=z! \\ x+y=z \end{cases}$$

имеет единственное решение $x=1$, $y=1$, $z=2$.

§ 4. Преобразования рациональных выражений

• **161.** Доказать, что если $x+\frac{1}{x}=1$, то и $x^5+\frac{1}{x^5}=1$.

162. При каких значениях a, b, c, d равенство

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{cx+d}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

является тождеством?

163. Доказать, что если $a^2+b^2=(a+b-c)^2\neq 0$, $b\neq c$, то

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

164. Доказать, что из условия $\frac{6(a+b)}{13\sqrt{ab}}=1$ следует, что $\frac{a}{b}=\frac{4}{9}$ или $\frac{a}{b}=\frac{9}{4}$.

165. Доказать, что если $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, то $b(a^2-bc)(1-ac)=a(1-bc)(b^2-ac)$.

166. Доказать, что если a, b_1, $b_2, \ldots, b_k$ связаны соотношением

$$b_k=\frac{1}{a(k-1)}\cdot(b_1b_{k-1}+b_2b_{k-2}+\ldots+b_{k-1}b_1), \text{ где } k=2, 3, \ldots,$$

то $b_n=\frac{b_1^n}{a^{n-1}}$.

167. Доказать, что произведение $P=1\cdot 2^{1/2}\cdot 4^{1/4}\cdot 8^{1/8}\cdot 16^{1/16}\ldots$ равно 4.

• **168.** Доказать, что

$$P=2\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^{2^{n-1}}}\right)=3\left(1-\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

•**169.** Доказать, что если $n \geqslant 2$, то

$$P=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

170. В многочлене $F(x, y)=2x^2-3y^2-4x-6y+1$ выделить полные квадраты.

171. Выделить полные квадраты в многочлене

$$F(x, y, z)=2x^2+6xy+y^2+2xz-z^2+1.$$

• **172.** Доказать, что при любых значениях x и y выражение

$$(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4$$

есть квадрат некоторого многочлена.

•**173.** Представить многочлен $F(x, y)=xy+x$ в виде разности двух квадратов.

• **174.** Доказать равенство

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2+\ldots+\left(2^n x-\frac{1}{2^n x}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)\left(x^2+\frac{1}{4^n x^2}\right)-2(n+1).$$

175. Доказать, что если $x+y=a+b$ и $x^2+y^2=a^2+b^2$, то $x^n+y^n=a^n+b^n$.

176. Доказать, что если $ax+by+cz=0$, то выражение

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$$

не зависит от x, y и z.

• **177.** Доказать, что

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4),$$

если $a+b+c=0$.

178. Доказать, что из соотношений

$$\frac{\dfrac{m}{(a+b)^2}+\dfrac{n}{(a+c)^2}}{a}=\frac{\dfrac{n}{(b+c)^2}-\dfrac{l}{(a+b)^2}}{b}=\frac{\dfrac{l}{(a+c)^2}+\dfrac{m}{(b+c)^2}}{c},$$

у которых числители и знаменатели отличны от нуля, следуют равенства:

$$al+bm=cn, \quad \frac{a}{(b+c)^2}=\frac{c}{(a+b)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}.$$

179. Доказать, что если a, b, c, x, y, z отличны от нуля и

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}\neq 0,$$

то

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}.$$

180. Доказать, что если $a \neq 1$, $b \neq 1$ и $a + b = 1$, то

$$A = \frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b-a)}{a^2 b^2 + 3}.$$

181. Расположить многочлен $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ по степеням $x + 1$.

182. Доказать, что выражение $a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$ отлично от нуля, если a, b, c — попарно не равные между собой числа.

183. Доказать, что если $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, то

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2.$$

184. Доказать, что если

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n+1}},$$

то имеет место равенство

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{x_2 + x_3 + \ldots + x_{n+1}}\right)^n = \frac{x_1}{x_{n+1}}.$$

185. Доказать, что если

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a + b + c = 1,$$

то

$$xy + xz + yz = 0.$$

186. При каких значениях A и B равенство

$$\frac{x^2 + 5}{x^3 - 3x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

есть тождество?

§ 5. Преобразования выражений, связанных с иррациональностями

187. Упростить выражение

$$A = \left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

188. Доказать, что $\dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}} = \sqrt{3} + 1$.

Упростить выражения (189—194):

189. $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}}$.

190. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2}$.

191. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$.

192. $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+$
$+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

194. $\sqrt[3]{3+9\sqrt[3]{12}+9\sqrt[3]{18}}$.

195. $\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$.

193. $M=\frac{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$.

196. $\frac{\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}-\sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$.

197. Доказать, что

$$\sqrt{\frac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+3\sqrt{b}}-2\sqrt{b}}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}.$$

198. Доказать, что если

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a, \text{ то } \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

199. Доказать, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

200. Показать, что если

$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0,$$

где a, b, c — рациональные числа, то $a=b=c=0$.

201. Доказать, что если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

то имеют место равенства

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots+b_n^2)=$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n)^2$$

и

$$\sqrt{(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)}=$$
$$=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\sqrt{a_3b_3}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}.$$

202. Определить, при какой зависимости между a, b, c и m радикал $\sqrt{m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ можно представить в виде суммы трех радикалов: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, где x, y, z — положительные рациональные числа.

§ 6. Преобразования выражений, связанных с логарифмической функцией

Некоторые предварительные сведения

По определению логарифма числа N по основанию a имеем

$$a^{\log_a N} = N. \qquad (1)$$

В этой формуле N — любое положительное число, a — любое положительное число, отличное от 1. При решении некоторых задач этого параграфа и уравнений, связанных с логарифмической функцией, используется формула перехода от логарифмов по основанию a к логарифмам по основанию b (и обратно):

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}, \qquad (2)$$

которая доказывается логарифмированием тождества (1) по основанию b. Из формулы (2) при $N = b$, в частности, следует, что $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

203. Найти $\log_6 9$, если известно, что $\log_6 2 = k$.

204. Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если известно, что $\lg 2 \cdot \lg 5 = k$.

205. Доказать, что из равенства $a^2 + b^2 = 7ab$ следует, что $\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$.

206. Доказать, что если $c^2 - b^2 = a^2$, $c - b \neq 1$, $c + b \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то имеет место равенство

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \log_{c-b} a.$$

207. Доказать, что если $\log_a N = p$, $\log_b N = q$, $\log_{abc} N = r$, где $N \neq 1$, то

$$N = c^{\frac{pqr}{pq - r(p+q)}}.$$

208. Доказать, что $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, $d \neq 1$.

209. Доказать равенство

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \log_{ab}\left(\frac{b}{a}\right),$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $ab \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$.

•**210.** Доказать равенство

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{n(n+1)}{2} \log_b a,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

211. Доказать, что имеет место соотношение

$$b^{\log_a c} = c^{\log_a b},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

212. Доказать, что если основание логарифма и логарифмируемое число возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится.

213. Доказать, что если $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, то $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

214. Доказать равенство

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\ldots\log_{n+1}n=\log_{n+1}2.$$

215. Доказать, что если $a^2+b^2=11ab$ и $ab\neq 0$, то имеет место равенство

$$\lg\frac{|a-b|}{3}=\frac{1}{2}(\lg|a|+\lg|b|).$$

216. Доказать, что отношение $\frac{\log_a N}{\log_b N}$ не зависит от числа N.

217. Доказать, что отношение логарифмов чисел M и N (при одном и том же основании) не зависит от основания, т. е.

$$\frac{\log_a M}{\log_a N}=\frac{\log_b M}{\log_b N},$$

где $N\neq 1$.

218. Доказать равенство $\frac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5}}=1$.

219. Доказать, что рациональное число R тогда и только тогда имеет рациональный десятичный логарифм, когда оно является целой степенью числа 10, т. е. когда $R=10^n$.

220. Даны три числа a, b, c такие, что

$$0<a\neq 1,\quad 0<b\neq 1,\quad 0<c\neq 1,\quad abc\neq 1.$$

При каком соотношении между числами a, b, c будет выполняться равенство $\log_a x+\log_b x+\log_c x=\log_{abc}x$ при всех положительных x?

§ 7. Преобразования выражений, связанных с тригонометрическими функциями

221. Доказать, что $\frac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\sqrt{3}$.

222. Доказать равенство

$$\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}85^\circ.$$

223. Доказать, что

$$\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}80^\circ-\operatorname{tg}60^\circ=8\sin 40^\circ.$$

224. Доказать, что

$$\operatorname{tg}^6 20^\circ-33\operatorname{tg}^4 20^\circ+27\operatorname{tg}^2 20^\circ-3=0.$$

225. Доказать равенство

$$\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}=-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}.$$

226. Доказать равенство

$$\sin^3\alpha\sin^3(\beta-\gamma)+\sin^3\beta\sin^3(\gamma-\alpha)+\sin^3\gamma\sin^3(\alpha-\beta)=$$
$$=3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha).$$

227. Доказать, что из равенств $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, $A+B+C=\pi$ следуют соотношения

$$a=b\cos C+c\cos B,\ b=c\cos A+a\cos C,\ c=a\cos B+b\cos A.$$

228. Доказать, что если $a=p(2\cos\varphi-\cos 2\varphi)$, $b=p(2\sin\varphi-\sin 2\varphi)$, то $a^2+b^2-p^2=2p\sqrt{(a-p)^2+b^2}$ $(p\geqslant 0)$.

229. Доказать, что если $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $A+B+C=\pi$, то имеет место соотношение

$$\sin^3\alpha=\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha).$$

230. Доказать, что если $\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\beta$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha$, где $\beta\neq k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$.

231. Доказать, что если $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$ и $\alpha+\beta\neq k\pi$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$.

232. Доказать, что если $A+B+C=\pi$, то имеет место соотношение $\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C=\sin A\sin B\sin C$.

233. Доказать, что если $m\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)$, где $\alpha-\beta\neq k\pi$ и $|m|\neq 1$, то выражение $M=\frac{1}{1-m\sin 2\alpha}+\frac{1}{1-m\sin 2\beta}$ не зависит от α и β.

234. Доказать, что если $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=A$, $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x=B$, $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z=C$ и хотя бы одна из сумм $x+y$, $x+z$, $y+z$ отлична от $\frac{\pi}{2}+k\pi$, то $\operatorname{tg}(x+y+z)=\frac{A-C}{1-B}$ (если $\operatorname{tg}(x+y+z)$ определен).

235. Доказать, что если $\cos\alpha=\frac{a}{b+c}$, $\cos\beta=\frac{b}{a+c}$, $\cos\gamma=\frac{c}{a+b}$, $a+b+c\neq 0$, то имеет место равенство $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=1$.

236. Доказать, что если $\sin z+\cos z=x$ и $\sin^3 z+\cos^3 z=y$, то $y=\frac{3x-x^3}{2}$.

237. Доказать, что из соотношений $\cos\alpha+\cos\beta=a$, $\sin\alpha+\sin\beta=b$ следует, что $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, если одновременно a и b не равны нулю.

238. Доказать, что если $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=a$, то произведение $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=a-1$.

239. Доказать, что если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos\gamma$, то $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+n\pi$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

240. Доказать, что из равенства $a\sin x+b\cos x=(2a+b)\sin^2\frac{x}{2}+b\cos^2\frac{x}{2}$ $(b\neq 0,\ b+2a\neq 0)$ следует, что либо $\operatorname{tg} x=0$, либо $\operatorname{tg} x=\frac{2a(a+b)}{b(b+2a)}$.

241. Найти α, β, γ, если известно, что $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{3}{2}$.

§ 8. Последовательности. Суммы

242. Дана последовательность $a_k=3a_{k-1}+2^{k-1}$, где $k\geqslant 2$, $a_1=1$. Выразить a_k как функцию от k.

243. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ определяется следующими условиями: $a_0=2$, $a_1=3$, $a_{n+1}=a_1a_n-a_0a_{n-1}$. Доказать, что $a_n=2^n+1$.

244. Последовательность определяется рекуррентной формулой

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n=0$$

и начальными значениями $a_1=0$ и $a_2=1$. Найти общий член последовательности.

245. Доказать, что ряд Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., который определяется условиями $a_0=1$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, обладает свойством $a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=(-1)^n$.

246. Доказать, что ряд Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., который определяется условиями $a_0=1$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, обладает свойством $a_{2n+2}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n+1}+1$.

247. Последовательность $\{a_n\}$ задана следующими рекуррентными соотношениями:

$$a_0=a_1=1,$$

$$a_0a_2+a_1^2+a_2a_0=4a_2,$$

$$a_0a_3+a_1a_2+a_2a_1+a_3a_0=8a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_ka_{n-k}+\ldots+a_na_0=2^na_n.$$

Найти общий член последовательности.

248. Последовательность определяется рекуррентной формулой

$$u_n=(\alpha+\beta)u_{n-1}-\alpha\beta u_{n-2}$$

и начальными значениями

$$u_1=\alpha+\beta,\quad u_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}.$$

Найти общий член последовательности.

249. Найти сумму n первых членов последовательности, если известно, что ее k-й член

$$a_k = 4k(k^2+1)-(6k^2+1).$$

250. Доказать, что

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

251. Найти сумму

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

252. Найти сумму

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3.$$

253. Найти сумму

$$S=2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3.$$

254. Найти сумму

$$S=-1^3+3^3-5^3+7^3-\ldots-(4n-3)^3+(4n-1)^3.$$

255. Найти сумму n первых членов ряда

$$\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+\ldots+\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2}{k}+\ldots$$

256. Дана последовательность пар чисел

$$(a, b),\quad (a_1, b_1),\quad (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n),$$

причем эти пары чисел образуются по следующему правилу:

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\frac{a_1+b}{2}, \ldots, \quad a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_n}{2}.$$

Доказать, что имеют место формулы

$$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right),\quad b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

257. Доказать, что если числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+2}$ составляют арифметическую прогрессию с разностью d, то

$$\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4a_5}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1a_2}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right).$$

258. Найти $2n+1$ последовательных целых чисел, обладающих тем свойством, что сумма квадратов $n+1$ первых из этих чисел равняется сумме квадратов n последних чисел.

259. Дана арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Известно, что в этой прогрессии есть член, являющийся полным квадратом. Доказать, что прогрессия содержит бесконечно много таких членов.

В примерах 260—289 *доказать, что*:

260. $(10^n+10^{n-1}+\ldots+1)(10^{n+1}+5)+1=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2.$

261. $2+5+11+\ldots+(3\cdot 2^{n-1}-1)=3(2^n-1)-n.$

262. $S=1+3+6+10+15+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

263. $2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)$.

264. $S=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

265. $S=2^2+4^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

266. $S=1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

267. $S=2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+4\cdot 3^2+\ldots+n(n-1)^2+(n+1)n^2=$
$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\cdot 3\cdot 4}$.

268. $S=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=$
$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

269. $S=a_0a_1a_2\ldots a_{k-1}+a_1a_2a_3\ldots a_k+\ldots+a_na_{n+1}\ldots a_{n+k-1}=$
$=a_0a_1\ldots a_{k-1}+\frac{a_na_{n+1}\ldots a_{n+k}-a_0a_1\ldots a_k}{(k+1)d}$, где $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью d.

270. $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

271. $S=\frac{1}{a_1a_2\ldots a_k}+\frac{1}{a_2a_3\ldots a_{k+1}}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}\ldots a_{n+k-1}}=$
$=\frac{1}{(k-1)d}\left(\frac{1}{a_1a_2\ldots a_{k-1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k-1}}\right)$, где $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с разностью d.

272. $S=2+\frac{8}{3}+\frac{26}{9}+\ldots+\frac{3^n-1}{3^{n-1}}=\frac{3^n(2n-1)+1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

273. $S=\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{33}{8}+\ldots+\frac{2^{2n-1}+1}{2^n}=\frac{2^{2n}-1}{2^n}$.

274. $S=\frac{5}{2}+5+\frac{19}{2}+18+\ldots+\frac{n+2^{n+1}}{2}=\frac{n(n+1)+8(2^n-1)}{4}$.

275. $S=\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$.

276. $S=\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{n(n+2)}{n+1}$.

277. $S=\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{25}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{n(2n+3)}{n+1}$.

278. $S=\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

279. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

280. $S=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

281. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots$
$\ldots+\frac{1}{2n}$.

282. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

283. $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)+\ldots$

$$\ldots+\cos(\alpha+n\beta)=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

284. $S=\cos\alpha+2\cos 2\alpha+3\cos 3\alpha+\ldots+n\cos n\alpha=$

$$=\frac{(n+1)\cos n\alpha-n\cos(n+1)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

285. $A=\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$

286. $S=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin(k-1)\alpha=$

$$=\sin\frac{k-1}{2}\alpha\sin\frac{k}{2}\alpha\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2},\quad \text{где}\quad k\geqslant 2.$$

287. $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos^3\frac{k\pi}{n}=\cos^3\frac{\pi}{n}+2\cos^3\frac{2\pi}{n}+3\cos^3\frac{3\pi}{n}+\ldots$

$$\ldots+n\cos^3\frac{n\pi}{n}=-\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{8\sin^2\frac{\pi}{2n}}+\frac{1}{8\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right).$$

288. $S=\frac{1}{4^0}\sin^4 2^0\alpha+\frac{1}{4^1}\sin^4 2^1\alpha+\frac{1}{4^2}\sin^4 2^2\alpha+\ldots+\frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha=$

$$=\sin^2\alpha-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2 2^{n+1}\alpha.$$

289. $\frac{1}{\cos x\cos y}+\frac{1}{\cos y\cos z}+\ldots+\frac{1}{\cos t\cos u}+\frac{1}{\cos u\cos v}=\frac{\operatorname{tg}v-\operatorname{tg}x}{\sin r},$
где x, y, z, $\ldots$, t, u, v — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью r.

290. Доказать, что если $\alpha=\frac{\pi}{2^{n+1}-1}$, то

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

291. Доказать, что если сумма

$$a_1\cos(\alpha_1+x)+a_2\cos(\alpha_2+x)+\ldots+a_n\cos(\alpha_n+x)$$

при $x=0$ и $x=x_1\neq k\pi$ (k — целое) обращается в нуль, то она тождественно равна нулю, т. е. при любом значении x.

292. Доказать, что сумма

$$S=\operatorname{tg}a_1\operatorname{tg}a_2+\operatorname{tg}a_2\operatorname{tg}a_3+\ldots+\operatorname{tg}a_n\operatorname{tg}a_{n+1}=\frac{\sin(a_{n+1}-a_1)}{\cos a_1\cos a_{n+1}\operatorname{tg}\alpha}-n,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью α.

293. Доказать, что

$$\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg} 2x.$$

§ 9. Уравнения и системы уравнений

294. Доказать, что если корни уравнения $x^2+px+q=0$, где p и q — целые числа, рациональны, то оба его корня — целые числа.

295. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известен один из его корней $x_1=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

296. Определить a так, чтобы уравнения $x^2-ax+1=0$, $x^2-x+a=0$ имели общий корень.

297. Известно, что числа x_1 и α являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$, а числа x_2 и α являются корнями уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$, причем $x_1\neq x_2$. Составить квадратное уравнение, корнями которого служат числа x_1 и x_2.

298. При каких значениях a уравнения $(1-2a)x^2-6ax-1=0$ и $ax^2-x+1=0$ имеют общий корень?

299. Доказать, что если корни уравнения $x^2+px+q=0$ действительны, то корни уравнения $x^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)px+q\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=0$ также действительны. Здесь параметры a, p и q — действительные числа.

300. Доказать, что разность корней уравнения

$$5x^2-2(5k+3)x+5k^2+6k+1=0$$

не зависит от k.

301. Известно, что при любом положительном λ все корни уравнения $ax^2+bx+c+\lambda=0$ действительны и положительны. Доказать, что $a=0$. (Коэффициенты a, b, c предполагаются действительными.)

302. Доказать, что для любого (комплексного) решения системы

$$x^2+y^2+xy+\frac{1}{xy}=a,\quad x^4+y^4+x^2y^2-\frac{1}{x^2y^2}-2=b^2$$

сумма x^2+y^2 действительна при любых действительных a и b, кроме $a=0$.

303. Доказать, что для того, чтобы уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ с действительными коэффициентами имело чисто мнимый (отличный от нуля) корень, необходимо и достаточно, чтобы $ad=bc$ и $ac>0$.

304. Доказать, что уравнение $x^3+ax^2-b=0$, где a и b — действительные числа и $b>0$, имеет один и только один положительный корень.

305. Доказать, что уравнение

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+n=0,$$

где n — простое, не имеет рациональных корней.

306. Доказать, что действительный корень уравнения $x^5 + x - 10 = 0$ иррационален.

307. Найти все значения k, при которых уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + k + 1 = 0$ имеет действительные и различные корни. Также определить, сколько корней этого уравнения находится в интервале $(0, \sqrt{2})$ в зависимости от k.

308. Доказать, что если система уравнений $a(x^2 + y^2) + x + y - \lambda = 0$, $x - y + \lambda = 0$ имеет действительные решения при любом значении λ, то $a = 0$.

309. Доказать, что для того, чтобы оба корня уравнения $(1 - a^2)x^2 + 2ax - 1 = 0$ принадлежали интервалу $(0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы было $a > 2$.

310. Доказать, что если между коэффициентами p и q уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, p, q, r — действительные числа, имеет место зависимость $p^2 < 3q$, то это уравнение имеет единственный действительный корень.

311. Доказать, что уравнение $x^3 - px + 1 = 0$ при p целом и большем 2 не имеет рациональных корней.

312. Число $1 + \sqrt{2}$ является корнем уравнения

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0.$$

Найти все остальные корни этого уравнения, если известно, что a и b — рациональные числа.

313. Доказать, что для того, чтобы уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имело действительные корни, достаточно, чтобы имело место неравенство $c(a + b + c) < 0$.

314. Доказать, что если между коэффициентами уравнений

$$x^2 + mx + n = 0$$

и

$$x^2 + px + q = 0$$

имеет место зависимость

$$mp = 2(n + q),$$

то хотя бы одно из этих уравнений имеет действительные корни.

315. Даны два уравнения:

$$x^2 - 5x + m = 0 \text{ и } x^2 - 7x + 2m = 0 \quad (m \neq 0).$$

Определить то значение m, при котором один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

316. Доказать, что две системы уравнений

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda A + \mu B = 0, \\ \lambda' A + \mu' B = 0 \end{cases}$$

эквивалентны, если $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ не равно нулю.

317. Доказать, что из двух уравнений

$$(a^2+b^2)x^2+2acx+c^2-b^2=0 \text{ и } 2ay^2+2cy+b=0$$

хотя бы одно имеет действительные решения.

318. Доказать, что уравнение $x^4+ax+1=0$ не имеет рациональных корней при целом a, отличном от ± 2.

319. Найти все значения k, при которых корни α, β уравнения $x^2+kx-k=0$ удовлетворяют неравенству $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>1$.

320. Числа α и β $(\alpha\neq\beta)$ являются корнями уравнения $x^3+px+q=0$ и удовлетворяют равенству $\alpha\beta+\alpha+\beta=0$. Найти соотношение между p и q и выразить третий корень через α и β.

321. Найти действительные решения системы

$$\begin{cases} y^2+z^2+2ax=3a^2, \\ x+y=2a. \end{cases}$$

322. Доказать, что если корни биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$ составляют арифметическую прогрессию, то имеет место соотношение $100q=9p^2$.

323. Доказать, что если корни одного из уравнений

$$x^2+2x+a=0,\ (a-3)x^2-2(a+1)x-(a^2-a+2)=0 \quad (a\neq 3)$$

действительны и различны, то корни другого — мнимые.

324. Установить, при каких рациональных значениях k корни уравнения

$$kx^2-(1-2k)x+k-2=0$$

рациональны.

325. Установить, при каких значениях параметра a уравнения

$$x^2-(2a+1)x+a+1=0,$$
$$2x^2-(4a-1)x+1=0$$

имеют общий корень. Найти соответствующий корень.

326. Доказать, что если $p_0+p_1+p_2=1$, где p_0, p_1, p_2 — положительные числа, а уравнение $p_0+p_1x+p_2x^2=x$ имеет корень x_0, удовлетворяющий условию $x_0<1$, то выполняется неравенство $p_1+2p_2>1$. Обратно, если $p_1+2p_2>1$, то данное уравнение имеет корень x_0, удовлетворяющий условию $x_0<1$.

327. Найти условие, при котором корни x_1, x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ удовлетворяют линейному уравнению $Ax_1+Bx_2=C$.

328. Найти все действительные решения уравнения

$$8(x^4+y^4)-4(x^2+y^2)+1=0.$$

329. Решить уравнение $2a^2x+(x^2+2)a-(x^3-2x)=0$.

330. Доказать, что уравнение $||3-2x|+2|=x$ не имеет решений.

331. Решить уравнение $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.

332. Найти все четыре корня уравнения $x^4+4x-1=0$.

333. Найти все значения a, при которых уравнение $x^5-5x+a=0$ имеет два равных корня.

334. Найти действительные корни уравнения $2x^3-6x+5=0$.

335. Найти все четыре корня уравнения

$$x^2(x-1)^2+x(x^2-1)=2(x+1)^2.$$

336. Решить уравнение $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$.

337. Решить уравнение $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=n(n-1)$.

338. Найти все корни уравнения $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

339. Решить уравнение $||2x-3|-x+1|=4x-1$.

340. Найти все действительные корни уравнения

$$x^2-2|x-a|+2|x-2|=0.$$

341. Решить уравнение $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$.

342. Найти все 8 корней уравнения

$$2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-66x^3+80x^2-72x+32=0.$$

343. Найти все четыре корня уравнения

$$x^4-2x^2-400x=9999.$$

344. Найти все четыре корня уравнения $x^4+x^2+6x-8=0$.

345. Показать, что уравнение $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-7}=5$ не имеет решений.

346. Решить уравнение

$$\sqrt{10+x+6\sqrt{x+1}}+\sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}}=7.$$

347. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

348. Решить уравнение

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1.$$

349. Установить, при каких значениях a уравнение $\sqrt{x^2-1}=a-x$ имеет решения. Найти решения.

350. Найти действительные решения уравнения

$$6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-3)(x-2)}.$$

351. Решить уравнение

$$2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}.$$

352. Решить уравнение

$$\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2+b^2-a^2}}=x-a.$$

353. Решить уравнение

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{3}}{x}.$$

354. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}}=\sqrt{2(x^3+1)}.$$

355. Найти действительные решения уравнения

$$\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=a^3\,\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}},$$

где a — действительное число.

356. Найти действительные корни уравнения $x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-2}=m$.

Решить уравнения (357—369):

357. $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$

358. $4\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}=4+x.$

359. $4x^4+1=4x\sqrt{2}\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}.$

360. $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0.$

361. $(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}+(3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=2.$

362. $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{a-x}{x-b}}.$

363. $\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}x.$

364. $\sqrt{x+1}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=1.$

365. $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}=\sqrt[3]{a^2}.$

366. $(2x-1)^2=\sqrt{x}(6x-2\sqrt{x}-3).$

367. $25x^2-11x-6\sqrt{x}-8=0.$

368. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1.$

369. $x-3\sqrt[3]{x}=a^3+\dfrac{1}{a^3}.$

370. При каких действительных a и b система уравнений

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

имеет лишь одно решение в области действительных чисел?

371. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |2x-1|-y=2, \\ x-|4-y|=-1. \end{cases}$$

372. При каком условии система уравнений

$$\begin{cases} A=x+y+z-(a+b+c)=0, \\ B=ax+by+cz-(a^2+b^2+c^2)=0, \\ C=bx+cy+az-(a^2+b^2+c^2)=0, \\ D=cx+ay+bz-4ab=0 \end{cases}$$

разрешима? Полагая, что это условие выполнено, решить данную систему.

373. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2+x_3+\ldots+x_n=1, \\ x_1+x_3+\ldots+x_n=2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=n. \end{cases}$$

374. Решить систему уравнений

$$2y-1=\sqrt{x^2-2x+1}, \quad y^2=1-|x|.$$

375. Найти рациональные решения уравнения

$$x+y=x^2+y^2.$$

376. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5. \end{cases}$$

377. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y\sqrt[3]{x^2y}=17, \\ y^2+x\sqrt[3]{xy^2}=68. \end{cases}$$

378. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-x}-\sqrt{y-x}=\sqrt{y}, \\ \sqrt{b-x}+\sqrt{y-x}=\sqrt{y}. \end{cases}$$

379. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x|+2y=5, \\ 2x+|y-1|=3. \end{cases}$$

380. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=axy, \\ y+z=byz, \\ z+x=cxz, \end{cases}$$

где $a \neq b+c$, $b \neq a+c$, $c \neq a+b$.

381. Найти действительные решения системы

$$\begin{cases} y^3+z^3=7x^3, \\ y-z-3x=0, \\ z-x=y-2. \end{cases}$$

382. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy=-1, \\ \arcsin x+\arccos y=\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

383. Доказать, что для того, чтобы система уравнений

$$x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=b^2,\ xy=z^2$$

имела хотя бы одно положительное решение, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение $|b|<a\leqslant|b|\sqrt{3}$.

384. При каких a уравнение

$$|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$$

имеет больше трех решений?

385. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y=\dfrac{5}{6}\sin a, \\ \cos y \cos x=\dfrac{5}{6}\cos a \end{cases}$$

имеет решение?

386. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=c$$

имеет единственный корень только при $c^2=2(a+b)$.

387. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y=p \sin \alpha, \\ \cos x \cos y=p \cos \alpha. \end{cases}$$

Найти все такие p, что а) найдется значение α, при котором система имеет решение, б) при любом α система имеет решение.

388. При каких значениях параметров a и b имеет решения система уравнений

$$\begin{cases} a^x+a^y=\dfrac{1}{2}, \\ x+y=b^2+1? \end{cases}$$

389. Сколько решений имеет уравнение $\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x$?

390. При каких значениях параметра p имеет решения уравнение $1 + p \sin x = p^2 - \sin^2 x$?

391. При каких a уравнение $|x + 2| - |2x + 8| = a^x$

а) имеет единственное решение?

б) имеет больше одного решения?

в) не имеет решений?

392. При каких a система

$$\begin{cases} x^y = a, \\ \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + y \end{cases}$$

имеет единственное решение?

393. При каких a и m уравнение $a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = m$ имеет решения?

394. При каких значениях параметров a и b имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} (1 + x)^y + (1 + y)^x = a^2, \\ (b^2 + 1)^{x^2 + y^2} = (b^4 + 1)^{xy}? \end{cases}$$

395. Доказать, что уравнение $\log_4 (2 - x) \cdot \log_x 2 = 1$ не имеет решений.

396. При каких значениях k уравнение $\log_{x+1} kx = 2$ имеет ровно одно решение? Найти соответствующие решения.

Решить уравнения (397—403):

397. $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0.$

398. $\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}} (x + 2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}} (4 - x)^3 + \log_{\frac{1}{4}} (x + 6)^3.$

399. $\log_{\frac{1}{2} x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$

400. $\dfrac{1}{\log_6 (3 + x)} + \dfrac{2 \log_{\frac{1}{4}} (4 - x)}{\log_2 (3 + x)} = 1.$

401. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a \ (a > 0,\ a \neq 1).$

402. $\log_{\sqrt{2} \sin x} (1 + \cos x) = 2.$

403. $(\log_a c)^{\log_b \log_a^2 x} + \log_a c = \log_a ac \left[(\log_a x)^{\log_b \log_a c}\right].$

404. Показать, что уравнение

$$\frac{\lg\left(x - \frac{21}{x}\right) - \lg 4}{\lg\left(x + \frac{21}{x}\right) - 1} = -1$$

не имеет решений.

405. Доказать, что уравнение $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}-\lg\sqrt{1-x^2}=2$ не имеет решений.

406. Решить уравнение $\log_2(x+1)^2+\log_2|x+1|=6$.

407. Решить уравнение $\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}=2$.

408. Установить, при каких значениях a уравнение

$$\log_a x+|a+\log_a x|\log_{\sqrt{x}} a=a\log_x a$$

имеет решения, и найти эти решения.

409. Доказать, что система

$$\begin{cases}(x^2+x+1)^{y-\frac{1}{2}}<1,\\ \log_y(yx-x)=1\end{cases}$$

не имеет решений.

410. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x\cdot\log_x(x-3y)=2,\\ x\cdot y^{\log_x y}=y^{\frac{5}{2}}.\end{cases}$$

411. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x|^{\lg|y|}=4,\\ xy=40.\end{cases}$$

Решить уравнения (412—424):

412. $\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x+1=\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$.

413. $a^{\frac{2}{x}}+b^{\frac{2}{x}}=m(ab)^{\frac{1}{x}}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

414. $\frac{1}{4^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{6^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{9^{\frac{1}{x}}}$.

415. $2^x-3^x=\sqrt{6^x-9^x}$.

416. $5\cos 3x+3\cos x=3\sin 4x$.

417. $\operatorname{tg}2x+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin 5x}$.

418. $\sin x+\sin 2x+2\sin x\sin 2x=2\cos x+\cos 2x$.

419. $1+\operatorname{tg}^6 x=\sec^6 x-\sec^2 x$.

420. $1+\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x$.

421. $\cos^2 3x+\frac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cos^4 x$.

422. $2\sin x+3\cos x+2\cos x\sin 2x=2+\cos 2x+3\sin 2x$.

423. $\operatorname{ctg}2x+3\operatorname{tg}3x=2\operatorname{tg}x+\frac{2}{\sin 4x}$.

424. $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x$.

425. Установить, при каких значениях a уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$ имеет решения. Найти решения.

426. Решить уравнение $\cos^4 x + 2\sin^4 x = a$.

427. Доказать, что решениями уравнения

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x},$$

где m и n — натуральные нечетные числа, являются лишь числа $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Решить уравнения (428—438):

428. $a\sin 2x + b\cos 2x + \sqrt{a^2 + b^2}\sin 6x = 0$.

429. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$.

430. $a\sin\frac{x}{2} - \left(\sin x + \sin\frac{3x}{2}\right) = 0$.

431. $\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) = \sin 2x$.

432. $\sin 2x + 3\cos 2x = a$.

433. $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

434. $\sin^2 x + a\sin^2 2x = \frac{1}{2}$.

435. $1 - \sin x(m\cos x + n\sin x) + \cos x(n\cos x - m\sin x) = 2\cos^2(x - a)$.

436. $\sin 4x\sin x - \sin 3x\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 3x + \sqrt{1 + \cos x}$.

437. $\sin 4x = m\operatorname{tg} x$ $(0 < m < 4)$.

438. $1 + 2(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = 0$.

439. Установить, при каких значениях a уравнение

$$\sin 2x + 2a\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 4a - 1$$

имеет решения? Найти решения.

440. Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.

441. Решить уравнение $b\operatorname{ctg} x - b\operatorname{tg} x - 5a\operatorname{ctg} x = 4a$.

442. Решить уравнение $\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}$.

443. Доказать, что уравнение

$$\frac{\sin 3x\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{a + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 7x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} = 0$$

имеет решение при любом $a \neq -2$. Найти решения уравнения.

444. Сколько решений в целых числах m и n имеет уравнение

$$\sin^3 \frac{(m^2+n^2)\pi}{2} + 1 = 0?$$

445. Пусть $x=0$ — корень уравнения $a \operatorname{tg}(\alpha+x) + b \operatorname{tg}(\beta+x) = 0$, где $a+b \neq 0$, $\alpha+\beta \neq k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Показать, что остальные корни этого уравнения, не равные $n\pi$ (n — целое), удовлетворяют уравнению $\operatorname{ctg}(x+\alpha+\beta)=0$.

446. Найти все значения m, удовлетворяющие неравенству $-1 < m < 1$, для которых уравнение $4^{\sin x} + m \cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0$ имеет решения, и найти эти решения.

447. Найти все действительные пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0$.

448. Доказать, что уравнение $x^2 - x\sin(xy) + 1 = 0$ не имеет решений.

449 Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

450. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

451. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\sin^2 x + 2\sin^2 y + \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^2 y = 2\left(\sqrt{2}\sin x \sin y + \sqrt{3}\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y\right).$$

452. Доказать, что уравнение $\sin\left(\frac{1}{7}\arccos x\right) = 1$ не имеет решений.

453. Доказать, что уравнение $2\operatorname{arctg} x + 3\operatorname{arcctg} x = \pi$ не имеет решений.

454. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2\sin y \sin(x+y) = \cos x. \end{cases}$$

455. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{a} = \dfrac{\operatorname{tg} y}{b} = \dfrac{\operatorname{tg} z}{c}, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$$

456. При каких значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет решения система уравнений

$$\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 = \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 = \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_4 = \ldots = \operatorname{tg} x_n \operatorname{tg} x_1 = 1?$$

457. Найти все пары чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$16\sin^2 x \sin^2 y + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 18 = 24\sin x \sin y + 6\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$$

458. Решить уравнение

$$9 \cdot 4^{\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2\right)} = 1.$$

459. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ \sin \dfrac{\pi x^2}{2} = 1. \end{cases}$$

460. Установить, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = (a^2 - 1)^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a + 1 \end{cases}$$

имеет решения. Найти все решения.

§ 10. Доказательство неравенств[1]

461. Доказать неравенство $3^{34} > 2^{51}$.

462. Доказать неравенство $202^{303} > 303^{202}$.

463. Доказать, что при любых значениях x имеет место неравенство $x^{10} - x^7 + x^4 - x^2 + 1 > 0$.

464. Доказать неравенство $2a^3 + 11 > 9a$ при $a \geqslant 0$.

465. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a^2 + b^2 = c^2$, то имеет место неравенство $a^3 + b^3 < c^3$.

466. Доказать, что если $p^3 + q^3 = 2$, то $p + q \leqslant 2$.

467. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $a^4 + a^3 b - 4a^2 b + ab + b^2 \geqslant 0$.

468. Доказать, что если $a \geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$a^4 - a^2 - 3a + 5 > 0.$$

469. Доказать, что если $a \geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$a^3 + 3a^2 + 15 > 13a.$$

470. Доказать, что если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то имеет место неравенство $ab(12 - 2a - 5b) \leqslant 2a + 5b$.

471. Доказать, что если $a > b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{a - b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}.$$

472. Доказать, что если $a \geqslant 0$, то имеет место неравенство

$$a^4 + a^3 - 8a^2 + 4a + 4 > 0.$$

473. Доказать, что если положительные числа a, b, c такие, что $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$, то имеет место неравенство $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$.

---

[1]) Большой набор задач на доказательство и решение неравенств имеется в книге: И. Х. Сивашинский, Неравенства в задачах, «Наука», 1967.

474. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$, то имеет место неравенство $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

475. Доказать неравенство $2(a^4+b^4)+19>12ab$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

476. Доказать неравенство $3a^3+7b^3\geqslant 9ab^2$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

477. Доказать неравенство $8(a^4+b^4)\geqslant(a+b)^4$.

478. Доказать, что при любом неотрицательном a имеет место неравенство $a^6+a^5+a^4+a^2+a\geqslant 6a^3-1$.

479. Доказать, что при любых действительных a, b и c имеет место неравенство $\frac{a^2+b^2+c^2+3}{2}\geqslant a+b+c$.

480. Доказать, что $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

481. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, то имеет место неравенство $4ab(3-a)-4a(1+b^2)\leqslant b$.

482. Доказать, что при любом неотрицательном a имеет место неравенство $(a^3+a^2+a+1)^2\geqslant 16a^3$.

483. Доказать, что неравенство $|2x^2-x-1|<2x-2$ не выполняется ни при каком значении x.

484. Показать, что неравенство $|x-3-x^2|<x+2$ не выполняется ни при каком значении x.

485. Доказать, что $y=\frac{2x^2+3x+18}{3x}\geqslant 5$, если $x>0$, и $y\leqslant -3$, если $x<0$.

486. Доказать, что если $0<x\leqslant a<1$, то имеет место неравенство $x+\frac{1}{x}\geqslant a+\frac{1}{a}$.

487. Доказать, что если имеют место соотношения

$$x+y+z=xyz,\quad x^2=yz,\quad xyz\neq 0,$$

где x, y, z — действительные числа, то $|x|\geqslant\sqrt{3}$.

488. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то имеет место неравенство $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant a+b+c$.

489. Доказать, что для любого действительного x имеет место неравенство $a^{2x}\leqslant\frac{1}{3}(1+2a^{3x})$, где $a>0$.

490. Пусть a, b — такие действительные числа, что $0<a<b$. Обозначим через r разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел. Доказать, что $0<r<\frac{1}{8a}(b-a)^2$.

491. Доказать, что если $c>0$, то при любых действительных a и b имеет место неравенство

$$\frac{a^2+3c^2+b^2+1}{2c}\geqslant a+b+1.$$

492. Доказать, что если $ab>0$, $ac>0$, то имеет место неравенство $\frac{2a^2+4b^2+c^2}{4ab+2ac}\geqslant 1$.

493. Доказать неравенство $\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} \geqslant 1$.

494. Доказать неравенство $(n+1)(2n+1)b \geqslant 6\left[(n+1)\sqrt{ab} - a\right]$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, n — натуральное.

495. Доказать неравенство

$$ab + bc + ca \geqslant \sqrt{abc}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

496. Доказать неравенство

$$a(1+b) + b(1+c) + c(1+a) \geqslant 6\sqrt{abc},$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

497. Доказать неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \sqrt{abc}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

498. Доказать неравенство

$$2(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leqslant 3,$$

если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

499. Доказать, что если $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$, то $a + b + c \geqslant \frac{1}{3}$.

500. Доказать неравенство $\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \geqslant \sqrt[4]{a}\,(n + 1 - \sqrt[4]{a})$, где $a \geqslant 0$, n — натуральное.

501. Доказать неравенство

$$6a + 4b + 5c \geqslant 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc},$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

502. Доказать неравенство

$$n(n+1)a + 2n \geqslant 4\sqrt{a}\,(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}),$$

где $a \geqslant 0$, n — целое неотрицательное число.

503. Доказать неравенство

$$n\sqrt{a} + \sqrt{b}\,(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}) \geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \ldots + \sqrt[4]{n}),$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, n — натуральное.

504. Доказать, что имеет место неравенство

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(a + b + c) \geqslant 9\sqrt{abc},$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

505. Доказать неравенство

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1 \leqslant \frac{2}{3}(a + b + c),$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

506. Доказать неравенство $2a^2 + 5b \geqslant 6a\sqrt{b}$, где $b \geqslant 0$.

507. Доказать, что при любом неотрицательном a имеет место неравенство $\sqrt{a}(a+1)+a(a-4)+1 \geqslant 0$.

508. Доказать неравенство

$$a+b \geqslant 2\left(ab+b\sqrt{a}+a\sqrt{b}-a^2-b^2\right),$$

где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

509. Доказать неравенство $a+b+c \geqslant 2\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bc}-\sqrt{ab}\right)$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

510. Доказать неравенство $a^2+b+\sqrt{a}+\sqrt{ab}\left(a\sqrt{b}-4\sqrt{a}\right) \geqslant 0$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.

511. Доказать, что если $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=a$, то имеет место неравенство $x^2+y^2 \geqslant \frac{4}{a}$, где $a>0$.

512. Доказать, что имеет место неравенство $0 \leqslant \frac{|x|+x}{x^2+1} \leqslant 1$.

513. Доказать, что при любом действительном значении a имеет место неравенство $\frac{1}{3} \leqslant \frac{a^2-2a+4}{a^2+2a+4} \leqslant 3$.

514. Доказать, что если $1 \leqslant a \leqslant b+c < a+1$ и $b \leqslant c$, то $a>b$.

515. Доказать, что если $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$, где x, y, z — действительные числа, то $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

516. Доказать, что $\alpha^3+\beta^3+\alpha^3\beta^3 \geqslant 0$, где α и β — корни уравнения $x^2-ax-a=0$.

517. Доказать неравенство $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9999}{1000} < 0{,}01$.

518. Доказать неравенство $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$, предварительно доказав, что $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < 3$.

519. Доказать, что если $a>1$, $b \geqslant 1$, $x>0$, то имеет место неравенство $(1+\log_a b)(\log_{ab}^2 x+1) \geqslant 2\log_a x$.

520. Доказать, что при $a>1$, $b>1$, $c>1$ имеет место неравенство

$$\log_a(bc)\left(1+\frac{1}{\log_a b^{\log_a c}}\right) \geqslant 4.$$

521. Доказать, что имеет место неравенство

$$\frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg k+\lg(k+1)}{k+1} > \frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg k}{k}.$$

522. Доказать неравенство

$$\lg\frac{n+1}{2} > \frac{\lg 1+\lg 2+\ldots+\lg n}{n}.$$

523. Доказать, что если $a>1$, $b>1$, $c>1$, то имеет место неравенство $\log_{abc}^3 a \log_a b \log_a c \leqslant \frac{1}{27}$.

524. Доказать, что если $a>1$, $c>1$, то имеет место неравенство $3\log_c a+\log_a c+\log_{a^2} c>4$.

525. Доказать неравенство $\log_c ab\cdot\log_c a^4b^9>24\log_c a\cdot\log_c b$, где $a>1$, $b>1$, $c>1$.

526. Доказать, что при любом значении α имеет место неравенство $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\sin 2\alpha(2\sin\alpha+1)<3$.

527. Пусть положительные числа a и b такие, что $a+b<\pi/2$. Доказать, что $\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b<1$.

528. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то имеет место неравенство

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\geqslant\frac{3}{4}.$$

529. Доказать, что для острых углов α и β имеет место неравенство $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

530. Доказать, что если между острыми углами α и β существует зависимость $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha$, то $\alpha<\beta$.

531. Доказать, что если $0<a<\frac{\pi}{2}$, $0<b<\frac{\pi}{2}$, $0<c<\frac{\pi}{2}$ и $a+b+c=\pi$, то имеет место неравенство $\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c>2$.

532. Показать, что неравенство $|3\sin x-4\cos x|\leqslant 5$ выполняется при любых значениях x.

533. Доказать, что $\sin^3\alpha-\sin^6\alpha\leqslant\frac{1}{4}$.

534. Доказать, что для любых α имеет место неравенство

$$-\sqrt{3}\leqslant\frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}\leqslant\sqrt{3}.$$

535. Доказать неравенство

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant\frac{6-\cos^2 x-4\sin x}{3-2\sin x}\leqslant 2.$$

536. Доказать неравенство $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\geqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<\pi$).

§ 11. Решение неравенств[1]

Решить неравенства (537—548):

537. $|x+3|-|x+1|<2$.

538. $||x|-2|\leqslant 1$.

539. $|x^2-4x|+3\geqslant x^2+|x-5|$.

540. $|x^2-2x-3|<3x-3$.

541. $x^2+(x+1)^2<\frac{15}{x^2+x+1}$.

542. $x^4-x^3-x^2-x-2\leqslant 0$.

543. $x^4-2x^3+x^2-8x-12\geqslant 0$.

544. $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2}$.

545. $\sqrt{x-b^2}+\sqrt{x}>2b$.

---

[1]) См. сноску на стр. 38.

546. $-2(x+1)>(x+2)(\sqrt{x+1}-x-2)$.

547. $(x+1)^2<4\sqrt{x}(x+3\sqrt{x}+1)$.

548. $2x(x-1)+1>\sqrt{x^2-x+1}$.

549. Доказать, что неравенство $(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2$ не имеет решений.

550. Найти все значения x, при которых выполняется неравенство $x+2a\geqslant 3\sqrt{ax}$.

551. Решить неравенство $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\geqslant\sqrt{2-x}$.

552. Решить неравенство $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$.

553. Решить неравенство $\sqrt{x+9}+\sqrt{2(x+2)}>5$.

554. Решить неравенство $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$.

555. Найти все действительные значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2x^2-y^2\leqslant -a^2+a-2, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет лишь одно решение. Найти это решение.

556. Решить неравенство $\dfrac{x-2\sqrt{x}-3}{x+\sqrt{x}-2}<0$.

557. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{a-1}-\dfrac{a}{1-a}<1-x$.

558. Решить неравенство $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^2<\dfrac{x^2+a^2}{x^2+b^2}$ $(a\neq b)$.

559. Решить неравенство $m\dfrac{x+1}{x-1}>1$.

560. Для всех действительных значений a решить неравенство $x^2+ax+1>0$.

561. Для всех действительных значений a решить неравенство $ax^2-2ax-1<0$.

562. Установить, при каких действительных значениях k соотношение $-3<\dfrac{x^2+kx-2}{x^2-x+1}<2$ выполняется при любых действительных x.

563. Дано: m — действительное число, n — натуральное число, не делящееся на квадрат натурального числа, большего 1, причем $\sqrt{n}\leqslant m$. Доказать, что существует единственное натуральное число x, удовлетворяющее условию

$$m-\sqrt{n}<\sqrt{x}\leqslant m$$

и такое, что число nx является точным квадратом.

Решить неравенства (564—584):

564. $3^x(3^x+3^{1-x}-4)<0$.

565. $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<$
$<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.

566. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{1/2}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$.

567. $4^{1+\sqrt{x}}+3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}\leqslant 2^{2x}$.

568. $(4^x-1)^2+2^{x+1}(4^x-1)<$
$<8\cdot 4^x$.

569. $|x+1|^{x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}}<1$.

570. $x^2\cdot 2^{\sqrt{x}}+x+2>2^{1+\sqrt{x}}+$ $+x^2+x\cdot 2^{\sqrt{x}}$.

571. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2>\log^2_{4x}2$.

572. $\lg x+\lg\sqrt{x}+\lg\sqrt[4]{x}+$ $+\lg\sqrt[8]{x}+\ldots>1$.

573. $(\log_x 2)(\log_{2x}2)(\log_2 4x)>1$.

574. $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right)\geqslant 1$.

575. $(\lg x+1)^2<$ $<\sqrt{\lg x}\,(\sqrt{\lg x}+1)^2$.

576. $\log_{x+a}2<\log_x 4$, где $0<a<\frac{1}{4}$.

577. $\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+a)$.

578. $\log_a(x-2)+\log_a x>1$.

579. $\sqrt{\log_2\frac{3-2x}{1-x}}<1$.

580. $x^{\log_a x}<a$ (где $x\neq 1$).

581. $\log_{\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\cos^2 2x-\sin^2 x}{2}\right)\leqslant 2$.

582. $\log_{\frac{1}{4}}(x^3+0{,}125)>$ $>\log_{\frac{1}{4}}(x+0{,}5)+1$.

583. $\log_2\log_3\frac{x+1}{x-1}<$ $<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-1}{x+1}$.

584. $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_x 3-\frac{5}{2}$.

585. Сколько существует целых чисел, взаимно простых с 96, делящихся на 7 и удовлетворяющих условию $\lg^2\frac{n}{1967}\leqslant 4$?

Решить неравенства (586—596):

586. $|\sin x|\leqslant\log_5 x\leqslant\cos x$.

587. $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x$.

588. $\frac{5}{4}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^2 2x>\cos 2x$.

589. $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|<4/\sqrt{3}$.

590. $4(x^3-2x+1)(\sin x+$ $+2\cos x)\geqslant 9|x^3-2x+1|$.

591. $\sqrt{2-\sqrt{3}\cos x+\sin x}>1$.

592. $\left(\frac{3(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-(\sin x+\cos x)}\right)^{1/2}>1$.

593. $\frac{1}{a^{1+\sin x}-1}>\frac{1}{1-a^{\sin x}}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

594. $4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{\cos^2\pi x}\leqslant 8$.

595. $\arcsin x>\arccos x$.

596. $\arcsin\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)<-\frac{\pi}{6}$.

597. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} a(x-2)+3>x,\\ (2a+3)(x-1)>(a-1)(x+2).\end{cases}$$

598. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-1}{x-2}}>2,\\ |2x-3|\leqslant 3,\\ \frac{1}{x}<1.\end{cases}$$

§ 12. Комплексные числа

Мы предполагаем, что читателю известны определение комплексных чисел и основные действия (в алгебраической форме) над ними, а именно: сложение, умножение, деление и извлечение квадратного корня.

Также считаем, что читатель знаком с геометрической интерпретацией комплексного числа.

Комплексные числа, отличные от нуля, часто бывает удобно записывать в так называемой тригонометрической форме. Вначале введем понятие аргумента комплексного числа.

Аргументом комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ называется любое из чисел φ, являющихся решением системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Заметим, что для числа $z = 0$ аргумент не определяется.

Ясно, что система (1) имеет бесконечное множество решений, причем если φ_0 является одним из решений, то все остальные решения получаются из него по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \text{ где } k \text{ — любое целое число.} \tag{2}$$

Следовательно, любое комплексное число, отличное от нуля, имеет бесконечно много аргументов и все они могут быть получены из любого из них, по формуле (2).

Ясно, что среди аргументов (φ) комплексного числа z всегда найдется один, который удовлетворяет двойному неравенству $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Часто именно это значение φ называют аргументом числа z. Иногда этот аргумент называют *главным аргументом.*

Если комплексное число $z = a + bi \neq 0$ рассматривать как вектор $\overrightarrow{OM}$, то величина угла φ, на который надо повернуть (против часовой стрелки) положительную полуось Ox до первого слияния с вектором $\overrightarrow{OM}$, является главным аргументом z (рис. 1).

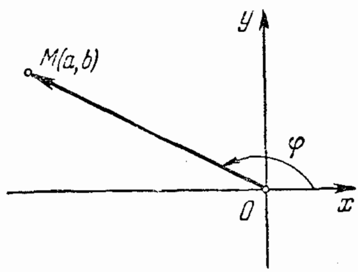

Рис. 1.

Величина любого другого аргумента, отличающегося от этого угла на $2k\pi$, служит некоторым аргументом числа z.

Аргумент числа z принято записывать так: $\arg z$. Таким образом, если φ есть один из аргументов числа z, то записываем:

$$\arg z = \varphi + 2k\pi.$$

Имеем

$$z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\, i\right).$$

В силу (1)

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{3}$$

где $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$ — ***модуль*** комплексного числа.

Формула (3) называется *тригонометрической формой комплексного числа* $z = a + bi$.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$. Легко получить формулы

$$z \cdot z_1 = \rho\rho_1[\cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1)], \tag{4}$$

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\rho}{\rho_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)]. \tag{5}$$

Из формул (4) и (5) следуют соотношения

$$|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|, \tag{6}$$

$$\arg(zz_1) = \arg z + \arg z_1 + 2k\pi, \tag{7}$$

$$\left|\frac{z}{z_1}\right| = \frac{|z|}{|z_1|}, \tag{8}$$

$$\arg\frac{z}{z_1} = \arg z - \arg z_1 + 2k\pi. \tag{9}$$

Из формул (6), (7) и (9) вытекает, что

$$|z \cdot z_1 \cdot z_2 \ldots z_{n-1}| = |z| \cdot |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_{n-1}|,$$

$$\arg(zz_1z_2 \ldots z_{n-1}) = \arg z + \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_{n-1} + 2k\pi,$$

$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z + 2k\pi.$$

В частности, полагая $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-1}$, получаем

$$|z^n| = |z|^n, \tag{10}$$

$$\arg(z^n) = n\arg z + 2k\pi. \tag{11}$$

Из формул (10), (11) следует, что

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

В частности, если $\rho = 1$, то

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Последняя формула называется *формулой Муавра.*

Корнем n-й степени (n — натуральное число) $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z называется комплексное число z_1 такое, что $z_1^n = z$.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = \rho_1(\cos\theta + i\sin\theta)$, тогда

$$z_1^n = \rho_1^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Из определения равенства двух комплексных чисел следует, что два комплексных числа равны, если равны их модули, а аргументы отличаются на $2k\pi$. Поэтому

$$\rho_1^n = \rho,\ \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}\ \left(\sqrt[n]{\rho} - \text{арифметический корень}\right),$$

$$n\theta = \varphi + 2k\pi,\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Итак,
$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right).$$

В этой формуле k принимает все целые значения. Но очевидно, что различные значения правая часть будет принимать, если для k брать n значений $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Действительно, при $k=n$ правая часть имеет то же значение, что и при $k=0$; при $k=n+1$ — то же значение, что и при $k=1$, и т. д. Ясно, что для k можно взять и другие n последовательных целых чисел.

Наконец, заметим, что Re обозначает «действительную часть комплексного числа», а Im — «мнимую часть комплексного числа».

В задачах 599 — 617 *найти множество точек, удовлетворяющих условиям:*

599. $|z+i|=|z+2|$.

600. $3\leqslant|z+i|\leqslant 5$.

601. $|z-3|=5$.

602. $2\leqslant|z|<5$.

603. $\operatorname{Im}(z)\leqslant 3$.

604. $\operatorname{Re}(z)\geqslant 2$.

605. а) $|z-z_0|<R$; б) $|z-z_0|>R$; в) $|z-z_0|=R$, где z_0 — данная точка.

606. $|z-z_1|=|z-z_2|$, где z_1 и z_2 — данные точки.

607. $|z+2|+|z-2|=5$. **608.** $|z-2|-|z+2|>3$.

609. 1) $\operatorname{Re} z\geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z<C$ (C — данное действительное число).

610. $0<\operatorname{Re}(iz)<1$.

611. 1) $\alpha<\arg z<\beta$; 2) $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$ $(-\pi<\alpha<\beta<\pi)$.

612. $|z|=\operatorname{Re} z+1$. **613.** $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$.

614. $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$, где z_1 и z_2 — данные точки.

615. $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$. **616.** $|z-1|>|z-i|$.

617. $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<2$.

В задачах 618 — 621 *требуется найти семейства линий в z-плоскости, заданных соответствующими уравнениями:*

618. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=c$ $\quad(-\infty<c<\infty)$.

619. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=c$ $\quad(-\infty<c<\infty)$.

620. $\operatorname{Re} z^2=c$ $\quad(-\infty<c<\infty)$.

621. $\operatorname{Im} z^2=c$ $\quad(-\infty<c<\infty)$.

622. Доказать, что если a и b — данные комплексные числа ($a\neq b$), PLQ — дуга окружности, соединяющая точки a и b, z — произвольная точка этой дуги ($z\neq b$), то все точки $z'=\dfrac{z-a}{z-b}$ лежат на прямолинейном луче $P'L'$, выходящем из начала координат, причем угол между положительным направлением действительной оси и этим лучом равен углу между направлением baN и касательной к дуге окружности в точке a (см. на стр. 280 рис. 6).

623. При каком условии четыре попарно не совпадающие точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой?

624. Найти на плоскости множество всех точек $M(x, y)$, координаты x и y которых удовлетворяют условию: число z^2+z+1 — действительное и положительное, где $z=x+iy$.

625. Известно, что комплексное число $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $\varphi\neq k\pi$ (k — целое число). Найти модуль и аргумент комплексного числа $A=\frac{z+1}{z-1}$.

626. Доказать, что оба значения $\sqrt{z^2-1}$ лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной биссектрисе внутреннего угла треугольника с вершинами в точках -1, $+1$ и z, проведенной из вершины z. (Обозначение: $z=a+bi$.)

627. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать, что $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ имеет $\frac{n}{(n, m)}$ различных значений, где (n, m) — наибольший общий делитель чисел m и n. Убедиться, что множества значений $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ и $\sqrt[n]{z^m}$ совпадают тогда и только тогда, когда $(n, m)=1$, т. е. n и m взаимно просты.

628. Доказать, что если $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, то $\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=$ $=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}+k\pi$, где k — целое число.

629. Доказать, что если $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ и $|z_1|=|z_2|=$ $=|z_3|=|z_4|$, то точки z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами прямоугольника либо попарно совпадают.

630. Доказать, что если $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

631. Найти вершины правильного n-угольника, если его центр находится в точке $z=0$, а одна из вершин, z_1, известна.

632. Точки z_1 и z_2 — смежные вершины правильного n-угольника. Найти вершину z_3, смежную с z_2 ($z_3\neq z_1$).

633. При каком условии три попарно не совпадающие точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой?

634. Доказать, что если $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$, то любая прямая, проходящая через начало координат, разделяет точки $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, если только эти точки не лежат на одной прямой.

635. Вычислить сумму $S=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots+\alpha^{19}$, если $\alpha=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

636. Вычислить произведение $(\alpha-\alpha^2+2\alpha^3)(2-\alpha+\alpha^2)$, где $\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

637. Найти натуральное число n, если $(1+i)^n=(1-i)^n$.

638. Доказать, что если

$$F(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

есть многочлен от $z=x+yi$ с действительными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, то $\overline{F(z)}=F(\bar{z})$, где $\overline{F(z)}$ и $\bar{z}$ — комплексные числа, соответственно сопряженные числам $F(z)$ и z.

639. Доказать, что если уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

все коэффициенты которого $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа, имеет корень $x=p+qi$, где $q \neq 0$, то оно имеет и сопряженный корень $x=p-qi$.

640. Решить уравнение $z^2+\bar{z}=0$.

641. Где расположены комплексные числа, для которых $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$?

642. Указать, где расположены точки, изображающие комплексные числа z, для которых $|z-1|=|z+1|=|z-i\sqrt{3}|$.

643. Для каждого действительного числа $a \geqslant 1$ решить уравнение $z+a|z+1|+i=0$.

644. Для каждого действительного числа $a \geqslant 0$ решить уравнение

$$2|z|-4az+1+ai=0. \qquad (1)$$

645. Решить в комплексных числах систему уравнений

$$\begin{cases} z^3+w^5=0, \\ z^2 \cdot \bar{w}^4=1. \end{cases}$$

646. Найти геометрическое место точек z, для которых $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=a$, где z_1 и z_2 — данные комплексные числа ($z_1 \neq z_2$) и a — данное положительное число, не равное 1.

647. Решить уравнение $(z+1)^m-(z-1)^m=0$, где m — натуральное число.

648. Доказать, что $\cos(7 \arccos x)$, где $|x| \leqslant 1$, равен многочлену 7-й степени относительно x.

649. Найти аргумент комплексного числа $z_1=z^2-z$, если $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

650. Найти аргумент комплексного числа $z_1=z^3+z^2$, если $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

651. Найти аргумент комплексного числа $z_1=z^2+\bar{z}$, если $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

652. Найти натуральное число x, если $(3+4i)^{x-1}-(1+i)^4=5^x$.

653. Найти комплексное число z, если $z=\bar{z}$.

654. Решить уравнение $\bar{z}=-4z$.

655. Найти комплексное число z из уравнения $z^2+|z|=0$.

656. При каких действительных x и y числа $z=-3+x^2yi$ и $w=x^2+y+4i$ будут комплексно сопряженными?

657. Найти комплексное число z, удовлетворяющее двум равенствам: $\left|\frac{z-4}{z-6-5i}\right|=2$, $\left|\frac{z-1+4i}{z-8i}\right|=\frac{3}{2}$.

658. На плоскости построены точки с координатами $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, соответствующие комплексным числам $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ (x_1, y_1, x_2, y_2 — действительные числа). Где находится точка, соответствующая числу $z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$?

659. Три вершины параллелограмма находятся в точках, соответствующих комплексным числам z_1, z_2, z_3. Найти комплексные числа, соответствующие четвертой вершине.

660. Доказать, что сумма всех корней n-й степени (n — натуральное число, большее 1) из любого комплексного числа равна нулю.

661. Найти произведение всех n корней уравнения $x^n = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

662. Доказать (с помощью комплексных чисел), что если каждое из этих чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то произведение этих чисел представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел.

663. Доказать, что $\frac{1}{2^{100}}\sum\limits_{k=0}^{100} C_{100}^{k}\left(\sqrt{3}\,i\right)^k = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.

664. Найти (с помощью комплексных чисел) суммы

$$S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots,$$
$$S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$$

665. Найти (с помощью комплексных чисел) сумму

$$S = C_n^1 - 3C_n^3 + 3^2 C_n^5 - 3^3 C_n^7 + \ldots$$

§ 13. Исследование функций и построение графиков [1])

Найти области определения функций (666—693):

666. $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3}$.

667. $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{4-x}$.

668. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

669. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

670. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$.

671. $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - 2|x-1|}}$.

672. $y = \frac{1}{x^3 - |x|x + 4|x| - 4}$.

673. $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$.

674. $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$.

675. $y = \arccos(4x^3 - 6x + 1)$.

676. $y = \arcsin(3x + 5) + \arcsin(1 - x)$.

677. $y = \arcsin\frac{2}{|x| - 1} - \arccos|x - 4|$.

---

[1]) Более обширный набор задач по исследованию функций и построению их графиков, а также теоретические сведения по этому разделу имеются в книге: И. Х. Сивашинский, Элементарные функции и графики, «Наука», 1968.

678. $y=\log_{\cos x}\sin x.$

679. $y=\sqrt{\log_a\cos(2\pi x)}$, где $a>1.$

680. $y=\arcsin(1-x)+\log_{|x|}(2x-1).$

681. $y=\lg(x^2-x-6)+\lg(4-x^2).$

682. $y=\lg|4-x^2|+\lg(3^x-3^{-x}).$

683. $y=\sqrt{\lg(\cos 2\pi x)}+\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}.$

684. $y=\lg(x-1)+\arcsin(1+\operatorname{tg}^2\pi x).$

685. $y=\frac{\log_2(x-3)}{\log_2(\log_3|x^2-1|)}.$

686. $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}.$

687. $y=\log_{x-1}|x|+\sqrt{1-x^2}.$

688. $y=\lg\left(\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}-2\right).$

689. $y=\lg(\arcsin\lg x).$

690. $y=\lg(10^x+2\cdot5^{2x}-4^x).$

691. $y=\frac{\lg(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5})}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}}.$

692. $y=\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt[4]{(\operatorname{arctg}x)^2-4\operatorname{arctg}x+3}}.$

693. $y=\lg\left(\frac{6-\lg x-\lg^2 x}{\lg x}\right).$

Найти множество значений функций (694—699):

694. $y=x^4+(1-x)^4.$

695. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$

696. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$

697. $y=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}.$

698. $f(x, y)=\cos x+\cos y+\cos(x+y).$

699. $f(x, y)=\cos(x+y)+\sin(x-y).$

700. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{x(x-1)}{x(x-1)+2}.$

701. Найти наибольшее значение функции $y=\frac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+4}.$

702. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}.$

703. Найти наименьшее значение функции $y=x-1+\frac{1}{x-3}$, если $x>3$.

704. Найти наибольшее значение функции $y=3x+4\sqrt{1-x^2}.$

705. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{-x^2+4x+12}-\sqrt{-x^2+2x+3}.$

706. Найти наибольшее значение функции $y=x^2\sqrt{a^2-x^2}.$

707. Найти наибольшее значение функции $y=\sin^4 x+\cos^6 x.$

708. Установить, при каких значениях x функция

$$y=2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x+5$$

достигает наибольшего и наименьшего значения.

709. Какие значения может принимать функция $y=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$, если $0<x<\frac{\pi}{2}$?

710. Найти наименьшее значение функции

$$y=(\sin x+\cos x)^3+\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}.$$

711. Найти наименьшее положительное значение суммы $x+y$, если $(1+\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} y)=2$.

712. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\arcsin x \arccos x$.

713. Найти наименьшее значение функции

$$f(x, y)=x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}.$$

714. Найти наибольшее значение функции $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

715. Найти максимум выражения $M=\frac{(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)^2}{x_1^2+\ldots+x_n^2}$.

Построить графики функций (716—743):

716. $y=x+|x|+|x-1|$.

717. $y=||x-1|-1|$.

718. $y=\frac{x^2-x}{|x|}+\frac{x^2+x}{|x+1|}+\frac{x^2-1}{|x-1|}$.

719. $y=|x^2+x|-x^2$.

720. $y=x^2+\frac{x^2}{|x|}+\frac{(x+1)^2}{|x+1|}$.

721. $y=|x^2-|x|-2|$.

722. $y=|x^2+x|-x^2-x$.

723. $y=\frac{(x-1)^3}{|x-1|}+\frac{|x^3|}{x}$.

724. $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

725. $y=x^2-x^3$.

726. $y=\frac{729}{16}x^4(1-x)^2$.

727. $y=\frac{2x}{4x^2+1}$.

728. $y=\frac{|x|+1}{x^2+1}$.

729. $y=\frac{2|x|}{x^2+1}$.

730. $y=\frac{2}{x^2-x+1}$.

731. $y=\frac{4|x|}{x^2-x-2}$.

732. $y=\frac{2x^3}{3x^3-4x^2+2x-1}$.

733. $y=27\cdot\frac{x+1}{x^3}$.

734. $y=\frac{16x^4+3}{16x}$.

735. $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

736. $y=\frac{x^5-x^3}{|x|}$.

737. $y=\operatorname{sign}\arcsin x$.

738. $y=|x|\operatorname{sign}(1-x^2)$.

739. $y=2+\operatorname{sign}\operatorname{tg} x$.

740. $y=\operatorname{sign}\cos x$.

741. $y=\frac{1+|\cos x|}{\sin|x|}$.

742. $y=\left|\frac{1}{2}\log_2 x^2\right|$.

743. $y=\frac{1}{2}\log_2(|x|-1)^2$.

§ 14. Пределы

Для решения задач этого параграфа достаточно тех сведений по теории пределов, которые излагаются в элементарных учебниках по алгебре и элементарным функциям.

744. Доказать, что а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=0$ и что б) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}-x)=\infty$.

745. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=0$, где a — постоянная величина.

В примерах 746—774 доказать, что:

746. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=0.$

747. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=3.$

748. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt[3]{23+x}-3}=27.$

749. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}=\infty.$

750. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=4.$

751. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=-\infty.$

752. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=\frac{1}{2}.$

753. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)=1.$

754. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)=\frac{a+b}{2}.$

755. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right]=0.$

756. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{3}.$

757. $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=-2.$

758. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}=0.$

759. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=3a.$

760. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

761. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}.$

762. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$

763. $$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\begin{cases}-1, & \text{если } 0<a<1,\\ 0, & \text{если } a=1,\\ 1, & \text{если } a>1.\end{cases}$$

764. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

765. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{1+a^x}=\begin{cases}0, & \text{если } 0<a<1,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } a=1,\\ 1, & \text{если } a>1.\end{cases}$

766. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}.$

767. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}.$

768. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}=100.$

769. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right]=1.$

770. $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$ при $0<k<1$.

771. $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ при $|a|<1$.

772. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, где a — любое положительное число.

773. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}=2^n.$

774. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$

775. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!}{(n+1)!}$.

776. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}.$

777. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\infty.$

778. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right)=\frac{1}{3}.$

779. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$.

780. Доказать, что при произвольном $k>0$ и $a>1$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^k}=+\infty,$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,$

а при $k>0$ и $a<1$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(a^x\cdot x^k)=0.$

781. Доказать, что при $a>1$ и при произвольных положительных k, n

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\log_a x)^k}{x^n}=0,$ 2) $\lim\limits_{x\to0}[x^n(\log_a x)^k]=0.$

782. Доказать, что числовая последовательность, общий член которой $x_n=(-1)^n$, не имеет предела.

783. Доказать, что число 1 не является пределом последовательности, общий член которой $x_n=\frac{n+1}{2n+3}$.

784. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\frac{2}{3}$.

785. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\frac{b^2-a^2}{2}$.

786. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha^n}{(\sin\alpha)^m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \infty, & \text{если } n<m,\\ 1, & \text{если } n=m,\end{cases}$$

где n и m — натуральные числа и $\alpha>0$.

787. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

788. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

789. Доказать, что при $x\neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

В примерах 790—809 *доказать, что*:

790. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

791. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=-3$.

792. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}=$

$=-2\sin a$.

793. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=-\frac{16}{\pi}$.

794. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=-\frac{3}{2}$.

795. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\frac{\pi}{2}$.

796. $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$.

797. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x\right]=1$.

798. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}=\frac{1}{2}$.

799. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=6$.

800. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{1}{8}$.

801. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}$.

802. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$.

803. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}kx}{x}=k$.

804. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

805. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=2.$

806. $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin\dfrac{x-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right)=-\dfrac{a}{\pi}.$

807. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}=\cos^3 a.$

808. $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right]=\dfrac{2}{\pi}.$

809. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n+1}}-1\right)n=1$, где a постоянно и отлично от нуля.

§ 15. Разные задачи

810. Решить уравнение

$$2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1.$$

811. Решить неравенство

$$\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1.$$

812. Найти необходимое и достаточное условие, при котором квадратный трехчлен ax^2+bx+c является полным квадратом, т. е. квадратом двучлена первой степени.

813. Функция $f(n)$ определена для натуральных значений n и удовлетворяет условиям

$$f(n)=f(n-1)+a^n, \qquad f(1)=1.$$

Найти $f(n)$.

814. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2+ax+a-1=0$ действительны, различны и больше 2?

815. Установить, при каких действительных значениях a трехчлен

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

положителен для всех действительных значений x.

816. Для каких значений k уравнение

$$(k-2)x^2-2(k+3)x+4k=0$$

имеет один корень больше 3, а другой меньше 2?

817. Определить общий вид многочленов четвертой степени $f(x)$, которые удовлетворяют тождеству $f(x)=f(1-x)$.

818. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)-2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=0$, то $f(x)\equiv 0$ (возможно, кроме значения функции $f(x)$ в точках $x=0$, $x=1$).

819. Известно, что

$$F\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2F\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x.$$

Найти $F(x)$.

820. Доказать, что не существует отличного от нуля многочлена $M(x, y)$ такого, что в результате подстановки $y=a^x$ $(a \neq 1)$ получится тождество $M(x, a^x) \equiv 0$ в интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. доказать, что при основании, отличном от 1, функция $y=a^x$ не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению. Иначе говоря, показательная функция трансцендентна. Также доказать, что логарифмическая функция тоже трансцендентна.

821. В многочлене

$$f(x, y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2-31x-22y+35,$$

если заменить y на $5-3x$, то получится многочлен $\varphi(x)$ второй степени относительно x. Найти такие значения коэффициентов A, B и C, при которых многочлен $\varphi(x)$ был бы тождественно равен нулю. Доказать, что для этих значений A, B и C многочлен $f(x, y)$ разлагается на произведение двух множителей первой степени.

822. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет только одно решение (a, x, y — действительные числа).

823. Найти общий вид многочлена, произведение которого на x^2-1 содержит лишь два члена.

824. Доказать, что если $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ являются корнями целой рациональной функции

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

то имеют место следующие формулы (формулы Виета):

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_3\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

825. Доказать, что многочлен $F(x)=x^{991}+x^{344}+1$ делится на x^2+x+1.

826. Известно, что все корни многочлена

$$F(x)=x^3+px+q,$$

где p и q действительны и $q \neq 0$, действительны. Доказать, что коэффициент p отрицателен.

827. Доказать, что если a — иррациональное число, то функция $y=\cos ax+\cos x$ не является периодической.

828. Найти такое значение m, при котором корни биквадратного уравнения $x^4-(3m+5)x^2+(m+1)^2=0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти эти корни.

829. Дано уравнение параболы

$$y=x^2+(2m+1)x+m^2-1.$$

Найти координаты вершины параболы и доказать, что если m пробегает все действительные числа, то вершина параболы описывает прямую линию.

830. Доказать, что если a_1, a_2, a_3, a_4 являются четырьмя последовательными коэффициентами в разложении $(1+x)^n$ по степеням x, то имеет место равенство

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

831. Найти такие действительные числа a, b, p, q, чтобы равенство $(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$ выполнялось при любых действительных значениях x.

832. Доказать, что система соотношений $x^2+y^2+2x\leqslant 1$, $x-y+a=0$ имеет единственное решение только в двух случаях: когда $a=3$ или когда $a=-1$. Найти соответствующие решения.

833. Доказать, что если каждый коэффициент в разложении $x(1+x)^n$ разделить на показатель степени x, при которой этот коэффициент стоит, то сумма полученных частных будет равна $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

834. Найти такие значения a и b, для которых многочлен $x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ обращается в точный квадрат.

835. Даны три утверждения:

1) Уравнение $x+\frac{1}{x}=a$ не имеет действительных решений.

2) Справедливо равенство $\sqrt{a^2-4a+4}=2-a$.

3) Система $\begin{cases} x+y^2=a, \\ x-\sin^2 y=-3 \end{cases}$ имеет единственное решение.

При каких a два из этих утверждения будут верны, а одно — неверно?

836. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}=\frac{2^n S_{n+1}}{n+1},$$

где a_1, a_2, ..., a_{n+1} составляют арифметическую прогрессию, а S_{n+1} — сумма ее $n+1$ первых членов.

837. Доказать, что число 101 010 нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

838. Доказать, что число $1+\sqrt{3}$ не может быть представлено в виде квадрата числа $a+b\sqrt{3}$, где a и b — рациональные числа.

839. Найти три несократимые дроби $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$, составляющие арифметическую прогрессию, если известно, что

$$\frac{y}{u}=\frac{x+x^2}{u+u^2}, \qquad \frac{z}{u}=\frac{y+y^2}{u+u^2}.$$

840. Доказать, что коэффициент при x^l в разложении по степеням x выражения

$$[(l-2)x^2+nx-l](x+1)^n$$

равен nC_n^{l-2}.

841. Доказать равенство

$$16C_{2n}^2+32C_{2n}^4+48C_{2n}^6+\ldots+8(2n-2)C_{2n}^{2n-2}+8\cdot 2nC_{2n}^{2n}=n\cdot 2^{2n+2}.$$

842. Пусть m и n — натуральные числа и

$$T_m^{(k)}=1^k+2^k+\ldots+m^k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k T_m^{(k)}=(m+1)^n-1.$$

843. Найти все рациональные значения x, при которых $\sqrt{x^2+x+1}$ есть рациональное число.

844. При каком значении a многочлен $F(x, y, z)=x^2-y^2-z^2-ayz$ делится на $x+y+z$?

845. Определить числа a и b так, чтобы многочлен $f(x)=6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ делился без остатка на многочлен $g(x)=x^2-x+b$.

846. Многочлен P при делении на $x+1$ дает в остатке 4, а при делении его на x^2+1 остаток равен $2x+3$. Каков будет остаток от деления многочлена P на $(x+1)(x^2+1)$?

847. Найти остаток от деления на многочлен x^4+x^2+1 многочлена P, если известно, что при делении многочлена P на x^2+x+1 получается остаток, равный $1-x$, а при делении на x^2-x+1 остаток равен $3x+5$.

848. Найти коэффициенты a, b и c многочлена ax^4+bx^3+c, зная, что произведение остатков, получающихся от деления его на x^2+1 и на x^3+1, равно $2(x-1)(x-5)$.

849. При каких значениях a и n (n — натуральное, отличное от 1) многочлен $x^n-ax^{n-1}+ax-1$ делится на $(x-1)^2$?

850. Определить a, b и c так, чтобы многочлен

$$f(x)=x^4+4mx^3+6ax^2+4bx+c$$

делился без остатка на многочлен

$$\varphi(x)=x^3+3mx^2+3ax+b.$$

851. Найти такие значения a и b, чтобы многочлен

$$x^4+(a-b)x^3+(a-b)x+b^2$$

делился без остатка на многочлен $x^2-(a-b)x+b^2$.

852. Найти такие m, n и p, чтобы многочлен

$$f(x)=x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p$$

делился без остатка на произведение $(x^2-1)(x-3)$.

853. Найти такие значения a, b, c и d, чтобы многочлен $x^4-x^3+ax^2+bx+c$ при делении на x^2+d давал остаток, равный x, а при делении на x^2-d давал остаток, равный $-x$.

854. Доказать, что многочлен

$$F(x)=x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n+1-n^2x^{n-1}$$

делится на $(x-1)^3$ при любом натуральном $n\geqslant 2$.

855. Известно, что при делении многочлена $F(x)$ на двучлен $x-1$ получается остаток, равный 3, а при делении $F(x)$ на двучлен $x+1$ остаток равен 1. Найти остаток от деления $F(x)$ на двучлен x^2-1.

856. Найти условие, при котором многочлен

$$x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1$$

делится на многочлен

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1.$$

857. Доказать, что при любом натуральном $n>2$ многочлен

$$F(x)=(x^n-1)(x^{n-1}-1)(x^{n-2}-1)$$

делится на многочлен

$$f(x)=(x-1)(x^2-1)(x^3-1).$$

858. Доказать, что если $mn+pq$ делится на $m-p$, то $mq+np$ тоже делится на $m-p$.

§ 1. Целые числа

1. Пусть искомое число есть $10a+b$. Тогда в силу условия задачи имеем

$$10a+b=a+b^2,$$

откуда

$$9a=(b-1)\,b.$$

Ясно, что произведение $b(b-1)$ должно быть кратно девяти. Но так как $b\leqslant 9$, $b-1\leqslant 8$, то $b(b-1)$ делится на 9 лишь тогда, когда $b=9$. Следовательно, $9a=9\cdot 8$, откуда $a=8$, и искомое число есть 89.

2. Если $n\geqslant 2$, то, полагая $x=n^2$, получим $nx+1=n^3+1=(n+1)\times$ $\times(n^2-n+1)$ — составное число, так как $n+1\geqslant 3$ и $n^2-n+1\geqslant 3$.

Если же $n=1$, то при $x=3$ получим $nx+1=1\cdot 3+1=4$ — составное число.

3. Исследуемое число имеет вид $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=$ $=100(a^2+a)+25=100a(a+1)+25$. Ясно, что третья справа цифра числа $(10a+5)^2$ является первой справа в числе $a(a+1)$. Но так как $a(a+1)$ — произведение двух последовательных чисел, то оно четное, т. е. оканчивается на четную цифру. Следовательно, третья цифра справа в исследуемом числе является четной.

4. П е р в о е р е ш е н и е. Имеем

$$\left(2^{2^n}+1\right)+3=2^{2^n}+4=2^2\left(2^{2^n-2}+1\right)=2^2\left(4^{2^{n-1}-1}+1\right).$$

Число $2^{n-1}-1$ нечетное, и, следовательно,

$$4^{2^{n-1}-1}+1=(4+1)\,Q,\ \text{где } Q \text{ — целое.}$$

Итак, $\left(2^{2^n}+1\right)+3=2^2(4+1)\,Q=10P$, где P — целое. Отсюда следует, что

$$2^{2^n}+1=10P-3.$$

Правая часть последнего равенства представляет собой число, оканчивающееся на 7, а потому число $2^{2^n}+1$ оканчивается на 7, что и требовалось доказать.

В т о р о е р е ш е н и е. При $n=2$ число $2^{2^n}+1=2^{2^2}+1=17$ оканчивается на 7. Допустим, что утверждение задачи верно при $n=k$, т. е. что

$$2^{2^k}+1=10Q+7,\ \text{где } Q \text{ — целое.}$$

Отсюда следует, что

$$2^{2^k}=10Q+6.$$

Тогда

$$2^{2^{k+1}}=\left(2^{2^k}\right)^2=(10Q+6)^2=10P+6,\ \text{где } P \text{ — целое.}$$

Следовательно,

$$2^{2^{k+1}}+1=10P+7.$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции утверждение задачи верно для любого натурального $n \geqslant 2$.

5. Пусть $\overline{xyz}$ — искомое число в десятичной записи. Значит, в силу условия задачи имеем $\overline{xyz}=1{,}5x!\,y!\,z!$. Ясно, что искомое число кратно трем. Наименьшее трехзначное число, кратное трем, есть 102, а наибольшее 999. Следовательно, имеем $102 \leqslant \overline{xyz} \leqslant 999$, или $68 \leqslant \frac{2}{3}\overline{xyz} \leqslant 666$. Но так как $\frac{2}{3}\overline{xyz}=x!\,y!\,z!$, то $68 \leqslant x!\,y!\,z! \leqslant 666$. Из этих неравенств следует, что ни одна из цифр искомого числа не может быть больше 5, так как $6!=720>666$. Докажем теперь, что искомое число $\overline{xyz}$ делится на 4. Для этого надо установить, что $x!\,y!\,z!$ должно делиться на 8. В самом деле, чтобы получить в произведении факториалов цифр искомого числа число, не меньшее 68, необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

Одна из цифр x, y, z	Вторая из цифр x, y, z	Третья из цифр x, y, z
0, 1	0, 1, 2	не меньше 5
0, 1	3	не меньше 4
0, 1	4	не меньше 3
0, 1	5	любая
2	2	не меньше 4
2	3	не меньше 3
2	4	не меньше 2
2	5	любая
не меньше 3	не меньше 3	не меньше 3

В произведении факториалов во всех возможных случаях будет множитель 8. Итак, искомое число делится на 4 и на 3 и его цифры удовлетворяют условиям

$$0<x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant 5,\ 0 \leqslant z \leqslant 5.$$

Для z, как последней цифры искомого числа (четного), при этих условиях возможны только три значения, а именно: $z=0$, $z=2$ и $z=4$.

Для y при $z=2$ возможны значения 1, 3, 5, так как две последние цифры должны обозначать число, делящееся на 4, т. е. при $z=2$ для двух последних цифр искомого числа возможны комбинации 12, 32, 52. Из тех же соображений при $z=0$, $z=4$ для y получаем 0, 2 и 4, т. е. комбинации двух последних цифр: 00, 04, 20, 24, 40 и 44. Из предыдущих рассуждений следует, что испытанию подлежат только числа 432, 252, 552, 504, 324, 540, 144, 444. Из этих чисел только 432 удовлетворяет условию $\frac{3}{2}\cdot 4!\,3!\,2!=3\cdot 24\cdot 6=432$.

6. Искомое число $N=1000x+100(y+1)+10x+y=z^2$, откуда $101(10x+y)=z^2-100=(z+10)(z-10)$.

Так как 101 — число простое, то $z+10$ или $z-10$ должно делиться на 101. Но $z<100$, так как квадратный корень из четырехзначного числа есть число двузначное. Отсюда заключаем, что $z+10=101$ и $z=91$. Таким образом, искомое число $z^2=91^2=8281$.

7. Искомое число $N=1000x+100x+10y+y$, или $N=11(100x+y)$, где $0<x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$. Так как N является точным квадратом, то $100x+y$

должно делиться на 11, а значит, и число $x+y=(100x+y)-99x$ должно делиться на 11. Так как $0<x+y\leqslant 18$, то

$$x+y=11.$$

Отсюда $100x+y=99x+11=11(9x+1)$. В силу условия задачи $9x+1$ должно быть точным квадратом. Положим $9x+1=n^2$, где $n\leqslant 9$. Отсюда

$$x=\frac{n^2-1}{9}=\frac{(n+1)(n-1)}{9}.$$

Выражения $n+1$ и $n-1$ разнятся друг от друга на 2 и потому не могут оба одновременно делиться на 3. Поэтому одно из них должно равняться 9. Но $n-1$ не может быть равно 9, так как тогда n равнялось бы 10. Итак, $n+1=9$, $n=8$, $9x=8^2-1=63$, $x=7$, $y=4$. Следовательно, искомое число есть $7744=88^2$.

Отв. 7744.

8. В силу условия задачи имеем

$$A=10^{2m-1}+10^{2m-2}+\ldots+10+1=\frac{10^{2m}-1}{9},$$

$$B=10^m+10^{m-1}+\ldots+10+1=\frac{10^{m+1}-1}{9},$$

$$C=6\cdot 10^{m-1}+6\cdot 10^{m-2}+\ldots+6\cdot 10+6=6\cdot\frac{10^m-1}{9}.$$

Тогда

$$A+B+C+8=\frac{10^{2m}-1+10^{m+1}-1+6\cdot 10^m-6+72}{9}=$$

$$=\frac{10^{2m}+10^m(10+6)+64}{9}=\frac{10^{2m}+16\cdot 10^m+64}{9}=\left(\frac{10^m+8}{3}\right)^2.$$

Так как 10^m+8 при любом натуральном m делится на 3 (сумма цифр равна 9), то $A+B+C+8$ является квадратом натурального числа, что и требовалось доказать.

9. Предположим, что число $2k$, где k — нечетное, равно m^2-n^2, т. е.

$$2k=(m+n)(m-n). \qquad (1)$$

Докажем, что числа $m+n$ и $m-n$ одинаковой четности. Если $m+n=2l$ — четное, то $m=2l-n$, а потому $m-n=2l-2n=2(l-n)$ — четное. Если же $m+n=2p-1$, то $m=2p-n-1$, а потому $m-n=2p-2n-1=2(p-n)-1$ — нечетное. Впрочем, одинаковая четность чисел $m+n$ и $m-n$ следует из тождества $m+n=(m-n)+2n$, т. е. $m+n$ отличается от $m-n$ на четное число $2n$. Следовательно, в правой части равенства (1) стоит или четное число, кратное четырем, или нечетное число. Поскольку левая часть равенства (1) — четное число, не кратное четырем, то это равенство невозможно, что и требовалось доказать.

10. В силу условия имеем

$$2(100a+10b+c)=(100b+10c+a)+(100c+10a+b),$$

или, после упрощения, $7a=3b+4c$, или $3(a-b)=4(c-a)$. Отсюда следует, что $a-b$ делится на 4, т. е. $a-b=4m$. Из равенства $3(a-b)=4(c-a)$ получаем теперь $c-a=3m$. Сложив равенства $a-b=4m$ и $c-a=3m$, получим $c-b=7m$. Но $|c-b|\leqslant 9$, а потому m может принимать лишь значения -1, 0, 1. Если $m=1$, то из равенства $c-b=7m$ получаем, что возможны лишь случаи: 1) $c=7$, $b=0$; 2) $c=8$, $b=1$; 3) $c=9$, $b=2$. А так как $c-a=3m$, то отсюда получаем для a значения 4, 5, 6 соответственно. Таким образом, получаем три числа: 407, 518, 629. Аналогично при $m=-1$ находим числа 370, 481, 592.

Наконец, при $m=0$ получаем $a-b=4m=0$, $c-a=3m=0$, т. е. $a=b=c$. Это дает еще 9 чисел: 111, 222, ..., 999. Значит, требованию задачи удовлетворяют 15 чисел.

11. При $x=0$ функция $y=c$, т. е. c — целое число; при $x=1$ функция $y=a+b+c$, т. е. $a+b+c$ — целое число; поэтому $a+b$ — целое; при $x=-1$ функция $y=a-b+c$ — целое число. Имеем $(a+b+c)+(a-b+c)=2a+2c$ — целое число. Так как $2c$ — целое число, то и $2a$ — целое число. Итак, числа $2a$, $a+b$, c суть целые.

Остается доказать обратное утверждение. Имеем

$$ax^2+bx+c=2a\cdot\frac{x(x-1)}{2}+(a+b)x+c.$$

Так как по условию $2a$, $a+b$ и c — целые, $\dfrac{x(x-1)}{2}$ также целое при всех целых x, то ax^2+bx+c есть целое число при любых целых x.

12. Если $p=3$, то $8p^2+1=73$ — простое число. Остается доказать, что если $p\neq 3$, то $8p^2+1$ — составное число.

Из всех чисел, кратных трем, только 3 является простым. Пусть p не кратно трем, т. е. $p=3k\pm 1$. Тогда $8p^2+1=8(3k\pm 1)^2+1=8(9k^2\pm 6k+1)+1=72k^2\pm 48k+9=3(24k^2\pm 16k+3)$. Следовательно, если $p=3k\pm 1$, то $8p^2+1$ — составное число. Итак, только при $p=3$ число $8p^2+1$ — простое.

13. Пусть натуральное число d — наибольший общий делитель данных чисел. Тогда $21n+4=dk$, $14n+3=dl$, где k и l — натуральные числа. Умножив обе части первого равенства на 2, а второго на 3, получим

$$42n+8=2dk,\ 42n+9=3dl.$$

Вычитая почленно из полученного второго равенства первое, находим $(3l-2k)\,d=1$. Отсюда следует, что $d=1$. Таким образом, рассматриваемые числа имеют при любом натуральном n общий наибольший делитель $d=1$, а потому они взаимно просты.

14. Первое решение. Пусть N — искомое число. Тогда $N^{2k}=(N^k)^2$. Из того, что некоторая степень числа оканчивается на 5, следует, что любая степень этого числа оканчивается на 5. Поэтому $N^k=10n+5$, а потому

$$N^{2k}=(10n+5)^2=3\cdot 10^3+x\cdot 10^2+y\cdot 10+5,$$

или

$$100n^2+100n+25=3000+100x+10y+5. \qquad (1)$$

Отсюда сразу видно, что $y=2$.

Вычтя из обеих частей равенства (1) число 25 и сократив на 100, получим $n^2+n=30+x$. Так как x — однозначное число, то $30\leqslant 30+x<40$; следовательно, и $30\leqslant n^2+n<40$. Отсюда $4<n<6$. Таким образом, n может принимать единственное значение 5, а потому искомое число есть 55.

Второе решение. Так как

$$(10a+5)^2=100a(a+1)+25,$$

то для того, чтобы получить квадрат числа, оканчивающегося цифрой 5, достаточно, отбросив эту пятерку, умножить число, обозначенное остальными цифрами, на следующее за ним число из натурального ряда чисел и к полученному произведению приписать справа 25.

Примеры: 1) $35^2=1225$, где $12=3\cdot 4$; 2) $145^2=21025$, где $210=14\cdot 15$.

Как видно из первого решения, четная степень любого числа есть квадрат некоторого числа.

Поэтому упомянутое в условии четырехзначное число имеет вид $\overline{3\alpha 25}$, где число $\overline{3\alpha}$ — произведение двух последовательных натуральных чисел; так как $30\leqslant\overline{3\alpha}\leqslant 39$, то $\overline{3\alpha}=5\cdot 6$ — единственно возможное решение.

Таким образом, $3025 = 55^2$; учитывая, что равенство $N^k = 55$ при натуральных N и k возможно лишь при $k = 1$, $N = 55$, заключаем, что искомое число равно 55.

15. Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое число (в десятичной записи). В силу условия задачи имеем

$$\overline{xyzt} - \overline{tzyx} = 360.$$

Отсюда следует, что

$$999(x - t) + 90(y - z) = 360.$$

Очевидно, что это равенство возможно только тогда, когда $x - t = 0$, т. е. когда $x = t$. Но тогда $y - z = 4$. Далее, так как последние три цифры искомого числа составляют арифметическую прогрессию, то $y - z = z - t$, или $y - z = z - x$. Отсюда следует, что $y - x = 2z - 2x = 8$. Так как $0 < x \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 9$, то $x = 1$, $y = 9$. Таким образом, искомое число есть 1951.

16. В силу условия задачи имеем $100 \leqslant N^2 < 1000$, следовательно, $10 \leqslant N \leqslant 31$. Пусть

$$N^2 = 100x + 10y + z, \qquad (1)$$

$$xyz = N - 1. \qquad (2)$$

Ясно, что $z \neq 0$, так как произведение $xyz \neq 0$. Также ясно, что z — нечетное число, так как в противном случае, т. е. если бы z было четным, в силу (1) N было также четным, а в силу (2) N было бы нечетным. Кроме того, z может быть равным только 1, 5, 9, так как квадрат числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 7. Далее, легко заметить, что из всех нечетных трехзначных чисел, оканчивающихся на 1, 5, 9, являющихся полными квадратами, произведение цифр которых меньше 31, имеются всего 4, а именно: 121, 225, 361, 441. Но из этих чисел нам надо выбрать только те, которые удовлетворяют (2). Очевидно, что только число 361 удовлетворяет этому условию. Итак, имеется единственное число (361), которое удовлетворяет условиям задачи.

17. Имеем

$$N = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2n-1} - 2(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) =$$
$$= \frac{10^{2n} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{9} = \frac{(10^n - 1)^2}{9} =$$
$$= \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2 = 333\ldots333^2.$$

Следовательно, $\sqrt{N} = \underbrace{333\ldots333}_{n \text{ цифр}}$.

18. Так как число $9^n = (3^n)^2$ есть квадрат нечетного числа, то остаток от деления этого числа на 4 равен 1, ибо $(2n + 1)^2 = 4(n^2 + n) + 1$. Следовательно, $9^n = 4k + 1$, где k — натуральное, откуда $9^n + 1 = 4k + 2$ не делится на 4, а поэтому число $9^n + 1$ не может оканчиваться двумя (и более) нулями. Одним же нулем число $9^n + 1$ может оканчиваться. Если n нечетно, то $9^n + 1 = (10 - 1)^n + 1$ оканчивается на 0.

19. Так как $9^9 = (8 + 1)^{9^9} = 8m + 1$, то имеем $7^{9^{9^9}} = 7^{8m+1} = (7^4)^{2m} \cdot 7 = 2401^{2m} \cdot 7 = (2400 + 1)^{2m} \cdot 7 = (100n + 1) \cdot 7 = 100 \cdot 7n + 7$, где n — натуральное число. Таким образом, рассматриваемое число оканчивается на 07.

20. Предположим противное, т. е.

$$a \cdot 19^3 + b \cdot 19^2 + c \cdot 19 + d = 1,$$
$$a \cdot 62^3 + b \cdot 62^2 + c \cdot 62 + d = 2.$$

Вычитая почленно из второго равенства первое, получим

$$a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1.$$

Отсюда видно, что левая часть делится на разность $62-19=43$, а правая часть не делится на 43. Следовательно, наше допущение неверно. Этим и доказывается утверждение задачи.

21. Введем обозначение $n^k=m$. Тогда число

$$N=2m^3+4m+10=(3m^3+3m+9)-(m-1)m(m+1)+1.$$

Так как $3m^3+3m+9$ кратно трем и произведение $(m-1)m(m+1)$ также делится на 3, поскольку $m-1$, m, $m+1$ являются последовательными натуральными числами, то при делении числа N на 3 получается остаток, равный 1. Следовательно, число N не может быть произведением трех и более последовательных чисел. Остается доказать, что N не может быть произведением двух последовательных чисел. Действительно, если бы N можно было представить как произведение двух последовательных чисел, то при делении его на 3 был бы остаток 0 или 2, а мы выше убедились, что остаток от деления числа N на 3 равен 1. Значит, число N нельзя представить как произведение двух последовательных чисел. Итак, число N не есть произведение последовательных натуральных чисел.

22. Пусть $22x+5=N^2$, где N — натуральное число. Тогда $N^2-16=11(2x-1)$. Отсюда ясно, что или $N-4$, или $N+4$ делится на 11. Но так как N — нечетное число, то $N=(2k-1)\,11\pm 4$, т. е. или $N=22k-7$, или $N=22k-15$. Таким образом,

$$x_1=\frac{N^2-5}{22}=\frac{(22k-7)^2-5}{22}=22k^2-14k+2,$$

$$x_2=\frac{N^2-5}{22}=\frac{(22k-15)^2-5}{22}=22k^2-30k+10,$$

где k — любое натуральное число.

23. Так как $1!+4!+5!=1+24+120=145$, то число 145 действительно удовлетворяет условию задачи. Остается доказать, что других трехзначных чисел, для которых выполнялось бы условие задачи, нет. Пусть трехзначное число есть

$$100x+10y+z=x!+y!+z!.$$

Так как $7!>1000$, то каждая цифра числа $100x+10y+z$ не превышает 6. Также ясно, что ни одна из цифр x, y, z не может быть равна и 6, так как если хотя бы одна цифра была равна 6, то было бы $x!+y!+z!>700$, между тем как $100x+10y+z<700$. Докажем, что хотя бы одна из цифр x, y, z равна 5. В самом деле, если бы ни одна из цифр x, y, z не равнялась 5, то было бы $x!+y!+z!<100$, а $100x+10y+z$ должно быть трехзначным числом. Следовательно, по крайней мере одна цифра 5. Так как $x!+y!+z!\leqslant 5!+5!+5!=360$, то цифра сотен ($x$) может принимать только три значения: 1, 2, 3. Но ясно, что $x\neq 3$, так как даже $3!+5!+5!<300$. Убедимся также, что $x\neq 2$. Действительно, если бы $x=2$, то трехзначное число было бы больше 200, что возможно только тогда, когда $y=z=5$; но число 255 не удовлетворяет условию задачи. Итак, $x=1$. Следовательно, трехзначное число имеет вид $100+50+z=150+z$ (если $y=5$) или $100+10y+5=105+10y$ (если $z=5$). В первом случае $150+z=5!+1!+z!$, т. е. $150+z=121+z!$. Тогда $29=z[(z-1)!-1]$, это невозможно ни при каких $z\leqslant 5$. Во втором случае $105+10y=1!+5!+y!$, т. е. $y[10-(y-1)!]=16$, т. е. y есть одно из четных чисел 0, 2, 4. Следовательно, данное число надо искать среди трех следующих чисел: 105, 125, 145. Имеем

$$1!+0!+5!=122,$$

$$1!+2!+5!=123,$$

$$1!+4!+5!=145.$$

Таким образом, лишь число 145 удовлетворяет условию задачи.

24. В силу условия задачи должно иметь место равенство

$$1000a + 100b + 10c + a = (5c + 1)^2,$$

где $0 < a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$, $0 \leqslant c \leqslant 9$, или

$$1000a + 100b - 25c^2 = 1 - a.$$

Поскольку левая часть этого равенства делится на 25, то правая часть также делится на 25, что возможно только при $a = 1$.

Следовательно, имеем $c^2 = 4(b + 10)$. Значит, число $b + 10$ должно быть полным квадратом, и, учитывая, что b — цифра, находим $b = 6$, а потому $c = 8$. Итак, искомое число есть 1681.

25. Записав искомые числа в виде $10a + b$, имеем согласно условию задачи

$$(10a + b) - (10b + a) = k^2 \quad (k \text{ — целое}),$$

или

$$9(a - b) = k^2.$$

Отсюда видно, что $a - b$ есть точный квадрат. Следовательно, либо $a - b = 0$, либо $a - b = 1$, либо $a - b = 4$, либо $a - b = 9$. (Ясно, что разность цифр не может быть больше 9.)

Если $a - b = 0$, т. е. $a = b$, то существует 9 чисел, удовлетворяющих условию, а именно:

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

Если $a - b = 1$, т. е. $a = b + 1$, то существует также 9 чисел:

10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

Если $a - b = 4$, т. е. $a = b + 4$, то получается всего 6 чисел:

40, 51, 62, 73, 84, 95.

Наконец, если $a - b = 9$, то получается только одно число 90, удовлетворяющее условию задачи. Итак, мы установили, что всего имеется $9 + 9 + 6 + 1 = 25$ чисел, для которых выполняется условие задачи.

26. Первое решение. Пусть меньшим из трехзначных чисел будет

$$M = 100a + 10b + c.$$

Тогда в силу условия задачи второе трехзначное число

$$N = 800a + 80b + 8c.$$

Отсюда сразу видно, что $a = 1$. По условию разность $N - M$ является точным квадратом, т. е.

$$700 + 70b + 7c = x^2. \qquad (1)$$

Так как разность $N - M$ является также трехзначным числом, то из (1) следует, что

$$700 \leqslant x^2 < 1000,$$

$$26 < x < 32. \qquad (2)$$

Из равенства (1) следует, что x должно делиться на 7, а потому из (2) вытекает, что x может быть равно только 28. Таким образом, $7M = x^2 = 784$; $M = 112$, $N = 896$. Итак, искомое число равно $112\,896 = 336^2$ или 896 112. Но последнее число не может быть точным квадратом, так как оно оканчивается на 2.

Второе решение. Пусть искомое число $N = 1000x + y$ (x и y — трехзначные числа). Тогда согласно условию задачи либо $x = 8y$, либо $y = 8x$. Если $x = 8y$, то $N = 8001y = 3^2 \cdot 7 \cdot 127y$. Так как число N — полный квадрат, то N должно делиться на $3^2 \cdot 7^2 \cdot 127^2$ (поскольку 7 и 127 — простые числа). Но этого не может быть, так как N — шестизначное число. Значит, остается рассмотреть случай $y=8x$. В этом случае имеем $N=1008x=3^2\cdot 2^4\cdot 7\cdot x$. Следовательно, число N должно делиться на $7\cdot 1008$. Но так как $y=8x$, то первая цифра числа x (а значит, и первая цифра числа N) равна 1. Таким образом, $100\,000\leqslant N<200\,000$. Далее, имеем $\frac{100\,000}{7056}\leqslant k=\frac{N}{7056}<\frac{200\,000}{7056}$, откуда $15<k<29$. Но число $k=\frac{N}{7056}$ должно быть полным квадратом, как отношение полных квадратов, являющееся целым числом. Следовательно, либо $k=16$, либо $k=25$. Легко проверить, что $k\neq 25$. Остается $k=16$. Итак, $N=7056\cdot 16=112\,896$.

Отв. 112 896.

27. Первое решение. Равенство $(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$ должно выполняться при любом значении x, в том числе и при $x=10$. Пусть $x=10$, тогда имеем $1=(10+b)(10+c)$. Так как $10+b$ и $10+c$ — целые числа, то последнее равенство возможно только при $10+b=10+c=1$ или при $10+b=10+c=-1$, откуда $b=c=-9$ или $b=c=-11$. Таким образом, имеем $(x-a)(x-10)+1=(x-9)^2$ или $(x-a)(x-10)+1=(x-11)^2$.

Поскольку эти равенства должны выполняться при любом x, то мы можем положить $x=0$. Тогда имеем $10a+1=81$ или $10a+1=121$, откуда $a=8$ или $a=12$.

Второе решение. Имеем

$$(x-a)(x-10)+1=x^2-(a+10)x+10a+1.$$

Из этого соотношения видно, что корнями данного многочлена являются числа $\frac{a+10\pm\sqrt{(a-10)^2-4}}{2}$. Следовательно,

$$(x-a)(x-10)+1=\left(x-\frac{a+10+\sqrt{(a-10)^2-4}}{2}\right)\left(x-\frac{a+10-\sqrt{(a-10)^2-4}}{2}\right).$$

Исходя из единственности разложения квадратного трехчлена на линейные множители, заключаем, что один корень есть $-b$, а второй есть $-c$. Но так как b и c — целые числа, то число $(a-10)^2-4$ должно быть полным квадратом, что возможно лишь при $(a-10)^2-4=0$, откуда $|a-10|=2$. Следовательно, $a=8$ или $a=12$.

28. Пусть $4x$ и $4y$ — искомые числа. Для определенности пусть $x>y$. В силу условия задачи имеем

$$64(x^3-y^3)=91\cdot 64k. \qquad (1)$$

При $k>1$ правая часть этого равенства есть число, изображенное больше чем четырьмя цифрами, что противоречит условию. Следовательно, имеет место лишь $k=1$. Таким образом, равенство (1) принимает вид

$$x^3-y^3=91,$$

или

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=91=7\cdot 13=1\cdot 91.$$

Так как оба сомножителя левой части этого равенства — целые положительные числа и притом $x-y<x^2+xy+y^2$, то возможны только два случая:

$$x-y=7,\quad x^2+xy+y^2=13 \qquad (2)$$

и

$$x-y=1,\quad x^2+xy+y^2=91. \qquad (3)$$

В случае (2) имеем

$$x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=49+3xy>13.$$

Следовательно, случай (2) отпадает. В случае (3) имеем $x=y+1$, а потому

$$x^2+xy+y^2=(y+1)^2+y(y+1)+y^2=91, \text{ или } y^2+y-30=0,$$

откуда $y_1=5$, $y_2=-6$. Но по условию $y>0$, поэтому имеем лишь $y=5$, а значит, $x=6$. Искомые числа: $4x=4\cdot 6=24$, $4y=4\cdot 5=20$.

29. Имеем $(m+3n)(m-3n)=p$, где p — простое число, $p>0$. Поэтому $m+3n=p$, $m-3n=1$, т. е.

$$m=3n+1. \tag{1}$$

Из неравенства $2\lg\frac{n}{m}+1<0$ следует, что $\frac{10n^2}{m^2}<1$, или

$$10n^2<m^2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$10n^2<(3n+1)^2, \text{ или } n^2-6n-1<0,$$

откуда

$$3-\sqrt{10}<n<3+\sqrt{10},$$

т. е.

$$0<n\leqslant 6, \text{ так как } n \text{ — натуральное число.}$$

1) Если $n=1$, то $m+3n=6n+1=7$ — простое число.
2) Если $n=2$, то $m+3n=6n+1=13$ — простое число.
3) Если $n=3$, то $m+3n=6n+1=19$ — простое число.
4) Если $n=4$, то $m+3n=6n+1=25$ — не простое число.
5) Если $n=5$, то $m+3n=6n+1=31$ — простое число.
6) Если $n=6$, то $m+3n=6n+1=37$ — простое число.

Поэтому n может принимать только следующие значения: 1, 2, 3, 5 и 6. Так как $m=3n+1$, то получим все 5 пар чисел (m, n): 1) (4; 1); 2) (7; 2); 3) (10; 3); 4) (16; 5); 5) (19; 6).

30. Имеем $m=6m_1$, $n=6n_1$, где m_1 и n_1 — взаимно простые числа. Пусть a — наименьшее общее кратное чисел m и n; тогда $a=6m_1\cdot n_1=n\cdot m_1$ — шестизначное число, но так как n — трехзначное число, то и m_1 — трехзначное число; кроме того, $m=6m_1$ — трехзначное число.

Наименьшее трехзначное число — 100; поэтому

$$600\leqslant m<999 \text{ (999 не делится на 6).}$$

Следовательно,

$$\frac{600}{350}\leqslant\frac{m}{350}<\frac{999}{350},$$

или

$$1\frac{5}{7}\leqslant\frac{m}{350}<2\frac{299}{350}.$$

Но $1\frac{5}{7}\approx 1{,}7>\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57$, $\quad 2\frac{299}{350}<\pi$; поэтому

$$\frac{\pi}{2}<\frac{m}{350}<\pi,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{m}{350}<0.$$

Отв. $\operatorname{tg}\frac{m}{350}<0$.

31. Найдем сумму n последовательных нечетных чисел

$$(2a+1),\ (2a+3),\ (2a+5),\ \ldots,\ (2a+2n-1).$$

Эти числа являются последовательными членами арифметической прогрессии поэтому их сумма равна

$$\frac{2a+1+2a+2n-1}{2}\cdot n=(2a+n)\,n.$$

Число $(2a+n)\,n$ делится на n и на $(2a+n)$, а поэтому не может быть простым числом.

32. Допустим, что n не представляет собою степень числа 2; тогда

$$n=2^m\cdot k,$$

где k — нечетное число, большее единицы, m — целое число или нуль. В этом случае

$$2^n+1=2^{2^m\cdot k}+1=(2^{2^m})^k+1^k$$

делится на $(2^{2^m}+1)$, как сумма одинаковых нечетных степеней двух чисел. Поэтому при сделанном допущении 2^n+1 не простое число.

Следовательно, если 2^n+1 — простое число, то $n=2^m$.

Примеры.

$$2^4+1=17 \text{ — простое число,}$$

$$2^8+1=257 \text{ — простое число.}$$

33. Пусть согласно условию $2^p-1=p_1$ — простое число. Тогда

$$N=2^{p-1}(2^p-1)=2^{p-1}\cdot p_1.$$

Делителями числа N, кроме самого N, являются числа

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^{p-2},\ 2^{p-1},\ p_1,\ 2p_1,\ 2^2p_1,\ 2^3p_1,\ \ldots,\ 2^{p-2}\cdot p_1.$$

Обозначая буквой S сумму всех этих делителей, получим

$$S=(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p-1})+p_1\cdot(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p-2})=$$
$$=(2^p-1)+p_1(2^{p-1}-1)=(2^p-1)+(2^p-1)\cdot(2^{p-1}-1)=(2^p-1)\cdot 2^{p-1}=N,$$

т. е. $S=N$, что и требовалось доказать.

Пример. Условию задачи удовлетворяет, например, $p=3$. В этом случае $2^p-1=2^3-1=7$ — простое число; тогда $N=2^{p-1}(2^p-1)=$ $=2^2\cdot 7=28$. Делителями числа 28, не считая самого этого числа, являются числа 1, 2, 4, 7 и 14. Их сумма $1+2+4+7+14=28$.

34. Пусть $d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots,\ d_k$ — все делители числа n, расположенные в порядке их возрастания; при этом $d_1=1$, $d_k=n$.

Если $k=2m$ — четное число, то

$$n=d_1\cdot d_k,\quad n=d_2\cdot d_{k-1},\ \ldots,\ n=d_m\cdot d_{m+1}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$n^m=d_1\cdot d_2\cdot d_3\ldots d_m\cdot d_{m+1}\ldots d_{k-2}d_{k-1}\cdot d_k,$$

или

$$d_1\cdot d_2\cdot d_3\ldots d_{k-1}\cdot d_k=n^{k/2}.$$

Если $k=2m+1$ — нечетное число, то

$$n=d_1\cdot d_{2m+1},\quad n=d_2\cdot d_{2m},\quad n=d_3\cdot d_{2m-1},\ \ldots,\ n=d_m\cdot d_{m+2},$$
$$n=d_{m+1}\cdot d_{m+1},\quad n=d_{m+2}\cdot d_m,\ \ldots,\ n=d_{2m}\cdot d_2,\quad n=d_{2m+1}\cdot d_1.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$n^{2m+1}=(d_1\cdot d_2\cdot d_3\ldots d_{2m+1})^2,$$

откуда

$$d_1\cdot d_2\cdot d_3\ldots d_{2m+1}=n^{k/2}.$$

Впрочем, эту задачу можно решить иначе. Имеем

$$n=d_1\cdot d_k,\quad n=d_2\cdot d_{k-1},\ \ldots,\ n=d_k\cdot d_1.$$

Перемножив эти k равенств, получим $n^k = (d_1 \cdot d_2 \dots d_k)^2$, откуда имеем $d_1 \cdot d_2 \dots d_k = n^{k/2}$.

35. Пусть $x^2 - y^2 = p$, где x и y — натуральные числа; тогда имеем $(x+y)(x-y) = p \cdot 1$, а поэтому

$$\begin{cases} x+y=p, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, найдем, что

$$x = \frac{p+1}{2}, \quad y = \frac{p-1}{2}. \tag{1}$$

Таким образом, любое нечетное простое число может быть представлено в виде разности квадратов двух целых чисел, а именно чисел (1).

36. Предположим, что имеется такое простое трехзначное число $\overline{xyz}$ (x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц). Пусть d — разность прогрессии, тогда $y = x + d$, $z = x + 2d$.

Следовательно, сумма цифр числа $x + y + z = x + x + d + x + 2d = 3x + 3d = 3(x + d)$ кратна трем, а потому и само число делится на 3, т. е. оно не простое, что и требовалось доказать.

37. Пусть искомое число слагаемых n, а их сумма

$$100x + 10x + x = 111x.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111x = 3 \cdot 37 \cdot x, \tag{1}$$

или

$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x.$$

Так как x — однозначное число, то, вообще говоря, x может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ясно, что ни n, ни $n+1$ не могут принимать эти значения, так как в противном случае $\frac{n(n+1)}{2}$ не есть трехзначное число. Следовательно, n или $n+1$ могут быть равны только 37.

Пусть $n = 37$, тогда $n + 1 = 38$, а $\frac{n(n+1)}{2} = 703$, но это противоречит (1), так как из (1) следует, что $\frac{n(n+1)}{2}$ должно быть кратно трем, а 703 не кратно 3.

Теперь пусть $n + 1 = 37$, тогда $n = 36$. В этом случае $\frac{n(n+1)}{2} = 666$. Таким образом, число слагаемых равно 36.

38. Легко проверить, что

$$\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = 4C_{2n-1}^{n} - C_{2n+1}^{n}.$$

Так как C_m^k — целое, что утверждение задачи верно.

§ 2. Делимость. Сравнения

39. Имеем $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$. Возведя обе части этого сравнения в десятую степень, получаем $5^{20} \equiv 1 \pmod{24}$. Таким образом, искомый остаток есть 1.

40. Так как

$$37 = 7 \cdot 5 + 2, \quad 16 = 7 \cdot 2 + 2, \quad 23 = 7 \cdot 3 + 2,$$

то

$$37 \equiv 2 \pmod 7, \quad 16 \equiv 2 \pmod 7, \quad 23 \equiv 2 \pmod 7.$$

Возвышая обе части каждого из этих сравнений в степень, получим

$$37^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod 7,$$
$$16^{n+1} \equiv 2^{n+1} \pmod 7,$$
$$23^n \equiv 2^n \pmod 7.$$

Сложив эти сравнения, получим

$$37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n \equiv 2^n \cdot 7 \pmod 7,$$

т. е. $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ делится на 7.

41. Представим 112 в виде произведения двух взаимно простых чисел: $112 = 7 \cdot 16$. Так как $3299 = 7 \cdot 471 + 2$, то

$$3299 \equiv 2 \pmod 7;$$

поэтому

$$3299^5 \equiv 32 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7;$$

далее,

$$3299^5 + 6 \equiv 10 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7;$$

следовательно,

$$(3299^5 + 6)^6 \equiv 3^6 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7,$$

так как $3^6 = 729 = 7 \cdot 104 + 1$. Поэтому

$$(3299^5 + 6)^{18} \equiv 1^3 \pmod 7,$$

или

$$(3299^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod 7. \qquad (1)$$

Также имеем $3299 = 16 \cdot 206 + 3$, а поэтому

$$3299 \equiv 3 \pmod{16};$$

далее,

$$3299^5 = 243 \pmod{16} \equiv 3 \pmod{16},$$

так как $243 = 16 \cdot 15 + 3$; следовательно,

$$3299^5 + 6 \equiv 9 \pmod{16}.$$

Поэтому

$$(3299^5 + 6)^2 \equiv 1 \pmod{16},$$

так как $81 = 16 \cdot 5 + 1$. Следовательно, $(3299^5 + 6)^{18} \equiv 1^9 \pmod{16}$, или

$$(3299^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod{16}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2), учитывая, что 7 и 16 — взаимно простые числа, следует

$$(3299^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod{112},$$

а поэтому $(3299^5 + 6)^{18} - 1$ делится на 112.

42. Так как

$$3^5 = 243 = 181 + 62, \quad 4^5 = 1024 = 181 \cdot 6 - 62,$$

то

$$3^5 \equiv 62 \pmod{181}, \quad 4^5 \equiv -62 \pmod{181}.$$

Возвышая обе части каждого из этих сравнений в 21-ю степень, имеем

$$3^{105} \equiv 62^{21} \pmod{181}, \quad 4^{105} \equiv -62^{21} \pmod{181}.$$

Сложив эти сравнения, получим

$$3^{105}+4^{105}\equiv 0 \pmod{181};$$

следовательно $3^{105}+4^{105}$ делится на 181.

43. Так как

$$5^5=3125=11\cdot 284+1,\quad 4^5=1024=11\cdot 93+1,\quad 3^5=243=11\cdot 22+1,$$

то

$$\begin{array}{l|l|l}
5^5\equiv 1 \pmod{11}, & 4^5\equiv 1 \pmod{11}, & 3^5\equiv 1 \pmod{11},\\
5^{5k}\equiv 1 \pmod{11}, & 4^{5m}\equiv 1 \pmod{11}, & 3^{5n}\equiv 1 \pmod{11}.\\
5^{5k+1}\equiv 5 \pmod{11}, & 4^{5m+2}\equiv 4^2 \pmod{11}, & \\
 & 4^{5m+2}\equiv 5 \pmod{11}, &
\end{array}$$

Сложив сравнения

$$5^{5k+1}\equiv 5 \pmod{11},\quad 4^{5m+2}\equiv 5 \pmod{11},\ 3^{5n}\equiv 1 \pmod{11},$$

получим

$$5^{5k+1}+4^{5m+2}+3^{5n}\equiv 11 \pmod{11},$$

или

$$5^{5k+1}+4^{5m+2}+3^{5n}\equiv 0 \pmod{11},$$

т. е. $5^{5k+1}+4^{5m+2}+3^{5n}$ делится на 11.

44. Имеем $111=3\cdot 37$. Так как

$$N\equiv 1 \pmod 3 \quad \text{и} \quad N\equiv 33\equiv -4 \pmod{37},$$

то

$$N=1+3x \quad \text{и} \quad N=-4+37y,$$

где x и y — некоторые целые числа. Следовательно,

$$1+3x=-4+37y,$$

откуда находим

$$x=12y+\frac{y-5}{3}.$$

Так как x и y — целые, то и число $\frac{y-5}{3}$ должно быть целым, т. е. $y-5$ делится на 3. Значит, $y-5=3k$, т. е. $y=3k+5$, где k — некоторое целое число. Вспоминая, что $N=-4+37y$, получаем

$$N=-4+37(3k+5)=-4+185+111k=181+111k;$$

следовательно,

$$N\equiv 181 \pmod{111}\equiv 70 \pmod{111}.$$

Поэтому при делении N на 111 получается в остатке 70.

45. Так как

$$7a+3\equiv 3 \pmod 7,\quad 7b+25\equiv -3 \pmod 7,$$

то, возвышая обе части каждого из этих сравнений в нечетную степень $2n+1$, имеем

$$(7a+3)^{2n+1}\equiv 3^{2n+1} \pmod 7,$$
$$(7b+25)^{2n+1}\equiv -3^{2n+1} \pmod 7.$$

Сложив эти сравнения, получим

$$(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}\equiv 0 \pmod 7;$$

следовательно, $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1}$ делится на 7.

46. Так как

$$28=25+3, \quad 47=25\cdot 2-3, \quad 72=25\cdot 3-3,$$

то

$$72\equiv -3 \pmod{25}, \qquad 47\equiv -3 \pmod{25}, \qquad 28\equiv 3 \pmod{25}.$$

Возвышая обе части каждого сравнения в степень, получим

$$72^{2n+2}\equiv 3^{2n+2} \pmod{25}, \tag{1}$$

$$47^{2n} \equiv 3^{2n} \pmod{25}, \tag{2}$$

$$28^{2n-1}\equiv 3^{2n-1} \pmod{25}. \tag{3}$$

Складывая сравнения (1) и (3), а затем вычитая сравнение (2), получим

$$72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1}\equiv 3^{2n+2}-3^{2n}+3^{2n-1} \pmod{25}.$$

Но

$$3^{2n+2}-3^{2n}+3^{2n-1}=3^{2n-1}(3^3-3+1)=3^{2n-1}\cdot 25,$$

поэтому

$$72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1}\equiv 3^{2n-1}\cdot 25 \pmod{25}\equiv 0 \pmod{25},$$

т. е. $72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1}$ делится на 25.

47. Число $39=3\cdot 13$ — произведение двух взаимно простых чисел. Так как $9674=3\cdot 3225-1$, то

$$9674\equiv(-1) \pmod 3,$$

а поэтому

$$9674^6\equiv 1 \pmod 3, \text{ так как } (-1)^6=1.$$

Далее,

$$9674^6+28\equiv 29 \pmod 3\equiv -1 \pmod 3, \text{ так как } 29=3\cdot 10-1.$$

Поэтому

$$(9674^6+28)^{15}\equiv -1 \pmod 3, \text{ так как } (-1)^{15}=-1.$$

Также имеем $9674=13\cdot 744+2$, а поэтому

$$9674\equiv 2 \pmod{13};$$

следовательно,

$$9674^6\equiv 64 \pmod{13}\equiv -1 \pmod{13}, \text{ так как } 64=13\cdot 5-1.$$

Далее,

$$9674^6+28\equiv 27 \pmod{13}\equiv 1 \pmod{13};$$

поэтому

$$(9674^6+28)^{15}\equiv 1 \pmod{13}.$$

Итак,

$$(9674^6+28)^{15}\equiv -1 \pmod 3,$$

$$(9674^6+28)^{15}\equiv 1 \pmod{13},$$

а поэтому

$$(9674^6+28)^{15}=-1+3x \text{ и } (9674^6+28)^{15}=1+13y,$$

где x и y — некоторые целые числа. Следовательно,

$$-1+3x=1+13y,$$

откуда находим

$$x=4y+\frac{y+2}{3}.$$

Так как x и y — целые, то и $\frac{y+2}{3}$ должно быть целым, т. е. $y+2$ делится на 3. Значит, $y+2=3k$, т. е. $y=3k-2$, где k — некоторое целое число. Вспоминая, что $(9674^6+28)^{15}=1+13y$, получаем

$$(9674^6+28)^{15}=1+13(3k-2)=39k-25.$$

Следовательно,

$$(9674^6+28)^{15}\equiv 14 \pmod{39},$$

а поэтому остаток при делении $(9674^6+28)^{15}$ на 39 равен 14.

48. Так как

$$2^4=16=13+3,\quad 7^2=49=13\cdot 4-3,$$

то

$$2^4\equiv 3 \pmod{13},\quad 7^2\equiv -3 \pmod{13}.$$

Возвышая обе части каждого из этих сравнений в 15-ю степень, получим

$$2^{60}\equiv 3^{15} \pmod{13},\quad 7^{30}\equiv -3^{15} \pmod{13},$$

сложив эти сравнения, получим

$$2^{60}+7^{30}\equiv 0 \pmod{13};$$

следовательно, $2^{60}+7^{30}$ делится на 13.

49. Первое решение. 1) При $n=1$ утверждение верно, так как

$$(a-b)\vdots(a-b).$$

2) Допустим, что $(a^n-b^n)\vdots(a-b)$ при $n=k$, т. е. $(a^k-b^k)\vdots(a-b)$; следовательно,

$$a^k-b^k=(a-b)\,c.$$

Тогда при $n=k+1$ имеем

$$a^{k+1}-b^{k+1}=(a-b)\,a^k+a^k\cdot b-b^{k+1}=(a-b)\,a^k+b\,(a^k-b^k)=$$
$$=[(a-b)\,a^k+(a-b)\,bc]\vdots(a-b).$$

На основании принципа математической индукции $(a^n-b^n)\vdots(a-b)$ при любом натуральном n.

Второе решение. Так как a и b — целые различные числа, то

$$(a-b)\equiv 0 \pmod{(a-b)},$$

поэтому $a\equiv b \pmod{(a-b)}$. Возводя обе части сравнения в степень n, получаем

$$a^n\equiv b^n \pmod{(a-b)},$$

т. е. a^n-b^n делится на $a-b$.

50. Первое решение. 1) При $n=1$ утверждение верно, так как

$$(a+b)\vdots(a+b).$$

2) Допустим, что $(a^{2n-1}+b^{2n-1})\vdots(a+b)$ при $n=k$, т. е.

$$(a^{2k-1}+b^{2k-1})\vdots(a+b),$$

т. е.

$$a^{2k-1}+b^{2k-1}=(a+b)\,c.$$

Тогда при $n=k+1$ имеем

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a^2-b^2)\,a^{2k-1}+a^{2k-1}\,b^2+b^{2k+1}=(a^2-b^2)\,a^{2k-1}+$$
$$+b^2\,(a^{2k-1}+b^{2k-1})=[(a+b)\,(a-b)\,a^{2k-1}+(a+b)\,b^2c]\vdots(a+b).$$

На основании принципа математической индукции $(a^{2n-1}+b^{2n-1})\vdots(a+b)$ при любом натуральном n.

Второе решение. Так как, очевидно, $a+b\equiv 0 \pmod{(a+b)}$, то $a\equiv -b \pmod{(a+b)}$, а поэтому

$$a^{2n-1}\equiv -b^{2n-1} \pmod{(a+b)}.$$

Следовательно,

$$a^{2n-1}+b^{2n-1}\equiv 0 \pmod{(a+b)},$$

т. е. $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ делится на $a+b$.

51. Первое решение. 1) При $n=1$ утверждение задачи верно, так как

$$(a^2-b^2)\vdots(a+b).$$

2) Допустим, что $(a^{2n}-b^{2n})\vdots(a+b)$ при $n=k$, т. е.

$$(a^{2k}-b^{2k})\vdots(a+b),$$

или

$$a^{2k}-b^{2k}=(a+b)c.$$

Тогда при $n=k+1$ имеем

$$a^{2k+2}-b^{2k+2}=(a^2-b^2)a^{2k}+a^{2k}b^2-b^{2k+2}=(a^2-b^2)a^{2k}+b^2(a^{2k}-b^{2k})=$$
$$=[(a+b)(a-b)a^{2k}+(a+b)b^2c]\vdots(a+b).$$

На основании принципа математической индукции $(a^{2n}-b^{2n})\vdots(a+b)$ при любом натуральном n.

Второе решение. Так как $a+b\equiv 0 \pmod{(a+b)}$, то имеем $a\equiv -b \pmod{(a+b)}$. Поэтому $a^{2n}\equiv(-b)^{2n}\equiv b^{2n} \pmod{(a+b)}$, откуда

$$a^{2n}-b^{2n}\equiv 0 \pmod{(a+b)},$$

т. е. $a^{2n}-b^{2n}$ делится на $a+b$.

52. Имеем

$$N=4^n+15n-1=4^n-1-3n+18n.$$

Так как $18n$ делится на 9, то остается доказать, что $N_1=4^n-1-3n$ делится на 9. Но

$$(4^n-1):3=(4^n-1):(4-1)=4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\ldots+4+1;$$

поэтому

$$N_1=3(\underbrace{4^{n-1}+4^{n-2}+4^{n-3}+\ldots+4+1}_{n\text{ слагаемых}}-n)=$$
$$=3[(4^{n-1}-1)+(4^{n-2}-1)+(4^{n-3}-1)+\ldots+(4^2-1)+(4-1)].$$

Каждое из слагаемых в квадратных скобках делится на $(4-1)=3$, а поэтому $N_1\vdots 9$. Следовательно, $N=(4^n+15n-1)\vdots 9$.

53. Имеем

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\ldots+a_{2n-1}^2-a_{2n}^2=(a_1^2-1)-(a_2^2-1)+$$
$$+(a_3^2-1)-(a_4^2-1)+\ldots+(a_{2n-1}^2-1)-(a_{2n}^2-1)=(a_1-1)(a_1+1)-$$
$$-(a_2-1)(a_2+1)+(a_3-1)(a_3+1)-(a_4-1)(a_4+1)+\ldots$$
$$\ldots+(a_{2n-1}-1)(a_{2n-1}+1)-(a_{2n}-1)(a_{2n}+1). \qquad (1)$$

Так как a_i-1 и a_i+1 — два последовательных четных числа, то произведение $(a_i-1)(a_i+1)$ делится на 8. Далее, из трех последовательных целых чисел a_i-1, a_i, a_i+1 одно делится на 3. Но так как в рассматриваемой задаче a_i не делится на 3, то на 3 делится или a_i-1, или a_i+1. Таким образом, каждое из произведений в выражении (1) делится на 8 и на 3, а потому — и на 24. Итак, утверждение задачи верно.

54. Ясно, что число 3^{4s+t}, равное $81^s\cdot 3^t$, оканчивается той же цифрой, что и число 3^t, при любых целых неотрицательных s и t. Поскольку $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, то число $3^{n^k}+1$ делится на 5 лишь в том случае, когда n^k имеет вид $4s+2$. Число n^k – четное только при четном n, т. е. при $n=2m$. Таким образом, $(2m)^k=4s+2$, откуда $2^{k-1}\cdot m^k=2s+1$. Но в левой части полученного равенства стоит четное число (так как $k > 1$), а в правой — нечетное. Итак, каковы бы ни были целые положительные $k > 1$, n и s, всегда $n^k \neq 4s + 2$, а потому число $3^{n^k} + 1$ не делится на 5.

55. Используя формулу бинома Ньютона, имеем

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7 =$$
$$= (x^7 + y^7) + 7xy(x^5 + y^5) + 21x^2y^2(x^3 + y^3) + 35x^3y^3(x + y).$$

Так как суммы $x^5 + y^5$, $x^3 + y^3$ делятся на $x + y$, а $x + y$ делится на 7, то $x^5 + y^5$ и $x^3 + y^3$ также делятся на 7. Но так как числа 7, 21 и 35 также делятся на 7, то, учитывая, что $(x + y)^7$ делится на 49, заключаем, что сумма $x^7 + y^7$ делится на 49.

56. Ясно, что среди первых 20 чисел из 39 произвольно выбранных последовательных натуральных чисел найдется два, у которых на конце — нуль. Из них хотя бы у одного перед нулем стоит не девятка. Пусть N — это число, и пусть s — сумма цифр этого числа. Тогда числа N, $N+1$, $N+2$, ..., $N+9$, $N+19$ имеют суммы цифр s, $s+1$, $s+2$, ..., $s+9$, $s+10$ — одиннадцать последовательных чисел. Очевидно, что по крайней мере одно из них делится на 11.

57. Имеем

$$a(x^3 + a^2x^2 + a^2 - 1) = ax^3 + a^3x^2 + a(a^2 - 1) =$$
$$= ax^3 + ax^2 + (a^3 - a)x^2 + (a^3 - a) = (a^3 - a)(x^2 + 1) + ax^2(x + 1)$$

Так как $a^3 - a = (a + 1)a(a + 1)$ делится на 6, как произведение трех последовательных целых чисел, то $(a^3 - a)(x^2 + 1)$ делится на 6 при любых целых значениях x. Таким образом, надо установить, при каких значениях x выражение $ax^2(x + 1)$ кратно шести. Поскольку $x(x + 1)$ кратно двум, то остается узнать, при каких целых x число $ax^2(x + 1)$ делится на 3 при любом целом a. Так как по условию $ax^2(x + 1)$ должно делиться на 3 при любом целом a, то, в частности, это должно иметь место при $a = 1$, т. е. $x^2(x + 1)$ должно делиться на 3. Ясно, что $x^2(x + 1)$ делится на 3 только в двух случаях, когда x делится на 3 или $x + 1$ делится на 3. Таким образом, если $x = 3k$ или $x = 3k - 1$, где k — любое целое число, то данный многочлен делится на 6.

58. Имеем

$$10N = 4 \cdot 25^n \cdot 2^n + 15 \cdot 3^n \cdot 4^n = 4(50^n - 12^n) + 19 \cdot 12^n.$$

Поскольку $50^n - 12^n$ делится на разность $50 - 12 = 38 = 19 \cdot 2$, то $10N$ делится на 19, а потому число N кратно 19.

59. Ясно, что при делении любого (целого) числа на 30 могут быть получены остатки 0, 1, 2, ..., 29. Если же делимое — простое число, то при делении его на 30 могут получиться остатки, только не кратные 2, 3, 5, так как $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Следовательно, если делимое — простое число, то при делении его на 30 могут получиться остатки 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, т. е. остатки не составные, что и требовалось доказать.

60. Если $n = 0$, то при любом a исследуемое число также равно нулю. Теперь пусть $P_n = a^{4n+1} - a$. При $n = 1$ имеем

$$P_1 = a^5 - a = a(a - 1)(a + 1)[(a^2 - 4) + 5] =$$
$$= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1).$$

Но произведение пяти последовательных целых чисел $a - 2$, $a - 1$, a, $a + 1$, $a + 2$ делится на $5! = 120$, а следовательно, делится и на 30 (иначе: указанное произведение делится на 2, на 3 и на 5, а потому оно делится на 30). Произведение $5(a - 1)a(a + 1)$ кратно числу $5 \cdot 3! = 30$. Таким образом, P_1 кратно 30. Пусть P_n делится на 30. Тогда

$$P_{n+1} = a^{4n+5} - a = P_n + a^{4n+5} - a^{4n+1} = P_n + a^{4n}P_1$$

также кратно 30. Следовательно, в силу принципа математической индукции P_n делится на 30.

61. Если n делится на 2, то $4n^2+3n+5$ не делится на 2, следовательно, оно не делится и на 6. Если n делится на 3, то $4n^2+3n+5$ не делится на 6. Таким образом, неделимость числа n на 2 и на 3 есть необходимое условие делимости числа $4n^2+3n+5$ на 6.

Пусть n не делится ни на 2, ни на 3. Тогда n имеет вид $6k\pm1$.

Если $n=6k+1$, то $4n^2+3n+5=4(6k+1)^2+3(6k+1)+5=4\cdot36k^2+8\cdot6k+4+3\cdot6k+3+5=6(24k^2+11k)+12$, т. е. $4n^2+3n+5$ делится на 6, если $n=6k+1$.

Если $n=6k-1$, то $4n^2+3n+5=4(6k-1)^2+3(6k-1)+5=4\cdot36k^2-8\cdot6k+4+3\cdot6k-3+5=6(24k^2-5k)+6$, т. е. $4n^2+3n+5$ делится на 6, если $n=6k-1$.

Таким образом, неделимость числа n ни на 2, ни на 3 есть достаточное условие делимости числа $4n^2+3n+5$ на 6.

62. Так как $n^2+1=n(n+1)-(n-1)$, то для того, чтобы n^2+1 делилось на $n+1$, необходимо и достаточно, чтобы $n-1$ делилось на $n+1$. Это возможно лишь при $n-1=0$, т. е. при $n=1$. Итак, только при $n=1$ число n^2+1 делится на $n+1$.

63. Первое решение. Имеем

$$N=3^{2n+2}(5^{2n}-3^n\cdot2^{2n})=9\cdot3^{2n}(25^n-3^n\cdot4^n)=9\cdot3^{2n}(25^n-12^n).$$

Так как $117=9\cdot13$ и разность 25^n-12^n делится на $25-12=13$, то N кратно 117.

Второе решение. Имеем

$$N=3^2(3^{2n}\cdot5^{2n}-3^{3n}\cdot2^{2n})=3^2(9^n\cdot25^n-27^n\cdot4^n)=3^2\cdot(225^n-108^n).$$

Так как разность 225^n-108^n делится на разность $225-108=117$, то N кратно 117.

64. Предположим противное, т. е. что при некотором целом x имеем $x^2+3x+5=121k$, где k — целое число, или $x^2+3x-(121k-5)=0$. Таким образом, это уравнение имеет целый корень, т. е. целым является одно из чисел

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+484k-20}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{11(44k-1)}}{2}.$$

Для того чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $11(44k-1)$ было точным квадратом. Это значит, что $44k-1$ должно делиться на 11, что невозможно ни при каком целом k. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

65. Имеем

$$a=7m+x,\qquad b=7n+y,$$

где m и n — целые числа, $|x|\leqslant3$, $|y|\leqslant3$. Следовательно,

$$a^2+b^2=(7m+x)^2+(7n+y)^2=7(7m^2+7n^2+2mx+2ny)+x^2+y^2,$$

откуда видно, что a^2+b^2 делится или не делится на 7, смотря по тому, делится или не делится на 7 число x^2+y^2. Но так как каждое из чисел x^2 и y^2 может иметь лишь одно из значений: 0^2, $(\pm1)^2$, $(\pm2)^2$, $(\pm3)^2$, то x^2+y^2 может принимать лишь ограниченное число значений, а именно x^2+y^2 равно одному из чисел:

$$\begin{array}{llll}
0^2+0^2=0, & 1^2+1^2=2, & 2^2+2^2=8, & 3^2+3^2=18.\\
0^2+1^2=1, & 0^2+2^2=4, & 0^2+3^2=9, & \\
1^2+2^2=5, & 1^2+3^2=10, & & \\
2^2+3^2=13, & & &
\end{array}$$

Из всех этих чисел только первое (нуль) кратно 7, а потому a^2+b^2 кратно 7 только при $x=y=0$, т. е. когда каждое из чисел a и b делится на 7.

66. Имеем

$$x^2y^3-4x^2y=x^2y(y+2)(y-2)$$

и

$$x^4+x^2-2=x^4-x^2+2x^2-2=x^2(x^2-1)+2(x^2-1)=$$
$$=(x^2+2)(x+1)(x-1).$$

Таким образом,

$$N=x^2y(x+1)(x-1)(y+2)(y-2)(x^2+2).$$

Поскольку $216=2^3\cdot 3^3$, то докажем сначала, что N делится на $2^3=8$. В самом деле, при четном x число x^2 делится на 4 и x^2+2 делится на 2. При x нечетном один из множителей произведения $(x+1)(x-1)$ делится на 4, а другой — на 2. Итак, мы доказали, что N делится на 8. Остается показать, что N кратно $3^3=27$. Действительно, при любом целом y один (и только один) из множителей y, $y+2$ и $y-2$ делится на 3. При $x=3k$ множитель x^2 делится на 9. При $x=3k\pm 1$ один из множителей $x-1$ и $x+1$ делится на 3. Кроме того, в обоих случаях выражение x^2+2 делится на 3, так как $x^2+2=9k^2\pm 6k+1+2=3(3k^2\pm 2k+1)$. Следовательно, N кратно $3^3=27$.

Таким образом, N делится на $8\cdot 27=216$, что и требовалось доказать.

67. Ясно, что число $(n+1)^k-1$ кратно n, т. е. $(n+1)^k-1=an$, где a — целое число. Таким образом, $(n+1)^k=an+1$. Аналогично убеждаемся, что $(n-1)^{2k+1}=bn-1$, где b — целое число. Имеем

$$(n^2-1)^k(n-1)^{k+1}+1=(n+1)^k(n-1)^{2k+1}+1=(an+1)(bn-1)+1=$$
$$=abn^2+bn-an-1+1=n(abn+b-a).$$

Таким образом, утверждение задачи доказано.

68. Первое решение. Данное число можно представить в следующих трех видах:

$$69a+21b+15c-(N-a), \qquad (1)$$

$$70a+20b+15c-(N-b), \qquad (2)$$

$$70a+21b+14c-(N-c). \qquad (3)$$

В силу условия задачи число $N-a$ делится на 3, число $N-b$ — на 5 и число $N-c$ — на 7. Следовательно, числа (1), (2), (3) делятся соответственно на 3, 5, 7, т. е. данное число делится на 3, 5, 7, а значит, и на их произведение $3\cdot 5\cdot 7=105$.

Второе решение. По условию задачи имеем

$$N=3m+a, \qquad N=5n+b, \qquad N=7p+c,$$

где m, n, p — целые числа.

Подставляя в данное выражение значения $a=N-3m$, $b=N-5n$, $c=N-7p$, получим

$$70(N-3m)+21(N-5n)+15(N-7p)-N=$$
$$=70N-210m+21N-105n+15N-105p-N=105N-105(2m+n+p),$$

что и доказывает делимость данного числа на 105.

69. Если числа a^2+b^2 и $a+b$ делятся на d, то и числа

$$2a^2=(a^2+b^2)+(a-b)(a+b) \text{ и } 2b^2=(a^2+b^2)+(b-a)(a+b)$$

делятся на d. Но поскольку числа a и b взаимно просты, то числа a^2 и b^2 также взаимно просты. Следовательно, $2a^2$ и $2b^2$ не могут делиться на число d, большее двух. Этим и доказывается утверждение задачи.

70. Если цифры делимого обозначим через a, а цифры делителя через b, то условия задачи можно записать в таком виде:

$$111\,111a = 1111b \cdot 233 + r, \qquad (1)$$

$$11\,111a = 111b \cdot 233 + r - 1000. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из равенства (1) равенство (2), получим

$$10^5 a = 10^3 b \cdot 233 + 1000,$$

или, по сокращении,

$$100a = 233b + 1. \qquad (3)$$

Так как a и b — натуральные однозначные числа, то из равенства (3) очевидно, что b может равняться только трем (для делимости правой части на 10), а отсюда $a = 7$.

Итак, искомые числа 777 777 и 3333.

71. Пусть $x - y = a$, $y - z = b$, $z - x = c$. Очевидно, что $a + b + c = 0$, $c = -(a + b)$. Имеем

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = a^5 + b^5 - (a+b)^5 =$$
$$= a^5 + b^5 - a^5 - 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 - b^5 =$$
$$= -5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = -5ab[(a+b)(a^2 - ab + b^2) +$$
$$+ 2ab(a+b)] = -5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2),$$

т. е. число $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ делится на $-5ab(a+b) = 5abc = 5(x-y)(y-z)(z-x)$, что и требовалось доказать.

72. Имеем

$$7^{2n} + 3^{2n} + 30 \cdot 21^n = 7^{2n} + 3^{2n} - 2 \cdot 21^n + 32 \cdot 21^n = (7^n - 3^n)^2 + 32 \cdot 21^n.$$

Так как $7^n - 3^n$ делится на разность $7 - 3 = 4$, то число $(7^n - 3^n)^2$ делится на 16. Кроме того, и число $32 \cdot 21^n$ делится на 16. Следовательно, данное число делится на 16.

73. По формуле суммы членов геометрической прогрессии имеем

$$N = \frac{2^{5n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^{5n} - 1 = 32^n - 1^n.$$

Но разность $32^n - 1^n$ делится на $32 - 1 = 31$. Итак, число N кратно 31.

74. Имеем

$$16^n(2^n + 1) + 9^n(9^{n+1} - 1) + 5^n(5^{n+1} - 5^n) =$$
$$= 32^n + 16^n + 9^{2n+1} - 9^n + 5^{2n+1} - 25^n =$$
$$= 32^n - 25^n + 16^n - 9^n + 5^{2n+1} + 2^{2n+1} + 9^{2n+1} - 2^{2n+1}.$$

Так как $32^n - 25^n$ делится на разность $32 - 25 = 7$; $16^n - 9^n$ — на разность $16 - 9 = 7$; $5^{2n+1} + 2^{2n+1}$ — на сумму $5 + 2 = 7$; $9^{2n+1} - 2^{2n+1}$ — на разность $9 - 2 = 7$, то и данное число делится на 7.

75. Имеем

$$n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 62n = (n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n) + (12n^2 + 60n) =$$
$$= n(n^3 - 2n^2 - n + 2) + 12n(n+5) =$$
$$= n[n^2(n-2) - (n-2)] + 12n(n+5) =$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1) + 12n(n+5);$$

число $(n-2)(n-1)n(n+1)$ делится на 24, так как произведение четырех последовательных целых чисел делится на произведение $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Докажем теперь, что $12n(n+5)$ делится на 24. Для этого достаточно доказать, что $n(n+5)$ четно. Если n четно, то и $n(n+5)$ четно. Пусть n нечетно, т. е.

$n=2k-1$. Тогда $n(n+5)=(2k-1)(2k-1+5)=(2k-1)\,2(k+2)$ четно. Итак, утверждение задачи верно.

76. Первое решение. Имеем

$$2n^3-3n^2+n=(n^3-n)+(n^3-3n^2+2n)=$$
$$=n(n^2-1)+n(n^2-3n+2)=(n-1)n(n+1)+(n-2)(n-1)n.$$

Таким образом, данное число есть сумма двух слагаемых, каждое из которых есть произведение трех последовательных чисел, а потому каждое слагаемое кратно 6, а следовательно, и данное число делится на 6.

Второе решение. При $n=0$ данное число делится на 6. Предположим, что при $n=k$ заданное число делится на 6, т. е.

$$2k^3-3k^2+k=6m, \qquad (1)$$

где m — целое. Теперь докажем, что если имеет место (1), то $2(k+1)^3-3(k+1)^2+(k+1)$ делится на 6. Имеем $2(k+1)^3-3(k+1)^2+k+1=2k^3+6k^2+6k+2-3k^2-6k-3+k+1=2k^3-3k^2+k+6k^2=6m+6k^2=6(m+k^2)$ кратно шести. Итак, в силу принципа математической индукции утверждение задачи верно.

77. Имеем

$$30^n+4^n(3^n-2^n)-1=30^n+12^n-8^n-1=30^n-19^n+12^n-1^n+19^n-8^n.$$

Так как 30^n-19^n делится на разность $30-19=11$, 12^n-1^n — на разность $12-1=11$ и 19^n-8^n — на разность $19-8=11$, то и рассматриваемое число делится на 11.

78. Так как $2^6=64\equiv 1 \pmod 9$, то $2^{6n}\equiv 1 \pmod 9$ и, значит, $2^{6n+2}\equiv 2^2 \pmod 9$. Кроме того, $2^{6n+2}\equiv 2^2 \pmod 2$, а 2 и 9 взаимно простые числа, поэтому получаем $2^{6n+2}\equiv 2^2 \pmod{18}$. Итак, $2^{6n+2}=18k+2^2$, где k — целое неотрицательное число. Далее, имеем $2^{18}-1=(2^9+1)(2^9-1)=513\cdot 511=19\cdot 27\cdot 511$, откуда видно, что $2^{18}-1$ делится на 19, т. е. $2^{18}\equiv 1 \pmod{19}$, а поэтому $2^{18k}\equiv 1 \pmod{19}$, а $2^{18k+2^2}=2^{18k}\cdot 2^4\equiv 2^4 \pmod{19}$, т. е. $2^{2^{6n+2}}\equiv 16 \pmod{19}$, откуда

$$2^{2^{6n+2}}+3\equiv 16+3\equiv 0 \pmod{19},$$

а поэтому $2^{2^{6n+2}}+3$ делится на 19.

79. Имеем

$$3^{6n}+3^{5n+1}+3^{4n+1}+3^{3n}=3^{3n}(3^{3n}+3^{2n+1}+3^{n+1}+1)=$$
$$=3^{3n}[(3^n)^3+3\cdot(3^n)^2+3\cdot 3^n+1]=(3^n)^3\cdot(3^n+1)^3=[3^n\cdot(3^n+1)]^3.$$

Так как 3^n и 3^n+1 — два последовательных числа, то их произведение четно, а потому куб этого произведения кратен 8. Итак, утверждение задачи верно.

80. Число

$$n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4=$$
$$=n^4(n^4+4n^3+6n^2+4n+1)=n^4(n+1)^4=[n(n+1)]^4$$

делится на $2^4=16$, так как $n(n+1)$ — четное число.

81. Имеем

$$7^{2n}-4^{2n}-33=49^n-16^n-33=$$
$$=(49-16)(49^{n-1}+49^{n-2}\cdot 16+49^{n-3}\cdot 16^2+\ldots+49\cdot 16^{n-2}+16^{n-1})-33=$$
$$=33[(49^{n-1}-1)+16(49^{n-2}+49^{n-3}\cdot 16+\ldots+49\cdot 16^{n-3}+16^{n-2})].$$

Так как $49^{n-1}-1$ делится на разность $49-1=48=16\cdot 3$, то число, заключенное в квадратных скобках, кратно 16. Следовательно, данное число делится на произведение $33\cdot 16=528$.

82. Имеем

$$3^{3n+3}-26n-27=27^{n+1}-27-26n=$$
$$=27(27^n-1)-26n=27(27-1)(27^{n-1}+27^{n-2}+\ldots+27+1)-26n=$$
$$=26[(27^n+27^{n-1}+\ldots+27^2+27)-n]. \qquad (1)$$

Так как при любом натуральном k разность 27^k-1^k делится на $27-1=26$, то $27^k\equiv 1 \pmod{26}$; поэтому $27^n+27^{n-1}+\ldots+27^2+27\equiv n \pmod{26}$. Кроме того, очевидно, что $n\equiv n \pmod{26}$. Вычитая последнее сравнение из предпоследнего, получаем

$$27^n+27^{n-1}+\ldots+27^2+27-n\equiv 0 \pmod{26}, \qquad (2)$$

т. е. $27^n+27^{n-1}+\ldots+27^2+27-n=26k$ (где k — натуральное число). Из (1) и (2) следует, что данное число делится на $26\cdot 26=676$.

83. Поскольку число делится на 99, то оно делится на 11 и 9. Очевидно, что если число делится на 11, то сумма его цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Следовательно, сумма всех цифр делится на 2. С другой стороны, так как число делится на 9, то сумма его цифр делится на 9. Таким образом, сумма цифр рассматриваемого числа делится на 18, а потому сама сумма цифр не меньше 18.

84. Имеем

$$(n+1)^{3n}-n^{2n}(n+3)^n=(n^3+3n^2+3n+1)^n-(n^3+3n^2)^n.$$

Теперь видно, что данное число делится на разность

$$(n^3+3n^2+3n+1)-(n^3+3n^2)=3n+1.$$

85. Обозначим через $S(a)$ сумму цифр числа a. По признаку делимости на 9 числа a и $S(a)$ дают при делении на 9 одинаковые остатки, т. е. разность $a-S(a)$ делится на 9.

Имеем

$$a^m-S^m(a)=[a-S(a)][a^{m-1}+a^{m-2}S(a)+\ldots+aS^{m-2}(a)+S^{m-1}(a)].$$

Таким образом, учитывая, что $a-S(a)$ делится на 9, получим, что и $a^m-S^m(a)$ делится на 9. Также из того, что $a-S(a)$ делится на 9, следует, что и $a^m-S(a^m)$ делится на 9. Таким образом, $S(a^m)-S^m(a)=[a^m-S^m(a)]-[a^m-S(a^m)]$ делится на 9, что и требовалось доказать.

86. Обозначим частное от деления многочлена $F(x, y)=x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1}$ на разность $x-y$ через $Q(x, y)$. В силу теоремы Безу имеем $F(x, y)=(x-y)\cdot Q(x, y)+ny^{n-1}$. Положив $x=a$ и $y=b$, получим отсюда

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}=(a-b)\cdot Q(a, b)+nb^{n-1}.$$

Пусть теперь d — общий делитель чисел $a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}$ и $a-b$. Тогда из написанного равенства следует, что и число nb^{n-1} делится на d. Но b не может иметь общих делителей с d (иначе, поскольку $a-b$ делится на d, то и число a делилось бы на этот общий делитель), т. е. b и d взаимно просты. Следовательно, n делится на d.

87. В силу условия задачи имеем $10a+b=abm$, где m — целое число, $a\neq 0$. Отсюда

$$10a=b(am-1).$$

Так как a — число взаимно простое с $am-1$, то b должно делиться на a. Пусть

$$b=na. \qquad (1)$$

Тогда $10=n(am-1)$. Так как 10 делится на n, то n может быть лишь 1 2, 5.

Если $n=1$, то $am-1=10$, $am=11$, $a=1$, $m=11$, $b=1$. Таким образом, одно из искомых чисел есть $11=1\cdot 1\cdot 11$.

Если $n=2$, то $am-1=5$, $am=6$, причем из (1) заключаем, что $a<5$. Следовательно, при $n=2$ могут быть три случая: 1) $a=1$, $m=6$, $b=2$; 2) $a=2$, $m=3$, $b=4$; 3) $a=3$, $m=2$, $b=6$. Итак, имеем еще три искомых числа: $12=1\cdot2\cdot6$, $24=2\cdot4\cdot3$, $36=3\cdot6\cdot2$.

Если $n=5$, $am=3$, причем из (1) следует $a<2$. Имеем $a=1$, $m=3$, $b=5$. Следовательно, имеется еще одно искомое число $15=1\cdot5\cdot3$.

Отв. 11, 12, 15, 24, 36.

88. При выполнении условий задачи имеет место тождество

$$M(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R.$$

Полагая $x=1$, получим

$$S(M)=(1-a)\,S(Q)+R, \tag{1}$$

так как $M(1)=S(M)$, а $Q(1)=S(Q)$.

Из равенства (1) вытекает утверждение задачи.

89. Имеем

$$N=[1^{2n+1}+(2a)^{2n+1}]+[2^{2n+1}+(2a-1)^{2n+1}]+\ldots+[a^{2n+1}+(a+1)^{2n+1}].$$

Число N равно сумме a слагаемых вида

$$[k^{2n+1}+(2a+1-k)^{2n+1}],$$

где k принимает последовательно значения 1, 2, 3, ..., a. Но $[k^{2n+1}+(2a+1-k)^{2n+1}]$ делится на $[k+(2a+1-k)]=2a+1$, а поэтому и число N делится на $2a+1$.

90. Докажем, что число N делится на 3, 4 и 7. Имеем

$$N=(4^{2n}-1)-3^{2n}-6.$$

Число $4^{2n}-1$ делится на разность $4-1=3$, а также 3^{2n} и 6 делится на 3. Следовательно, N кратно трем. Перепишем число N так:

$$N=4^{2n}-8-(3^{2n}-1).$$

Числа 4^{2n} и 8 делятся на 4, а число $3^{2n}-1$ делится на сумму $3+1=4$. Значит, число N делится на 4. Наконец, имеем

$$N=(4^{2n}-3^{2n})-7.$$

Число $4^{2n}-3^{2n}$ делится на сумму $4+3=7$, а потому число N делится на 7. Итак, число N делится на произведение $3\cdot4\cdot7=84$.

91. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $n=-1$, $n=0$ и $n=1$ число N делится на 64. Докажем методом математической индукции, что число N делится на 64 при любом натуральном n. Допустим, что при $n=k$ число $N_k=3^{2k+3}+40k-27$ делится на 64. Тогда (при $n=k+1$)

$$N_{k+1}=3^{2k+5}+40k+40-27=$$
$$=9(3^{2k+3}+40k-27)-320k+256=9\cdot N_k-64\,(5k-4).$$

Так как $9N_k$ и $64\,(5k-4)$ делятся на 64, то N_{k+1} также делится на 64. В силу принципа математической индукции данное число N делится на 64 при любом натуральном n.

92. Имеем $p^2-q^2=(p+q)(p-q)$. Пусть $p=2m+1$, $q=2n-1$. Тогда $p^2-q^2=2\,(m+n)\cdot2\,(m-n+1)$. Так как $m+n$ и $m-n+1$ — числа различной четности, то одно из них четное. Поэтому p^2-q^2 делится на 8. Пусть

$$p=3k\pm1,\qquad q=3l\pm1. \tag{1}$$

Тогда $p-q=3\,(k-l)$ делится на 3 (если брать оба верхних или оба нижних знака). Если же в формулах (1) брать в одной верхний знак, а в другой нижний, то $p+q=3\,(k+l)$ делится на 3. Следовательно, p^2-q^2 делится на 8 и на 3, т. е. делится на 24.

93. Натуральные числа, не кратные 7, имеют один из следующих видов: $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$. Рассмотрим каждый вид этих чисел в отдельности.

1) При делении $(7k \pm 1)^n$ на 7 остаток $R = 1$ в том и только в том случае, когда n — четное число. Следовательно, искомое число (показатель степени) $n = 2m$ — четное.

2) Число $(7k \pm 2)^{2m}$ при делении на 7 дает остаток $R = 2^{2m}$. Надо найти те значения m, при которых $2^{2m} - 1$ делится на 7.

Если $m = 3p$, то $2^{2m} - 1 = 8^{2p} - 1$; последнее число делится на $8 - 1 = 7$.

Если $m = 3p + 1$, то $2^{2m} - 1 = 2^{6p+2} - 1 = 4(8^{2p} - 1) + 3$; это число не делится на 7, так как $8^{2p} - 1$ делится на 7, а 3 не делится на 7.

Если $m = 3p + 2$, то $2^{2m} - 1 = 2^{6p+4} - 1 = 16(8^{2p} - 1) + 15$, и, следовательно, не делится на 7.

Таким образом, если искомое число n существует, то оно имеет вид $n = 6p$.

3) Число $(7k \pm 3)^n = (7k \pm 3)^{6p}$ при делении на 7 дает остаток $R = 3^{6p}$. Надо найти те значения p, при которых $3^{6p} - 1$ делится на 7. Но $3^{6p} - 1 = 729^p - 1$ делится на разность $729 - 1 = 728 = 7 \cdot 104$, т. е. делится на 7 при любом натуральном p. Итак, окончательно искомый показатель степени $n = 6p$, где p — любое натуральное число.

94. Первое решение. Имеем

$$36^n + 10 \cdot 3^n = 3^n (12^n + 10) = 3^n [(12^n - 1^n) + 11].$$

Число $12^n - 1^n$ делится на число $12 - 1 = 11$, а потому число, заключенное в квадратных скобках, кратно 11. Следовательно, и данное число делится на 11.

Второе решение. Имеем

$$\begin{aligned}36^n + 10 \cdot 3^n &= 3^n (12^n + 10) = 3^n [(11 + 1)^n + 10] = \\ &= 3^n (11^n + n \cdot 11^{n-1} + \ldots + 11n + 1 + 10) = \\ &= 11 \cdot 3^n (11^{n-1} + n \cdot 11^{n-2} + \ldots + n + 1),\end{aligned}$$

т. е. данное число делится на 11.

95. Предположим, что $n^2 + 5n + 16$ при натуральном n делится на 169, т. е. $n^2 + 5n + 16 = 169k$, где k — целое число. Из этого равенства следует, что

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(16 - 169k)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13(52k - 3)}}{2}.$$

Для того чтобы n было целым, необходимо, чтобы $52k - 3$ было кратно 13, что невозможно. Следовательно, утверждение задачи верно.

96. Имеем

$$\begin{aligned}n^{8888} - n^{7777} + 1 &= n^2 (n^3)^{\frac{8886}{3}} - n (n^3)^{\frac{7776}{3}} + 1 = \\ &= n^2\left[(n^3)^{\frac{8886}{3}} - 1\right] - n\left[(n^3)^{\frac{7776}{3}} - 1\right] + n^2 - n + 1.\end{aligned}$$

Так как $(n^3)^{\frac{8886}{3}} - 1 = (n^3)^{2962} - 1$ делится на $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$, то число, стоящее в первых квадратных скобках, делится на $n^2 - n + 1$. Поскольку $(n^3)^{\frac{7776}{3}} - 1 = (n^3)^{2592} - 1$ также делится на $n^3 + 1$, то и число, стоящее во вторых квадратных скобках, делится на $n^2 - n + 1$. В силу изложенного следует утверждение задачи.

97. Пусть

$$N = a_1 \cdot 10^{2n} + a_2 \cdot 10^{2n-1} + a_3 \cdot 10^{2n-2} + \ldots + a_{2n} \cdot 10 + a_{2n+1}.$$

Тогда обращенное число

$$N_1 = a_{2n+1} \cdot 10^{2n} + a_{2n} \cdot 10^{2n-1} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1.$$

Следовательно, разность чисел N и N_1

$$N - N_1 = a_1 (10^{2n} - 1) + a_2 \cdot 10 (10^{2n-2} - 1) + a_3 \cdot 10^2 (10^{2n-4} - 1) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n+1} \cdot 10^n (1 - 1) - a_{n+2} \cdot 10^{n-1} (10^2 - 1) - a_{n+3} 10^{n-2} (10^4 - 1) -$$
$$- a_{n+4} \cdot 10^{n-3} (10^6 - 1) - \ldots - a_{2n-1} \cdot 10^2 (10^{2n-4} - 1) -$$
$$- a_{2n} \cdot 10 (10^{2n-2} - 1) - a_{2n+1} \cdot (10^{2n} - 1).$$

Поскольку разности, заключенные в скобках, делятся на 99 (так как $10^{2k} - 1 = 100^k - 1$ делится на $100 - 1 = 99$), то разность $N - N_1$ делится на 99.

98. Любое натуральное число имеет один из следующих видов: $21k$, $21k \pm 1$, $21k \pm 2$, $21k \pm 3$, $21k \pm 4$, $21k \pm 5$, $21k \pm 6$, $21k \pm 7$, $21k \pm 8$, $21k \pm 9$, $21k \pm 10$. Квадраты этих чисел при делении на 21 дают соответственно остатки 0, 1, 4, 9, 16, 4, 15, 7, 1, 18, 16, т. е. остатки таковы: 0, 1, 4, 7, 9, 15, 16, 18. Сумма любых двух остатков, кроме пары 0, 0, не делится на 21. Поэтому $a = 21k$, $b = 21n$, следовательно, $a^2 + b^2 = 441k^2 + 441n^2 = 441 (k^2 + n^2)$, т. е. $a^2 + b^2$ делится на 441.

99. Числа M, $2M$, $3M$, $\ldots$, KM дают попарно различные остатки при делении на K. Действительно, допустив, что aM и bM $(1 \leqslant a < b \leqslant K)$ дают при делении на K одинаковые остатки, придем к выводу, что число $(b - a) M$ делится на K, что невозможно, так как $(b - a) < K$, а M и K — взаимно простые числа. Эти остатки (их всего K) имеют значения $0, 1, 2, \ldots, (K - 1)$, взятые в каком-то порядке. Если r — остаток от деления N на K, то среди чисел M, $2M$, $3M$, $\ldots$, KM найдется число Mx, дающее при делении на K остаток $K - r$. Но тогда $Mx + N = [pK + (K - r)] + (qK + r) = (p + q + 1) K$, т. е. число $Mx + N$ делится на K.

100. Для того чтобы доказать, что число делится на 120, достаточно доказать, что оно кратно 3, 5 и 8. Имеем

$$9x^5 - 5x^3 - 4x = 9x^5 - 6x^3 - 3x + x^3 - x =$$
$$= 3 (3x^5 - 2x^3 - x) + (x - 1) x (x + 1).$$

Так как $(x - 1) x (x + 1)$ есть произведение трех последовательных целых чисел, то $9x^5 - 5x^3 - 4x$ кратно трем. Далее,

$$9x^5 - 5x^3 - 4x = 10x^5 - 5x^3 - 5x - x^5 + x =$$
$$= 5 (2x^5 - x^3 - x) - x (x - 1) (x + 1) (x^2 + 5 - 4) =$$
$$= 5 (2x^5 - x^3 - x) - 5x (x - 1) (x + 1) - (x - 2) (x - 1) x (x + 1) (x + 2).$$

Так как $(x - 2) (x - 1) x (x + 1) (x + 2)$ — произведение пяти последовательных чисел, то оно делится на 5, и, следовательно, число $9x^5 - 5x^3 - 4x$ кратно 5.

Наконец,

$$9x^5 - 5x^3 - 4x = x [8x^4 - 8 + (x^4 - 5x^2 + 4)] =$$
$$= x [8 (x^4 - 1) + (x^2 - 4) (x - 1) (x + 1)].$$

Если x — нечетное число, то $x - 1$ и $x + 1$ — два последовательных четных числа и их произведение кратно 8, а потому и рассматриваемое число делится на 8. Если же x — четное число, то сразу видно, что $9x^5 - 5x^3 - 4x$ делится на 8. Итак, $9x^5 - 5x^3 - 4x$ делится на произведение $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.

101. Имеем

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 =$$
$$= 2 (2n^2 + 6n + 7) = 2 [(2n^2 - 4n + 2) + 10n + 5] =$$
$$= 2 [2 (n - 1)^2 + 5(2n + 1)] = 4 (n - 1)^2 + 10 (2n + 1).$$

Для того чтобы данное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы число $n-1$ делилось на 5, т. е. должно иметь место равенство $n-1=5k$, откуда $n=5k+1$, где k — целое неотрицательное число.

102. Имеем
$$n^5+4n^3+3n=n(n^2+1)(n^2+3)$$
и
$$n^4+3n^2+1=n^2(n^2+3)+1.$$

Поэтому всякий простой делитель числа n^5+4n^3+3n является делителем хотя бы одного из чисел n, n^2+1, n^2+3. Ясно также, что делитель числа n или n^2+3 не может быть делителем числа n^4+3n^2+1. Так как, далее, $n^4+3n^2+1=n^4+3n^2+2-1=(n^2+1)(n^2+2)-1$, то число n^4+3n^2+1 не имеет общих простых делителей с n^2+1. Таким образом, числа n^5+4n^3+3n и n^4+3n^2+1 не имеют общих делителей, кроме единицы.

103. Если n делится на 3, то n^3 делится на 9, т. е. при делении n^3 на 9 получается остаток, равный нулю.

Если же n не делится на 3, то $n=3k+1$ или $n=3k+2$. Тогда $n^3=(3k+1)^3=27k^3+27k^2+9k+1$, т. е. остаток равен 1; $n^3=(3k+2)^3=$ $=27k^3+54k^2+36k+8$ — остаток 8. Итак, остатки могут быть только 0, 1, 8.

104. Число
$$9^n(9^n+1)+1=9^{2n}+2\cdot 9^n+1-9^n=$$
$$=(9^n+1)^2-(3^n)^2=(9^n+1-3^n)(9^n+1+3^n)=$$
$$=[3^n(3^n-1)+1][3^n(3^n+1)+1]$$
делится на число $3^n(3^n+1)+1$.

105. Имеем
$$n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33.$$

Для того чтобы это число делилось на 11, необходимо, чтобы $(n+7)(n-4)$ делилось на 11. Но так как $(n+7)-(n-4)=11$, то оба сомножителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Поэтому, если $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится и на 121, и, следовательно, число $(n+7)(n-4)+$ $+33$ не может делиться на 121 ни при каком целом n.

106. Имеем $\dfrac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\ \ldots\ (n+k)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ k}=C_{n+k}^k$ — целое число.

107. Пусть a — цифра десятков трехзначного числа N, а b — цифра его единиц, тогда согласно условию задачи $(7-a-b)$ — цифра сотен. Таким образом,
$$N=100(7-a-b)+10a+b=700-90a-99b=$$
$$=700-91a-98b+a-b=7(100-13a-14b)+(a-b).$$

Теперь видно, что для того, чтобы число N делилось на 7, необходимо, чтобы $(a-b)$ делилось на 7. Но в силу условия задачи $a<7$ и $b<7$, поэтому $(a-b)$ делится на 7 лишь при $a=b$. Итак, мы доказали необходимость условия.

Пусть $a=b$, тогда $N=100(7-2a)+10a+a=7(100-27a)$, т. е. N делится на 7, если $a=b$. Следовательно, доказана и достаточность условия.

108. Имеем $N=(19^{19}+1)+(69^{69}-1)$. Так как $19^{19}+1$ делится на $19+1=20=4\cdot 5$ и $69^{69}-1$ делится на $69-1=68=4\cdot 17$, то N делится на 4.

Остается доказать, что N делится на 11. Имеем $N=(19^{19}+3^{19})+$ $+(69^{69}-3^{69})+(3^{69}-3^{19})$. Так как $19^{19}+3^{19}$ делится на $19+3=11\cdot 2$, $69^{69}-3^{69}$ делится на $69-3=11\cdot 6$ и, наконец, $3^{69}-3^{19}=3^{19}(3^{50}-1)=$ $=3^{19}[(3^5)^{10}-1]=3^{19}(243^{10}-1)$ делится на $243-1=11\cdot 22$, то число N делится на 11.

Следовательно, число n делится на 44.

109. Пусть x и y — целые числа, их разность есть d, остаток от деления x на d есть r. Имеем $x = y + d$.

Разделив первое число (x) на d, получим

$$x = kd + r, \tag{1}$$

где k — частное. Таким образом,

$$kd + r = y + d,$$

откуда находим

$$y = (k-1)\,d + r. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что при делении x и y на их разность частные отличаются на единицу, а остатки равны между собой.

110. Имеем

$$n^9 - n^5 = n^5(n^4 - 1) = (n-1)\,n\,(n+1)\,n^4(n^2+1).$$

Так как числа $n-1$, n, $n+1$ — три последовательные целые числа, то их произведение — четное число, кратное трем, а потому рассматриваемая разность делится на 6. Если $n = 5t$, то $n^9 - n^5$ делится на 5. Если $n = 5t \pm 1$, то $n \mp 1 = 5t$ делится на 5. Если $n = 5t \pm 2$, то $n^2 + 1 = 25t^2 \pm 20t + 4 + 1 = 5(5t^2 \pm 4t + 1)$ делится на 5. Итак, разность $n^9 - n^5$ делится на 6 и на 5, т. е. делится на 30.

111. Имеем

$$N = 2(a-1)(a-1)^n - (2-a)^n = (2a-2)(a-1)^n - (2-a)^n =$$
$$= (2a-3)(a-1)^n + [(a-1)^n - (2-a)^n].$$

Поскольку число $(2a-3)(a-1)^n$ делится на $2a-3$, а также число $[(a-1)^n - (2-a)^n]$ делится на $[(a-1)-(2-a)] = 2a-3$, как разность одинаковых степеней двух чисел, то число N тоже делится на $2a-3$.

112. Имеем

$$2S_m = [1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n + m^n] + [m^n + (m-1)^n + \ldots + 2^n + 1^n] =$$
$$= [1^n + m^n] + [2^n + (m-1)^n] + \ldots + [k^n + (m-k+1)^n] + \ldots + (m^n + 1^n).$$

Каждая из сумм $[k^n + (m-k+1)^n]$, как сумма одинаковых нечетных степеней, делится соответственно на сумму $k + (m-k+1)$, где $k = 1, 2, \ldots, m$, но $k + (m-k+1) = m+1$ для всех k, а потому $2S_m$ кратно $m+1$, и следовательно, $2S_{m-1}$ кратно m. Далее,

$$2S_m = 2[1^n + 2^n + \ldots + (m-1)^n] + 2m^n = 2S_{m-1} + 2m^n.$$

Так как по доказанному $2S_{m-1}$ кратно m, то и $(2S_{m-1} + 2m^n)$ кратно m. Таким образом, $2S_m$ кратно двум взаимно простым числам $(m+1)$ и m, а потому $2S_m$ кратно их произведению $m(m+1)$, т. е. $2S_m = m(m+1)\,p$, где p — целое, откуда

$$S_m = \frac{m(m+1)}{2}\cdot p = (1 + 2 + \ldots + m)\,p.$$

Отсюда следует, что число S_m делится на число $1 + 2 + 3 + \ldots + m$.

113. Достаточно доказать, что число $20^{15} - 1$ делится на 11, 31 и 61.

1) Имеем $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$, $10 \equiv -1 \pmod{11}$, откуда $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$; поэтому $20^5 \equiv (-1)(-1) \pmod{11}$, т. е. $20^5 \equiv 1 \pmod{11}$, а следовательно, $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$, т. е. $20^{15} - 1$ делится на 11.

2) Далее, имеем $20 \equiv -11 \pmod{31}$, откуда $20^2 \equiv 121 \pmod{31}$ или $20^2 \equiv -3 \pmod{31}$, а поэтому $20^3 \equiv (-11) \cdot (-3) \pmod{31}$ или $20^3 \equiv 2 \pmod{31}$, и потому $20^{15} \equiv 2^5 \pmod{31}$ или $20^{15} \equiv 1 \pmod{31}$, т. е. $20^{15} - 1$ делится на 31.

3) Наконец, $3^4 \equiv 20 \pmod{61}$, откуда

$$20^5 \equiv 3^{20} \pmod{61}. \qquad (1)$$

Но $3^5 \equiv -1 \pmod{61}$, а поэтому

$$3^{20} \equiv 1 \pmod{61}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $20^5 \equiv 1 \pmod{61}$, и потому $20^{15} \equiv 1 \pmod{61}$, т. е. $20^{15} - 1$ делится на 61.

114. В произведении $P = (n-1)n(n+1)$ второй сомножитель, n, — нечетное число, а поэтому $(n-1)$ и $(n+1)$ — два последовательных четных числа; поэтому $(n-1)(n+1)$ делится на 8. Кроме того, $P \vdots 3$, как произведение трех последовательных натуральных чисел; но число n не делится на 3; поэтому $(n-1)(n+1)$ делится на 3. Таким образом, найдено, что $(n-1)(n+1)$ делится на два взаимно простых числа 8 и 3, а поэтому $(n-1)(n+1)$ делится на произведение $8 \cdot 3$, т. е. $(n^2-1) \vdots 24$.

115. Покажем, что одно из чисел $A+B$ или $A-B$ не кратно p. Действительно, если бы оба эти числа были кратны p, то каждое из чисел

$$(A+B)+(A-B)=2A \text{ и } (A+B)-(A-B)=2B$$

было бы кратно p. А так как p, по условию, взаимно простое с 2, то одно из чисел $A+B$ и $A-B$, например $A+B$, взаимно простое с p, а потому и с p^n. Поскольку произведение $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, по условию, делится на p^n и $A+B$ взаимно простое с p^n, то $A-B$ делится на p^n. Наоборот, если $A-B$ взаимно простое с p, то $A+B$ делится на p^n.

116. Имеем $N = 100N_1 + \overline{ab}$, где N_1 — некоторое натуральное число или нуль. Так как $100N_1$ делится на 4, то для делимости N на 4 необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{ab}$ делилось на 4.

1) Если $\overline{ab}$ делится на 4, т. е. $(10a+b)$ делится на 4 или $(8a+2a+b)$ делится на 4, то и $(2a+b)$ делится на 4, так как $8a$ делится на 4. Этим доказана необходимость указанного признака делимости на 4.

2) Если $(2a+b)$ делится на 4, то и $(2a+b+8a)$ делится на 4, так как $8a$ делится на 4, т. е. $(10a+b)$ делится на 4 или $\overline{ab}$ делится на 4. Этим доказана достаточность признака делимости.

117. Имеем

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-3}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)(n-1)! =$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n-3}\right)+\ldots\right](n-1)! =$$

$$=\left[\frac{n}{1(n-1)}+\frac{n}{2(n-2)}+\frac{n}{3(n-3)}+\ldots\right]\cdot(n-1)! =$$

$$=\frac{n(n-1)!}{1(n-1)}+\frac{n(n-1)!}{2(n-2)}+\frac{n(n-1)!}{3(n-3)}+\ldots =$$

$$=n\left[\frac{(n-1)!}{1(n-1)}+\frac{(n-1)!}{2(n-2)}+\frac{(n-1)!}{3(n-3)}+\ldots\right].$$

Это число делится на n, как произведение n на некоторое целое число.

§ 3. Решение уравнений в целых числах

118. Имеем

$$xy - x - y + 1 = 1,$$

или

$$(x-1)(y-1) = 1.$$

Поэтому

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1, \end{cases} \text{откуда} \quad \begin{matrix} x_1 = 2, \\ y_1 = 2, \end{matrix}$$

или

$$\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1, \end{cases} \text{откуда} \quad \begin{matrix} x_2 = 0, \\ y_2 = 0. \end{matrix}$$

Других решений в целых числах данное уравнение не имеет.

119. Разрешим это уравнение относительно x:

$$x = \frac{77y+1}{60} = \frac{60y+(17y+1)}{60} = y + \frac{17y+1}{60}.$$

Пусть $\frac{17y+1}{60} = z$, тогда $y = \frac{60z-1}{17} = 3z + \frac{9z-1}{17}$. Если обозначить $\frac{9z-1}{17}$ через t, то $z = \frac{17t+1}{9} = 2t + \frac{-t+1}{9}$. Наконец, пусть $\frac{-t+1}{9} = n$, тогда $t = 1 - 9n$. Так как мы находим только целые решения уравнения, то z, t, n должны быть целыми числами.

Таким образом, $z = 2 - 18n + n = 2 - 17n$, а потому $y = 6 - 51n + 1 - 9n = 7 - 60n$, $x = 2 - 17n + 7 - 60n = 9 - 77n$. Итак, если x и y — целые решения данного уравнения, то найдется такое целое n, что $x = 9 - 77n$, $y = 7 - 60n$. Обратно, если $x = 9 - 77n$, $y = 7 - 60n$, где n — целое, то, очевидно, x, y — целые. Проверка показывает, что они удовлетворяют исходному уравнению.

Отв. $x = 9 - 77n$, $y = 7 - 60n$, где n — любое целое число.

120. Для определенности пусть $x \leqslant y \leqslant z$. Заменяя в левой части уравнения x и y числом z, получаем неравенство $3z > xyz$. (Равенство может получиться, если только все три числа равны; но тогда $3z = z^3$, что невозможно при целом положительном z.)

Так как по условию $z > 0$, можно разделить обе части неравенства на z. Получаем $xy < 3$. Поскольку $0 < x \leqslant y$, возможны только следующие варианты:

$$x = 1,\ y = 1; \quad x = 1,\ y = 2.$$

Подставляя эти значения в наше уравнение, получаем в первом случае $2 + z = z$ — нет решений; во втором случае $3 + z = 2z$ — одно решение: $z = 3$. Таким образом, наше уравнение имеет одно решение, удовлетворяющее условию $x \leqslant y \leqslant z$:

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$$

Все остальные решения получаются из этого перестановкой. Всего уравнение имеет 6 решений в целых положительных числах:

	x	y	z
(1)	1	2	3
(2)	1	3	2
(3)	2	1	3
(4)	2	3	1
(5)	3	1	2
(6)	3	2	1

121. Если $a=0$, то данное уравнение принимает вид $x=0$.

Если $a=-1$, то решаемое уравнение перепишется в виде $x-2=0$, откуда $x=2$.

Если же $a\neq 0$ и $a\neq -1$, то находим

$$x_1=\frac{a-1}{a},\ x_2=-\frac{a}{a+1},\quad \text{или}\ x_1=1-\frac{1}{a},\ x_2=-1+\frac{1}{a+1}.$$

Теперь видно: 1) если $a=1$, то $x=0$ (из формулы для x_1); 2) если $a=-2$, то $x=-2$ (из формулы для x_2).

Отв. Если $a=0$, то $x=0$; если $a=-1$, то $x=2$; если $a=1$, то $x=0$; если $a=-2$, то $x=-2$.

122. Первое решение. Очевидно, что x не делится на 3, так как в противном случае (x^2-3y) делится на 3, что невозможно, так как 17 не делится на 3. Поэтому $x=3k\pm 1$.

Из данного уравнения следует:

$$9k^2\pm 6k+1-3y=17,$$

или

$$3(3k^2\pm 2k-y)=16,$$

что невозможно, так как 16 не делится на 3.

Второе решение. Так как $x=3n$ или $x=3n\pm 1$, то $x^2=9n^2$ или $x^2=3(3n^2\pm 2a)+1$, а поэтому $x^2\equiv 0 \pmod 3$ или $x^2\equiv 1 \pmod 3$. Кроме того, $3y\equiv 0 \pmod 3$. Поэтому $x^2-3y\equiv 0 \pmod 3$ или $x^2-3y\equiv 1 \pmod 3$, а $17\equiv 2 \pmod 3$; следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

123. Первое решение. Так как $4x-8y$ при любых целых x и y четно, а правая часть уравнения нечетна, то если уравнение имеет решение в целых числах, то x^2, а следовательно, и x нечетно. Данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2+4x+3-8y=14,$$

или

$$(x+1)(x+3)-8y=14. \qquad (1)$$

Так как x нечетно, то $x+1$ и $x+3$ — два последовательных четных числа, а потому их произведение кратно 8, а поскольку и $8y$ кратно 8, то левая часть уравнения кратна 8. Но правая часть (число 14) не делится на четыре. Следовательно, уравнение (1), а вместе с ним и данное не имеет решения ни при каких целых x и y.

Второе решение. Так как $x=2n$ или $x=2n+1$, то $x^2=4n^2$ или $x^2=4(n^2+n)+1$, а поэтому $x^2\equiv 0 \pmod 4$ или $x^2\equiv 1 \pmod 4$. Кроме того, $4x-8y\equiv 0 \pmod 4$. Поэтому $x^2+4x-8y\equiv 0 \pmod 4$ или $x^2+4x-8y\equiv 1 \pmod 4$, а $11\equiv 3 \pmod 4$. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

124. Имеем

$$\begin{cases} x+y=a^2,\\ |x-y|=a, \end{cases}$$

где a — натуральное число.

1) Пусть $x>y$. Тогда

$$\begin{cases} x+y=a^2,\\ x-y=a, \end{cases}$$

откуда

$$x=\frac{a(a+1)}{2},\quad y=\frac{a(a-1)}{2},$$

где a — любое натуральное число, кроме единицы.

2) Пусть $x<y$. Тогда получим

$$x=\frac{a(a-1)}{2},\quad y=\frac{a(a+1)}{2},$$

где a — натуральное число, не равное 1.

125. Имеем

$$(x+y)(x-y)=2xyz. \tag{1}$$

Обозначая наибольший общий делитель целых чисел a и b символом (a, b), допустим, что $(x, y)=d$; тогда $x=x_1d$, $y=y_1d$, где x_1 и y_1 — взаимно простые числа.

Тогда из равенства (1) следует:

$$(x_1+y_1)(x_1-y_1)=2x_1y_1z. \tag{2}$$

Так как случай $x_1=\pm 1$, $y_1=\pm 1$ исключен из рассмотрения, то из равенства (2) следует, что $(x_1+y_1)(x_1-y_1)$ делится на x_1; однако это невозможно, так как

$$(x_1+y_1,\ x_1)=1 \text{ и } (x_1-y_1,\ x_1)=1.$$

Поэтому равенство (2) возможно лишь при $z=0$ и $x_1=\pm y_1$, и, значит, $x=\pm y$, что и требовалось доказать.

126. Первое решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$3x^2-3-4y^2=10,$$

или

$$3(x^2-1)-4y^2=10,$$

или

$$3(x-1)(x+1)-4y^2=10. \tag{1}$$

Так как $3x^2-4y^2=13$ — нечетное число, то ясно, что x может быть только нечетным числом. Следовательно, $(x-1)(x+1)$ — произведение двух последовательных четных чисел, а потому это произведение кратно четырем.

Таким образом, левая часть уравнения (1) кратна четырем. Но так как число 10 не кратно четырем, то равенство (1) не выполняется ни при каких целых x и y, т. е. данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Второе решение. Имеем $3x^2\equiv 0 \pmod 3$, $y^2\equiv 0 \pmod 3$ или $y^2\equiv 1 \pmod 3$, а потому $-4y^2\equiv 0 \pmod 3$ или $-4y^2\equiv 2 \pmod 3$; следовательно, $3x^2-4y^2\equiv 0 \pmod 3$ или $3x^2-4y^2\equiv 2 \pmod 3$, но $13\equiv 1 \pmod 3$, а поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

127. Имеем

$$(x-y)(x+y)=105.$$

Так как x и y должны быть целыми положительными числами, то $x-y>0$, или $x>y$, а также должно быть $x-y<x+y$.

Таким образом, число 105 надо разложить на два множителя так, чтобы меньший из них $(x-y)$ был меньше $\sqrt{105}$ или меньше 10. Следовательно, $x-y$ может принимать только значения (из всех делителей числа 105) 1, 3, 5, 7.

Итак, имеем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=105, \end{cases}\quad \begin{cases} x-y=3, \\ x+y=35, \end{cases}\quad \begin{cases} x-y=5, \\ x+y=21, \end{cases}\quad \begin{cases} x-y=7, \\ x+y=15. \end{cases}$$

Отв. $x_1=53$, $y_1=52$; $x_2=19$, $y_2=16$; $x_3=13$, $y_3=8$; $x_4=11$, $y_4=4$.

Вообще, если $x^2-y^2=N$, то

1) Когда N нечетно, меньший сомножитель $(x-y)$ может принимать лишь значения делителей числа N, меньших $\sqrt{N}$.

2) Когда N — четно, числа $x-y$ и $x+y$ должны быть одновременно четными, в противном случае решения были бы дробными. Это условие

показывает, что в этом случае N должно быть по меньшей мере кратно четырем.

128. Так как $2x^2-7$ есть нечетное число, то и $5y^2$ является нечетным числом, а потому y нечетно. Положив $y=2z+1$, получим $2x^2-20z^2-20z-5=7$, или $x^2-10z^2-10z=6$. Поскольку $10z^2+10z+6$ — четное число, то x четно. Пусть $x=2u$. Тогда $2u^2-5z(z+1)=3$, что невозможно, так как $z(z+1)$ есть четное число, а следовательно, левая часть последнего равенства — четное число.

129. Первое решение. Из условия следует, что $x^2=\frac{y^2-8}{3}$. Отсюда вытекает, что если x — целое число, то y^2-8 должно делиться на 3. Но так как $8=2\cdot 3+2$, то число y^2 должно иметь вид $3k+2$, а число y вида $3a\pm 1$, поскольку y^2 не кратно трем. Но

$$(3a\pm 1)^2=9a^2\pm 6a+1=3k+1,$$

т. е. при всех значениях y его квадрат не может быть вида $3k+2$. Следовательно, y^2-8 не делится на 3, а потому данное уравнение неразрешимо в целых числах.

Второе решение. Имеем $3x^2\equiv 0 \pmod 3$, $y^2\equiv 0 \pmod 3$ или $y^2\equiv 1 \pmod 3$, и потому $y^2-3x^2\equiv 0 \pmod 3$ или $y^2-3x^2\equiv 1 \pmod 3$, но $8\equiv 2 \pmod 3$. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

130. Данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$y^2-(1-2x)y+(x^2-3x-150)=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=\frac{1-2x\pm\sqrt{1-4x+4x^2-4x^2+12x+600}}{2},$$

или

$$y_{1,2}=\frac{1-2x\pm\sqrt{8x+601}}{2}. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что $8x+601$ должно быть квадратом нечетного числа. Пусть $8x+601=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$. Тогда

$$x=\frac{n(n+1)}{2}-75.$$

Подставив это значение x в формулы (1), получим

$$y_1=76-\frac{n(n-1)}{2}, \qquad y_2=75-\frac{n(n+3)}{2}.$$

Итак, имеем две системы неравенств:

$$\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}-75>0,\\ 76-\frac{n(n-1)}{2}>0\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}-75>0.\\ 75-\frac{n(n+3)}{2}>0.\end{cases}$$

Первую систему перепишем в таком виде:

$$n^2+n>150, \qquad n^2-n<152.$$

Умножив обе части каждого из этих неравенств на 4 и прибавив к обеим частям по 1, получим

$$(2n+1)^2>601, \qquad (2n-1)^2<609,$$

или

$$2n+1>24, \qquad 2n-1<25,$$

или

$$n>11{,}5, \qquad n<13.$$

Ясно, что n равно только 12. Тогда $x=3$, $y=10$.

Из второй системы получаем $n^2+3n<150<n^2+n$, что невозможно. Итак, данное уравнение имеет единственное решение в целых положительных числах $x=3$, $y=10$.

131. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$4x+y+49+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}=1,$$

или

$$(2\sqrt{x}+\sqrt{y}-7)^2=1,$$

откуда

$$2\sqrt{x}+\sqrt{y}-7=\pm 1.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$2\sqrt{x}+\sqrt{y}-7=1$$

и

$$2\sqrt{x}+\sqrt{y}-7=-1,$$

или

$$\sqrt{y}=8-2\sqrt{x} \qquad (1)$$

и

$$\sqrt{y}=6-2\sqrt{x}. \qquad (2)$$

Так как $\sqrt{y}\geqslant 0$, то в (1) неизвестная x может принимать лишь значения (целые) 0, 1, 4, 9, 16, а в (2) — лишь значения (целые) 0, 1, 4, 9. Соответствующие им значения y таковы: 64, 36, 16, 4, 0; 36, 16, 4, 0. Итак, данное уравнение имеет 9 решений в целых числах.

Отв.

$$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=64, \end{cases} \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=36, \end{cases} \begin{cases} x_3=4, \\ y_3=16, \end{cases} \begin{cases} x_4=9, \\ y_4=4, \end{cases} \begin{cases} x_5=16, \\ y_5=0, \end{cases} \begin{cases} x_6=0, \\ y_6=36, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7=1, \\ y_7=16, \end{cases} \begin{cases} x_8=4, \\ y_8=4, \end{cases} \begin{cases} x_9=9, \\ y_9=0. \end{cases}$$

132. Первое решение. Из условия видно, что если y не делится на 3, то x делится на 3. Итак, пусть y не делится на 3. Из данного уравнения следует:

$$x=3\cdot\frac{8-y^2}{2y}.$$

Так как $\dfrac{8-y^2}{2y}$ — целое число, то $y=2k$ — четное число. Поэтому

$$\begin{cases} x=3\left(\dfrac{2}{k}-k\right), \\ y=2k. \end{cases}$$

Из равенства $x=3\left(\dfrac{2}{k}-k\right)$ видно, что k может принимать только значения ± 1, ± 2. Поэтому

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=2, \end{cases} \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=-2, \end{cases} \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=4, \end{cases} \begin{cases} x_4=3, \\ y_4=-4. \end{cases}$$

Если y делится на 3, то x не делится на 3, так как в противном случае $2xy+3y^2$ делится на 9, а 24 не делится на 9. Итак, допустим, что $y=3m$. Из равенства $x=3\cdot\dfrac{8-y^2}{2y}$ следует:

$$x=\frac{8-9m^2}{2m}.$$

Из последнего равенства следует, что m — четное число, т. е. $m=2n$, а поэтому $y=6n$. Таким образом, имеем

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{n}-9n, \\ y=6n. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{2}{n}$ — целое число, то $n=\pm 1$ или $n=\pm 2$. Поэтому

$$\begin{cases} x_5=-7, \\ y_5=6, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6=7, \\ y_6=-6, \end{cases} \quad \begin{cases} x_7=-17, \\ y_7=12, \end{cases} \quad \begin{cases} x_8=17, \\ y_8=-12. \end{cases}$$

Кроме полученных восьми решений данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Второе решение. Ясно, что y — четное число, так как $3y^2=2(12-xy)$. Далее, ясно, что 24 делится на y (ибо левая часть уравнения делится на y). Значит, y есть четный делитель числа 24, т. е. ± 2, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. Подставляя эти числа в данное уравнение, найдем те же 8 решений, которые были получены ранее.

133. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$x^2+4xy+4y^2-2x-4y-x-600=0,$$

или

$$(x+2y)^2-2(x+2y)-x-600=0.$$

Решая это уравнение относительно $x+2y$, получим

$$x+2y=1\pm\sqrt{601+x}.$$

Так как $(x+2y)$ — целое число, то должно быть $601+x=a^2$, где a — целое число. Таким образом,

$$x=a^2-601. \qquad (1)$$

Имеем

$$x+2y=1\pm a. \qquad (2)$$

Из равенства (1) и (2) следует, что

$$a^2-601+2y=1\pm a,$$

откуда находим

$$y_1=301-\frac{a(a-1)}{2}, \quad y_2=301-\frac{a(a+1)}{2}.$$

Отв. $x_1=a^2-601$, $y_1=301-\dfrac{a(a-1)}{2}$,

$$x_2=a^2-601, \quad y_2=301-\frac{a(a+1)}{2},$$

где a — любое целое число.

134. Первое решение. Имеем

$$(y^2-1)x^2-yx-y^2=0.$$

Если $y^2-1\neq 0$, т. е.

$$y\neq\pm 1, \qquad (1)$$

то

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4y^2(y^2-1)}}{2(y^2-1)}=\frac{y\pm y\sqrt{4y^2-3}}{2(y^2-1)}. \qquad (2)$$

Если $y\neq 0$, то должно иметь место равенство $4y^2-3=a^2$, где a — целое число, т. е.

$$4y^2-a^2=3, \text{ или } (2y-a)(2y+a)=3,$$

что возможно лишь в случаях:

$$1)\ \begin{cases} 2y - a = \pm 3, \\ 2y + a = \pm 1, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2y - a = \pm 1, \\ 2y + a = \pm 3, \end{cases}$$

откуда $y = \pm 1$, что невозможно согласно (1).

Если же $y = 0$, то из (2) следует, что $x = 0$. Таким образом, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $y^2 - 1 = 0$, т. е. $y = \pm 1$.

а) При $y = 1$ имеем $x + 1 = 0$, т. е. $x = -1$. Поэтому $x_2 = -1$, $y_2 = 1$.

б) При $y = -1$ имеем $-x + 1 = 0$, т. е. $x = 1$. Поэтому $x_3 = 1$, $y_3 = -1$.

Отв. $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = -1. \end{cases}$

Второе решение. Пусть $|x| \leqslant |y|$. Тогда

$$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leqslant 3y^2,$$

и потому (при $y \neq 0$) имеем $x^2 \leqslant 3$, т. е. $x = -1$, 0, 1. Это и даёт три решения:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = -1. \end{cases}$$

135. Перепишем данное уравнение так:

$$2x^2 - 4x - 10y - 10 = 5y^2.$$

Левая часть этого уравнения есть четное число; следовательно, правая часть должна быть четным числом, т. е. $y = 2z$. Тогда уравнение примет вид

$$2x^2 - 4x - 20z^2 - 20z = 10.$$

Если x — четное число, то левая часть есть число, делящееся на 4, а правая часть не делится на 4. Допустим, что x — нечетное. Пусть $x = 2t + 1$. Тогда имеем

$$8t^2 + 8t + 2 - 8t - 4 - 20z^2 - 20z = 10,$$

или

$$8t^2 - 20z(z + 1) = 12.$$

Так как произведение $z(z + 1)$ четно, то левая часть последнего уравнения делится на 8. Но правая часть не делится на 8. В силу изложенного данное уравнение не имеет решений в целых числах.

136. Данное уравнение перепишем в виде

$$2x^2 + xy - 4x - 2xy - y^2 + 4y + 6x + 3y - 12 = 72,$$

$$x(2x + y - 4) - y(2x + y - 4) + 3(2x + y - 4) = 72,$$

$$(2x + y - 4)(x - y + 3) = 72.$$

Теперь видно, что $2x + y - 4$ может принимать значения $(x > 0,\ y > 0)$

$$72,\ 36,\ 24,\ 18,\ 12,\ 9,\ 8,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ -1,$$

а соответствующие значения $x - y + 3$ суть

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 72,\ -72.$$

Таким образом, имеем 13 систем уравнений. Но не все системы имеют решения в целых положительных числах.

Например, из системы

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 72, \\ x - y + 3 = 1 \end{cases}$$

получаем $3x-1=73$, т. е. $x=\frac{74}{3}=24\frac{2}{3}$. Следовательно, рассмотренная система не дает решения задачи. Аналогично, решая другие системы, легко убедиться, что только две системы дают решения в целых положительных числах.

Отв. $x_1=13$, $y_1=14$; $x_2=6$, $y_2=1$.

137. Данное уравнение можно переписать в виде

$$x^2+2x-11=y(3+x),$$

откуда

$$y=\frac{x^2+2x-11}{x+3}=\frac{x^2+2x-3-8}{x+3}=\frac{(x-1)(x+3)-8}{x+3}.$$

Итак,

$$y=x-1-\frac{8}{x+3}.$$

Для того чтобы y было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы $x+3$ было делителем числа 8, и так как мы ищем только положительные значения x, то должно быть $x+3=8$ или $x+3=4$, откуда $x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=1$, $y_2=-2$. Второе решение не удовлетворяет условию задачи.

Отв. $x=5$, $y=3$.

138. Перепишем данное уравнение в виде

$$2x^2-3xy+8xy-12y^2=28,$$

или

$$(2x-3y)(x+4y)=28.$$

Теперь видно, что число $x+4y$ должно быть делителем числа 28. Поскольку $x+4y\geqslant 5$, то ясно, что $x+4y=7$, а следовательно, $2x-3y=4$, либо $x+4y=14$ и $2x-3y=2$, либо $x+4y=28$ и $2x-3y=1$. Из полученных трех систем только последняя дает решения в целых числах.

Отв. $x=8$, $y=5$.

139. Если t — наибольший общий делитель чисел x, y и z, то, разделив все члены данного уравнения на t^2, получим аналогичное уравнение, где x, y и z — попарно взаимно простые числа. Поэтому будем в дальнейшем считать, что x, y и z — попарно взаимно простые числа. Отсюда следует, что никакие два из этих трех чисел не могут быть четными; кроме того, числа x и y не могут быть оба нечетными, так как при $x=2x_1+1$, $y=2y_1+1$ сумма

$$x^2+y^2=4(x_1^2+y_1^2+x_1+y_1)+2$$

есть четное число, не кратное 4, а поэтому не может быть квадратом целого числа. Поэтому одно из чисел x и y должно быть четным, а другое нечетным. Пусть для определенности $x=2r$ — четное число; тогда $4r^2=z^2-y^2$, т. е.

$$r^2=\frac{z+y}{2}\cdot\frac{z-y}{2}.$$

Пусть $\frac{z+y}{2}=u$, $\frac{z-y}{2}=v$; тогда

$$z=u+v,\quad y=u-v.$$

Так как z и y — нечетные числа, то числа u и v — целые и взаимно простые (иначе z и y не были бы взаимно простыми).

Поэтому из равенства $r^2=u\cdot v$ следует, что каждое из чисел u и v в отдельности представляет собой полный квадрат: $u=a^2$; $v=b^2$, где a и b — натуральные числа ($a>b$).

Теперь окончательно получаем

$$z=u+v=a^2+b^2,\quad y=u-v=a^2-b^2,\quad x=2ab.$$

Поэтому все решения данного уравнения (не обязательно для взаимно простых x, y, z) выразятся так:

$$\begin{cases} x=2abt, \\ y=(a^2-b^2)\,t, \\ z=(a^2+b^2)\,t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=(a^2-b^2)\,t, \\ y=2abt, \\ z=(a^2+b^2)\,t, \end{cases}$$

где a и b — произвольные взаимно простые натуральные числа ($a>b$), t — произвольное натуральное число.

140. Перепишем данное уравнение в виде (учитывая, что $x\neq 0$, $y\neq 0$)

$$x=\frac{243y}{(y+1)^2}.$$

Для того чтобы x было целым числом, знаменатель $(y+1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243, потому что y не может иметь общие множители с $y+1$. Поскольку $243=3^5$, то 243 делится только на такие числа, являющиеся точными квадратами: 1^2, 3^2, 9^2. Таким образом, число $(y+1)^2$ должно быть равно 1, 9 или 81, откуда находим, что y равно 8 или 2. Значит,

$$x=\frac{243\cdot 8}{81}=24 \text{ или } x=\frac{243\cdot 2}{9}=54.$$

Итак, задача имеет два решения в натуральных числах:

$$x_1=24,\ y_1=8;\quad x_2=54,\ y_2=2.$$

141. Перепишем данное уравнение в таком виде:

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+1=3x^2y+3xy^2+3xy,$$

или

$$(x+y)^3+1-3xy\,(x+y+1)=0,$$

или

$$(x+y+1)\,[(x+y)^2-(x+y)+1]-3xy\,(x+y+1)=0,$$

или

$$(x+y+1)\,(x^2-xy+y^2-x-y+1)=0.$$

Так как $x>0$, $y>0$, то $x+y+1\neq 0$, а поэтому

$$x^2-xy+y^2-x-y+1=0,$$

или

$$x^2-(y+1)\,x+(y^2-y+1)=0,$$

откуда

$$x=\frac{y+1\pm(y-1)\sqrt{-3}}{2}.$$

Для того чтобы x было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы $y-1=0$, откуда $y=1$. Тогда $x=\frac{y+1}{2}=1$. Утверждение задачи доказано.

142. Перепишем данное уравнение в таком виде:

$$-x^{14}-x^9+x^7y+x^9+x^4-x^2y+x^7y+x^2y-y^2=7,$$

или

$$-x^7\,(x^7+x^2-y)+x^2\,(x^7+x^2-y)+y\,(x^7+x^2-y)=7,$$

или

$$(x^7+x^2-y)\,(-x^7+x^2+y)=7.$$

Поскольку делителями 7 являются лишь числа ± 1 и ± 7, то искомые числа x и y надо искать среди решений следующих четырех систем:

$$\begin{cases} x^7+x^2-y=1, \\ -x^7+x^2+y=7, \end{cases} \quad \begin{cases} x^7+x^2-y=-1, \\ -x^7+x^2+y=-7, \end{cases} \quad \begin{cases} x^7+x^2-y=7, \\ -x^7+x^2+y=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^7+x^2-y=-7, \\ -x^7+x^2+y=-1. \end{cases}$$

Первая система имеет единственное решение в натуральных числах $x=2$, $y=131$, третья система имеет также единственное решение в натуральных числах $x=2$, $y=125$. Вторая и четвертая системы не имеют решений в натуральных числах. Итак, данное уравнение имеет ровно два решения в натуральных числах: $x_1=2$, $y_1=131$; $x_2=2$, $y_2=125$.

143. Так как 4^n — четное число, то x и y должны быть одинаковой четности, т. е. оба четные или оба нечетные. Пусть $x=2a+1$, $y=2b+1$. Тогда $x^2+y^2=(2a+1)^2+(2b+1)^2=4(a^2+b^2+a+b)+2=4^n$, или $2(a^2+b^2+a+b)+1=2^{2n-1}$, что невозможно, так как левая часть нечетна, а правая четна.

Пусть теперь $x\neq 0$ и $y\neq 0$ — четные, т. е. $x=2^p\cdot a$, $y=2^q\cdot b$, где a и b — нечетные числа. Положим для определенности, что $p\geqslant q$. Тогда

$$x^2+y^2=4^pa^2+4^qb^2=4^q(4^{p-q}a^2+b^2)=4^n. \tag{1}$$

Если $p>q$, то $4^{p-q}a^2+b^2$ — нечетное число и, как видно из (1), это число равно 1, что, однако, невозможно при натуральных a и b.

Если же $p=q$, то из (1) следует, что $4^q\cdot(a^2+b^2)=4^n$, откуда

$$a^2+b^2=4^{n-q}. \tag{2}$$

При $n-q>0$ равенство (2) невозможно, как было доказано выше для нечетных x и y. При $n-q=0$ равенство (2) также невозможно, так как при натуральных a и b

$$a^2+b^2\neq 1.$$

Итак, уравнение не имеет решений и в этом случае.

Таким образом, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

144. Очевидно, что x и z не могут быть отрицательными числами, так как при $x<0$

$$2^x+1=\frac{1}{2^{-x}}+1=\frac{1+2^{-x}}{2^{-x}},$$

а поэтому y^z имеет вид $\frac{m}{2^n}$, что возможно лишь при четных значениях y. Однако из условия следует, что y не может быть четным числом, если $x\neq 0$.

Если $x=0$, то уравнение имеет вид

$$y^z=2,$$

откуда

$$x_1=0,\quad y_1=2,\quad z_1=1.$$

Поэтому, если данное уравнение имеет и другие решения в целых числах, то числа x и z — натуральные.

I. Пусть $y>0$. Имеем

$$y^z-1=2^x,$$

или

$$(y-1)(y^{z-1}+y^{z-2}+\ldots+y+1)=2^x.$$

Из этого уравнения следует, что $y-1=2^t$, или $y=2^t+1$, где t — натуральное число.

Так как $y^{z-1}+y^{z-2}+\ldots+y+1=2^{x-t}$ и поскольку y — нечетное число, то z — четное число или $z=1$.

Пусть $z=2v$. Тогда $y^{2v}-1=2^x$, или $(y^v+1)(y^v-1)=2^x$, откуда $y^v-1=2^k$, $y^v+1=2^{x-k}$. Поэтому $2^{x-k}-2^k=2$, или $2^k(2^{x-2k}-1)=2$, т. е. $2^k=2$, $2^{x-2k}-1=1$, откуда $x-2k=1$, $k=1$, $x=3$, и поэтому $y^z=y^{2v}=2^x+1=2^3+1=9$, т. е. $z=2$, $y=3$.

Если же $z=1$, то x произвольно, а $y=2^x+1$. Итак, при $y>0$ мы имеем, кроме тривиального решения $z=1$, $x=\alpha$, $y=2^\alpha+1$, где α — любое натуральное число или нуль, лишь еще одно решение:

$$x_2=3, \quad y_2=3, \quad z_2=2.$$

II. Пусть $y<0$. Очевидно, что при нечетных значениях z данное уравнение не имеет решений, а при четных значениях z уравнение приводится к виду $2^x+1=|y|^z$.

Итак, уравнение имеет тривиальное решение $x=\alpha$, $y=2^\alpha+1$, $z=1$, где α — любое натуральное число, и, кроме того, еще имеет только три решения:

$$x_1=0,\ y_1=2,\ z_1=1; \quad x_2=3,\ y_2=3,\ z_2=2; \quad x_3=3,\ y_2=-3,\ z_3=2.$$

145. При $x<0$ уравнение не имеет решений в целых числах, так как тогда $0<3^x<1$.

Имеем

$$y=\frac{3^x-1}{4}-1. \tag{1}$$

Если x — нечетное число, т. е. $x=2k+1$, где $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, то $3^x-1=3^{2k+1}-1$ не делится на $3+1=4$, а поэтому из (1) следует, что y не может быть целым числом.

Если x — четное число, т. е. $x=2k$, где $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, то $3^x-1=3^{2k}-1$ делится на $3+1=4$, а поэтому из (1) следует, что y — целое число.

Поэтому данное уравнение имеет бесчисленное множество решений вида

$$x=2k, \qquad y=\frac{3^{2k}-1}{4}-1,$$

где $k=0, 1, 2, 3, \ldots$ Решений другого вида данное уравнение не имеет.

146. Ни одно из неизвестных не может быть целым отрицательным числом, так как равенства

$$\frac{1}{3^m}-1=\frac{1}{2^n}, \quad 3^x-1=\frac{1}{2^n}, \quad 2^y+1=\frac{1}{3^m}$$

невозможны при натуральных x, y, m, n.

Легко проверить, что $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Итак, x, y — натуральные. Из условия следует:

$$3^x-1=2^y,$$

или

$$(3-1)\cdot(3^{x-1}+3^{x-2}+\ldots+3+1)=2^y,$$

или

$$3^{x-1}+3^{x-2}+\ldots+3+1=2^{y-1}.$$

Число 2^{y-1} — четное, если $y-1\neq 0$.

Если $y-1=0$, то $y=1$, а поэтому из условия имеем $3^x-2=1$, т. е. $x=1$.

Таким образом,

$$x_1=1, \qquad y_1=1$$

— решение данного уравнения.

Если же $y-1\neq 0$, то $3^{x-1}+3^{x-2}+\ldots+3+1$ должно содержать четное число слагаемых, а поэтому x — четное число; пусть $x=2z$. Тогда

$$3^{2z}-1=2^y,$$

или

$$(3^2-1)(3^{2z-2}+3^{2z-4}+\ldots+3^2+1)=2^y,$$

или

$$\underbrace{3^{2z-2}+3^{2z-4}+3^{2z-6}+\ldots+3^2+1}_{z\ \text{слагаемых}}=2^{y-3}.$$

Если z — нечетное число, то 2^{y-3} — нечетное число, что возможно лишь при $y-3=0$, т. е. $y=3$.

Тогда из условия имеем

$$3^x-2^3=1,\ \text{откуда}\ x=2.$$

Поэтому

$$x_2=2,\qquad y_2=3,$$

— второе решение данного уравнения.

Если же z — четное число, т. е. $z=2m$, то $x=4n$, а поэтому данное уравнение перепишем в виде

$$3^{4n}-2^y=1,$$

или

$$81^n-1=2^y;$$

поэтому

$$(81-1)(81^{n-1}+81^{n-2}+\ldots+81+1)=2^y;$$

последнее уравнение не имеет решений, так как $81-1=80$ делится на 5, а 2^y не делится на 5.

Отв.
$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=2,\\ y_2=3.\end{cases}$$

147. Данное уравнение перепишем в виде

$$2^{x^2-4}(2^{x+2}-1)=2^5\cdot 31.$$

Так как $2^{x+2}-1$ при целом положительном x является нечетным числом, то данное уравнение имеет целые положительные решения только при условии

$$2^{x^2-4}=2^5 \tag{1}$$

и

$$2^{x+2}-1=31. \tag{2}$$

Из уравнения (1) следует, что $x^2=9$, откуда $x=\pm 3$. Подставляя $x=3$ в уравнение (2), убеждаемся, что оно удовлетворяет этому уравнению. Таким образом, предложенное уравнение имеет единственное решение ($x=3$) в целых положительных числах.

148. Имеем

$$(x^x-2x)+(y^y-y)=0,$$

или

$$x(x^{x-1}-2)+y(y^{y-1}-1)=0. \tag{1}$$

Если $x>2$, то $x-1>1$, а потому $x^{x-1}>2^{x-1}>2^1$, т. е. $x^{x-1}>2$; следовательно, при $x>2$ имеет место неравенство

$$x(x^{x-1}-2)>0. \tag{2}$$

Если $y>1$, то $y-1>0$, а потому $y^{y-1}>1^{y-1}$, т. е. $y^{y-1}>1$; значит, при $y>1$ имеет место неравенство

$$y(y^{y-1}-1)>0. \tag{3}$$

Складывая неравенства (2) и (3), заключаем, что при $x>2$ и $y>1$ левая часть уравнения (1) положительна и поэтому отлична от нуля.

Итак, при существовании целых положительных решений данного уравнения x должно равняться 1 или 2, а $y=1$. Подстановкой убеждаемся, что лишь $x=2$, $y=1$ есть решение данного уравнения в натуральных числах.

149. Пусть $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=a$; тогда $a^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Поэтому

$$a+a^2=1. \tag{1}$$

Умножая обе части равенства (1) на a^n, получим

$$a^{n+1}+a^{n+2}=a^n. \tag{2}$$

Докажем методом индукции, что данное уравнение имеет решение при любом натуральном n.

При $n=1$ утверждение верно, так как уравнению удовлетворяют $x=1$ и $y=1$, как видно из равенства (1).

Пусть утверждение задачи о существовании решения верно при $n=k$, т. е. существуют такие целые значения $x=b$, $y=c$, при которых

$$a^kb+a^{k+1}c=1. \tag{3}$$

Докажем, что утверждение о существовании решения верно и при $n=k+1$.

Из равенства (2) имеем

$$a^k=a^{k+1}+a^{k+2}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$(a^{k+1}+a^{k+2})\,b+a^{k+1}c=1,$$

т. е.

$$a^{k+1}(b+c)+a^{k+2}b=1,$$

откуда видно, что целые значения $x=b+c$, $y=b$ удовлетворяют данному уравнению при $n=k+1$.

Следовательно, при любом натуральном n данное уравнение имеет решение в целых числах.

Остается доказать, что при любом натуральном n данное уравнение имеет единственное решение.

Предположим, что данное уравнение имеет два различных решения в целых числах: $x=\alpha_1$, $y=\beta_1$ и $x=\alpha_2$, $y=\beta_2$. Таким образом, имеем

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\alpha_1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\beta_1=1$$

и

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\alpha_2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\beta_2=1.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим

$$(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n+(\beta_1-\beta_2)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}=0,$$

или

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=0, \tag{5}$$

откуда получаем

$$\sqrt{5}=1-\frac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{\beta_1-\beta_2},$$

что невозможно, так как левая часть иррациональна, а правая часть — рациональное число. Следовательно, равенство (5) возможно только при $\alpha_1=\alpha_2$ и $\beta_1=\beta_2$. Итак, уравнение имеет только одно решение.

150. Пусть x — четное число. Тогда x^{10} четно и $p \cdot x^7$ также четно, а потому $x^{10}+px^7$ четно.

Так как сумма четного числа $x^{10}+px^7$ и нечетного q не может быть равной нулю, то при x четном уравнение не имеет целых решений. Пусть теперь x — нечетное число. Тогда $x^{10}+q$ четно, как сумма нечетных чисел, а число px^7 нечетно. Следовательно, и при нечетном x уравнение не имеет целых решений. Итак, утверждение задачи верно.

151. Из условия следует, что $z-1<\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$. Ясно, что $z-1>0$, а потому из последнего неравенства следует:

$$\frac{1}{z-1}>\sqrt[n]{2}-1, \quad \text{или} \quad \frac{1}{z-1}+1>\sqrt[n]{2}, \quad \text{или} \quad \frac{z}{z-1}>\sqrt[n]{2},$$

т. е. $\frac{z^n}{(z-1)^n}>2$, откуда $z^n>2(z-1)^n$. Из уравнения $x^n+y^n=z^n$ вытекает, что $z \geqslant y+1$, $z \geqslant x+1$, или $z-1 \geqslant y$, $z-1 \geqslant x$, а потому $(z-1)^n \geqslant x^n$, $(z-1)^n \geqslant y^n$. Сложив последние два неравенства, получим $x^n+y^n \leqslant 2(z-1)^n$. Но так как $2(z-1)^n<z^n$, то $x^n+y^n<z^n$, т. е. данное уравнение не имеет решений ни при каких целых x, y, z, если $z<1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

152. Возведя обе части данного уравнения в куб, получим

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=(x+3y)\sqrt{x}+(3x+y)\sqrt{y}.$$

Так как по условию $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ — иррациональные числа, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=a, \\ 3x+y=b. \end{cases}$$

Поскольку x и y должны быть целыми положительными числами, то из полученной системы следует, что a и b также целые положительные числа. Решая полученную систему уравнений, находим

$$x=\frac{3b-a}{8}, \quad y=\frac{3a-b}{8}.$$

Так как x и y должны быть положительными числами, то должны выполняться одновременно неравенства $3b-a>0$, $3a-b>0$, откуда $\frac{1}{3}<\frac{a}{b}<3$.

Далее, поскольку x и y должны быть целыми, то числа $3b-a$ и $3a-b$ должны быть кратны 8, т. е. $3b-a=8m$, $3a-b=8n$, откуда $a=3n+m$, $b=3m+n$, причем m и n должны быть такими целыми числами, чтобы a и b были положительными.

153. Перепишем данное уравнение в виде

$$px+py-xy=0, \quad \text{или} \quad xy-py-px+p^2=p^2, \quad \text{или}$$
$$y(x-p)-p(x-p)=p^2, \quad \text{т. е.} \quad (x-p)(y-p)=p^2.$$

Ясно, что произведение двух целых чисел $x-p$ и $y-p$ равно квадрату простого числа p лишь в следующих шести случаях:

$$\begin{array}{llll}
x-p=p, & y-p=p, & \text{откуда} \quad x_1=y_1=2p, & \\
x-p=-p, & y-p=-p, & \text{откуда} \quad x_2=y_2=0, & \\
x-p=1, & y-p=p^2, & \text{откуда} \quad x_3=p+1, & y_3=p^2+p, \\
x-p=-1, & y-p=-p^2, & \text{откуда} \quad x_4=p-1, & y_4=p-p^2, \\
x-p=p^2, & y-p=1, & \text{откуда} \quad x_5=p+p^2, & y_5=p+1, \\
x-p=-p^2, & y-p=-1, & \text{откуда} \quad x_6=p-p^2, & y_6=p-1.
\end{array}$$

154. Имеем

$$x^2+xy+y^2=x^2y^2.$$

Согласно задаче 134 это уравнение не имеет целых положительных решений.

155. Вычитая из второго уравнения системы первое, получим

$$yz-y-z=5, \qquad (1)$$

или

$$yz-y-z+1=6,$$

$$(y-1)(z-1)=6.$$

Если $y<z$, то последнее уравнение удовлетворяется лишь двумя системами:

$$\begin{cases} y-1=1, \\ z-1=6, \end{cases} \quad \begin{cases} y-1=2, \\ z-1=3. \end{cases}$$

Из первой системы $y=2$, $z=7$, а из второй — $y=3$, $z=4$.

Подставляя эти значения y и z в одно из уравнений заданной системы, получим соответствующие им значения $x_1=5$, $x_2=7$. Поэтому $x_1=5$, $y_1=2$, $z_1=7$; $x_2=7$, $y_2=3$, $z_2=4$. В силу симметричности системы уравнений относительно y и z при $y>z$ имеем $x_3=5$, $y_3=7$, $z_3=2$; $x_4=7$, $y_4=4$, $z_4=3$. Если $y=z$, то из (1) следует, что уравнение имеет только иррациональные корни.

156. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$7x+4y=80,$$

откуда

$$y=20-7\cdot\frac{x}{4}.$$

Поскольку x и y должны быть целыми положительными числами, то легко установить, что x может иметь только два значения: 4 и 8, а соответствующие значения y таковы: 13 и 6.

Теперь легко найти и значения z.

Итак, система имеет два решения:

$$x_1=4, \quad y_1=13, \quad z_1=3; \quad x_2=8, \quad y_2=6, \quad z_2=6.$$

157. Из второго уравнения системы находим

$$x=y+z-3.$$

Подставляя это значение x в первое уравнение системы, получаем

$$y^2+z^2+9+2yz-6y-6z-y^2-z^2=1,$$

или $2yz-6y-6z=-8$, или $y(z-3)=3z-4$, откуда

$$y=\frac{3z-4}{z-3}=\frac{3z-9+5}{z-3}=3+\frac{5}{z-3}.$$

При целом y выражение $z-3$ может равняться лишь ± 1 и ± 5. Таким образом, имеем

$$z_1=4, \quad z_2=2, \quad z_3=8, \quad z_4=-2.$$

Соответствующие значения x и y таковы:

$$x_1=9, \quad x_2=-3, \quad x_3=9, \quad x_4=-3;$$

$$y_1=8, \quad y_2=-2, \quad y_3=4, \quad y_4=2.$$

Итак, данная система имеет четыре решения в целых числах.

158. Имеем

$$x^2+y=x+y^2,$$
$$(x-y)(x+y-1)=0.$$

Поэтому $x-y=0$ или $x+y-1=0$.

Если $x-y=0$, то $x=y$; поэтому из условия имеем

$$x^2+x-42=0,$$

откуда

$$x_1=-7, \quad x_2=6,$$

и данная система уравнений имеет решения

$$\begin{cases} x_1=-7, \\ y_1=-7, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=6, \\ y_2=6. \end{cases}$$

Если $x+y-1=0$, то, составляя систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=42, \\ x+y-1=0, \end{cases}$$

получим $x=1-y$; следовательно,

$$(1-y)^2+y=42,$$

или

$$y^2-y-41=0.$$

Последнее уравнение не имеет целых решений.

Отв. $x_1=-7$, $y_1=-7$; $x_2=6$, $y_2=6$.

159. Сложив оба уравнения, получим

$$2x^2+8y^2+8xy=200,$$

или

$$x^2+4y^2+4xy=100,$$

или

$$(x+2y)^2=100,$$

откуда

$$x+2y=10. \tag{1}$$

Вычитая второе данное уравнение из первого, получим

$$2y^2+8z^2+8yz=50,$$

или

$$(y+2z)^2=25,$$

откуда

$$y+2z=5. \tag{2}$$

Умножая обе части уравнения (2) на 2 и вычитая затем новое уравнение из (1), получим

$$x-4z=0, \quad \text{т. е.} \quad x=4z. \tag{3}$$

Таким образом, из (2) и (3) следует:

$$x=4z, \quad y=5-2z.$$

Так как $z>0$ и $y>0$, то возможны лишь два случая:

а) $z_1=1$, $y_1=3$, $x_1=4$; б) $z_2=2$, $y_2=1$, $x_2=8$.

Отв. $x_1=4$, $y_1=3$, $z_1=1$; $x_2=8$, $y_2=1$, $z_2=2$.

160. Так как $z=x+y$, то первое уравнение системы можно переписать в виде $x!+y!=(x+y)!$.

Поскольку (по определению) $0!=1$, то, поделив обе части уравнения $x!+y!=(x+y)!$ на произведение $x!y!$, получим равносильное ему уравнение $\frac{1}{y!}+\frac{1}{x!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}$. Так как $\frac{(x+y)!}{x!y!}=C_{x+y}^{x}=C_{x+y}^{y}$ есть целое число, то и сумма $\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}$ должна быть целым числом. Последнее возможно лишь в пяти случаях:

$$x=y=0;\quad x=y=1;\quad x=y=2;\quad x=0,\ y=1;\quad x=1,\ y=0.$$

Проверкой убеждаемся, что только $x=y=1$ удовлетворяют данной системе. Итак, система имеет единственное решение $x=1$, $y=1$, $z=2$.

§ 4. Преобразования рациональных выражений

161. Первое решение. Положим $\frac{1}{x}=y$, так что будем иметь $x+y=1$ и $xy=1$. Тогда

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2=-1,$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^2-xy+y^2=$$
$$=(x^2+y^2)-xy=-1-1=-2,$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=$$
$$=(-1)(-2)-1^2\cdot 1=1,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Так как $x^2-x+1=0$, то $x^3+1=0$, т. е. $x^3=-1$. Далее,

$$x^5+\frac{1}{x^5}=x^3\cdot x^2+\frac{1}{x^3\cdot x^2}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2=-1+2=1.$$

162. Так как $x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=$ $=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$, то, умножив обе части данного уравнения на x^4+1, получим

$$1=(ax+b)(x^2+x\sqrt{2}+1)+(cx+d)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

Поскольку это равенство должно быть тождеством, то, приравнивая коэффициенты при равных степенях x в левой и правой частях тождества, найдем

$$0=a+c,\quad 0=a\sqrt{2}+b-c\sqrt{2}+d,$$
$$0=a+b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2},\quad 1=b+d,$$

откуда находим

$$a=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad b=d=\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно, тождество запишется так:

$$\frac{1}{x^4+1}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right).$$

163. Из данного равенства следуют равенства

$$a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a+2b-c)(a-c)$$

и

$$b^2=(a+b-c)^2-a^2=(2a+b-c)(b-c).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a+2b-c)(a-c)+(a-c)^2}{(2a+b-c)(b-c)+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

164. Перепишем данное равенство в виде

$$\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ab}}=\frac{13}{6},$$

или

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{13}{6}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}.$$

Таким образом, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ есть корень уравнения $x+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$. Два корня ясны: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$, а других корней это уравнение (сводящееся к квадратному) не имеет, откуда следует, что $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{2}{3}$ или $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{3}{2}$, а потому $\frac{a}{b}=\frac{4}{9}$ или $\frac{a}{b}=\frac{9}{4}$. В силу изложенного отношение $\frac{a}{b}$ других значений, кроме найденных, не может принимать.

165. Умножив обе части данного равенства на abc, получим

$$abc\,(a+b+c)=ab+ac+bc, \text{ или } ab-abc^2-abc\,(a+b)+c\,(a+b)=0.$$

Умножим полученное равенство на $a-b$:

$$ab\,(a-b)-abc^2\,(a-b)-abc\,(a^2-b^2)+c\,(a^2-b^2)=0,$$

откуда после перегруппировки следует

$$a^2b-b^2c-a^3bc+ab^2c^2=ab^2+a^2bc^2-a^2c-ab^3c,$$

или

$$b\,(a^2-bc-a^3c+abc^2)=a\,(b^2+abc^2-ac-b^3c),$$

или

$$b\,[(a^2-bc)-ac\,(a^2-bc)]=a\,[(b^2-ac)-bc\,(b^2-ac)],$$

откуда

$$b\,(a^2-bc)\,(1-ac)=a\,(1-bc)\,(b^2-ac).$$

166. При $k=2$ имеем $b_2=\frac{1}{a}\cdot b_1\cdot b_1$, т. е. $b_2=\frac{b_1^2}{a}$.

При $k=3$ имеем $b_3=\frac{1}{2a}(b_1b_2+b_2b_1)$, т. е. $b_3=\frac{b_1b_2}{a}=\frac{b_1}{a}\cdot\frac{b_1^2}{a}=\frac{b_1^3}{a^2}$.

Теперь докажем, что если

$$b_{m-1}=\frac{b_1^{m-1}}{a^{m-2}}, \text{ где } m=2, 3, 4, \ldots, n, \text{ то } b_n=\frac{b_1^n}{a^{n-1}}.$$

Имеем

$$b_n=\frac{1}{(n-1)\,a}\left(b_1\frac{b_1^{n-1}}{a^{n-2}}+\frac{b_1^2}{a}\cdot\frac{b_1^{n-2}}{a^{n-3}}+\ldots+\frac{b_1^{n-1}}{a^{n-2}}b_1\right)=\frac{b_1^n}{a^{n-1}}.$$

Следовательно, $b_n=\frac{b_1^n}{a^{n-1}}$.

167. Перепишем данное произведение в виде

$$P=2^{1/2}\cdot 2^{2/4}\cdot 2^{3/8}\cdot 2^{4/16}\cdot 2^{5/32}\ldots$$

Прологарифмируем это равенство по основанию 2:

$$\log_2 P=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots$$

Правую часть этого равенства можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \\ +\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \\ +\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \\ +\frac{1}{16}+\dots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Суммируя каждую строку из (1) по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии, получим ряд чисел

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\dots$$

Наконец, суммируя полученные числа, находим

$$\log_2 P = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

откуда $P=2^2=4$, что и требовалось доказать.

168. Так как $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$, то имеем

$$P=3\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{3^{2^{n-1}}}\right).$$

Поскольку $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3^2}$, $\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)=1-\frac{1}{3^{2^2}}$ и т. д., то

$$P=3\left(1-\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

169. Имеем

$$1-\frac{1}{4}=\frac{(2-1)(2+1)}{2\cdot 2},$$

$$1-\frac{1}{9}=\frac{(3-1)(3+1)}{3\cdot 3},$$

$$1-\frac{1}{16}=\frac{(4-1)(4+1)}{4\cdot 4},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}.$$

Умножив почленно эти равенства, получим

$$P=\frac{n+1}{2n}.$$

170. Поскольку в многочлене нет членов с произведением аргументов, то можно дополнить до полных квадратов отдельно группу членов, содержащих x, и группу членов, содержащих y. Имеем

$$F(x, y)=2(x^2-2x)-3(y^2+2y)+1=[2(x^2-2x+1)-2]-$$
$$-[3(y^2+2y+1)-3]+1=2(x-1)^2-3(y+1)^2+2.$$

171. Расположив многочлен по степеням аргумента x, применим преобразования выделения полного квадрата. Имеем

$$F(x, y, z) = 2[x^2 + (3y+z)x] + y^2 - z^2 + 1 =$$

$$= 2\left[x^2 + 2x\frac{3y+z}{2} + \left(\frac{3y+z}{2}\right)^2\right] - \frac{(3y+z)^2}{2} + y^2 - z^2 + 1 =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}y^2 - 3yz - \frac{3}{2}z^2 + 1.$$

Теперь рассмотрим многочлен с двумя аргументами

$$f(y, z) = -\frac{7}{2}y^2 - 3yz - \frac{3}{2}z^2 + 1.$$

Применим к этому многочлену метод выделения полного квадрата, как изложено выше. Имеем

$$f(y, z) = -\frac{7}{2}\left(y^2 + 2\cdot\frac{3}{7}zy\right) - \frac{3}{2}z^2 + 1 =$$

$$= -\frac{7}{2}\left(y^2 + 2\cdot y\frac{3}{7}z + \frac{9}{49}z^2\right) + \frac{9}{14}z^2 - \frac{3}{2}z^2 + 1 =$$

$$= -\frac{7}{2}\left(y + \frac{3}{7}z\right)^2 - \frac{6}{7}z^2 + 1.$$

Таким образом,

$$F(x, y, z) = 2\left(x + \frac{3}{2}y + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(y + \frac{3}{7}z\right)^2 - \frac{6}{7}z^2 + 1.$$

172. Имеем

$$(x+y)(x+4y)(x+2y)(x+3y) + y^4 =$$

$$= (x^2 + 5xy + 4y^2)(x^2 + 5xy + 6y^2) + y^4 =$$

$$= [(x^2 + 5xy + 5y^2) - y^2][(x^2 + 5xy + 5y^2) + y^2] + y^4 =$$

$$= (x^2 + 5xy + 5y^2)^2 - y^4 + y^4 = (x^2 + 5xy + 5y^2)^2,$$

что и требовалось доказать.

173. Пусть $x = u + v$, $y = u - v$. Имеем

$$F(x, y) = u^2 - v^2 + u + v = (u^2 + u) - (v^2 - v) = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(v - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Но так как $x = u + v$, $y = u - v$, то $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$, а потому

$$F(x, y) = \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y-1}{2}\right)^2.$$

174. Преобразуем левую часть (которую обозначим через A) доказываемого равенства. Имеем

$$A = \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(4x^2 - 2 + \frac{1}{4x^2}\right) + \ldots + \left(2^{2n}x^2 - 2 + \frac{1}{2^{2n}x^2}\right) =$$

$$= (x^2 + 4x^2 + \ldots + 2^{2n}x^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4x^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}x^2}\right) - 2(n+1).$$

Так как выражения в первых двух скобках представляют суммы геометрических прогрессий, то

$$A = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)\left(x^2 + \frac{1}{4^n x^2}\right) - 2(n+1),$$

что и требовалось доказать.

175. Имеем очевидные равенства

$$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2), \qquad 2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2).$$

В силу условия задачи правые части этих равенств равны, следовательно, равны и их левые части, т. е. $xy=ab$.

Итак, имеем $xy=ab$, $x+y=a+b$. Из этих равенств заключаем, что пары чисел x, y и a, b являются корнями одного и того же квадратного уравнения. Значит, либо $x=a$, $y=b$, либо $x=b$, $y=a$. Ясно, что в обоих случаях $x^n+y^n=a^n+b^n$.

176. Так как $ax+by+cz=0$, то $(ax+by+cz)^2=0$, т. е.

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2bcyz+2caxz+2abxy=0. \qquad (1)$$

Расположив знаменатель рассматриваемой дроби по степеням букв x, y и z, получим

$$a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2-2bcyz-2cazx-2abxy.$$

Прибавив к этому выражению (знаменателю) левую часть равенства (1), которая равна нулю, получим

$$a(a+b+c)x^2+b(a+b+c)y^2+c(a+b+c)z^2,$$

или

$$(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2).$$

Таким образом, рассматриваемая дробь перепишется в следующем виде:

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)},$$

или

$$\frac{1}{a+b+c};$$

последнее выражение не зависит от x, y и z. Следовательно, утверждение задачи верно.

177. В силу условия задачи имеем $(a+b+c)^2=0$, или

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0,$$

откуда получаем

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca).$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)=$$
$$=4[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)].$$

Поскольку по условию $a+b+c=0$, то

$$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Следовательно,

$$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

откуда

$$2(a^4+b^4+c^4)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4).$$

178. Обозначим через k каждое из данных равных отношений. Тогда

$$\frac{m}{(a+b)^2}+\frac{n}{(a+c)^2}=ka,$$

$$\frac{n}{(b+c)^2}-\frac{l}{(a+b)^2}=kb,$$

$$\frac{l}{(a+c)^2}+\frac{m}{(b+c)^2}=kc.$$

Умножим обе части этих равенств соответственно на l, m и $-n$. Сложив почленно эти новые равенства, получим

$$0=k(al+bm-cn).$$

Но так как по условию $k\neq 0$, то имеем

$$al+bm=cn.$$

Умножив теперь те же равенства соответственно на

$$\frac{1}{(b+c)^2},\quad -\frac{1}{(a+c)^2}\quad \text{и}\quad -\frac{1}{(a+b)^2}$$

и сложив их почленно, получим

$$0=k\left[\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{b}{(a+c)^2}-\frac{c}{(a+b)^2}\right].$$

Поскольку $k\neq 0$, то

$$\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{b}{(a+c)^2}-\frac{c}{(a+b)^2}=0,\ \text{откуда}\ \frac{a}{(b+c)^2}=\frac{c}{(a+b)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}.$$

179. Обозначим данные равные отношения через $\frac{1}{k}$. Тогда

$$a=k(x^2-yz),\qquad b=k(y^2-zx),\qquad c=k(z^2-xy).$$

Имеем

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{k^2(x^2-yz)^2-k^2(y^2-zx)(z^2-xy)}{x}=k^2(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

Аналогично убеждаемся, что

$$\frac{b^2-ca}{y}=k^2(x^3+y^3+z^3-3xyz),$$

$$\frac{c^2-ab}{z}=k^2(x^3+y^3+z^3-3xyz).$$

Итак, утверждение задачи верно.

180. Имеем

$$A=\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{a^4-b^4-(a-b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a-b)(a+b)-(a-b)}{a^3b^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)+1}=\frac{[(a+b)^2-2ab](a-b)(a+b)-(a-b)}{a^3b^3-(a+b)[(a+b)^2-3ab]+1}.$$

Но так как $a+b=1$, то

$$A=\frac{(1-2ab)(a-b)-(a-b)}{a^3b^3-(1-3ab)+1}=\frac{(b-a)(1-1+2ab)}{a^3b^3+3ab}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

181. Первое решение. Согласно условию должно иметь место тождество

$$x^3+4x^2+6x+4=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D,$$

или

$$x^3+4x^2+6x+4=Ax^3+(3A+B)x^2+(3A+2B+C)x+(A+B+C+D).$$

Следовательно, должно быть

$$\left.\begin{aligned} A&=1,\\ 3A+B&=4,\\ 3A+2B+C&=6,\\ A+B+C+D&=4. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решая систему (1), получим

$$A=B=C=D=1,$$

а поэтому

$$x^3+4x^2+6x+4=(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1.$$

Второе решение. Имеем

$$x^3+4x^2+6x+4=[(x+1)-1]^3+4[(x+1)-1]^2+6[(x+1)-1]+4=$$
$$=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1+4(x+1)^2-8(x+1)+4+$$
$$+6(x+1)-6+4=(x+1)^3+(x+1)^2+(x+1)+1.$$

182. Имеем

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=a^2c-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+abc-$$
$$-abc=a^2(c-b)+bc(c-b)-ab(c-b)-ac(c-b)=$$
$$=(c-b)(a^2-ab+bc-ac)=(c-b)[a(a-b)-c(a-b)]=$$
$$=(a-b)(a-c)(c-b).$$

Поскольку a, b, c — попарно не равные между собой числа, то $a-b\neq 0$, $a-c\neq 0$, $c-b\neq 0$, и утверждение задачи верно.

183. Положим $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, так что $x=ka$, $y=kb$, $z=kc$. Тогда имеем

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2)(a^2+b^2+c^2)=$$
$$=k^2(a^2+b^2+c^2)^2=(ka^2+kb^2+kc^2)^2=(a\cdot ka+b\cdot kb+c\cdot kc)^2=$$
$$=(ax+by+cz)^2,$$

что и требовалось доказать.

184. На основании свойства ряда равных отношений имеем

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}=\frac{x_1}{x_2},$$
$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}=\frac{x_2}{x_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}=\frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Перемножив все эти n равенств, получим

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_2+x_3+\ldots+x_{n+1}}\right)^n=\frac{x_1}{x_{n+1}}.$$

185. Пусть

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{1}{k},$$

тогда

$$a=kx,\ b=ky,\ c=kz. \qquad (1)$$

Далее имеем

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc). \qquad (2)$$

Но так как $a+b+c=a^2+b^2+c^2=1$, то из (2) получаем

$$ab+ac+bc=0. \qquad (3)$$

Подставляя из (1) значения a, b, c в (3), получим

$$k^2xy+k^2xz+k^2yz=0,$$

а так как $k^2\neq 0$, то

$$xy+xz+yz=0.$$

186. Имеем

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{Ax^2+(2A+B)x+A-2B}{x^3-3x-2}.$$

Итак, имеем

$$x^2+5=Ax^2+(2A+B)x+(A-2B). \qquad (1)$$

Так как (1) — тождество, то должно быть

$$\left.\begin{aligned} A&=1,\\ 2A+B&=0,\\ A-2B&=5.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Все три равенства выполняются при $A=1$, $B=-2$.

§ 5. Преобразования выражений, связанных с иррациональностями

187. Так как $9+4\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}+5=(2+\sqrt{5})^2$, то

$$A=(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=-2.$$

188. Так как $4+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^2$ и $10+6\sqrt{3}=$ $=3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^3$, то

$$\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}=\sqrt{3}+1.$$

189. Имеем

$$\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{6}+8\sqrt{3}+4\sqrt{2}+18}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{12+8\sqrt{3}+4+4\sqrt{6}+4\sqrt{2}+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2+2\sqrt{2}(2\sqrt{3}+2)+2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{3}+2+\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2).$$

190. Имеем

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1.$$

Следовательно, выражение

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1.$$

191. Имеем

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Таким образом, предложенное выражение перепишется в таком виде:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2}=3.$$

192. Можно показать, что функция определена лишь при $x\geqslant 1$. Пусть $\sqrt{x-1}=z$; тогда $x=z^2+1$. Следовательно,

$$y=\sqrt{z^2+1+2z}+\sqrt{z^2+1-2z},$$

или

$$y=\sqrt{(z+1)^2}+\sqrt{(z-1)^2}.$$

Но так как $z\geqslant 0$, то $\sqrt{(z+1)^2}=z+1$, а потому

$$y=z+1+|z-1|.$$

Если $z\geqslant 1$, то $y=2z$, а если $z\leqslant 1$, то $y=2$.

Таким образом,

$$y=2\sqrt{x-1}, \text{ если } x\geqslant 2;\ y=2, \text{ если } 1\leqslant x\leqslant 2.$$

193. Первое решение. Пусть $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$. Тогда

$$M=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}.$$

Но так как $x^4+x^2y^2+y^4=\frac{x^6-y^6}{x^2-y^2}$, а $x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}$, то

$$M=\frac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^2-y^2)(x^3-y^3)}=\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}.$$

Второе решение. Так как

$$\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^4}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2-\sqrt[3]{a^2b^2}=$$
$$=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}),$$

то

$$M=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}.$$

194. Подкоренное выражение преобразуем так:

$$3+9\sqrt[3]{12}-9\sqrt[3]{18}=9-3\sqrt[3]{18\cdot 27}+3\sqrt[3]{12\cdot 27}-6=$$
$$=(\sqrt[3]{9})^3-3\sqrt[3]{9^2\cdot 6}+3\sqrt[3]{9\cdot 6^2}-(\sqrt[3]{6})^3=(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6})^3.$$

Следовательно, данное выражение равно $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}$.

195. Имеем

$$\sqrt{3{,}75+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+2\sqrt{2}+2)+(\sqrt{3}+\sqrt{6})+\frac{3}{4}}=$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=1+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

196. Имеем

$$\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+1^2+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1,$$

$$\sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2+1^2-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}+1.$$

Следовательно, предложенное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)-(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}=2.$$

197. Для удобства введем обозначения $\sqrt[4]{a}=u$, $\sqrt[4]{b}=v$. Тогда доказываемое равенство перепишется в виде

$$\sqrt{\frac{u^4+2u^2v^2+9v^4}{u^2-2uv+3v^2}-2v^2}=u+v.$$

Преобразуем подкоренное выражение. Имеем

$$\frac{u^4+2u^2v^2+9v^4}{u^2-2uv+3v^2}-2v^2=\frac{(u^2+3v^2)^2-4u^2v^2}{u^2-2uv+3v^2}-2v^2=$$

$$=\frac{(u^2+2uv+3v^2)(u^2-2uv+3v^2)}{u^2-2uv+3v^2}-2v^2=u^2+2uv+v^2=(u+v)^2.$$

Итак, мы пришли к равенству

$$\sqrt{(u+v)^2}=u+v.$$

Последнее верно, так как $u\geqslant 0$ и $v\geqslant 0$.

198. Пусть $\sqrt[3]{x^2}=m$, $\sqrt[3]{y^2}=n$, так что $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$. Тогда $x^2=m^3$, $y^2=n^3$ и данное равенство перепишется в следующем виде:

$$\sqrt{m^3+\sqrt[3]{m^6n^3}}+\sqrt{n^3+\sqrt[3]{m^3n^6}}=a,$$

или

$$\sqrt{m^3+m^2n}+\sqrt{n^3+mn^2}=a,$$

или

$$m\sqrt{m+n}+n\sqrt{m+n}=a,$$

или

$$(m+n)\sqrt{m+n}=a.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$(m+n)^3=a^2,$$

откуда

$$m+n=\sqrt[3]{a^2},$$

т. е.

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}.$$

199. Имеем

$$20+14\sqrt{2}=8+12\sqrt{2}+12+2\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^3,$$
$$20-14\sqrt{2}=8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})^3,$$

и потому

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}=$$
$$=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4.$$

200. Пусть $x=\sqrt[3]{2}$, тогда $\sqrt[3]{4}=x^2$. Таким образом, рассматриваемое равенство перепишется так:

$$cx^2+bx+a=0. \tag{1}$$

Поскольку $x^3=2$, то (1) можно переписать в виде

$$2cx^2+2bx+ax^3=0,$$

или после сокращения на $x\ (x\neq 0)$ получим

$$ax^2+2cx+2b=0. \tag{2}$$

Из (1) имеем $acx^2=-(bx+a)\,a$, а из (2) находим

$$acx^2=-(2cx+2b)\,c.$$

Из последних двух равенств заключаем, что

$$a(bx+a)=c(2cx+2b),$$

или

$$(ab-2c^2)\,x+a^2-2bc=0,$$

т. е.

$$(ab-2c^2)\sqrt[3]{2}+a^2-2bc=0.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда

$$ab-2c^2=0$$

и

$$a^2-2bc=0,$$

или

$$ab=2c^2 \tag{3}$$

и

$$a^4=4b^2c^2. \tag{4}$$

Подставляя в (4) вместо c^2 его выражение из (3), получим $a^4=2ab^3$. Если $a\neq 0$, то отсюда получаем $a^3=2b^3$, значит, $b\neq 0$, и мы имеем $a/b=\sqrt[3]{2}$, что невозможно. Следовательно, должно быть $a=0$. Поэтому данное соотношение принимает вид $b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ или $b+c\sqrt[3]{2}=0$. Если $c\neq 0$, то получаем $\sqrt[3]{2}=-b/c$, что невозможно. Значит, $c=0$, а потому и $b=0$.

201. Положим $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$, откуда $a_1=b_1k$, $a_2=b_2k,\ldots$ $\ldots,\ a_n=b_nk$. Таким образом, левая часть доказываемого (первого) равенства перепишется так:

$$(b_1^2k^2+b_2^2k^2+\ldots+b_n^2k^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=k^2(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^2=$$
$$=(kb_1^2+kb_2^2+\ldots+kb_n^2)^2=(kb_1\cdot b_1+kb_2\cdot b_2+\ldots+kb_n\cdot b_n)^2=$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Для получения второго равенства подставим в доказанное равенство вместо $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ соответственно $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots$ $\ldots, \sqrt{a_n}, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \sqrt{b_3}, \ldots, \sqrt{b_n}$.

202. Пусть

$$\sqrt{m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}.$$

Чтобы это равенство выполнялось, достаточно (но не необходимо), чтобы

$$x+y+z=m,$$
$$2\sqrt{xy}=\sqrt{a},$$
$$2\sqrt{xz}=\sqrt{b},$$
$$2\sqrt{yz}=\sqrt{c}.$$

Из этой системы четырех уравнений относительно x, y, z, m находим

$$x=\frac{\sqrt{abc}}{2c},\quad y=\frac{\sqrt{abc}}{2b},\quad z=\frac{\sqrt{abc}}{2a},\quad m=\frac{ab+ac+bc}{2\sqrt{abc}}.$$

Таким образом, если произведение abc — полный квадрат и $m=\frac{ab+ac+bc}{2\sqrt{abc}}$, то данный радикал можно представить в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

§ 6. Преобразования выражений, связанных с логарифмической функцией

203. Имеем

$$\log_6 9=\log_6 3^2=2\log_6 3=2\log_6\frac{6}{2}=2(\log_6 6-\log_6 2)=2(1-k).$$

204. Так как $\lg 10=1$, $\lg 10=\lg 2+\lg 5$, то имеем систему

$$\lg 2+\lg 5=1,\qquad \lg 2\cdot\lg 5=k.$$

Таким образом, числа $\lg 2$ и $\lg 5$ служат корнями уравнения

$$x^2-x+k=0,$$

откуда

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}.$$

Учитывая, что $\lg 2<\lg 5$, имеем

$$\lg 5=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2},\ \lg 2=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2}.$$

205. Условие задачи можно переписать в виде

$$a^2+b^2+2ab=9ab \text{ или } \left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab.$$

Прологарифмируем обе части последнего равенства:

$$\lg\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\lg(ab),$$

или (считая $a>0$, $b>0$)

$$2\lg\frac{a+b}{3}=\lg a+\lg b,$$

а следовательно,

$$\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

206. Вначале заметим, что из условия следует, что $c>b$, т. е. $c-b>0$. Если $a=1$, то обе части доказываемого равенства равны нулю, т. е. равенство справедливо. В дальнейшем будем считать, что $a\neq 1$. Так как $(c-b)(c+b)=a^2$, то имеем

$$\log_a(c-b)+\log_a(c+b)=2,$$

или

$$\frac{1}{\log_{c-b}a}+\frac{1}{\log_{c+b}a}=2,$$

или

$$\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=2\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a,$$

что и требовалось доказать.

207. Из условия задачи следует, что

$a^p=N$, $b^q=N$, $(abc)^r=N$, или $a=N^{\frac{1}{p}}$, $b=N^{\frac{1}{q}}$, $abc=N^{\frac{1}{r}}$, откуда получаем

$$ab=N^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, \tag{1}$$

$$c=\frac{N^{\frac{1}{r}}}{ab}. \tag{2}$$

Подставляя значение ab из равенства (1) в (2), имеем

$$c=\frac{N^{\frac{1}{r}}}{N^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}=N^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}=N^{\frac{pq-r(p+q)}{pqr}}.$$

Возвышая обе части последнего равенства в степень $\frac{pqr}{pq-r(p+q)}$, получаем $N=c^{\frac{pqr}{pq-r(p+q)}}$.

208. Имеем

$$\log_b a=\frac{\log_d a}{\log_d b},\quad \log_c b=\frac{\log_d b}{\log_d c}.$$

Поэтому

$$\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_d c=\frac{\log_d a}{\log_d b}\cdot\frac{\log_d b}{\log_d c}\log_d c=\log_d a,$$

что и требовалось доказать.

209. Так как
$$\log_m n = \frac{1}{\log_n m},$$
то имеем
$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_a x + \log_b x} = \frac{\dfrac{1}{\log_x a} - \dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x a} + \dfrac{1}{\log_x b}} = \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x a + \log_x b} =$$
$$= \frac{\log_x \left(\dfrac{b}{a}\right)}{\log_x ab} = \frac{\dfrac{\log_{ab}\left(\dfrac{b}{a}\right)}{\log_{ab} x}}{\dfrac{1}{\log_{ab} x}} = \log_{ab}\left(\frac{b}{a}\right),$$
что и требовалось доказать.

210. Так как $\log_m n = \dfrac{1}{\log_n m}$ и $\log_a b^n = n\log_a b$, то левую часть доказываемого равенства можно переписать в следующем виде:
$$\log_b a + 2\log_b a + 3\log_b a + \ldots + n\log_b a = (1 + 2 + \ldots + n)\log_b a =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\log_b a.$$

211. В силу определения логарифма имеем
$$b^{\log_a c} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a c} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_a b} = c^{\log_a b},$$
что и требовалось доказать.

212. В силу определения логарифма имеем
$$N = a^{\log_a N}.$$
Также имеем
$$N = (a^b)^{\log_{a^b} N} = a^{\log_{a^b} N^b}.$$
Следовательно,
$$a^{\log_a N} = a^{\log_{a^b} N^b},$$
откуда следует, что
$$\log_a N = \log_{a^b} N^b,$$
что и требовалось доказать.

213. Сразу заметим, что из данных задачи вытекает соотношение $\lg y \neq 1$, т. е. $\dfrac{1}{1-\lg x} \neq 1$, и потому $\lg x \neq 0$. Далее, очевидно, что $\lg y \neq 0$, а поэтому $\lg z = \dfrac{1}{1-\lg y} \neq 1$, т. е. $1 - \lg z \neq 0$.

Из данных равенств следует, далее, что
$$\lg y = \frac{1}{1-\lg x}, \quad \lg z = \frac{1}{1-\lg y}. \qquad (1)$$
Подставляя во второе равенство (1) вместо $\lg y$ выражение $\dfrac{1}{1-\lg x}$, получим
$$\lg z = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\lg x}} = \frac{1-\lg x}{-\lg x} = 1 - \frac{1}{\lg x},$$

откуда

$$\frac{1}{\lg x}=1-\lg z, \text{ т. е. } \lg x=\frac{1}{1-\lg z},$$

или

$$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}.$$

214. Так как $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$, то левую часть доказываемого равенства можно переписать так:

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}\cdots\frac{\log_2 n}{\log_2(n+1)}=$$
$$=\frac{\log_2 2}{\log_2(n+1)}=\frac{1}{\log_2(n+1)}=\log_{n+1}2,$$

что и требовалось доказать.

215. Данное равенство перепишем так:

$$a^2+b^2-2ab=9ab,$$

или

$$(a-b)^2=9ab,$$

или

$$\left(\frac{a-b}{3}\right)^2=ab.$$

Теперь, логарифмируя обе части последнего равенства, получим

$$2\lg\frac{|a-b|}{3}=\lg|a|+\lg|b|,$$

т. е.

$$\lg\frac{|a-b|}{3}=\frac{1}{2}(\lg|a|+\lg|b|),$$

что и требовалось доказать.

216. Действительно, так как $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$, то

$$\frac{\log_a N}{\log_b N}=\frac{\frac{\log_b N}{\log_b a}}{\log_b N}=\frac{1}{\log_b a}=\log_a b,$$

т. е. рассматриваемое отношение есть одно и то же число для любого числа N при постоянных a и b.

217. Так как

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a} \text{ и } \log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a},$$

то

$$\frac{\log_a M}{\log_a N}=\frac{\log_b M}{\log_b a}:\frac{\log_b N}{\log_b a}=\frac{\log_b M}{\log_b N},$$

что и требовалось доказать.

218. Так как $5=10^{\lg 5}$, то $5^{\lg 20}=10^{\lg 5\cdot\lg 20}$, и поскольку $20=10^{\lg 20}$, то $20^{\lg 5}=10^{\lg 5\cdot\lg 20}$. Таким образом, утверждение задачи верно.

219. Любое число вида 10^n, где n — целое число, имеет рациональный десятичный логарифм, так как $\lg 10^n=n$.

Пусть $\lg R=p/q$ — рациональное число (p — целое число, q — натуральное); докажем, что R является целой степенью десяти. Положим, что $R=P/Q$, где P и Q — целые взаимно простые числа. Таким образом, имеем $10^{p/q}=\frac{P}{Q}$, откуда

$$10^p=\frac{P^q}{Q^q}. \qquad (1)$$

Рассмотрим отдельно случаи $p=0$, $p>0$, $p<0$.

Если $p=0$, то $\lg R=0$, откуда $R=1=10^0$.

Если $p>0$, то в равенстве (1) слева — целое число, а так как P и Q не имеют общих делителей, отличных от 1, то равенство (1) возможно только тогда, когда $Q=1$, т. е. $10^p=P^q$. Теперь ясно, что P не имеет других простых множителей, кроме 2 и 5, т. е. $P=2^\alpha\cdot 5^\beta$, и потому $10^p=$ $=2^p\cdot 5^p=P^q=(2^\alpha\cdot 5^\beta)^q=2^{\alpha q}\cdot 5^{\beta q}$, откуда $p=\alpha q$, $p=\beta q$ и $\lg R=\frac{p}{q}=\alpha=\beta$ есть натуральное число, а потому

$$R=\frac{P}{Q}=10^{p/q}=10^\alpha.$$

Пусть $p<0$, т. е. $p=-p'$ $(p'>0)$. Тогда равенство $10^p=\frac{P^q}{Q^q}$ перепишется в таком виде: $10^{p'}=\frac{Q^q}{P^q}$.

Теми же рассуждениями, как и в предыдущем случае, покажем, что $P=1$, $\frac{Q}{P}=10^\alpha$, где α — натуральное число, и

$$R=\frac{P}{Q}=10^{-\alpha}.$$

Наконец, заметим, что в силу изложенного можно сказать, что десятичные логарифмы положительных рациональных чисел, отличных от 10^n, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, иррациональны.

220. Пользуясь формулой $\log_m N=\frac{\log_n N}{\log_n m}$, данное равенство перепишем в таком виде:

$$\frac{\lg x}{\lg a}+\frac{\lg x}{\lg b}+\frac{\lg x}{\lg c}=\frac{\lg x}{\lg a+\lg b+\lg c}.$$

Это равенство имеет место при любом положительном x тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}+\frac{1}{\lg c}-\frac{1}{\lg a+\lg b+\lg c}=0,$$

или

$$(\lg a+\lg b+\lg c)(\lg b\lg c+\lg c\lg a+\lg a\lg b)-\lg a\lg b\lg c=0,$$

или

$$(\lg b+\lg c)(\lg c+\lg a)(\lg a+\lg b)=0,$$

или

$$\lg bc\cdot\lg ca\cdot\lg ab=0.$$

Таким образом, одно из чисел bc, ca или ab должно быть равно 1. Следовательно, искомое соотношение таково:

$$(bc-1)(ca-1)(ab-1)=0.$$

§ 7. Преобразования выражений, связанных с тригонометрическими функциями

221. Имеем

$$\frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 30^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\cos 30^\circ = \sqrt{3}.$$

222. Имеем

$$\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 5^\circ)\operatorname{tg}(60^\circ + 5^\circ) = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{ctg}(3 \cdot 5^\circ) = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3\operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg}^3 5^\circ}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 5^\circ} = \operatorname{tg} 85^\circ$.

223. Имеем

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ =$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ} + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ \cos 60^\circ} = \frac{\sin 60^\circ \cos 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} + 4\cos 10^\circ =$$

$$= 8\sin 60^\circ \sin 10^\circ + 4\cos 10^\circ,$$

так как $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 1/8$. Таким образом, левая часть доказываемого равенства равна

$$4(\cos 50^\circ - \cos 70^\circ + \cos 10^\circ) = 4(\sin 40^\circ + 2\sin 40^\circ \sin 30^\circ) = 8\sin 40^\circ.$$

224. Имеем

$$\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) = \frac{3\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 20^\circ}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{9\operatorname{tg}^2 20^\circ - 6\operatorname{tg}^4 20^\circ + \operatorname{tg}^6 20^\circ}{1 - 6\operatorname{tg}^2 20^\circ + 9\operatorname{tg}^4 20^\circ} = 3,$$

а потому

$$\operatorname{tg}^6 20^\circ - 33\operatorname{tg}^4 20^\circ + 27\operatorname{tg}^2 20^\circ - 3 = 0.$$

225. Имеем

$$\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}.$$

Таким образом, левая часть доказываемого равенства равна

$$\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}=$$

$$=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{5}\,\frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{8\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{16\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)}{16\cos\frac{\pi}{10}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{10}}{16\cos\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{16}.$$

Правая часть доказываемого равенства равна

$$-\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}=\frac{-2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{2\sin\frac{\pi}{15}}=$$

$$=-\frac{2\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{4\sin\frac{\pi}{15}}=-\frac{2\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{8\sin\frac{\pi}{15}}=$$

$$=-\frac{2\sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}=-\frac{\sin\frac{16\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{\sin\frac{\pi}{15}}{16\sin\frac{\pi}{15}}=\frac{1}{16}.$$

Итак, обе части предложенного равенства равны 1/16.

226. Легко проверить, что имеет место тождество

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3ab(a+b+c)-$$
$$-3ac(a+b+c)-3bc(a+b+c)+3abc.$$

Отсюда следует, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Пусть

$$a=\sin\alpha\sin(\beta-\gamma),$$
$$b=\sin\beta\sin(\gamma-\alpha),$$
$$c=\sin\gamma\sin(\alpha-\beta).$$

Докажем, что $a+b+c=0$. Действительно,

$$a+b+c=\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-\sin\beta\cos\gamma\sin\alpha+$$
$$+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\sin\gamma\cos\alpha\sin\beta=0.$$

Следовательно, $a^3+b^3+c^3=3abc$, т. е. доказываемое равенство имеет место.

227. Так как $A+B+C=\pi$, то

$$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C. \qquad (1)$$

Пусть

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k.$$

Ясно, что если $k=0$, т. е. $a=b=c=0$, то доказываемое равенство очевидно. Если $k\neq 0$, то

$$\sin A=\frac{a}{k},\quad \sin B=\frac{b}{k},\quad \sin C=\frac{c}{k}. \tag{2}$$

Подставляя значения $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ из (2) в равенство (1), получим $a=b\cos C+c\cos B$. Аналогично получаются остальные два соотношения.

228. Если $p=0$, то доказываемое равенство справедливо. В дальнейшем будем считать, что $p\neq 0$. Из условия следует, что

$$a^2=p^2(4\cos^2\varphi-4\cos\varphi\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi),$$
$$b^2=p^2(4\sin^2\varphi-4\sin\varphi\sin 2\varphi+\sin^2 2\varphi).$$

Складывая эти два равенства почленно, получим

$$a^2+b^2=p^2[4(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-4(\cos 2\varphi\cos\varphi+\sin 2\varphi\sin\varphi)+\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi],$$

или

$$a^2+b^2=p^2(5-4\cos\varphi)=p^2+4p^2(1-\cos\varphi).$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{a^2+b^2-p^2}{4p^2}=1-\cos\varphi. \tag{1}$$

Соотношения условия задачи перепишем так:

$$a=p(2\cos\varphi-2\cos^2\varphi+1),\qquad b=p(2\sin\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi),$$

или

$$\frac{a-p}{2p}=\cos\varphi(1-\cos\varphi),\qquad \frac{b}{2p}=\sin\varphi(1-\cos\varphi),$$

или

$$\frac{(a-p)^2}{4p^2}=\cos^2\varphi(1-\cos\varphi)^2,\quad \frac{b^2}{4p^2}=\sin^2\varphi(1-\cos\varphi)^2.$$

Сложив почленно последние два равенства, получим

$$\frac{(a-p)^2+b^2}{4p^2}=(1-\cos\varphi)^2,$$

откуда

$$\frac{\sqrt{(a-p)^2+b^2}}{2p}=1-\cos\varphi. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) вытекает, что

$$\frac{\sqrt{(a-p)^2+b^2}}{2p}=\frac{a^2+b^2-p^2}{4p^2},$$

откуда

$$2p\sqrt{(a-p)^2+b^2}=a^2+b^2-p^2.$$

229. Перепишем условие задачи в таком виде:

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}A=\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C,$$

или

$$\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha\sin A}=\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B\sin C}. \tag{1}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\sin(B-\alpha)}{\sin\alpha\sin B}=\frac{\sin B}{\sin C\sin A}, \tag{2}$$

$$\frac{\sin(C-\alpha)}{\sin\alpha\sin C}=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}. \tag{3}$$

Перемножив почленно равенства (1), (2) и (3), получаем

$$\frac{\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)}{\sin^3\alpha\sin A\sin B\sin C}=\frac{1}{\sin A\sin B\sin C},$$

откуда следует, что

$$\sin^3\alpha=\sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha).$$

230. В силу условия задачи имеем

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}=\frac{2}{1}.$$

Образуем производную пропорцию

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}=\frac{2+1}{2-1},\quad \text{или}\quad \frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=3,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

231. Перепишем условие задачи в виде

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Но так как $\frac{\alpha+\beta}{2}\neq k\pi$, то $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, или $\left(\text{так как } \frac{\alpha+\beta}{2}\neq k\frac{\pi}{2}\right)$ $\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=2$. Составим производную пропорцию

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3},$$

откуда

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{3},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3},$$

что и требовалось доказать.

232. Для доказательства предложенного соотношения достаточно доказать, что

$$\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C=0,$$

или

$$\cos C(\sin A\cos B+\cos A\sin B)+\sin C(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=0,$$

или

$$\cos C\sin(A+B)+\sin C\cos(A+B)=0. \tag{1}$$

Но так как $A+B=\pi-C$, то $\sin(A+B)=\sin C$ и $\cos(A+B)=-\cos C$, а потому равенство (1) можно переписать в виде

$$\sin C\cos C-\sin C\cos C=0,$$

что верно.

233. Имеем

$$M=\frac{2-m(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)}{(1-m\sin 2\alpha)(1-m\sin 2\beta)}.$$

Числитель $2-m(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=2-2m\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$. Но так как $m\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)$, то числитель равен $2-2\cos^2(\alpha-\beta)=$ $=2[1-\cos^2(\alpha-\beta)]=2\sin^2(\alpha-\beta)$.

Знаменатель

$$(1-m\sin 2\alpha)(1-m\sin 2\beta)=1-m(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+m^2\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

Выше мы уже установили, что $m(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=2\cos^2(\alpha-\beta)$. С другой стороны,

$$m^2\sin 2\alpha\sin 2\beta=m^2(2\sin\alpha\cos\beta)(2\sin\beta\cos\alpha)=$$
$$=m^2[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)][\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]=$$
$$=m^2\sin^2(\alpha+\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha-\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta).$$

Таким образом, знаменатель примет вид

$$1-2\cos^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta)=1-\cos^2(\alpha-\beta)-$$
$$-m^2\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)-m^2\sin^2(\alpha-\beta)=(1-m^2)\sin^2(\alpha-\beta).$$

Итак, выражение, если $\alpha-\beta\neq k\pi$, $|m|\neq 1$,

$$M=\frac{2\sin^2(\alpha-\beta)}{(1-m^2)\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{2}{1-m^2}$$

не зависит ни от α, ни от β.

Если же выражение M имеет смысл $\left(\text{т. е. } \sin 2\alpha\neq\frac{1}{m},\quad \sin 2\beta\neq\frac{1}{m}\right)$, но $\alpha-\beta=k\pi$, то (по условию задачи) $m\sin(2\beta+k\pi)=\cos k\pi$, т. е. $m\sin 2\beta=$ $=1$, и выражение M не определено.

234. Пусть $y+z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Имеем

$$\operatorname{tg}(x+y+z)=\operatorname{tg}[x+(y+z)]=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(y+z)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(y+z)}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}x+\dfrac{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}}{1-\operatorname{tg}x\dfrac{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z}}=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z}{1-(\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}x}=\frac{A-C}{1-B}.$$

235. Имеем $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{a}{b+c}}{1+\dfrac{a}{b+c}}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$. Так как $a+b+$ $+c\neq 0$, то $\frac{a}{b+c}\neq-1$; следовательно, $\frac{\alpha}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, т. е. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ определен. Аналогично убеждаемся, что $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ также определены.

Далее

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}+\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=$$
$$=\frac{b+c-a}{a+b+c}+\frac{a+c-b}{a+b+c}+\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

236. Первое решение. Если $x=0$, то

$$y=\sin^3 z+\cos^3 z=(\sin z+\cos z)(\sin^2 z-\sin z\cos z+\cos^2 z)=0,$$

т. е. если $x=0$, то и $y=0$, и требуемое соотношение имеет место. В дальнейшем будем считать, что $x\neq 0$. Из условия следует, что

$$\begin{cases}(\sin z+\cos z)^2=x^2,\\(\sin z+\cos z)^3=x^3,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin^2 z+\cos^2 z+2\sin z\cos z=x^2,\\\sin^3 z+\cos^3 z+3\sin z\cos z(\sin z+\cos z)=x^3,\end{cases}$$

или, учитывая условия задачи, имеем

$$\begin{cases}1+2\sin z\cos z=x^2,\\y+3x\sin z\cos z=x^3,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin z\cos z=\dfrac{x^2-1}{2},\\[2mm]\sin z\cos z=\dfrac{x^3-y}{3x},\end{cases}$$

откуда следует, что

$$\frac{x^2-1}{2}=\frac{x^3-y}{3x},$$

а потому

$$y=\frac{3x-x^3}{2},$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем

$$y=\sin^3 z+\cos^3 z=(\sin z+\cos z)(\sin^2 z-\sin z\cos z+\cos^2 z)=$$
$$=(\sin z+\cos z)\left[\frac{-(\sin z+\cos z)^2+3(\sin^2 z+\cos^2 z)}{2}\right]=x\,\frac{-x^2+3}{2}=\frac{3x-x^3}{2}.$$

237. Возведем обе части каждого из данных равенств в квадрат. Имеем

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=a^2,\\\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=b^2.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Сложив почленно равенства (1), получим

$$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=a^2+b^2,$$

или

$$2+2\cos(\alpha-\beta)=a^2+b^2,$$

откуда следует, что

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{a^2+b^2}{2}-1.$$

Далее, перемножив почленно данные равенства, получаем

$$\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=ab,$$

или

$$\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+\sin(\alpha+\beta)=ab,$$

или

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)=ab,$$

откуда

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{ab}{1+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{ab}{1+\dfrac{a^2+b^2}{2}-1}=\frac{2ab}{a^2+b^2},$$

что и требовалось доказать.

238. Имеем

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\qquad \cos^2\beta=\frac{1+\cos 2\beta}{2}.$$

Сложив эти два равенства, получим

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1+\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2},$$

откуда, учитывая условие, получаем

$$\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}=a-1,$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=a-1.$$

239. Ясно, что $\sin\gamma\neq 0$; поэтому данное соотношение можно переписать так: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$, откуда следует, что $\alpha+\beta-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=n\pi$, а потому $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+n\pi$, что и требовалось доказать.

240. Так как $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, то данное равенство можно переписать в следующем виде:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=(2a+b)\sin^2\frac{x}{2}+b\cos^2\frac{x}{2},$$

или

$$2\sin\frac{x}{2}\left[a\cos\frac{x}{2}-(a+b)\sin\frac{x}{2}\right]=0. \qquad (1)$$

Если $a+b=0$, то (1) принимает вид

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Так как по условию $b\neq 0$, то из равенства $a+b=0$ следует, что и $a\neq 0$, а потому $\sin x=0$, а следовательно, и $\operatorname{tg}x=0$.

Если же $a+b\neq 0$, то уравнение распадается на два:

$$\sin\frac{x}{2}=0,\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{a}{a+b}.$$

Из первого уравнения имеем $x/2 = k\pi$, $x = 2k\pi$, а потому $\operatorname{tg} x = 0$. В силу второго уравнения получаем

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{a}{a+b}}{1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2} = \frac{2a(a+b)}{b(b+2a)}.$$

241. Так как $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ и $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. Таким образом, имеем

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{2},$$

$$2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0,$$

или

$$2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2} = 0,$$

откуда находим

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \pm \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1}}{2}. \qquad (1)$$

Но так как $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ должен быть действительным числом, то должно быть $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \geqslant 1$, а поскольку $\left|\cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right| \leqslant 1$, то $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \pm 1$.

В силу ограничений для α и β имеем только $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$, откуда следует, что

$$\alpha = \beta. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) заключаем, что $\alpha = \beta = \pi/3$. Следовательно, и $\gamma = \pi/3$.

§ 8. Последовательности. Суммы

242. В силу условия задачи имеем

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 2, \\ a_3 &= 3a_2 + 2^2, \\ &\cdots\cdots \\ a_k &= 3a_{k-1} + 2^{k-1}. \end{aligned}$$

Умножив обе части первого равенства на 3^{k-2}, второго — на 3^{k-3} и т. д. и сложив почленно получившиеся равенства, найдем

$$a_k = 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-2} + 2^2 \cdot 3^{k-3} + \ldots + 2^{k-1} =$$

$$= 3^{k-1} + \frac{2}{3} \cdot 3^{k-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3^{k-1} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot 3^{k-1} =$$

$$= 3^{k-1} \cdot \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right].$$

Так как выражение, заключенное в квадратных скобках, есть сумма членов геометрической прогрессии, то

$$a_k = 3^{k-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^k}{1-\frac{2}{3}} = 3^k - 2^k,$$

что и требовалось доказать.

243. Очевидно, что утверждение задачи верно при $n=1$. Предположим, что утверждение задачи верно при всех $n \leqslant k$, и докажем, что тогда оно верно и при $n=k+1$, т. е. что $a_{k+1}=2^{k+1}+1$. Действительно, из определения данной последовательности следует, что $a_{k+1}=a_1a_k-a_0a_{k-1}$. На основании предположения индукции имеем $a_k=2^k+1$, $a_{k-1}=2^{k-1}+1$. Следовательно, $a_{k+1}=3\cdot 2^k-2^k+3-2=2^{k+1}+1$. Итак, в силу принципа математической индукции утверждение задачи верно.

244. Из заданной рекуррентной формулы получаем формулу для последовательного вычисления членов последовательности

$$a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

Из этой формулы усматриваем, что все члены последовательности с нечетными индексами равны нулю. Действительно, если $a_{2k-1}=0$, то и

$$a_{2k+1}=\frac{(2k-1)^2}{(2k+1)2k}a_{2k-1}=0,$$

но так как $a_1=0$, то

$$a_1=a_3=a_5=\ldots=a_{2k+1}=0.$$

Для вычисления членов последовательности с четными индексами имеем формулу

$$a_{2k+2}=\frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)}a_{2k}.$$

Следовательно,

$$a_4=\frac{2}{3\cdot 2},\quad a_6=\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{3}. \tag{1}$$

Докажем методом математической индукции, что

$$a_{2k}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k-2)}{3\cdot 5\ldots(2k-1)}\cdot\frac{1}{k}. \tag{2}$$

Из (1) видно, что формула (2) верна при $k=2$ и $k=3$.

Допустим, что формула (2) верна для a_{2k}, тогда для a_{2k+2} получим

$$a_{2k+2}=\frac{2k^2}{(k+1)(2k+1)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k-2)}{3\cdot 5\ldots(2k-1)}\cdot\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k-2)(2k)}{3\cdot 5\ldots(2k-1)(2k+1)}\cdot\frac{1}{k+1}.$$

Таким образом, формула (2) верна для любого a_{2k}. Итак, все члены последовательности с нечетными индексами равны нулю, а все члены последовательности с четными индексами находятся по формуле (2).

245. Очевидно, что при $n=1$ утверждение задачи верно. Предположим, что при $n=k$ утверждение задачи верно, т. е. что $a_k^2-a_{k-1}a_{k+1}=(-1)^k$, и докажем, что $a_{k+1}^2-a_ka_{k+2}=(-1)^{k+1}$. Действительно,

$$a_{k+1}^2-a_ka_{k+2}=a_{k+1}^2-a_k(a_{k+1}+a_k)=$$

$$=a_{k+1}(a_{k+1}-a_k)-a_k^2=a_{k+1}a_{k-1}-a_k^2=$$

$$=-(a_k^2-a_{k-1}a_{k+1})=-(-1)^k=(-1)^{k+1}.$$

Следовательно, в силу принципа математической индукции утверждение задачи верно.

246. Пусть $n=1$. Тогда $a_{2n+2}=a_4=1+3+1=a_1+a_3+1$. Таким образом, при $n=1$ утверждение справедливо. Допустим, что утверждение задачи верно при $n=k$, т. е. что

$$a_{2k+2}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k+1}+1. \qquad (1)$$

Докажем, что тогда оно верно и при $n=k+1$, т. е. что

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1.$$

Действительно, по определению ряда Фибоначчи имеем

$$a_{2k+4}=a_{2k+2}+a_{2k+3}.$$

Отсюда в силу равенства (1) получаем

$$a_{2k+4}=a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2k+1}+a_{2k+3}+1.$$

Итак, на основании принципа математической индукции утверждение задачи верно.

247. Подставляя во второе и третье соотношения вместо a_0 и a_1 число 1, находим

$$a_2=\frac{1}{2}=\frac{1}{2!}, \quad a_3=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{3!}.$$

Предположим, что при всех значениях k, меньших n, имеем $a_k=\frac{1}{k!}$. Докажем, что в этом предположении

$$a_n=\frac{1}{n!}.$$

Действительно,

$$a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_ka_{n-k}+\ldots+a_na_0=$$
$$=a_n+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}+\ldots+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+a_n=2^n\cdot a_n.$$

Поскольку

$$\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+\ldots+\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!}+\ldots+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{(n-1)!}=$$
$$=\frac{1}{n!}\left(C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n\right)-\frac{2}{n!}=\frac{2^n-2}{n!},$$

то уравнение для определения a_n принимает следующий вид:

$$\frac{2^n-2}{n!}+2a_n=2^n\cdot a_n,$$

откуда находим

$$a_n=\frac{1}{n!}.$$

248. В силу данной рекуррентной формулы имеем

$$u_3=(\alpha+\beta)u_2-\alpha\beta u_1=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha-\beta}-\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha-\beta}.$$

Предположим, что при некотором значении индекса n, а также при всех меньших его значениях имеет место соотношение

$$u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}. \qquad (1)$$

Докажем, что если эта формула верна, то она верна и для u_{n+1}. Действительно,

$$u_{n+1}=(\alpha+\beta)u_n-\alpha\beta u_{n-1}=(\alpha+\beta)\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}.$$

Так как формула (1) верна при $n=1$, 2, 3 и так как если верна формула (1) при некотором n, то оказалось, что она верна и для индекса $n+1$, то в силу принципа математической индукции искомый общий член последовательности задается формулой (1).

249. Имеем

$$a_k=4k^3-6k^2+4k-1.$$

Образуем разность

$$k^4-a_k=k^4-4k^3+6k^2-4k+1=(k-1)^4,$$

откуда

$$a_k=k^4-(k-1)^4. \qquad (1)$$

Придавая в (1) k значения 1, 2, 3, ..., n, получим

$$\left.\begin{aligned} a_1&=1,\\ a_2&=2^4-1,\\ a_3&=3^4-2^4,\\ &\cdots\cdots\\ a_n&=n^4-(n-1)^4. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Сложив почленно все равенства (2), получим

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=n^4.$$

250. Имеем

$$\left.\begin{aligned} 2^3&=(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot1+3\cdot1\cdot1^2+1^3,\\ 3^3&=(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot1+3\cdot2\cdot1^2+1^3,\\ 4^3&=(3+1)^3=3^3+3\cdot3^2\cdot1+3\cdot3\cdot1^2+1^3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (n+1)^3&=n^3+3\cdot n^2\cdot1+3\cdot n\cdot1^2+1^3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно все тождества (1) и исключив из обеих частей полученного равенства одинаковые члены, находим

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+n. \qquad (2)$$

Но поскольку

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

то из (2) следует:

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}=$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right]=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

откуда

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

251. Заметим, что

$$1^3 = 1^2,$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2,$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

Естественно предположить, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \qquad (1)$$

Для n, равного 1, 2, 3, 4, мы убедились, что формула (1) верна. Пусть

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2. \qquad (2)$$

Прибавим к обеим частям (2) $(k+1)^3$. Имеем

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Таким образом, формула (1) верна для любого натурального n.

252. Первое решение. Известно, что (задача 251)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3 = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2, \qquad (1)$$

следовательно,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 + (2n)^3 = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2. \qquad (2)$$

Сделаем перегруппировку в левой части (2):

$$[1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3] + [2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3] = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2. \qquad (3)$$

Обозначим искомую сумму через S, тогда (3) перепишется в виде

$$S + 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2. \qquad (4)$$

Учитывая (1), перепишем (4) так:

$$S + 8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2,$$

откуда $S = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = n^2(2n^2-1)$.

Второе решение. Имеем тождество

$$(2m-1)^3 = 8m^3 - 12m^2 + 6m - 1.$$

Придавая m значения 1, 2, 3, ..., n, получим

$$\left.\begin{aligned} 1^3 &= 8\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 + 6\cdot 1 - 1,\\ 3^3 &= 8\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 1,\\ 5^3 &= 8\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - 1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (2n-1)^3 &= 8\cdot n^3 - 12\cdot n^2 + 6\cdot n - 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Складывая почленно все равенства (1), получим

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=8[1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3]-$$
$$-12(1^2+2^2+\ldots+n^2)+6(1+2+\ldots+n)-n=$$
$$=8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-12\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=$$
$$=2n^2(n+1)^2-2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)-n=$$
$$=2n^4+4n^3+2n^2-4n^3-6n^2-2n+3n^2+3n-n=2n^4-n^2=n^2(2n^2-1).$$

253. Имеем

$$S=8(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3).$$

Но так как

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\ \text{(задача 251)},$$

то

$$S=2n^2(n+1)^2.$$

254. Легко заметить, что число слагаемых в этой сумме $2n$, или n разностей вида

$$(4k-1)^3-(4k-3)^3=96k^2-96k+26.$$

Придавая в этой формуле k значения 1, 2, 3, ..., n, получим

$$S=96(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-96(1+2+3+\ldots+n)+26n.$$

Так как

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\quad\text{и}\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$S=96\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-96\cdot\frac{n(n+1)}{2}+26n=2n(16n^2-3).$$

255. Имеем

$$a_k=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2}{k}.$$

Так как

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

то

$$a_k=\frac{1}{k}\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k^2}{3}+\frac{k}{2}+\frac{1}{6}.$$

Придавая в этом равенстве k значения 1, 2, 3, ..., n, получим

$$\left.\begin{aligned}a_1&=\frac{1^2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6},\\ a_2&=\frac{2^2}{3}+\frac{2}{2}+\frac{1}{6},\\ a_3&=\frac{3^2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{6},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n&=\frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{6}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Складывая почленно все n равенств (1), получим

$$S_n = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+n)+\frac{n}{6}.$$

Но так как

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

и

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}+\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n}{6}=\frac{n}{36}(4n^2+15n+17).$$

256. При $n=1$ имеем $a_1=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^1}\right)$, так как $\frac{a+b}{2}=$ $=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4}\right)$. Далее, имеем

$$b_1=\frac{a_1+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+b\right)=\frac{a+3b}{4}.$$

С другой стороны,

$$a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^1}\right)=a+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}(b-a)=\frac{a+3b}{4}.$$

Следовательно,

$$b_1=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right),$$

т. е. доказываемые формулы верны при $n=1$.

Теперь предположим, что доказываемые формулы верны при $n=k$, т. е.

$$a_k=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}\right),\quad b_k=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right), \tag{1}$$

и докажем, что тогда имеют место равенства

$$a_{k+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right),\quad b_{k+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right).$$

В силу условия $a_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+b_k)$ и равенств (1) имеем

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left[a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}\right)+a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[2a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^k}+1+\frac{2}{4^{k+1}}\right)\right]=a+\frac{1}{3}(b-a)\left(2-\frac{2}{4^{k+1}}\right)=$$
$$=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{k+1}}\right).$$

Далее, используя полученное выражение для a_{k+1}, условие $b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_k)$ и предположение индукции (1), получаем

$$b_{k+1} = \frac{1}{2}\left[a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right) + a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{2}{2\cdot 4^{k+1}} + 1 + \frac{1}{2\cdot 4^k}\right)\right] =$$

$$= a + \frac{1}{3}(b-a)\left(2 + \frac{2}{2\cdot 4^{k+1}}\right) = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^{k+1}}\right).$$

Таким образом, утверждение задачи верно.

257. Так как

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+2} - a_n}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right) = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right),$$

то имеем

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \frac{1}{a_3 a_4 a_5} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} =$$

$$= \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3} - \frac{1}{a_3 a_4} + \frac{1}{a_3 a_4} - \frac{1}{a_4 a_5} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right) = \frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

258. Обозначив через x наименьшее из искомых чисел, будем иметь, согласно условию,

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+n)^2 =$$
$$= (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \ldots + (x+2n)^2.$$

Отсюда

$$x^2 = [(x+n+1)^2 - (x+1)^2] + [(x+n+2)^2 - (x+2)^2] + \ldots$$
$$\ldots + [(x+2n)^2 - (x+n)^2].$$

Разлагая разности квадратов на множители и вынося общий множитель n, получим

$$x^2 = n\,[(2x+n+2) + (2x+n+4) + \ldots + (2x+n+2n)].$$

Выражение, заключенное в квадратных скобках правой части последнего равенства, есть сумма n членов арифметической прогрессии. Эта сумма равна

$$\frac{(2x+n+2) + (2x+n+2n)}{2}\,n = n\,(2x+2n+1).$$

Итак, имеем квадратное уравнение

$$x^2 - 2n^2x - n^2(2n+1) = 0,$$

решив которое найдем

$$x_1 = 2n^2 + n = n\,(2n+1), \qquad x_2 = -n.$$

Следовательно, искомые числа составляют две последовательности:

1) $2n^2+n,\ 2n^2+n+1,\ 2n^2+n+2,\ \ldots,\ 2n^2+3n,$

2) $-n,\ -n+1,\ -n+2,\ \ldots,\ n.$

259. Пусть разность прогрессии равна d й один из ее членов $a=m^2$, где m — натуральное число. Тогда число $(m+d)^2=m^2+2md+d^2=a+d(2m+d)$ является членом прогрессии, так как оно имеет вид $a+nd$, где n — целое. Вообще число $(m+kd)^2=m^2+2kmd+k^2d^2=a+d(2km+k^2d)$ является членом прогрессии при любом целом k. Таким образом, мы доказали, что бесконечно много членов прогрессии являются квадратами натуральных чисел.

260. Так как $10^n+10^{n-1}+\ldots+1$ есть сумма членов геометрической прогрессии, первый член которой 1, а знаменатель 10, то

$$10^n+10^{n-1}+\ldots+1=\frac{10^{n+1}-1}{9}.$$

Следовательно, левая часть доказываемого равенства перепишется в виде

$$\frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot(10^{n+1}+5)+1=\frac{10^{2(n+1)}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2.$$

261. Имеем

$$\begin{aligned} 2&=3-1,\\ 5&=6-1,\\ 11&=12-1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ 3\cdot2^{n-1}-1&=3\cdot2^{n-1}-1.\end{aligned}$$

Сложив почленно эти n равенств, получим

$$2+5+11+(3\cdot2^{n-1}-1)=3(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})-n=$$
$$=3\cdot\frac{2^{n-1}\cdot2-1}{2-1}-n=3(2^n-1)-n.$$

262. Так как $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n)$, то

$$S=\frac{1}{2}\left[(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]=$$
$$=\frac{n(n+1)}{12}(2n+1+3)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

263. Имеем

$$\begin{aligned} 2&=1^2+1,\\ 7&=2^2+3,\\ 14&=3^2+5,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ n^2+2n-1&=n^2+(2n-1).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1)=[1+3+5+\ldots+(2n-1)]+$$
$$+(1^2+2^2+\ldots+n^2)=\frac{1+(2n-1)}{2}n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n}{6}(2n^2+9n+1).$$

264. Имеем

$$\begin{aligned}
1\cdot 1! &= (2-1)\cdot 1! &&= 2\cdot 1! - 1! = 2! - 1!,\\
2\cdot 2! &= [(2+1)-1]\cdot 2! &&= (2+1)\cdot 2! - 2! = 3! - 2!,\\
3\cdot 3! &= [(3+1)-1]\cdot 3! &&= (3+1)\cdot 3! - 3! = 4! - 3!,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
n\cdot n! &= [(n+1)-1]\cdot n! &&= (n+1)\cdot n! - n! = (n+1)! - n!
\end{aligned}$$

Складывая эти n равенств, получаем

$$S = (n+1)! - 1,$$

что и требовалось доказать.

265. Имеем

$$S = 4(1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

Но так как

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$S = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3},$$

что и требовалось доказать.

266. Первое решение 1. Имеем

$$\begin{aligned}
1^2 &= 4\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 1,\\
3^2 &= 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(2n-1)^2 &= 4\cdot n^2 - 4\cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти n равенств, получим

$$S = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = 4(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 4(1 + 2 + \dots + n) + n.$$

Но так как

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$S = 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

Второе решение. Так как

$$1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2 + (2n)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3},$$

а в силу задачи 265

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3},$$

то

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} =$$

$$= \frac{n(4n^2-1)}{3},$$

что и требовалось доказать.

267. Имеем

$$2 \cdot 1^2 = 1^2 + 1^3,$$
$$3 \cdot 2^2 = 2^2 + 2^3,$$
$$4 \cdot 3^2 = 3^2 + 3^3,$$
$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$
$$(n+1) n^2 = n^2 + n^3.$$

Складывая почленно эти n равенств, получаем

$$S = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3).$$

Но так как $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (задача 250), а $1^3 + 2^3 + \ldots$ $\ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ (задача 251), то

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 4}.$$

268. Имеем

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2,$$
$$\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot$$
$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n.$$

Сложив почленно все эти n равенств, получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + \\ + 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 2(1 + 2 + \ldots + n).$$

Но так как

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

то

$$S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \\ = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

269. Пусть $f(n) = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k}$, тогда $f(n-1) = a_{n-1} a_n \ldots a_{n+k-1}$. Имеем

$$f(n) - f(n-1) = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k} - a_{n-1} a_n \ldots a_{n+k-1} = \\ = a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1}(a_{n+k} - a_{n-1}) = (k+1) d a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k-1}.$$

Таким образом, разность $f(n) - f(n-1)$ есть $(n+1)$-й член левой части доказываемого равенства, умноженный на $(k+1) d$. Следовательно,

$$S = a_0 a_1 \ldots a_{k-1} + \{[f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \ldots \\ \ldots + [f(n) - f(n-1)]\} \frac{1}{(k+1) d} = a_0 a_1 \ldots a_{k-1} + \frac{f(n) - f(0)}{(k+1) d} = \\ = a_0 a_1 \ldots a_{k-1} + \frac{a_n a_{n+1} \ldots a_{n+k} - a_0 a_1 \ldots a_k}{(k+1) d}.$$

270. Легко заметить, что

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Придавая k в этой формуле значения 1, 2, ..., n, получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2\cdot 3}&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\\ \frac{1}{3\cdot 4}&=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\\ &\cdots\cdots\\ \frac{1}{n(n+1)}&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Складывая почленно равенства (1), получаем

$$S=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

что и требовалось доказать.

271. Введем обозначение

$$f(n)=\frac{1}{a_n a_{n+1}\,\ldots\,a_{n+k-2}},$$

тогда

$$f(n+1)=\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\,\ldots\,a_{n+k-1}},\qquad f(1)=\frac{1}{a_1a_2\,\ldots\,a_{k-1}}.$$

Имеем

$$f(n)-f(n+1)=\frac{1}{a_na_{n+1}\,\ldots\,a_{n+k-2}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\,\ldots\,a_{n+k-1}}=$$
$$=\frac{a_{n+k-1}-a_n}{a_na_{n+1}\,\ldots\,a_{n+k-1}}=\frac{(k-1)d}{a_na_{n+1}\,\ldots\,a_{n+k-1}}.$$

Таким образом, разность $f(n)-f(n+1)$ является последним членом рассматриваемой суммы, умноженным на $(k-1)d$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{(k-1)d}\{[f(1)-f(2)]+[f(2)-f(3)]+\ldots+[f(n)-f(n+1)]\}=$$
$$=\frac{1}{(k-1)d}[f(1)-f(n+1)].$$

Итак,

$$S=\frac{1}{(k-1)d}\left(\frac{1}{a_1a_2\,\ldots\,a_{k-1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\,\ldots\,a_{n+k-1}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при $a_1=1$, $d=1$, $k=2$ задача сводится к предыдущей задаче.

272. Имеем

$$\frac{3^k-1}{3^{k-1}}=3-\frac{1}{3^{k-1}}.$$

Придавая k в этом равенстве значения 1, 2, 3, ..., n, получаем

$$\left.\begin{aligned} 2&=\frac{3-1}{1}=3-1,\\ \frac{8}{3}&=\frac{3^2-1}{3}=3-\frac{1}{3},\\ \frac{26}{3^2}&=\frac{3^3-1}{3^2}=3-\frac{1}{3^2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{3^n-1}{3^{n-1}}=3-\frac{1}{3^{n-1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), получим

$$S=3n-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Выражение, заключенное в скобках, есть сумма n членов геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель есть $\frac{1}{3}$. Поэтому

$$S=3n-\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=\frac{3^n(2n-1)+1}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

273. Имеем

$$\frac{2^{2k-1}+1}{2^k}=2^{k-1}+\frac{1}{2^k}.$$

Подставляя в этом равенстве вместо k значения 1, 2, 3, ..., n, получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}&=1+\frac{1}{2},\\ \frac{9}{4}&=2+\frac{1}{4},\\ \frac{33}{8}&=4+\frac{1}{8},\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \frac{2^{2n-1}+1}{2^n}&=2^{n-1}+\frac{1}{2^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), находим

$$S=(1+2+4+\ldots+2^{n-1})+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right).$$

Так как выражения, заключенные в скобках, представляют собой суммы геометрических прогрессий, то

$$S=\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^{2n}-1}{2^n},$$

что и требовалось доказать.

274. Имеем

$$\frac{n+2^{n+1}}{2}=\frac{n}{2}+2^n.$$

Придавая n в этом равенстве значения 1, 2, 3, ..., n, получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{5}{2} &= \frac{1}{2}+2, \\ 5 &= 1+4, \\ \frac{19}{2} &= \frac{3}{2}+8, \\ 18 &= 2+16, \\ &\ldots\ldots \\ \frac{n+2^{n+1}}{2} &= \frac{n}{2}+2^n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), находим

$$S=\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}\right)+(2+4+8+\ldots+2^n).$$

Так как выражение, стоящее в первой скобке, есть сумма членов арифметической прогрессии, а во второй — геометрической прогрессии, то

$$S=\frac{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}{2}\,n+2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}=\frac{n(n+1)+8(2^n-1)}{4},$$

что и требовалось доказать.

275. Заметим, что

$$\frac{k^3+k^2+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+k.$$

Придавая k в этом равенстве значения 1, 2, 3, ..., n, получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{1\cdot 2} &= \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1, \\ \frac{13}{2\cdot 3} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2, \\ \frac{37}{3\cdot 4} &= \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенство (1), получим

$$S=1-\frac{1}{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}.$$

276. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{1\cdot 2} &= 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}, \\ \frac{7}{2\cdot 3} &= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \\ \frac{13}{3\cdot 4} &= 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} &= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), получим

$$S=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

277. Имеем

$$\frac{5}{1\cdot 2}=2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{13}{2\cdot 3}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{25}{3\cdot 4}=2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Сложив все эти неравенства почленно, получим

$$S=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{n+1}.$$

278. Заметим, что

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{2k-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2k+1}\right).$$

Придавая k в этом равенстве значения 1, 2, 3, ..., n, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1^2}{1\cdot 3}&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{1}-\frac{\frac{1}{2}}{3}\right),\\
\frac{2^2}{3\cdot 5}&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{3}-\frac{\frac{1}{2}}{5}\right),\\
\frac{3^2}{5\cdot 7}&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{5}-\frac{\frac{1}{2}}{7}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}&=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), находим

$$S=\frac{1}{4}\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}\right)=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

279. Так как

$$\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!},$$

то

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right]=1-\frac{1}{n!},$$

что и требовалось доказать.

280. Имеем очевидное равенство

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Придавая здесь k значения 1, 2, ..., n, получаем n равенств. Сложив полученные равенства, находим

$$S=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2},$$

что и требовалось доказать.

281. Первое решение. Имеем

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.$$

Второе решение (методом математической индукции). При $n=1$ левая часть доказываемого равенства равна $1-\frac{1}{2}$, а правая равна $\frac{1}{1+1}$. Так как

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1},$$

то при $n=1$ доказываемое тождество верно.

Теперь предположим, что при $n=k$ доказываемое равенство верно, т. е.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Докажем, что тогда справедливо и равенство

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}.$$

В самом деле,

$$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции подлежащее доказательству тождество верно для всех натуральных n.

282. Имеем

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta)=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[2\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}+2\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\beta}{2}+2\sin(\alpha+2\beta)\sin\frac{\beta}{2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+2\sin(\alpha+n\beta)\sin\frac{\beta}{2}\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right]+\right.$$
$$+\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)\right]+\ldots$$
$$\left.\ldots+\left[\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right)\right]=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

283. Имеем

$$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)+\ldots+\cos(\alpha+n\beta)=$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\beta\right]+\ldots+\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+n\beta\right].$$

Заменим в формуле задачи 282 α суммой $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$:

$$S=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

284. Имеем

$$S=[\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha]+$$
$$+[\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha]+$$
$$+[\cos 3\alpha+\ldots+\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha]+\ldots+[\cos(n-1)\alpha+\cos n\alpha]+\cos n\alpha.$$

Согласно формуле задачи 283 имеем

$$S=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{(n+2)\alpha}{2}\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}+$$
$$+\frac{\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+$$
$$+\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}+\ldots+\frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[n\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)\right].$$

Согласно формуле задачи 282 имеем

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}+\ldots+\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}=\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

поэтому

$$S=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{n\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{n[\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha]-1+\cos n\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

т. е.

$$S=\frac{(n+1)\cos n\alpha-n\cos(n+1)\alpha-1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

285. Имеем

$$A\sin\frac{\pi}{2n}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2n}-\cos\frac{5\pi}{2n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)=$$

$$=\sin\frac{2n\pi}{4n}\sin\frac{(2n-2)\pi}{4n}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Таким образом,

$$A\sin\frac{\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2n},$$

откуда

$$A=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

286. *Первое решение.* При $k=2$ утверждение задачи верно, так как $\sin\alpha=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$. Теперь предположим, что равенство, подлежащее доказательству, верно для всех значений $k\leqslant l$. Тогда

$$S=\sum_{m=1}^{l-1}\sin m\alpha+\sin l\alpha=\sin\frac{l-1}{2}\alpha\sin\frac{l}{2}\alpha\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}+\sin l\alpha=$$

$$=\sin\frac{l-1}{2}\alpha\sin\frac{l}{2}\alpha\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{l}{2}\alpha\cos\frac{l}{2}\alpha=$$

$$=\frac{\sin\frac{l}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\cdot\left(\sin\frac{l-1}{2}\alpha+2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{l}{2}\alpha\right)=$$

$$=\sin\frac{l}{2}\alpha\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{l-1}{2}\alpha+\sin\frac{l+1}{2}\alpha-\sin\frac{l-1}{2}\alpha\right)=$$

$$=\sin\frac{l}{2}\alpha\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{l+1}{2}\alpha.$$

Таким образом, в силу принципа математической индукции утверждение задачи верно для всех натуральных $k\geqslant 2$.

Второе решение. Имеем

$$S=\frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\sin(k-1)\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}+\ldots+\cos\frac{(2k-3)\alpha}{2}-\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\sin\frac{k\alpha}{2}\sin\frac{(k-1)\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}.$$

287. Так как

$$\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha),$$

то

$$\sum_{k=1}^{n}k\cos^3\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{3}{4}\cos k\frac{\pi}{n}+\frac{1}{4}\cos k\frac{3\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}k\cos k\frac{\pi}{n}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k\cos k\frac{3\pi}{n}.$$

В силу задачи 284 имеем

$$\sum_{k=1}^{n}k\cos^3\frac{k\pi}{n}=\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)\cos n\frac{\pi}{n}-n\cos(n+1)\frac{\pi}{n}-1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{(n+1)\cos n\frac{3\pi}{n}-n\cos(n+1)\frac{3\pi}{n}-1}{4\sin^2\frac{3\pi}{2n}}=$$

$$=-\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{8\sin^2\frac{\pi}{2n}}+\frac{1}{8\sin^2\frac{3\pi}{2n}}\right),$$

что и требовалось доказать.

288. Напишем ряд очевидных равенств:

$$\frac{1}{4^0}\sin^4\alpha=\sin^2\alpha-\frac{1}{4^1}\sin^2 2\alpha,$$

$$\frac{1}{4^1}\sin^4 2\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\frac{1}{4^2}\sin^2 2^2\alpha,$$

$$\frac{1}{4^2}\sin^4 2^2\alpha=\frac{1}{4^2}\sin^2 2^2\alpha-\frac{1}{4^3}\sin^2 2^3\alpha,$$

. . . .

$$\frac{1}{4^n}\sin^4 2^n\alpha=\frac{1}{4^n}\sin^2 2^n\alpha-\frac{1}{4^{n+1}}\sin^2 2^{n+1}\alpha.$$

Сложив эти $n+1$ равенств, получим

$$S = \sin^2 \alpha - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2 2^{n+1} \alpha,$$

что и требовалось доказать.

289. Имеем

$$\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = \frac{\sin (y-x)}{\cos x \cos y} = \frac{\sin r}{\cos x \cos y},$$

$$\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y = \frac{\sin r}{\cos y \cos z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} t = \frac{\sin r}{\cos u \cos t},$$

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u = \frac{\sin r}{\cos v \cos u}.$$

Сложив почленно все эти равенства, получим

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x = \sin r \left(\frac{1}{\cos x \cos y} + \frac{1}{\cos y \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos u \cos v}\right),$$

откуда находим

$$\frac{1}{\cos x \cos y} + \frac{1}{\cos y \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos u \cos v} = \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x}{\sin r}.$$

290. Имеем очевидные равенства:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2\alpha} &= \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha, \\ \frac{1}{\sin 4\alpha} &= \operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{\sin 2^n\alpha} &= \operatorname{ctg} 2^{n-1}\alpha - \operatorname{ctg} 2^n\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно равенства (1), получим

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2^n\alpha,$$

но

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2^n\alpha = \frac{\sin (2^n - 1)\alpha}{\sin\alpha \sin 2^n\alpha} = \frac{\sin \dfrac{2^{n+1} - 2^n - 1}{2^{n+1} - 1}\pi}{\sin \alpha \sin \dfrac{2^n}{2^{n+1} - 1}\pi} =$$

$$= \frac{\sin \left(\pi - \dfrac{2^n}{2^{n+1} - 1}\pi\right)}{\sin \alpha \sin \dfrac{2^n}{2^{n+1} - 1}\pi} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

что и требовалось доказать.

291. Поскольку рассматриваемая сумма обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = x_1$ $(x_1 \neq k\pi)$, то имеем два равенства:

$$a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \ldots + a_n \cos \alpha_n = 0 \qquad (1)$$

и

$$a_1 \cos (\alpha_1 + x_1) + a_2 \cos (\alpha_2 + x_1) + \ldots + a_n \cos (\alpha_n + x_1) = 0.$$

Второе равенство можно представить в виде

$$(a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + \ldots + a_n \cos\alpha_n)\cos x_1 - \\ - (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + \ldots + a_n \sin\alpha_n)\sin x_1 = 0.$$

Учитывая равенство (1) и неравенство $\sin x_1 \neq 0$ (так как $x_1 \neq k\pi$), имеем

$$a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + \ldots + a_n \sin\alpha_n = 0. \tag{2}$$

Пусть теперь x — произвольное число. Имеем

$$a_1 \cos(\alpha_1 + x) + a_2 \cos(\alpha_2 + x) + \ldots + a_n \cos(\alpha_n + x) = \\ = (a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + \ldots + a_n \cos\alpha_n)\cos x + \\ + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + \ldots + a_n \sin\alpha_n)\sin x = 0,$$

так как имеют место равенства (1) и (2).

292. Имеем

$$\operatorname{tg}(a_2 - a_1) = \frac{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1}{1 + \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2}.$$

Но так как по условию $a_2 - a_1 = \alpha$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1}{1 + \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2},$$

откуда получаем

$$\operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} a_2 = \frac{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg}\alpha} - 1.$$

Аналогично находим

$$\operatorname{tg} a_2 \operatorname{tg} a_3 = \frac{\operatorname{tg} a_3 - \operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg}\alpha} - 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{tg} a_n \operatorname{tg} a_{n+1} = \frac{\operatorname{tg} a_{n+1} - \operatorname{tg} a_n}{\operatorname{tg}\alpha} - 1.$$

Сложив почленно последние n равенств, получим

$$S = \frac{\operatorname{tg} a_{n+1} - \operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg}\alpha} - n = \frac{\sin(a_{n+1} - a_1)}{\cos a_1 \cos a_{n+1} \operatorname{tg}\alpha} - n,$$

что и требовалось доказать.

293. Легко заметить, что имеет место тождество

$$2\operatorname{ctg} 2\varphi - \operatorname{ctg}\varphi = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Если в этом тождестве заменить последовательно φ на $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots, \frac{x}{2^n}$, то получим следующие равенства:

$$2\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} x,$$

$$2\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{4} = -\operatorname{tg}\frac{x}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} = -\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},$$

или

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{ctg}2x-\quad\operatorname{ctg}x&=-\operatorname{tg}x,\\ \operatorname{ctg}x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}&=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2},\\ \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}&=-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4},\\ \dots\dots&\dots\dots\\ \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}&=-\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}. \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Сложив почленно $n+1$ равенств (1), получим

$$2\operatorname{ctg}2x-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}=-\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\dots-\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},$$

откуда $\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-2\operatorname{ctg}2x.$

§ 9. Уравнения и системы уравнений

294. Первое решение. Так как корни данного уравнения рациональны, то $\frac{p^2}{4}-q$ — точный квадрат. Пусть $p=2n$ — четное число, тогда $-\frac{p}{2}$ и $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ — целые числа; следовательно, в этом случае корни уравнения — целые числа. Пусть теперь $p=2n-1$ — нечетное число, а $q=2m$ — четное число; тогда $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ есть дробь вида $\frac{k}{2}$, где k — нечетное число. Следовательно, $-\frac{p}{2}+\frac{k}{2}$ и $-\frac{p}{2}-\frac{k}{2}$ суть целые числа. Наконец, пусть $p=2n+1$, а $q=2m+1$. В этом случае $\frac{p^2}{4}-q=\frac{(2n+1)^2-4(2m+1)}{4}$, где числитель — нечетное число, а потому рациональное (по условию) число $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\frac{2k+1}{2}$; следовательно, $x_1=-\frac{2n+1}{2}+\frac{2k+1}{2}=-n+k$ и $x_2=-\frac{2n+1}{2}-\frac{2k+1}{2}=$ $=-n-k-1$ — целые числа, если они существуют. Итак, при всех возможных целых значениях p и q утверждение задачи верно.

Второе решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда $x_2=\frac{q}{x_1}$. Следовательно, $x_1+\frac{q}{x_1}=-p$. Предположим, что $x_1=\frac{m}{n}$ — несократимая дробь; тогда имеем $\frac{m}{n}+\frac{qn}{m}=-p$. Правая часть последнего равенства — целое число, а левая — сумма дробей с взаимно простыми знаменателями, а потому она не есть целое число. Таким образом, $x_1\neq\frac{m}{n}$ $\left(\text{также}\ x_2\neq\frac{r}{s}\right)$, и, значит, утверждение задачи верно.

Третье решение. Пусть $x_1=\frac{m}{n}$ — рациональный корень уравнения, где m — целое, n — натуральное и $(m, n)=1$. Это означает, что

$$\frac{m^2}{n^2}+p\cdot\frac{m}{n}+q=0.$$

Умножив на n, получим

$$\frac{m^2}{n} = -pm - nq.$$

Справа стоит целое число, а так как $(m, n) = 1$, то n не может быть больше единицы. Итак, $n = 1$, т. е. $x_1 = m$ есть целое число, $x_2 = -p - x_1$ также есть целое число.

295. Вначале упростим известный корень уравнения. Имеем

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = -4 + \sqrt{15}.$$

Пусть уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$. Тогда

$$x_2 = -p - x_1 = -p + 4 - \sqrt{15}.$$

Далее,

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-4 + \sqrt{15})(-p + 4 - \sqrt{15}) = (8 - p)\sqrt{15} + 4(p - 4) - 15,$$

т. е.

$$q - 4(p - 4) + 15 = (8 - p)\sqrt{15}. \qquad (1)$$

А так как p и q рациональны, то рационально и число $q - 4(p - 4) + 15$; поэтому и $(8 - p)\sqrt{15}$ — рациональное число, а это означает, что $8 - p = 0$, т. е. $p = 8$. Тогда из (1) получаем $q = 1$.

Таким образом, искомое уравнение есть

$$x^2 + 8x + 1 = 0.$$

296. Пусть x_0 — общий корень данных уравнений. Тогда $x_0^2 - x_0 + a = 0$, $x_0^2 - ax_0 + 1 = 0$. Следовательно, и $(x_0^2 - x_0 + a) - (x_0^2 - ax_0 + 1) = 0$, или $x_0(1 - a) = -(1 - a)$.

Последнее равенство выполняется либо при $a = 1$, либо при $x_0 = -1$. Подставим $x_0 = -1$ в любое из данных уравнений, например во второе: $(-1)^2 - (-1) + a = 0$, откуда $a = -2$.

Таким образом, данные уравнения могут иметь общий корень лишь при $a = 1$ или при $a = -2$. Проверка показывает, что при этих значениях a они действительно имеют общий корень.

297. Сначала находим значение α. Из данных уравнений, имеющих общий корень α, следуют равенства

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \quad \text{и} \quad \alpha^2 + p_1\alpha + q_1 = 0.$$

Вычитая почленно второе равенство из первого, получим

$$(p - p_1)\alpha + (q - q_1) = 0.$$

Так как $x_1 \neq x_2$, то $p - p_1 \neq 0$, а поэтому

$$\alpha = \frac{q_1 - q}{p - p_1}.$$

В силу формул Виета имеем

$$x_1 + \alpha = -p, \quad x_2 + \alpha = -p_1.$$

Сложив эти два равенства, получим

$$x_1 + x_2 = -(p + p_1) - 2\alpha.$$

Далее,

$$x_1\alpha = q, \quad x_2\alpha = q_1.$$

Перемножив последние два равенства и поделив обе части полученного равенства на α^2 (если $\alpha \neq 0$), находим

$$x_1x_2 = \frac{qq_1}{\alpha^2}.$$

Следовательно, коэффициенты искомого уравнения суть

$$-(x_1+x_2)=p+p_1+2\frac{q_1-q}{p-p_1} \quad \text{и} \quad x_1x_2=\frac{qq_1(p-p_1)^2}{(q_1-q)^2}.$$

Если $\alpha=0$, то $x_1=-p$, $x_2=-p_1$, а потому (в этом случае)

$$-(x_1+x_2)=p+p_1 \quad \text{и} \quad x_1x_2=pp_1.$$

Итак, если $\alpha\neq 0$, то искомое уравнение есть

$$x^2+\left(p+p_1+2\frac{q_1-q}{p-p_1}\right)x+\frac{qq_1(p-p_1)^2}{(q_1-q)^2}=0,$$

а если $\alpha=0$, то искомое уравнение есть

$$x^2+(p+p_1)x+pp_1=0.$$

298. Пусть α — общий корень данных уравнений. Тогда имеем

$$\begin{cases}(1-2a)\alpha^2-6a\alpha-1=0,\\ a\alpha^2-\alpha+1=0.\end{cases}$$

Складывая эти равенства, находим

$$(1-a)\alpha^2-(6a+1)\alpha=0. \qquad (1)$$

Но так как $\alpha=0$ не удовлетворяет данным уравнениям, то из (1) следует, что

$$(1-a)\alpha=6a+1.$$

Подстановкой $a=1$ в данные уравнения убеждаемся, что при этом значении a уравнения не имеют общих корней, т. е. $a\neq 1$, а потому

$$\alpha=\frac{6a+1}{1-a}.$$

Подставляя это значение α в первое из данных уравнений, после преобразований получаем

$$36a^3+19a^2-6a=0,$$

откуда

$$a_1=0,\ a_2=\frac{2}{9},\quad a_3=-\frac{3}{4}.$$

Проверка показывает, что при каждом из этих значений a данные уравнения действительно имеют общий корень.

299. Поскольку корни первого уравнения действительны, то

$$p^2-4q\geqslant 0.$$

Для того чтобы корни второго уравнения были действительны, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2p^2-4q\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 0, \qquad (1)$$

или

$$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2p^2+4p^2-4q\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 0,$$

т. е.

$$(p^2-4q)\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4p^2\geqslant 0. \qquad (2)$$

Так как $p^2-4q\geqslant 0$, то неравенство (2) верно, а вместе с ним верно и неравенство (1), что и требовалось доказать.

300. Имеем $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$. Далее, в силу теоремы Виета получаем

$$(x_1-x_2)^2=\frac{4(5k+3)^2}{25}-\frac{4(5k^2+6k+1)}{5}=\frac{16}{25},$$

т. е. разность корней данного уравнения не зависит от k.

301. Предположим, что $a\neq 0$. Тогда имеем

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c+\lambda)}}{2a}.$$

В силу нашего предположения могут быть два случая: $a>0$ и $a<0$. Рассмотрим их отдельно.

Если $a>0$, то выберем такое значение λ, чтобы выполнялось неравенство $\lambda>\frac{b^2}{4a}-c$. При этом условии получаем $b^2-4a(c+\lambda)<0$, т. е. в этом случае исследуемое уравнение не имеет действительных корней.

Пусть теперь $a<0$. Тогда, выбрав $\lambda>-c$, получим, что знак числа a противоположен знаку свободного члена $\lambda+c$, так что один корень уравнения положителен, а другой — отрицателен, что также противоречит условию.

Итак, $a=0$. При $a=0$ имеем $x=-\frac{c+\lambda}{b}$ — действительное положительное число, если $b<0$, $c\geqslant 0$.

302. Пусть α, β — пара чисел, удовлетворяющих данной системе; тогда имеем два равенства:

$$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=a,\quad \alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2-\frac{1}{\alpha^2\beta^2}-2=b^2,$$

или

$$[(\alpha^2+\beta^2)-a]^2=\alpha^2\beta^2+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+2, \tag{1}$$

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=\alpha^2\beta^2+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}+2+b^2. \tag{2}$$

Раскрывая в левой части равенства (1) квадратные скобки и вычитая из него равенство (2), получим

$$a^2-2a(\alpha^2+\beta^2)=-b^2,$$

откуда

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{a^2+b^2}{2a}.$$

Поскольку по условию a и b — действительные числа ($a\neq 0$), то утверждение задачи верно.

303. Вначале докажем необходимость условия. Пусть mi — корень данного уравнения. Тогда имеем

$$a(mi)^3+b(mi)^2+c(mi)+d=0,$$

или

$$-am^3i-bm^2+cmi+d=0,$$

или

$$(d-bm^2)+(cm-am^3)i=0.$$

Так как комплексное число равно нулю лишь тогда, когда действительная и мнимая части равны нулю, то имеем

$$d-bm^2=0,\quad cm-am^3=0.$$

Поскольку $m\neq 0$, то из второго равенства следует, что $c-am^2=0$. Итак, имеем $d=bm^2$, $am^2=c$. Перемножая эти равенства, находим $adm^2=bcm^2$, откуда $ad=bc$. Далее, из равенства $c-am^2=0$, или из равенства

$ac - a^2m^2 = 0$ следует, что $ac > 0$. Таким образом, необходимость условий $ad = bc$ и $ac > 0$ доказана.

Теперь докажем достаточность этих условий. Пусть $ad = bc$ и $ac > 0$. Умножив обе части данного уравнения на a ($a \neq 0$), получим

$$a^2x^3 + abx^2 + acx + ad = 0,$$

или

$$ax(ax^2 + c) + abx^2 + ad = 0.$$

Заменив в последнем равенстве ad на bc, получим

$$ax(ax^2 + c) + abx^2 + bc = 0,$$

или

$$(ax^2 + c)(ax + b) = 0.$$

Уравнение $ax + b = 0$ имеет действительный корень. Корни уравнения $ax^2 + c = 0$ или равносильного ему уравнения $x^2 = -\frac{c}{a}$ — чисто мнимые, отличные от нуля числа лишь при $\frac{c}{a} > 0$, т. е. при $ac > 0$. Итак, мы доказали и достаточность условий $ad = bc$ и $ac > 0$.

304. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни данного уравнения; тогда на основании формул Виета имеем

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \tag{1}$$

$$x_1x_2x_3 = b > 0. \tag{2}$$

Если предположить, что все три корня действительны, то из равенства (2) следовало бы, что хотя бы один корень положителен. Если бы при этом положительными оказались два корня, то из равенства (2) следовало бы, что и третий корень положителен, а это противоречит равенству (1).

Таким образом, если все три корня действительны, то утверждение задачи верно.

Пусть теперь $x_1 = m + ni$ — комплексный корень уравнения; тогда, как известно, уравнение имеет корень, сопряженный x_1, а именно $x_2 = m - ni$. Поскольку в этом случае $x_1x_2 = (m + ni)(m - ni) = m^2 + n^2 > 0$, то из равенства (2) получаем $x_3 = \frac{b}{x_1x_2} > 0$. Так что и в этом случае утверждение задачи верно. Этим и завершается доказательство верности утверждения задачи.

305. Из всех простых чисел лишь число 2 четное. При $n = 2$ данное уравнение имеет вид

$$x^2 + x + 2 = 0.$$

Это уравнение не имеет действительных корней, а поэтому и рациональных.

Остается исследовать задачу для нечетных значений n.

В данном уравнении коэффициент старшего члена равен единице, а остальные коэффициенты — целые числа (1 или n), а поэтому рациональными корнями его могут быть только целые числа и при этом такие, которые являются делителями свободного члена n.

Поскольку n — простое число, то его делителями могут быть лишь числа ± 1 и $\pm n$.

Полагая $f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + n$, имеем

$$f(1) = n + n \neq 0,$$

$$f(-1) = (-1)^n + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} + (-1)^{n-3} + \ldots + (-1)^2 + (-1) + $$
$$+ n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^3 + (-1)^2 - 1 + n = n - 1 \neq 0,$$

$$f(n) = n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + \ldots + n + n \neq 0,$$

$$f(-n) = -n(n^{n-1} - n^{n-2} + n^{n-3} - \ldots + n^2 - n + 1 - 1) =$$
$$= -n^2(n^{n-2} - n^{n-3} + n^{n-4} - \ldots + n - 1) \neq 0,$$

последнее справедливо, так как все слагаемые в скобках, кроме последнего (-1), делятся на n, а (-1) не делится на n.

Таким образом, доказано, что ни одно из чисел $+1$, -1, n, $-n$ не может служить корнем данного уравнения.

Следовательно, данное уравнение не имеет рациональных корней.

306. Вначале заметим, что уравнение не имеет только отрицательных корней, так как сумма отрицательных чисел не может быть равной нулю.

Предположим, что уравнение имеет положительный рациональный корень; тогда он должен быть целым числом и являться делителем числа 10. Но делителями числа 10 служат лишь числа 1, 2, 5 и 10, которые не удовлетворяют данному уравнению. Итак, данное уравнение не имеет рационального корня. Но так как данное уравнение нечетной степени, то оно имеет хотя бы один действительный корень, а так как мы доказали, что рациональных корней нет, то этот корень иррационален.

307. Для того чтобы корни уравнения были действительными и различными, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положительным, т. е.

$$(\sqrt{2})^2-(k+1)>0,$$

откуда $k<1$.

Пусть это условие выполнено, тогда (поскольку сумма корней равна $2\sqrt{2}$) один из корней данного уравнения больше, а другой меньше числа $\sqrt{2}$. Обозначив корни уравнения через x_1 и x_2, имеем

$$x_1<\sqrt{2}<x_2.$$

Следовательно, в интервале $(0, \sqrt{2})$ может быть только один корень x_1, причем он должен быть положительным; но поскольку $x_2>\sqrt{2}>0$, то на основании теоремы Виета

$$x_1x_2=k+1>0,$$

откуда $k>-1$. Но так как выше мы установили, что $k<1$, то в интервале $(0, \sqrt{2})$ находится один и только один корень при условии, что $-1<k<1$. Этот корень — меньший и равен $\sqrt{2}-\sqrt{1-k}$.

308. Из второго уравнения системы имеем $y=x+\lambda$. Подставив это значение y в первое уравнение системы и произведя простые преобразования, получим уравнения

$$2ax^2+2(a\lambda+1)x+a\lambda^2=0, \tag{1}$$

которое в силу условия задачи имеет действительные корни при любых значениях λ. Докажем, что тогда $a=0$.

Предположим противное, т. е. что $a\neq 0$. Если $a\neq 0$, то дискриминант уравнения (1)

$$4(a\lambda+1)^2-8a^2\lambda^2\geqslant 0 \tag{2}$$

при любых λ. Однако левая часть неравенства (2) имеет вид $-4a^2\lambda^2+$ $+8a\lambda+4$ и при достаточно больших по абсолютной величине значений λ отрицательна (так как $-4a^2\lambda^2+8a\lambda+4=-4[(a\lambda-1)^2-2]$ принимает отрицательные значения при $|a\lambda-1|>\sqrt{2}$). Это приводит к противоречию. Следовательно, $a=0$. При $a=0$ имеем $x=0$, $y=\lambda$.

309. Решая данное уравнение, находим

$$x_1=\frac{1}{a-1}, \quad x_2=\frac{1}{a+1}.$$

Пусть

$$0<\frac{1}{a-1}<1, \quad 0<\frac{1}{a+1}<1. \tag{1}$$

Оба эти неравенства выполняются одновременно лишь при $a>2$.

310. Пусть числа α, β, γ — корни данного уравнения. Тогда в силу теоремы Виета (для кубического уравнения) имеем

$$\alpha+\beta+\gamma=-p, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q.$$

Рассмотрим разность p^2-3q. Имеем

$$p^2-3q=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha.$$

Так как по условию задачи $p^2-3q<0$, то

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha<0,$$

или

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha<0,$$

$$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)<0,$$

$$(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2<0.$$

Если бы все три числа α, β, γ были бы действительными, то последнее равенство невозможно. Следовательно, хотя бы одно из чисел α, β, γ мнимое. Но так как мнимые корни уравнения с действительными коэффициентами сопряженные, то два корня данного уравнения мнимые и лишь один — действительный, что и требовалось доказать.

311. Рациональный корень уравнения $x^3-px+1=0$ с целыми коэффициентами должен быть целым числом, являющимся делителем свободного члена, т. е. рациональными корнями могут быть только ± 1.

Ясно, что $x=1$ явится корнем этого уравнения при $1^3-p\cdot 1+1=0$, т. е. при $p=2$, а $x=-1$ является корнем при $p=0$. Значит, при целом $p>2$ это уравнение не имеет рациональных корней.

Из решения видно, что уравнение $x^3-px+1=0$, где p — целое, имеет рациональный корень лишь при $p=0$ и $p=2$.

312. Пусть $x_1=1+\sqrt{2}$. Тогда $x_1^2=3+2\sqrt{2}$, $x_1^3=7+5\sqrt{2}$, $x_1^4=17+12\sqrt{2}$, $x_1^5=41+29\sqrt{2}$. Подставляя эти значения в данное уравнение, получим

$$41+29\sqrt{2}+a(7+5\sqrt{2})+b(3+2\sqrt{2})+5(1+\sqrt{2})+2=0,$$

или

$$(7a+3b+48)+(5a+2b+34)\sqrt{2}=0.$$

Поскольку a и b — рациональные числа, то последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда выполняется система

$$\begin{cases}7a+3b+48=0,\\5a+2b+34=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a=-6$, $b=-2$. Следовательно, данное уравнение такое:

$$x^5-6x^3-2x^2+5x+2=0.$$

Так как $x_1=1+\sqrt{2}$, то $x_2=1-\sqrt{2}$. Поскольку число 2 имеет своими делителями лишь числа ± 1 и ± 2, то легко путем проб найти остальные корни.

Отв. $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=-2$, $x_{4,5}=\pm 1$.

313. Первое решение. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. При $x=0$ имеем $f(0)=c$, а при $x=1$ имеем $f(1)=a+b+c$.

Пусть $c(a+b+c)<0$, т. е. $f(0)\cdot f(1)<0$. При этом условии $f(0)$ и $f(1)$ имеют различные знаки. Следовательно, имеется такое значение $x=x_0$, при котором $f(x_0)=0$, т. е. данное уравнение имеет действительный корень, а значит, и второй корень также действительный. (В противном случае оба корня были бы мнимыми.)

Второе решение. Если имеем $c(a+b+c)<0$, то $b^2-b^2-4c(a+b+c)>0$, т. е. $(b^2-4ac)-(b+2c)^2>0$, откуда $b^2-4ac>0$, а потому корни квадратного уравнения действительны и различны.

314. Предположим, что оба уравнения не имеют действительных корней, т. е.

$$m^2-4n<0$$

и

$$p^2-4q<0.$$

Сложив почленно эти неравенства, получим

$$m^2+p^2-4n-4q<0. \qquad (1)$$

Но, учитывая, что $mp=2(n+q)$, неравенство (1) перепишется в виде

$$m^2+p^2-2mp<0$$

или

$$(m-p)^2<0,$$

что невозможно.

Таким образом, наше предположение, что корни обоих данных уравнений мнимые, неверно; следовательно, хотя бы одно уравнение имеет действительные корни.

315. Обозначим корни первого уравнения через α и β, а второго уравнения — через 2α и γ (так как $m\neq 0$, то каждый из этих корней отличен от нуля). В силу теоремы Виета имеем

$$\alpha+\beta=5,\ 2\alpha+\gamma=7,\ \alpha\beta=m,\ 2\alpha\gamma=2m.$$

Из двух последних равенств, так как $\alpha\neq 0$, следует, что $\beta=\gamma$, а потому имеем систему

$$\alpha+\beta=5,\ 2\alpha+\beta=7,\ \alpha\beta=m.$$

Решая совместно последние три уравнения, получаем $\alpha=2$, $\beta=3$, $m=6$. Таким образом, данные два уравнения суть

$$x^2-5x+6=0 \text{ и } x^2-7x+12=0.$$

Корни этих уравнений соответственно равны 2 и 3; 3 и 4.

316. Каждая система решений первой системы обращает в нуль A и B; следовательно, она обращает в нуль также $\lambda A+\mu B$ и $\lambda' A+\mu' B$, т. е. она удовлетворяет и второй системе уравнений.

Для того чтобы доказать, что каждая система решений второй системы уравнений удовлетворяет первой системе уравнений, умножим уравнения второй системы соответственно на μ' и $-\mu$ и сложим их почленно. Получаем

$$(\lambda A+\mu B)\mu'-(\lambda' A+\mu' B)\mu=(\lambda\mu'-\mu\lambda')A=0.$$

Аналогично получаем

$$-(\lambda A+\mu B)\lambda'+(\lambda' A+\mu' B)\lambda=(\lambda\mu'-\mu\lambda')B=0.$$

Теперь ясно, что каждая система решений второй системы уравнений превращает в нуль выражения $\lambda A+\mu B$ и $\lambda' A+\mu' B$, а потому она удовлетворяет двум последним уравнениям, и поскольку $\lambda\mu'-\mu\lambda'\neq 0$, то она обращает в нуль A и B. Этим завершается доказательство теоремы.

317. Дискриминант первого уравнения есть выражение $b^2(a^2+b^2-c^2)$, а дискриминант второго есть c^2-2ab. Следовательно, надо доказать, что хотя бы одно из неравенств $a^2+b^2-c^2\geqslant 0$, $c^2-2ab\geqslant 0$ имеет место.

Если $a^2+b^2-c^2\geqslant 0$, то первое уравнение имеет действительные корни. Если $a^2+b^2-c^2<0$, то подавно $2ab-c^2<0$, так как $2ab\leqslant a^2+b^2$. Следовательно, второе уравнение имеет действительные корни.

318. Пусть данное уравнение имеет дробный рациональный корень $\frac{p}{q}$, где p и q не имеют общих делителей и $q \neq \pm 1$. Подставив $\frac{p}{q}$ вместо x в данное уравнение, получим равенство

$$\frac{p^4}{q^4} + a\frac{p}{q} + 1 = 0.$$

Умножив обе части этого равенства на q, получим

$$\frac{p^4}{q^3} + ap + q = 0, \text{ или } \frac{p^4}{q^3} = -ap - q.$$

Так как p и q не имеют общих делителей, то левая часть последнего равенства не является целым числом, а правая — целое число. Значит, данное уравнение не имеет дробных рациональных корней. Предположим, что данное уравнение имеет целый корень p. Тогда имеем

$$p^4 + ap + 1 = 0, \text{ или } p^3 + a = -\frac{1}{p},$$

что возможно лишь при $p = \pm 1$. Но если $p = \pm 1$, то $a = \mp 2$, что противоречит условию задачи. Итак, данное уравнение не имеет ни целых, ни дробных рациональных корней при целом a, отличном от ± 2.

319. Имеем

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}.$$

В силу теоремы Виета получаем

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{k^2 + 2k}{-k} = -(k+2).$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$-(k+2) > 1,$$

откуда $k < -3$.

320. В силу формул Виета имеем

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

где через γ обозначен третий корень данного уравнения. Таким образом,

$$\gamma = -(\alpha + \beta). \qquad (1)$$

Но так как по условию

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0,$$

то

$$\gamma = -(\alpha + \beta) = \alpha\beta.$$

По формулам Виета также

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p, \qquad (2)$$

$$\alpha\beta\gamma = -q. \qquad (3)$$

Воспользуемся теперь условием $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$ и равенствами (1), (2), (3). Исключив из этих четырех равенств α, β и γ, получим $(p-q)^2 + q = 0$.

Отв. Третий корень $\gamma = \alpha\beta$, а зависимость между p и q такова: $(p-q)^2 = -q$.

321. Из второго уравнения получаем

$$x = 2a - y.$$

Подставляя это значение x в первое уравнение, имеем

$$y^2 + z^2 + 2a(2a - y) = 3a^2,$$

или

$$y^2 + z^2 + a^2 - 2ay = 0,$$

или

$$z^2 + (y - a)^2 = 0.$$

Каждое из слагаемых левой части последнего уравнения неотрицательно, а потому равно нулю. Таким образом,

$$z = 0,\ y = a.$$

Следовательно,

$$x = a.$$

Отв. $x = y = a,\ z = 0.$

322. Пусть корни данного уравнения $x_1 = a - d$, $x_2 = a$, $x_3 = a + d$, $x_4 = a + 2d$. В силу теоремы Виета имеем $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (a - d) + a + (a + d) + (a + 2d) = 0$, откуда находим $d = -2a$. Таким образом, $x_1 = 3a$, $x_2 = a$, $x_3 = -a$, $x_4 = -3a$.

Значит, уравнение имеет вид

$$(x + a)(x - a)(x + 3a)(x - 3a) = 0,$$

или

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = 0,$$

или, наконец,

$$x^4 - 10a^2x^2 + 9a^4 = 0.$$

Таким образом, $p = -10a^2$, $q = 9a^4$, и потому

$$100q = 900a^4 = 9 \cdot (-10a^2)^2 = 9p^2.$$

323. Дискриминант первого уравнения $D_1 = 1 - a$, а другого

$$D_2 = (a + 1)^2 + (a - 3)(a^2 - a + 2) = (a^2 - 2a + 5)(a - 1) = [(a - 1)^2 + 4](a - 1).$$

Так как $(a - 1)^2 + 4 > 0$, то ясно, что из условия $D_1 = 1 - a > 0$, т. е. $a < 1$, следует, что $a - 1 < 0$, а потому $D_2 < 0$. Наоборот, если $D_2 > 0$, т. е. $a - 1 > 0$, то $1 - a < 0$. Итак, утверждение задачи верно.

324. Для того чтобы корни данного уравнения были рациональны, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был квадратом рационального числа:

$$(1 - 2k)^2 - 4k(k - 2) = 4k + 1 = \left(\frac{p}{q}\right)^2,$$

откуда находим

$$k = \frac{p^2 - q^2}{4q^2},$$

где p и q — любые целые числа, но $q \neq 0$.

325. Пусть α — общий корень данных уравнений. Тогда имеем два числовых равенства:

$$\alpha^2 - (2a + 1)\alpha + a + 1 = 0,$$
$$2\alpha^2 - (4a - 1)\alpha + 1 = 0,$$

или

$$-2\alpha^2 + 2(2a + 1)\alpha - 2a - 2 = 0,$$
$$2\alpha^2 - (4a - 1)\alpha + 1 = 0.$$

Сложив последние два равенства, получим

$$3\alpha - 2a - 1 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{2a + 1}{3}.$$

Подставляя в любое, например в первое, из данных уравнений вместо x найденное значение α, получим

$$\frac{(2a + 1)^2}{9} - \frac{(2a + 1)^2}{3} + a + 1 = 0$$

или, после упрощений,

$$8a^2 - a - 7 = 0,$$

откуда $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{7}{8}$. Соответствующие им значения x таковы: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

326. Так как $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, то данное уравнение можно переписать в виде $p_0 + p_1 x + p_2 x^2 = (p_0 + p_1 + p_2)\,x$, или

$$(x-1)(p_2 x - p_0) = 0.$$

Корнями этого уравнения служат числа $x = 1$ и $x = p_0/p_2$. В силу условия $x_0 < 1$ должно иметь место соотношение $p_0/p_2 < 1$. Но так как $p_0 = 1 - p_1 - p_2$, то $\frac{1 - p_1 - p_2}{p_2} < 1$, откуда $p_1 + 2p_2 > 1$.

Остается доказать обратное утверждение. Пусть $p_1 + 2p_2 > 1$. Подставим в это неравенство вместо p_1 число $1 - p_0 - p_2$. Имеем $1 - p_0 - p_2 + 2p_2 > 1$, т. е. $p_0/p_2 < 1$. Поскольку один корень данного уравнения есть p_0/p_2, то обратное утверждение задачи также верно.

327. В силу формул Виета имеем

$$a(x_1 + x_2) = -b, \tag{1}$$

$$a x_1 x_2 = c. \tag{2}$$

Соотношения (1) и $Ax_1 + Bx_2 = C$ образуют систему линейных уравнений относительно x_1 и x_2. Из этой системы получаем

$$x_1 = \frac{Ca + Bb}{a(A-B)}, \qquad x_2 = \frac{-Ab - Ca}{a(A-B)}, \tag{3}$$

если $A \neq B$. Подставляя значения x_1 и x_2 из (3) в соотношение (2) и произведя преобразования, получим искомое условие

$$(aC + bB)(bA + aC) + ac(A-B)^2 = 0.$$

Если $A = B$, то система

$$a(x_1 + x_2) = -b, \qquad Ax_1 + Bx_2 = C$$

противоречива при $\frac{a}{A} \neq -\frac{b}{C}$ и уравнение $Ax_1 + Bx_2 = C$ является следствием уравнения $a(x_1 + x_2) = -b$ при $\frac{a}{A} = -\frac{b}{C}$.

328. Решаемое уравнение перепишем последовательно так:

$$4(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} = 0,$$

$$4\left(x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}\right) + 4\left(y^4 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{16}\right) = 0,$$

$$4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

Последнее выполняется лишь при

$$|x| = |y| = 1/2.$$

Таким образом, данное уравнение имеет четыре решения

$$x_1 = y_1 = 1/2;\ x_2 = y_2 = -1/2;\ x_3 = 1/2;\ y_3 = -1/2,\ x_4 = -1/2;\ y_4 = 1/2.$$

329. Если $a = 0$, то данное уравнение перепишется в виде $x^3 - 2x = 0$, откуда

$$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2}. \tag{1}$$

Пусть теперь $a \neq 0$, а следовательно, и $x \neq 0$. Разрешим данное уравнение относительно a. Имеем

$$a = \frac{-(x^2+2)+(3x^2-2)}{4x} = \frac{x^2-2}{2x}, \tag{2}$$

или

$$a = \frac{-(x^2+2)-(3x^2-2)}{4x} = -x. \tag{3}$$

Из (2) находим

$$x = a \pm \sqrt{a^2+2}, \tag{4}$$

а из (3) следует

$$x = -a. \tag{5}$$

Так как (4) и (5) включают в себя (1), то все решения данного уравнения исчерпываются ими: $x = a \pm \sqrt{a^2+2}$ и $x = -a$.

330. Ясно, что $|3-2x|+2>0$ при любом x, а потому данное уравнение переписывается в виде

$$|2x-3| = x-2. \tag{1}$$

Так как $|2x-3| \geqslant 0$, то $x-2 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 2$.

Если $x \geqslant 2$, то уравнение (1) имеет вид

$$2x-3 = x-2,$$

откуда $x = 1 < 2$. Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

331. Если $x^2 < 4$, то данное уравнение перепишется в виде $9-x^2+4-x^2=5$, откуда $x^2=4$, что противоречит неравенству $x^2<4$. Следовательно, при $x^2<4$ уравнение не имеет решений.

Если $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$, т. е. если $-3 \leqslant x \leqslant -2$ или $2 \leqslant x \leqslant 3$, то данное уравнение принимает вид $9-x^2+x^2-4=5$, которое выполняется при любых x. Стало быть, все числа из промежутков $-3 \leqslant x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$ служат решениями предложенного уравнения.

Наконец, если $x^2>9$, то данное уравнение имеет вид $x^2-9+x^2-4=5$, откуда $x^2=9$, что противоречит соотношению $x^2>9$. Значит, при $x^2>9$ рассматриваемое уравнение не имеет решений. Итак, данному уравнению удовлетворяют все те и только те числа, которые принадлежат промежуткам $-3 \leqslant x \leqslant -2$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.

332. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2=0,$$

или

$$(x^2+1)^2-2(x-1)^2=0,$$

или

$$[x^2+1+\sqrt{2}(x-1)][x^2+1-\sqrt{2}(x-1)]=0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два квадратных уравнения:

$$x^2+1+\sqrt{2}(x-1)=0 \text{ и } x^2+1-\sqrt{2}(x-1)=0.$$

Из первого уравнения находим

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}},$$

а из второго получаем

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}.$$

333. Пусть двойной корень данного уравнения есть k, так что левая часть делится на $(x-k)^2 = x^2-2kx+k^2$, т. е. остаток $R=0$. Разделив многочлен x^5-5x+a на $x^2-2kx+k^2$ (по правилу деления многочленов), получим остаток $R=5(k^4-1)x-4k^5+a$. Итак, имеем $5(1-k^4)x+4k^5-a=0$ при любом x, а следовательно, должна иметь место система

$$1-k^4=0,\ 4k^5-a=0,$$

откуда

$$k^4=1,\ a=4k,\ \text{т. е. } k_1=\pm 1,\ k_2=\pm i,\ a_1=\pm 4,\ a_2=\pm 4i.$$

Итак, данное уравнение имеет два равных корня, когда $a=\pm 4$ или когда $a=\pm 4i$.

334. Введем подстановку $x=y+\frac{1}{y}$. Тогда

$$2\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+6\left(y+\frac{1}{y}\right)-6\left(y+\frac{1}{y}\right)+5=0,$$

или

$$2y^6+5y^3+2=0,$$

откуда

$$y^3=-2, \qquad y^3=-1/2.$$

Очевидно, что значение x не меняется, если y заменить на $\frac{1}{y}$. Следовательно, для нахождения x достаточно использовать уравнение $y^3=-2$. Это уравнение имеет единственный действительный корень $y=-\sqrt[3]{2}$, а потому $x=-\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

335. Очевидно, что $x=-1$ не является корнем данного уравнения, а потому, поделив обе его части на $(x+1)^2$, получим равносильное ему уравнение

$$\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)^2+\frac{x^2-x}{x+1}=2. \tag{1}$$

Пусть $\frac{x^2-x}{x+1}=y$. Тогда (1) принимает вид

$$y^2+y-2=0,$$

откуда

$$y_1=1, \qquad y_2=-2.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{x^2-x}{x+1}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2-x}{x+1}=-2.$$

Из первого уравнения получаем $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, а из второго находим $x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

336. Очевидно, что $x=0$ не является корнем данного уравнения, а потому, поделив обе его части на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2-x-10+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0,$$

или

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(x-\frac{2}{x}\right)-10=0.$$

Пусть $x-\frac{2}{x}=z$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим $x^2+\frac{4}{x^2}-4=z^2$, откуда следует, что $x^2+\frac{4}{x^2}=z^2+4$. Таким образом, имеем

$$z^2+4-z-10=0,$$

или

$$z^2-z-6=0.$$

Решая это уравнение, находим $z_1=3$, $z_2=-2$. Итак, данное уравнение распадается на два уравнения:

$$x-\frac{2}{x}=3 \quad \text{и} \quad x-\frac{2}{x}=-2.$$

Из первого уравнения получаем $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, а из второго находим $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

337. Имеем

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+2\frac{x^2}{x^2-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x^2-1}=n(n-1),$$

или

$$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}=n(n-1),$$

т. е.

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}-n(n-1)=0.$$

Пусть $\frac{2x^2}{x^2-1}=y$. Тогда имеем

$$y^2-y-n(n-1)=0, \tag{1}$$

откуда $y_1=n$, $y_2=1-n$. Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$\frac{2x^2}{x^2-1}=n \quad \text{и} \quad \frac{2x^2}{x^2-1}=1-n.$$

Из первого уравнения, если $n\neq 2$, получаем $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, а из второго, если $n\neq -1$, находим $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

Остается рассмотреть случаи, когда $n=2$ и $n=-1$. В обоих случаях уравнение (1) приводится к виду $y^2-y-2=0$, откуда $y_1=2$, $y_2=-1$. Тогда или $\frac{2x^2}{x^2-1}=2$; это уравнение не имеет решений, или $\frac{2x^2}{x^2-1}=-1$, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Отв. Если $n=2$, данное уравнение не имеет решений, если $n=-1$, то $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, а если $n\neq 2$, $n\neq -1$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

338. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$x^2-10\frac{x^2}{x+5}+\frac{25x^2}{(x+5)^2}+10\frac{x^2}{x+5}=11,$$

или

$$\left(x-\frac{5x}{x+5}\right)^2+10\frac{x^2}{x+5}-11=0,$$

или

$$\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^2+10\frac{x^2}{x+5}-11=0.$$

Пусть $\frac{x^2}{x+5}=z$. Тогда имеем

$$z^2+10z-11=0,$$

откуда

$$z_1=1, \qquad z_2=-11.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{x^2}{x+5}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{x+5}=-11.$$

Из первого уравнения находим $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$, а из второго получаем $x_{3,4}=\frac{-11\pm 3i\sqrt{11}}{2}$.

339. 1) Если $2x-3\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 3/2$, то данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$|2x-3-x+1|=4x-1$$

или

$$|x-2|=4x-1.$$

Это уравнение распадается на два. При $x\geqslant 2$ имеем $x-2=4x-1$, откуда $x=-1/3$. Так как $-1/3<2$, то $x=-1/3$ не служит решением данного уравнения. Если же $x-2<0$, т. е. $3/2\leqslant x<2$, то имеем

$$-x+2=4x-1,$$

откуда $x=3/5$, но поскольку $3/5<3/2$, то и $x=3/5$ не является корнем данного уравнения.

2) Если $2x-3<0$, т. е. $x<3/2$, то решаемое уравнение принимает вид

$$|3-2x-x+1|=4x-1,$$

или

$$|4-3x|=4x-1.$$

При $4-3x\geqslant 0$, т. е. при $x\leqslant 4/3$, последнее уравнение имеет вид $4-3x=4x-1$, откуда $x=5/7$. Это значение x действительно удовлетворяет данному уравнению.

При $4-3x<0$, т. е. $3/2>x>4/3$, имеем $3x-4=4x-1$, откуда $x=-3$. Так как $-3<4/3$, то $x=-3$ не является корнем данного уравнения.

Отв. $x=5/7$.

340. Рассмотрим в отдельности все возможные случаи.

1) $x<a<2$. В этом случае данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$x^2-2a+4=0, \tag{1}$$

так как $|x-a|=a-x$, $|x-2|=2-x$. Дискриминант уравнения (1) $2a-4<0$ при $a<2$, а потому в рассматриваемом случае данное уравнение не имеет действительных решений. (Впрочем, к этому заключению можно прийти и из того, что $x^2=2(a-2)<0$, так как $a<2$.)

2) $a\leqslant x<2$. В этом случае данное уравнение принимает вид

$$x^2-4x+2(a+2)=0. \tag{2}$$

Решая это уравнение, находим

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{-2a}.$$

Ясно, что $x_{1,2}$ являются действительными лишь тогда, когда $a\leqslant 0$. Также ясно, что $2+\sqrt{-2a}\geqslant 2$, что противоречит условию $x<2$. Таким образом, если уравнение (2) имеет действительный корень, то он равен $2-\sqrt{-2a}$.

Для того чтобы $x=2-\sqrt{-2a}$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $2-\sqrt{-2a}\geqslant a$, или $4-2a+a^2\geqslant 0$, что верно при любом a. Итак, если $a\leqslant 0$, то $x=2-\sqrt{-2a}$.

3) $a<2\leqslant x$. При этих условиях решаемое уравнение перепишется в виде

$$x^2+2a-4=0, \tag{3}$$

откуда $x_{1,2}=\pm\sqrt{4-2a}$. Так как $4-2a>0$ при $a<2$, то x_1 и x_2 действительны. Но так как должно быть $2\leqslant x$, то решением уравнения (3) может служить лишь $x=+\sqrt{4-2a}$. Для того чтобы $x=+\sqrt{4-2a}$ было решением уравнения (3), еще необходимо, чтобы выполнялось соотношение $\sqrt{4-2a}\geqslant 2$, или $4-2a\geqslant 4$, или $-2a\geqslant 0$, что имеет место лишь при $a\leqslant 0$. Итак, $x=+\sqrt{4-2a}$ служит решением уравнения (3) лишь при $a\leqslant 0$.

4) $x<2\leqslant a$. В этом случае данное уравнение перепишется так:

$$x^2-2a+4=0, \tag{4}$$

откуда получаем $x_{1,2}=\pm\sqrt{2a-4}$. Поскольку $a\geqslant 2$, то x_1 и x_2 действительны. Но так как должно быть $x<2$, то для того чтобы и положительный корень удовлетворял уравнению (4), необходимо, чтобы $\sqrt{2a-4}<2$ или $a<4$. Итак, в рассматриваемом случае $x=\pm\sqrt{2a-4}$, если $2\leqslant a<4$ и $x=-\sqrt{2a-4}$, если $a\geqslant 4$.

5) $2\leqslant x<a$. При этом условии решаемое уравнение принимает вид

$$x^2+4x-2a-4=0, \tag{5}$$

откуда получаем $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{8+2a}$. Поскольку $a>2$, то $x_{1,2}$ действительны. Но $x=-2-\sqrt{8+2a}<0<2$ не является решением (5), а $x=-2+\sqrt{8+2a}$ принадлежит промежутку $2\leqslant x<a$ при $a\geqslant 4$. Следовательно, уравнение (5) имеет единственный действительный корень $x=-2+\sqrt{8+2a}$, если $a\geqslant 4$.

6) $2\leqslant a\leqslant x$. В этом случае данное уравнение перепишем в виде

$$x^2=4-2a.$$

Это уравнение имеет действительные корни лишь при $a=2$, но тогда $x=0$, что противоречит неравенству $x\geqslant 2$. Таким образом, в этом случае уравнение не имеет действительных решений.

Отв. Если $a\leqslant 0$, то $x_1=2-\sqrt{-2a}$, $x_2=\sqrt{4-2a}$, если $0\leqslant a<2$ — решений нет; если $2\leqslant a<4$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{2a-4}$, если $a\geqslant 4$, то $x_1=-\sqrt{2a-4}$, $x_2=-2+\sqrt{8+2a}$.

341. Очевидно, что $x\neq 0$, а потому данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{x^2-6x-9}{x}\right)^2=\frac{x^2-4x-9}{x},$$

или

$$\left(x-\frac{9}{x}-6\right)^2=x-\frac{9}{x}-4. \tag{1}$$

Пусть $x-\dfrac{9}{x}=z$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$(z-6)^2=z-4,$$

или

$$z^2-13z+40=0,$$

откуда $z_1=5$, $z_2=8$, т. е.

$$x-\frac{9}{x}=5 \quad \text{или} \quad x-\frac{9}{x}=8.$$

Отв. -1, 9, $\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$.

342. Так как $x=0$ не является решением данного уравнения, то поделив обе его части на x^4, получим равносильное ему уравнение

$$2x^4+\frac{32}{x^4}-9x^3-\frac{72}{x^3}+20x^2+\frac{80}{x^2}-33x-\frac{66}{x}+46=0,$$

или

$$2\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)-9\left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)+20\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-33\left(x+\frac{2}{x}\right)+46=0.$$

Пусть $x+\frac{2}{x}=z$. Тогда уравнение перепишется в следующем виде:

$$2(z^4-8z^2+8)-9(z^3-6z)+20(z^2-4)-33z+46=0,$$

или

$$2z^4-9z^3+4z^2+21z-18=0.$$

Подбором находим $z_1=1$, $z_2=2$. Теперь, поделив левую часть уравнения на $(z-1)(z-2)$, получим квадратное уравнение

$$2z^2-3z-9=0,$$

откуда получаем $z_3=3$, $z_4=-\frac{3}{2}$. Учитывая, что $x+\frac{2}{x}=z$, находим

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=1\pm i,\ x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2},\ x_{7,8}=\frac{-3\pm i\sqrt{23}}{4}.$$

343. Прибавив к обеим частям уравнения выражение $4x^2+400x+1$, получим

$$x^4+2x^2+1=4x^2+400x+10\,000,$$

или

$$(x^2+1)^2=(2x+100)^2,$$

$$x^2+1=\pm(2x+100).$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$x^2-2x-99=0 \quad \text{и} \quad x^2+2x+101=0.$$

Из первого уравнения находим $x_1=11$, $x_2=-9$, а из второго получаем $x_{3,4}=-1\pm 10i$.

344. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$x^4+2x^2+1=x^2-6x+9,$$

или

$$(x^2+1)^2=(x-3)^2,$$

$$x^2+1=\pm(x-3).$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$x^2-x+4=0 \quad \text{и} \quad x^2+x-2=0.$$

Из первого уравнения находим $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{2}$, а из второго $x_3=1$, $x_4=-2$.

345. Имеем $\sqrt{x+6}=\sqrt{x-7}+5$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим после преобразований $\sqrt{x-7}=-\frac{6}{5}$, что невозможно. Итак, данное уравнение не имеет решений.

346. Так как

$$10+x+6\sqrt{x+1}=(1+x)+6\sqrt{1+x}+9=(\sqrt{1+x}+3)^2,$$
$$5-x+2\sqrt{4-x}=(4-x)+2\sqrt{4-x}+1=(\sqrt{4-x}+1)^2,$$

то данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\sqrt{(\sqrt{1+x}+3)^2}+\sqrt{(\sqrt{4-x}+1)^2}=7,$$

или

$$|\sqrt{1+x}+3|+|\sqrt{4-x}+1|=7. \qquad (1)$$

Поскольку радикалы берутся в арифметическом смысле, то (1) можно представить так:

$$\sqrt{1+x}+3+\sqrt{4-x}+1=7,$$

или

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{4-x}=3,$$
$$1+x+4-x+2\sqrt{(1+x)(4-x)}=9,$$
$$\sqrt{(1+x)(4-x)}=2,$$
$$x(x-3)=0,$$

откуда $x_1=0$, $x_2=3$.

Проверкой убеждаемся, что $x_1=0$, $x_2=3$ действительно являются решениями данного уравнения (проверку можно произвести и по уравнению (1), так как оно равносильно исходному).

Отв. 0; 3.

347. Пусть $\sqrt{2x-5}=y$, откуда $x=\frac{y^2+5}{2}$. Следовательно, данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{y^2+5}{2}-2+y}+\sqrt{\frac{y^2+5}{2}+2+3y}=7\sqrt{2},$$

или

$$\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2+6y+9}=14,$$
$$|y+1|+|y+3|=14.$$

Но так как $y\geqslant 0$, то имеем

$$y+1+y+3=14,$$

откуда $y=5$.

Итак,

$$\sqrt{2x-5}=5,$$

откуда $x=15$.

Впрочем, если заметить, что подкоренные выражения являются полными квадратами, то решение уравнения несколько проще, а именно

$$\sqrt{(\sqrt{2x-5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2}=14,$$

или

$$\sqrt{2x-5}+1+\sqrt{2x-5}+3=14,$$

откуда $\sqrt{2x-5}=5$, $x=15$.

348. Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}=1,$$

или

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}=1,$$

$$|\sqrt{x-1}-1|+|\sqrt{x-1}-2|=1. \qquad (1)$$

Если $\sqrt{x-1}<1$, то (1) примет вид

$$1-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}=1, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{x-1}=1,$$

что противоречит неравенству $\sqrt{x-1}<1$. Таким образом, в рассматриваемом случае данное уравнение не имеет решений.

Если $1\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 2$, т. е. если $2\leqslant x\leqslant 5$, то (1) перепишется в следующем виде:

$$\sqrt{x-1}-1+2-\sqrt{x-1}=1, \text{ или } 1=1.$$

Следовательно, данное уравнение справедливо для всех x из промежутка $2\leqslant x\leqslant 5$.

Если $\sqrt{x-1}>2$, то уравнение (1) таково:

$$\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}-2=1, \quad \text{или} \quad \sqrt{x-1}=2.$$

Но последнее противоречит $\sqrt{x-1}>2$, а потому в рассматриваемом случае данное уравнение не имеет решений.

Отв. $2\leqslant x\leqslant 5$.

349. Первое решение. Введем обозначение $y=\sqrt{x^2-1}$. Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a,\\ x^2-y^2&=1,\\ y&\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Так как $x^2-y^2=1$, то $x+y\neq 0$, а потому $a\neq 0$. Следовательно, если $a=0$, то данное уравнение не имеет решений. Если же $a\neq 0$, то из (1) следует, что

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{a},\\ x+y=a, \end{cases}$$

откуда получаем

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right), \quad y=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

В силу последнего соотношения из (1) заключаем, что $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ в том и только в том случае, когда $a-\frac{1}{a}\geqslant 0$, или $\frac{(a-1)(a+1)}{a}\geqslant 0$. Это неравенство выполняется для всех a из промежутков $-1\leqslant a<0$, $a\geqslant 1$. Для всех остальных значений a уравнение не имеет решений.

Второе решение. Очевидно, что уравнение имеет решение лишь при $a-x\geqslant 0$, т. е. при

$$x\leqslant a. \qquad (1)$$

Поэтому $x^2-1=a^2-2ax+x^2$, откуда

$$2ax=a^2+1. \qquad (2)$$

Если $a=0$, то уравнение (2) не имеет решений, а если $a \neq 0$, то

$$x=\frac{a^2+1}{2a}.$$

Учитывая соотношение (1), имеем $\frac{a^2+1}{2a} \leqslant a$, т. е. $\frac{a^2-1}{a} \geqslant 0$, или $(a+1)\,a\,(a-1) \geqslant 0$, откуда $-1 \leqslant a < 0$, или $a \geqslant 1$.

Отв. $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, где $-1 \leqslant a < 0$ или $a \geqslant 1$.

350. Так как $x=3$ или $x=2$ не удовлетворяют данному уравнению, то $\sqrt[6]{(x-3)(x-2)} \neq 0$, и уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{(x-3)(x-2)}}=5,$$

или

$$6\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}+\sqrt[6]{\frac{x-2}{x-3}}-5=0.$$

Пусть $\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}=y$. Тогда

$$6y+\frac{1}{y}-5=0,$$

откуда находим $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{1}{3}$. Таким образом, решаемое уравнение распадается на два:

$$\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}=\frac{1}{2} \text{ и } \sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}=\frac{1}{3}.$$

Из первого уравнения находим $x_1=\frac{190}{63}$, а из второго получаем $x_2=\frac{2185}{728}$.

351. Сразу видно, что $a>0$, так как при $a<0$ или $a+x<0$ или $a-x<0$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$4(a+x)+(a-x)-4\sqrt{(a+x)(a-x)}=a-x+\sqrt{x(a+x)},$$

или

$$4(a+x)-4\sqrt{(a+x)(a-x)}=\sqrt{x(a+x)}. \qquad (1)$$

Заметим, что $x=-a \neq 0$ не является решением исходного уравнения. (Значение $x=-a=0$ удовлетворяет уравнению.)

Поделив обе части уравнения (1) на $\sqrt{x+a}$, получим

$$4\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)=\sqrt{x}.$$

Возведем последнее уравнение в квадрат, получим после преобразований

$$32\sqrt{a^2-x^2}=32a-x.$$

Отсюда уже легко найти значения x:

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{64a}{1025}.$$

Проверкой можно убедиться, что оба найденных значения x удовлетворяют данному уравнению.

352. Так как радикалы берутся в арифметическом смысле, то ясно, что $x \geqslant a$. Возведя в квадрат обе части данного уравнения, получаем

$$a^2 + x\sqrt{x^2 + b^2 - a^2} = (x - a)^2,$$

или

$$x\sqrt{x^2 + b^2 - a^2} = x(x - 2a).$$

Отсюда видно, что $x = 0$ есть корень этого уравнения. Если $x = 0$, то исходное уравнение принимает вид $\sqrt{a^2} = -a$. Следовательно, если $x = 0$, то должно быть $a \leqslant 0$. Теперь будем считать, что $x \neq 0$. Имеем

$$\sqrt{x^2 + b^2 - a^2} = x - 2a.$$

Последнее уравнение может иметь решения лишь при $x \geqslant 2a$. Далее,

$$(\sqrt{x^2 + b^2 - a^2})^2 = (x - 2a)^2,$$

или

$$x^2 + b^2 - a^2 = x^2 - 4ax + 4a^2,$$

откуда

$$x = \frac{5a^2 - b^2}{4a}.$$

Решение возможно лишь тогда, когда $x \geqslant a$ и $x \geqslant 2a$. Имеем

$$x - a = \frac{5a^2 - b^2}{4a} - a = \frac{a^2 - b^2}{4a},$$

$$x - 2a = \frac{5a^2 - b^2}{4a} - 2a = -\frac{3a^2 + b^2}{4a}.$$

Для того чтобы $x - 2a$ было неотрицательным, должно быть $a < 0$. Тогда неравенство $x - a \geqslant 0$ дает $a^2 - b^2 \leqslant 0$, т. е. $a^2 \leqslant b^2$.

Таким образом, для того чтобы данное уравнение имело решения, необходимо, чтобы было $a < 0$, $|a| \leqslant |b|$. Тогда уравнение имеет два корня: 0 и $\frac{5a^2 - b^2}{4a}$. Проверкой можно убедиться, что $\frac{5a^2 - b^2}{4a}$ действительно является корнем уравнения.

Отв. 0, $\frac{5a^2 - b^2}{4a}$.

353. Приведем левую часть данного уравнения к общему знаменателю. Имеем

$$\frac{(1 + \sqrt{1 - x}) - (1 - \sqrt{1 - x})}{(1 - \sqrt{1 - x})(1 + \sqrt{1 - x})} = \frac{\sqrt{3}}{x},$$

или

$$\frac{2\sqrt{1 - x}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{x},$$

или

$$2\sqrt{1 - x} = \sqrt{3},$$

или

$$(2\sqrt{1 - x})^2 = 3,$$

откуда $x = \frac{1}{4}$. Проверкой легко убедиться, что $x = \frac{1}{4}$ действительно является решением данного уравнения.

Отв. $x = \frac{1}{4}$.

354. Приведем левую часть данного уравнения к общему знаменателю. Имеем

$$\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-(x^2-1)}}=\sqrt{2(x^3+1)},$$

или

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{2(x^3+1)}.$$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим (после последующего преобразования) уравнение

$$2x^3-2x=0.$$

Корнями этого уравнения являются числа -1, 0, 1. Лишь число 1 удовлетворяет данному уравнению, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Отв. $x=1$.

355. Левую часть уравнения можно представить в следующем виде:

$$\frac{2+x+x-2\sqrt{(2+x)x}}{2+x+x+2\sqrt{(2+x)x}}, \text{ или } \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})^2}.$$

Таким образом, данное уравнение перепишется в таком виде:

$$\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})^2}=a^3\,\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}},$$

или

$$\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^3=a^3.$$

Отсюда видно, что $a>0$.

Далее, извлекая кубический корень из обеих частей последнего уравнения, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=a, \tag{1}$$

или

$$\sqrt{2+x}\,(1-a)=\sqrt{x}\,(1+a). \tag{2}$$

В случае, когда $\sqrt{x}>0$, из (2) следует, что $(1-a)(1+a)>0$. Следовательно, $-1<a<1$. Итак, $0<a<1$. Возвышая обе части уравнения (2) в квадрат, получим

$$(2+x)(1-a)^2=x(1+a)^2,$$

откуда

$$x=\frac{(1-a)^2}{2a}.$$

Проверкой убеждаемся, что $x=\frac{(1-a)^2}{2a}$ действительно является решением данного уравнения.

Если же $\sqrt{x}=0$, т. е. $x=0$, то, как видно из (2), $a=1$.

Отв. Если $0<a\leqslant 1$, то $x=\frac{(1-a)^2}{2a}$. При других значениях a уравнение не имеет решений.

356. Перепишем решаемое уравнение в следующем виде:

$$m-x\sqrt{x}=\sqrt{x^3-2}. \tag{1}$$

Далее,

$$(m-x\sqrt{x})^2=x^3-2.$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{m^2+2}{2m}\right)^2}.$$

Так как $x\sqrt{x}=\left|\frac{m^2+2}{2m}\right|$ и $\sqrt{x^3-2}=\sqrt{\left(\frac{m^2+2}{2m}\right)^2-2}=\sqrt{\left(\frac{m^2-2}{2m}\right)^2}=$ $=\left|\frac{m^2-2}{2m}\right|$, то проверка найденного значения x сводится к доказательству равенства

$$\left|\frac{m^2+2}{2m}\right|+\left|\frac{m^2-2}{2m}\right|=m. \qquad (2)$$

Это равенство возможно лишь при $m>0$. Учитывая, что $m>0$, равенство (2) можно переписать так:

$$\left|\frac{m^2-2}{2m}\right|=m-\frac{m^2+2}{2m}=\frac{m^2-2}{2m}.$$

Последнее равенство имеет место лишь при $\frac{m^2-2}{2m}\geqslant 0$ или, так как $m>0$, то должно быть $m^2-2\geqslant 0$, т. е. $m\geqslant\sqrt{2}$.

Отв. Если $m\geqslant\sqrt{2}$, то $x=\sqrt[3]{\left(\frac{m^2+2}{2m}\right)^2}$, а если $m<\sqrt{2}$, то решений нет.

357. Пусть $\sqrt[3]{24+x}=\alpha$, $\sqrt{12-x}=\beta$. В силу этих обозначений и условия задачи имеем систему

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6,\\ \alpha^3=24+x,\\ \beta^2=12-x.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $\beta=6-\alpha$, $\beta^2=(6-\alpha)^2=$ $=36-12\alpha+\alpha^2$. Подставляя в третье уравнение системы вместо β^2 выражение $\alpha^2-12\alpha+36$, получим

$$\alpha^2-12\alpha+36=12-x.$$

Складывая почленно это уравнение со вторым уравнением системы, получим

$$\alpha^3+\alpha^2-12\alpha=0,$$

или

$$\alpha(\alpha^2+\alpha-12)=0,$$

$$\alpha(\alpha+4)(\alpha-3)=0,$$

откуда следует, что $\alpha_1=0$, $\alpha_2=-4$, $\alpha_3=3$. Подставляя найденные значения α в равенство $\alpha^3=24+x$, получим $x_1=-24$, $x_2=-88$, $x_3=3$. Проверкой убеждаемся, что все эти значения x удовлетворяют данному уравнению.

358. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{4-x^2}=4-4\sqrt{x}+x,$$

или

$$\sqrt{4-x^2}=(2-\sqrt{x})^2.$$

Пусть $2-\sqrt{x}=\alpha$, $\sqrt{x}=\beta$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases}\sqrt{4-x^2}=\alpha^2,\\ 2-\sqrt{x}=\alpha,\\ x=\beta^2,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}4-x^2=\alpha^4,\\ 2-\beta=\alpha,\\ x^2=\beta^4.\end{cases}$$

Сложив почленно первое и третье уравнения последней системы, получим $\alpha^4+\beta^4=4$.

Итак, для нахождения α и β имеем систему

$$\begin{cases} \alpha+\beta=2, \\ \alpha^4+\beta^4=4. \end{cases}$$

Возведем в четвертую степень обе части первого уравнения этой системы:

$$16=(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+\beta^4+4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2\beta^2.$$

Но так как $\alpha+\beta=2$, $\alpha^4+\beta^4=4$, то

$$16=4+16\alpha\beta-2\alpha^2\beta^2,$$

или

$$(\alpha\beta)^2-8(\alpha\beta)+6=0,$$

откуда получаем

$$(\alpha\beta)_1=4+\sqrt{10}, \quad (\alpha\beta)_2=4-\sqrt{10}.$$

Таким образом, имеем две системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha\beta=4+\sqrt{10}, \\ \alpha+\beta=2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha\beta=4-\sqrt{10}, \\ \alpha+\beta=2. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных корней (в иррациональных уравнениях ищутся лишь действительные корни), а из второй системы находим $\beta=1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}$. Но так как $x=\beta^2$, то

$$x=\left(1\pm\sqrt{\sqrt{10}-3}\right)^2.$$

Проверкой убеждаемся, что оба значения x действительно удовлетворяют данному уравнению.

359. Сразу заметим, что правая часть положительна, а потому $x>0$. Так как обе части уравнения положительны, то имеем равносильное ему уравнение

$$16x^8+1+8x^4=32x^2\left(x^4-\frac{1}{4}\right),$$

или

$$16x^8-32x^6+8x^4+8x^2+1=0.$$

Так как $x\neq 0$, то, поделив последнее уравнение на x^4, получим

$$16x^4-32x^2+8+\frac{8}{x^2}+\frac{1}{x^4}=0,$$

или

$$\left(16x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(32x^2-\frac{8}{x^2}\right)+8=0,$$

$$16\left(x^4+\frac{1}{16x^4}\right)-32\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)+8=0. \qquad (1)$$

Введем обозначение $x^2-\frac{1}{4x^2}=z$.

Возведя в квадрат последнее равенство, получим $x^4+\frac{1}{16x^4}=z^2+\frac{1}{2}$. Теперь уравнение (1) перепишется так:

$$16\left(z^2+\frac{1}{2}\right)-32z+8=0, \quad \text{или} \quad 16(z-1)^2=0.$$

Решая это уравнение, находим $z=1$, т. е.

$$x^2-\frac{1}{4x^2}=1, \quad 4x^4-4x^2-1=0.$$

Последнее уравнение, а вместе с ним и данное имеет единственный положительный корень

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}.$$

При проверке убеждаемся, что найденное значение x удовлетворяет исходному уравнению.

360. Левая часть уравнения определена лишь при $x \geqslant -1$.

Пусть $\sqrt{x+1}=z$. Тогда данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$x^2+xz-2z^2=0.$$

Разрешив это уравнение относительно x, получаем $x_1=z$, $x_2=-2z$. Итак, имеем два уравнения

$$x=\sqrt{x+1} \quad \text{и} \quad x=-2\sqrt{x+1}.$$

Так как $z \geqslant 0$, то из первого уравнения следует лишь $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Поскольку $z \geqslant 0$, то второе уравнение также имеет только один корень (отрицательный), удовлетворяющий данному уравнению, а именно $x=2-2\sqrt{2}$.

Отв. $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=2-2\sqrt{2}$.

361. Пусть $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=z$, тогда $\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=\frac{1}{z}$ и данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\frac{x-1}{z}+(3-x)\cdot z-2=0,$$

или

$$(3-x)z^2-2z+x-1=0,$$

откуда находим $z_1=1$, $z_2=\frac{x-1}{3-x}$. Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=1 \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}=\frac{x-1}{3-x}.$$

Каждое из этих уравнений выполняется лишь при $x=2$.

Проверкой убеждаемся, что $x=2$ действительно является решением данного уравнения.

Отв. $x=2$.

362. Для удобства введем обозначение $\sqrt[3]{a-x}=k\sqrt[3]{x-b}$. Тогда данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\frac{k\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-b}}{k\sqrt[3]{x-b}-\sqrt[3]{x-b}}=\frac{2}{3}\,\frac{k\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{x-b}} \quad (x \neq b),$$

или

$$\frac{k+1}{k-1}=\frac{2k}{3} \quad (k \neq 1),$$

откуда находим $k_1=3$, $k_2=-{}^1/_2$. Таким образом, данное уравнение распадается на два

$$\sqrt[3]{a-x}=3\sqrt[3]{x-b} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{a-x}=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x-b}.$$

Из первого уравнения получаем $x=\frac{a+27b}{28}$, а из второго находим $x=\frac{8a-b}{7}$.

Проверка:

$$x=\frac{8a-b}{7},\quad a-x=\frac{b-a}{7},\quad x-b=\frac{8(a-b)}{7};$$

левая часть исходного уравнения равна

$$\frac{-\sqrt[3]{a-b}+2\sqrt[3]{a-b}}{-\sqrt[3]{a-b}-2\sqrt[3]{a-b}}=-\frac{1}{3},\quad \text{если}\quad a\neq b,$$

а правая часть равна

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{b-a}{8(a-b)}}=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3},\quad \text{если}\quad a\neq b.$$

Итак, $\frac{8a-b}{7}$ — корень уравнения.

Аналогичной проверкой убеждаемся, что $\frac{a+27b}{28}$ — корень уравнения.

Заметим, что при $a=b$ и любом значении x левая часть уравнения равна нулю, а правая часть равна $-{}^2/_3$.

Отв. $x_1=\frac{8a-b}{7}$, $x_2=\frac{a+27b}{28}$, где $a\neq b$.

363. Пусть $\sqrt{1-x^2}=y\geqslant 0$. Заметим, что $-1<x<1$, откуда $x^2+y^2=1$. Итак, имеем систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x+y}{y}=\frac{35}{12}x,\\ &x^2+y^2=1, \end{aligned}\right.$$

или

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\frac{35}{12}xy,\\ (x+y)^2-2xy&=1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Подставляя из первого уравнения значение $x+y$ во второе, получим

$$\left(\frac{35}{12}xy\right)^2-2xy-1=0,$$

или

$$1225(xy)^2-288xy-144=0,$$

откуда находим два значения xy. Решая каждое из этих уравнений совместно с первым уравнением системы (1), найдем четыре решения системы (1). Из них условию $y\geqslant 0$ удовлетворяют лишь три.

Проверкой убеждаемся, что все эти три значения x удовлетворяют и исходному уравнению.

Отв. $x_1=0{,}6$; $x_2=0{,}8$; $x_3=-\frac{1}{14}(5+\sqrt{73})$.

364. Возведем обе части данного уравнения в квадрат. Имеем

$$x+1-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+\frac{x-1}{x}=1,$$

или

$$x+\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=0, \quad x-\frac{1}{x}+1-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=0,$$

$$\frac{x^2-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1=0,$$

$$\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-1\right)^2=0,$$

откуда следует, что $\frac{x^2-1}{x}=1$, т. е. $x^2-x-1=0$. Корнями этого уравнения служат числа $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Проверкой убеждаемся, что найденные корни удовлетворяют данному уравнению.

Отв. $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

365. Левая часть данного уравнения представляет собой неполный квадрат суммы $\sqrt[3]{x+a}$ и $\sqrt[3]{x-a}$, а потому, умножив обе части уравнения на разность $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}$, получим

$$\left(\sqrt[3]{x+a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x-a}\right)^3=\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}\right),$$

или

$$\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}\right)=2a.$$

Пусть $a\neq 0$, тогда

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=2\sqrt[3]{a}.$$

Теперь, используя равенство $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$, возведем обе части последнего уравнения в куб, получим

$$x+a-(x-a)-3\sqrt[3]{x^2-a^2}\cdot 2\sqrt[3]{a}=8a,$$

или

$$-\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{x^2-a^2},$$

откуда находим $x=0$.

При $a=0$ данное уравнение перепишется так: $3\sqrt[3]{x^2}=0$, т. е. и в этом случае $x=0$.

Проверкой убеждаемся, что $x=0$ действительно является корнем данного уравнения.

Отв. $x=0$.

366. Ясно, что $x>0$. Так как $x\neq 0$, то, поделив обе части данного уравнения на x, получим равносильное ему уравнение

$$\frac{(2x-1)^2}{x}=\frac{3(2x-1)-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Пусть $\frac{2x-1}{\sqrt{x}}=y$. Тогда

$$y^2-3y+2=0,$$

откуда $y_1=1$, $y_2=2$.

Таким образом, решаемое уравнение распадается на два:

$$\frac{2x-1}{\sqrt{x}}=1 \quad \text{и} \quad \frac{2x-1}{\sqrt{x}}=2.$$

Из первого получаем $x=1$, а из второго находим $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Проверка показывает, что оба значения x удовлетворяют данному уравнению.

Отв. $x_1=1$, $x_2=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

367. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$25x^2-10x+1=x+6\sqrt{x}+9 \quad (x>0),$$

или

$$(5x-1)^2=(\sqrt{x}+3)^2,$$

откуда

$$5x-1=\pm(\sqrt{x}+3).$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$5x-1=\sqrt{x}+3 \quad \text{и} \quad 5x-1=-\sqrt{x}-3.$$

Из первого уравнения находим $x=1$. Второе уравнение не имеет действительных корней, а при решении иррациональных уравнений находятся лишь действительные корни.

Отв. 1.

368. Пусть $\sqrt[4]{x-2}=\alpha$, $\sqrt[4]{3-x}=\beta$. Имеем систему

$$\begin{cases} \alpha^4=x-2, \\ \beta^4=3-x, \\ \alpha+\beta=1. \end{cases}$$

Сложив первые два уравнения, получаем

$$\alpha^4+\beta^4=1.$$

Возведя обе части третьего уравнения системы в четвертую степень, получим

$$\alpha^4+\beta^4+4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2-2\alpha^2\beta^2=1.$$

Но так как $\alpha+\beta=\alpha^4+\beta^4=1$, то имеем

$$1+4\alpha\beta-2\alpha^2\beta^2=1,$$

или

$$2\alpha\beta-\alpha^2\beta^2=0,$$

или

$$\alpha\beta(2-\alpha\beta)=0.$$

Таким образом, либо $\alpha=0$, либо $\beta=0$, либо $\alpha\beta=2$. Если $\alpha=0$, т. е. $\sqrt[4]{x-2}=0$, то $x=2$; если $\beta=0$, т. е. $\sqrt[4]{3-x}=0$, то $x=3$. Наконец, система $\alpha\beta=2$, $\alpha+\beta=1$ не имеет действительных решений.

Проверкой убеждаемся, что $x=2$ и $x=3$ действительно являются корнями уравнения.

Отв. $x_1=2$, $x_2=3$.

369. Из условия видно, что $a\neq 0$.

Так как $m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$, то

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right).$$

Поэтому данное уравнение перепишется так:

$$x-3\sqrt[3]{x}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right),$$

$$x-\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left[\sqrt[3]{x}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]=0,$$

$$\left[\sqrt[3]{x}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]\left[\sqrt[3]{x^2}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt[3]{x}+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right]-$$

$$-3\left[\sqrt[3]{x}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]=0,$$

$$\left[\sqrt[3]{x}-\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]\left[\sqrt[3]{x^2}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt[3]{x}+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right]=0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$\sqrt[3]{x}-\left(a+\frac{1}{a}\right)=0,\quad \sqrt[3]{x^2}+\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt[3]{x}+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3=0.$$

Из первого уравнения находим $x=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$, а, рассматривая второе уравнение как квадратное относительно $\sqrt[3]{x}$, получим

$$\sqrt[3]{x}=\frac{-\left(a+\frac{1}{a}\right)\pm\sqrt{3\left[4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right]}}{2}.$$

Так как при наличии иррационального уравнения ищутся только действительные корни, то должно быть

$$4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 0,\quad \text{т. е.}\quad \left|a+\frac{1}{a}\right|\leqslant 2.$$

Однако известно, что при любом действительном $a\neq 0$ число $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geqslant 2$. Следовательно, $\left|a+\frac{1}{a}\right|=2$, что возможно лишь при $a=\pm 1$.

При $a=1$ имеем $\sqrt[3]{x}=-1$, т. е. $x=-1$, при $a=-1$ получаем $\sqrt[3]{x}=1$, т. е. $x=1$.

Таким обазом, при $a=1$ уравнение имеет два корня: $x_1=8$, $x_2=-1$, а при $a=-1$ имеет тоже два корня: $x_1=-8$, $x_2=1$. Если же $a\neq\pm 1$, то уравнение имеет только один корень $x=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$ для каждого a, отличного от нуля.

370. Вначале заметим, что левые части всех трех уравнений не изменятся, если одновременно заменить x и y на $-x$ и $-y$. В силу этого, если тройка чисел (x, y, z) является одним из решений системы, то и тройка чисел $(-x, -y, z)$ также является решением данной системы. Следовательно, решение может быть единственным только тогда, когда $x=y=0$. Подставляя во все три уравнения вместо x и y нуль, получим $a=b=z=\pm 2$.

Рассмотрим отдельно оба случая, т. е.

1) $a=b=2$. В этом случае имеем

$$\begin{cases} xyz+z=2,\\ xyz^2+z=2,\\ x^2+y^2+z^2=4,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases} xyz+z=2,\\ xyz(z-1)=0,\\ x^2+y^2+z^2=4.\end{cases}$$

Теперь видно, что система имеет, кроме решения (0, 0, 2), еще действительные решения, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} z=1, \\ xy=1, \\ x^2+y^2=3. \end{cases}$$

Таким образом, если $a=b=2$, то система имеет больше одного действительного решения.

2) $a=b=-2$. В этом случае имеем

$$\begin{cases} xyz+z=-2, \\ xyz^2+z=-2, \\ x^2+y^2+z^2=4, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xyz+z=-2, \\ xyz(z-1)=0, \\ x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$$

Ясно, что эта система имеет единственное действительное решение $(0, 0, -2)$.

Отв. $a=b=-2$.

371. Если $2x-1\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant\frac{1}{2}$, и $4-y\leqslant 0$, т. е. $y\geqslant 4$, то данная система перепишется в виде

$$\begin{cases} 2x-1-y=2, \\ x+4-y=-1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=8$, $y=13$. Так как эти значения x и y не противоречат неравенствам $x\geqslant\frac{1}{2}$, $y\geqslant 4$, они удовлетворяют данной системе.

Если $2x-1\leqslant 0$, т. е. $x\leqslant\frac{1}{2}$, и $4-y\leqslant 0$, т. е. $y\geqslant 4$, то данная система принимает вид

$$\begin{cases} -2x+1-y=2, \\ x+4-y=-1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x=-2$, $y=3$. Но так как $3<4$, то в этом случае система не имеет решений.

Если $x\geqslant\frac{1}{2}$, $y\leqslant 4$, то решаемая система запишется так:

$$\begin{cases} 2x-1-y=2, \\ x-4+y=-1. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел $x=2$, $y=1$. Поскольку найденные значения $x=2$, $y=1$ не противоречат неравенствам $x\geqslant\frac{1}{2}$, $y\leqslant 4$, то $x=2$, $y=1$ являются решением данной системы.

Наконец, если $x\leqslant\frac{1}{2}$, $y\leqslant 4$, то данная система такова:

$$\begin{cases} -2x+1-y=2, \\ x-4+y=-1. \end{cases}$$

Эта система выполняется лишь при $x=-4$, $y=7$. Но так как $7>4$, то $x=-4$, $y=7$ не служат решением системы.

Отв. $x_1=8$, $y_1=13$; $x_2=2$, $y_2=1$.

372. Очевидно, что данная система равносильна следующей:

$$A=0, \quad B+C+D=0, \quad B-C=0, \quad D=0,$$

т. е.

$$\begin{cases} x+y+z-(a+b+c)=0, \\ (a+b+c)(x+y+z)-2(a^2+b^2+c^2+2ab)=0, \\ (a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0, \\ cx+ay+bz-4ab=0. \end{cases}$$

Заменим во втором уравнении $x+y+z$ его выражением $a+b+c$, найденным из первого уравнения, получаем

$$(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2+2ab)=0,$$

или, располагая левую часть по степеням буквы c, имеем

$$c^2-2c(a+b)+(a+b)^2=0, \text{ или } [c-(a+b)]^2=0,$$

откуда следует искомое условие $c=a+b$.

Подставляя $a+b$ вместо c в остальные три уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z-2(a+b)=0, \\ (a-b)x-ay+bz=0, \\ (a+b)x+ay+bz-4ab=0, \end{cases}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x+y+z-2(a+b)=0, \\ ax+bz-2ab=0, \\ bx+ay-2ab=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Рассмотрим все возможные случаи, а именно:

1) $a=b=0$. В этом случае система приводится к одному уравнению $x+y+z=0$, т. е. система неопределенная.

2) $a\neq 0$, $b=0$. В этом случае система (1) принимает такой вид:

$$\begin{cases} x+y+z-2a=0, \\ ax=0, \\ ay=0, \end{cases}$$

откуда

$$x=0, \quad y=0, \quad z=2a.$$

3) $a=0$, $b\neq 0$. В этом случае получаем

$$x=0, \quad y=2b, \quad z=0.$$

4) $ab\neq 0$, т. е. $a\neq 0$, $b\neq 0$. В этом случае из двух последних уравнений системы (1) находим

$$y=\frac{2ab-bx}{a}, \quad z=\frac{2ab-ax}{b}. \qquad (2)$$

Подставляя эти значения для y и z в первое уравнение (1), получаем

$$x+\frac{2ab-ax}{b}+\frac{2ab-bx}{a}-2(a+b)=0,$$

или $-x(a^2+b^2-ab)=0$. Но поскольку $a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\neq 0$, то $x=0$. Подставляя $x=0$ в уравнения (2), получаем $y=2b$, $z=2a$.

373. Пусть $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=y$. Тогда данная система перепишется в виде

$$\begin{cases} y-x_1=1, \\ y-x_2=2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y-x_n=n. \end{cases}$$

Сложив почленно все уравнения системы, получим

$$ny-(x_1+x_2+\ldots+x_n)=1+2+\ldots+n. \qquad (1)$$

Но так как $x_1+x_2+\ldots+x_n=y$, а $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, из (1) находим

$$y=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Поскольку $x_k=y-k$, то имеем

$$x_k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-k,$$

где $k=1, 2, \ldots, n$.

374. Перепишем данную систему в виде

$$2y-1=\sqrt{(x-1)^2}, \quad y^2=1-|x|,$$

или

$$2y-1=|x-1|, \qquad y^2=1-|x|.$$

Если $x \geqslant 1$, то система принимает вид

$$2y-1=x-1, \qquad y^2=1-x,$$

или

$$y=\frac{x}{2}, \qquad y^2=1-x.$$

Так как $x \geqslant 1$, то имеем $y \geqslant \frac{1}{2}$ и $y^2 \leqslant 0$, и поскольку полученные неравенства несовместимы, то заключаем, что при $x \geqslant 1$ система не имеет решений.

Если $0 \leqslant x < 1$, то система перепишется в виде

$$2y-1=1-x, \qquad y^2=1-x.$$

Решая эту систему, получим $x=0$, $y=1$.

Наконец, если $x<0$, то система принимает вид

$$2y-1=1-x, \qquad y^2=1+x,$$

или

$$x=2(1-y), \qquad x=y^2-1.$$

Так как $x<0$, то имеем два неравенства:

$$y-1>0, \qquad y^2-1<0,$$

или

$$y>1, \quad -1<y<1.$$

Поскольку полученные неравенства несовместимы, то заключаем, что при $x<0$ система не имеет решений. Итак, система имеет единственное решение $x=0$, $y=1$.

375. Если $y=0$, то данное уравнение принимает вид

$$x^2-x=0,$$

откуда $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=1$, $y_2=0$.

Если $y \neq 0$, то, полагая $\frac{x}{y}=k$, имеем $x=ky$; поэтому данное уравнение приводится к виду

$$ky+y=k^2y^2+y^2,$$

или

$$k+1=(k^2+1)\,y,$$

откуда

$$y=\frac{k+1}{k^2+1}, \qquad x=\frac{k(k+1)}{1+k^2}, \tag{1}$$

где k — любое рациональное число.

Найденное выше решение $x_1=0$, $y_1=0$ содержится в формулах (1) при $k=-1$.

Отв.

$$x=\frac{k(k+1)}{1+k^2}, \qquad y=\frac{k+1}{k^2+1},$$

где k — любое рациональное число, и

$$x=1, \qquad y=0.$$

376. Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x^3-16x=y^3-4y, \\ 5x^2=y^2-4. \end{cases}$$

Если $x\neq 0$, то, поделив почленно первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{x^3-16x}{5x^2}=\frac{y^3-4y}{y^2-4},$$

откуда

$$y=\frac{x^2-16}{5x}.$$

Подставляя это значение y во второе уравнение системы, получим

$$5x^2=\frac{(x^2-16)^2}{25x^2}-4,$$

или

$$124x^4+132x^2-256=0,$$

откуда $x^2=1$. Следовательно, $x_1=1$, $x_2=-1$.

Подставляя найденные значения x в формулу $y=\dfrac{x^2-16}{5x}$, получим

$$y_1=-3, \qquad y_2=3.$$

Если же $x=0$, то из второго уравнения системы получим $y^2-4=0$, откуда $y_3=2$, $y_4=-2$.

Проверкой легко убедиться, что найденные последние значения x и y удовлетворяют и первому уравнению системы.

Отв.

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=0, \\ y_3=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=0, \\ y_4=-2. \end{cases}$$

377. Имеем

$$\frac{y^2+x\sqrt[3]{xy^2}}{x^2+y\sqrt[3]{x^2y}}=\frac{68}{17}=4,$$

или

$$\frac{\sqrt[3]{y^2}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}\right)}=4,$$

откуда $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}=4$, а потому $\frac{y}{x}=\pm 4^{\frac{3}{2}}=\pm 8$, т. е. $y=\pm 8x$. Подставляя $y=\pm 8x$ в любое из уравнений системы и решая это уравнение, найдем $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=-1$.

Таким образом, данная система имеет 4 решения:

$$x_{1,2}=1, \quad y_{1,2}=\pm 8; \quad x_{3,4}=-1, \quad y_{3,4}=\mp 8.$$

378. Должно быть $a-x\geqslant 0$, $b-x\geqslant 0$, $y-x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Также ясно, что $\sqrt{b-x}\leqslant\sqrt{a-x}$, т. е. $a\geqslant b$, и $\sqrt{y-x}<\sqrt{a-x}$, т. е. $a\geqslant y$. Итак, должно быть $a\geqslant b\geqslant x$, $a\geqslant y\geqslant 0$, $y\geqslant x$.

Складывая и вычитая уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} \sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=2\sqrt{y}, \\ \sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}=2\sqrt{y-x}; \end{cases}$$

или после возвышения в квадрат обоих уравнений последней системы, получаем

$$\begin{cases} a+b-2x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}=4y, \\ a+b-2x-2\sqrt{(a-x)(b-x)}=4y-4x. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения этой системы, имеем

$$\begin{cases} 8y=2(a+b), \\ 4\sqrt{(a-x)(b-x)}=4x, \end{cases} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} y=\frac{a+b}{4}, \\ x=\sqrt{(a-x)(b-x)}. \end{cases} \tag{2}$$

Из второго уравнения системы (2) видно, что $x\geqslant 0$ и $(a+b)x=ab$.

Поскольку $x\geqslant 0$ и $a\geqslant b\geqslant x$, то $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Так как $a\geqslant b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то возможны лишь два случая:

1) $a=b=0$. Так как $a\geqslant y\geqslant x\geqslant 0$, $a=0$, то получим $x=y=0$.

2) $a>0$, $b\geqslant 0$. В этом случае $x=\frac{ab}{a+b}$, $y=\frac{a+b}{4}$.

379. Если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 1$, то данная система уравнений перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y-1=3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=1$, $y=2$.

Если $x\geqslant 0$, $y<1$, то решаемая система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x-y+1=3. \end{cases}$$

Из этой системы получаем $x=\frac{9}{5}$, $y=\frac{8}{5}$. Но так как $\frac{8}{5}>1$, то в рассматриваемом случае данная система не имеет решений.

Если $x<0$, $y\geqslant 1$, то система такова:

$$\begin{cases} -x+2y=5, \\ 2x+y-1=3. \end{cases}$$

Решением последней системы является пара чисел $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{14}{5}$. Так как $\frac{3}{5}>0$, то и в этом случае система не имеет решения.

Наконец, если $x<0$, $y<1$, то имеем систему

$$\begin{cases} -x+2y=5, \\ 2x-y+1=3, \end{cases}$$

откуда находим $x=3$, $y=4$. Поскольку $3>0$ (и $4>1$), то и в последнем случае система не имеет решений.

Отв. $x=1$, $y=2$.

380. Из первого уравнения имеем $(ax-1)y=x$. Ясно, что $ax-1\neq 0$, так как, если бы $ax-1=0$, то первое уравнение переписалось бы в виде $x+y=y$, откуда $x=0$, и $-1=0$, что невозможно. Поэтому $y=\frac{x}{ax-1}$. Аналогично доказывается, что $cx-1\neq 0$, а потому из третьего уравнения получаем $z=\frac{x}{cx-1}$. Подставляя найденные выражения для y и z во второе уравнение системы, получим

$$(a-b+c)x^2-2x=0,$$

откуда находим $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{a-b+c}$. Теперь легко найти y и z.

Отв. $x_1=y_1=z_1=0$, $x_2=\frac{2}{a-b+c}$, $y_2=\frac{2}{a+b-c}$, $z_2=\frac{2}{b+c-a}$.

381. Сложив почленно второе и третье уравнения системы, получим $-4x=-2$, откуда $x=\frac{1}{2}$. Подставляя $x=\frac{1}{2}$ в первое и второе уравнения системы, получим

$$\begin{cases} y^3+z^3=\frac{7}{8}, \\ y-z=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим $z=y-\frac{3}{2}$. Подставляя найденное выражение для z в первое уравнение, получим уравнение

$$(y-1)(8y^2-10y+17)=0,$$

откуда $y=1$ или $8y^2-10y+17=0$. Поскольку корни уравнения $8y^2-10y+17=0$ комплексные, то имеем лишь $y=1$. Подставляя найденные значения x и y в любое из уравнений системы, найдем $z=-\frac{1}{2}$.

Отв. $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=-\frac{1}{2}$.

382. Так как (в силу второго уравнения) $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, то из первого уравнения системы следует, что либо $x=1$, $y=-1$, либо $x=-1$, $y=1$. Но так как

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2},\ \arccos 1=0,\ \arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2},\ \arccos(-1)=\pi,$$

то второе уравнение выполняется (учитывая первое уравнение) лишь при $x=1$, $y=-1$.

383. Данную систему можно переписать в виде

$$x+y=a-z, \tag{1}$$

$$x^2+y^2=b^2-z^2, \tag{2}$$

$$2xy=2z^2. \tag{3}$$

Сложив почленно уравнения (2) и (3), находим

$$(x+y)^2=b^2+z^2,$$

а возведя в квадрат обе части уравнения (1), получаем

$$(x+y)^2=(a-z)^2.$$

Из последних двух уравнений следует, что $b^2+z^2=(a-z)^2$, откуда находим $2az=a^2-b^2$. Так как ищем лишь положительные решения, то $x+y+z>0$, а потому и $a>0$. Следовательно,

$$z=\frac{a^2-b^2}{2a}. \tag{4}$$

Подставляя это значение z в уравнения (1) и (3), получаем

$$x+y=\frac{a^2+b^2}{2a}, \tag{5}$$

$$xy=\frac{(a^2-b^2)^2}{4a^2}. \tag{6}$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), находим

$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2}{4a}\pm\frac{\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}, \tag{7}$$

$$y_{1,2}=\frac{a^2+b^2}{4a}\mp\frac{\sqrt{10a^2b^2-3a^4-3b^4}}{4a}. \tag{8}$$

Формулы (4), (7), (8) дают нам две тройки значений x, y, z, которые являются решениями данной системы, в чем можно убедиться подстановкой их в каждое из уравнений системы.

Для того чтобы система имела хотя бы одно положительное решение, необходимо, чтобы $x+y>0$, т. е. $\frac{a^2+b^2}{2a}>0$. Для того чтобы решения были действительными, необходимо, чтобы имело место неравенство

$$10a^2b^2-3a^4-3b^4\geqslant 0. \tag{9}$$

Ясно, что $b\neq 0$, так как в противном случае было бы $x=y=z=0$. Следовательно, $b^4>0$. Поделив обе части неравенства (9) на $-b^4$, получим

$$3\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^2-10\frac{a^2}{b^2}+3\leqslant 0,$$

откуда

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{a^2}{b^2}\leqslant 3,$$

а потому

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{a}{|b|}\leqslant\sqrt{3}. \tag{10}$$

Для того чтобы z было положительным, необходимо, чтобы $a^2>b^2$ (вспомним, что $a>0$), откуда

$$a>|b|. \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) следует, что

$$|b| < a \leqslant |b|\sqrt{3}. \tag{12}$$

Итак, мы доказали, что условие (12) является необходимым, чтобы решения системы были положительными и различными. Из равенств (4), (5), (6) следует, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Таким образом, соотношение (12) является и достаточным условием, чтобы оба решения системы были положительными. Заметим, что если $|b| < a < |b|\sqrt{3}$, то система имеет два различных положительных решения.

384. Если $x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$, то данное уравнение имеет вид

$$x^2 - 6x + 8 + x^2 - 6x + 5 = a,$$

или

$$2x^2 - 12x + 13 - a = 0.$$

Это уравнение не может иметь больше двух решений ни при каком a.

Если $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$, то $x^2 - 6x + 5 < 0$, а поэтому данное уравнение приводится к виду

$$-x^2 + 6x - 8 - x^2 + 6x - 5 = a,$$

или

$$2x^2 - 12x + 13 + a = 0.$$

Это уравнение не может иметь больше двух решений ни при каком a.

Если $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$, $x^2 - 6x + 5 \leqslant 0$, то данное уравнение приводится к виду

$$x^2 - 6x + 8 - x^2 + 6x - 5 = a,$$

т. е. $a = 3$, иначе говоря, при $a = 3$ и при выполнении последних двух неравенств уравнение удовлетворяется тождественно, т. е. имеет бесконечное множество решений.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 5 \leqslant 0, \end{cases}$$

получим ответ:

$$1 \leqslant x \leqslant 2, \qquad 4 \leqslant x \leqslant 5. \tag{1}$$

Любое значение x из формул (1) при $a = 3$ удовлетворяет данному уравнению.

Отв. Только при $a = 3$ уравнение имеет более трех решений.

385. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \cos(x+y) &= \frac{5}{6}(\cos a - \sin a), \\ \cos(x-y) &= \frac{5}{6}(\cos a + \sin a). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Необходимым и достаточным условием существования решений системы (1) является выполнение двух неравенств:

$$\begin{cases} \left|\frac{5}{6}(\cos a - \sin a)\right| \leqslant 1, \\ \left|\frac{5}{6}(\cos a + \sin a)\right| \leqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \left|\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \frac{6}{5\sqrt{2}}, \\ \left|\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \frac{6}{5\sqrt{2}}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}+\pi k\leqslant a+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi-\arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}+\pi k, \\ \arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}+\pi m\leqslant a-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi-\arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}+\pi m, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4}+\pi k\leqslant a\leqslant\pi-\arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}-\dfrac{\pi}{4}+\pi m, \\ \arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4}+\pi m\leqslant a\leqslant\pi-\arccos\dfrac{6}{5\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4}+\pi m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\arccos\frac{6}{5\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant a\leqslant\frac{3\pi}{4}-\arccos\frac{6}{5\sqrt{2}}+\pi n. \tag{2}$$

Формула (2) дает все искомые значения параметра a.

386. Из условия видно, что если $c=0$, то данное уравнение имеет решение лишь при $a=-b$, и притом в этом случае оно имеет единственный корень $x=-a=b$. Полагая в дальнейшем $c>0$ и возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим

$$x+a+b-x+2\sqrt{(x+a)(b-x)}=c^2,$$

или

$$a+b+2\sqrt{(x+a)(b-x)}=c^2. \tag{1}$$

Из (1) следует, что данное уравнение имеет решение лишь при

$$c^2\geqslant a+b. \tag{2}$$

Равенство (1) перепишем в виде

$$4(x+a)(b-x)=(c^2-a-b)^2,$$

или

$$4x^2-4(b-a)x+(c^2-a-b)^2-4ab=0. \tag{3}$$

Дискриминант этого уравнения

$$D=4(b-a)^2-4(c^2-a-b)^2+16ab=$$
$$=4(b+a)^2-4[c^4-2c^2(b+a)+(b+a)^2]=4c^2\cdot[2(b+a)-c^2].$$

1) Если $D=0$, то уравнение (3) имеет только корень

$$x=\frac{b-a}{2}.$$

Так как $c>0$, то $2(b+a)-c^2=0$, т. е. $c=\sqrt{2(b+a)}$; подстановкой в данное уравнение значения $x=\dfrac{b-a}{2}$ убеждаемся, что число $\dfrac{b-a}{2}$ — корень данного уравнения.

2) Если $D<0$, что имеет место при $c\neq 0$ и $c^2>2(b+a)$, то уравнение (3) не имеет действительных корней.

3) Если $D>0$, то уравнение (3) имеет два различных действительных корня:

$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left[b-a\pm c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]$, так как $c^2<2(b+a)$. Подставим в левую часть данного уравнения $x_1=\frac{1}{2}\left[b-a+c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]$, тогда

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left[b+a+c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]}+\sqrt{\frac{1}{2}\left[b+a-c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(2b+2a-c^2)+2c\sqrt{2b+2a-c^2}+c^2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(2b+2a-c^2)-2c\sqrt{2b+2a-c^2}+c^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|\sqrt{2b+2a-c^2}+c\right|+\left|\sqrt{2b+2a-c^2}-c\right|\right)=c,$$

так как из соотношения (2) следует, что $c\geqslant\sqrt{2b+2a-c^2}$. Таким образом, $x_1=\frac{1}{2}\left[b-a+c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]$ — корень данного уравнения. Аналогично убеждаемся, что и

$$x_2=\frac{1}{2}\left[b-a-c\sqrt{2(b+a)-c^2}\right]\text{ —}$$

второй корень данного уравнения.

Итак, если $c^2=2(a+b)$ или $c=0$ и $a=-b$, то уравнение

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{b-x}=c$$

имеет единственный действительный корень.

Если же ни один из этих случаев места не имеет, то рассматриваемое уравнение не имеет действительных корней [при $c^2>2(a+b)$] или имеет два различных действительных корня [при $c^2<2(a+b)$].

387. Имеем

$$\left.\begin{aligned}\sin^2 x\sin^2 y&=p^2\sin^2\alpha,\\ \cos^2 x\cos^2 y&=p^2\cos^2\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Сложив почленно уравнения системы (1), получим

$$p^2=\sin^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\cos^2 y.\qquad(2)$$

Из равенства (2) видно, что $0\leqslant p^2\leqslant 1$, или

$$0\leqslant|p|\leqslant 1.\qquad(3)$$

Формула (3) выражает необходимое условие существования решений данной системы. Из данной в условии системы уравнений следует

$$\left\{\begin{aligned}\cos(x+y)&=p(\cos\alpha-\sin\alpha),\\ \cos(x-y)&=p(\cos\alpha+\sin\alpha),\end{aligned}\right.$$

или

$$\left.\begin{aligned}\cos(x+y)&=p\sqrt{2}\cos\beta,\\ \cos(x-y)&=p\sqrt{2}\sin\beta,\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

где $\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$. Так как $|\cos\beta|\leqslant 1$, $|\sin\beta|\leqslant 1$, то для существования решения системы, данной в условии, при любых значениях α (или β)

необходимо и достаточно, чтобы

$$|p\sqrt{2}|\leqslant 1, \text{ т. е. } |p|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5}$$

Известно, что $1\leqslant|\cos\beta|+|\sin\beta|\leqslant\sqrt{2}$; поэтому наибольшее из чисел $|\cos\beta|$ и $|\sin\beta|$ не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому система (4) имеет решение при таком выборе числа β, чтобы наибольшее из чисел $|p\sqrt{2}\cos\beta|$ и $|p\sqrt{2}\sin\beta|$ не превышало 1, следовательно

$$\left|p\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\leqslant 1, \text{ т. е. } |p|\leqslant 1. \tag{6}$$

Из (3) и (6), а затем из (3) и (5) получаем окончательно
а) $0\leqslant|p|\leqslant 1$,
б) $0\leqslant|p|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

388. Имеем

$$\begin{cases} y=b^2+1-x, \\ a^x+a^{b^2+1-x}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть

$$a^x=z, \quad a^{b^2+1}=c>0.$$

Тогда

$$z+\frac{c}{z}=\frac{1}{2},$$

или

$$2z^2-z+2c=0.$$

Для существования решения системы необходимо условие $D=1-16c\geqslant 0$, т. е. $0<c\leqslant\frac{1}{16}$.

Так как $x+y=b^2+1\geqslant 1$, то по крайней мере одно из неизвестных положительно; пусть $x>0$. Далее так как $0<a^{b^2+1}\leqslant\frac{1}{16}$ и $b^2+1\geqslant 1$, то

$$0<a<1. \tag{1}$$

Если при $x>0$ значение $y\leqslant 0$ (или $y>0$, но $x\leqslant 0$), то первое уравнение системы не имеет решений, ибо, учитывая (1), имеем

$$a^x+a^y>1.$$

Поэтому $x>0$, $y>0$. Из неравенства $a^{b^2+1}\leqslant\frac{1}{16}$ получаем, учитывая (1), что

$$b^2+1\geqslant\log_a\frac{1}{16},$$

или

$$|b|\geqslant\sqrt{\log_a\frac{1}{16}-1}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$0<a<1, \quad |b|\geqslant\sqrt{\log_a\frac{1}{16}-1}.$$

Откуда имеет место неравенство

$$\log_a \frac{1}{16} - 1 \geqslant 0, \text{ т. е. } a \geqslant \frac{1}{16}. \qquad (3)$$

Поэтому из (1), (2) и (3) следует:

$$\frac{1}{16} \leqslant a < 1, \qquad (4)$$

$$|b| \geqslant \sqrt{\log_a \frac{1}{16} - 1}. \qquad (5)$$

Условия (4), (5) являются необходимыми для того, чтобы данная система имела решения. Докажем теперь и достаточность этих условий. Итак, пусть имеют место (4), (5). Тогда из второго уравнения системы следует, учитывая (5), что $x + y \geqslant \log_a \frac{1}{16} - 1 + 1 = \log_a \frac{1}{16}$, а поэтому в силу (4) $a^{x+y} \leqslant a^{\log_a \frac{1}{16}}$, т. е. $a^{x+y} \leqslant \frac{1}{16}$. Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^x + a^y = \frac{1}{2}, \\ a^x \cdot a^y = \frac{1}{16} - \varepsilon, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{16}. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, составим квадратное уравнение, имеющее корнями a^x и a^y,

$$z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{16} - \varepsilon = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D = \frac{1}{4} - 4\left(\frac{1}{16} - \varepsilon\right) = 4\varepsilon > 0$, а поэтому $z_{1,2} > 0$, т. е. $a^x > 0$, $a^y > 0$ $\left(\text{так как } a^x + a^y = \frac{1}{2} > 0, \ a^x \cdot a^y > 0\right)$. Следовательно, данная система уравнений имеет решение при выполнении условий (4), (5).

389. Если данное уравнение имеет решения, то все они принадлежат интервалу $\left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$, так как $x > 0$, $\cos x \leqslant 1$, а поэтому $x < \frac{5\pi}{2}$ $\left(\text{из условия видно, что } x \neq \frac{5\pi}{2}\right)$. В указанном интервале функция $y = \log_{\frac{5\pi}{2}} x$ возрастает, а функция $y_1 = \cos x$ убывает в интервалах $(0, \pi)$ и $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ и возрастает в интервале $(\pi, 2\pi)$. Каждый из этих трех интервалов содержит одно и только одно решение данного уравнения. Действительно, $\log_{\frac{5\pi}{2}} x$ в интервале $(0, \pi)$ возрастает от $-\infty$ до $\log_{\frac{5\pi}{2}} \pi > 0$, а $\cos x$ убывает от $+1$ до -1, а поэтому при некотором x_1, где $0 < x_1 < \pi$, имеет место равенство $\log_{\frac{5\pi}{2}} x_1 = \cos x_1$, т. е. x_1 — корень данного уравнения. Далее $\log_{\frac{5\pi}{2}} x$ в интервале $(\pi, 2\pi)$ возрастает от $\log_{\frac{5\pi}{2}} \pi > 0$ до $\log_{\frac{5\pi}{2}} 2\pi < 1$, а $\cos x$ возрастает от -1

до $+1$, поэтому в интервале $(\pi, 2\pi)$ данное уравнение имеет одно и только одно решение. Наконец, $\log_{\frac{5\pi}{2}} x$ в интервале $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ возрастает от $\log_{\frac{5\pi}{2}} 2\pi$ до 1, где $\left(0 < \log_{\frac{5\pi}{2}} 2\pi < 1\right)$, а $\cos x$ убывает от 1 до 0; поэтому в интервале

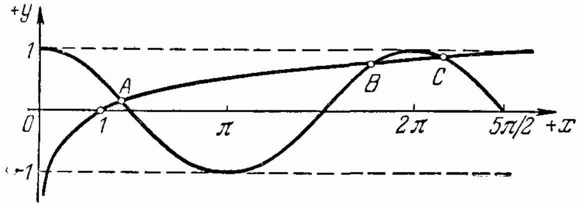

Рис. 2.

$\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ уравнение имеет одно и только одно решение. Таким образом, данное уравнение имеет три решения. На рис. 2 дано графическое решение. Абсциссы точек A, B, C — решения уравнения.

390. Имеем

$$\sin^2 x + p \sin x - p^2 + 1 = 0.$$

Необходимым условием существования решения данного уравнения служит неравенство $D = p^2 - 4(1 - p^2) \geqslant 0$, откуда

$$|p| \geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}. \tag{1}$$

Пусть $\sin x = z$; тогда

$$z^2 + pz - p^2 + 1 = 0,$$

поэтому

$$z_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{5p^2 - 4}}{2}, \quad z_1 \leqslant z_2.$$

Составим функцию

$$f(z) = z^2 + pz - p^2 + 1.$$

Данное уравнение имеет решения в следующих случаях:

1) $-1 \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant 1$.

Необходимым и достаточным условием выполнения этих неравенств служит множество всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ 2 \cdot (-1) + p \leqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \\ 2 \cdot 1 + p \geqslant 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} p^2 + p - 2 \leqslant 0, \\ p \leqslant 2, \\ p^2 - p - 2 \leqslant 0, \\ p \geqslant -2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2 \leqslant p < 1, \\ p \leqslant 2, \\ -1 \leqslant p \leqslant 2, \\ p \geqslant -2, \end{cases}$$

т. е.

$$-1 \leqslant p \leqslant 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует $-1 \leqslant p \leqslant -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant p \leqslant 1$, т. е.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant |p| \leqslant 1. \tag{3}$$

2) $-1 < z_2 \leqslant 1$.

Тогда должно быть

$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) \geqslant 0, \\ 2 \cdot 1 + p > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p^2 + p - 2 > 0, \\ p^2 - p - 2 \leqslant 0, \\ p > -2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p < -2, \quad p > 1, \\ -1 \leqslant p \leqslant 2, \\ p > -2, \end{cases}$$

т. е.

$$1 < p \leqslant 2. \tag{4}$$

Из (1) и (4) следует

$$1 < p \leqslant 2. \tag{5}$$

3) $-1 \leqslant z_1 \leqslant 1$.

Тогда имеем

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ 2 \cdot (-1) + p < 0, \\ f(1) \leqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} p^2 + p - 2 \leqslant 0, \\ p < 2, \\ p^2 - p - 2 \geqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -2 \leqslant p \leqslant 1, \\ p < 2, \\ p \leqslant -1, \quad p \geqslant 2, \end{cases}$$

т. е.

$$-2 \leqslant p \leqslant -1. \tag{6}$$

Из (1) и (6) следует

$$-2 \leqslant p \leqslant -1. \tag{7}$$

Из формул (5), (7) получаем

$$1 < |p| \leqslant 2. \tag{8}$$

Из (3) и (8) следует, что уравнение имеет решение лишь при

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \leqslant |p| \leqslant 2.$$

391. Из условия следует, что

$$|x+2| - |2x+8| > 0,$$

поэтому

$$|x+2| > |2x+8|,$$

т. е.

$$(x+2)^2 > (2x+8)^2,$$

или

$$3x^2 + 28x + 60 < 0,$$

откуда

$$-6 < x < -10/3. \quad (1)$$

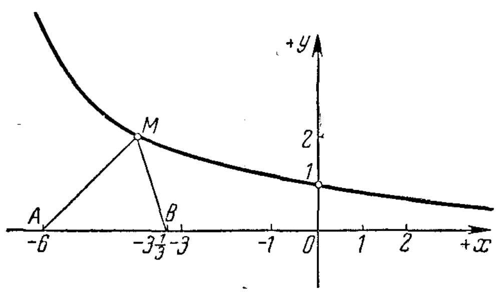

Рис. 3.

Все решения данного уравнения, если они есть, удовлетворяют неравенству (1).

На рис. 3 построен график функции

$$y = |x+2| - |2x+8|$$

для всех x, удовлетворяющих неравенствам (1).

Этим графиком служит ломаная AMB.

а) Для того чтобы данное уравнение имело единственное решение, необходимо и достаточно взять такое значение a, при котором график $y = a^x$ пересечет ломаную AMB только в одной точке. Такой точкой может быть только точка M; при этом $0<a<1$, так как при $a>1$ любой график $y=a^x$ проходит через точку (0; 1) и пересекает ломаную AMB в двух точках.

Итак, искомый график проходит через точку $M(-4;\ 2)$, т. е. $2=a^{-4}$, откуда $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

б) Если $a>\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, то графики $y=a^x$ пересекают ломаную в двух точках, а поэтому уравнение имеет два решения.

в) Если $0<a<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, то графики $y=a^x$ не пересекают ломаной, а поэтому уравнение не имеет решений.

Отв. а) $a=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; б) $a>\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; в) $0<a<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

392. Из условия видно, что $x>0$, а поэтому

$$0<\operatorname{arctg} x<\pi/2 \text{ или } 0<\frac{\pi}{4}+y<\pi/2, \text{ т. е. } -\pi/4<y<\pi/4.$$

Следовательно, если данная система имеет решения, то $-\pi/4<y<\pi/4$.

1) Пусть $a>1$. Если y возрастает от $-\pi/4$ до 0, то $x=a^{1/y}$ убывает от $a^{-4/\pi}$ до 0 (где $0<a^{-4/\pi}<1$), а $x=\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ возрастает от 0 до 1. Следовательно, в интервале $(0<x<1)$ система уравнений имеет одно и только одно решение.

Если y возрастает от 0 до $\pi/4$, то $x=a^{1/y}$ убывает от ∞ до $a^{4/\pi}>1$, $x=\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ возрастает от 1 до ∞. Следовательно, в интервале $(1<x<\infty)$ система уравнений имеет одно и только одно решение.

Таким образом, при $a>1$ система имеет два решения.

2) Пусть $0<a<1$. Тогда при возрастании y от $-\pi/4$ до 0 значение $x=a^{1/y}$ возрастает от $a^{-4/\pi}>1$ до ∞, а значение $x=\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ возрастает от 0 до 1.

Если же y возрастает от 0 до $\pi/4$, то $x=a^{1/y}$ возрастает от 0 до $a^{4/\pi}<1$, а значение $x=\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$ возрастает от 1 до ∞.

Поэтому при $0<a<1$ система не имеет решений.

3) Если $a=1$, то $x^y=1$, что возможно при

а) $x=1$, y — любое число; но тогда $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}+y$, т. е. $y=0$.

б) $y=0$, $x\neq 0$; но тогда $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}+0$, $x=1$.

Таким образом, только при $a=1$ система имеет единственное решение $x=1$, $y=0$.

393. Считая, как принято, $a>0$ находим по свойству взаимно обратных положительных чисел, что

$$a^x+\frac{1}{a^x}\geqslant 2,$$

где знак равенства имеет место лишь при $a=1$ или при $x=0$. Если же $a\neq 1$ и $x\neq 0$, то функция $y=a^x+\frac{1}{a^x}$ принимает все значения, большие чем 2. Поэтому уравнение $a^x+\left(\frac{1}{a}\right)^x=m$ имеет решение, если 1) $a=1$, $m=2$; 2) $a>0$, $a\neq 1$, $m>2$.

Отв. $a=1$, $m=2$ или $0<a\neq 1$, $m>2$.

394. Перепишем второе уравнение системы в виде

$$[(b^2+1)^2]^{\frac{x^2+y^2}{2}}=(b^4+1)^{xy}$$

или

$$(b^4+2b^2+1)^{\frac{x^2+y^2}{2}}=(b^4+1)^{xy}.$$

Так как $b^4+2b^2+1>b^4+1$ при $b\neq 0$, то решения будут лишь в следующих случаях:

а) $\frac{x^2+y^2}{2}=0$ (т. е. $x=0$, $y=0$), b — любое;

б) $b=0$;

в) $b\neq 0$, $\frac{x^2+y^2}{2}<xy$.

Сразу видно, что случай в) невозможен, так как неравенство это не имеет места ни при каких действительных x и y. В случае а) имеем из первого уравнения $a^2=2$, т. е. $a=\pm\sqrt{2}$. Наконец, в случае б) имеем только одно уравнение

$$(1+x)^y+(1+y)^x=a^2.$$

Левая часть принимает любые положительные значения. Например, при $y=-\frac{1}{2}$ левая часть имеет вид $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2^x}$; эта функция при $-1<$ $<x<\infty$ принимает все положительные значения, убывая от ∞ до 0. Значит, в случае $b=0$ и $y=-1/2$ существует такое значение $x=x_0$, при котором левая часть уравнения равна a^2, где $a\neq 0$, а поэтому $(x_0,\ -1/2)$ — решение данной системы.

Отв. 1) $a^2>0$, $b=0$,

2) $a^2=2$, b — любое число.

395. Так как

$$\log_4(2-x)=\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(2-x)}{2},$$

$$\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x},$$

то данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\frac{\log_2(2-x)}{2\log_2 x}=1.$$

Должно быть $2-x>0$, $x>0$, $x\neq 1$, $2-x=x^2$, но так как эта система соотношений противоречива, то данное уравнение не имеет решений.

396. Должно быть $kx>0$, $x+1>0$, $x+1\neq 1$, т. е. $kx>0$, $x>-1$, $x\neq 0$. При соблюдении этих условий данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$kx=(x+1)^2,$$

или

$$x^2-(k-2)x+1=0. \tag{1}$$

Для того чтобы это уравнение имело действительные решения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант

$$D=(k-2)^2-4\geqslant 0.$$

Пусть

$$D=k(k-4)=0,$$

откуда $k_1=4$, $k_2=0$. Но $k\neq 0$, так как $kx>0$. Таким образом, лишь при $k=4$ данное уравнение имеет единственное решение. При этом значении k уравнение (1) имеет вид

$$(x-1)^2=0,$$

откуда $x=1$.

Если же $D=k(k-4)>0$, то $k<0$ или $k>4$.

Тогда из уравнения (1) следует, что

$$x_1=\frac{k-2-\sqrt{k^2-4k}}{2}, \quad x_2=\frac{k-2+\sqrt{k^2-4k}}{2}.$$

При $k<0$ корень $x_1=\frac{k-2-\sqrt{k^2-4k}}{2}<-1$, а поэтому не удовлетворяет условию $x>-1$; остается проверить, удовлетворяет ли этому условию корень $x_2=\frac{k-2+\sqrt{k^2-4k}}{2}$. Для того чтобы имело место неравенство $\frac{k-2+\sqrt{k^2-4k}}{2}>-1$, должно быть верным неравенство $\sqrt{k^2-4k}>-k$, что, очевидно, имеет место при любом $k<0$. Таким образом, при $k<0$ данное уравнение имеет единственное решение $\left(x=\frac{k-2+\sqrt{k^2-4k}}{2}\right)$.

Нетрудно убедиться, что при $k>4$ оба найденных корня $x_1>-1$ и $x_2>-1$, т. е. уравнение имеет не единственное решение, как требуется по условию. Поэтому $k>4$ не удовлетворяет условию задачи.

Отв. $k=4$, $x=1$; $k<0$, $x=\frac{k-2+\sqrt{k^2-4k}}{2}$.

397. Левая часть уравнения определена, если $x>0$, $x\neq 1$. Так как радикал берется в арифметическом смысле, то он неотрицателен. Следовательно, для того чтобы

$$\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\cdot\log_3 x=-1, \tag{1}$$

необходимо, чтобы

$$\log_3 x<0 \quad (\text{или} \quad \log_x 3<0). \tag{2}$$

Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим

$$(1+\log_x\sqrt{27})\log_3^2 x=1. \tag{3}$$

Но так как $x\neq 1$, то $\log_3 x=\frac{1}{\log_x 3}$, а потому уравнение (3) перепишется в следующем виде:

$$\frac{1+\log_x\sqrt{27}}{\log_x^2 3}=1,$$

или

$$1+\log_x\sqrt{27}=\log_x^2 3,$$

или

$$\log_x^2 3-\frac{3}{2}\log_x 3-1=0,$$

откуда

$$\log_{x_1}3=2, \quad \log_{x_2}3=-\frac{1}{2}.$$

В силу соотношения (2) $\log_x 3 = 2$ не удовлетворяет данному уравнению. Таким образом, остается $\log_x 3 = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{1}{9}$. Проверкой убеждаемся, что $x = \frac{1}{9}$ действительно является решением данного уравнения.

Отв. $\frac{1}{9}$.

398. Так как $\log_m a^2 = 2\log_m |a|$, то данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$3\log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}} (4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}} (x+6),$$

где $-6 < x < 4$, или

$$\log_{\frac{1}{4}} |x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}} (4-x) + \log_{\frac{1}{4}} (x+6),$$

или

$$\log_{\frac{1}{4}} 4|x+2| = \log_{\frac{1}{4}} (4-x)(x+6),$$

откуда

$$4|x+2| = (4-x)(x+6). \qquad (1)$$

Если $4 > x \geqslant -2$, то уравнение (1) можно переписать в таком виде:

$$4(x+2) = (4-x)(x+6),$$

или

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

Корнями этого уравнения служат числа -8 и 2. Так как мы рассматриваем случай, когда $4 > x \geqslant -2$, то остается лишь $x = 2$.

Если же $-6 < x < -2$, то уравнение (1) принимает вид

$$-4(x+2) = (4-x)(x+6),$$

или

$$x^2 - 2x - 32 = 0.$$

Корнями этого уравнениями являются числа $1+\sqrt{33}$ и $1-\sqrt{33}$. Поскольку $1+\sqrt{33} > -2$, то остается только $x = 1-\sqrt{33}$.

Так как данное уравнение имеет смысл, когда $-6 < x < -2$ или $-2 < x < 4$, то найденные значения $x = 2$ и $x = 1-\sqrt{33}$ действительно являются решениями данного уравнения.

Отв. $x_1 = 2$, $x_2 = 1-\sqrt{33}$.

399. Данное уравнение перепишется в следующем виде (при основании x):

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0{,}5x} - 14\frac{\log_x x^3}{\log_x 16x} + 40\frac{\log_x \sqrt{x}}{\log_x 4x} = 0,$$

или

$$\frac{2}{1-\log_x 2} - \frac{42}{1+4\log_x 2} + \frac{20}{1+2\log_x 2} = 0.$$

Это уравнение приводится к такому:

$$2\log_x^2 2 + 3\log_x 2 - 2 = 0,$$

откуда $\log_{x_1} 2 = \frac{1}{2}$, $\log_{x_2} 2 = -2$. Следовательно, $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Проверкой убеждаемся, что найденные значения x действительно удовлетворяют данному уравнению.

Отв. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 4.

400. Левая часть данного уравнения определена, если выполняются соотношения

$$3+x>0, \quad 3+x\neq 1, \quad 4-x>0,$$

или

$$x>-3, \quad x\neq -2, \quad x<4,$$

т. е.

$$-3<x<-2, \quad -2<x<4. \qquad (1)$$

Для всех x из промежутков (1) решаемое уравнение равносильно такому:

$$\frac{\log_2 6}{\log_2 (3+x)}+\frac{2\frac{\log_2 (4-x)}{\log_2 \frac{1}{4}}}{\log_2 (3+x)}=1,$$

или

$$\log_2 6-\log_2 (4-x)=\log_2 (3+x),$$

или

$$(3+x)(4-x)=6.$$

Корнями этого уравнения служат числа -2 и 3. Число -2 не принадлежит ни одному из промежутков (1), а потому оно не является решением данного уравнения, а число 3, принадлежащее второму промежутку из (1), есть решение данного уравнения, в чем можно убедиться проверкой.

Отв. 3.

401. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{\log_a 3}-\frac{1}{\log_a x}=\frac{1}{\log_a x-\log_a 3}.$$

После преобразований получаем

$$\log_a^2 x-3\log_a 3\cdot\log_a x+\log_a^2 3=0,$$

откуда следует, что

$$\log_a x=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\log_a 3,$$

или

$$x=3^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения x — корни данного уравнения.

402. Имеем

$$1+\cos x=2\sin^2 x,$$

или

$$2\cos^2 x+\cos x-1=0,$$

откуда

$$\cos x_1=-1, \quad \cos x_2=\frac{1}{2}.$$

Но так как $\cos x\neq -1$, то имеем лишь $\cos x=\frac{1}{2}$. Учитывая, что $\sin x>0$, из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ следует, что

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

403. Введем обозначения $\log_a x = y$, $\log_a c = k$. Теперь данное уравнение перепишется в таком виде:

$$k^{2\log_b y} + k = (1+k)\, y^{\log_b k}. \qquad (1)$$

Так как $\log_b y = \log_k y \cdot \log_b k$, $y = k^{\log_k y}$, то уравнение (1) принимает вид

$$(k^{2\log_k y})^{\log_b k} + k = (1+k)\, y^{\log_b k},$$

или

$$y^{2\log_b k} + k = (1+k)\, y^{\log_b k}.$$

Таким образом, данное уравнение свелось к квадратному уравнению

$$z^2 - (1+k)\, z + k = 0,$$

где $z = y^{\log_b k}$. Решая это уравнение, находим

$$z_1 = k, \quad z_2 = 1.$$

Имеем: 1) $y^{\log_b k} = k$, т. е. $y_1 = b$, $x_1 = a^b$, 2) $y^{\log_b k} = 1$, т. е. $y_2 = 1$, $x_2 = a$, или $\log_b k = 0$, откуда $k = 1$, т. е. $\log_a c = 1$, а потому $a = c$. В этом случае уравнение обращается в тождество при $0 < x < 1$, $1 < x$.

Отв. 1) Если $a \neq c$, $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = a^b$. 2) Если $0 < a = c \neq 1$, то $0 < x \neq 1$, т. е. x любое положительное число, кроме 1.

404. Данное уравнение перепишем в следующем виде:

$$\lg\left(x - \frac{21}{x}\right) - \lg 4 = \lg 10 - \lg\left(x + \frac{21}{x}\right),$$

или

$$\lg\left(x^2 - \frac{441}{x^2}\right) = \lg 40,$$

откуда

$$x^2 - \frac{441}{x^2} - 40 = 0.$$

Это уравнение имеет лишь два действительных корня: $x_1 = -7$, $x_2 = 7$. Так как при найденных значениях x левая часть уравнения не определена, то данное уравнение не имеет решений.

405. Левая часть данного уравнения определена, если $-1 < x < 1$. Перепишем решаемое уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\lg\frac{(1+x)(1-x)^3}{1-x^2} = 2, \text{ или } \lg(1-x)^2 = 4,$$

откуда следует, что

$$(1-x)^2 = 10^4, \quad 1 - x = \pm 10^2 = \pm 100 \text{ и } x_1 = -99, \; x_2 = 101.$$

Но числа -99 и 101 не входят в интервал $(-1, 1)$, поэтому они не являются решениями данного уравнения. Итак, данное уравнение не имеет решений.

406. Данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$2\log_2 |x+1| + \log_2 |x+1| - 6 = 0,$$

или

$$3\log_2 |x+1| = 6,$$

откуда следует $|x+1| = 2^2 = 4$.

Если $x+1>0$, т. е. $x>-1$, то имеем

$$x+1=4, \quad x=3,$$

а если $x+1<0$, т. е. $x<-1$, то $x+1=-4$, $x=-5$.

Отв. $x_1=3$, $x_2=-5$.

407. Так как $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, то имеем

$$(1+\lg\operatorname{tg}x)+(1-\lg\operatorname{tg}x)+\\ +3\sqrt[3]{1-\lg^2\operatorname{tg}x}\left(\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}\right)=8.$$

Теперь, учитывая условие, получаем

$$2+6\sqrt[3]{1-\lg^2\operatorname{tg}x}=8,$$

откуда $1-\lg^2\operatorname{tg}x=1$, а потому

$$\lg\operatorname{tg}x=0, \quad \operatorname{tg}x=1, \quad x=\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

408. Так как числа a и x служат основаниями логарифмов, то должно быть

$$a>0, \quad a\neq 1, \quad x>0, \quad x\neq 1. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\log_x a=\frac{1}{\log_a x} \text{ и } \log_{\sqrt{x}} a=\frac{2}{\log_a x},$$

то данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\log_a x+|a+\log_a x|\frac{2}{\log_a x}=\frac{a}{\log_a x},$$

или

$$\log_a^2 x+2|a+\log_a x|-a=0.$$

Если $\log_a x+a\geqslant 0$, то имеем

$$\log_a x_1=-1+\sqrt{1-a}, \quad \log_a x_2=-1-\sqrt{1-a}.$$

Так как $\log_a x+a\geqslant 0$, то для того, чтобы x_1 удовлетворяло данному уравнению, должно быть

$$-1+\sqrt{1-a}+a\geqslant 0, \text{ или } \sqrt{1-a}\geqslant 1-a.$$

Но так как $1-a>0$ и учитывая, что $a>0$, то $0<a<1$. Для того чтобы x_2 удовлетворяло данному уравнению, должно иметь место

$$-1-\sqrt{1-a}+a\geqslant 0, \text{ или } \sqrt{1-a}\leqslant a-1.$$

Последнее возможно лишь при $a=1$, но так как $a\neq 1$, то нет таких значений a, при которых x_2 удовлетворяло бы данному уравнению.

Если же $\log_a x+a<0$, то данное уравнение перепишется так:

$$\log_a^2 x-2\log_a x-3a=0,$$

откуда

$$\log_a x_3=1+\sqrt{1+3a}, \quad \log_a x_4=1-\sqrt{1+3a}.$$

Рассуждая, как выше, убеждаемся, что нет такого значения a, при котором x_3 удовлетворяло бы данному уравнению, а x_4 является решением уравнения при $0<a<1$.

Отв. $x=a^{-1+\sqrt{1-a}}$, $x=a^{1-\sqrt{3a+1}}$, причем $0<a<1$.

409. Так как y есть основание логарифма, то $y > 0$ и $y \neq 1$, и поскольку $yx - x$ стоит под знаком логарифма, то $yx - x > 0$, т. е. $x(y-1) > 0$. При соблюдении этих условий из второго соотношения имеем

$$y = yx - x,$$

откуда находим (учитывая, что $x \neq 1$, так как в противном случае было бы $y = y - 1$)

$$y = \frac{x}{x-1}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $0 < y < \frac{1}{2}$ и $y > \frac{1}{2}$ ($y \neq \frac{1}{2}$, так как при $y = \frac{1}{2}$ из первого условия системы получаем $1 < 1$).

1) $0 < y < \frac{1}{2}$. В этом случае удобно переписать первое соотношение условия в виде

$$x^2 + x + 1 > 1,$$

или

$$x(x+1) > 0,$$

откуда $x > 0$, или $x < -1$. Если $x > 0$, то из условия $x(y-1) > 0$ вытекает, что $y > 1$, что противоречит соотношению $0 < y < \frac{1}{2}$, а при $x < -1$ не выполняется условие $y = \frac{x}{x-1} < \frac{1}{2}$. Итак, если $0 < y < \frac{1}{2}$ утверждение задачи верно.

2) $y > \frac{1}{2}$. В этом случае из первого соотношения условия следует, что $x^2 + x + 1 < 1$, или

$$-1 < x < 0. \qquad (1)$$

Но так как $y > \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{2}$, или $\frac{x+1}{x-1} > 0$, то

$$x < -1 \quad \text{или} \quad x > 1. \qquad (2)$$

Поскольку соотношения (1) и (2) противоречивы, то и в рассматриваемом случае $\left(y > \frac{1}{2}\right)$ утверждение задачи верно.

410. Так как $\log_2 x = \frac{1}{\log_x 2}$, то первое уравнение системы можно переписать в виде $\frac{\log_x (x-3y)}{\log_x 2} = 2$, или $\log_x (x-3y) = 2\log_x 2$, откуда $x - 3y = 4$.

Прологарифмируем обе части второго уравнения системы. Имеем

$$\log_x (x \cdot y^{\log_x y}) = \log_x \left(y^{\frac{5}{2}}\right),$$

или

$$1 + \log_x^2 y = \frac{5}{2} \log_x y,$$

или

$$2\log_x^2 y - 5\log_x y + 2 = 0,$$

откуда

$$(\log_x y)_1 = 2, \quad (\log_x y)_2 = \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad y_1 = x^2, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, имеем две системы:

$$\begin{cases} x-3y=4, \\ y=x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3y=4, \\ y=x^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, так как корни уравнения $3x^2-x+4=0$ комплексные.

Вторую систему перепишем в виде

$$x-3y=4, \qquad y^2=x,$$

откуда $y^2-3y-4=0$. Решая это уравнение, находим $y_1=4$, $y_2=-1$. Так как (в силу условия задачи) $y>0$, то имеем лишь одно значение $y=4$, а потому $x=16$. Проверкой убеждаемся, что $x=16$, $y=4$ действительно удовлетворяют данной системе уравнений.

Отв. $x=16$, $y=4$.

411. Так как $\lg xy=\lg|x|+\lg|y|$ и $x\neq 0$, то имеем

$$\left.\begin{aligned} \lg|y|\cdot\lg|x| &= \lg 4, \\ \lg|x|+\lg|y| &= \lg 40 = 1+\lg 4. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Решая эту систему, получим

$$\lg|x|=1, \qquad \lg|y|=\lg 4$$

и

$$\lg|x|=\lg 4, \qquad \lg y=1.$$

Таким образом, система (1) имеет четыре решения:

$$\begin{cases} x_1=10, \\ y_1=4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=10, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-10, \\ y_3=-4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-4, \\ y_4=-10. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что все полученные решения являются также решениями и данной системы.

412. В силу ограничений для основания показательной функции должно быть $a>0$, $1-a^2>0$. Следовательно, $0<a<1$. Поделив обе части на $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$, получим

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x+\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x=1.$$

Таким образом, сумма двух положительных величин равна 1, а потому каждая из них меньше 1, и поэтому можно сделать подстановку

$$\frac{2a}{1+a^2}=\sin\alpha \qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Далее

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{4a^2}{(1+a^2)^2}}=\sqrt{\frac{1+a^4-2a^2}{(1+a^2)^2}}=\sqrt{\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

Итак, данное уравнение, учитывая подстановку (1), перепишется в следующем виде: $\sin^x\alpha+\cos^x\alpha=1$.

Докажем, что последнее уравнение имеет единственное решение $x=2$. При $x=2$ это уравнение выполняется, так как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Остается доказать, что других (кроме $x=2$) решений нет. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$. Пусть $n < 2$. Тогда

$$\sin^n\alpha = \sin^2\alpha\,\frac{1}{\sin^{2-n}\alpha} > \sin^2\alpha,$$

$$\cos^n\alpha = \cos^2\alpha\,\frac{1}{\cos^{2-n}\alpha} > \cos^2\alpha.$$

Поэтому

$$\sin^n\alpha + \cos^n\alpha > \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (2)$$

Теперь пусть $n > 2$. Тогда

$$\sin^n\alpha = \sin^2\alpha\,\sin^{n-2}\alpha < \sin^2\alpha,$$

$$\cos^n\alpha = \cos^2\alpha\,\cos^{n-2}\alpha < \cos^2\alpha,$$

откуда

$$\sin^n\alpha + \cos^n\alpha < \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (3)$$

Таким образом, лишь $x = 2$ является решением уравнения $\sin^x\alpha + \cos^x\alpha = 1$.

Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ — корень данного уравнения.

Отв. $x = 2$.

413. 1) Если $a = b = 0$, то уравнение удовлетворяется при любом $x > 0$.

2) Если $a = 0$, $b > 0$ или $a > 0$, $b = 0$, то уравнение не удовлетворяется ни при каком значении x.

3) Если $ab > 0$, то, поделив обе части данного уравнения на $(ab)^{1/x}$, получим

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/x} + \left(\frac{b}{a}\right)^{1/x} = m. \qquad (1)$$

Ясно, что $m > 0$. Пусть $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/x} = z$. Тогда (1) перепишется в следующем виде:

$$z + \frac{1}{z} = m,$$

откуда

$$z_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2},$$

т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/x} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}. \qquad (2)$$

Поскольку левая часть этого равенства положительна, то и правая часть должна быть положительной, что возможно лишь при $m \geqslant 2$.

Если $m = 2$, то имеем $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/x} = 1$. Последнее выполняется только при $a = b$ при любом x $(x \neq 0)$, так как $ab > 0$. Если же $a \neq b$, то при $m = 2$ уравнение не имеет решений.

Если же $m > 2$, то, логарифмируя обе части (2), получаем

$$\frac{1}{x}\lg\frac{a}{b} = \lg\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4}\right) - \lg 2,$$

откуда

$$x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4}\right) - \lg 2}.$$

Ясно, что $a \neq b$, так как в противном случае $x = 0$, что невозможно.

Отв. x — любое положительное число, если $a=b=0$, m — любое число; нет решений, если $a=0$, $b>0$ или если $a>0$, $b\neq 0$; любое значение $x\neq 0$, если $a=b\neq 0$, $m=2$;

$$x=\frac{\lg a-\lg b}{\lg\left(m\pm\sqrt{m^2-n}\right)-\lg 2},$$

если $a\neq b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $m>2$.

414. Умножив обе части данного уравнения на $9^{1/x}$, получим

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{1/x}+\left(\frac{9}{6}\right)^{1/x}-1=0,$$

или

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2/x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x}-1=0,$$

откуда

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Но так как $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x}>0$, то имеем лишь

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

или

$$\frac{1}{x}=\log_{\frac{3}{2}}\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\qquad x=\frac{1}{\log_{\frac{3}{2}}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

415. Данное уравнение перепишем в виде

$$2^x-3^x-\sqrt{3^x\left(2^x-3^x\right)}=0,$$

или

$$\sqrt{2^x-3^x}\left(\sqrt{2^x-3^x}-\sqrt{3^x}\right)=0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$\sqrt{2^x-3^x}=0 \quad \text{и} \quad \sqrt{2^x-3^x}=\sqrt{3^x},$$

или

$$2^x=3^x \quad \text{и} \quad 2^x-3^x=3^x,$$

или

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x=2.$$

Из первого уравнения находим, что $x=0$.

Из второго уравнения следует, что

$$x\left(\log_2 2-\log_2 3\right)=\log_2 2,$$

откуда

$$x=\frac{1}{1-\log_2 3}.$$

Отв. $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{1-\log_2 3}$.

416. Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, а $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x \cos x \cos 2x$, то данное уравнение можно переписать последовательно так:

$$5(4\cos^3 x - 3\cos x) + 3\cos x = 12\sin x \cos x \cos 2x,$$
$$\cos x\,[20\cos^2 x - 15 + 3 - 12\sin x(1 - 2\sin^2 x)] = 0,$$
$$\cos x\,(20 - 20\sin^2 x - 12 - 12\sin x + 24\sin^3 x) = 0,$$
$$\cos x\,(6\sin^3 x - 5\sin^2 x - 3\sin x + 2) = 0. \qquad (1)$$

Легко заметить, что при $\sin x = 1$ выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Следовательно, уравнение (1) можно представить в таком виде:

$$\cos x(\sin x - 1)\left(\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin x - \frac{1}{3}\right) = 0,$$

или

$$\cos x(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{2}{3}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на 4 уравнения:

1) $\cos x = 0$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

2) $\sin x = 1$, откуда $x_1' = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

3) $\sin x = -\frac{2}{3}$, откуда $x_2 = (-1)^{k+1}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi$;

4) $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x_3 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Поскольку множество $x_1' = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ содержится в множестве x_1, то все решения данного уравнения суть x_1, x_2 и x_3.

417. Данное уравнение перепишем последовательно так:

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 5x},$$
$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 5x},$$
$$\frac{\cos 3x}{\sin x \cos 2x} = \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin x \sin 5x},$$
$$\frac{\cos 3x}{\cos 2x} = \frac{2\cos 3x \sin 2x}{\sin 5x},$$
$$\cos 3x \sin 5x = 2\sin 2x \cos 2x \cos 3x,$$
$$\cos 3x \sin 5x - \sin 4x \cos 3x = 0,$$
$$\cos 3x(\sin 5x - \sin 4x) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения:

$$\cos 3x = 0 \quad \text{и} \quad \sin 5x = \sin 4x.$$

Из первого уравнения имеем $3x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, а из второго получаем: $9x = (2k+1)\pi$, откуда $x = \frac{2k+1}{9}\pi$, где $2k + 1 \neq 9n$, так как $x \neq n\pi$, и $5x - 4x = 2k\pi$, откуда $x = 2k\pi$. Последнее множество значений x не служит решением решаемого уравнения, так как при этих значениях x уравнение теряет смысл.

Отв. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2m+1}{9}\pi$, где $m \neq 9n + 4$ (k, m, n — целые числа).

418. Так как $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, то данное уравнение перепишется в виде

$$\sin x + \sin 2x + \cos x - \cos 3x - 2\cos x - \cos 2x = 0,$$
$$(\sin x + \sin 2x) - (\cos x + \cos 3x) - \cos 2x = 0,$$
$$\sin x\,(1 + 2\cos x) - 2\cos 2x \cos x - \cos 2x = 0,$$
$$\sin x\,(1 + 2\cos x) - \cos 2x\,(1 + 2\cos x) = 0,$$
$$(1 + 2\cos x)(\sin x - \cos 2x) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

$$1 + 2\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x - \cos 2x = 0.$$

Из первого уравнения имеем $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Второе уравнение представим в виде

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

откуда следует

$$2x + \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi,$$

или

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + (3k - 1)\frac{2\pi}{3} \tag{1}$$

и

$$2x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2k\pi,$$

или

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}. \tag{2}$$

Легко видеть, что решения (1) входят в решения (2).

Отв. $x_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$.

419. Так как $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то данное уравнение можно переписать в виде

$$1 + \operatorname{tg}^6 x = \sec^2 x\,[(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 - 1],$$

или

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x)(2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x).$$

Но так как $1 + \operatorname{tg}^2 x \neq 0$, то имеем

$$1 - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x = 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x,$$

или

$$3\operatorname{tg}^2 x = 1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Следовательно, $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

420. Так как

$$2\sqrt{2}\cos 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos 3x\cdot\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=2\cos 3x(\sin x+\cos x),$$

то данное уравнение можно переписать в виде

$$1+\sin 2x+2\cos 3x(\sin x+\cos x)=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x. \qquad (1)$$

Далее, так как $2\cos 3x\sin x=\sin 4x-\sin 2x$ и $2\cos 3x\cos x=\cos 4x+$ $+\cos 2x$, то уравнение (1) перепишется в таком виде:

$$1+\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+\cos 4x+\cos 2x=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x,$$

или

$$1+\cos 4x+\sin 4x-2\sin x-2\cos 3x=0,$$

или

$$2\cos^2 2x+2\sin 2x\cos 2x-2\left[\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=0,$$

$$\cos 2x\left[\cos 2x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]-\left[\cos 3x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=0,$$

$$\cos 2x\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sqrt{2}\cos 2x-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, откуда $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, а потому

$$x_1=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2};$$

2) $\sqrt{2}\cos 2x-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, или $\cos 2x-(\cos x-\sin x)=0$ или $(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0$. Это уравнение в свою очередь также распадается на два:

а) $\cos x-\sin x=0$, или $\operatorname{tg} x=1$, откуда

$$x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi;$$

б) $\cos x+\sin x-1=0$, или $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Следовательно,

$$x_3=2k\pi,\qquad x_4=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Отв. $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=2k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

421. Перепишем данное уравнение в виде

$$\cos^2 3x - \cos^4 x \cos 3x + \frac{1}{4}\cos^8 x = \frac{1}{4}\cos^8 x - \frac{1}{4}\cos^2 x,$$

или

$$\left(\cos 3x - \frac{1}{2}\cos^4 x\right)^2 = -\frac{1}{4}\cos^2 x\,(1-\cos^6 x).$$

Так как левая часть этого уравнения неотрицательна, а правая неположительна, то равенство возможно лишь, когда обе части равны нулю.

Итак, имеем $\cos^2 x\,(1-\cos^6 x) = 0$. Следовательно, $\cos x = 0$, или $1-\cos^6 x = 0$. Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Если же $1 - \cos^6 x = 0$, то $\cos x = \pm 1$ и $x = k\pi$. Проверкой убеждаемся, что множество $x = k\pi$ не служит решением данного уравнения, а $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ удовлетворяет ему.

Отв. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

422. Перепишем данное уравнение в виде

$$2\sin x + 3\cos x + 4\sin x\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x + 6\sin x\cos x,$$

$$(3\cos x - 6\sin x\cos x) - (1 - 2\sin x) + 4\sin x\cos^2 x - 2\cos^2 x = 0,$$

$$3\cos x(1-2\sin x) - (1-2\sin x) - 2\cos^2 x\,(1-2\sin x) = 0,$$

$$(1-2\sin x)(2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения:

1) $1 - 2\sin x = 0$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$;

2) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$, откуда $\cos x_2 = 1$, $\cos x_3 = \frac{1}{2}$. Следовательно, $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Отв. $x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

423. Область допустимых значений x определяется неравенствами $2x \neq k\pi$, $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $4x \neq k\pi$, или неравенствами $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \frac{k\pi}{4}$, или неравенствами

$$x \neq \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad x \neq \frac{k\pi}{4}. \tag{1}$$

Перепишем данное уравнение в таком виде:

$$(\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x) + 3(\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x) = \frac{2}{\sin 4x},$$

или

$$\frac{\cos x}{\sin 2x\cos x} + 3\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos x} = \frac{2}{\sin 4x},$$

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{6\sin x}{\cos 3x} = \frac{1}{\sin 2x\cos 2x},$$

$$\frac{6\sin x}{\cos 3x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x\cos 2x},$$

$$\frac{6\sin x}{\cos 3x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x\cos 2x},$$

или так как $\sin x \neq 0$, то

$$\frac{6}{\cos 3x} = \frac{1}{\cos x \cos 2x},$$
$$6 \cos 2x \cos x = \cos 3x,$$
$$3 \cos 3x + 3 \cos x = \cos 3x,$$
$$2 \cos 3x + 3 \cos x = 0,$$
$$2(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3 \cos x = 0.$$

Но поскольку $\cos x \neq 0$, то $8 \cos^2 x - 3 = 0$, или $4(1 + \cos 2x) - 3 = 0$, или $\cos 2x = -{}^1/_4$, откуда $2x = \pm \arccos(-{}^1/_4) + 2k\pi$.

Отв. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

424. Перепишем данное уравнение в таком виде:

$$\sin^2 4x - 2 \sin 4x \cos^4 x + \cos^8 x = \cos^8 x - \cos^2 x,$$

или

$$(\sin 4x - \cos^4 x)^2 = -\cos^2 x (1 - \cos^6 x).$$

Так как $(\sin 4x - \cos^4 x)^2 \geqslant 0$, а $-\cos^2 x (1 - \cos^6 x) \leqslant 0$, то равенство возможно лишь тогда, когда

$$\cos^2 x (1 - \cos^6 x) = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

1) $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

2) $1 - \cos^6 x = 0$, или $\cos^6 x = 1$, или $\cos x = \pm 1$, откуда $x = k\pi$. При этом значении x левая часть исходного уравнения равна $0 + 1 = 1$, а правая часть равна $2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Но так как $1 \neq 0$, то $x = k\pi$ не удовлетворяет данному уравнению.

Отв. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

425. Данное уравнение перепишем последовательно так:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = a,$$
$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = a,$$
$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = a,$$
$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = a,$$
$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1-a}{3},$$
$$\sin^2 2x = \frac{4}{3}(1-a),$$
$$\frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{4}{3}(1-a),$$
$$\cos 4x = \frac{8a-5}{3}.$$

Для того чтобы это уравнение (следовательно, и данное) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$-1 \leqslant \frac{8a-5}{3} \leqslant 1,$$

откуда

$$\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1.$$

Если выполняется последнее соотношение, то

$$4x = \pm \arccos \frac{8a-5}{3} + 2k\pi,$$

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a-5}{3} + \frac{k\pi}{2}.$$

426. Так как

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

то данное уравнение перепишется последовательно так:

$$2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = a,$$

$$3\cos^2 2x - 2\cos 2x + 3 - 4a = 0. \tag{1}$$

Дискриминантом этого уравнения (относительно $\cos 2x$) является выражение

$$4 - 12(3-4a), \text{ или } 48a - 32.$$

Для того чтобы корни уравнения (1) (относительно $\cos 2x$) были мнимыми, необходимо и достаточно, чтобы $48a < 32$, т. е. при $a < {}^2/_3$ данное уравнение не имеет решений.

Пусть теперь $a > {}^2/_3$, т. е. дискриминант $48a - 32 > 0$. В этом случае уравнение (1) имеет два решения:

$$\cos 2x = \frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3},$$

откуда

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3}.$$

Так как $|\cos \alpha| \leqslant 1$, то должны иметь место неравенства

$$-1 \leqslant \frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3} \leqslant 1.$$

Неравенства

$$-1 \leqslant \frac{1 + 2\sqrt{3a-2}}{3} \leqslant 1$$

выполняются при ${}^2/_3 \leqslant a \leqslant 1$, а неравенства

$$-1 \leqslant \frac{1 - 2\sqrt{3a-2}}{3} \leqslant 1$$

— при ${}^2/_3 \leqslant a \leqslant 2$. Итак,

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3}, \text{ если } \frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 1,$$

и

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - 2\sqrt{3a-2}}{3}, \text{ если } 1 < a \leqslant 2.$$

Представляют интерес три частных случая:

1) Если же $a = {}^2/_3$, то уравнение (1) удовлетворяется лишь при $\cos 2x = \frac{1}{3}$, откуда

$$2x = \pm \arccos\frac{1}{3} + 2k\pi, \quad x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}.$$

2) $a = 1$. В этом случае

$$\cos 2x = \frac{1 \pm 2\sqrt{3-2}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3},$$

откуда

$$x_1 = k\pi, \; x_2 = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

3) $a = 2$. В этом случае

$$\cos 2x = \frac{1 - 2\sqrt{6-2}}{3} = \frac{1-4}{3} = -1,$$

откуда имеем $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Отв. Если $a < {}^2/_3$, то нет решений; если ${}^2/_3 \leqslant a \leqslant 1$, то $x = k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{1 \pm 2\sqrt{3a-2}}{3}$; если $1 < a \leqslant 2$, то $x = k\pi \pm \arccos\frac{1 - 2\sqrt{3a-2}}{3}$.

427. Подстановкой в данное уравнение легко убеждаемся, что числа $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ действительно удовлетворяют ему. Остается доказать, что нет других чисел, кроме $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, для которых выполнялось бы данное уравнение. Во-первых, заметим, что $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Во-вторых, $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки. Действительно, переписав данное уравнение в виде

$$\frac{1}{\cos^m x} - \cos^n x = \frac{1}{\sin^m x} - \sin^n x,$$

замечаем, что при $\cos x < 0 < \sin x$ правая часть уравнения положительна, а левая отрицательна; при $\cos x > 0 > \sin x$ — наоборот. Следовательно, $\sin x \cos x > 0$.

Если $\sin x < \cos x < 0$ или $0 < \sin x < \cos x$, то

$$\sin^n x < \cos^n x \text{ и } \frac{1}{\cos^m x} < \frac{1}{\sin^m x},$$

так как m и n — нечетные числа.

Почленным сложением последних двух неравенств получаем

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} < \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

Если $\sin x > \cos x > 0$ или $0 > \sin x > \cos x$, то

$$\sin^n x > \cos^n x \text{ и } \frac{1}{\cos^m x} > \frac{1}{\sin^m x}.$$

Сложив почленно последние два неравенства, получаем

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} > \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

Итак, данное уравнение выполняется только при $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

428. Если $a = b = 0$, то любое x служит корнем уравнения. В дальнейшем будем считать, что $a^2 + b^2 \neq 0$, и пусть, например, $a \neq 0$. Преобразуем выражение $a \sin 2x + b \cos 2x$. Имеем

$$a \sin 2x + b \cos 2x = a\left(\sin 2x + \frac{b}{a}\cos 2x\right).$$

Пусть $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; тогда $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$. Поэтому

$$a \sin 2x + b \cos 2x = a(\sin 2x + \operatorname{tg}\varphi \cos 2x) =$$

$$= \frac{a}{\cos\varphi}(\sin 2x \cos\varphi + \sin\varphi \cos 2x) = \frac{a}{\cos\varphi}\sin(2x + \varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(2x+\varphi).$$

Таким образом, данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\sin(2x+\varphi) + \sin 6x = 0,$$

или

$$2\sin\left(4x + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(2x - \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\sin\left(4x + \frac{\varphi}{2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \cos\left(2x - \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Из первого уравнения получаем

$$x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\varphi}{8},$$

а из второго находим

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, если $a > 0$, а если $a < 0$, то $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

429. Данное уравнение перепишем в следующем виде:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x,$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 2x \cos^2 2x,$$

$$\sin^2 2x = 4\sin^2 2x \cos^2 2x,$$

$$\sin^2 2x\,(1 - 4\cos^2 2x) = 0,$$

$$\sin^2 2x\left(\cos 4x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два:

1) $\sin 2x = 0$, откуда $x = \frac{k\pi}{2}$;

2) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.

430. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$a\sin\frac{x}{2} - \left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\sin\frac{x}{2} - 4\sin^3\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left[a - 2\cos\frac{x}{2} - 3 + 4\left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right)\right] = 0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(a - 2\cos\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 1\right) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin\frac{x}{2}=0 \quad \text{и} \quad 4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}-(a+1)=0.$$

Из первого уравнения получаем

$$x=2k\pi,$$

а из второго находим

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}.$$

Условие действительности корней таково:

$$a\geqslant -{}^5/_4. \qquad (1)$$

Далее, так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$, то должно быть

$$-4\leqslant -1\pm\sqrt{4a+5}\leqslant 4,$$

или

$$-3\leqslant \pm\sqrt{4a+5}\leqslant 5.$$

Решим каждое из двух двойных неравенств в отдельности.

1) $-3\leqslant\sqrt{4a+5}\leqslant 5$. Левое неравенство выполняется при любом a из (1), а правое перепишем так: $4a+5\leqslant 25$, откуда

$$a\leqslant 5. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4} \quad \text{при} \quad -\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 5.$$

2) $-3\leqslant-\sqrt{4a+5}\leqslant 5$. Здесь правое неравенство выполняется при любом a из (1), а левое можно переписать так: $\sqrt{4a+5}\leqslant 3$, или $4a+5\leqslant 9$, откуда

$$a\leqslant 1. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{-1-\sqrt{4a+5}}{4} \quad \text{при} \quad -{}^5/_4\leqslant a\leqslant 1.$$

Итак, если $a<-{}^5/_4$ или $a>5$, имеем только $x=2k\pi$; если $1<a\leqslant 5$, имеем

$$x_1=2k\pi, \quad x_2=\pm 2\arccos\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}+4k\pi;$$

если же $-{}^5/_4\leqslant a\leqslant 1$, то

$$x_1=2k\pi, \quad x_2=\pm 2\arccos\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}+4k\pi.$$

431. Данное уравнение можно переписать так:

$$\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\sin 2x,$$

или

$$(\sin x+\cos x)(2-\sin 2x)=\sqrt{2}\sin 2x.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим

$$(1+\sin 2x)(4-4\sin 2x+\sin^2 2x)=2\sin^2 2x,$$

или

$$\sin^3 2x-5\sin^2 2x+4=0.$$

Легко заметить, что $\sin 2x = 1$ удовлетворяет уравнению, поэтому его можно переписать следующим образом:

$$(\sin 2x - 1)(\sin^2 2x - 4\sin 2x - 4) = 0.$$

Отсюда

$$\sin 2x = 1, \quad \sin 2x = 2(1 \pm \sqrt{2}).$$

Так как $1 + \sqrt{2} > 1$, то имеем лишь

$$\sin 2x = 1, \quad \sin 2x = 2(1 - \sqrt{2}),$$

откуда

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x_2 = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin 2(1 - \sqrt{2}) + \frac{k\pi}{2}.$$

Проверкой убеждаемся, что x_1 и x_2 действительно являются решениями данного уравнения.

432. Данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$2\sin x\cos x + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x = a\sin^2 x + a\cos^2 x. \tag{1}$$

Если $\cos x = 0$, то (1) принимает вид $(a+3)\sin^2 x = 0$. Но если $\cos x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то $\sin^2 x = 1$. Следовательно, это может быть лишь при $a = -3$. Пусть $a = -3$, тогда исходное уравнение может иметь еще решения, кроме $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. При $a = -3$, исходное уравнение примет вид

$$\sin 2x + 3(1 + \cos 2x) = 0,$$

или

$$2\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0, \quad \cos x(\sin x + 3\cos x) = 0,$$

откуда $\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = -3$. Следовательно, если $a = -3$, то $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$.

Теперь будем считать, что $a \neq -3$ $(\cos x \neq 0)$. Поделив обе части уравнения (1) на $\cos^2 x$, получим

$$(a+3)\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + (a-3) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{10 - a^2}}{a+3}.$$

Решение возможно, если $10 - a^2 \geqslant 0$, т. е. $|a| \leqslant \sqrt{10}$.

Отв. Если $a = -3$, то $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi$; если $|a| \leqslant \sqrt{10}$ и $a \neq -3$, то $x = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{10 - a^2}}{a+3} + k\pi$. Наконец, если $|a| > \sqrt{10}$, то решений нет.

433. Имеем

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Таким образом, данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=a\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right), \tag{1}$$

откуда получаем

$$\sin^2 2x=\frac{4(a-1)}{2a-3},$$

или

$$\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{4(a-1)}{2a-3},$$

откуда

$$\cos 4x=\frac{5-6a}{2a-3}. \tag{2}$$

Должно быть $2a-3\neq 0$. Пусть $2a-3=0$, $a={}^3/_2$. Подставляя $a={}^3/_2$ в (1), получим $1={}^3/_2$, т. е. при $a={}^3/_2$ уравнение не имеет решений. Из (2) следует, что должно иметь место двойное неравенство

$$-1\leqslant\frac{5-6a}{2a-3}\leqslant 1.$$

Решая это двойное неравенство, находим

$$^1/_2\leqslant a\leqslant 1. \tag{3}$$

Итак, если выполняется (3), то решения данного уравнения таковы:

$$x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{5-6a}{2a-3}+\frac{k\pi}{2},$$

где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, а при значениях $a<{}^1/_2$ или при $a>1$ данное уравнение не имеет решений.

434. Перепишем данное уравнение так:

$$2\sin^2 x+2a\sin^2 2x-1=0,$$

$$1-\cos 2x+2a(1-\cos^2 2x)-1=0,$$

$$2a\cos^2 2x+\cos 2x-2a=0.$$

Если $a=0$, то уравнение принимает вид

$$\cos 2x=0,$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$$

Если же $a\neq 0$, то имеем

$$\cos 2x=\frac{-1\pm\sqrt{16a^2+1}}{4a}.$$

Так как

$$\left|\frac{-1-\sqrt{16a^2+1}}{4a}\right|>1 \text{ при любом } a\neq 0,$$

то

$$\cos 2x=\frac{-1-\sqrt{16a^2+1}}{4a}$$

не является решением данного уравнения. Поскольку $\left|\frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a}\right|<1$ при любом $a\neq 0$, то $\cos 2x=\frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a}$ удовлетворяет данному уравнению. Имеем

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a}.$$

Отв. Если $a=0$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, а если $a \neq 0$, то

$$x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1+\sqrt{16a^2+1}}{4a}.$$

435. Данное уравнение можно переписать последовательно так:

$$1 - 2m \sin x \cos x + n(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos^2(x-a),$$
$$1 - m \sin 2x + n \cos 2x = 1 + \cos 2(x-a),$$
$$n \cos 2x - m \sin 2x = \cos 2x \cos 2a + \sin 2x \sin 2a,$$
$$(m + \sin 2a) \sin 2x = (n - \cos 2a) \cos 2x. \tag{1}$$

Отсюда видно, что если $m = -\sin 2a$ и $n \neq \cos 2a$, то $\cos 2x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, а если $m = -\sin 2a$ и $n = \cos 2a$, то $\cos 2x$, а вместе с ним и x — любое число. Наконец, если $m \neq -\sin 2a$, то, поделив обе части уравнения (1) на $(m + \sin 2a)\cos 2x$, получим

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{n - \cos 2a}{m + \sin 2a},$$

откуда

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{n - \cos 2a}{m + \sin 2a} + \frac{k\pi}{2}.$$

436. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$\frac{\cos 3x - \cos 5x}{2} - \frac{\cos x - \cos 5x}{2} = \frac{1}{2} \cos 3x + \sqrt{1+\cos x},$$

или

$$-\cos x = 2\sqrt{1+\cos x}.$$

Ясно, что должно быть $\cos x < 0$. Имеем

$$(-\cos x)^2 = (2\sqrt{1+\cos x})^2,$$

или

$$\cos^2 x - 4\cos x - 4 = 0.$$

Отрицательное значение $\cos x$, удовлетворяющее данному уравнению, есть $2 - 2\sqrt{2}$. Таким образом,

$$x = \pm \arccos(2 - 2\sqrt{2}) + 2k\pi.$$

437. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$4 \sin x \cos x \cos 2x = m \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Сразу видно, что при $\sin x = 0$ решаемое уравнение удовлетворяется. Таким образом, числа

$$x = k\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

являются корнями данного уравнения. Также ясно, что $\cos x \neq 0$. В дальнейшем будем считать, что $\sin x \neq 0$. Имеем

$$4 \cos x \cos 2x = \frac{m}{\cos x},$$

или

$$4 \cos^2 x \cos 2x - m = 0,$$

$$2 \cos 2x (1 + \cos 2x) - m = 0,$$

$$2 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - m = 0,$$

откуда

$$\cos 2x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2m}}{2}.$$

Так как $|\cos \alpha| \leqslant 1$, то имеем лишь

$$\cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{1+2m}}{2}$$

для всех m из интервала $(0, 4)$. Следовательно,

$$2x = \pm \arccos \frac{-1+\sqrt{2m+1}}{2} + 2k\pi,$$

откуда

$$x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1+\sqrt{2m+1}}{2} + k\pi.$$

Отв. $x = k\pi$, $x = k\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1+\sqrt{2m+1}}{2}$.

438. Ясно, что $x = k\pi$, т. е. $\sin x = 0$ не удовлетворяет данному уравнению, а потому его можно переписать в следующем виде:

$$1 + \frac{2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x}{\sin x} = 0,$$

или

$$1 + \frac{\sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x}{\sin x} = 0,$$

или

$$1 + \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin x} = 0,$$

откуда

$$\sin 7x = 0, \quad 7x = m\pi, \quad x = \frac{m\pi}{7}.$$

Но так как $x \neq k\pi$, то $m \neq 7n$, где n — целое.

439. Введем обозначение $\sin x - \cos x = y$. Тогда $1 - \sin 2x = y^2$, откуда $\sin 2x = 1 - y^2$. Таким образом, имеем

$$1 - y^2 + 2a\sqrt{2}\, y = 4a - 1,$$

или

$$y^2 - 2a\sqrt{2}\, y + 4a - 2 = 0,$$

откуда получаем

$$y_1 = \sqrt{2}, \quad y_2 = (2a-1)\sqrt{2}.$$

Далее,

$$y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, данное уравнение распадается на два:

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(2a-1)\sqrt{2}.$$

Из первого уравнения находим

$$x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \tag{1}$$

а второе имеет решения лишь при $-1\leqslant 2a-1\leqslant 1$, т. е. при $0\leqslant a\leqslant 1$, причем эти решения имеют вид

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin(2a-1)+k\pi. \tag{2}$$

440. Имеем

$$\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x=\frac{\pi}{6}+k\pi,$$

откуда следует, что

$$\cos 2\pi x=\frac{1}{2}+3k.$$

Но так как $|\cos\alpha|\leqslant 1$, то k равно лишь нулю. Итак,

$$\cos 2\pi x={}^1/_2,$$

откуда

$$2\pi x=\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi,$$

$$x=\pm\frac{1}{6}+n,$$

где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$

441. Левая часть решаемого уравнения определена, если $x\neq k\pi/2$, где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$b\,\mathrm{tg}^2\,x+4a\,\mathrm{tg}\,x+(5a-b)=0. \tag{1}$$

1) Если $a=b=0$, то имеем тождество $0=0$. Следовательно, в этом случае любое значение $x\neq k\pi/2$ удовлетворяет уравнению.

2) Если $a\neq 0$, $b=0$, то уравнение принимает вид $\mathrm{ctg}\,x=-4/5$, откуда

$$x=-\mathrm{arcctg}\,\frac{4}{5}+k\pi.$$

3) Если $a\neq 0$, $b=5a$, то данное уравнение перепишется так:

$$5\,\mathrm{tg}\,x+4=0,$$

откуда

$$x=-\mathrm{arctg}\,\frac{4}{5}+k\pi.$$

4) Наконец (при $b\neq 0$), если $b\geqslant a$ и $a\leqslant 0$ или $b\geqslant 4a\geqslant 0$, а также если $b\leqslant 4a\leqslant 0$ или $b\leqslant a$ и $a\geqslant 0$, то, решая уравнение (1), получаем

$$x=\mathrm{arctg}\,\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-5ab+b^2}}{b}+k\pi.$$

442. Имеем

$$\frac{2\pi x}{x^2+x+1}=\frac{2\pi}{3}+k\pi,$$

или

$$\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}+k=\frac{3k+2}{3},$$

т. е.

$$(3k+2)x^2+(3k-4)x+(3k+2)=0,$$

откуда получаем

$$x=\frac{4-3k\pm\sqrt{(3k-4)^2-4(3k+2)^2}}{2(3k+2)}.$$

Для того чтобы x был действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы

$$(3k-4)^2-4(3k+2)^2\geqslant 0,$$

или

$$k\left(k+\frac{8}{3}\right)\leqslant 0,$$

откуда следует, что $-\frac{8}{3}\leqslant k\leqslant 0$. Но так как k — целое, то $-2\leqslant k\leqslant 0$. Таким образом, k может принимать лишь три значения: -2, -1, 0.

Если $k=-2$, то $x_1=-2$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Если $k=-1$, то $x_{3,4}=$ $=\frac{-7\pm 3\sqrt{5}}{2}$. Если $k=0$, то $x_5=1$.

443. Известно, что дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Таким образом, должны иметь место одновременно соотношения

$$\sin 3x\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=-1 \tag{1}$$

и

$$a+\cos\left(\frac{\pi}{6}+7x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\neq 0. \tag{2}$$

Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$ и $|\cos\alpha|\leqslant 1$, то уравнение (1) выполняется или когда

$$\sin 3x=1 \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=-1, \tag{3}$$

или когда

$$\sin 3x=-1 \quad \text{и} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=1. \tag{4}$$

Из равенств (3) получаем

$$x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad x=\frac{l\pi}{2}+\frac{\pi}{3}.$$

Поэтому $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{l\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$, или $4k+1=3l+2$, или $k-1=3(l-k)$, откуда $k=1+3t$, где t — целое.

Таким образом,

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}(1+3t)=\frac{5\pi}{6}+2t\pi. \tag{5}$$

Из равенств (4) имеем

$$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \quad \text{и} \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{2}.$$

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{2},$$

откуда

$$8k-6l=3,$$

что невозможно, так как левая часть четная, а правая нечетная. Следовательно, соотношения (4) не дают решения.

Наконец, подставляя значение x из (5) в (2), находим $a\neq-2$. Итак, уравнение имеет решения при любых $a\neq-2$ и все решения определяются формулой (5).

444. Имеем

$$\sin\frac{(m^2+n^2)\pi}{2}=-1;$$

поэтому

$$\frac{(m^2+n^2)\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\text{ где } k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$$

Следовательно,

$$m^2+n^2=4k-1. \qquad (1)$$

1) Если m и n — четные числа, то равенство (1) невозможно, так как тогда (m^2+n^2) — четное число, а $(4k-1)$ — нечетное.

2) Если m и n — нечетные числа, то (m^2+n^2) — четное число, но $(4k-1)$ — нечетное; поэтому равенство (1) невозможно.

3) Если из чисел m и n одно четное, а другое нечетное, т. е. $m=2a+1$, $n=2b$ (или $n=2a+1$, $m=2b$), то $m^2+n^2=4(a^2+b^2+a)+1$, что противоречит равенству (1).

Отв. Уравнение не имеет решений в целых числах.

445. Так как $x_1=0$ — корень данного уравнения, то

$$a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=0. \qquad (1)$$

Из условия $a+b\neq0$ следует, что по крайней мере одно из чисел a или b не равно нулю. Пусть $a\neq0$. Тогда из (1) следует, что $\operatorname{tg}\beta\neq0$, так как при $\operatorname{tg}\beta=0$ получаем $\operatorname{tg}\alpha=0$, т. е. $\alpha=m\pi$, $\beta=n\pi$, а поэтому $\alpha+\beta=(m+n)\pi$, что противоречит условию задачи.

Из условия задачи следует:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+x)}{\operatorname{tg}(\beta+x)}=-\frac{b}{a}\neq1,$$

так как $a+b\neq0$. Из (1) следует:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=-\frac{b}{a},$$

поэтому

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+x)}{\operatorname{tg}(\beta+x)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\neq1.$$

Составим производную пропорцию

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+x)+\operatorname{tg}(\beta+x)}{\operatorname{tg}(\alpha+x)-\operatorname{tg}(\beta+x)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta},$$

т. е.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+2x)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$\sin(\alpha+\beta+2x)-\sin(\alpha+\beta)=0,$$

$$2\sin x\cos(\alpha+\beta+x)=0.$$

Нас интересуют корни, не равные $n\pi$, поэтому $\sin x \neq 0$, а следовательно, $\cos(\alpha+\beta+x)=0$, или

$$\operatorname{ctg}(x+\alpha+\beta)=0.$$

446. Введем обозначение $2^{\sin x}=y$. Тогда данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$y^2+my+m^2-1=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{4-3m^2}}{2}.$$

Так как по условию задачи $m^2<1$, то $4-3m^2>0$, т. е. корни действительные.

Так как $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, то $\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2$, и так как $m^2<1$, то $m^2-1<0$, а потому корни имеют различные знаки. Следовательно, имеем лишь

$$y=\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2}.$$

Таким образом, для того чтобы уравнение имело решения, должны выполняться неравенства

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2}\leqslant 2,$$

откуда получаем

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\leqslant m\leqslant\frac{-1+\sqrt{13}}{4}.$$

Но так как по условию $m>-1$, то

$$-1<m\leqslant\frac{\sqrt{13}-1}{4}.$$

Итак, имеем

$$2^{\sin x}=\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2},$$

откуда

$$\sin x=\log_2\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2},$$

$$x=k\pi+(-1)^k\arcsin\left[\log_2\frac{-m+\sqrt{4-3m^2}}{2}\right].$$

447. Первое решение. Из данного уравнения находим

$$x=-2\cos(xy)\pm\sqrt{4\cos^2(xy)-4}=-2\cos(xy)\pm 2\sqrt{-\sin^2(xy)}.$$

Так как по условию число x должно быть действительным, то должно быть $-\sin^2(xy)\geqslant 0$. Последнее возможно лишь при $\sin(xy)=0$, откуда $xy=k\pi$. Теперь имеем $x=-2\cos(k\pi)$. Если k — четное, то $\cos k\pi=1$ и $x=-2$, а потому $y=n\pi$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Если же k — нечетное, то $\cos k\pi=-1$ и $x=2$, а поэтому

$$y=\frac{(2m+1)\pi}{2},\quad \text{где } m=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Второе решение. Данное уравнение можно представить в виде

$$[x+2\cos(xy)]^2+4[1-\cos^2(xy)]=0,$$

или

$$[x+2\cos(xy)]^2+4\sin^2(xy)=0.$$

Поскольку сумма квадратов действительных чисел равна нулю лишь тогда, когда каждое слагаемое равно нулю, то имеем систему $x+2\cos(xy)=0$, $\sin(xy)=0$. Дальше, как в первом решении.

Отв. $x_1=-2$, $y_1=n\pi$; $x_2=2$, $y_2=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, где m и n — любые целые числа.

448. Первое решение. Решим данное уравнение относительно x:

$$x=\frac{\sin(xy)\pm\sqrt{\sin^2(xy)-4}}{2}.$$

Так как $\sin^2(xy)-4<0$, то x не является действительным числом, т. е. уравнение не имеет решений.

Второе решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$x^2-x\sin(xy)+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=0,$$

или

$$x^2-x\sin(xy)+\frac{1}{4}\left[\sin^2(xy)+\cos^2(xy)\right]+\frac{3}{4}=0,$$

или

$$\left[x-\frac{1}{2}\sin(xy)\right]^2+\left[\frac{1}{2}\cos(xy)\right]^2+\frac{3}{4}=0.$$

Так как левая часть есть сумма двух неотрицательных величин и положительного числа, то она не может равняться нулю. Следовательно, уравнение не имеет решений.

449. Первое решение. Преобразуем левую часть решаемого уравнения таким образом:

$$\sin^4 x+\frac{1}{\sin^4 x}+\cos^4 x+\frac{1}{\cos^4 x}+4=(\sin^4 x+\cos^4 x)\left(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right)+$$
$$+4=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)\left(1+\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\right)+4=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1+\frac{16}{\sin^4 2x}\right)+4.$$

Таким образом, данное уравнение принимает вид

$$(2-\sin^2 2x)\left(1+\frac{16}{\sin^4 2x}\right)=16+\sin y.$$

Но $2-\sin^2 2x\geqslant 1$, $1+\frac{16}{\sin^4 2x}\geqslant 17$, причем знаки равенства имеют место тогда и только тогда, когда $\sin^2 2x=1$. Поэтому левая часть данного уравнения больше или равна 17, а правая часть меньше или равна 17. Следовательно, данное уравнение равносильно системе уравнений $\sin^2 2x=1$, $\sin y=1$, откуда

$$x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\quad y=\frac{\pi}{2}+2n\pi,$$

где k и n принимают любые целые значения.

Второе решение. Так как среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, то имеем

$$12+\frac{1}{2}\sin y\geqslant 2\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

или

$$6+\frac{1}{4}\sin y\geqslant \sin^2 x\cos^2 x+\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x\geqslant 4+\frac{1}{4}+2$$

$$\left(\text{так как}\quad \sin^2 x\cos^2 x\leqslant\frac{1}{4}\right).$$

Следовательно,

$$\sin y\geqslant 1.$$

Но поскольку $\sin y\leqslant 1$, то имеем лишь $\sin y=1$, откуда

$$y=\frac{\pi}{2}+2n\pi.$$

Если $\sin y=1$, то должно быть

$$\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4},\quad \operatorname{tg}^2 x=\operatorname{ctg}^2 x,$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}.$$

450. Левую часть решаемого уравнения преобразуем так:

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y)=$$
$$=(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y)^2+4.$$

Следовательно, данное уравнение перепишется в виде

$$(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y)^2+1=\sin^2(x+y).$$

Так как

$$(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y)^2+2(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y)^2+1\geqslant 1,$$

а $\sin^2(x+y)\leqslant 1$, то уравнение равносильно системе из трех уравнений:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y,\\ \operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y=1,\\ \sin^2(x+y)=1.\end{cases}$$

Из первых двух уравнений этой системы следует, что $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{tg}^2 y=1$, т. е. $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $\operatorname{tg} y=\pm 1$, откуда получаем

$$x=\frac{\pi}{4}(2k+1),\quad y=\frac{\pi}{4}(2n+1),$$

где k и n — любые целые числа.

Ясно, что из всех найденных пар значений x и y только те пары служат решениями данного уравнения, которые удовлетворяют третьему уравнению системы. Имеем

$$\sin^2(x+y)=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(2k+1)+\frac{\pi}{4}(2n+1)\right]=\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(k+n+1)\right].$$

Отсюда видно, что $\sin^2(x+y)=1$, если $k+n+1$ — нечетное, и $\sin^2(x+y)=0$, если $k+n+1$ — четное. Таким образом, решениями данного уравнения являются все пары найденных выше значений x, y, когда $k+n+1$ — нечетное, т. е. когда $k+n$ — четное. Пусть $k+n=2m$, т. е. $n=2m-k$, где m — любое целое число.

Итак, всеми решениями данного уравнения являются все пары чисел x, y:

$$x=\frac{\pi}{4}(2k+1), \quad y=\frac{\pi}{4}(4m-2k+1),$$

где k и m — любые целые числа.

451. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$(\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x\sin y+2\sin^2 y)+(\operatorname{tg}^2 x-2\sqrt{3}\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y+3\operatorname{tg}^2 y)=0,$$

или

$$(\sin x-\sqrt{2}\sin y)^2+(\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{tg} y)^2=0.$$

Это уравнение равносильно системе из двух уравнений:

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y,\\ \operatorname{tg} x=\sqrt{3}\operatorname{tg} y,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\sin y,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}\sin y\cos x}{\cos y}.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\sqrt{2}\sin y-\frac{\sqrt{3}\sin y\cos x}{\cos y}=0,$$

или

$$\sin y(\sqrt{2}\cos y-\sqrt{3}\cos x)=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\sin y=0, \tag{1}$$

$$\sqrt{2}\cos y-\sqrt{3}\cos x=0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) следует $y_1=k\pi$. Подставляя $y=k\pi$ в первое уравнение системы, получим $\sin x=0$ и $x_1=n\pi$. Уравнение (2) перепишем в виде $\sqrt{2}\cos y=\sqrt{3}\cos x$. Возвышая в квадрат обе части этого уравнения, получим $2\cos^2 y=3\cos^2 x$. Теперь, возведя обе части первого уравнения системы в квадрат, получим

$$\sin^2 x=2\sin^2 y.$$

Решим совместно уравнения

$$\sin^2 x=2\sin^2 y, \qquad 2\cos^2 y=3\cos^2 x,$$

т. е. $\sin^2 x+3\cos^2 x=2\sin^2 y+2\cos^2 y$, или $1+2\cos^2 x=2$, т. е. $\cos^2 x=\frac{1}{2}$; в этом случае $\cos^2 y=\frac{3}{2}\cos^2 x=\frac{3}{4}$. Следовательно, $\cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, и, таким образом, $x_2=l\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $y_2=m\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

Так как мы в процессе решения возводили уравнения в квадрат, то значения x_2, y_2 надо испытать. Подставляем их значения в уравнение $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}\operatorname{tg} y$. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(l\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(m\pi\pm\frac{\pi}{6}\right).$$

Период тангенса π, поэтому имеем

$$\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{6}\right), \quad \text{или} \quad \pm 1=\sqrt{3}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Итак, уравнение удовлетворяется, если брать одновременно верхние или одновременно нижние знаки в последнем равенстве. Теперь подставим значения x_2, y_2 в уравнение $\sin x=\sqrt{2}\sin y$. Имеем

$$\sin\left(l\pi\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(m\pi\pm\frac{\pi}{6}\right).$$

Если брать одновременно оба верхних или оба нижних знака, то последнее равенство можно переписать так:

$$\cos l\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cos m\pi\cdot\frac{1}{2},\quad \cos l\pi=\cos m\pi,\quad (-1)^l=(-1)^m.$$

Отсюда заключаем, что l и m нужно брать одновременно четные или нечетные.

Поэтому система имеет следующие решения:

$$x_1=n\pi,\ y_1=k\pi;\quad x_2=l\pi+\frac{\pi}{4},\ y_2=m\pi+\frac{\pi}{6};\ x_3=l\pi-\frac{\pi}{4},\ y_3=m\pi-\frac{\pi}{6},$$

где m, n, k, l — любые целые числа, причем l и m надо брать одновременно четные или нечетные.

452. Имеем

$$\frac{1}{7}\arccos x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$, т. е.

$$\arccos x=\left(\frac{7}{2}+14k\right)\pi.$$

Поскольку $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, то последнее равенство не выполняется ни при каком значении $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$ Итак, данное уравнение не имеет решений.

453. Данное уравнение перепишем в виде

$$2(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x)+\operatorname{arcctg}x=\pi.$$

Но так как $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$, то имеем

$$2\cdot\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcctg}x=\pi,$$

откуда следует, что $\operatorname{arcctg}x=0$, что невозможно, поскольку

$$0<\operatorname{arcctg}x<\pi.$$

Итак, уравнение не имеет решений.

454. Для удобства введем обозначение $x=\frac{\pi}{2}-z$. Тогда данная система уравнений перепишется в виде

$$\begin{cases}\operatorname{tg}z+\sin 2y=\sin 2z,\\ 2\sin y\cos(z-y)=\sin z.\end{cases}$$

Второе уравнение можно представить так:

$$\sin z + \sin(2y - z) = \sin z.$$

Следовательно, $\sin(2y - z) = 0$, откуда $2y - z = k\pi$, а потому $z = 2y - k\pi$. Но поскольку $x = \frac{\pi}{2} - z$, то

$$x = \frac{\pi}{2} - 2y + k\pi.$$

Подставляя $z = 2y - k\pi$ в первое уравнение системы, получим

$$\operatorname{tg} 2y + \sin 2y = \sin 4y,$$

или

$$\sin 2y\,(1 + \cos 2y - 2\cos^2 2y) = 0,$$

или

$$\sin 2y\,(\cos 2y - 1)\left(\cos 2y + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на три уравнения:

$$\sin 2y = 0, \quad \cos 2y = 1 \quad \text{и} \quad \cos 2y = -\frac{1}{2}.$$

Из уравнения $\sin 2y = 0$ получаем $y = \frac{n\pi}{2}$, а поэтому $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$. Из уравнения $\cos 2y = 1$ находим $2y = 2n\pi$, а потому $y = n\pi$; значит, $x = \frac{\pi}{2} - 2n\pi + k\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi$. Из уравнения $\cos 2y = -\frac{1}{2}$ следует, что $2y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, и потому $y = \pm\frac{\pi}{3} + m\pi$; следовательно, $x = \frac{\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} - 2m\pi + k\pi = \frac{\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} + n\pi$.

Отв.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + l\pi, \\ y_1 = \frac{n\pi}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{2} \mp \frac{2\pi}{3} + n\pi, \\ y_2 = \pm\frac{\pi}{3} + m\pi, \end{cases}$$

где m, n, l — целые числа.

455. Обозначим равные отношения через λ. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= a\lambda, \\ \operatorname{tg} y &= b\lambda, \\ \operatorname{tg} z &= c\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Так как $x + y + z = \pi$, то $x + y = \pi - z$, $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg}(\pi - z)$, или $\operatorname{tg}(x + y) = -\operatorname{tg} z$, или $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} z$, или

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z. \qquad (2)$$

Подставляя значения $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} z$ из (1) в (2), получим

$$\lambda(a + b + c) = abc\lambda^3,$$

откуда следует, что либо $\lambda = 0$, либо

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}.$$

Если $\lambda=0$, то $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} z=0$, а потому $x_1=k\pi$, $y_1=l\pi$, $z_1=m\pi$. Здесь надо брать такие целые k, l, m, чтобы $k+l+m=1$, так как $x+y+z=\pi$.

Если же $\lambda=\pm\sqrt{\dfrac{a+b+c}{abc}}$, то

$$x=\pm\operatorname{arctg} a\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}+k\pi,$$

$$y=\pm\operatorname{arctg} b\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}+l\pi,$$

$$z=\pm\operatorname{arctg} c\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}+m\pi.$$

Так как должно быть $x+y+z=\pi$, то надо выбирать лишь такие всевозможные k, l, m, чтобы $x+y+z=\pi$.

456. Из данной системы следует ряд равенств:

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{tg} x_2(\operatorname{tg} x_1-\operatorname{tg} x_3)=0,\\ \operatorname{tg} x_3(\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_4)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \operatorname{tg} x_n(\operatorname{tg} x_{n-1}-\operatorname{tg} x_1)=0,\\ \operatorname{tg} x_1(\operatorname{tg} x_n-\operatorname{tg} x_2)=0.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Из данной системы видно, что ни один из тангенсов не равен нулю, а потому из равенств (1) следует, что

1) $\operatorname{tg} x_1=\operatorname{tg} x_2=\operatorname{tg} x_3=\ldots=\operatorname{tg} x_n$, если n — нечетное, и

2) $\operatorname{tg} x_1=\operatorname{tg} x_3=\ldots=\operatorname{tg} x_{2m-1}$ и $\operatorname{tg} x_2=\operatorname{tg} x_4=\ldots=\operatorname{tg} x_{2m}$, если $n=2m$ — четное:

Случай 1). Рассматривая исходную систему и учитывая, что произведение двух равных величин равно 1 лишь тогда, когда каждая из них равна или 1 или -1, заключаем, что

$$\operatorname{tg} x_1=\operatorname{tg} x_2=\ldots=\operatorname{tg} x_n=\pm 1.$$

Следовательно, $x_i=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{2}$.

Теперь рассмотрим случай 2). В этом случае также знаки тангенсов всех аргументов одинаковы, причем x_i можно выбрать произвольно, но отличным от $l\pi/2$; тогда $x_{2k-1}=x_1+m\pi$ $(k=2, 3, \ldots, n)$.

Поскольку $\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_{2k}=1$, так как $\operatorname{tg} x_2=\ldots=\operatorname{tg} x_{2n}$, то $\operatorname{tg} x_{2k}=\operatorname{ctg} x_1=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$; следовательно,

$$x_{2k}=\frac{\pi}{2}-x_1+m\pi \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

457. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

$$(16\sin^2 x\sin^2 y-24\sin x\sin y+9)+(\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y-6\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y+9)=0,$$

или

$$(4\sin x\sin y-3)^2+(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-3)^2=0.$$

Последнее возможно тогда и только тогда, когда выполняется система уравнений

$$\left\{\begin{array}{r}4\sin x\sin y-3=0,\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-3=0,\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = 3/4, \\ \sin x \sin y = 3 \cos x \cos y, \end{cases}$$

откуда $\cos x \cos y = 1/4$. Поэтому данная система перепишется так:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 1/4, \\ \sin x \sin y = 3/4. \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения этой системы, а затем вычитая их, получим

$$\cos(x - y) = 1, \quad \cos(x + y) = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда находим

$$x - y = 2m\pi, \quad x + y = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},$$

а потому

$$x = (m + n)\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad y = (n - m)\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Отв. $x = (m + n)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $y = (n - m)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, где m и n — любые целые числа.

458. Извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получим

$$3 \cdot 2^{\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2\right)} = 1 \qquad (1)$$

(мы берем только $+1$, так как $2^a > 0$). Так как $\log_a N = -\log_{\frac{1}{a}} N$, то уравнение (1) перепишется в следующем виде:

$$3 \cdot 2^{-\log_2\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2\right)} = 1,$$

или

$$3 \cdot 2^{\log_2\left(\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2\right)^{-1}} = 1,$$

или

$$3 \cdot \frac{1}{\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2} = 1,$$

откуда

$$\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x + 2 = 3.$$

Это уравнение запишем так:

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x - 1 = 0,$$

или

$$5 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x (5 \sin x - \cos x) = 0,$$

откуда $\cos x = 0$, $\operatorname{ctg} x = 5$, т. е.

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \operatorname{arcctg} 5 + k\pi.$$

459. Из второго уравнения следует, что

$$\frac{\pi x^2}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \text{ т. е. } x^2=1+4k,$$

откуда $x_{1,2}=\pm\sqrt{4k+1}$. В силу первого уравнения системы имеем $|x|\leqslant 3$. Поэтому k может принимать лишь значения 0, 1, 2.

Итак, имеем шесть значений x, а именно: ± 1, $\pm\sqrt{5}$, ± 3. Если $x=\pm 1$, то $|y|=2$, т. е. $y=\pm 2$; если $x=\pm\sqrt{5}$, то $|y|=3-\sqrt{5}$, т. е. $y=\pm(3-\sqrt{5})$; наконец, если $x=\pm 3$, то $|y|=0$, т. е. $y=0$.

460. Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, $|\cos\alpha|\leqslant 1$, то $(a^2-1)^2+1\leqslant 1$. Последнее возможно лишь при $a=\pm 1$. Значение $a=1$ превращает второе уравнение в неверное равенство, так как должно быть $a+1\leqslant 1$, а при $a=1$ имеем $a+1=2$. Итак, данная система может иметь решения лишь при $a=-1$. Таким образом, данная система переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases}\sin x\cos 2y=1,\\ \cos x\sin 2y=0.\end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases}\sin x\cos 2y+\cos x\sin 2y=1,\\ \sin x\cos 2y-\cos x\sin 2y=1,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\sin(x+2y)=1,\\ \sin(x-2y)=1.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем

$$x+2y=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \tag{1}$$

а из второго — находим

$$x-2y=\frac{\pi}{2}+2n\pi. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получаем

$$x=\frac{\pi}{2}+(k+n)\pi, \quad y=\frac{(k-n)\pi}{2},$$

где k и n — целые числа.

§ 10. Доказательство неравенств

461. Имеем

$$3^{34}=3^{2\cdot 17}=9^{17}, \quad 2^{51}=2^{3\cdot 17}=8^{17}.$$

Так как $9^{17}>8^{17}$, то утверждение задачи верно.

462. Доказываемое неравенство перепишется в виде

$$(202^3)^{101}>(303^2)^{101}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$202^3>303^2. \tag{1}$$

Но так как $202^3 = (2 \cdot 101)^3 = 8 \cdot 101^3$, а $303^2 = (3 \cdot 101)^2 = 9 \cdot 101^2$, то неравенство (1) можно переписать так:

$$8 \cdot 101^3 > 9 \cdot 101^2,$$

что очевидно.

463. Имеем

$$x^{10} - x^7 + x^4 - x^2 + 1 = x^4\left(x^6 - x^3 + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1\right) + \frac{x^4}{2} = x^4\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 + \frac{x^4}{2} > 0,$$

что очевидно.

464. Так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического (знак равенства имеет место лишь при равенстве всех этих чисел), то имеем

$$a^3 + 2 = a^3 + 1 + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3} = 3a,$$
$$a^3 + 9 = a^3 + 8 + 1 > 3\sqrt[3]{8a^3} = 6a.$$

Сложив почленно эти два неравенства, получим

$$2a^3 + 11 > 9a,$$

что и требовалось доказать.

465. Так как a, b, и c положительны и $a^2 + b^2 = c^2$, то ясно, что $a < c$ и $b < c$; умножив обе части неравенства $a < c$ на a^2, получим

$$a^3 < a^2c, \tag{1}$$

а умножив обе части неравенства $b < c$ на b^2, получим

$$b^3 < b^2c. \tag{2}$$

Теперь, сложив почленно неравенства (1) и (2), получим

$$a^3 + b^3 < c(a^2 + b^2).$$

Но так как по условию $a^2 + b^2 = c^2$, то имеем окончательно

$$a^3 + b^3 < c^3.$$

466. Пусть $p = 1 + \alpha$, $q = 1 + \beta$. Следовательно, надо доказать, что $\alpha + \beta \leqslant 0$. В силу условия задачи имеем

$$2 = p^3 + q^3 = 2 + \alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha + \beta) + 3(\alpha^2 + \beta^2)$$

или

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 + 3) + 3(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Но так как $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 0$, $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geqslant 0$, то $\alpha + \beta \leqslant 0$, а потому $p + q \leqslant 2$, что и требовалось доказать.

467. Так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, то

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$a^3 + b \geqslant 2\sqrt{a^3b}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$a^4 + a^3b + ab + b^2 \geqslant 4\sqrt{a^4b^2} = 4a^2b,$$

или

$$a^4 + a^3b - 4a^2b + ab + b^2 \geqslant 0.$$

Равенство достигается или при $a = b = 1$, или при $a = b = 0$.

468. Имеем

$$a^2-3a+4=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0.$$

Теперь, сложив это неравенство с верным неравенством

$$a^4+1\geqslant 2a^2,$$

получим

$$a^4+a^2-3a+5>2a^2,$$

или

$$a^4-a^2-3a+5>0.$$

469. Первое решение. Имеем

$$a+2+1>3\sqrt[3]{a\cdot 2\cdot 1},$$

$$a^2+4+1>3\sqrt[3]{a^2\cdot 4\cdot 1}.$$

Перемножив эти неравенства почленно, получим

$$(a+3)(a^2+5)>9\sqrt[3]{8a^3},$$

или

$$a^3+3a^2+5a+15>18a,$$

или

$$a^3+3a^2+15>13a,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Имеем

$$a^3+3a^2-13a+15=a(a-1)^2+5a^2-14a+15>0,$$

так как $5a^2-14a+15>0$ при любом действительном a.

470. Сложив почленно два очевидных неравенства

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab} \text{ и } a+4b\geqslant 4\sqrt{ab},$$

получим

$$2a+5b\geqslant 6\sqrt{ab}.$$

Теперь, перемножив почленно последнее неравенство и верное неравенство

$$ab+1\geqslant 2\sqrt{ab},$$

получим

$$2a^2b+5ab^2+2a+5b\geqslant 12ab,$$

или

$$ab(12-2a-5b)\leqslant 2a+5b.$$

Равенство достигается при $a=b=0$.

471. Поскольку по условию $a>b$, то $a-b>0$. Пусть $a-b=c>0$, откуда $a=b+c$. Таким образом, доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sqrt[n]{b+c}<\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}. \qquad (1)$$

Так как обе части неравенства (1) положительны, то неравенство (1) верно, если $\left(\sqrt[n]{b+c}\right)^n<\left(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}\right)^n$, или $b+c<b+c+M$, что очевидно, так как $M>0$. Следовательно, неравенство (1) верно, а потому верно и утверждение задачи.

472. Первое решение. В силу зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел имеем

$$a+1 \geqslant 2\sqrt{a}, \tag{1}$$

$$a^3+4 \geqslant 2\sqrt{4a^3}. \tag{2}$$

Перемножив почленно эти два неравенства, получим

$$a^4+a^3+4a+4 \geqslant 4\sqrt{4a^4}=8a^2,$$

или

$$a^4+a^3-8a^2+4a+4>0.$$

Здесь имеет место именно строгое неравенство, так как в соотношении (1) достигается равенство лишь при $a=1$, а в соотношении (2) — только при $a=\sqrt[3]{4}$. Следовательно, нет такого значения a, при котором оба соотношения (1) и (2) достигали бы равенства одновременно.

Второе решение. Имеем $a^4+a^3-8a^2+4a+4=(a^2-2)^2+$ $+a(a-2)^2>0$ при любом $a \geqslant 0$.

473. Обе части неравенства $a+b>c$ умножим на c^2, неравенства $a+c>b$ на b^2, неравенства $b+c>a$ на a^2; тогда получим неравенства

$$a^2(b+c)>a^3, \quad b^2(a+c)>b^3, \quad c^2(b+a)>c^3.$$

Сложив почленно последние три неравенства, получим

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)>a^3+b^3+c^3.$$

Сложив почленно последнее неравенство с равенством $a^3+b^3+c^3=$ $=a^3+b^3+c^3$, получим

$$a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)>2(a^3+b^3+c^3),$$

т. е.

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)>2(a^3+b^3+c^3),$$

что и требовалось доказать.

474. Умножив обе части неравенства $a<b+c$ на a, неравенства $b<a+c$ на b и неравенства $c<a+b$ на c, получим неравенства

$$a^2<ab+ac, \quad b^2<ab+bc, \quad c^2<ac+bc.$$

Сложив почленно последние три неравенства, получим

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca),$$

что и требовалось доказать.

475. В силу зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел имеем

$$a^4+b^4+17=a^4+b^4+16+1>4\sqrt[4]{16a^4b^4}=8ab,$$

$$a^4+b^4+2=a^4+b^4+1+1 \geqslant 4\sqrt[4]{a^4b^4}=4ab.$$

Сложив почленно эти два неравенства, получим

$$2(a^4+b^4)+19>12ab,$$

что и требовалось доказать.

476. В силу соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел имеем

$$2a^3+5b^3=2a^3+4b^3+b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{8a^3b^6}=6ab^2,$$

$$a^3+2b^3=a^3+b^3+b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3b^6}=3ab^2.$$

Сложив почленно эти два неравенства, получим

$$3a^3+7b^3 \geqslant 9ab^2,$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $a=b=0$.

477. Первое решение. Так как $(a+b)^4=a^4+b^4+4a^3b+6a^2b^2+$ $+4ab^3$, то доказываемое неравенство перепишется в следующем виде:

$$8(a^4+b^4) \geqslant a^4+b^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3,$$

или

$$7a^4+7b^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3 \geqslant 0,$$

или

$$3(a^2-b^2)^2+4(a^4+b^4-a^3b-ab^3) \geqslant 0,$$

или

$$3(a^2-b^2)^2+4(a-b)(a^3-b^3) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Поскольку разности $a-b$ и a^3-b^3 одного знака, то произведение $(a-b)(a^3-b^3) \geqslant 0$. Следовательно, левая часть (1) неотрицательна, т. е. неравенство (1), а вместе с ним и доказываемое неравенство верны. Равенство достигается лишь при $a=b$.

Второе решение. Имеем

$$a^4+b^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2 \geqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2\right]^2 \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)^2\right]^2=\frac{(a+b)^4}{8},$$

откуда следует утверждение задачи.

Третье решение. Имеем

$$2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2, \qquad (1)$$

так как $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Аналогично имеем

$$8(a^4+b^4) \geqslant [2(a^2+b^2)]^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $8(a^4+b^4) \geqslant (a+b)^4$.

478. Первое решение. Если $a=0$, то имеет место строгое неравенство $(0>-1)$. Пусть теперь $a \neq 0$. Поделим обе части доказываемого неравенства на $a^3>0$. Тогда

$$a^3+a^2+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3} \geqslant 6,$$

или

$$\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right) \geqslant 6,$$

что верно, так как $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a>0$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=1$.

Второе решение. Имеем очевидные неравенства

$$a^6+1 \geqslant 2a^3, \quad a^5+a \geqslant 2a^3, \quad a^4+a^2 \geqslant 2a^3.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем требуемое.

479. Доказываемое неравенство перепишем последовательно так:

$$a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3 \geqslant 0,$$
$$a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1 \geqslant 0,$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=$ $=c=1$.

480. Пусть $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a$, $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b$, откуда

$$a^3+b^3=3+\sqrt[3]{3}+3-\sqrt[3]{3}=6. \qquad (1)$$

Очевидно, что $ab^2+a^2b<a^3+b^3$ (здесь строгое неравенство, так как $a\neq b$), или $ab(a+b)<a^3+b^3=6$, или

$$3ab(a+b)<18. \qquad (2)$$

Сложив почленно (1) и (2), получим $(a+b)^3<24=8\cdot 3$, откуда $a+b<2\sqrt[3]{3}$, что и требовалось доказать.

481. Доказываемое неравенство перепишем в следующем виде:

$$12ab-4a^2b-4a-4ab^2-b\leqslant 0.$$

Так как $a>0$, $b>0$, то можно поделить обе части этого неравенства на $2ab$:

$$6-2a-\frac{2}{b}-2b-\frac{1}{2a}\leqslant 0,$$

или

$$2a+\frac{1}{2a}+2\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 6. \qquad (1)$$

Поскольку $2a+\frac{1}{2a}\geqslant 2$, $2\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2\cdot 2=4$, то неравенство (1) верно, и вместе с ним верно и исходное. Равенство достигается лишь при $2a=1$ и $b=1$, т. е. при $a={}^1/_2$, $b=1$.

482. Так как обе части доказываемого неравенства неотрицательны, то его можно переписать так:

$$a^3+a^2+a+1\geqslant 4a\sqrt{a},$$

или

$$\frac{a^3+a^2+a+1}{4}\geqslant a\sqrt{a}=\sqrt{a^3}=\sqrt[4]{a^6}=\sqrt[4]{a^3\cdot a^2\cdot a\cdot 1},$$

что верно, так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Равенство достигается лишь тогда, когда $a^3=a^2=a=1$, т. е. лишь при $a=1$.

483. Вначале заметим, что $2x-2>0$, т. е.

$$x>1, \qquad (1)$$

так как левая часть данного неравенства неотрицательна.

Рассмотрим два случая:

а) $2x^2-x-1\geqslant 0$. В этом случае данное неравенство переписывается в следующем виде: $2x^2-x-1<2x-2$, или $2x^2-3x+1<0$. Корнями левой части последнего неравенства являются числа ${}^1/_2$ и 1. Следовательно, неравенство $2x^2-3x+1<0$ выполняется лишь для всех x из промежутка

$${}^1/_2<x<1. \qquad (2)$$

Так как неравенства (1) и (2) противоречивы, то в рассматриваемом случае данное неравенство не имеет решений.

б) $2x^2-x-1<0$. Это неравенство имеет место только для всех x из промежутка

$$-{}^1/_2<x<1. \qquad (3)$$

Поскольку неравенства (1) и (3) несовместимы, то и в случае $2x^2-x-1<0$ данное неравенство не имеет решений. Итак, данное неравенство не выполняется ни при каком (действительном) значении x.

484. Так как $x-3-x^2<0$ (при любом действительном x), то данное неравенство перепишется в таком виде: $-x+3+x^2<x+2$, или $x^2-2x+1<0$, т. е. $(x-1)^2<0$, что не имеет места ни при каком действительном значении x, т. е. утверждение задачи верно.

485. Имеем

$$y=\frac{2x^2}{3x}+\frac{3x}{3x}+\frac{18}{3x}=\frac{2x}{3}+\frac{6}{x}+1=2\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)+1.$$

Так как $\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|\geqslant 2$, то $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\geqslant 2$, если $x>0$, и $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\leqslant -2$, если $x<0$. Таким образом, $y\geqslant 2\cdot 2+1=5$ при $x>0$ и $y\leqslant 2\cdot(-2)+1=-3$ при $x<0$.

486. Доказываемое неравенство верно, если верно неравенство

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)\geqslant 0,$$

или

$$\frac{x^2+1}{x}-\frac{a^2+1}{a}\geqslant 0,$$

или

$$\frac{(ax-1)(x-a)}{ax}\geqslant 0. \qquad (1)$$

В силу условия задачи $ax<1$, $x-a\leqslant 0$, $ax>0$, а потому неравенство (1) верно, а вместе с ним верно и доказываемое. Равенство (при указанных условиях, т. е. при $0<x\leqslant a<1$) достигается тогда и только тогда, когда $x=a$.

487. Перепишем данные равенства так:

$$y+z=xyz-x, \quad yz=x^2,$$

или

$$y+z=x^3-x, \quad yz=x^2.$$

Таким образом, y и z являются корнями квадратного уравнения

$$X^2-(x^3-x)X+x^2=0. \qquad (1)$$

Но так как по условию y и z — действительные числа, то дискриминант уравнения (1) должен быть неотрицательным, т. е.

$$(x^3-x)^2-4x^2\geqslant 0,$$

или

$$(x^2-1)^2\geqslant 4,$$

или

$$|x^2-1|\geqslant 2.$$

Из последнего следует, что либо $x^2-1\geqslant 2$, либо $x^2-1\leqslant -2$, т. е. либо $x^2\geqslant 3$, либо $x^2\leqslant -1$.

Второе неравенство не выполняется ни при каком значении x, а из первого следует $|x|\geqslant\sqrt{3}$.

488. Первое решение. Имеем

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}}=2b,$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{c}\cdot\frac{ca}{b}}=2a,$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}}=2c.$$

Сложив почленно эти три неравенства, получим

$$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\geqslant 2(a+b+c),$$

или

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant a+b+c,$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь тогда, когда $a=b=c$.

Второе решение. Известно, что

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz.$$

Положим в этом неравенстве

$$x=ab,\ y=bc,\ z=ac.$$

Тогда

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\geqslant ab^2c+a^2bc+abc^2.$$

Разделив обе части последнего неравенства на abc, получим требуемое.

489. Имеем

$$\frac{1}{3}(1+2a^{3x})-a^{2x}=\frac{1}{3}(2a^{3x}-3a^{2x}+1)=\frac{1}{3}(2a^{3x}+a^{2x}-4a^{2x}+1)=$$

$$=\frac{1}{3}[a^{2x}(2a^x+1)-(2a^x+1)(2a^x-1)]=\frac{1}{3}[(2a^x+1)(a^{2x}-2a^x+1)]=$$

$$=\frac{1}{3}(2a^x+1)(a^x-1)^2\geqslant 0.$$

Знак равенства имеет место лишь в двух случаях:

1) если $x=0$, a — любое положительное число;

2) если $a=1$, x — любое действительное число.

490. Имеем

$$r=\frac{b+a}{2}-\sqrt{ab}=\frac{b+a-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2}>0,$$

так как $b\neq a$. Далее,

$$r=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}<\frac{(b-a)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2},$$

так как $\sqrt{a}<\sqrt{b}$; поэтому

$$r<(b-a)^2/8a.$$

491. Доказываемое неравенство перепишем последовательно так:

$$a^2+3c^2+b^2-2ac-2bc-2c+1\geqslant 0,$$

$$(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2c+1)\geqslant 0,$$

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(c-1)^2\geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c=1$.

492. Поскольку $ab > 0$, $ac > 0$, а следовательно, и $4ab + 2ac > 0$, то доказываемое неравенство можно переписать последовательно так:

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 \geqslant 4ab + 2ac,$$
$$2a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 2ac \geqslant 0,$$
$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \geqslant 0,$$
$$(a - 2b)^2 + (a - c)^2 \geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь тогда, когда $a = c = 2b$.

493. Первое решение. Имеем

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4x^2+2}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4x^2+1+1}{\sqrt{4x^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right).$$

Так как $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$, то

$$\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} \geqslant 2,$$

и утверждение задачи верно. Знак равенства имеет место только при $x = 0$.

Второе решение. Перепишем доказываемое неравенство в следующем виде:

$$2(2x^2+1) - 2\sqrt{4x^2+1} \geqslant 0. \tag{1}$$

Но так как

$$2(2x^2+1) - 2\sqrt{4x^2+1} = (4x^2+1) - 2\sqrt{4x^2+1} + 1 =$$
$$= (\sqrt{4x^2+1} - 1)^2 \geqslant 0,$$

то неравенство (1), а вместе с ним и доказываемое верны. Равенство достигается лишь тогда, когда $\sqrt{4x^2+1} = 1$, т. е. только при $x = 0$.

Третье решение. Имеем

$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{(\sqrt{4x^2+1})^2+1}{2\sqrt{4x^2+1}} \geqslant \frac{2\sqrt{4x^2+1}\cdot 1}{2\sqrt{4x^2+1}} = 1,$$

так как $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

494. Так как $p + q \geqslant 2\sqrt{pq}$, где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, то имеем

$$\left.\begin{aligned} a + b &\geqslant 2\sqrt{ab}, \\ a + 4b &\geqslant 4\sqrt{ab}, \\ a + 9b &\geqslant 6\sqrt{ab}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a + n^2b &\geqslant 2n\sqrt{ab}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Сложив почленно все неравенства (1), получим

$$na + (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\, b \geqslant (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)\sqrt{ab}. \tag{2}$$

Но так как $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \frac{2+2n}{2}\cdot n = n(n+1)$, то неравенство (2) перепишется в следующем виде:

$$na + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\, b \geqslant n(n+1)\sqrt{ab},$$

или, после сокращения на n,

$$a+\frac{(n+1)(2n+1)}{6}b \geqslant (n+1)\sqrt{ab},$$

или

$$(n+1)(2n+1)b \geqslant 6\left[(n+1)\sqrt{ab}-a\right],$$

что и требовалось доказать.

495. В силу известного неравенства

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$$

имеем

$$ab+bc+ca \geqslant \sqrt{a^2bc}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{abc^2}=\sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

496. Перепишем доказываемое неравенство в таком виде:

$$a+ab+b+bc+c+ac-6\sqrt{abc} \geqslant 0,$$

или

$$(a-2\sqrt{abc}+bc)+(b-2\sqrt{abc}+ac)+(c-2\sqrt{abc}+ab) \geqslant 0,$$

или

$$(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{ac})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{ab})^2 \geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается при $a=b=c=0$ и при $a=b=c=1$.

497. П е р в о е р е ш е н и е. Напишем четыре очевидных неравенства:

$$\left.\begin{aligned} a^2+bc &\geqslant 2\sqrt{a^2bc}, \\ b^2+ac &\geqslant 2\sqrt{b^2ac}, \\ c^2+ab &\geqslant 2\sqrt{c^2ab}, \\ a^2+b^2+c^2 &\geqslant ab+bc+ca. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно все неравенства (1), получим

$$2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca) \geqslant 2(\sqrt{a^2bc}+\sqrt{b^2ac}+\sqrt{c^2ab})+ \\ +(ab+bc+ca),$$

или

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{a^2bc}+\sqrt{b^2ac}+\sqrt{c^2ab},$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

В т о р о е р е ш е н и е. В силу известного неравенства

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$$

имеем

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc=(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{ac})^2+(\sqrt{bc})^2 \geqslant \\ \geqslant \sqrt{ab\cdot ac}+\sqrt{ab\cdot bc}+\sqrt{ac\cdot bc}=\sqrt{abc}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

498. Доказываемое неравенство перепишем в следующем виде:

$$(1-2\sqrt[4]{a}+\sqrt{a})+(1-2\sqrt[4]{b}+\sqrt{b})+(1-2\sqrt[4]{c}+\sqrt{c}) \geqslant 0,$$

или

$$(1-\sqrt[4]{a})^2+(1-\sqrt[4]{b})^2+(1-\sqrt[4]{c})^2 \geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=$ $=c=1$.

499. Из условия следует, что $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=1$, или

$$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}=1. \qquad (1)$$

Напишем три очевидных неравенства:

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}, \qquad (2)$$

$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}, \qquad (3)$$

$$c+a\geqslant 2\sqrt{ac}. \qquad (4)$$

Сложив почленно соотношения (1), (2), (3) и (4), получим

$$3a+3b+3c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})\geqslant 2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})+1,$$

или

$$3(a+b+c)\geqslant 1,$$

откуда

$$a+b+c\geqslant\frac{1}{3}.$$

Равенство достигается лишь при $a=b=c={}^1/_9$.

500. В силу зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел имеем

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a}+1^2\geqslant 2\sqrt{\sqrt{a}\cdot 1}=2\sqrt[4]{a},\\ \sqrt{a}+2^2\geqslant 2\sqrt{\sqrt{a}\cdot 4}=4\sqrt[4]{a},\\ \sqrt{a}+3^2\geqslant 2\sqrt{\sqrt{a}\cdot 9}=6\sqrt[4]{a},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sqrt{a}+n^2\geqslant 2\sqrt{\sqrt{a}\cdot n^2}=2n\sqrt[4]{a}.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно все неравенства (1), получим

$$n\sqrt{a}+(1^2+2^2+\ldots+n^2)\geqslant(2+4+6+\ldots+2n)\sqrt[4]{a},$$

или

$$n\sqrt{a}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\geqslant n(n+1)\sqrt[4]{a},$$

или, после сокращения на n и преобразований,

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\geqslant(n+1)\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^2},$$

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\geqslant\sqrt[4]{a}\left(n+1-\sqrt[4]{a}\right),$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $a=n=1$.

501. В силу известного неравенства $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$ имеем

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}. \qquad (1)$$

Напишем еще три очевидных неравенства:

$$2a+2b\geqslant 4\sqrt{ab}, \qquad (2)$$

$$3a+3c\geqslant 6\sqrt{ac}, \qquad (3)$$

$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}. \qquad (4)$$

Сложив почленно неравенства (1), (2), (3) и (4), получим

$$6a+4b+5c\geqslant 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc},$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

502. Так как $p+q\geqslant 2\sqrt{pq}$, где $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, то имеем

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot a+1\geqslant 2\sqrt{a}, \\ 2\cdot a+1\geqslant 2\sqrt{2a}, \\ 3\cdot a+1\geqslant 2\sqrt{3a}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ n\cdot a+1\geqslant 2\sqrt{na}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно все неравенства (1), получим

$$a(1+2+\ldots+n)+n\geqslant 2\sqrt{a}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right),$$

или

$$a\frac{n(n+1)}{2}+n\geqslant 2\sqrt{a}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right),$$

или

$$n(n+1)a+2n\geqslant 4\sqrt{a}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right),$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь при $a=n=1$.

503. Напишем n очевидных неравенств:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant 2\sqrt[4]{ab}, \\ \sqrt{a}+\sqrt{2b}\geqslant 2\sqrt[4]{2ab}, \\ \sqrt{a}+\sqrt{3b}\geqslant 2\sqrt[4]{3ab}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{a}+\sqrt{nb}\geqslant 2\sqrt[4]{nab}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно все n неравенств (1), получим

$$n\sqrt{a}+\sqrt{b}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\right)\geqslant 2\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}+\ldots+\sqrt[4]{n}\right),$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается лишь в двух случаях: когда $a=b=0$ и когда $a=b=n=1$.

504. В силу зависимости между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел имеем

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant 3\sqrt[6]{abc},$$

$$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[6]{a^2b^2c^2}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)(a+b+c)\geqslant 9\sqrt[6]{a^3b^3c^3}=9\sqrt{abc},$$

что и требовалось доказать. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

505. Так как среднее геометрическое неотрицательных чисел не больше их среднего арифметического, то имеем

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{ab} &\leqslant \frac{a+b+1}{3}, \\ \sqrt[3]{ac} &\leqslant \frac{a+c+1}{3}, \\ \sqrt[3]{bc} &\leqslant \frac{b+c+1}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc} \leqslant \frac{2a+2b+2c+3}{3},$$

или

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1 \leqslant \frac{2}{3}(a+b+c).$$

Равенство достигается, когда $a=b=c=1$ или когда $a=b=c=0$.

506. Доказываемое неравенство перепишем в следующем виде:

$$(a^2+4b-4a\sqrt{b}) + (a^2+b-2a\sqrt{b}) \geqslant 0,$$

или

$$(a-2\sqrt{b})^2 + (a-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь при $a=b=0$.

507. Первое решение. Если $a=0$, то имеет место строгое неравенство $(1>0)$. В дальнейшем будем считать, что $a \neq 0$. Если $a \neq 0$, то доказываемое неравенство перепишется последовательно так:

$$\frac{\sqrt{a}\,(a+1)+a\,(a-4)+1}{a} \geqslant 0,$$

или

$$\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + a - 4 + \frac{1}{a} \geqslant 0,$$

или

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) \geqslant 4,$$

что верно, так как $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geqslant 2$ при $\alpha > 0$. Равенство достигается лишь тогда, когда $a=1$.

Второе решение. Имеем

$$\sqrt{a}\,(a+1)+a\,(a-4)+1 = a\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2-4a+1 =$$
$$= (a^2-2a+1)+\sqrt{a}\,(a-2\sqrt{a}+1) = (a-1)^2+\sqrt{a}\,(\sqrt{a}-1)^2 \geqslant 0,$$

что очевидно.

508. Перепишем доказываемое неравенство последовательно так:

$$a+b-2ab-2b\sqrt{a}-2a\sqrt{b}+2a^2+2b^2 \geqslant 0,$$
$$(a^2+b^2-2ab)+(a^2-2a\sqrt{b}+b)+(b^2-2b\sqrt{a}+a) \geqslant 0,$$
$$(a-b)^2+(a-\sqrt{b})^2+(b-\sqrt{a})^2 \geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь при $a=b=1$ или при $a=b=0$.

509. Доказываемое неравенство перепишем в следующем виде:

$$a+b+c+2\sqrt{ab}\geqslant 2\sqrt{c}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}),$$

или

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+c}{\sqrt{c}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\geqslant 2,$$

т. е.

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\geqslant 2,$$

что верно, так как $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geqslant 2$, если $\alpha>0,\ \beta>0$. Равенство достигается только тогда, когда $\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

510. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$a^2+b+\sqrt{a}+ab\sqrt{a}-4a\sqrt{b}\geqslant 0. \qquad (1)$$

Если $a=0$ или $b=0$, то доказываемое неравенство очевидно. Если $a\neq 0$, $b\neq 0$, т. е. $a\sqrt{b}>0$, то, поделив обе части неравенства (1) на $a\sqrt{b}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{ab}-4\geqslant 0. \qquad (2)$$

Поскольку $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geqslant 2$ при $\alpha>0$, то неравенство (2) верно, и вместе с ним верно и доказываемое. Равенство достигается лишь тогда, когда $a=b=1$.

511. Доказываемое неравенство перепишем в виде $x^2+y^2-\frac{4}{a}\geqslant 0$, или, учитывая, что $a=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$, имеем

$$x^2+y^2-\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}\geqslant 0,$$

или

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+y^2}\geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь при $|x|=|y|=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

512. Так как $x^2+1>0$ при любом действительном x, то доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$0\leqslant |x|+x\leqslant x^2+1.$$

Рассмотрим отдельно левое и правое неравенства. Если $x\geqslant 0$, то левое неравенство очевидно; если же $x\leqslant 0$, то $|x|+x=0$, а потому имеет место равенство.

Правое неравенство при $x\leqslant 0$ принимает вид $x^2+1\geqslant 0$, что очевидно; если же $x\geqslant 0$, то $|x|=x$, а потому правое неравенство перепишется в виде $x^2-2x+1\geqslant 0$, или $(x-1)^2\geqslant 0$, что верно. Здесь равенство достигается при $x=1$.

513. Так как корни квадратного трехчлена a^2+2a+4 комплексные, то $a^2+2a+4>0$ при любом действительном a, а потому доказываемое неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{a^2}{3}+\frac{2a}{3}+\frac{4}{3}\leqslant a^2-2a+4\leqslant 3a^2+6a+12.$$

Левое неравенство перепишем так:

$$2a^2 - 8a + 8 \geqslant 0, \text{ или } (a-2)^2 \geqslant 0,$$

что верно.

Правое неравенство перепишем в виде

$$2a^2 + 8a + 8 \geqslant 0, \text{ или } (a+2)^2 \geqslant 0,$$

что верно.

Левое соотношение есть равенство при $a = 2$, а правое — при $a = -2$.

514. Складывая почленно неравенства $b \leqslant c$ и $b + c < a + 1$, получим $2b + c < a + c + 1$, или $a + 1 > 2b$. Теперь, складывая последнее неравенство с неравенством $a \geqslant 1$, получим $2a + 1 > 1 + 2b$, или $a > b$, что и требовалось доказать.

515. Данные равенства перепишем так:

$$y + z = 5 - x, \quad yz = 8 - x(y+z),$$

или

$$y + z = 5 - x, \quad yz = 8 - x(5 - x) = x^2 - 5x + 8.$$

Таким образом, y и z служат корнями уравнения

$$t^2 + (x-5)t + x^2 - 5x + 8 = 0.$$

Поскольку это уравнение имеет действительные корни, то должно иметь место неравенство

$$(x-5)^2 - 4(x^2 - 5x + 8) \geqslant 0,$$

или

$$3x^2 - 10x + 7 \leqslant 0.$$

Так как корнями левой части этого неравенства служат числа 1 и $\frac{7}{3}$, то оно выполняется *лишь* при $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$, что и требовалось доказать.

516. Имеем

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^3\beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + (\alpha\beta)^3.$$

Но так как (в силу теоремы Виета) $\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = -a$, то

$$\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^3\beta^3 = a^3 + 3a^2 - a^3 = 3a^2 \geqslant 0.$$

Равенство достигается лишь при $a = 0$, т. е. при $\alpha = \beta = 0$.

517. Первое решение. Пусть

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9999}{10\,000} = A,$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{9998}{9999} = B.$$

Так как $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, ..., $\frac{9997}{9998} < \frac{9998}{9999}$, $\frac{9999}{10\,000} < 1$, то $A < B$. Также имеем $A \cdot B = 0{,}0001$. Следовательно, $A^2 < A \cdot B = 0{,}0001$, а потому $A < 0{,}01$.

Второе решение. Пусть $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9999}{10\,000}$. Тогда

$$A^2 = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{9999^2}{10\,000^2} < \frac{1^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1^2} \cdots \frac{9999^2}{10\,000^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{9999^2}{9999 \cdot 10\,001} = \frac{1}{10\,001} < \frac{1}{10\,000},$$

откуда $A < \sqrt{\frac{1}{10\,000}} = 0{,}01$.

518. Предварительно докажем, что последовательности

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ и } y_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

возрастающие, а последовательность

$$z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

убывающая, т. е.

$$x_n<x_{n+1},\ y_n<y_{n+1},\ z_n>z_{n+1}.$$

По свойству среднего арифметического положительных чисел имеем

$$\frac{1+\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n\text{ раз}}}{n+1}>\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

т. е.

$$\frac{1+n+1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},\text{ откуда }\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

т. е.

$$x_n<x_{n+1}. \tag{1}$$

Аналогично доказывается, что

$$y_n<y_{n+1}. \tag{2}$$

Имеем

$$z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}=\frac{1}{y_{n+1}}. \tag{3}$$

Аналогично докажем, что

$$z_{n+1}=\frac{1}{y_{n+2}}. \tag{4}$$

Но $\frac{1}{y_{n+1}}>\frac{1}{y_{n+2}}$ согласно неравенству (2). Поэтому из (3) и (4) следует, что

$$z_n>z_{n+1}. \tag{5}$$

Из доказанного следует, что при любых m и n имеет место неравенство

$$x_n<z_m. \tag{6}$$

Действительно, при $n=m$ неравенство (6) верно, так как

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1};$$

если $n>m$, то

$$x_n<z_n<z_m;$$

если же $n<m$, то

$$x_n<x_m<z_m.$$

Учитывая неравенство (6), докажем теперь, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Действительно, полагая $m=5$, получим (для любого n)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{5}\right)^6=1{,}2^6=2{,}985984, \text{ т. е. } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ имеем

$$1!>\left(\frac{1}{3}\right)^3,$$

что верно. Пусть

$$k!>\left(\frac{k}{3}\right)^k.$$

Тогда, умножая обе части этого неравенства на $(k+1)$, получим

$$(k+1)!>\left(\frac{k}{3}\right)^k\cdot(k+1)=\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}>$$

$$>\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}\cdot\frac{3}{3}=\left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}.$$

Следовательно, неравенство

$$n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n$$

верно при любом натуральном n.

519. Так как $a>1$, $b\geqslant 1$, то доказываемое неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\log_{ab}^2 x+1\geqslant\frac{2\log_a x}{1+\log_a b}. \tag{1}$$

Но так как $\frac{\log_a x}{1+\log_a b}=\log_{ab}x$, то (1) принимает вид

$$\log_{ab}^2 x+1\geqslant 2\log_{ab}x,$$

или

$$(\log_{ab}x-1)^2\geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь тогда, когда $x=ab$.

520. Доказываемое неравенство перепишем в виде

$$\log_a(bc)\left(1+\frac{1}{\log_a b\cdot\log_a c}\right)\geqslant 4,$$

или

$$(\log_a b+\log_a c)\left(1+\frac{1}{\log_a b\cdot\log_a c}\right)\geqslant 4.$$

Так как $a>1$, $b>1$, $c>1$, то $\log_a b>0$, $\log_a c>0$, поэтому

$$\log_a b+\log_a c\geqslant 2\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c},$$

$$1+\frac{1}{\log_a b\cdot\log_a c}\geqslant 2\sqrt{1\cdot\frac{1}{\log_a b\cdot\log_a c}}.$$

Перемножив почленно последние два неравенства, получим

$$(\log_a b+\log_a c)\left(1+\frac{1}{\log_a b\cdot\log_a c}\right)\geqslant 4,$$

что верно, а следовательно, верно и доказываемое.

521. Доказываемое неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\lg (k+1)!}{k+1} > \frac{\lg k!}{k}, \qquad \lg [(k+1)!]^{\frac{1}{k+1}} > \lg (k!)^{\frac{1}{k}},$$

$$[(k+1)!]^{\frac{1}{k+1}} > (k!)^{\frac{1}{k}}.$$

Возведем обе части последнего неравенства в степень $k(k+1)$, получим

$$[(k+1)!]^k > (k!)^{k+1}, \quad [k!\,(k+1)]^k > (k!)^k\, k!,$$

$$(k!)^k\,(k+1)^k > (k!)^k\, k!,$$

$$(k+1)^k > k!. \tag{1}$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (1). Имеем

$$\left.\begin{aligned} k+1 &> 1,\\ k+1 &> 2,\\ k+1 &> 3,\\ &\dots\\ k+1 &> k. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Перемножив почленно неравенства (2), получим неравенство (1).

522. Предварительно докажем неравенство $k(n-k+1) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, где n — любое натуральное число, k — любое натуральное число, меньшее $n+1$, т. е. $0 < k \leqslant n$. Имеем

$$k(n-k+1) = \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n+1-2k}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2} + \frac{n+1-2k}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n+1-2k}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Знак равенства имеет место лишь при $k = \frac{n+1}{2}$ (и то лишь в случае, когда n — нечетное число). Полагая в неравенстве (1) $k = 1, 2, 3, \dots, n$, получим

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot n &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\\ 2\cdot(n-1) &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\\ 3\cdot(n-2) &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\\ &\dots\dots\\ (n-1)\cdot 2 &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,\\ n\cdot 1 &< \left(\frac{n+1}{2}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(В случае, когда n — нечетное число, $\frac{n+1}{2}$-е соотношение представляет собой равенство.) Перемножая почленно неравенства (2), получим $(n!)^2 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, откуда

$$\frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Поэтому $\lg \frac{n+1}{2} > \frac{\lg 1 + \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg n}{n}$.

523. В силу соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел имеем

$$\log_a a + \log_a b + \log_a c \geqslant 3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_a c},$$

или

$$\log_a abc \geqslant 3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_a c}.$$

Но так как $\log_m n = \frac{1}{\log_n m}$, то последнее неравенство перепишется так:

$$\frac{1}{\log_{abc} a} \geqslant 3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_a c},$$

или

$$\log_{abc} a \cdot \sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_a c} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Возведя в куб обе части этого неравенства, получим

$$\log^3_{abc} a \cdot \log_a b \cdot \log_a c \leqslant \frac{1}{27}.$$

Равенство достигается при $a = b = c$.

524. Имеем

$$\log_c a + \frac{1}{\log_c a} \geqslant 2, \qquad \log_c a^2 + \frac{1}{\log_c a^2} \geqslant 2,$$

или

$$\left.\begin{aligned} \log_c a + \log_a c &\geqslant 2, \\ 2\log_c a + \log_{a^2} c &\geqslant 2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Сложив почленно неравенства (1), получим

$$3\log_c a + \log_a c + \log_{a^2} c > 4.$$

Здесь строгое неравенство, так как соотношения (1) достигают равенства при различных зависимостях между a и c.

525. Поскольку $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$, то $\log_c a > 0$, $\log_c b > 0$, а потому

$$\log_c a + \log_c b \geqslant 2\sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}, \qquad (1)$$

$$4\log_c a + 9\log_c b \geqslant 2\sqrt{36 \cdot \log_c a \cdot \log_c b}, \qquad (2)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \log_c ab &\geqslant 2\sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}, \\ \log_c a^4 b^9 &\geqslant 12\sqrt{\log_c a \cdot \log_c b}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Перемножив почленно неравенства (3), получим

$$\log_c ab \cdot \log_c a^4 b^9 > 24\log_c a \cdot \log_c b.$$

Здесь действительно строгое неравенство, так как в соотношении (1) достигается равенство лишь при $a = b$, а в соотношении (2) — лишь при $a^4 = b^9$, причем в силу условия задачи $a \neq 1$, $b \neq 1$.

526. Доказываемое неравенство перепишем последовательно так:

$$(1-\cos^2\alpha)+(1-\cos^2 2\alpha)+1-2\sin\alpha\sin 2\alpha-\sin 2\alpha>0,$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\sin 2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha>0,$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin 2\alpha)^2>0,$$

что очевидно.

527. Из условия следует, что $a<\frac{\pi}{2}-b$. Так как обе части этого неравенства положительны и меньше $\pi/2$, то имеем

$$\operatorname{tg} a<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-b\right)=\operatorname{ctg} b=\frac{1}{\operatorname{tg} b},$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b<1,$$

что и требовалось доказать.

528. Так как $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$, то доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\frac{1-\cos\alpha}{2}+\frac{1-\cos\beta}{2}+\frac{1-\cos\gamma}{2}\geqslant\frac{3}{4},$$

или

$$\frac{3}{2}-\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2}\geqslant\frac{3}{4},$$

или

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}.$$

Но так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\cos\gamma=\cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-\cos(\alpha+\beta).$$

Также имеем

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,\quad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

В силу последних соотношений имеем

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1.$$

Следовательно, доказываемое неравенство можно переписать так:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\frac{1}{4},$$

или

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4},$$

что очевидно.

529. Имеем

$$\sin\alpha>\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin\beta>\cos\alpha\sin\beta.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\sin\alpha+\sin\beta>\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

т. е.

$$\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta.$$

530. В силу предыдущей задачи имеем $2\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, т. е. $\sin\alpha<\sin\beta$, а потому $\alpha<\beta$, что и требовалось доказать.

531. Имеем

$$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=$$
$$=\frac{1-\cos 2a}{2}+\frac{1-\cos 2b}{2}+1-\cos^2 c=$$
$$=2-\frac{\cos 2a+\cos 2b}{2}-\cos^2 c=$$
$$=2-\cos(a+b)\cos(a-b)-\cos^2[\pi-(a+b)]=$$
$$=2-\cos(a+b)\cos(a-b)-\cos^2(a+b)=$$
$$=2-\cos(a+b)[\cos(a-b)+\cos(a+b)]=$$
$$=2-\cos(\pi-c)\cdot 2\cos a\cos b=2+2\cos a\cos b\cos c.$$

Поскольку $0<a<\pi/2$, $0<b<\pi/2$, $0<c<\pi/2$, то $\cos a\cos b\cos c>0$, а потому

$$\sin^2 a+\sin^2 b+\sin^2 c=2+2\cos a\cos b\cos c>2,$$

что и требовалось доказать.

532. Известно, что $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. Поэтому

$$|3\sin x-4\cos x|\leqslant\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

533. П е р в о е р е ш е н и е. Левую часть доказываемого неравенства перепишем в виде $\sin^3\alpha(1-\sin^3\alpha)$. Поскольку $\sin^3\alpha+(1-\sin^3\alpha)=1$ — постоянная величина, то левая часть неравенства достигает максимума при $\sin^3\alpha=1-\sin^3\alpha$, т. е. при $\sin^3\alpha=1/2$. Таким образом, левая часть принимает наибольшее значение, равное $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. Следовательно, $\sin^3\alpha-\sin^6\alpha\leqslant\frac{1}{4}$.

В т о р о е р е ш е н и е. Имеем $\sin^6\alpha-\sin^3\alpha+\frac{1}{4}=\left(\sin^3\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$, откуда следует, что $\sin^3\alpha-\sin^6\alpha\leqslant\frac{1}{4}$.

534. Так как $2+\cos\alpha>0$, то доказываемое неравенство перепишется в следующем виде:

$$-\sqrt{3}(2+\cos\alpha)\leqslant 3\sin\alpha\leqslant\sqrt{3}(2+\cos\alpha),$$

или

$$3|\sin\alpha|\leqslant\sqrt{3}(2+\cos\alpha),$$

или

$$\sqrt{3}|\sin\alpha|\leqslant 2+\cos\alpha.$$

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то оно равносильно неравенству

$$3\sin^2\alpha\leqslant 4+4\cos\alpha+\cos^2\alpha,$$

или

$$4\cos^2\alpha+4\cos\alpha+1\geqslant 0,$$

т. е.

$$(2\cos\alpha+1)^2\geqslant 0,$$

что очевидно. Равенство достигается лишь при $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, т. е. при $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

535. Доказываемое неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{\sin^2 x - 4\sin x + 5}{3 - 2\sin x} \leqslant 2.$$

Поскольку $\sin^2 x \leqslant 1$, то $\sin^2 x - 4\sin x + 5 \leqslant 6 - 4\sin x = 2(3 - 2\sin x)$. Следовательно, учитывая, что $3 - 2\sin x > 0$, имеем

$$\frac{\sin^2 x - 4\sin x + 5}{3 - 2\sin x} \leqslant \frac{2(3 - 2\sin x)}{3 - 2\sin x} = 2.$$

Таким образом, правое неравенство доказано. Теперь докажем левое неравенство. Имеем

$$\frac{\sin^2 x - 4\sin x + 5}{3 - 2\sin x} = \frac{(3 - 2\sin x)^2 + 5 + (6 - 4\sin x)}{4(3 - 2\sin x)} =$$

$$= \frac{3 - 2\sin x}{4} + \frac{5}{4(3 - 2\sin x)} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{3 - 2\sin x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{3 - 2\sin x}\right) + \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

так как $3 - 2\sin x > 0$.

Ясно, что правое соотношение достигает равенства при $\sin x = \pm 1$, т. е. при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а левое — при $\frac{3 - 2\sin x}{\sqrt{5}} = 1$, т. е. при $\sin x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, т. е. при $x = (-1)^k \arcsin\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

536. Имеем

$$d = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}. \quad (1)$$

Пусть для определенности $\alpha \geqslant \beta$.

а) Если $\alpha = \beta$, то $\sin\alpha - \sin\beta = 0$, а потому $d = 0$.

б) Если $\alpha > \beta$, то 1) при $\pi/2 \geqslant \alpha > \beta > 0$ значение $\sin\alpha - \sin\beta > 0$, а поэтому $d > 0$; 2) при $\alpha > \pi/2$, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$ (где $0 < \varphi < \pi/2$), значение $\beta < \frac{\pi}{2} - \varphi$, так как $\alpha + \beta < \pi$; поэтому

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi, \qquad \sin\beta < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

т. е. $\sin\beta < \cos\varphi$, откуда $\sin\alpha - \sin\beta > 0$, а поэтому из (1) следует, что $d > 0$.

Таким образом, во всех случаях $d \geqslant 0$, т. е.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (\alpha, \beta > 0,\ \alpha+\beta < \pi).$$

§ 11. Решение неравенств

537. Если $x<-3$, то решаемое неравенство принимает вид $-(x+3)+$ $+(x+1)<2$, или $-2<2$, что верно при любом x. Если $-3\leqslant x<-1$, то данное неравенство переписывается в следующем виде:

$$(x+3)+(x+1)<2,$$

или $2x<-2$, откуда $x<-1$.

Наконец, если $x\geqslant -1$, то решаемое неравенство принимает вид

$$(x+3)-(x+1)<2, \text{ т. е. } 2<2,$$

что не имеет места ни при каком значении x.

Отв. $x<-1$.

538. Данное неравенство можно переписать в таком виде:

$$-1\leqslant |x|-2<1.$$

Прибавив ко всем трем частям по $+2$, получим

$$1\leqslant |x|\leqslant 3.$$

Следовательно, $-3\leqslant x\leqslant -1$, $1\leqslant x\leqslant 3$.

539. Если $x\leqslant 0$ или $4\leqslant x\leqslant 5$, то решаемое неравенство перепишется в следующем виде:

$$x^2-4x+3\geqslant x^2-x+5, \text{ или } -3x\geqslant 2,$$

откуда

$$x\leqslant -2/3.$$

Если $0\leqslant x\leqslant 4$, то данное неравенство принимает вид

$$-x^2+4x+3\geqslant x^2-x+5,$$

или

$$2x^2-5x+2\leqslant 0.$$

Поскольку корнями левой части этого неравенства являются числа $\frac{1}{2}$ и 2, то оно выполняется, если

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2.$$

Наконец, если $x\geqslant 5$, то решаемое неравенство перепишем в следующем виде:

$$x^2-4x+3\geqslant x^2+x-5, \text{ или } 5x\leqslant 8,$$

откуда

$$x\leqslant 8/5.$$

Но так как $x<8/5$ и $x\geqslant 5$ — противоречивые неравенства, то заключаем, что при $x\geqslant 5$ данное неравенство не имеет решений.

Отв. $x\leqslant -\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

540. Во-первых, заметим, что должно быть $3x-3>0$, т. е. $x>1$. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим

$$(x^2-2x-3)^2<9(x-1)^2,$$

$$(x^2-2x-3)^2-9(x-1)^2<0,$$

$$(x^2-5x)(x^2+x-6)<0,$$

$$(x+3)x(x-2)(x-5)<0.$$

Но так как $x > 1$, то $x(x+3) > 0$, а потому

$$(x-2)(x-5) < 0,$$

откуда $2 < x < 5$.

541. Данное неравенство перепишем в следующем виде:

$$2x^2 + 2x + 1 - \frac{15}{x^2 + x + 1} < 0,$$

или

$$2(x^2 + x + 1) - 1 - \frac{15}{x^2 + x + 1} < 0. \qquad (1)$$

Введем обозначение $x^2 + x + 1 = y > 0$ ($y > 0$, так как $x^2 + x + 1 \geqslant 3/4$ при любом действительном x). В силу нашего обозначения неравенство (1) принимает вид

$$2y - 1 - \frac{15}{y} < 0,$$

или, так как $y > 0$, то его можно переписать так:

$$2y^2 - y - 15 < 0,$$

или

$$2(y-3)\left(y + \frac{5}{2}\right) < 0,$$

откуда

$$-\frac{5}{2} < y < 3.$$

Но так как $y \geqslant {}^3/_4$, то имеем окончательно

$${}^3/_4 \leqslant y < 3,$$

т. е. ${}^3/_4 \leqslant x^2 + x + 1 < 3$. Решая это неравенство, находим

$$-2 < x < 1.$$

542. Перепишем решаемое неравенство так:

$$(x^4 + x^2) - (x^3 + x) - 2(x^2 + 1) \leqslant 0,$$
$$x^2(x^2 + 1) - x(x^2 + 1) - 2(x^2 + 1) \leqslant 0,$$
$$(x^2 + 1)(x^2 - x - 2) \leqslant 0.$$

Так как $x^2 + 1 > 0$ при любом значении x, то задача сводится к решению неравенства $x^2 - x - 2 \leqslant 0$, или $(x+1)(x-2) \leqslant 0$. Следовательно, $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

Отв. Все числа из промежутка $[-1, 2]$.

543. Перепишем решаемое неравенство последовательно так:

$$(x^4 - 16) - (2x^3 - x^2 + 8x - 4) \geqslant 0,$$
$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) - [2x(x^2 + 4) - (x^2 + 4)] \geqslant 0,$$
$$(x^2 + 4)(x^2 - 2x - 3) \geqslant 0.$$

Так как $x^2 + 4 > 0$ при любом значении x, то задача сводится к решению наравенства

$$x^2 - 2x - 3 \geqslant 0.$$

Поскольку корнями левой части этого неравенства служат числа -1 и 3, то решениями последнего неравенства, а вместе с ним и данного служат все числа из промежутков $x \geqslant 3$ и $x \leqslant -1$.

544. Должно быть $a \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $a - \sqrt{x} \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant a^2$. Так как обе части неотрицательны, то имеем

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}}\right)^2 < 2,$$

или

$$\sqrt{a^2 - x} < 1 - a. \qquad (1)$$

Поскольку $\sqrt{a^2 - x} \geqslant 0$, то $1 - a > 0$, или $a < 1$. Теперь, возведя обе части неравенства (1) в квадрат, получим после преобразований

$$x > 2a - 1.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $2a - 1 \geqslant 0$ и когда $2a - 1 < 0$.

Если $2a - 1 \geqslant 0$, то $a \geqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, учитывая, что $x \leqslant a^2$ и $a < 1$, получаем $2a - 1 < x \leqslant a^2$ при условии, что $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$.

Если же $2a - 1 < 0$, то $a < \frac{1}{2}$. Следовательно, учитывая, что $x \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ и $x \leqslant a^2$, получаем $0 \leqslant x \leqslant a^2$ при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$.

Отв. $2a - 1 < x \leqslant a^2$ при $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$; $0 \leqslant x \leqslant a^2$ при $0 \leqslant a < \frac{1}{2}$.

545. Ясно, что должно быть $x \geqslant b^2$, $x \geqslant 0$. Если $b = 0$, то данное неравенство принимает вид $\sqrt{x} > 0$, откуда $x > 0$. Если $b < 0$, т. е. правая часть решаемого неравенства отрицательна, и поскольку левая часть неотрицательна, то и в этом случае неравенство выполняется при любом $x \geqslant b^2$. Наконец, при $b > 0$ после возведения обеих частей данного неравенства в квадрат получаем

$$2x - b^2 + 2\sqrt{x(x-b^2)} > 4b^2,$$

или

$$2\sqrt{x(x-b^2)} > 5b^2 - 2x. \qquad (1)$$

В том случае, когда $5b^2 - 2x \leqslant 0$, т. е. когда $x \geqslant 5b^2/2$, неравенство (1) выполняется. Если же $5b^2 - 2x > 0$, т. е. $x < 5b^2/2$, то после возведения обеих частей неравенства (1) в квадрат получаем $x > 25b^2/16$. Таким образом, в последнем подслучае получаем $25b^2/16 < x < 5b^2/2$. Итак, если $b > 0$, то $x > 25b^2/16$.

Отв. Если $b = 0$, то $x > 0$; если $b < 0$, то $x \geqslant b^2$; если $b > 0$, то $x > 25b^2/16$.

546. Должно быть $x + 1 \geqslant 0$. Если $x + 1 = 0$, т. е. $x = -1$, то неравенство выполняется; в дальнейшем будем считать $x + 1 > 0$. Так как $x + 1 > 0$, то, поделив обе части решаемого неравенства на $x + 1$, получим равносильное ему неравенство

$$-2 > (x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{x+2}{x+1}\right),$$

или

$$-2 > \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - \frac{(x+2)^2}{x+1},$$

т. е.

$$\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\right)^2 - \left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\right) - 2 > 0.$$

Пусть $\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = y > 0$. Тогда имеем

$$y^2 - y - 2 > 0,$$

откуда $y<-1$ или $y>2$. Таким образом, данное неравенство распадается на два:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}<-1, \qquad \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}>2.$$

Первое неравенство не имеет решений. Второе перепишем так: $(x+1)-2\sqrt{x+1}+1>0$, или $(\sqrt{x+1}-1)^2>0$, откуда $-1<x<0$, $0<x$.

Отв. $-1\leqslant x<0$, $x>0$.

547. Сразу заметим, что $x>0$. Так как $x>0$, то, поделив обе части данного неравенства на $4x$, получим неравенство, равносильное ему:

$$\frac{(x+1)^2}{4x}<\frac{x+1+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

или

$$\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)^2<2\cdot\frac{x+1}{2\sqrt{x}}+3,$$

или

$$\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)^2-2\cdot\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-3<0,$$

откуда следует, что

$$-1<\frac{x+1}{2\sqrt{x}}<3.$$

Поскольку $x>0$, то левое неравенство выполняется при любом x. Правое же неравенство перепишется так:

$$x-6\sqrt{x}+1<0,$$

откуда получаем

$$3-2\sqrt{2}<\sqrt{x}<3+2\sqrt{2}$$

и

$$17-12\sqrt{2}<x<17+12\sqrt{2}.$$

548. Решаемое неравенство перепишем так:

$$2(x^2-x+1)-1>\sqrt{x^2-x+1}. \qquad (1)$$

Поскольку трехчлен x^2-x+1 имеет комплексные корни, то $x^2-x+1>0$ при любом x. Если ввести обозначение $\sqrt{x^2-x+1}=z$, то неравенство (1) примет следующий вид:

$$2z^2-z-1>0.$$

Так как корнями левой части этого неравенства служат числа и 1 $-\frac{1}{2}$, то оно выполняется при $z<-\frac{1}{2}$ или при $z>1$. Но так так $\sqrt{x^2-x+1}>0$, т. е. $z>0$, то имеем лишь $z>1$. Итак,

$$\sqrt{x^2-x+1}>1,$$

или

$$x(x-1)>0.$$

Последнее неравенство имеет место, а вместе с ним и данное, при $x<0$ или при $x>1$.

Отв. $x<0$, $x>1$.

549. Поскольку правая часть неравенства положительна при любом значении x, то и левая часть положительна (т. е. $x>2$). При этих значениях x данное неравенство равносильно неравенству

$$(x-2)^2(x^2+1)>(x^2+2)^2,$$

которое после преобразований перепишется так:

$$4x^2 - x + 4 < 0.$$

Но так как корни левой части этого неравенства комплексные, то она положительна при любом (действительном) значении x, что противоречит неравенству $4x^2 - x + 4 < 0$.

Следовательно, данное неравенство не выполняется ни при каком значении x.

550. Правая часть решаемого неравенства определена, если $ax \geqslant 0$. Следовательно, a и x, если хотя бы одно из них отлично от нуля, имеют одинаковые знаки. Но так как $3\sqrt{ax} \geqslant 0$, то $x + 2a \geqslant 0$, а потому (учитывая, что $ax \geqslant 0$), имеем $x \geqslant 0$, $a \geqslant 0$.

Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим

$$x^2 + 4ax + 4a^2 \geqslant 9ax,$$

или

$$x^2 - 5ax + 4a^2 \geqslant 0.$$

Так как корнями левой части этого неравенства служат числа a и $4a$, то оно выполняется при

$$x \leqslant a \quad \text{или при} \quad x \geqslant 4a.$$

Но поскольку $x \geqslant 0$, то окончательно имеем

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{или} \quad x \geqslant 4a.$$

551. Левая часть неравенства определена, когда $x + 1 \geqslant 0$, $x - 2 \geqslant 0$, а правая — когда $2 - x \geqslant 0$, т. е. левая и правая части определены, если одновременно выполняется система соотношений $x \geqslant -1$, $x \geqslant 2$, $x \leqslant 2$. Но эта система имеет единственное решение $x = 2$. Таким образом, если данное неравенство имеет решение, то это лишь $x = 2$. Следовательно, остается проверить, является ли число 2 решением. Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ действительно удовлетворяет данному неравенству.

Отв. $x = 2$.

552. Левая часть данного неравенства определена, если $x - 1 \geqslant 0$, т. е.

$$x \geqslant 1. \qquad (1)$$

Если выполнено (1), то данное неравенство равносильно такому:

$$\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3 > \left(1 - \sqrt{x-1}\right)^3,$$

или

$$2 - x > \left(1 - \sqrt{x-1}\right)^3,$$

$$1 - (x-1) > \left(1 - \sqrt{x-1}\right)^3. \qquad (2)$$

Для удобства введем обозначение $z = \sqrt{x-1}$. При этом обозначении неравенство (2) перепишется так:

$$1 - z^2 > (1 - z)^3,$$

или

$$(1 - z)(1 + z - 1 + 2z - z^2) > 0,$$

$$z(z-1)(z-3) > 0.$$

Это неравенство выполняется для всех z из промежутков $0 < z < 1$, $z > 3$. Таким образом,

$$0 < \sqrt{x-1} < 1 \text{ или } \sqrt{x-1} > 3,$$

откуда следует, что данное неравенство выполняется для всех тех и только тех x, которые принадлежат промежуткам

$$1 < x < 2, \quad 10 < x.$$

553. Первое решение. Область определения левой части неравенства находим из системы $x+9 \geqslant 0$, $x+2 \geqslant 0$, откуда

$$x \geqslant -2. \qquad (1)$$

Если $x \geqslant -2$, то данное неравенство равносильно такому:

$$(\sqrt{x+9}+\sqrt{2(x+2)})^2 > 25,$$

или

$$2\sqrt{2x^2+22x+36} > 12-3x = 3(4-x). \qquad (2)$$

Если $4-x \leqslant 0$, т. е.

$$x \geqslant 4, \qquad (3)$$

то неравенство (2) выполнено. Если же

$$x < 4, \qquad (4)$$

то оно равносильно следующему неравенству:

$$4(2x^2+22x+36) > 9(16-8x+x^2),$$

или

$$x^2-160x<0,$$

$$x(x-160)<0,$$

откуда

$$0<x<160. \qquad (5)$$

В силу (1), (4) и (5) имеем

$$0<x<4. \qquad (6)$$

Из неравенств (3) и (6) следует, что все положительные числа (и только они) служат решениями данного неравенства.

Второе решение. При $x=0$

$$\sqrt{x+9}+\sqrt{2(x+2)}=\sqrt{9}+\sqrt{4}=5.$$

Так как $f(x)=\sqrt{x+9}+\sqrt{2(x+2)}$ — (монотонная) возрастающая функция, то при $x>0$ имеем $f(x)>5$, а при $x<0$ $f(x)<5$. Итак, $x>0$.

Отв. $x>0$.

554. Если $a=0$, то нет решений, так как тогда левая часть неравенства определена лишь при $x=0$, а 0 не является решением данного неравенства при $a=0$. Радикал $\sqrt{a^2-x^2}$ определен при $a^2 \geqslant x^2$, т. е. если

$$-|a| \leqslant x \leqslant |a|. \qquad (1)$$

Перепишем решаемое неравенство так:

$$2x > -\sqrt{a^2-x^2}.$$

Если $x \geqslant 0$, то это неравенство выполняется. Учитывая (1), имеем

$$0 \leqslant x \leqslant |a|. \qquad (2)$$

Теперь перепишем данное неравенство в следующем виде:

$$\sqrt{a^2-x^2} > -2x. \qquad (3)$$

Если $x<0$ $(-2x>0)$, то, возведя в квадрат обе части неравенства (3), получим $a^2-x^2>4x^2$, или $x^2<a^2/5$, откуда

$$\frac{-|a|}{\sqrt{5}}<x<\frac{|a|}{\sqrt{5}}.$$

Но так как $x < 0$, то имеем

$$-\frac{|a|}{\sqrt{5}} < x < 0. \tag{4}$$

Из (2) и (4) следует, что

$$-\frac{|a|}{\sqrt{5}} \leqslant x \leqslant |a|.$$

Отв. Если $a = 0$, то нет решения; если $a \neq 0$, то

$$-\frac{|a|}{\sqrt{5}} \leqslant x \leqslant |a|.$$

555. Из второго соотношения системы имеем $y = a - x$. Подставляя это значение y в неравенство, получим

$$2x^2 - (a - x)^2 \leqslant -a^2 + a - 2,$$

или

$$x^2 + 2ax - a + 2 \leqslant 0.$$

Последнее имеет единственное решение, когда дискриминант левой части равен нулю, т. е.

$$a^2 + a - 2 = 0,$$

откуда

$$a_1 = -2, \quad a_2 = 1.$$

Если $a = -2$, то $x = 2$, $y = -4$, а если $a = 1$, то $x = -1$, $y = 2$.

556. Перепишем данное неравенство так:

$$\frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} < 0,$$

или

$$(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) < 0.$$

Но так как $\sqrt{x} > 0$, то $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 1) > 0$, а потому

$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 3) < 0,$$

откуда следует, что

$$1 < \sqrt{x} < 3,$$

или

$$1 < x < 9.$$

557. Ясно, что должно быть $a \neq 1$. Перепишем данное неравенство так:

$$\frac{x + a - 1}{a - 1} < 1 - x,$$

или

$$\frac{x}{a - 1} + 1 < 1 - x,$$

т. е.

$$\frac{x}{a - 1} + x < 0,$$

или

$$x \cdot \frac{a}{a - 1} < 0.$$

Если $\frac{a}{a-1}<0$, т. е. $0<a<1$, то $x>0$, а если $\frac{a}{a-1}>0$, т. е. если $a<0$ или $a>1$, то $x<0$. При $a=0$ неравенство имеет вид $1-x<1-x$, что невозможно ни при каких x.

Отв. Если $a<0$ или $a>1$, то $x<0$; если $0<a<1$, то $x>0$; если $a=0$, то нет решений.

558. Из записи неравенства следует, что значение $x\neq -b$. Так как $(x+b)^2(x^2+b^2)>0$, то данное неравенство перепишется в виде

$$(x+b)^2(x^2+a^2)-(x+a)^2(x^2+b^2)>0,$$

или, после упрощений,

$$2x(b-a)(x^2-ab)>0. \qquad (1)$$

Если $ab>0$, то (1) можно переписать так:

$$2(b-a)x(x+\sqrt{ab})(x-\sqrt{ab})>0.$$

Теперь видно, что если $a<b$, то неравенство выполняется при $-\sqrt{ab}<x<0$ или при $x>\sqrt{ab}$, а если $a>b$, то оно удовлетворяется при $x<-\sqrt{ab}$ или при $0<x<\sqrt{ab}$.

Если $ab<0$, то множитель $x^2-ab>0$, а потому неравенство (1) выполняется при $x>0$, если $a<b$, и при $x<0$, если $a>b$.

Отв. $-\sqrt{ab}<x<0$ или $x>\sqrt{ab}$, если $ab>0$ и $a<b$; $0<x<\sqrt{ab}$ или $x<-\sqrt{ab}$, если $ab>0$ и $a>b$; $x>0$, если $ab<0$ и $a<b$; $x<0$, если $ab<0$ и $a>b$.

559. Первое решение. Данное неравенство перепишем последовательно так:

$$\frac{m(x+1)}{x-1}-1>0, \quad \frac{m(x+1)-(x-1)}{x-1}>0, \quad \frac{(m-1)x+m+1}{x-1}>0.$$

Если $a/b>0$, то и $ab>0$, а потому последнее неравенство равносильно такому:

$$(x-1)[(m-1)x+m+1]>0. \qquad (1)$$

Если $m=1$, то последнее неравенство принимает вид $2(x-1)>0$, откуда $x>1$. В дальнейшем будем считать, что $m\neq 1$. Перепишем неравенство (1) в следующем виде:

$$(m-1)(x-1)\left(x+\frac{m+1}{m-1}\right)>0. \qquad (2)$$

Для удобства обозначим $\frac{m+1}{m-1}$ через a. Тогда неравенство (2) примет вид

$$(m-1)(x-1)(x+a)>0.$$

Легко заметить, что если $m>1$, то и $a>1$ (и наоборот), а если $m<1$, то и $a<1$ (и наоборот). Пусть $m>1$. Тогда $(x-1)(x+a)>0$. В этом случае $x>1$ или $x<-a$. Если $m<1$, то $(x-1)(x+a)<0$.

В этом случае рассмотрим в отдельности подслучаи, когда $0<m<1$ и когда $m<0$.

а) Если $0<m<1$, то $-a>1$, а потому $1<x<\frac{1+m}{1-m}$.

б) Если $m<0$, то $-a<1$, а потому $\frac{1+m}{1-m}<x<1$.

Итак,

1) Если $m=1$, то $x>1$.

2) Если $m>1$, то $x<-\frac{m+1}{m-1}$ или $x>1$.

3) Если $0 < m < 1$, то $1 < x < \frac{1+m}{1-m}$.

4) Если $m < 0$, то $\frac{1+m}{1-m} < x < 1$.

Второе решение. Перепишем данное неравенство в следующем виде:

$$m\frac{x+1}{x-1} - m > 1 - m, \quad \text{или} \quad \frac{2m}{1-x} > 1 - m.$$

Как и в первом решении, если $m = 1$, то $x > 1$.

Если $m < 0$, то $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$. В этом случае решаемое неравенство перепишется так: $2m < (1-m)x - 1 + m$, или $(1-m)x > m+1$, откуда $x > \frac{1+m}{1-m}$. Таким образом, если $m < 0$, то $\frac{1+m}{1-m} < x < 1$.

Если $0 < m < 1$, то $x > 1$ и рассматриваемое неравенство примет вид $2m > (1-m)x - 1 + m$, или $(1-m)x < 1 + m$, откуда $x < \frac{1+m}{1-m}$. Итак, если $0 < m < 1$, то $1 < x < \frac{1+m}{1-m}$.

Если $m > 1$, то при $x > 1$ неравенство выполняется, а если $x < 1$, то неравенство принимает вид $2m < (1-m)x - 1 + m$, или $(1-m)x > 1 + m$, откуда $x < -\frac{m+1}{m-1}$. Итак, если $m > 1$, то $x > 1$ или $x < -\frac{m+1}{m-1}$.

560. Решаемое неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\left(x - \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\left(x - \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right) > 0.$$

Если $a > 2$ или $a < -2$, то имеем $x < \frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ или $x > \frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$. Если $a = -2$, то данное неравенство принимает вид $x^2 - 2x + 1 > 0$, или $(x-1)^2 > 0$. Таким образом, если $a = -2$, то x — любое число, кроме 1. Если $-2 < a < 2$, то корни левой части неравенства комплексные, а потому неравенство выполняется при любом значении x. Наконец, если $a = 2$, то данное неравенство таково: $(x+1)^2 > 0$, которое выполняется при любом значении x, кроме -1.

561. Если $a = 0$, то неравенство верно при всех x. В дальнейшем полагаем $a \neq 0$. Корни левой части неравенства действительны, если $a^2 + a \geqslant 0$, т. е. если $a \leqslant -1$ или $a > 0$. Поскольку нулями левой части неравенства являются числа $1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{a}}$, то при $a > 0$ имеем $1 - \sqrt{1+\frac{1}{a}} < x < 1 + \sqrt{1+\frac{1}{a}}$; при $a \leqslant -1$ неравенство выполняется, когда $x > 1 + \sqrt{1+\frac{1}{a}}$ или когда $x < 1 - \sqrt{1+\frac{1}{a}}$. Если же $-1 < a < 0$, т. е. дискриминант $D < 0$, то поскольку $a < 0$ и $ax^2 - 2ax - 1 < 0$, следовательно x — любое действительное число.

Отв. 1) Если $a \leqslant -1$, то $x > 1 + \sqrt{1+\frac{1}{a}}$ или $x < 1 - \sqrt{1+\frac{1}{a}}$. 2) Если $-1 < a \leqslant 0$, то x — любое действительное число. 3) Если $a > 0$, то $1 - \sqrt{1+\frac{1}{a}} < x < 1 + \sqrt{1+\frac{1}{a}}$.

562. Так как корни квадратного трехчлена $x^2 - x + 1$ комплексные, то $x^2 - x + 1 > 0$ при любом x, а потому данное неравенство перепишется в следующем виде: $-3x^2+3x-3<x^2+kx-2<2x^2-2x+2$. Таким образом, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-(k+2)x+4>0, \\ 4x^2+(k-3)x+1>0. \end{cases}$$

Для того чтобы каждое из неравенств этой системы выполнялось при любом x, необходимо и достаточно, чтобы дискриминанты их левых частей были отрицательны, т. е.

$$\begin{cases} (k+2)^2-16<0, \\ (k-3)^2-16<0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} |k+2|<4, \\ |k-3|<4, \end{cases} \qquad \begin{cases} -4<k+2<4, \\ -4<k-3<4, \end{cases} \qquad \begin{cases} -6<k<2, \\ -1<k<7, \end{cases}$$

откуда $-1<k<2$.

563. Поскольку число n не делится на квадрат натурального числа, то оно не может иметь в числе своих делителей точных квадратов. Так как число nx — точный квадрат, то любой делитель числа n может входить в состав числа x только в нечетной степени. Следовательно, собственные делители числа x должны входить в это число только в четной степени. Таким образом, можно положить, что $x=y^2n$. Следовательно, данное в условии неравенство перепишется в виде $m-\sqrt{n}<y\sqrt{n}\leqslant m$, или

$$\frac{m}{\sqrt{n}}-1<y\leqslant\frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Но $m\geqslant\sqrt{n}$, а потому $\frac{m}{\sqrt{n}}\geqslant 1$. Обозначим дробь $\frac{m}{\sqrt{n}}$ через $1+p$, где $p\geqslant 0$. Имеем $p<y\leqslant p+1$. Если p — целое число, то единственным целым числом, удовлетворяющим данному соотношению, явится само число $p+1$.

Если p не целое, то также существует только единственное целое число, удовлетворяющее данному соотношению. Из единственности числа y вытекает и единственность числа x, что и требовалось доказать.

564. Данное неравенство перепишем в виде $3^{2x}-4\cdot 3^x+3<0$. Введем обозначение $3^x=y$. Тогда решаемое неравенство примет вид

$$y^2-4y+3<0, \quad \text{или} \quad (y-3)(y-1)<0.$$

Следовательно, $1<y<3$, или, в силу нашего обозначения, $1<3^x<3$, или $3^0<3^x<3^1$. Так как показательная функция a^x при $a>1$ возрастающая, то имеем $0<x<1$.

565. Вначале заметим, что область определения $\sqrt{x}$ есть

$$x\geqslant 0. \tag{1}$$

Перепишем данное неравенство в виде

$$(4x^2-2x-6)-(2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}-x\cdot 3^{\sqrt{x}}-3^{\sqrt{x}+1})<0,$$

или

$$2(2x^2-x-3)-3^{\sqrt{x}}(2x^2-x-3)<0, \quad \text{или} \quad (2-3^{\sqrt{x}})(2x^2-x-3)<0.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$1)\ 2-3^{\sqrt{x}}>0,\ \ 2x^2-x-3<0, \quad 2)\ 2-3^{\sqrt{x}}<0,\ \ 2x^2-x-3>0.$$

Неравенство $2-3^{\sqrt{x}}>0$ перепишем так: $3^{\sqrt{x}}<2$. Логарифмируя обе части этого неравенства по основанию 3, получим $\sqrt{x}<\log_3 2$, откуда

$$x<\log_3^2 2. \tag{2}$$

Поскольку корнями функции $2x^2-x-3$ служат числа -1 и $3/2$, то из второго неравенства первой системы имеем

$$-1 < x < \frac{3}{2}. \tag{3}$$

Из неравенств (1), (2) и (3) следует, что $0 \leqslant x < \log_3^2 2$. Теперь решим вторую систему неравенств. Неравенство $2-3^{\sqrt{x}}<0$ выполняется при

$$x > \log_3^2 2, \tag{4}$$

а неравенство $2x^2 - x - 3 > 0$ — при

$$x > \frac{3}{2} \tag{5}$$

или при

$$x < -1. \tag{6}$$

Из неравенств (1), (4) и (5) следует, что $x > \frac{3}{2}$. Неравенства (1), (4), (6) несовместимы.

Итак, решениями данного неравенства служат все числа из промежутков $0 \leqslant x < \log_3^2 2$, $x > \frac{3}{2}$.

566. Перепишем данное неравенство в таком виде:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{[(x^3-1)^2]^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{|x^3-1|} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}.$$

Так как показательная функция с основанием 1/2 убывающая, то имеем

$$|x^3-1| > 1-x. \tag{1}$$

Рассмотрим отдельно два случая:

а) $x > 1$. В этом случае правая часть неравенства (1) отрицательна, и поскольку левая часть неотрицательна, то неравенство (1) выполняется при любом значении x (из промежутка $x > 1$).

б) $x \leqslant 1$. В этом случае $x^3 \leqslant 1$, а потому $|x^3-1| = 1-x^3$, и, следовательно, неравенство (1) перепишется в виде

$$1-x^3 > 1-x, \quad \text{т. е.} \quad x(x-1)(x+1) < 0, \text{ откуда } x < -1,\ 0 < x < 1.$$

Итак, данная система выполняется для всех тех и только тех значений x, которые принадлежат промежуткам $x < -1$, $0 < x < 1$, $x > 1$.

567. Перепишем данное неравенство так:

$$\frac{4^{1+\sqrt{x}} + 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}}{2^{x+\sqrt{x}}} \leqslant \frac{2^{2x}}{2^{x+\sqrt{x}}}, \quad \text{или} \quad 2^{2+\sqrt{x}-x} + 3 \leqslant 2^{x-\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{\sqrt{x}-x}}.$$

Пусть $2^{\sqrt{x}-x} = z > 0$. Тогда $4z+3 \leqslant 1/z$, или $4z^2+3z-1 \leqslant 0$, т. е.

$$(z+1)\left(z-\frac{1}{4}\right) \leqslant 0.$$

Но так как $z+1>0$, то должно быть $z \leqslant 1/4$. Итак, имеем

$$2^{\sqrt{x}-x} \leqslant \frac{1}{4} = 2^{-2},$$

откуда следует, что $\sqrt{x}-x \leqslant -2$, т. е. $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) \geqslant 0$. Но так как $\sqrt{x}+1>0$, то имеем $\sqrt{x} \geqslant 2$; $x \geqslant 4$.

568. Так как $4^x > 0$, то, поделив обе части решаемого неравенства на 4^x, получим равносильное ему неравенство

$$\frac{(4^x-1)^2}{4^x}+\frac{2^{x+1}}{2^x}\cdot\frac{4^x-1}{2^x}<8, \quad \text{или} \quad \left(\frac{4^x-1}{2^x}\right)^2+2\cdot\left(\frac{4^x-1}{2^x}\right)-8<0.$$

Пусть $\dfrac{4^x-1}{2^x}=y$. Тогда имеем $y^2+2y-8<0$, или $(y-2)(y+4)<0$. Следовательно, $-4<y<2$, т. е. $-4<\dfrac{4^x-1}{2^x}<2$, или $-4\cdot 2^x<2^{2x}-1<2\cdot 2^x$.

Левое неравенство перепишем так: $2^{2x}+4\cdot 2^x-1>0$, т. е. $2^x>\sqrt{5}-2$, откуда $x>\log_2(\sqrt{5}-2)$. Правое неравенство таково: $2^{2x}-2\cdot 2^x-1<0$, т. е. $2^x<1+\sqrt{2}$, откуда $x<\log_2(1+\sqrt{2})$. Таким образом, $\log_2(\sqrt{5}-2)<x<\log_2(1+\sqrt{2})$.

569. Сразу заметим, что $|x+1|\neq 1$. Если $0<|x+1|<1$, т. е. если $-2<x<-1$ или $-1<x<0$, то из данного неравенства следует, что $x^2-\dfrac{5x}{2}+\dfrac{3}{2}>0$. Так как числа 1 и $\dfrac{3}{2}$ служат корнями левой части последнего неравенства, то оно выполняется при $x<1$ или при $x>\dfrac{3}{2}$. Следовательно, в рассматриваемом случае решениями данного неравенства являются все числа из промежутков $-2<x<-1$ и $-1<x<0$.

Если же $|x+1|>1$, т. е. если $x>0$ или $x<-2$, то из решаемого неравенства вытекает, что $x^2-\dfrac{5x}{2}+\dfrac{3}{2}<0$, последнее неравенство выполняется лишь при $1<x<3/2$. Значит, в исследуемом случае данное неравенство верно при $1<x<3/2$.

Отв. $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $1<x<1{,}5$.

570. Вначале заметим, что должно быть $x>0$. Перепишем данное неравенство последовательно так: $x^2 2^{\sqrt{x}}-x^2-x2^{\sqrt{x}}+x-2^{1+\sqrt{x}}+2>0$, или $x^2(2^{\sqrt{x}}-1)-x(2^{\sqrt{x}}-1)-2(2^{\sqrt{x}}-1)>0$,

$$(2^{\sqrt{x}}-1)(x^2-x-2)>0. \qquad (1)$$

Так как $2^{\sqrt{x}}-1>0$ при любом $x>0$, то из (1) следует, что

$$x^2-x-2>0, \quad \text{или} \quad (x-2)(x+1)>0.$$

Последнее неравенство выполняется при $x>2$ или при $x<-1$. Но так как должно быть $x>0$, то данное неравенство выполняется лишь при $x>2$.

571. Ясно, что $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq\dfrac{1}{2}$, $x\neq\dfrac{1}{4}$. Так как $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, то данное неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{\log_2 x\cdot\log_2 2x}>\frac{1}{\log_2^2 4x}, \quad \log_2 x\cdot\log_2 2x<\log_2^2 4x,$$

$$\log_2 x(\log_2 2+\log_2 x)<(\log_2 4+\log_2 x)^2, \quad 3\log_2 x>-4, \quad \log_2 x>-\frac{4}{3},$$

откуда

$$x > 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}.$$

Отв. $x > \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$, исключая числа $\frac{1}{2}$ и 1.

572. Левая часть данного неравенства определена при $x > 0$. Перепишем решаемое неравенство в следующем виде:

$$\lg x + \frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{4}\lg x + \frac{1}{8}\lg x + \ldots > 1,$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)\lg x > 1. \qquad (1)$$

Так как сумма, заключенная в скобках, есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то (1) принимает вид

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\lg x > 1, \quad \text{или} \quad \lg x > \frac{1}{2},$$

откуда $x > \sqrt{10}$.

573. Сразу заметим, что левая часть неравенства определена, если $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$. Приведя все логарифмы к основанию 2, получим

$$\frac{\log_2 4x}{\log_2 x \cdot \log_2 2x} > 1, \quad \frac{2 + \log_2 x}{\log_2 x\,(1 + \log_2 x)} > 1, \quad \frac{2 + \log_2 x}{\log_2 x + \log_2^2 x} - 1 > 0,$$

$$\frac{\log_2^2 x - 2}{\log_2 x\,(\log_2 x + 1)} < 0, \quad (\log_2 x + \sqrt{2})(\log_2 x + 1)\log_2 x\,(\log_2 x - \sqrt{2}) < 0.$$

Очевидно (надо воспользоваться методом интервалов), что последнее неравенство выполняется, лишь когда

$$-\sqrt{2} < \log_2 x < -1 \text{ или } 0 < \log_2 x < \sqrt{2},$$

откуда $\frac{1}{2^{\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{2}$ или $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

574. Левая часть определена для всех x, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{25 - x^2}{16} > 1, \\ 24 - 2x - x^2 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < \frac{25 - x^2}{16} < 1, \\ 24 - 2x - x^2 > 0. \end{cases}$$

Первая система приводится к системе

$$\begin{cases} -3 < x < 3, \\ -6 < x < 4, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad -3 < x < 3.$$

Вторая система распадается на следующие системы:

$$\begin{cases} -5 < x < 5, \\ x < -3, \\ -6 < x < 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -5 < x < 5, \\ x > 3, \\ -6 < x < 4, \end{cases}$$

откуда получаем $-5 < x < -3$ или $3 < x < 4$. Итак, левая часть данного неравенства определена на трех интервалах:

$$-5<x<-3, \quad -3<x<3, \quad 3<x<4.$$

Если $-3<x<3$, то данное неравенство перепишется в следующем виде:

$$\frac{24-2x-x^2}{14} \geqslant \frac{25-x^2}{16},$$

откуда получаем $-17 \leqslant x \leqslant 1$. Решая это неравенство совместно с неравенством $-3<x<3$, находим $-3<x \leqslant 1$.

Если же $-5<x<-3$ или $3<x<4$, то решаемая система перепишется так: $(x+17)(x-1) \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 1$ или $x \leqslant -17$. Таким образом, в последнем случае имеем лишь $3<x<4$.

Отв. $-3<x \leqslant 1$, $3<x<4$.

575. Очевидно, что должно быть $\lg x>0$, т. е. $x>1$. Так как $\lg x>0$, то, поделив обе части данного неравенства на $\lg x$, получим равносильное ему неравенство

$$\frac{(\lg x+1)^2}{\lg x} < \frac{(\sqrt{\lg x}+1)^2}{\sqrt{\lg x}},$$

или

$$\left(\frac{\lg x+1}{\sqrt{\lg x}}\right)^2 < \frac{\lg x+2\sqrt{\lg x}+1}{\sqrt{\lg x}} = \frac{\lg x+1}{\sqrt{\lg x}}+2,$$

или

$$\left(\frac{\lg x+1}{\sqrt{\lg x}}\right)^2 - \frac{\lg x+1}{\sqrt{\lg x}} - 2 < 0.$$

Пусть $\dfrac{\lg x+1}{\sqrt{\lg x}}=y$. Тогда имеем $y^2-y-2<0$, откуда $-1<y<2$, т. е. $-1<\dfrac{\lg x+1}{\sqrt{\lg x}}<2$. Левое неравенство выполняется при любом $\lg x>0$. Правое неравенство переписывается так: $(\sqrt{\lg x}-1)^2<0$; как видим оно не выполняется ни при каком x.

Отв. Нет решений.

576. Ясно, что должно быть $x>0$, $x \neq 1$, $x \neq 1-a$. Данное неравенство перепишется в следующем виде:

$$\log_{x+a} 2 < 2\log_x 2. \qquad (1)$$

Так как $\log_m n = \dfrac{1}{\log_n m}$, то неравенство (1) можно переписать так:

$$\frac{1}{\log_2(x+a)} < \frac{2}{\log_2 x}, \qquad \frac{2}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(x+a)} > 0,$$

$$\frac{2\log_2(x+a)-\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2(x+a)} > 0, \qquad \frac{\log_2 \dfrac{(x+a)^2}{x}}{\log_2 x \cdot \log_2(x+a)} > 0.$$

Наконец, имеем $\log_2 x \cdot \log_2(x+a) \cdot \log_2 \dfrac{(x+a)^2}{x} > 0$.

Итак, произведение трех величин положительно, а потому возможны четыре случая.

Разберем каждый случай в отдельности.

1) $$\left\{\begin{array}{r} \log_2 x>0, \\ \log_2(x+a)>0, \\ \log_2 \dfrac{(x+a)^2}{x}>0, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{r} x>1, \\ x+a>1, \\ \dfrac{(x+a)^2}{x}>1. \end{array}\right.$$

Решим последнее неравенство системы, которое перепишем в виде

$$x^2+(2a-1)x+a^2>0. \qquad (2)$$

Корни левой части этого неравенства суть

$$\frac{1-2a\pm\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Поскольку $0<a<{}^1/_4$, то оба корня действительны, а потому неравенство (2) выполняется при

$$x<\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2} \quad \text{или при} \quad x>\frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Но так как правые части обоих неравенств меньше 1, то окончательно имеем $x>1$.

2)
$$\begin{cases} \log_2 x>0, \\ \log_2(x+a)<0, \\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x}<0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>1, \\ x+a<1, \\ \dfrac{(x+a)^2}{x}<1. \end{cases}$$

Так как первые два неравенства системы несовместимы, то в рассматриваемом случае данное неравенство не имеет решений.

3)
$$\begin{cases} \log_2 x<0, \\ \log_2(x+a)<0, \\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x}>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<1, \\ x+a<1, \\ \dfrac{(x+a)^2}{x}>1. \end{cases}$$

Решая эту систему и учитывая, что $x>0$, получаем

$$0<x<\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2}<x<1-a.$$

4)
$$\begin{cases} \log_2 x<0, \\ \log_2(x+a)>0, \\ \log_2\dfrac{(x+a)^2}{x}<0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<1, \\ x+a>1, \\ \dfrac{(x+a)^2}{x}<1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае нет решений, так как

$$x<\frac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2}<1-a<x.$$

Отв. $0<x<\dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2}$, $\dfrac{1-2a+\sqrt{1-4a}}{2}<x<1-a$, $x>1$.

577. Ясно, что должно быть $a>0$, $a\neq 1$, $x>a$. Так как $\log_{\frac{1}{a}}(x+a)=$ $=-\log_a(x+a)$, то данное неравенство перепишется в следующем виде:

$$\log_a(x-a)+\log_a(x+a)>0, \text{ или } \log_a(x^2-a^2)>0. \qquad (1)$$

Если $a>1$, то из (1) следует, что $x^2-a^2>1$, или $x^2>a^2+1$, и так как должно быть $x>0$, то $x>\sqrt{a^2+1}$.

Если же $0<a<1$, то из неравенства (1) получаем $x^2-a^2<1$, или $x^2<a^2+1$, и, учитывая, что $x>a$, получаем окончательно $a<x<\sqrt{a^2+1}$.

Отв. Если $0<a<1$, то $a<x<\sqrt{a^2+1}$, а если $a>1$, то $x>\sqrt{a^2+1}$.

578. Ясно, что должно быть $x>2$, $a>0$, $a\neq 1$. Данное неравенство перепишется в следующем виде: $\log_a x(x-2)>1$. Если $a>1$, то имеем $x(x-2)>a$, или

$$x^2-2x-a>0. \qquad (1)$$

Так как числа $1 \pm \sqrt{1+a}$ являются корнями неравенства (1), то это неравенство выполняется при $x < 1 - \sqrt{1+a}$ или при $x > 1 + \sqrt{1+a}$. Но так как $1 - \sqrt{1+a} < 0$, а должно быть $x > 2$, то в рассматриваемом случае получаем лишь $x > 1 + \sqrt{1+a}$.

Если же $0 < a < 1$, то из данного неравенства следует, что

$$x(x-2) < a, \quad \text{или} \quad x^2 - 2x - a < 0. \tag{2}$$

Неравенство (2) выполняется при $1 - \sqrt{1+a} < x < 1 + \sqrt{1+a}$. Но поскольку должно быть $x > 2$, то при $0 < a < 1$ имеем $2 < x < 1 + \sqrt{1+a}$.

Отв. Если $0 < a < 1$, то $2 < x < 1 + \sqrt{1+a}$, а если $a > 1$, то $x > 1 + \sqrt{1+a}$.

579. Данное неравенство перепишется в следующем виде:

$$0 \leqslant \log_2 \frac{3-2x}{1-x} < 1, \quad \text{или} \quad 1 \leqslant \frac{3-2x}{1-x} < 2.$$

Левое неравенство перепишем так: $\frac{3-2x}{1-x} - 1 \geqslant 0$, откуда получаем

$$x < 1 \quad \text{или} \quad x \geqslant 2. \tag{1}$$

Правое неравенство можно представить в таком виде: $\frac{3-2x}{1-x} - 2 < 0$, откуда находим

$$x > 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что данное неравенство выполняется лишь при $x \geqslant 2$.

580. Ясно, что $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$.

Если $a > 1$, то, логарифмируя обе части по основанию a, получаем

$$\log_a^2 x < 1, \quad \text{или} \quad -1 < \log_a x < 1,$$

откуда следует, что $1/a < x < a$. Но учитывая, что $x \neq 1$, имеем окончательно $1/a < x < 1$ или $1 < x < a$.

Если же $0 < a < 1$, то после логарифмирования обеих частей по основанию a получаем $\log_a^2 x > 1$, т. е. $\log_a x > 1$ или $\log_a x < -1$, откуда вытекает, что $x < a$ или $x > 1/a$. Но поскольку должно быть $x > 0$, то имеем $0 < x < a$ или $x > 1/a$.

Отв. Если $a > 1$, то $1/a < x < 1$ или $1 < x < a$, а если $0 < a < 1$, то $0 < x < a$ или $x > 1/a$.

581. Левая часть решаемого неравенства определена, если $\cos 2x > 0$ и $\cos^2 2x > \sin^2 x$. Так как $0 < \frac{\cos 2a}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то из данного неравенства следует, что $\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{2} \geqslant \frac{\cos^2 2x}{2}$, или $\sin^2 x \leqslant 0$; последнее выполняется лишь при $x = k\pi$ (имеет место только равенство). Легко проверить, что $x = k\pi$ действительно удовлетворяет данному неравенству. В самом деле, если $\sin x = 0$, то $\cos 2x = 1$. Подставляя в исходное уравнение $\sin x = 0$, $\cos 2x = 1$, получим верное неравенство (равенство).

Отв. $x = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

582. Перепишем данное неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^3 + 0{,}125) - \log_{\frac{1}{4}}(x + 0{,}5) > \log_{\frac{1}{4}} 0{,}25. \tag{1}$$

Вначале заметим, что должно быть $x > -0{,}5$. Из (1) следует, что

$$\frac{x^3 + 0{,}125}{x + 0{,}5} < \frac{1}{4},$$

или

$$x^2 - 0{,}5x + 0{,}25 < 0{,}25, \quad \text{или} \quad x^2 - 0{,}5x < 0,$$

откуда $0 < x < 0{,}5$. Так как полученное неравенство не противоречит неравенству $x > -0{,}5$, то все числа из интервала $(0;\ 0{,}5)$ служат решениями данного неравенства.

583. Так как $\log_{\frac{1}{n}} N = \dfrac{\log_n N}{\log_n \frac{1}{n}} = -\log_n N$ и $\log_m \dfrac{1}{M} = -\log_m M$,

то данное неравенство перепишется в виде $\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < -\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1}$,

или $2\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < 0$, т. е. $\log_2 \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} < 0$. Следовательно,

$$0 < \log_3 \frac{x+1}{x-1} < 1, \quad \text{откуда} \quad 1 < \frac{x+1}{x-1} < 3.$$

Левое неравенство выполняется при $x > 1$, а правое — либо при $x > 2$, либо при $x < 1$. Поскольку неравенства $x > 1$ и $x < 1$ несовместны, то решениями данного неравенства служат лишь все числа из промежутка $x > 2$.

584. Сразу отметим, что $x > 0$ и $x \neq 1$. Так как

$$\log_x 3 = \frac{\log_{\frac{1}{3}} 3}{\log_{\frac{1}{3}} x} = -\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x},$$

то решаемое неравенство перепишется в виде $\log_{\frac{1}{3}} x + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x} + \dfrac{5}{2} > 0$,

или $\dfrac{2\log^2_{\frac{1}{3}} x + 5\log_{\frac{1}{3}} x + 2}{\log_{\frac{1}{3}} x} > 0$, или $\log_{\frac{1}{3}} x\left(\log_{\frac{1}{3}} x + \dfrac{1}{2}\right)\left(\log_{\frac{1}{3}} x + 2\right) > 0$,

откуда $-2 < \log_{\frac{1}{3}} x < -\dfrac{1}{2}$ или $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$. Итак, $0 < x < 1$ или $\sqrt{3} < x < 9$.

585. Имеем $-2 \leqslant \lg \dfrac{n}{1967} \leqslant 2$, откуда

$$\frac{1}{100} \leqslant \frac{n}{1967} \leqslant 100, \quad \text{или} \quad 19{,}67 \leqslant n \leqslant 196\,700.$$

Согласно условию n делится на 7, т. е. $n = 7m$, где m — целое положительное число; поэтому

$$19{,}67 \leqslant 7m \leqslant 196\,700, \quad \text{или} \quad 2{,}81 \leqslant m \leqslant 28\,100, \ \text{т. е.} \ 3 \leqslant m \leqslant 28\,100.$$

Так как $n = 7m$, а 7 и 96 — взаимно простые числа, то для того, чтобы n было взаимно простым с 96, необходимо и достаточно, чтобы m и 96 были взаимно простыми.

На каждом из сегментов $[1, 6]$, $[7, 12]$, $[13, 18]$, ... имеется по 4 числа, не взаимно простых с 96, и 2 числа, взаимно простых с 96. Сегмент $[3, 28\,100]$ состоит из сегментов: $[3, 6]$, $[7, 12]$, $[13, 18]$, ..., $[28\,093, 28\,098]$, $[28\,099, 28\,100]$. Из них в первом и в последнем содержится только по одному числу, взаимно простому с 96, а в каждом из остальных 4682 сегментов содержится по 2 таких числа, а поэтому в сегменте $[3, 28\,100]$ содержится $2 + 4682 \cdot 2 = 9366$ чисел, каждое из которых взаимно просто с 96. Поэтому всех чисел, удовлетворяющих всем условиям задачи, имеется 9366, так как каждому значению m (а их, как найдено, 9366) соответствует, согласно формуле $n = 7m$, одно и только одно значение n.

Отв. 9366 чисел.

586. Из условия видно, что $\cos x \geqslant 0$, и так как $0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1$, то $0 \leqslant \log_5 x \leqslant 1$, поэтому $1 \leqslant x \leqslant 5$. На сегменте $[1, 5]$ $\cos x \geqslant 0$ только 1) при $1 \leqslant x \leqslant \pi/2$ и 2) при $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 5$. Сегмент $[1, \pi/2]$ составляет часть сегмента $[\pi/4, \pi/2]$, а сегмент $[3\pi/2, 5]$ — часть сегмента $[3\pi/2, 7\pi/4]$. В каждом из сегментов $[\pi/4, \pi/2]$ и $[3\pi/2, 7\pi/4]$ $|\sin x| \geqslant \cos x$, причем знак равенства имеет место лишь при $x = \pi/4$ и $x = 7\pi/4$. Но числа $\pi/4$ и $7\pi/4$ не принадлежат сегменту $[1, 5]$; поэтому $|\sin x| > \cos x$ при $1 \leqslant x \leqslant \pi/2$ и $3\pi/2 \leqslant x \leqslant 5$, что противоречит условию. Следовательно, задача не имеет решений.

587. Так как $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$, то данное неравенство можно переписать в виде $3(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) - 4 > 0$. Поскольку левая часть этого неравенства равна нулю при $\sin x + \cos x = -1$ или при $\sin x + \cos x = 4/3$, то имеем $\sin x + \cos x < -1$ или $\sin x + \cos x > 4/3$, т. е.

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -1 \quad \text{или} \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{4}{3}.$$

Итак,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

или

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{4}{3\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Из (1) следует, что

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \quad \text{откуда} \quad \pi + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Из (2) находим

$$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{4} < \pi - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2k\pi,$$

откуда

$$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2k\pi,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

588. Перепишем решаемое неравенство в следующем виде:

$$\frac{5}{4}\sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x > 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\frac{5}{4}\sin^2 x + \sin^2 x(1 - \sin^2 x) - 1 + 2\sin^2 x > 0,$$

$$4\sin^4 x - 17\sin^2 x + 4 < 0, \quad \left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)(\sin^2 x - 4) < 0,$$

из последнего неравенства вытекает, что $1/4 < \sin^2 x < 4$. Но так как $\sin^2 x \leqslant 1$, то имеем $\frac{1}{4} < \sin^2 x \leqslant 1$, или $\frac{1}{4} < \frac{1 - \cos 2x}{2} \leqslant 1$, или $-1 \leqslant \cos 2x < \frac{1}{2}$, откуда следует, что $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$.

Отв. $\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

589. Перепишем данное неравенство так:

$$\left|\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right| < \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \text{или} \quad \left|\frac{1}{\sin x \cos x}\right| < \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \text{или} \quad \frac{2}{|\sin 2x|} < \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$\text{или} \quad |\sin 2x| > \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ или } \sin^2 2x > \frac{3}{4}, \text{ или } \frac{1 - \cos 4x}{2} > \frac{3}{4},$$

откуда $\cos 4x < -\frac{1}{2}$. Таким образом, $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 4x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Следовательно,

$$\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}.$$

590. 1) Пусть $x^3-2x+1\neq 0$; тогда имеем

$$4\,|x^3-2x+1|\cdot|\sin x+2\cos x|\geqslant 9\,|x^3-2x+1|,$$

или

$$|\sin x+2\cos x|\geqslant 9/4. \qquad (1)$$

Но, как известно, $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$, а поэтому

$$|\sin x+2\cos x|\leqslant\sqrt{5}. \qquad (2)$$

Так как $\sqrt{5}<9/4$, то неравенства (1) и (2) несовместны; поэтому при $x^3-2x+1\neq 0$ данное неравенство не имеет решений.

2) Пусть $x^3-2x+1=0$; тогда, разложив x^3-2x+1 на множители, получим

$$x^3-2x+1=x^3-x-x+1=x(x^2-1)-(x-1)=(x-1)(x^2+x-1).$$

Поэтому $(x-1)(x^2+x-1)=0$, откуда $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. При $x=1$ и $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ данное в условии нестрогое неравенство обращается в равенство $0=0$.

Отв. $1; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

591. Поскольку обе части неравенства положительны, то оно равносильно такому неравенству:

$$2-\sqrt{3}\cos x+\sin x>1, \qquad -\sqrt{3}\cos x+\sin x>-1,$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x>-\frac{1}{2}, \qquad \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{1}{2},$$

откуда следует, что $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

Отв. $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$.

592. Имеем $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, то $-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$. Следовательно, знаменатель $2\sqrt{2}-(\sin x+\cos x)>0$.

Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству $3(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}>2\sqrt{2}-(\sin x+\cos x)$, или $4(\sin x+\cos x)>3\sqrt{2}$. Но так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, то имеем $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{3}{4}$, откуда $\arcsin\frac{3}{4}+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2k\pi$.

Отв. $-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{3}{4}+2k\pi<x<-\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{3}{4}+(2k+1)\pi$.

593. Пусть $a^{\sin x}=z$. Тогда данное неравенство таково:

$$\frac{1}{az-1}>\frac{1}{1-z}, \text{ или } \frac{2-z(1+a)}{(az-1)(1-z)}>0, \text{ т. е. } \frac{(1+a)\left(z-\frac{2}{1+a}\right)}{a(z-1)\left(z-\frac{1}{a}\right)}>0, \text{ или}$$

$$\left(z-\frac{2}{1+a}\right)(z-1)\left(z-\frac{1}{a}\right)>0. \tag{1}$$

Разберем случаи $0<a<1$ и $a>1$ в отдельности.

1) $0<a<1$. В этом случае ясно, что $1<\frac{2}{1+a}<\frac{1}{a}$, а потому неравенство (1) выполняется при $1<z<\frac{2}{1+a}$ или при $z>\frac{1}{a}$, т. е. $1<a^{\sin x}<\frac{2}{1+a}$ или $a^{\sin x}>\frac{1}{a}=a^{-1}$. Второе неравенство не выполняется ни при каком x, так как $|\sin x|\leqslant 1$, а из этого неравенства следует, что $\sin x<-1$. Поскольку мы рассматриваем случай $0<a<1$, то из первого (двойного) неравенства следует, что $\log_a\frac{2}{1+a}<\sin x<0$. Таким образом, имеем $2k\pi+\arcsin\log_a\frac{2}{1+a}<x_1<2k\pi$, $2k\pi+\pi<x_2<2k\pi+\pi-\arcsin\log_a\frac{2}{1+a}$.

2) $a>1$. В этом случае $\frac{1}{a}<\frac{2}{1+a}<1$, а потому из (1) следует, что

$\frac{1}{a}<z<\frac{2}{1+a}$ или $z>1$, следовательно, $\frac{1}{a}<a^{\sin x}<\frac{2}{1+a}$ или $a^{\sin x}>1$,

т. е. $-1=\log_a\frac{1}{a}<\sin x<\log_a\frac{2}{1+a}<0$ или $\sin x>0$. Итак,

$$2k\pi-\pi-\arcsin\log_a\frac{2}{1+a}<x_3<2k\pi+\arcsin\log_a\frac{2}{1+a},$$

кроме $x_3=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$$2k\pi<x_4<2k\pi+\pi.$$

594. Перепишем данное неравенство в следующем виде:

$$4^{\sin^2\pi x}+3\cdot 4^{1-\sin^2\pi x}\leqslant 8. \tag{1}$$

Для удобства введем обозначение $4^{\sin^2\pi x}=z>0$. Тогда неравенство (1) примет вид $z+3\cdot\frac{4}{z}\leqslant 8$. Но так как $z>0$, то имеем $z^2-8z+12\leqslant 0$. Поскольку корнями левой части этого неравенства служат числа 2 и 6, то решениями являются все числа из промежутка $2\leqslant z\leqslant 6$, т. е. (в силу нашего обозначения) $2\leqslant 4^{\sin^2\pi x}\leqslant 6$. Так как $0\leqslant\sin^2\pi x\leqslant 1$, то правое неравенство выполняется при любых действительных x. Остается решить левое неравенство, которое перепишем так: $4^{\frac{1}{2}}\leqslant 4^{\sin^2\pi x}$. Так как показательная функция с основанием, большим единицы, возрастающая, то

$$\frac{1}{2}\leqslant\sin^2\pi x, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\leqslant\frac{1-\cos 2\pi x}{2}, \quad \text{т. е. } \cos 2\pi x\leqslant 0,$$

откуда следует, что $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2\pi x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, т. е.

$$\frac{1}{4}+k\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}+k,\ \text{где } k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

595. Так как $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$, то решаемое неравенство перепишется в следующем виде:

$$\arcsin x>\frac{\pi}{2}-\arcsin x,\quad \text{или}\quad \arcsin x>\frac{\pi}{4},$$

откуда следует, что $x>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но так как $|x|\leqslant 1$, то окончательно имеем $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 1$.

596. Так как $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$, то

$$x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}, \tag{1}$$

и так как $|\sin\alpha|\leqslant 1$, то должно быть

$$-1\leqslant x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\leqslant 1. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$-1\leqslant x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}. \tag{3}$$

Левое неравенство (3) перепишется в виде $2x^2-x-1\geqslant 0$, оно выполняется при $x\geqslant 1$ или при $x\leqslant -{}^1/_2$.

Правое неравенство (3) перепишем так: $2x^2-x-2<0$, это неравенство справедливо при

$$\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

Таким образом, задача свелась к решению двух систем:

$$\begin{cases}\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4},\\ x\geqslant 1\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4},\\ x\leqslant -\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Из первой системы находим $1\leqslant x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$, а из второй получаем $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x\leqslant -\frac{1}{2}$.

597. Данную систему можно переписать так:

$$\begin{cases}(a-1)\,x>2a-3,\\ (a+4)\,x>4a+1.\end{cases}$$

Если $a=1$, то система принимает вид $0>-1$, $5x>5$, откуда $x>1$. Если $a=-4$, то $x<11/5$. В дальнейшем будем считать, что $a\neq 1$, $a\neq -4$.

Если $a>1$, то имеем

$$\begin{cases} x>\dfrac{2a-3}{a-1}, \\ x>\dfrac{4a+1}{a+4}. \end{cases}$$

Рассмотрим разность

$$\frac{4a+1}{a+4}-\frac{2a-3}{a-1}=\frac{2a^2-8a+11}{(a+4)(a-1)}.$$

Так как корни числителя комплексные, то он положителен при любом значении a. Знаменатель также положителен, поскольку $a>1$. Итак, если $a>1$, то $x>\dfrac{4a+1}{a+4}$.

Если $a<-4$, то получаем $x<\dfrac{2a-3}{a-1}$. Наконец, если $-4<a<1$, то имеем $\dfrac{4a+1}{a+4}<x<\dfrac{2a-3}{a-1}$.

598. Из второго неравенства системы следует, что $4x^2-12x+9\leqslant 9$, или $x(x-3)\leqslant 0$, откуда (учитывая, что $x\neq 0$) получаем $0<x\leqslant 3$. Учитывая последнее неравенство, третье неравенство данной системы можно переписать так: $x>1$. Поэтому в первом неравенстве системы $3x-1>0$, а потому и $x-2>0$, т. е. $x>2$. Кроме того, из первого неравенства имеем $\dfrac{3x-1}{x-2}>4$, т. е. $3x-1>4x-8$, $7>x$.

Отв. $2<x\leqslant 3$.

§ 12. Комплексные числа

599. Пусть $z=x+iy$. Тогда данное уравнение перепишется в следующем виде: $|x+(1+y)i|=|(x+2)+yi|$, или $x^2+(1+y)^2=(x+2)^2+y^2$, $x^2+1+2y+y^2=x^2+4x+4+y^2$, т. е. $2y=4x+3$.

Отв. Прямая $y=2x+\dfrac{3}{2}$.

600. Число $|z+i|=|z-(-i)|$ равно расстоянию между искомой точкой z и точкой $(-i)$. Согласно условию это расстояние не меньше 3 и не больше 5. Поэтому заданному условию $3\leqslant|z+i|\leqslant 5$ удовлетворяют все те и только те точки, которые лежат внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями с центром в точке $(0;\ -1)$ и радиусами $R_1=3$ и $R_2=5$, причем в это множество входят и все точки обеих окружностей.

601. Число $|z-3|$ равно расстоянию между искомой точкой и точкой, изображающей число 3. Из условия видно, что это расстояние равно 5. Поэтому заданному условию $|z-3|=5$ удовлетворяют все те и только те точки, которые лежат на окружности радиуса 5 с центром в точке $(3;\ 0)$.

602. Точки, удовлетворяющие условию $|z|=2$, лежат на окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Точки, для которых $|z|>2$, лежат вне этой окружности; точки, для которых $|z|<5$, лежат внутри окружности радиуса 5 с центром в начале координат. Поэтому условию $2\leqslant|z|<5$ удовлетворяют все те и только те точки, которые расположены внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами $R_1=2$ и $R_2=5$, причем множество этих точек содержит все точки окружности $R_1=2$, но не содержит точек окружности $R_2=5$.

603. Если $z=x+yi$, то $\operatorname{Im}(z)=y$, а поэтому, согласно условию,

$$y\leqslant 3.$$

Все искомые точки расположены в нижней полуплоскости, ограниченной прямой, перпендикулярной к мнимой оси и проходящей через точку (0; 3), и на самой этой прямой. Любая точка этой плоскости, включая точки указанной прямой, изображает комплексное число z, для которого $\operatorname{Im}(z)\leqslant 3$.

604. Если $z=x+yi$, то $\operatorname{Re}(z)=x$, а поэтому, согласно условию, $x\geqslant 2$. Все искомые точки находятся в правой полуплоскости, ограниченной прямой, перпендикулярной к действительной оси и проходящей через точку (2; 0), и на самой этой прямой. Любая точка этой полуплоскости, включая точки указанной прямой, изображает комплексное число z, для которого $\operatorname{Re}(z)\geqslant 2$.

605. Известно, что $|z-z_0|$ — расстояние между точками z и z_0.

а) Так как $|z-z_0|<R$, то все точки z расположены внутри круга радиуса R с центром в точке z_0; обратно, любая точка z, лежащая внутри этого круга, удовлетворяет условию $|z-z_0|<R$. Точки окружности этого круга условию $|z-z_0|<R$ не удовлетворяют.

б) По аналогии получим, что все точки z, расположенные вне круга радиуса R с центром в точке z_0, и только эти точки удовлетворяют условию $|z-z_0|>R$.

в) Условию $|z-z_0|=R$ удовлетворяют все точки окружности радиуса R с центром в точке z_0 и только эти точки.

606. Модуль $|z-z_1|$ есть расстояние от точек z до фиксированной точки z_1; модуль $|z-z_2|$ есть расстояние от точек z до фиксированной точки z_2. По условию эти расстояния одинаковы. Поэтому все множество точек z есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящая через середину этого отрезка.

607. Из условия видно, что искомое множество состоит из всех таких точек, сумма расстояний каждой из которых от двух точек A (−2; 0) и B (2; 0) равна 5. Все такие точки образуют эллипс (линию) с фокусами A и B и большой осью, равной 5.

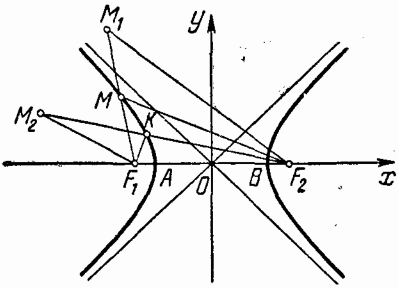

Рис. 4.

608. Рассмотрим уравнение $|z-2|-|z+2|=3$. Этому уравнению удовлетворяют все точки левой ветви гиперболы (рис. 4) с фокусами $z=\pm 2$ (точки F_1 и F_2) и действительной осью, равной 3. В полуплоскости, расположенной справа от мнимой оси, $|z-2|-|z+2|<0$, а поэтому все искомые точки z лежат слева от мнимой оси. Пусть M_1 — точка, лежащая во внешней области ветви гиперболы, расположенной в полуплоскости слева от мнимой оси. Построим отрезки M_1F_1 и M_1F_2; пусть M — точка пересечения M_1F_1 с гиперболой. Из рис. 4 получим

$$M_1F_2-M_1F_1<(M_1M+MF_2)-(M_1M+MF_1),$$

т. е.

$$M_1F_2-M_1F_1<MF_2-MF_1=3,$$

или $M_1F_2-M_1F_1<3$. Пусть M_2 — точка, лежащая во внутренней области левой ветви гиперболы. Построим отрезки M_2F_1 и M_2F_2; K — точка пересечения M_2F_2 с левой ветвью гиперболы. Из рисунка усматриваем, что

$$M_2F_2-M_2F_1>(M_2K+KF_2)-(M_2K+KF_1)=KF_2-KF_1=3,$$

т. е. $M_2F_2-M_2F_1>3$. Точка M_2 — одна из искомых точек.

Отв. Внутренняя область левой ветви гиперболы с фокусами в точках $z=\pm 2$ и действительной осью 3.

609. 1) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + yi) = x$; поэтому, согласно условию,

$$x \geqslant C. \qquad (1)$$

Условию (1) удовлетворяют все те и только те точки плоскости, которые расположены на прямой $x = C$ и справа от этой прямой.

2) $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + yi) = y$; поэтому, согласно условию,

$$y < C. \qquad (2)$$

Условию (2) удовлетворяют все те и только те точки плоскости, которые расположены ниже прямой $y = C$.

Отв. 1) Прямая $x = C$ и полуплоскость, расположенная справа от этой прямой. 2) Полуплоскость, расположенная ниже прямой $y = C$.

610. Так как $z = x + yi$, то $iz = -y + xi$. Поэтому $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(-y + xi) = -y$. Согласно условию имеем $0 < -y < 1$, или

$$-1 < y < 0. \qquad (1)$$

Условию (1) удовлетворяют все те и только те точки, которые лежат в полосе, ограниченной прямыми $y = -1$ и $y = 0$. Точки, лежащие на этих прямых, условию (1) не удовлетворяют.

Отв. Полоса $-1 < y < 0$.

611. 1) Из условия следует, что вектор точки z образует с положительной частью действительной оси угол φ, удовлетворяющий неравенству $\alpha < \varphi < \beta$, где $\varphi = \arg z$. Поэтому все точки z образуют внутреннюю область угла с вершиной в начале координат и сторонами, составляющими с положительной частью действительной оси углы α и β. Если α и β имеют одинаковые знаки, то ни одна из частей действительной оси не расположена внутри этого угла; если же $\alpha < 0$, $\beta > 0$, то положительная часть действительной оси расположена внутри указанного угла.

2) Если принять точку z_0 за начало новой системы координат, сохранив прежние направления обеих осей, то $z = z' + z_0$, где z' — число в новой системе координат, соответствующее числу z в начальной системе координат. Поэтому $z' = z - z_0$ и, согласно условию, $\alpha < \arg z' < \beta$. На основании результата решения задачи 1) находим, что все точки z расположены внутри угла с вершиной z_0 и сторонами, образующими с положительной частью действительной оси (новой) углы α и β. Положение частей той оси аналогично положению частей действительной оси в задаче 1).

612. Имеем $z = x + yi$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Re} z = x$. Поэтому $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$, или $x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1$, или

$$y^2 = 2x + 1. \qquad (1)$$

Равенство (1) — уравнение параболы с вершиной $z = -\dfrac{1}{2}$ и осью, составляющей часть действительной оси справа от вершины.

613. Имеем $z = x + yi$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$; поэтому, согласно условию, $x + y < 1$, или $y < 1 - x$. Все искомые точки составляют множество всех точек полуплоскости, ограниченной прямой $y = 1 - x$ и содержащей начало координат. Точки этой прямой к искомому множеству точек не относятся.

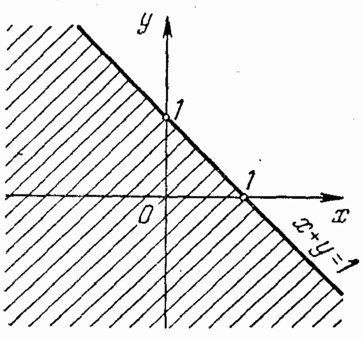

Рис. 5.

На рис. 5 указанная полуплоскость заштрихована.

614. Из условия следует, что

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = k,$$

где k — действительное число и $z \neq z_2$.

Если $k=0$, то $z=z_1$.

Если же $k \neq 0$, то $z-z_1=k(z-z_2)$. Считая последнее равенство равенством векторов, приходим к выводу, что векторы $(z-z_1)$ и $(z-z_2)$ лежат на одной прямой; поэтому точки z, z_1, z_2 лежат на одной прямой. Учитывая, что $z \neq z_2$, находим, что множеством всех точек z служит прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, из которой исключена точка z_2.

615. Первое решение. Пусть $z=x+yi$, $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$. Тогда

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{(x-x_1)+(y-y_1)i}{(x-x_2)+(y-y_2)i}=$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}+\frac{(x-x_2)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\,i.$$

Из условия следует, что $z \neq z_2$ и

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0,$$

или

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0,$$

или

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Но

$$\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2=\left[\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}{2}\right]^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

где d — расстояние между точками z_1 и z_2. Пусть $\frac{x_1+x_2}{2}=a$, $\frac{y_1+y_2}{2}=b$; тогда точка $z_0=a+bi$ — середина отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2. Уравнение (1) можно записать так: $(x-a)^2+(y-b)^2=(d/2)^2$ — уравнение окружности с центром $z_0=a+bi$ и радиусом $d/2$. Учитывая, что $z \neq z_2$, получим искомое множество точек z — окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2; точка z_2 из этой окружности исключена.

Второе решение. Пусть $\frac{z-z_1}{z-z_2}=ki$, т. е. $z-z_1=ki(z-z_2)$, причем $z \neq z_2$. Значит, $\arg(z-z_1)=\arg(z-z_2)\pm\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{так как } \arg ki=\pm\frac{\pi}{2}\right)$, т. е. вектор $z-z_1$ перпендикулярен к вектору $z-z_2$. Следовательно, искомое множество точек z — окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2; точка z_2 из этой окружности исключена. (Точка $z=z_1$ не исключается, так как соответствует значению $k=0$.)

616. Пусть $z=x+yi$. Тогда данное неравенство перепишется в следующем виде:

$$|(x-1)+yi|>|x+(y-1)i|, \text{ или } (x-1)^2+y^2>x^2+(y-1)^2,$$

откуда получаем $y>x$.

Отв. Все точки плоскости, расположенные выше биссектрисы первого и третьего координатных углов.

617. Имеем $0<\frac{|z|^2-|z|+1}{|z|+2}<3$. Так как $|z|+2>0$, то

$$0<|z|^2-|z|+1<3|z|+6.$$

Неравенство $|z|^2-|z|+1>0$ выполняется при всех $|z|$.

Неравенство $|z|^2-|z|+1<3|z|+6$ равносильно неравенству $|z|^2-4|z|-5<0$, откуда, учитывая, что $|z| \geqslant 0$, имеем $0 \leqslant |z|<5$. Поэтому все точки, изображающие комплексные числа z, удовлетворяющие условию

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{|z|^2-|z|+1}{2+|z|}<2,$$

расположены внутри окружности радиуса 5 с центром в начале координат; точки этой окружности не входят в указанное множество.

Отв. Все те и только те точки, которые лежат внутри окружности (но не на самой окружности) радиуса 5 с центром в начале координат.

618. Имеем $z=x+yi$,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}, \quad \operatorname{Re}\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Поэтому, согласно условию,

$$\frac{x}{x^2+y^2}=c.$$

1) Если $c\neq 0$, то $x^2+y^2=\frac{x}{c}$, или

$$\left(x-\frac{1}{2c}\right)^2+y^2=\frac{1}{4c^2}. \tag{1}$$

Равенство (1) — уравнение семейства окружностей с центрами $\left(\frac{1}{2c};\ 0\right)$ и радиусами, равными $\frac{1}{2c}$, где c — параметр. Все эти окружности касаются мнимой оси в начале координат.

2) Если же $c=0$, то из равенства $\frac{x}{x^2+y^2}=c$ следует, что $x=0$, т. е. искомые точки лежат на мнимой оси.

Учитывая, что $z\neq 0$, получим ответ: искомое множество есть семейство всех окружностей, касающихся мнимой оси в начале координат, и сама мнимая ось; начало координат из этого множества исключается.

619. Если $z=x+yi$, то

$$\frac{1}{z}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}, \quad \operatorname{Im}\frac{1}{z}=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

поэтому, согласно условию,

$$-\frac{y}{x^2+y^2}=c. \tag{1}$$

1) Если $c\neq 0$, то $x^2+y^2=-\frac{y}{c}$, или $x^2+\left(y+\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{4c^2}$ — уравнение семейства окружностей с центрами $\left(0;\ -\frac{1}{2c}\right)$ и радиусами, равными $\frac{1}{2c}$, где c — параметр. Все эти окружности касаются действительной оси в начале координат.

2) Если же $c=0$, то из равенства (1) следует, что $y=0$, т. е. искомые точки лежат на действительной оси.

Учитывая, что $z\neq 0$, получим ответ: искомое множество есть семейство всех окружностей, касающихся действительной оси в начале координат, и сама действительная ось; начало координат из этого множества исключается.

620. Имеем $z=x+yi$, тогда $z^2=x^2-y^2+2xyi$, $\operatorname{Re} z^2=x^2-y^2$; поэтому, согласно условию,

$$x^2-y^2=c.$$

1) Если $c\neq 0$, то $x^2-y^2=c$ — уравнение семейства равносторонних гипербол. При $c>0$ каноническое уравнение семейства будет

$$\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{c})^2}=1;$$

при $c<0$ каноническое уравнение семейства будет

$$\frac{y^2}{(\sqrt{-c})^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{-c})^2}=1.$$

2) Если $c=0$, то $x^2-y^2=0$, или $y=\pm x$ — уравнение двух прямых.

Отв. 1) При $c\neq 0$ искомое множество — семейство гипербол $x^2-y^2=c$. 2) При $c=0$ искомое множество состоит из двух прямых: $y=x$ и $y=-x$.

621. Имеем $z=x+yi$, тогда $z^2=x^2-y^2+2xyi$, $\operatorname{Im} z^2=2xy$; поэтому, согласно условию,

$$2xy=c.$$

1) Если $c\neq 0$, то

$$y=\frac{c}{2x}$$

— уравнение семейства равносторонних гипербол.

2) Если $c=0$, то из уравнения $2xy=c$ следует:

а) $x=0$ — уравнение мнимой оси;

б) $y=0$ — уравнение действительной оси.

Отв. При $c\neq 0$ искомое множество — семейство гипербол $y=\frac{c}{2x}$; при $c=0$ искомое множество — действительная и мнимая оси.

622. Пусть точка z лежит на дуге PLQ (рис. 6, *а*); докажем, что соответствующая ей точка $z'=\frac{z-a}{z-b}$ лежит на луче $P'L'$ (рис. 6, *б*). Для построения вектора z' надо знать длину этого вектора ($|z'|$) и угол наклона к

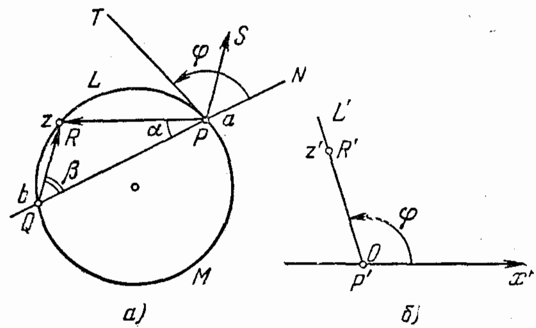

Рис. 6.

положительной части действительной оси ($\arg z'$). Числа $(z-a)$ и $(z-b)$ изображаются векторами PR и QR, поэтому

$$|z'|=\frac{|z-a|}{|z-b|}, \text{ а } \arg z'=\angle SPR,$$

где PS — вектор, равный вектору QR (аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя; $\angle SPR=\arg(z-a)-\arg(z-b)$). Но $\angle SPR=\angle QRP$, $\angle QRP=\angle NPT$ (измеряются половиной дуги QMP; PT — касательная). Следовательно, $\arg z' = \angle SPR=\angle QRP=\angle NPT=\varphi$. Итак, при любом положении точек z на дуге PLQ соответствующие точки z' имеют один и тот же аргумент φ, а поэтому все эти точки лежат на луче $P'L'$ (рис. 6, *б*).

Вывод остается в силе и тогда, когда PLQ не дуга окружности, а прямолинейный отрезок PQ. Тогда $\varphi=180°$ и луч $P'L'$ совпадает с отрицательной частью действительной оси (рис. 7, *а*, *б*).

Из рисунка видно, что если z лежит на отрезке PQ, то векторы, изображающие числа $(z-a)$ и $(z-b)$, имеют противоположные направления; поэтому частное $z'=\frac{z-a}{z-b}$ есть действительное отрицательное число, т. е. z' лежит на отрицательной части действительной оси.

Если $z' = f(z)$ $\left(\text{в данной задаче } f(z) = \frac{z-a}{z-b}\right)$, то точка z' называется *образом* (*отображением*) точки z.

В данной задаче образами точек z дуги PLQ служат точки луча $P'L'$.

Дополнение. Докажем, что любая точка луча $P'L'$ есть образ одной и только одной точки дуги PLQ.

Точка P' есть образ точки P, так как $z' = \frac{z-a}{z-b}$ обращается в нуль при $z = a$.

Пусть z' — произвольная точка луча $P'L'$, отличная от точки P' (т. е. $z' \neq 0$). Видно, что z' не может быть действительным положительным

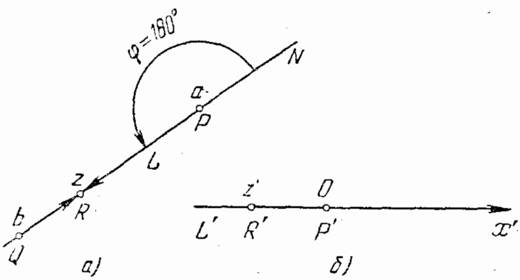

Рис. 7.

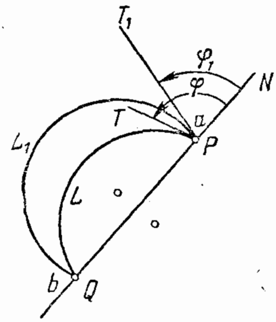

Рис. 8.

числом, так как луч $P'L'$ не совпадает с положительной частью действительной оси (рис. 6 и 7).

Решая уравнение $z' = \frac{z-a}{z-b}$ относительно z, получим

$$z = \frac{z'b - a}{z' - 1}.$$

Итак, для каждой точки луча $P'L'$ существует одно и только одно значение z такое, что $z' = \frac{z-a}{z-b}$. Остается доказать, что точка z лежит на дуге PLQ (или на отрезке PQ, если $\varphi = 180°$). Точка z не может лежать на той части прямой PQ, которая не содержит ни одной точки отрезка PQ, так как в противном случае числа $(z-a)$ и $(z-b)$ имели бы одинаковые аргументы и $z' = \frac{z-a}{z-b}$ было бы положительным числом. Если же z не лежит на указанной части прямой PQ (вне отрезка PQ), то можно провести дугу окружности через точки P, Q и z (если z лежит на отрезке PQ, то вместо дуги следует взять этот отрезок). Пусть это будет дуга PL_1Q (рис. 8). Положим, что дуга PL_1Q отлична от дуги PLQ; тогда касательные к дугам PL_1Q и PLQ в точке P образуют с направлением baN углы φ_1 и φ, причем $\varphi_1 \neq \varphi$.

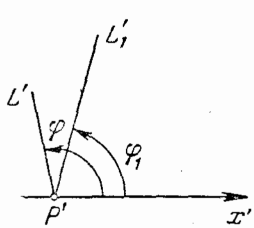

Рис. 9.

Поэтому значение $z' = \frac{z-a}{z-b}$ для точки z, лежащей на дуге PL_1Q, должно изображаться точкой луча $P'L_1'$, наклоненного к положительной части действительной оси под углом φ_1, а поэтому не совпадающего с $P'L'$ (рис. 9). Таким образом, получилось противоречие: точка z', отличная от точки P', должна находиться и на луче $P'L'$ и на луче $P'L_1'$. Поэтому каждая точка z', лежащая на луче $P'L'$, является образом единственной точки z, лежащей на дуге PLQ (в частности, на отрезке PQ), где

$$z' = \frac{z-a}{z-b}.$$

623. Пусть данные точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности (рис. 10) (или на одной прямой). Если

$$z' = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}, \quad z'' = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

то, согласно решению задачи 622, точки z' и z'' лежат на одном луче, выходящем из начала координат и образующем с положительной полуосью

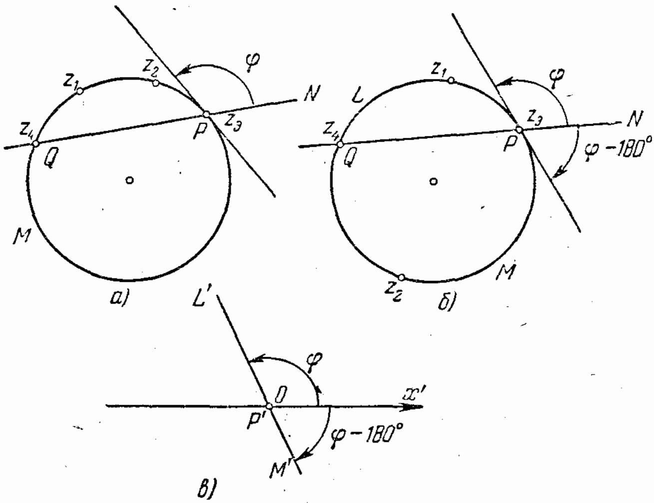

Рис. 10.

угол φ (при расположении точек, указанном на рис. 10, *а*). Тогда отношение $z' : z''$ есть некоторое действительное положительное число.

Если же точки расположены, как указано на рис. 10, *б*), то z' лежит на луче OL', а z'' — на луче $P'M'$. Эти лучи — части одной прямой; поэтому отношение $z' : z''$ есть действительное отрицательное число.

Таким образом, если точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности (или на одной прямой), то отношение

$$z' : z'' = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} \tag{1}$$

есть действительное число.

Поэтому условие (1) $\left(\text{учитывая, что } \operatorname{Im} \dfrac{z'}{z''} = 0\right)$ будет необходимым условием расположения четырех различных точек на одной окружности (или на одной прямой). Но это условие (1) является и достаточным; это (на основании дополнения к задаче 622) следует из того факта, что при условии (1) точки z' и z'' лежат на одной прямой, а поэтому дуги окружностей, проходящих через тройки точек (z_1, z_3, z_4) и (z_2, z_3, z_4) с концами в точках z_3 и z_4, должны совпадать, если $z' : z'' > 0$, или быть частями одной окружности, если $z' : z'' < 0$.

Отв. Отношение $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ должно быть действительным числом. (Условие необходимое и достаточное.)

624. Так как $z=x+iy$, то имеем

$$z^2+z+1=(x+yi)^2+(x+yi)+1=x^2-y^2+x+1+(2x+1)\,yi. \quad (1)$$

Поскольку z^2+z+1 — положительное действительное число, то из (1) следуют соотношения

$$(2x+1)\,y=0, \quad (2)$$

$$x^2-y^2+x+1>0. \quad (3)$$

Из равенства (2) следует, что или $y=0$, или $x=-{}^1/_2$.

Если $y=0$, то неравенство (3) принимает вид $x^2+x+1>0$, которое выполняется при любом действительном x, так как x^2+x+1 имеет мнимые корни. Если $x=-{}^1/_2$, то неравенство (3) принимает вид $y^2<3/4$, откуда $-\frac{\sqrt{3}}{2}<y<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Итак, неравенство $z^2+z+1>0$ выполняется лишь тогда, когда точка M (с координатами x и y) есть или любая точка оси Ox (так как $y=0$), или любая точка отрезка, концами которого являются точки $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; сами концы отрезка не принадлежат множеству M.

625. Имеем

$$A=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi+1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}=\frac{(1+\cos\varphi)+i\sin\varphi}{-(1-\cos\varphi)+i\sin\varphi}=$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Так как $\varphi\neq k\pi$, то $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$, а потому число A можем переписать в таком виде:

$$A=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}{-\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{-i\left(-\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\right)}{-\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}}=-i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Отсюда следует, что модуль числа A

$$|A|=\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Если $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>0$, т. е. если $2k\pi<\varphi<(2k+1)\,\pi$, где k — любое целое, то $A=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Следовательно, в этом случае аргумент числа A

$$\arg A=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где k — любое целое число.

Если же $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}<0$, т. е. если $(2k-1)\pi<\varphi<2k\pi$, где k — произвольное целое число, то $A=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно,

$$\arg A=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где k — любое целое число.

626. Пусть число z (рис. 11) изображается точкой B; числа -1 и $+1$ — точками A и C. BD — биссектриса угла ABC. Вектор $\overrightarrow{AB}=z+1$, а вектор $\overrightarrow{CB}=z-1$. Поэтому

$$\arg(z+1)=\beta,\quad \arg(z-1)=\gamma,$$

$$\arg\sqrt{z^2-1}=\arg\sqrt{(z+1)(z-1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\arg[(z+1)(z-1)]=$$
$$=\frac{1}{2}[\arg(z+1)+\arg(z-1)]=$$
$$=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)+\pi k. \qquad (1)$$

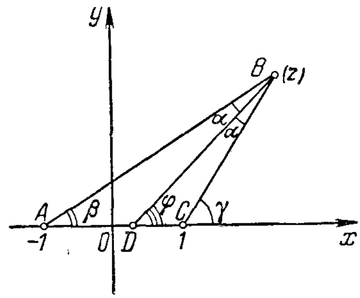

Рис. 11.

Из треугольника ABC следует, что $2\alpha=\gamma-\beta$, $\alpha=\frac{\gamma-\beta}{2}$, а из треугольника DBC следует, что $\varphi=\gamma-\alpha$, т. е.

$$\varphi=\gamma-\frac{\gamma-\beta}{2}=\frac{1}{2}(\beta+\gamma). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) имеем $\arg\sqrt{z^2-1}=\varphi+\pi k$, где $k=0$ или $k=1$.

Таким образом, оба значения $\sqrt{z^2-1}$ изобразятся точками, лежащими на прямой, проходящей через начало координат и образующей с полуосью Ox углы $\varphi+\pi k$, т. е. прямой, параллельной DB — биссектрисе угла ABC.

627. Пусть $(n,\ m)=d$; тогда $n=n_1d$, $m=m_1d$, где n_1 и m_1 — взаимно простые числа. Если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right],$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)$ и $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень.

Поэтому

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^m=\sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\varphi}{n}+\frac{2\pi km}{n}\right)+i\sin\left(\frac{m\varphi}{n}+\frac{2\pi km}{n}\right)\right],$$

или

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^m=\sqrt[n_1]{r^{m_1}}\left[\cos\left(\frac{m_1\varphi}{n_1}+\frac{2\pi m_1}{n_1}k\right)+i\sin\left(\frac{m_1\varphi}{n_1}+\frac{2\pi m_1}{n_1}k\right)\right].$$

Из этого равенства следует, что для получения всех различных значений $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ надо брать значения k от 0 до (n_1-1), т. е. $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ $\ldots,\ (n_1-1)$ — всего n_1 значений. Действительно, пусть $k_\alpha<k_\beta$, где $0\leqslant\alpha<$ $<\beta\leqslant n_1-1$; тогда

$$\left(\frac{m_1\varphi}{n_1}+\frac{2\pi m_1}{n_1}k_\beta\right)-\left(\frac{m_1\varphi}{n_1}+\frac{2\pi m_1}{n_1}k_\alpha\right)=\frac{2\pi m_1}{n_1}(k_\beta-k_\alpha);$$

полученная разность двух значений аргумента не кратна 2π, так как $k_\beta - k_\alpha < n_1$, а поэтому при возможном сокращении дроби $\frac{k_\beta - k_\alpha}{n_1}$ в знаменателе ее останется число, взаимно простое с m_1.

Если же взять значения $k > n_1 - 1$, то новых значений $(\sqrt[n]{z})^m$ не получим. Действительно, пусть $k = ln_1 + \gamma$, где l — любое натуральное число и $0 \leqslant \gamma \leqslant n_1 - 1$; тогда

$$\frac{m_1\varphi}{n_1} + \frac{2\pi m_1}{n_1} k = \frac{m_1\varphi}{n_1} + \frac{2\pi m_1}{n_1}(ln_1 + \gamma) = \left(\frac{m_1\varphi}{n_1} + \frac{2\pi m_1}{n_1}\gamma\right) + 2\pi m_1 l,$$

т. е. при $k = ln_1 + \gamma$ и при $k = \gamma$ получаются одинаковые значения $(\sqrt[n]{z})^m$. Из доказанного следует, что $(\sqrt[n]{z})^m$ имеет n_1 различных значений, где $n_1 = \frac{n}{d} = \frac{n}{(n, m)}$.

Далее имеем: $\sqrt[n]{z^m}$ имеет n различных значений, а $(\sqrt[n]{z})^m$ имеет $\frac{n}{(n, m)}$ различных значений; поэтому множества значений $\sqrt[n]{z^m}$ и $(\sqrt[n]{z})^m$ совпадают тогда и только тогда, когда $(n, m) = 1$, так как каждое из этих множеств состоит из элементов

$$\sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\varphi}{n} + \frac{2\pi km}{n}\right) + i \sin\left(\frac{m\varphi}{n} + \frac{2\pi km}{n}\right)\right],$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ тогда и только тогда, когда $(n, m) = 1$.

628. Имеем

$$z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ z_2 = r(\cos\beta + i\sin\beta),$$
$$z_3 = r(\cos\gamma + i\sin\gamma);$$

поэтому

$$z_3 - z_2 = r[(\cos\gamma - \cos\beta) + i(\sin\gamma - \sin\beta)] =$$
$$= 2r\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\sin\frac{\beta+\gamma}{2} - i\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right).$$

а) Если $\sin\frac{\beta-\gamma}{2} > 0$, то

$$z_3 - z_2 = 2r\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right].$$

б) Если $\sin\frac{\beta-\gamma}{2} < 0$, то

$$z_3 - z_2 = 2r\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right].$$

Аналогично найдем:

а$_1$) Если $\sin\frac{\alpha-\gamma}{2} > 0$, то

$$z_3 - z_1 = 2r\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right].$$

б$_1$) Если $\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}<0$, то

$$z_3-z_1=2r\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right].$$

В случаях а), а$_1$) и б), б$_1$)

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)-\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1},$$

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

В случае а), б$_1$)

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}+\pi=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}+\pi.$$

В случае б), а$_1$)

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)-\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{2}-\pi=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}-\pi.$$

629. Пусть

$$z_1=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\ z_2=r(\cos\beta+i\sin\beta),$$
$$z_3=r(\cos\gamma+i\sin\gamma),\ z_4=r(\cos\delta+i\sin\delta).$$

Так как $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, то

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=0,$$
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=0,$$

или

$$\left.\begin{aligned}2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0,\\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

1) Если $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т. е. $\alpha-\beta=\pi+2k\pi$, то и $\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0$, т. е. $\gamma-\delta=\pi+2n\pi$. Убедимся в правильности этого утверждения. Допустим, что при $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ значение $\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\neq0$. Тогда из равенств (1) следует, что $\cos\frac{\gamma+\delta}{2}=0$ и $\sin\frac{\gamma+\delta}{2}=0$, что невозможно.

Таким образом, из равенств $\alpha-\beta=\pi+2k\pi$ и $\gamma-\delta=\pi+2n\pi$ получаем, учитывая равенство модулей, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами прямоугольника, а в случае $\alpha-\gamma=2\pi m$ получим $\delta-\beta=2\pi l$, т. е. точки попарно совпадают.

2) Если $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0$, то и $\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\neq0$, так как, допустив, что $\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0$, легко докажем (как в 1)), что $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$.

Поэтому из (1) имеем

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2},\\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\cos\frac{\gamma+\delta}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

а) Если $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, то $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$; поэтому обе части первого равенства из системы (2) отличны от нуля. Разделив второе равенство этой системы на первое, получим $\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma+\delta}{2}$, откуда

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta+2k\pi. \tag{3}$$

б) Если $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$, то разделив почленно равенства (2), получим

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\frac{\gamma+\delta}{2},$$

т. е.

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta+2k\pi.$$

Таким образом, установлено, что равенство (3) верно как при $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, так и при $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$.

Возведя в квадрат, а затем почленно сложив равенства (2), получим

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos^2\frac{\gamma-\delta}{2},$$

или

$$\frac{1}{2}[1+\cos(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}[1+\cos(\gamma-\delta)],$$

или

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\gamma-\delta). \tag{4}$$

Поэтому, учитывая (3) и (4), получим:

1) $\begin{cases}\alpha-\beta=\gamma-\delta+2m\pi,\\ \alpha+\beta=\gamma+\delta+2k\pi,\end{cases}$

откуда

$$\alpha=\gamma+(k+m)\pi,$$
$$\beta=\delta+(k-m)\pi;$$

2) $\begin{cases}\alpha-\beta=\delta-\gamma+2m\pi,\\ \alpha+\beta=\delta+\gamma+2k\pi,\end{cases}$

откуда

$$\alpha=\delta+(k+m)\pi,$$
$$\beta=\gamma+(k-m)\pi.$$

В обоих случаях, учитывая одинаковую четность $(k+m)$ и $(k-m)$, видим, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 — вершины прямоугольника или попарно совпадают.

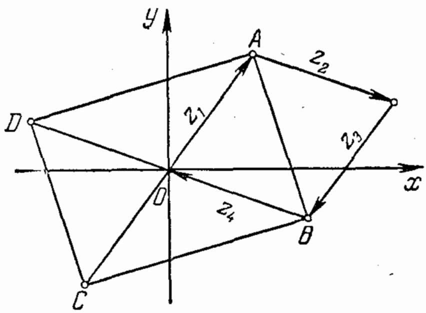

Рис. 12.

Задача допускает простое геометрическое решение. Если сложить векторы, изображающие числа z_1, z_2, z_3, z_4, то, поскольку $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, получится замкнутый четырехугольник, все стороны которого равны, так как $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$. Этот четырехугольник — ромб. Как показано на рис. 12, точки A, B, C, D служат соответственно изображениями чисел z_1, z_2, z_3, z_4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали равны и в точке пересечения делятся взаимно пополам. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник.

Если же $z_1=z_4=-z_2=-z_3$, то точки z_1 и z_4, а также z_2 и z_3 совпадают.

630. Среди чисел z_1, z_2, z_3 нет равных, так как, допустив, что $z_1=z_2$, получим $2z_1=-z_3$; это равенство невозможно, так как

$$|2z_1|=2|z_1|=2, \text{ а } |-z_3|=1.$$

Пусть

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad z_2 = \cos\beta + i\sin\beta, \quad z_3 = \cos\gamma + i\sin\gamma,$$

где

$$2\pi > \alpha > \beta > \gamma \geqslant 0. \tag{1}$$

По условию $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, а поэтому

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0, \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\cos\gamma, \\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Возведя в квадрат, а затем почленно сложив равенства (3), получим

$$4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$$

или

$$2[1 + \cos(\alpha-\beta)] = 1,$$

откуда

$$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}.$$

Так как $0 < \alpha - \beta < 2\pi$, то $\alpha - \beta = \frac{2}{3}\pi$ или $\alpha - \beta = \frac{4}{3}\pi$.

1) Пусть $\alpha - \beta = \frac{2}{3}\pi$; тогда $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; поэтому из равенств (3) получим

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\cos\gamma, \\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -\sin\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

откуда, учитывая (1), имеем $\frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma + \pi$, так как $\frac{\alpha+\beta}{2} > \gamma$.

Имеем

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma + \pi, \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{3};$$

поэтому

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = (\gamma+\pi) - \frac{\pi}{3},$$

или

$$\beta - \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \frac{2\pi}{3}$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$; поэтому точки z_1, z_2, z_3 — вершины правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

2) Пусть $\alpha - \beta = \frac{4\pi}{3}$; тогда $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, а поэтому из

равенств (3) следует:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\gamma,\\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\gamma.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Равенства (5) возможны, учитывая (1), только при $\frac{\alpha+\beta}{2}=\gamma$, что противоречит неравенству $\frac{\alpha+\beta}{2}>\gamma$. Поэтому $\alpha-\beta\neq\frac{4\pi}{3}$, а поэтому возможен лишь случай 1), когда $\alpha-\beta=\frac{2}{3}\pi$.

Геометрическое решение (рис. 13). Если сложить векторы, изображающие числа z_1, z_2, z_3, то, поскольку $z_1+z_2+z_3=0$, получится равносторонний треугольник, так как $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. На рисунке изображена единичная окружность и равносторонний треугольник OCD, полученный при сложении векторов z_3, z_1 и z_2. Проведя диаметр DOB и радиус $OA\parallel CD$, получим точки A, B, C, изображающие соответственно числа z_1, z_2, z_3, которые служат вершинами правильного треугольника, вписанного в единичную окружность.

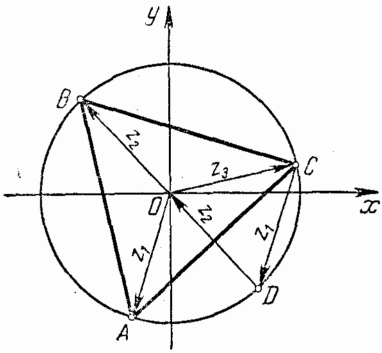

Рис. 13.

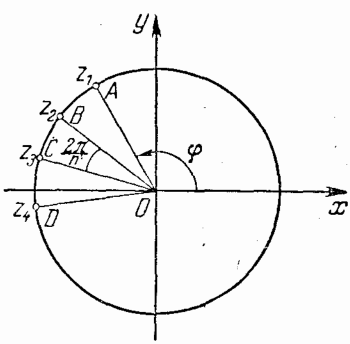

Рис. 14.

631. Все вершины правильного n-угольника, заданного условием задачи, лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным $|z_1|$ (рис. 14). На рисунке точки окружности A, B, C D, ... изображают комплексные числа z_1, z_2, z_3, z_4, ... и служат вершинами правильного n-угольника. Если $z_1=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то $z_2=r\left[\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)\right]$, так как $\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$. Поэтому $z_2=z_1\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$; аналогично получим

$$z_3=z_2\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z_1\left(\cos\frac{2\pi}{n}\,2+i\sin\frac{2\pi}{n}\,2\right),$$

$$z_4=z_1\left(\cos\frac{2\pi}{n}\,3+i\sin\frac{2\pi}{n}\,3\right)$$

и т. д. Следовательно,

$$z_k=z_1\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

где $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

632. Первый случай. Вершины z_1, z_2, z_3 последовательно расположены при обходе контура многоугольника против движения часовой стрелки (рис. 15). Точки A, B, C — вершины z_1, z_2, z_3 правильного n-угольника; эти точки можно рассматривать как изображения комплексных чисел z_1, z_2, z_3. Проводим $OD \parallel AB$, $OD = AB$, $OE \parallel BC$, $OE = BC$. Тогда точка D служит изображением комплексного числа $z_2 - z_1$. Угол $ABC = \frac{\pi(n-2)}{n}$, а поэтому угол $DOE = \pi - \frac{\pi(n-2)}{n} = \frac{2\pi}{n}$. Так как отрезки OD и OE имеют одинаковую длину, то комплексное число, изображенное точкой E, получится умножением числа $(z_2 - z_1)$ на $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. Поэтому

$$z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

(Сложение векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OE}$ в параллелограмме $OBCE$.)

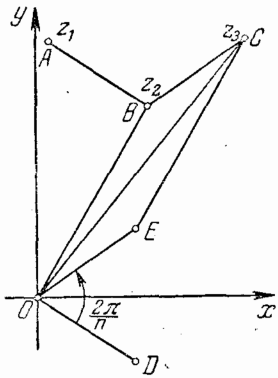

Рис. 15.

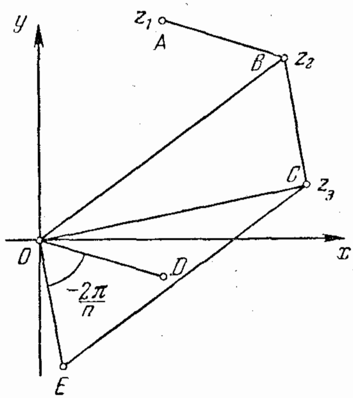

Рис. 16.

Второй случай. Вершины z_1, z_2, z_3 последовательно расположены при обходе контура многоугольника по часовой стрелке. Аналогично изложенному в первом случае находим, что угол $DOE = -\frac{2\pi}{n}$ (рис. 16). Поэтому число, изображенное точкой E, равно

$$(z_2 - z_1)\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right)\right] = (z_2 - z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Поэтому из параллелограмма $OBCE$, находим

$$z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Отв. $z_3 = z_2 + (z_2 - z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$.

633. Пусть точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой (рис. 17). Построим отрезок OM, равный отрезку AB и имеющий то же направление, и отрезок ON, равный AC и имеющий такое же направление. Очевидно, что точки M и N лежат на одной прямой, проведенной из начала координат. Векторы OM и ON служат изображениями чисел $(z_2 - z_1)$ и $(z_3 - z_1)$. Так как эти векторы лежат на одной прямой, то отношение

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k, \tag{1}$$

где k — действительное число. Условие (1) есть необходимое условие расположения трех точек z_1, z_2, z_3 на одной прямой. Но это условие (1) является и достаточным для расположения точек z_1, z_2, z_3 на одной прямой. Действительно, пусть

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = k,$$

где k — действительное число. Тогда $z_3 - z_1 = k(z_2 - z_1)$, т. е. векторы $(z_3 - z_1)$ и $(z_2 - z_1)$ расположены на одной прямой, а поэтому отрезки AC и AB — части одной прямой (рис. 17), или точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой.

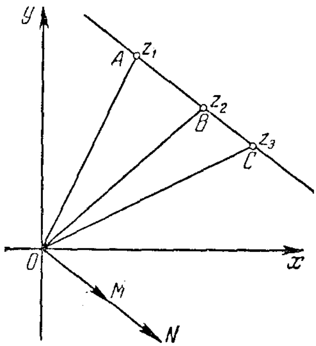

Рис. 17.

634. Пусть Ox' — произвольная прямая, проведенная через начало координат в основной системе xOy (рис. 18). Проведем прямую $Oy' \perp Ox'$ и рассмотрим все заданные точки в новой системе координат $(x'Oy')$. Пусть z'_k — число в системе $x'Oy'$, соответствующее точке z_k в системе xOy $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. В обеих системах координат при сложении векторов, соответствующих данным точкам, образуется замкнутый контур, так как $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$. Поэтому $z'_1 + z'_2 + \ldots + z'_n = 0$, но $z'_n = x'_n + y'_n \cdot i$, т. е.

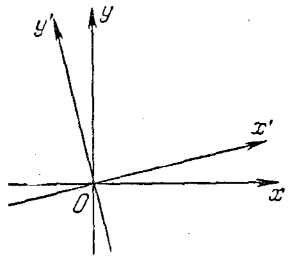

Рис. 18.

$$x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n = 0 \text{ и } y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_n = 0.$$

В последнем равенстве, если только не все слагаемые левой части нули, часть слагаемых имеет положительные знаки, а другая часть — отрицательные. Поэтому точки z_1, $z_2, \ldots, z_n$ лежат по разные стороны прямой Ox'. Если же окажется, что $y'_1 = y'_2 = \ldots = y'_n = 0$, то все заданные точки z_1, $z_2, \ldots$ $\ldots, z_n$ расположены на прямой Ox'; Ox' является единственной прямой, проходящей через начало координат, не разделяющей точки.

635. По формуле суммы членов геометрической прогрессии получим

$$S = \frac{\alpha^{20} - 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha^2)^{10} - 1}{\alpha - 1} = \frac{\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{10} - 1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}} - 1} = \frac{(i^{10} - 1)\cdot\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} + i} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1 - i} = \frac{2\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1 + i)}{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1} = \frac{4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot i}{4 - 2\sqrt{2}} =$$

$$= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}\cdot i = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\cdot i = 1 + (\sqrt{2} + 1)\cdot i.$$

Отв. $1 + (\sqrt{2} + 1)\cdot i.$

636. Данное значение $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ — один из корней уравнения $x^3 - 1 = 0$, или $(x-1)(x^2+x+1)=0$; поэтому $\alpha^3 = 1$, $\alpha^2+\alpha+1=0$, т. е. $\alpha^2 = -(\alpha+1)$. Имеем

$$(\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)(2 - \alpha + \alpha^2) = (\alpha + \alpha + 1 + 2)(2 - \alpha - \alpha - 1) =$$
$$= (2\alpha+3)(1-2\alpha) = 2\alpha + 3 - 4\alpha^2 - 6\alpha = 2\alpha + 3 + 4\alpha + 4 - 6\alpha = 7.$$

637. Из условия следует, что

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = 1, \text{ или } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1, \text{ или } \left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^n = 1, \text{ или } i^n = 1,$$

а поэтому $n = 4k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

638. Первое решение. Пусть

$$F(z) = F(x+yi) = p + qi, \tag{1}$$

где p и q — действительные числа. Тогда $F(\bar{z}) = F(x - yi) = p + q(-i) = p - qi$, так как $F(x-yi)$ получится заменой в многочлене $F(x+yi)$ числа i числом $(-i)$, то учитывая, что все коэффициенты многочлена $F(z)$ — действительные числа, имеем $\overline{F(z)} = p - qi$, поэтому $\overline{F(z)} = F(\bar{z})$.

Второе решение. Подставляя в правую часть равенства

$$F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

вместо z его выражение $x + yi$, получим, группируя члены, содержащие степени числа i, показатели которых сравнимы по модулю 4, т. е. дающие одинаковые остатки при делении на 4:

$$F(z) = b + di^{4k+1} + ei^{4k+2} + mi^{4k+3} = (b-e) + (d-m)i. \tag{1}$$

Если же взять вместо $z = x + yi$ число $\bar{z} = x - yi$, то для вычисления $F(\bar{z})$ надо в равенстве (1) заменить число i числом $(-i)$; поэтому

$$F(\bar{z}) = b + d(-i)^{4k+1} + e(-i)^{4k+2} + m(-i)^{4k+3} = (b-e) - (d-m)i = \overline{F(z)},$$

т. е. $\overline{F(z)} = F(\bar{z})$.

Третье решение. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда сопряженное ему число $\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$. Следовательно,

$$z^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi),$$
$$(\bar{z})^k = r^k[\cos(-k\varphi) + i\sin(-k\varphi)] = r^k(\cos k\varphi - i\sin k\varphi).$$

Таким образом, $(\bar{z})^k = \overline{z^k}$. Так как число a_{n-k} действительное, то $a_{n-k}(\bar{z})^k = \overline{a_{n-k}z^k}$ (для любого $k = 1, 2, 3, \ldots, n$). Вспомнив еще, что

$$\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_m} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_m,$$

мы получаем

$$F(\bar{z}) = a_0(\bar{z})^n + a_1(\bar{z})^{n+1} + \ldots + a_{n-1}\bar{z} + a_n =$$
$$= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n} =$$
$$= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n} = \overline{F(z)}.$$

639. Обозначая левую часть данного уравнения через $F(x)$, получим

$$F(x) = 0. \tag{1}$$

Так как $x = p + qi$ — корень уравнения (1), то $F(p+qi) = 0 + 0 \cdot i$. На основании задачи 638 имеем

$$F(p-qi) = 0 - 0 \cdot i, \text{ т. е. } F(p-qi) = 0;$$

следовательно, $x = p - qi$ — корень уравнения $F(x) = 0$.

640. Если $z = x + yi$, то $\bar{z} = x - yi$; поэтому данное уравнение приводится к виду $(x+yi)^2 + (x - yi) = 0$, откуда $(x^2 - y^2 + x) + (2xy - y)i = 0$. Из условия равенства комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0, & (1) \\ (2x-1)y = 0. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2) следует, что $2x - 1 = 0$ или $y = 0$.

1) $2x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$; подставляя значение $x = 1/2$ в уравнение (1), получим $\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0$, т. е. $y^2 = \frac{3}{4}$, или $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $y = 0$. Подставляя значение $y = 0$ в уравнение (1), получим $x^2 + x = 0$, откуда а) $x = 0$, $z = 0$; б) $x = -1$, $z = -1$.

Отв. $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

641. Из условия следует, что

$$0 < \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} < \frac{1}{2}; \qquad (1)$$

так как $|z-1| + 4 > 0$, то из неравенства $\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 0$ следует, что $3|z-1| - 2 > 0$, а поэтому из (1) имеем $2|z-1| + 8 < 3|z-1| - 2$, т. е.

$$|z-1| > 10. \qquad (2)$$

Условие $3|z-1| - 2 > 0$, рассмотренное ранее, вытекает из (2), и потому оно не дает дополнительных ограничений.

Так как $|z-1|$ — расстояние между точками z и 1, то из неравенства (2) следует, что числа z расположены вне окружности радиуса 10 с центром в точке $z = 1$.

Неравенству, указанному в условии, удовлетворяют все те и только те точки, которые не принадлежат окружности радиуса 10 с центром (1; 0) и части плоскости, заключенной внутри этой окружности.

642. Пусть $z = x + yi$; тогда

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}, \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3})^2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2, & (1) \\ (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-\sqrt{3})^2. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) имеем $(x-1)^2 = (x+1)^2$, откуда

$$x = 0. \qquad (3)$$

Подставляя в уравнение (2) значение $x=0$, получим $1+y^2=0+y^2-2y\sqrt{3}+3$, откуда

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) следует, что

$$z=0+\frac{1}{\sqrt{3}}i=\frac{1}{\sqrt{3}}i.$$

Поэтому существует лишь единственное комплексное число $z=\frac{1}{\sqrt{3}}i$, удовлетворяющее условию задачи. Это число изображается точкой $(0;\ 1/\sqrt{3})$.

Укажем геометрическую интерпретацию этого факта. Найденная точка $(0;\ 1/\sqrt{3})$ есть центр окружности, описанной около треугольника с вершинами $1,\ -1,\ i\sqrt{3}$.

643. Полагая $z=x+yi$, имеем

$$x+yi+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}+i=0, \text{ или } x+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}+(y+1)i=0,$$

откуда по условию равенства комплексных чисел

$$\begin{cases} x+a\sqrt{(x+1)^2+y^2}=0, & (1)\\ y+1=0. & (2)\end{cases}$$

Из уравнения (2) имеем

$$y=-1. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (1) значение $y=-1$, получим

$$x+a\sqrt{(x+1)^2+1}=0. \tag{4}$$

а) Если $a=1$, то из уравнения (4) следует, что $x+\sqrt{(x+1)^2+1}=0$, или $\sqrt{x^2+2x+2}=-x>0$, или $x^2+2x+2=x^2$, т. е. $x=-1$. Таким образом, если $a=1$, то $z=-1-i$.

б) Если $a>1$, то из уравнений (1) и (3) имеем $a\sqrt{x^2+2x+2}=-x>0$, или $a^2(x^2+2x+2)=x^2$, откуда

$$(a^2-1)x^2+2a^2x+2a^2=0, \tag{5}$$

Чтобы x был действительным числом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$a^4-2a^2(a^2-1)\geqslant 0. \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует: $a^2\leqslant 2$, т. е. $|a|\leqslant\sqrt{2}$. Учитывая условие $a>1$, имеем $1<a\leqslant\sqrt{2}$. Поэтому при любом a, удовлетворяющем неравенству $1<a<\sqrt{2}$, получим два значения x:

$$x_1=\frac{-a^2+a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-a^2-a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1};$$

поэтому при $1<a<\sqrt{2}$ имеем

$$z_1=\frac{-a^2+a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}-i, \qquad z_2=\frac{-a^2-a\sqrt{2-a^2}}{a^2-1}-i.$$

Если же $a=\sqrt{2}$, то имеем только одно значение: $z=-2-i$.

Если $a>\sqrt{2}$, то уравнение $z+a|z+1|+i=0$ не имеет решений.

644. Пусть $z = x + yi$; тогда данное уравнение принимает вид

$$2\sqrt{x^2+y^2} - 4ax + 1 - (4ay - a)\,i = 0.$$

По определению равенства комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} - 4ax + 1 = 0, & (1) \\ a(4y-1) = 0. & (2) \end{cases}$$

Если в уравнении (2) принять $a = 0$, то из уравнения (1) получим

$$2\sqrt{x^2+y^2} + 1 = 0,$$

что невозможно при действительных значениях x и y. Поэтому из уравнения (2) следует, что

$$4y - 1 = 0, \text{ т. е. } y = 1/4; \tag{3}$$

следовательно, согласно уравнению (1) $2\sqrt{x^2 + \frac{1}{16}} - 4ax + 1 = 0$, или

$$\sqrt{16x^2+1} = 8ax - 2, \tag{4}$$

откуда видно, что $x \neq 0$. Так как $\sqrt{16x^2+1} > 1$, то $8ax - 2 > 1$, т. е.

$$x > \frac{3}{8a} > 0. \tag{5}$$

Кроме того, $\sqrt{16x^2+1} > 4x$, а поэтому $8ax - 2 > 4x$, или $(4a-2)\,x > 1$. Согласно неравенству (5) число $x > 0$, а поэтому $4a - 2 > 0$ и $a > 1/2$.

Таким образом, при $0 \leqslant a \leqslant 1/2$ решаемое уравнение не имеет решений. Из уравнения (4) следует: $16x^2 + 1 = 64a^2x^2 - 32ax + 4$, или

$$16(4a^2-1)\,x^2 - 32ax + 3 = 0. \tag{6}$$

Дискриминант этого уравнения $D = 16(4a^2+3) > 0$ при любом a. Уравнение (6) имеет два положительных корня:

$$x_1 = \frac{4a - \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)}.$$

Так как $a > \frac{1}{2}$, то $\sqrt{4a^2+3} > 2$; поэтому

$$x_1 < \frac{4a-2}{4(4a^2-1)} = \frac{1}{2(2a+1)} = \frac{3}{12a+6} < \frac{3}{8a},$$

что противоречит неравенству (5). Далее, $\sqrt{4a^2+3} > 2a$, поэтому

$$x_2 > \frac{4a+2a}{4(4a^2-1)} = \frac{6a}{16a^2-4} > \frac{6a}{16a^2} = \frac{3}{8a}.$$

Поэтому при $a > 1/2$ имеем

$$x = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)}. \tag{7}$$

Итак, при $a > 1/2$ из равенств (3) и (7) получим

$$z = \frac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)} + \frac{1}{4}\,i.$$

Отв. При $0 \leqslant a \leqslant 1/2$ уравнение не имеет решений; при $a > 1/2$ уравнение имеет одно решение $z = \dfrac{4a + \sqrt{4a^2+3}}{4(4a^2-1)} + \dfrac{1}{4}\,i$.

645. Имеем

$$\begin{cases} z^3 = -w^5, \\ z^2 = \dfrac{1}{\overline{w}^4}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z^6 = w^{10}, \\ z^6 = \dfrac{1}{\overline{w}^{12}}, \end{cases}$$

поэтому $w^{10} = \dfrac{1}{\overline{w}^{12}}$, или $w^{10} \cdot \overline{w}^{12} = 1$; поэтому $|w^{10} \cdot \overline{w}^{12}| = 1$, или $|w|^{10} \cdot |\overline{w}|^{12} = 1$, или (так как $|\overline{w}| = |w|$) $|w|^{22} = 1$, т. е.

$$|w| = 1. \tag{1}$$

Так как

$$w^{10} \cdot \overline{w}^{12} = 1, \text{ то и } (w \cdot \overline{w})^{10} \cdot \overline{w}^2 = 1. \tag{2}$$

Поскольку $w \cdot \overline{w} = |w|^2$, то, учитывая (1) и (2), получим $\overline{w}^2 = 1$, т. е. $\overline{w} = \pm 1$, а потому и $w = \pm 1$. Но $z^3 = -w^5$, а поэтому при $w_1 = 1$ имеем $z_1 = -1$, а при $w = -1$ получаем $z_2 = 1$.

Проверкой убеждаемся, что найденные значения z и w удовлетворяют данной системе уравнений.

Отв. $z_1 = -1$, $w_1 = 1$; $z_2 = 1$, $w_2 = -1$.

646. Из условия следует, что

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = a. \tag{1}$$

Так как $|z - z_1|$ и $|z - z_2|$ — числа, соответственно равные расстояниям от точек z до фиксированных точек z_1 и z_2, то из уравнения (1) следует, что задача сводится к нахождению геометрического места точек, отношение расстояний которых до двух данных точек постоянно (не равно 1). Геометрическим местом точек, обладающих указанным свойством, является окружность Аполлония с базисными точками z_1 и z_2.

Построение. Через точки A и B, изображающие соответственно числа z_1 и z_2, проводим прямую MN. Затем построим точки C и D, из которых первая делит отрезок AB внутренним, а вторая внешним образом в отношении a, т. е. $AC : CB = a$ и $AD : BD = a$. На отрезке CD, как на диаметре, построим окружность, которая и представляет собой искомое геометрическое место точек.

647. Имеем $(z+1)^m = (z-1)^m$; из равенства комплексных чисел следует равенство их модулей, а поэтому $|(z+1)^m| = |(z-1)^m|$, или $|z+1|^m = |z-1|^m$, или

$$|z+1| = |z-1|. \tag{1}$$

Пусть $z = x + yi$; тогда, учитывая равенство (1), получим

$$|x + 1 + yi|^2 = |x - 1 + yi|^2, \text{ или } (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2,$$

откуда $x = 0$, поэтому $z = yi$.

Данное уравнение приводится к виду

$$(1 + yi)^m = (-1 + y \cdot i)^m. \tag{2}$$

Представляя числа $(1 + yi)$ и $(-1 + yi)$ в тригонометрической форме, получим

$$1 + yi = \sqrt{1 + y^2}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

$$-1 + yi = \sqrt{1 + y^2}\,(\cos\theta + i \sin\theta),$$

где

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{3}$$

Из этих равенств следует, что можно принять

$$\theta = \pi - \varphi.$$

Поэтому уравнение (2) можно записать так:

$$\left(\sqrt{1+y^2}\right)^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) = \left(\sqrt{1+y^2}\right)^m [\cos m(\pi - \varphi) + i \sin m(\pi - \varphi)],$$

следовательно,

$$\cos m\varphi + i \sin m\varphi = \cos m(\pi - \varphi) + i \sin m(\pi - \varphi),$$

откуда

$$m\varphi = m(\pi - \varphi) + 2k\pi,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; поэтому

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{m}. \tag{4}$$

В формуле (4) при данном m надо брать лишь такие k, при которых $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} > 0$.

Из равенств (3) и (4) имеем:

1) $\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{-\sin\frac{k\pi}{m}}$,

или

$$1 + y^2 = \operatorname{cosec}^2 \frac{k\pi}{m},$$

или

$$y^2 = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{m}, \quad \text{т. е.} \quad |y| = \left|\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}\right|, \tag{5}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, m-1$, так как

$$0 < \frac{k\pi}{m} < \pi. \tag{6}$$

2) $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \cos\frac{k\pi}{m}$, а поэтому $\cos\frac{k\pi}{m}$ и y имеют одинаковые знаки; следовательно, в силу условий (5) и (6) $-\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m}$ и y имеют одинаковые знаки, т. е.

$$y = -\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m},$$

а поэтому

$$z = yi = -i \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{m},$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, m-1$.

648. Пусть $\arccos x = \varphi$; тогда

$$\cos\varphi = x. \tag{1}$$

Преобразуем левую и правую части очевидного тождества

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^7 = (\cos\varphi + i \sin\varphi)^7$$

соответственно по формуле Муавра и по формуле бинома Ньютона, имеем

$$\cos 7\varphi + i\sin 7\varphi =$$
$$= \cos^7\varphi + 7i\cos^6\varphi\sin\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi - 35i\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi +$$
$$+ 21i\cos^2\varphi\sin^5\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi - i\sin^7\varphi,$$

или

$$\cos 7\varphi + i\sin 7\varphi =$$
$$= (\cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi) +$$
$$+ i(7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi). \quad (2)$$

Из формулы (2) по условию равенства комплексных чисел имеем

$$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi,$$

или

$$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi(1-\cos^2\varphi) + 35\cos^3\varphi(1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) -$$
$$- 7\cos\varphi(1 - 3\cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi - \cos^6\varphi),$$

или

$$\cos 7\varphi = 64\cos^7\varphi - 112\cos^5\varphi + 56\cos^3\varphi - 7\cos\varphi. \quad (3)$$

Из равенств (1) и (3) следует:

$$\cos(7\arccos x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,$$

что и требовалось доказать.

649. Имеем $z_1 = z(z-1)$; согласно условию

$$\arg z = \varphi. \quad (1)$$

Пусть $\arg(z-1) = \alpha$. Так как $z - 1 = (\cos\varphi - 1) + i\sin\varphi$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi},$$

если $\cos\varphi \neq 1$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$,

$$|z-1| = \sqrt{(\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi} = \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Но согласно условию $0 \leqslant \varphi/2 < \pi$, а поэтому

$$|z-1| = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

1) Если $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ (а поэтому $\cos\varphi = 1$), то $|z-1| = 0$ и $\arg(z-1)$ не определен.

2) Если $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$, т. е. $0 < \varphi/2 < \pi$ или $0 < \varphi < 2\pi$, то

$$|z-1| = 2\sin\frac{\varphi}{2} > 0. \quad (2)$$

Далее,

$$z - 1 = -2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Таким образом,

$$z - 1 = 2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]. \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}.$$

Так как $\arg z_1=(\arg z)+\arg(z-1)$, то

$$\arg z_1=\varphi+\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2},$$

т. е.

$$\arg z_1=\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}.$$

650. Имеем $z_1=z^2(z+1)$. Так как $\arg z^2=2\varphi$, то остается найти $\arg(z+1)$. Далее,

$$z+1=1+\cos\varphi+i\sin\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \qquad (1)$$

$$|z+1|=\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}=\sqrt{2(1+\cos\varphi)}=2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|. \qquad (2)$$

1) Если $\cos\frac{\varphi}{2}=0$, т. е. $\varphi=\pi$, то $|z+1|=0$ и $|z_1|=0$, а поэтому $\arg z_1$ не определен.

2) Если $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, т. е. $0\leqslant\varphi<\pi$, то из равенств (1) и (2) следует, что

$$\arg(z+1)=\varphi/2.$$

Поэтому

$$\arg z_1=\arg z^2+\arg(z+1)=2\varphi+\frac{\varphi}{2}=\frac{5\varphi}{2};$$

наименьший положительный $\arg z_1$ равен остатку от деления $5\varphi/2$ на 2π.

3) Если $\cos\frac{\varphi}{2}<0$, т. е. $\pi<\varphi<2\pi$, то

$$|z+1|=-2\cos\frac{\varphi}{2}, \qquad (3)$$

$$z+1=-2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)\right]. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что

$$\arg(z+1)=\pi+\frac{\varphi}{2};$$

поэтому

$$\arg z_1=\arg z^2+\arg(z+1)=2\varphi+\pi+\frac{\varphi}{2},$$

т. е.

$$\arg z_1=\pi+\frac{5}{2}\varphi;$$

наименьший положительный $\arg z_1$ равен остатку от деления $\left(\pi+\frac{5}{2}\varphi\right)$ на 2π.

651. Имеем

$$z_1 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi - i\sin\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \cos\varphi +$$
$$+ (\sin 2\varphi - \sin\varphi)\, i = (\cos 2\varphi + \cos\varphi) + i(\sin 2\varphi - \sin\varphi) =$$
$$= 2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2i\cos\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Из полученного равенства следует, что

$$|z_1| = 2\left|\cos\frac{3\varphi}{2}\right|.$$

1) Если $\cos\frac{3\varphi}{2} = 0$, т. е. $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$, то $|z_1| = 0$, а поэтому $\arg z_1$ не определен.

2) Если $\cos\frac{3\varphi}{2} > 0$, т. е. $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{3}$ и $\pi < \varphi < \frac{5\pi}{3}$, то

$$|z_1| = 2\cos\frac{3\varphi}{2}. \qquad (1)$$

Как доказано выше,

$$z_1 = 2\cos\frac{3\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right). \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\arg z_1 = \varphi/2.$$

3) Если $\cos\frac{3\varphi}{2} < 0$, т. е. $\frac{\pi}{3} < \varphi < \pi$ и $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$, то

$$|z_1| = -2\cos\frac{3\varphi}{2}. \qquad (3)$$

Тогда

$$z_1 = -2\cos\frac{3\varphi}{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\right]. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) следует, что

$$\arg z_1 = \pi + \frac{\varphi}{2}.$$

Отв. Если $\varphi = \pi/3$, $\varphi = \pi$, $\varphi = 5\pi/3$, то аргумент комплексного числа z_1 не определен; $z_1 = 0$.

Если $0 \leqslant \varphi < \pi/3$ и $\pi < \varphi < 5\pi/3$, то $\arg z_1 = \varphi/2$.

Если $\frac{\pi}{3} < \varphi < \pi$ и $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$, то $\arg z_1 = \pi + \frac{\varphi}{2}$.

652. Так как $(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$, то данное уравнение приводится к виду

$$(3+4i)^{x-1} = 5^x - 4. \qquad (1)$$

Из равенства (1) следует, что

$$|(3+4i)^{x-1}| = |5^x - 4|,$$

или, учитывая, что $|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$ и $5^x - 4 \geqslant 1$, получим уравнение $5^{x-1} = 5^x - 4$. Поэтому, решая уравнение $5^x - 5^{x-1} = 4$, имеем $5^{x-1}(5-1) = 4$, т. е.

$$5^{x-1} = 1,$$

откуда

$$x-1=0, \quad x=1.$$

Отв. $x=1$.

653. Имеем $z=x+yi$, $\bar{z}=x-yi$. Поэтому данное уравнение приводится к виду $x+yi=x-yi$, откуда $x=x$, $y=-y$, т. е. x — любое действительное число, $y=0$.

Поэтому $z=x+0\cdot i$ — все действительные числа.

654. Если $z=x+yi$, то $\bar{z}=x-yi$, а поэтому данное уравнение приводится к виду $x-yi=-4x-4yi$, или

$$5x+3yi=0,$$

откуда

$$5x=0, \quad 3y=0, \quad \text{т. е.} \quad x=0, \quad y=0.$$

Поэтому $z=x+yi=0+0\cdot i=0$.

Отв. $z=0$.

655. Пусть $z=x+yi$. Тогда данное уравнение можно записать так:

$$(x+yi)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

откуда

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=0.$$

Из условия равенства комплексных чисел имеем

$$\begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0, \\ 2xy=0. \end{cases}$$

Поэтому из второго уравнения системы получаем или $x=0$, или $y=0$.

1) $x=0$. Подставляя $x=0$ в первое уравнение системы, получим

$$-y^2+|y|=0,$$

или

$$|y|^2-|y|=0,$$

откуда

а) $|y|=1, \quad y=\pm 1, \quad z=\pm i,$

б) $|y|=0, \quad y=0, \quad z=0.$

2) $y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение системы, получим

$$x^2+|x|=0,$$

или

$$|x|^2+|x|=0,$$

откуда

$$|x|=0, \text{ т. е. } x=0, \quad z=0.$$

Отв. $z=\pm i$, $z=0$.

656. Согласно условию должно быть

$$\begin{cases} x^2+y=-3, \\ x^2y=-4. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, числа x^2 и y равны корням квадратного уравнения

$$t^2+3t-4=0,$$

решая которое находим $t_1=1$, $t_2=-4$.

Поэтому возможны два случая:

1) $\begin{cases} x^2=1, \\ y=-4, \end{cases}$

т. е.

а) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -4, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -4; \end{cases}$

тогда как в а), так и в б) получаем

$$\begin{cases} z = -3 - 4i, \\ w = -3 + 4i. \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x^2 = -4, \\ y = 1. \end{cases}$

Система не имеет действительных решений.

Отв. $x_1 = 1,\ y_1 = -4;\ x_2 = -1,\ y_2 = -4.$

657. Так как

$$\left|\frac{z-4}{z-6-5i}\right| = \frac{|z-4|}{|z-6-5i|},$$

то

$$|z-4| = 2\,|z-6-5i|,$$

или, полагая $z = x + yi$, получим

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + (y-5)^2},$$

или

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2 - 40y + 100,$$

или

$$3x^2 + 3y^2 - 40x - 40y + 228 = 0. \tag{1}$$

Аналогично получим

$$2\,|z - 1 + 4i| = 3\,|z - 8i|,$$

или

$$2\sqrt{(x-1)^2 + (y+4)^2} = 3\sqrt{x^2 + (y-8)^2},$$

или

$$4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 + 32y + 64 = 9x^2 + 9y^2 - 144y + 576,$$

или

$$5x^2 + 5y^2 + 8x - 176y + 508 = 0. \tag{2}$$

Решим систему уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 + 8x - 176y + 508 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 40x - 40y + 228 = 0. \end{cases}$$

Умножая обе части первого уравнения этой системы на 3, а обе части второго на (-5), получим после сложения образовавшихся уравнений

$$224x - 328y + 384 = 0,$$

или

$$28x - 41y + 48 = 0,$$

откуда

$$y = \frac{4(7x + 12)}{41}. \tag{3}$$

Подставляя во второе уравнение системы это значение y, получим после упрощений

$$85x^2 - 1208x + 3580 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{604 \pm \sqrt{364\,816 - 304\,300}}{85} = \frac{604 \pm \sqrt{60\,516}}{85} = \frac{604 \pm 246}{85};$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 4\frac{18}{85}.$$

Учитывая формулу (3), получим

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4\dfrac{18}{85}, \\ y_2 = 4\dfrac{4}{85}. \end{cases}$$

Поэтому $z_1 = 10 + 8i$, $\quad z_2 = 4\dfrac{18}{85} + 4\dfrac{4}{85}i$.

658. Имеем

$$z - z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z_2,$$

или

$$z - z_2 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2). \tag{1}$$

Известно, что $(z - z_2)$ — вектор $\overrightarrow{M_2M}$, где M — точка, соответствующая комплексному числу z, а $(z_1 - z_2)$ — вектор $\overrightarrow{M_2M_1}$. Так как оба этих вектора проходят через точку M_2 и в силу равенства (1) параллельны одной и той же прямой, то, учитывая, что (в формуле (1)) $1/2 > 0$, убедимся, что точка M — середина отрезка M_1M_2.

659. Пусть z_4 — комплексное число, соответствующее четвертой вершине параллелограмма, а z — комплексное число, соответствующее точке пересечения диагоналей этого параллелограмма. Если $M_1M_2M_3M_4$ — данный параллелограмм, вершины которого M_1, M_2, M_3, M_4 соответствуют числам z_1, z_2, z_3, z_4, то в силу задачи 658 имеем

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_3) \quad \text{и} \quad z = \frac{1}{2}(z_2 + z_4);$$

поэтому $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$, откуда

$$z_4 = z_1 + z_3 - z_2.$$

Если же $M_1M_3M_2M_4$ — данный параллелограмм, то

$$z_4 = z_1 + z_2 - z_3.$$

Если же $M_1M_2M_4M_3$ — данный параллелограмм, то

$$z_4 = z_2 + z_3 - z_1.$$

660. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. При $z = 0$ утверждение задачи очевидно. В дальнейшем будем считать $z \neq 0$. Тогда, обозначая корни n-й степени из z соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, получим

$$\alpha_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$. Тогда

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Поэтому последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ есть геометрическая прогрессия с первым членом, равным $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$, и знаменателем, равным $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Следовательно, сумма членов этой прогрессии

$$S_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\frac{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\frac{1-(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)}=0,$$

так как $1-(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=1-1=0$, а

$$1-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\neq 0,$$

так как $n>1$.

661. Имеем

$$x=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1)$. Поэтому

$$x_1x_2x_3\ \ldots\ x_n=r\left\{\cos\left[n\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}(0+1+2+3+\ldots+n-1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\sin\left[n\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}(0+1+2+3+\ldots+n-1)\right]\right\}=$$

$$=r\{\cos[\varphi+(n-1)\pi]+i\sin[\varphi+(n-1)\pi]\}=$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

При n четном

$$x_1x_2x_3\ \ldots\ x_n=-r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

При n нечетном

$$x_1x_2x_3\ \ldots\ x_n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

662. Пусть $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$, где a, b, c, d — целые числа. Тогда

$$m=(a+bi)(a-bi),$$

$$n=(c+di)(c-di).$$

Отсюда

$$mn=(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di),$$

или, перегруппировав сомножители, получаем

$$mn=[(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)]=$$

$$=[(ac-bd)+(ad+bc)i][(ac-bd)-(ad+bc)i]=$$

$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Таким образом, утверждение задачи верно. Можно перегруппировку сомножителей провести и иначе:

$$mn=[(a+bi)(c-di)][(a-bi)(c+di)]=$$

$$=[(ac+bd)+(bc-ad)i][(ac+bd)-(bc-ad)i]=$$

$$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2.$$

663. Имеем

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k(\sqrt{3}\,i)^k=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^k=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}.$$

Но так как $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, то

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right),$$

что и требовалось доказать.

664. Легко заметить, что

$$(1+i)^n=S_1+iS_2. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n. \qquad (2)$$

На основании формулы Муавра из (1) и (2) следует, что

$$S_1+iS_2=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

В силу условия равенства двух комплексных чисел находим

$$S_1=2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4},\quad S_2=2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

665. Имеем

$$(1+i\sqrt{3})^n=1+C_n^1 i\sqrt{3}+C_n^2(i\sqrt{3})^2+C_n^3(i\sqrt{3})^3+\ldots=$$
$$=1-C_n^2\cdot 3+C_n^4\cdot 3^2+\ldots+i\sqrt{3}\,(C_n^1-C_n^3\cdot 3+C_n^5\cdot 3^2-\ldots). \qquad (1)$$

С другой стороны, в силу формулы Муавра

$$(1+i\sqrt{3})^n=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right). \qquad (2)$$

На основании условия равенства двух комплексных чисел из (1) и (2) находим

$$S=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

§ 13. Исследование функций и построение графиков

666. Функция $\frac{1}{x-1}$ определена, если $x-1\neq 0$, т. е. при $x\neq 1$, а функция $\frac{1}{x+3}$ — если $x+3\neq 0$, т. е. при $x\neq -3$. Таким образом, данная функция определена для всех действительных x, кроме $x=1$ и $x=-3$.

Отв. $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, +\infty)$.

667. Функция $\sqrt{x-3}$ определена, если $x-3\geqslant 0$, т. е. при $x\geqslant 3$, а функция $\sqrt{4-x}$ – если $4-x\geqslant 0$, т. е. при $x\leqslant 4$. Таким образом, данная функция определена для всех x из промежутка $3\leqslant x\leqslant 4$.

Отв. $[3, 4]$.

668. Исследуемая функция определена, если $x^2-3x+2\geqslant 0$, или $(x-1)(x-2)\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 2$ или $x\leqslant 1$.

Отв. $(-\infty, 1]$, $[2, +\infty)$.

669. Данная функция определена, если выполняется неравенство $x^2-4x+3>0$. Так как нулями левой части этого неравенства являются числа 1 и 3, то $x<1$ или $x>3$.

Отв. $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$.

670. Функция $\sqrt{x^2-5x+6}$ определена, если имеет место неравенство $x^2-5x+6\geqslant 0$, а функция $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ — если выполняется система неравенств

$$x\geqslant 0,\quad -x^2+2x+3>0.$$

Таким образом, исследуемая функция определена для всех тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{r} x\geqslant 0,\\ x^2-5x+6\geqslant 0,\\ -x^2+2x+3>0.\end{array}\right.$$

Второе неравенство выполняется при $x\leqslant 2$ или при $x\geqslant 3$; третье неравенство имеет место для всех x из промежутка $-1<x<3$. Итак, имеем две системы неравенств:

$$\left\{\begin{array}{r} x\geqslant 0,\\ x\leqslant 2,\\ -1<x<3,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{r} x\geqslant 0,\\ x\geqslant 3,\\ -1<x<3.\end{array}\right.$$

Первая система выполняется при $0\leqslant x\leqslant 2$, а вторая система не имеет решений.

Отв. $[0,\ 2]$.

671. Данная функция определена для всех x, которые удовлетворяют неравенству $|x|-2|x-1|>0$, или

$$|x|>2|x-1|.$$

Возвышая обе части последнего неравенства в квадрат, получим $x^2>4(x-1)^2$, т. е. $3x^2-8x+4<0$. Так как корнями левой части этого неравенства служат числа $2/3$ и 2, то

$$2/3<x<2.$$

Отв. Интервал $(2/3,\ 2)$.

672. Функция определена, если $x^3-x|x|+4|x|-4\neq 0$, или $x|x|(|x|-1)+4(|x|-1)\neq 0$, т. е. $(|x|-1)(x|x|+4)\neq 0$. Таким образом, данная функция определена, если $|x|\neq 1$, $x|x|\neq -4$; из первого неравенства следует, что $x\neq\pm 1$, а из второго находим $x\neq -2$.

Отв. Интервалы $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$.

673. Очевидно, что должно иметь место неравенство $\sin x-\cos x>0$, или $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x>0$, или $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)>0$. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда $2k\pi<x-\dfrac{\pi}{4}<2k\pi+\pi$, откуда

$$\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi.$$

Таким образом, данная функция определена на бесконечном множестве интервалов

$$\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right),$$

где $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$

674. Функция $\operatorname{ctg} x$ определена для всех x, кроме $x=n\pi$, где $n=0$, $\pm 1,\ \pm 2,\ldots$

Знаменатель исследуемой функции определен и отличен от нуля при $\sin x - \cos x > 0$, т. е.

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \qquad (1)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Таким образом, данная функция определена, если одновременно имеют место неравенства (1) и неравенство $x \neq n\pi$.

Отв. Все числа из промежутков

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \qquad \pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi.$$

675. Должно быть

$$-1 \leqslant 4x^3 - 6x + 1 \leqslant 1,$$

т. е. должны одновременно выполняться неравенства

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x + 2 \geqslant 0, & (1) \\ 4x^3 - 6x \leqslant 0. & (2) \end{cases}$$

Так как корнями левой части неравенства (1) являются числа

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \qquad 1,$$

а корнями левой части неравенства (2) служат числа

$$-\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad 0, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}},$$

то неравенства (1) и (2) перепишутся в виде

$$\left(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)(x-1) \geqslant 0, \qquad (3)$$

$$\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) x \left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \leqslant 0. \qquad (4)$$

Неравенство (3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad x \geqslant 1, \qquad (5)$$

а неравенство (4) выполняется тогда и только тогда, когда

$$x \leqslant -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{или} \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}. \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) следует, что неравенства (3) и (4) выполняются одновременно лишь тогда, когда

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \leqslant x \leqslant -\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \text{или} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad \text{или} \quad 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, исследуемая функция определена на трех сегментах:

$$\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right], \qquad \left[0, \ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right], \qquad \left[1, \ \sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

676. Так как областью определения функции $\arcsin z$ служит отрезок $[-1, 1]$, то должны одновременно выполняться неравенства

$$-1 \leqslant 3x+5 \leqslant 1 \tag{1}$$

и

$$-1 \leqslant 1-x \leqslant 1. \tag{2}$$

Из (1) находим

$$-2 \leqslant x \leqslant -\frac{4}{3}, \tag{3}$$

а из (2) следует, что

$$0 \leqslant x \leqslant 2. \tag{4}$$

Поскольку соотношения (3) и (4) противоречивы, то данная функция *не определена ни при каком значении* x.

677. Областью определения данной функции является множество всех тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{2}{|x|-1} \leqslant 1, \\ |x-4| \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку $\dfrac{2}{|x|-1} \neq 0$, то первое неравенство системы распадается на два:

$$-1 \leqslant \frac{2}{|x|-1} < 0, \qquad 0 < \frac{2}{|x|-1} \leqslant 1,$$

или $|x|-1 \leqslant -2$, $|x|-1 \geqslant 2$, или $|x| \leqslant -1$, $|x| \geqslant 3$. Неравенство $|x| \leqslant -1$ не имеет решений, а из неравенства $|x| \geqslant 3$ следует, что

$$x \geqslant 3 \quad \text{или} \quad x \leqslant -3. \tag{1}$$

Неравенство $|x-4| \leqslant 1$ выполняется лишь при

$$3 \leqslant x \leqslant 5. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $3 \leqslant x \leqslant 5$.

Отв. $[3, 5]$.

678. Должны одновременно выполняться три соотношения:

$$\sin x > 0, \qquad \cos x > 0, \qquad \cos x \neq 1.$$

Все эти три неравенства выполняются одновременно тогда и только тогда, когда

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Таким образом, исследуемая функция определена на бесконечном множестве интервалов

$$\left(2k\pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

679. Должно быть $\log_a \cos(2\pi x) \geqslant 0$, и поскольку $-1 \leqslant \cos 2\pi x \leqslant 1$, то может быть только равенство $\log_a \cos(2\pi x) = 0$, которое выполняется лишь тогда, когда $\cos 2\pi x = 1$, т. е. когда $2\pi x = 2\pi k$, или $x = k$. Таким образом, областью определения исследуемой функции служит множество всех целых чисел.

680. Функция $\arcsin(1-x)$ определена, если $-1 \leqslant 1-x \leqslant 1$, или $0 \leqslant x \leqslant 2$. Функция $\log_{|x|}(2x-1)$ определена, если $x \neq 0$, $|x| \neq 1$,

$2x-1>0$, т. е. если $x>\frac{1}{2}$, $x\neq 1$. Таким образом, данная функция определена, если $\frac{1}{2}<x<1$, $1<x\leq 2$.

Отв. [1/2, 1), (1, 2].

681. Функция $\lg(x^2-x-6)$ определена, если $x^2-x-6>0$, или $(x-3)(x+2)>0$, т. е. при $x>3$ или при $x<-2$, а функция $\lg(4-x^2)$ определена, если $4-x^2>0$, т. е. при $-2<x<2$. Так как каждая из систем

$$\begin{cases}-2<x<2,\\ x>3\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}-2<x<2,\\ x<-2\end{cases}$$

не имеет решений, то исследуемая функция не определена ни при каком значении x.

682. Функция $\lg|4-x^2|$ определена, когда $|4-x^2|\geq 0$, т. е. должно быть $4-x^2\neq 0$, или $x^2\neq 4$, или $x\neq\pm 2$. Таким образом, функция $\lg|4-x^2|$ определена на трех интервалах:

$$(-\infty,\ -2),\qquad (-2,\ 2),\qquad (2,\ +\infty). \tag{1}$$

Функция $\lg(3^x-3^{-x})$ определена, если $3^x-3^{-x}>0$, или $3^{2x}>1$, откуда $2x>0$, т. е.

$$x>0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что данная функция определена на двух интервалах:

$$(0,\ 2),\qquad (2,\ +\infty).$$

683. Функция $\sqrt{\lg(\cos 2\pi x)}$ определена на множестве всех целых чисел (см. задачу 679). Но при целом x имеем $\sin\pi x=0$, и потому функция $\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x}$ не определена.

Из изложенного следует, что данная функция не определена ни при каком x.

684. Функция $\lg(x-1)$ определена, если $x-1>0$, т. е. если

$$x>1. \tag{1}$$

Далее, функция $\arcsin(1+\operatorname{tg}^2\pi x)$ определена при

$$|1+\operatorname{tg}^2\pi x|\leq 1. \tag{2}$$

С другой стороны, ясно, что

$$1+\operatorname{tg}^2\pi x\geq 1 \tag{3}$$

при всех допустимых значениях x. Из (2) и (3) следует, что $\operatorname{tg}^2\pi x+1=1$. Последнее соотношение возможно, если $\operatorname{tg}^2\pi x=0$, т. е. $\pi x=\pi k$. Следовательно,

$$x=k \text{ — любое целое число.} \tag{4}$$

Из (1) и (4) заключаем, что областью определения данной функции являются все целые числа, большие 1, т. е. 2, 3, 4, ...

685. Числитель данной функции определен, если $x>3$. Знаменатель исследуемой функции должен быть отличным от нуля. Следовательно, должна иметь место система соотношений

$$\left.\begin{array}{l} x>3,\\ \log_3|x^2-1|>0,\\ \log_3|x^2-1|\neq 1.\end{array}\right\} \tag{1}$$

Поскольку при $x>3$ выполняются все три неравенства (1), то областью определения данной функции является интервал $(3,\ +\infty)$.

686. Область определения исследуемой функции находится из системы неравенств

$$\begin{cases} \sin x > 0, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, областью определения данной функции являются все числа из промежутков

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi,$$

где $k = 0, +1, +2, \ldots$

687. Функция $\log_{x-1}|x|$ определена, если $|x| \neq 0$, $x-1 \neq 1$, $x-1>0$, т. е. если $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x > 1$. Таким образом, функция $\log_{x-1}|x|$ определена на двух интервалах:

$$(1,\ 2) \quad \text{и} \quad (2,\ +\infty).$$

Функция $\sqrt{1-x^2}$ определена, если $1-x^2 \geqslant 0$, т. е. функция $\sqrt{1-x^2}$ определена на отрезке

$$[-1,\ 1].$$

Поскольку $(1, 2)$ и $[-1, 1]$ и также $(2, +\infty)$ и $[-1, 1]$ не пересекаются, то данная функция не определена ни при каком значении x.

688. Областью определения данной функции является множество всех решений неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2. \tag{1}$$

Перепишем неравенство (1) последовательно так:

$$\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}} > 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{1}{|\sqrt{x-1}-1|} > 2. \tag{2}$$

Функция, стоящая в левой части неравенства (2), определена при $x \geqslant 1$, $x \neq 2$, т. е. при $1 \leqslant x < 2$ или $x > 2$. Если $1 \leqslant x < 2$, то неравенство (2) перепишется в следующем виде:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-1}} + \frac{1}{1-\sqrt{x-1}} > 2,$$

или $\dfrac{2}{2-x} > 2$, откуда $1 < x < 2$. Таким образом, в рассматриваемом случае должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} 1 \leqslant x < 2, \\ 1 < x < 2, \end{cases}$$

откуда

$$1 < x < 2.$$

Если же $x > 2$, то неравенство (2) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} > 2,$$

или $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2} > 1$. Но так как $x-2>0$, то последнее неравенство можно переписать так: $\sqrt{x-1} > x-2$, или $x-1 > x^2-4x+4$, т. е. $x^2-5x+5<0$, откуда следует, что

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2},$$

но так как $2 > \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, то окончательно имеем

$$2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Отв. $(1, 2)$, $\left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

689. Областью определения данной функции является множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\arcsin \lg x > 0. \tag{1}$$

По определению $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin \lg x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Но, учитывая (1), имеем $0 < \arcsin \lg x \leqslant \pi/2$, или $0 < \lg x \leqslant 1$, откуда $1 < x \leqslant 10$.

Отв. Промежуток $(1, 10]$.

690. Областью определения данной функции служит множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$10^x + 2\cdot 5^{2x} - 4^x > 0. \tag{1}$$

Так как $10^x > 0$, то, разделив обе части неравенства (1) на 10^x, получим равносильное ему неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x - 1 < 0. \tag{2}$$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = z$, тогда неравенство (2) примет вид $z - \frac{2}{z} - 1 < 0$, или, так как $z > 0$, получаем $z^2 - z - 2 < 0$, или $(z-2)(z+1) < 0$, откуда следует, что $z - 2 < 0$, т. е. $z < 2$. Следовательно, $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 2$. Логарифмируя обе части последнего неравенства по основанию $2/5$, получим $x > \log_{\frac{2}{5}} 2$. Знак неравенства изменился на противоположный, так как логарифмическая функция при основании, меньшем единицы, — убывающая.

Отв. Интервал $\left(\log_{\frac{2}{5}} 2, +\infty\right)$.

691. Данная функция определена для всех x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} > 0, \\ &\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Слагаемые левой части первого неравенства системы (1) определены соответственно при $x-2 \geqslant 0$, $x-3 \geqslant 0$, $x-5 \geqslant 0$, т. е. при $x \geqslant 2$, $x \geqslant 3$, $x \geqslant 5$. Таким образом, левая часть первого неравенства (1) определена, если

$$x \geqslant 5. \tag{2}$$

Перепишем первое неравенство системы (1) в следующем виде:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}>\sqrt{x-3}. \qquad (3)$$

Поскольку обе части неравенства (3) неотрицательны, то, возведя обе его части в квадрат, получим равносильное ему неравенство (конечно, учитывая, что (2) и (3) составляют систему)

$$2x-7+2\sqrt{(x-2)(x-5)}>x-3,$$

которое можно переписать в виде

$$2\sqrt{(x-2)(x-5)}>4-x. \qquad (4)$$

Из условия (2) ясно, что в неравенстве (4) левая часть неотрицательна, а правая отрицательна. Следовательно, неравенство (4) верно при любых $x \geqslant 5$. Итак, решением первого неравенства из системы (1) является полуинтервал

$$[5, +\infty). \qquad (5)$$

Теперь найдем решение второго неравенства системы (1). Слагаемые левой части этого неравенства определены соответственно при $x \geqslant -6$, $x \geqslant -1$, $x \geqslant 2$. Таким образом, левая часть рассматриваемого неравенства определена, если

$$x \geqslant 2. \qquad (6)$$

Теперь найдем те значения $x \geqslant 2$, при которых не имеет места уравнение

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-4}=0.$$

Имеем

$$\sqrt{x+6}=\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}, \qquad x+6=3x-3+2\sqrt{(x+1)(2x-4)},$$

$$9-2x=2\sqrt{(x+1)(2x-4)}. \qquad (7)$$

Так как $9-2x>0$, то

$$x<4{,}5. \qquad (8)$$

Возведя в квадрат обе части уравнения (7), получим $4x^2+28x-97=0$, откуда

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{146}}{2}. \qquad (9)$$

Из (6), (8), (9) следует, что для выполнения второго неравенства системы (1) необходимо, чтобы

$$x \neq \frac{\sqrt{146}-7}{2}. \qquad (10)$$

Так как $x=\dfrac{\sqrt{146}-7}{2}<5$, то из (5) и (10) следует, что полуинтервал $[5, +\infty)$ является областью определения данной функции.

Отв. $[5, +\infty)$.

692. Числитель данной функции определен, если

$$x \leqslant 0. \qquad (1)$$

Должно быть

$$(\operatorname{arctg} x)^2-4\operatorname{arctg} x+3>0.$$

Решая это квадратное неравенство относительно $\operatorname{arctg} x$, получаем

$$\operatorname{arctg} x>3 \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} x<1. \qquad (2)$$

Также имеем (по определению)

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 1$, откуда

$$-\infty < x < \operatorname{tg} 1. \tag{4}$$

Общая часть (1) и (4) является областью определения данной функции.

Отв. Полуинтервал $(-\infty, 0]$.

693. Данная функция определена для всех x, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{6 - \lg x - \lg^2 x}{\lg x} > 0,$$

или

$$\frac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} < 0,$$

которое равносильно неравенству

$$\lg x (\lg^2 x + \lg x - 6) < 0 \quad (\lg x \neq 0),$$

или

$$\lg x (\lg x + 3)(\lg x - 2) < 0,$$

откуда

$$0 < \lg x < 2 \text{ или } \lg x < -3,$$

т. е.

$$1 < x < 100 \text{ или } 0 < x < 0{,}001.$$

Отв. Интервалы (0; 0,001), (1; 100).

694. Имеем

$$\begin{aligned} y = x^4 + (1-x)^4 = (x^4 - 1) + (x-1)^4 + 1 = \\ = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + (x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 1 = \\ = (x-1)(2x^3 - 2x^2 + 4x) + 1 = 2(x^2 - x)(x^2 - x + 2) + 1 = \\ = 2(x^2 - x + 1)^2 - 1 = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2 - 1. \end{aligned}$$

Ясно, что данная функция достигает минимума одновременно с функцией $(x^2 - x + 1)^2$. Но так как $x^2 - x + 1 > 0$ при любом x, то достаточно найти то значение x, при котором функция $x^2 - x + 1$ достигает минимума. Эта функция имеет минимум при $x = 1/2$. Следовательно,

$$y_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, множество значений данной функции $y \geqslant 1/8$.

695. Первое решение. Перепишем данную функциональную зависимость в следующем виде:

$$(y-1)x^2 + y + 1 = 0, \tag{1}$$

откуда ясно, что $y \neq 1$. Из равенства (1) находим

$$x^2 = \frac{1+y}{1-y}.$$

Следовательно, должно быть $\frac{1+y}{1-y} \geqslant 0$, или $(1+y)(1-y) \geqslant 0$, т. е.

$1-y^2 \geqslant 0$, или $y^2 \leqslant 1$. Значит, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Но так как $y \neq 1$, то окончательно имеем $-1 \leqslant y < 1$.

Второе решение. Имеем

$$y = 1 - \frac{2}{x^2+1}.$$

Так как $0 \leqslant x^2 + 1 < \infty$, то дробь $\frac{2}{x^2+1}$ принимает все значения на полуинтервале $(0, 2]$, а потому $-1 \leqslant y < 1$.

696. Первое решение. Перепишем данную функциональную зависимость в виде

$$y(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = 0,$$

или

$$(y-1)x^2 - (y+1)x + y - 1 = 0.$$

Если $y = 1$, то $x = 0$. Если же $y \neq 1$, то имеем

$$x_{1,2} = \frac{y + 1 \pm \sqrt{-3y^2 + 10y - 3}}{2(y-1)}.$$

Для того чтобы x был действительным, необходимо и достаточно, чтобы $-3y^2 + 10y - 3 \geqslant 0$, или $3y^2 - 10y + 3 \leqslant 0$, т. е. $3\left(y - \frac{1}{3}\right)(y-3) \leqslant 0$, откуда следует, что $1/3 \leqslant y \leqslant 3$.

Второе решение. Представим данную функцию так:

$$y = \frac{x^2 - x + 1 + 2x}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 - x + 1}.$$

Если $x = 0$, то $y = 1$. Если же $x \neq 0$, то перепишем функцию так:

$$y = 1 + \frac{2}{-1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)}.$$

Если $x > 0$, то, как известно, выражение $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, т. е. $x + \frac{1}{x}$ достигает минимума, равного 2. Если же $x < 0$, то $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$, т. е. $x + \frac{1}{x}$ достигает максимума, равного -2. Следовательно, данная функция имеет максимум (наибольшее значение) 3, а минимум (наименьшее значение) $1/3$.

Отв. $1/3 \leqslant y \leqslant 3$.

697. Имеем

$$y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{4\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Так как $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$, то ясно, что $y \geqslant 4$.

698. Первое решение. Имеем

$$f(x, y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1. \tag{1}$$

Так как $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{x-y}{2}$ не зависят друг от друга, то, выбрав $\frac{x+y}{2}$ и $\frac{x-y}{2}$ так, чтобы $\cos\frac{x+y}{2} = 1$ и $\cos\frac{x-y}{2} = 1$, найдем наибольшее значение

$$f_{\max}(x, y) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 3,$$

что возможно, например, при $x=y=0$. Из (1) следует, что

$$f(x, y)=2\left[\left(\cos\frac{x+y}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cos^2\frac{x-y}{2}\right]-1.$$

Из этого равенства следует, что $f(x, y)$ принимает наименьшее значение, равное $\left(-\frac{3}{2}\right)$, при

$$\begin{cases}\left(\cos\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\right)^2=0,\\ \dfrac{1}{4}\cos^2\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Итак,

$$f_{\min}(x, y)=-3/2.$$

Поэтому

$$-3/2\leqslant f(x, y)\leqslant 3.$$

Второе решение. Так как $\cos x\leqslant 1$, $\cos y\leqslant 1$, $\cos(x+y)\leqslant 1$, то $f(x, y)\leqslant 3$. Равенство достигается, например, при $x=y=0$. Далее, имеем

$$f(x, y)=\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)+2\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+y\right)\geqslant 2\cos^2\frac{x}{2}-2\left|\cos\frac{x}{2}\right|-1=$$

$$=2\left[\left(\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]-1\geqslant-\frac{3}{2},$$

где равенство достигается при $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{x}{2}+y\right)=-1$, т. е. при $x=2\pi/3$, $y=2\pi/3$. Итак, $-3/2\leqslant f(x, y)\leqslant 3$.

699. Так как

$$-1\leqslant\cos(x+y)\leqslant 1,$$

$$-1\leqslant\sin(x-y)\leqslant 1,$$

то, складывая эти неравенства, получим

$$-2\leqslant\cos(x+y)+\sin(x-y)\leqslant 2,$$

или

$$-2\leqslant f(x, y)\leqslant 2.$$

Значение -2 достигается при $x=\pi/4$, $y=3\pi/4$, а значение 2 достигается при $x=\pi/4$, $y=-\pi/4$.

700. Исследуемую функцию представим так:

$$y=\frac{(x^2-x+2)-2}{x^2-x+2}=1-\frac{2}{x^2-x+2}=$$

$$=1-\frac{2}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}=1-\frac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

Дробь $\dfrac{2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$ достигает наибольшего значения при $x=1/2$, а потому при этом же значении x данная функция достигает своего наименьшего значения. Само наименьшее значение есть число

$$1-\frac{2}{7/4}=1-\frac{8}{7}=-\frac{1}{7}.$$

Отв. $-1/7$.

701. Имеем

$$y=\frac{2x^2-4x+9}{x^2-2x+4}=2\cdot\frac{2x^2-4x+9}{2x^2-4x+8}=2\cdot\frac{(2x^2-4x+8)+1}{2x^2-4x+8}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{2(x^2-2x+4)}\right]=2\left\{1+\frac{1}{2[(x-1)^2+3]}\right\}.$$

Ясно, что y достигает наибольшего значения одновременно с дробью $\frac{1}{2[(x-1)^2+3]}$. Последнее имеет место при $x-1=0$, т. е. при $x=1$. Итак, наибольшее значение $y=2\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{3}$.

702. Имеем

$$y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2-(x^2+1)+5}{(x^2+1)^2}=\frac{5}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}+1.$$

Введем обозначение $\frac{1}{x^2+1}=z$. Тогда

$$y=5z^2-z+1=\frac{1}{5}\left(5z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{20}.$$

Ясно, что y принимает наименьшее значение, равное 19/20, когда $5z=1/2$ или когда $z=1/10$, или если $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{10}$, т. е. при $x=\pm 3$.

Отв. Наименьшее значение $y=19/20$ (при $x=\pm 3$).

703. Имеем

$$y=(x-3)+\frac{1}{x-3}+2.$$

Так как $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$, то $(x-3)+\frac{1}{x-3}\geqslant 2$ при $x>3$. Следовательно, $y\geqslant 2+2=4$, а потому наименьшее значение функции равно 4. Это значение достигается при $x-3=1$, т. е. при $x=4$.

704. Функция определена, если $1-x^2\geqslant 0$, т. е. при $-1\leqslant x\leqslant 1$. Пусть $y=f(x)=3x+4\sqrt{1-x^2}$. При $x>0$ имеем $f(x)=3x+4\sqrt{1-x^2}>3(-x)+$ $+4\sqrt{1-(-x)^2}$, т. е. $f(x)>f(-x)$. Следовательно, при $x<0$ функция $f(x)$ не может достигать наибольшего значения. Остается отрезок $0\leqslant x\leqslant 1$. При этих значениях $f(x)\geqslant 0$, и потому исследуемая функция достигает наибольшего значения при тех же значениях x, что и ее квадрат. Имеем

$$y^2=(3x+4\sqrt{1-x^2})^2=9x^2+16-16x^2+24x\sqrt{1-x^2}=$$

$$=-[16x^2-24x\sqrt{1-x^2}+9(1-x^2)]+25=-(4x-3\sqrt{1-x^2})^2+25\leqslant 25.$$

Таким образом, наибольшее значение $y=\sqrt{25}=5$, если $4x-3\sqrt{1-x^2}=0$, откуда $4x=3\sqrt{1-x^2}$, или $16x^2=9-9x^2$, или $x={}^3/_5$.

Отв. Наибольшее значение $y=5$ при $x=3/5$.

705. Область определения функции находим из системы неравенств

$$\begin{cases}-x^2+4x+12\geqslant 0,\\ -x^2+2x+\ \ 3\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда

$$-1\leqslant x\leqslant 3. \qquad (1)$$

Докажем, что для всех x из области определения (1) функция $y>0$. Действительно, неравенство

$$\sqrt{-x^2+4x+12}>\sqrt{-x^2+2x+3}$$

равносильно

$$x > -4{,}5. \qquad (2)$$

Поскольку все числа из промежутка (1) удовлетворяют неравенству (2), то $y > 0$ (в области своего определения). Имеем

$$y^2 = \left[\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)}\right]^2 =$$
$$= \left[\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)}\right]^2 + 3 \geqslant 3.$$

Итак, $y^2 \geqslant 3$. Но поскольку $y > 0$, то $y \geqslant \sqrt{3}$. Таким образом, наименьшее значение данной функции равно $\sqrt{3}$. Легко убедиться, что это достигается лишь при $x = 0$.

706. Функции y и $\frac{1}{4}y^2$ достигают наибольшего значения при одном и том же значении аргумента x. Имеем

$$\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{4}x^4(a^2 - x^2) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2(a^2 - x^2).$$

Сумма $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + (a^2 - x^2) = a^2$ — постоянная величина; поэтому функция $\frac{1}{4}y^2$ достигает наибольшего значения при $\frac{1}{2}x^2 = a^2 - x^2$, т. е. при $x^2 = \frac{2a^2}{3}$. Таким образом, наибольшее значение

$$y = \frac{2a^2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{2\,|a^3|}{3\sqrt{3}} \text{ при } x^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

707. Имеем $\sin^2 x \leqslant 1$, $\cos^2 x \leqslant 1$. В силу свойства степенной функции имеем

$$\sin^4 x \leqslant \sin^2 x, \qquad \cos^6 x \leqslant \cos^2 x.$$

Сложив почленно последние два неравенства, получим

$$\sin^4 x + \cos^6 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Это значение достигается, например, при $x = k\pi$. Таким образом, наибольшее значение функции равно 1.

708. Имеем

$$y = 3\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + 4 = \left(3\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + \frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{4} =$$
$$= \left(\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

Отсюда видно, что наименьшее значение y равно $7/4$ и достигается, когда $\sqrt{3}\cos x = 3/2$, или $\cos x = \sqrt{3}/2$, т. е. при $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Ясно, что наибольшее значение функции равно

$$\left(-\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 7 + 3\sqrt{3}.$$

Оно достигается при $\cos x = -1$, т. е. при $x = \pi + 2k\pi$.

709. Рассмотрим функцию

$$y^2 = \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{2}{\sin x \cos x} = \frac{4}{\sin^2 2x} + \frac{4}{\sin 2x}.$$

Каждое из выражений $\frac{4}{\sin^2 2x}$ и $\frac{4}{\sin 2x}$ при возрастании x от нуля до $\pi/2$ ведет себя так: сначала убывает от $+\infty$ до 4 (когда $0 < x \leqslant \pi/4$), затем возрастает от 4 до $+\infty$ (когда $\pi/4 \leqslant x < \pi/2$); оба выражения при $x = \pi/4$ одновременно принимают наименьшие значения, значит, и их сумма будет иметь наименьшее значение при $x = \pi/4$. Если $x = \pi/4$, то $y^2 = 8$. Таким образом, если $0 < x < \pi/2$, то $y^2 \geqslant 8$, а так как $\cos x$ и $\sin x$ в первом квадранте положительны, то $y \geqslant 2\sqrt{2}$.

710. Данную функцию перепишем в следующем виде:

$$y = \left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^3 + \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Функция $\left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^3$ достигает наименьшего значения, равного $-2\sqrt{2}$, при $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, т. е. при $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Функция $\frac{4}{\sin^2 2x}$ имеет минимум, равный 4, при $\sin^2 2x = 1$, т. е. при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Заметим, что если $x = \frac{\pi}{4} + \pi$, то одновременно $\sin^2 2x = 1$ и $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. Значит, в этой точке достигается минимум данной функции. Итак, наименьшее значение функции y равно $4 - 2\sqrt{2}$.

711. Из условия $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} y) = 2$ следует, что

$$1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y,$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 1.$$

Но так как $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, то

$$\operatorname{tg}(x + y) = 1.$$

Следовательно, наименьшее положительное значение суммы $x + y$ есть $\pi/4$.

712. Так как $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то функция

$$y = \frac{\pi}{2}\arcsin x - (\arcsin x)^2 = \frac{\pi^2}{16} - \left(\arcsin x - \frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Ясно, что функция y принимает наибольшее значение, когда $\arcsin x - \frac{\pi}{4} = 0$, т. е. при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а наименьшее значение, когда $\arcsin x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$, т. е. при $x = -1$.

Отв. Наибольшее значение функции равно $\pi^2/16$, а наименьшее равно $-\pi^2/2$.

713. Первое решение. Имеем

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} = (x^2 - y^2)^2 + 2\left(\frac{1}{x^2y^2} + x^2y^2\right).$$

Очевидно, что при $|x| = |y| = 1$ оба слагаемых одновременно принимают наименьшие значения. Следовательно, наименьшее значение $f(x, y)$ есть $0 + 2\cdot(1 + 1) = 4$.

Второе решение. Так как $a+b+c+d\geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$ для неотрицательных a, b, c, d, то

$$f(x,\ y)=x^4+y^4+\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{x^2y^2}\geqslant 4\sqrt[4]{x^4\cdot y^4\cdot\frac{1}{x^2y^2}\cdot\frac{1}{x^2y^2}}=4\cdot 1=4.$$

Следовательно, наименьшее значение $f(x,\ y)$ есть 4. Оно достигается, например, при $|x|=|y|=1$.

714. Имеем

$$z=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right).$$

Отсюда ясно, что

$$z\leqslant 2\sin\frac{x+y}{2}\left(1+\cos\frac{x+y}{2}\right) \qquad (1)$$

(равенство достигается при $x=y$). Теперь представим неравенство (1) в таком виде:

$$z\leqslant 2\cdot 2\sin\frac{x+y}{4}\cos\frac{x+y}{4}\cdot 2\cos^2\frac{x+y}{4},$$

или

$$z\leqslant 8\sin\frac{x+y}{4}\cos^3\frac{x+y}{4}. \qquad (2)$$

Так как $0\leqslant\frac{x+y}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{x+y}{4}>0$, $\cos\frac{x+y}{4}>0$. Следовательно, из соотношения (2) вытекает, что

$$\frac{z^2}{27\cdot 64}\leqslant\sin^2\frac{x+y}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}\cdot\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}. \qquad (3)$$

Поскольку сумма сомножителей правой части неравенства (3) постоянна, т. е.

$$\sin^2\frac{x+y}{4}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4}=1,$$

то правая часть соотношения (3) достигает максимума при равенстве сомножителей, т. е. при

$$\sin^2\frac{x+y}{4}=\frac{1}{3}\cos^2\frac{x+y}{4},\quad\text{или}\quad \operatorname{tg}^2\frac{x+y}{4}=\frac{1}{3},\quad\text{или}\quad \operatorname{tg}\frac{x+y}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Отсюда следует, что максимум достигается, когда $\cos\frac{x+y}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\frac{x+y}{4}=\frac{1}{2}$, т. е. при $x=y=\frac{\pi}{3}$, а сам максимум

$$z_{\max}=8\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

715. Рассмотрим выражение

$$N=(a_1-zx_1)^2+(a_2-zx_2)^2+\ldots+(a_n-zx_n)^2.$$

Выражение N является квадратичной функцией аргумента z, которая имеет вид

$$N=z^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2z\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

При любых действительных значениях z, x_i, a_i функция N принимает неотрицательные значения. Это значит, что при любых действительных x_i, a_i дискриминант этого трехчлена не больше нуля, поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leqslant 0,$$

или

$$\frac{(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2}{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2).$$

Таким образом,

$$M_{\max} = a_1^2 + \ldots + a_n^2$$

при $\frac{a_1}{x_1} = \ldots = \frac{a_n}{x_n}$.

716. Функция определена на всей числовой оси. Если $x < 0$, то данная функция перепишется в следующем виде:

$$y = x - x - x + 1 = -x + 1.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то функция принимает вид

$$y = x + x - x + 1 = x + 1.$$

Наконец, если $x > 1$, то исследуемая функция такова:

$$y = x + x + x - 1 = 3x - 1.$$

График данной функции изображен на рис. 19 сплошной линией.

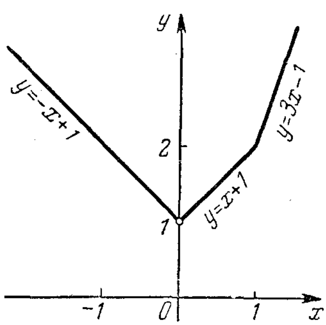

Рис. 19.

717. Функция определена на всей числовой оси. Вначале строим график функции $y = |x|$, затем сдвигаем этот график вправо на 1 (что дает график функции $y = |x - 1|$) и опускаем на 1 вдоль оси ординат (что дает график функции $y = |x - 1| - 1$).

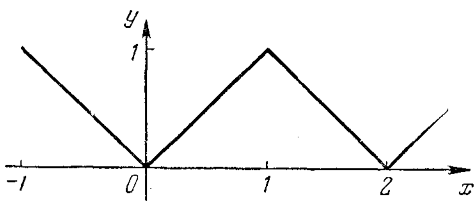

Рис. 20.

Наконец, сохраняем те части полученного графика, которые расположены не ниже оси абсцисс, а те части, которые расположены ниже оси абсцисс, отражаем симметрично относительно оси x. График данной функции показан на рис. 20.

718. Функция определена на всей числовой оси, кроме точек -1, 0, $+1$. Если $x < -1$, то данная функция перепишется в следующем виде:

$$y = \frac{x(x-1)}{-x} + \frac{x(x+1)}{-(x+1)} + \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)},$$

или $y = -x + 1 - x - x - 1$. Итак, если

$$x < -1, \quad \text{то} \quad y = -3x. \qquad (1)$$

Если $-1<x<0$, то функция имеет такой вид:

$$y=\frac{x(x-1)}{-x}+\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)},$$

или $y=-x+1+x-x-1$. Таким образом, если

$$-1<x<0, \quad \text{то} \quad y=-x. \tag{2}$$

Если $0<x<1$, то данную функцию перепишем так:

$$y=\frac{x(x-1)}{x}+\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)},$$

или $y=x-1+x-x-1$. Следовательно, если

$$0<x<1, \quad \text{то} \quad y=x-2. \tag{3}$$

Наконец, если $x>1$, то данная функция имеет вид

$$y=\frac{x(x-1)}{x}+\frac{x(x+1)}{x+1}+\frac{(x-1)(x+1)}{x-1},$$

или $y=x-1+x+x+1$. Значит, если

$$x>1, \quad \text{то} \quad y=3x. \tag{4}$$

Учитывая (1)—(4), *можно легко построить график данной функции.* График показан на рис. 21.

719. Функция определена на всей числовой оси. Если $x^2+x\geqslant 0$, т. е. если $x\geqslant 0$

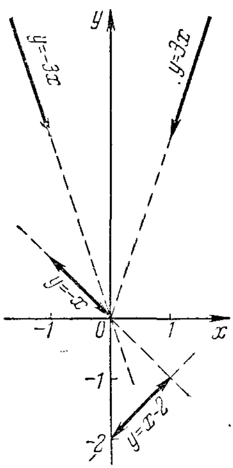

Рис. 21.

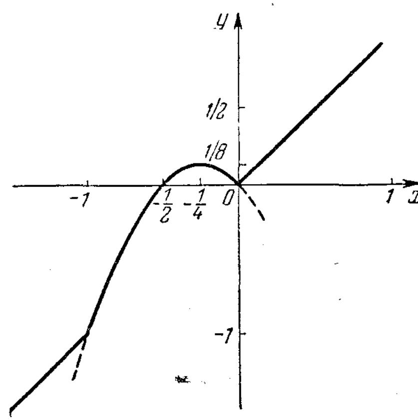

Рис. 22.

или $x\leqslant -1$, то $y=x$. Таким образом, части биссектрисы первого и третьего координатных углов на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[0, +\infty)$ принадлежат графику исследуемой функции. Если $x^2+x\leqslant 0$, т. е. если $-1\leqslant x\leqslant 0$, то данная функция $y=-2x^2-x$. Значит, часть параболы $y=-2x^2-x$ на промежутке $-1\leqslant x\leqslant 0$ принадлежит графику данной функции. График данной функции показан на рис. 22 сплошной линией.

720. Функция определена на всей числовой оси, кроме точек -1 и 0. Если $x<-1$, то данная функция перепишется в следующем виде:

$$y=x^2+\frac{x^2}{-x}+\frac{(x+1)^2}{-(x+1)},$$

или $y = x^2 - x - x - 1$. Итак, если

$$x < -1, \quad \text{то} \quad y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2. \qquad (1)$$

Если $-1 < x < 0$, то функция имеет вид

$$y = x^2 + \frac{x^2}{-x} + \frac{(x+1)^2}{x+1},$$

или $y = x^2 - x + x + 1$. Таким образом, если

$$-1 < x < 0, \quad \text{то} \quad y = x^2 + 1. \qquad (2)$$

Наконец, если $x > 0$, то данная функция такова:

$$y = x^2 + \frac{x^2}{x} + \frac{(x+1)^2}{x+1},$$

или $y = x^2 + x + x + 1$. Значит, если

$$x > 0, \quad \text{то} \quad y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2. \qquad (3)$$

Таким образом, график состоит из частей парабол (1)—(3). График показан на рис. 23 сплошной линией.

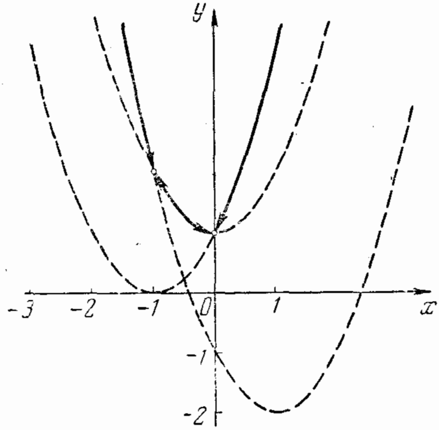

Рис. 23.

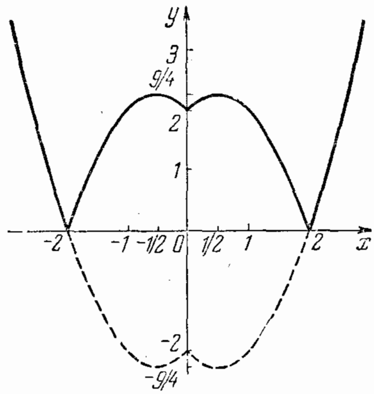

Рис. 24.

721. Функция определена на всей числовой оси. Вначале построим график функции

$$y = x^2 - |x| - 2. \qquad (1)$$

Функция (1) (а вместе с ней и данная) четная, а потому ее график симметричен относительно оси ординат.

Если $x \geqslant 0$, то функция (1) перепишется в следующем виде:

$$y = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}. \qquad (2)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае ($x \geqslant 0$) график функции (2) пересекает ось абсцисс в точке $x = 2$. Функция (2) достигает минимума в точке $x = 1/2$, а сам минимум равен $-9/4$. Если $x = 0$, то $y = -2$, точка $(0; -2)$ принадлежит графику.

Теперь у нас достаточно данных для построения графика функции (1) при $x \geqslant 0$. В силу четности функции (1) мы можем построить и ту часть графика, которая соответствует $x < 0$, для чего построенную часть графика (при $x \geqslant 0$) следует симметрично отразить относительно оси ординат. Для получения графика данной функции сохраняем те части графика функции (1), которые расположены над осью абсцисс (т. е. левее точки -2 и правее точки 2), а часть графика функции (1), расположенную между точками -2 и 2, отражаем симметрично относительно оси абсцисс. График данной функции показан на рис. 24 сплошной линией.

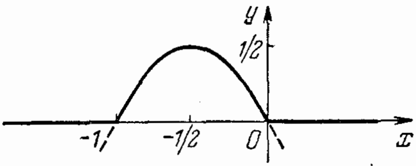

Рис. 25.

722. Функция определена на всей числовой оси. Если $x^2+x \geqslant 0$, т. е. если $x \geqslant 0$ или $x \leqslant -1$, то $y=0$. Следовательно, промежутки оси абсцисс $(-\infty, -1]$ и $[0, +\infty)$ принадлежат графику функции. Если $x^2+x \leqslant 0$, т. е. если $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то $y=-2x^2-2x$. Значит, часть параболы $y=-2x^2-2x$, расположенная не ниже оси абсцисс, служит частью графика исследуемой функции. График функции показан на рис. 25 сплошной линией.

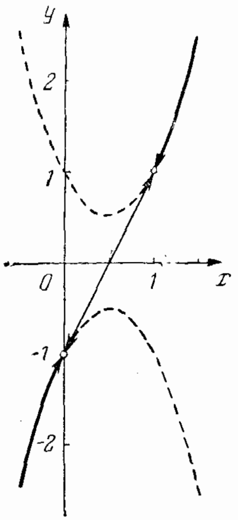

Рис. 26.

723. Функция определена на всей числовой оси, кроме точек 0 и 1. Если $x<0$, то данная функция перепишется в следующем виде:

$$y=\frac{(x-1)^3}{-(x-1)}+\frac{-x^3}{x},$$

или $y=-(x-1)^2-x^2$. Значит, если

$$x<0, \quad \text{то} \quad y=-2x^2+2x-1. \qquad (1)$$

Если $0<x<1$, то функция имеет вид

$$y=\frac{(x-1)^3}{-(x-1)}+\frac{x^3}{x},$$

или $y=-(x-1)^2+x^2$. Следовательно, если

$$0<x<1, \quad \text{то} \quad y=2x-1. \qquad (2)$$

Наконец, если $x>1$, то данная функция такова:

$$y=\frac{(x-1)^3}{x-1}+\frac{x^3}{x},$$

или $y=(x-1)^2+x^2$. Итак, если

$$x>1, \quad \text{то} \quad y=2x^2-2x+1. \qquad (3)$$

Таким образом, график функции состоит из частей парабол (1) и (3) и из части прямой (2). График показан на рис. 26 сплошными линиями.

724. Перепишем исследуемую функцию в следующем виде:

$$y=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2},$$

т. е.

$$y=|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|.$$

Если $0 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 1$, т. е. если $1 \leqslant x \leqslant 2$, то

$$y=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2,$$

а если $\sqrt{x-1}>1$, т. е. $x>2$, то

$$y=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}.$$

Из изложенного следует, что функция определена на полуинтервале $[1, +\infty)$, а ее график имеет вид, показанный на рис. 27 сплошной линией.

725. Функция определена на всей числовой оси. Перепишем исследуемую функцию в следующем виде:

$$y = x \cdot x \cdot (1 - x).$$

Таким образом, корнями функции являются числа 0 и 1, причем 0 —

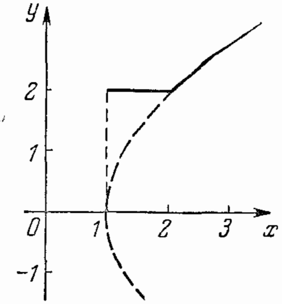

Рис. 27.

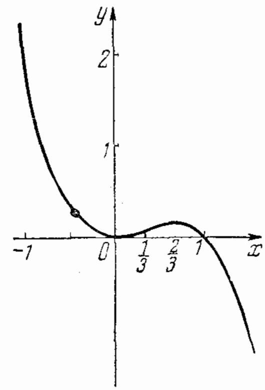

Рис. 28.

двукратный корень. Следовательно, график исследуемой функции касается оси x в точке 0, а в точке 1 пересекает эту ось. Очевидно, что на интервале $0 < x < 1$ функция $y > 0$. В силу изложенного ясно, что на интервале $0 < x < 1$ исследуемая функция имеет максимум. Найдем его. Имеем

$$y = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (1 - x).$$

Исследуемая функция и функция

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (1 - x) \tag{1}$$

достигают максимума при одном и том же значении x. Так как сумма $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (1 - x) = 1$ — постоянная величина и на интервале $(0, 1)$ сомножители $x/2$ и $1 - x$ положительны, то функция (1), а вместе с ней и исследуемая достигают максимума при равенстве сомножителей, т. е. когда $x/2 = 1 - x$, откуда $x = {}^2/_3$. Сам максимум равен $({}^2/_3)^2 - ({}^2/_3)^3 = {}^4/_{27}$. Наконец, заметим, что если $x \to -\infty$, то $y \to +\infty$, а если $x \to +\infty$, то $y \to -\infty$. График функции показан на рис. 28.

726. Данная функция определена на всей числовой оси. График функции имеет две общие точки 0 и 1 с осью абсцисс, так как при этих значениях аргумента x функция $y = 0$, а поскольку $x^4(1 - x)^2 \geqslant 0$, то график данной функции расположен не ниже оси абсцисс. В силу изложенного заключаем, что функция достигает минимума в точках 0 и 1, равного нулю. Ясно, что если $x \to \pm\infty$, то $y \to \infty$. Также очевидно, что на интервале $(0, 1)$ функция имеет максимум. Найдем его. Рассмотрим функцию

$$\frac{x^4}{16}(1 - x)^2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}(1 - x)(1 - x). \tag{1}$$

Так как сумма $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + (1 - x) + (1 - x) = 2$ — постоянная величина, то функция (1) достигает максимума при значении x, являющемся корнем уравнения $x/2 = 1 - x$, т. е. при $x = 2/3$. При этом значении x

и данная функция имеет максимум, так как она отличается от функции (1) лишь постоянным коэффициентом 729. Сам максимум равен

$$\frac{729}{16} \cdot \frac{2^4}{3^4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1.$$

Полученных данных достаточно для построения графика (рис. 29).

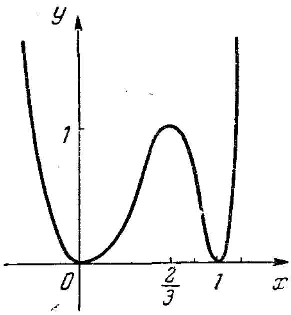

Рис. 29.

727. Функция определена на всей числовой оси, так как $4x^2+1>0$ при любом значении x. Функция нечетная, поскольку

$$\frac{2(-x)}{4(-x)^2+1} = -\frac{2x}{4x^2+1} = -y$$

и область определения функции симметрична относительно нуля. Следовательно, график исследуемой функции симметричен относительно начала координат. Если $x=0$, то и $y=0$, а потому график проходит через начало координат. Если же $x \neq 0$, то перепишем исследуемую функцию в следующем виде:

$$y = \frac{\frac{2}{x}}{4+\frac{1}{x^2}}.$$

Теперь видно, что если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$, причем если $x \to +\infty$, то $y>0$, а если $x \to -\infty$, то $y<0$. Таким образом, ось абсцисс служит двусторонней асимптотой. Через начало координат и другую произвольную точку $(x;\ y)$ графика проведем секущую. Пусть эта секущая образует с осью абсцисс угол α. Имеем

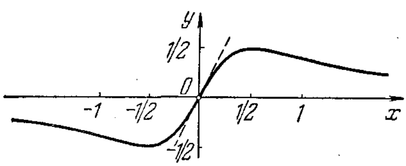

Рис. 30.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2x}{x(4x^2+1)} = \frac{2}{4x^2+1}.$$

Если $x \to 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{4x^2+1} \to 2$. Следовательно, прямая $y=2x$ является касательной графика в точке $(0;\ 0)$. Наконец, найдем экстремальные значения функции. Пусть

$$\frac{2x}{4x^2+1} = a.$$

Перепишем это равенство в виде

$$4ax^2 - 2x + a = 0.$$

Решая это равенство относительно x, получим

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{4a}.$$

Функция достигает экстремума, когда $x_1 = x_2$, т. е. когда $1-4a^2=0$, откуда $a = \pm {}^1/_2$. Эти экстремальные значения функции соответствуют аргументам

$$x_{1,2} = 1/4a = \pm {}^1/_2.$$

Ясно, что в точке $x = {}^1/_2$ функция имеет максимум, а в точке $x = -{}^1/_2$ — минимум. Максимум исследуемой функции можно найти и иначе. Имеем $y = \frac{1}{2x+\frac{1}{2x}}$. При $x>0$ функция $2x+\frac{1}{2x} \geqslant 0$, т. е. знаменатель данной функции имеет минимум при $x = {}^1/_2$, а потому исследуемая функция достигает максимума в этой же точке.

График функции показан на рис. 30.

728. Функция определена на всей числовой оси. Так как $|x| \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, то $y > 0$ при любом x, т. е. график данной функции расположен выше оси абсцисс. Функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси ординат. Перепишем данную функцию так:

$$y = \frac{|x|+1}{|x|^2+1} = \frac{\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2}}{1 + \frac{1}{|x|^2}}.$$

Теперь видно, что если $x \to \pm\infty$, то $y \to 0$. Следовательно, ось абсцисс — асимптота графика функции. Если $x \geqslant 0$, то данная функция запишется в следующем виде:

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Пусть

$$\frac{x+1}{x^2+1} = a, \quad \text{или} \quad ax^2 - x - 1 + a = 0.$$

Экстремальное значение функции определим из условия равенства нулю дискриминанта

$$1 + 4a - 4a^2 = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Но так как $a > 0$, то имеем лишь $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Этому экстремальному значению соответствует единственное положительное значение $x = \sqrt{2} - 1$. Для уточнения графика определим несколько его точек (для $x \geqslant 0$). Если $x = 0$, то $y = 1$; если $x = 1$, то $y = 1$; если $x = 2$, $y = {}^3/_5$. Наконец, заметим, что $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ есть максимум функции, так как в окрестности точки $\sqrt{2} - 1$ функция $y < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Теперь мы имеем достаточно данных для построения правой ($x \geqslant 0$) части графика. Левая часть графика строится симметрично правой относительно оси ординат.

Максимум исследуемой функции можно найти и другим способом. Имеем

$$y = \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x+1}{(x+1)^2 - 2(x+1) + 2} = \frac{1}{x + 1 + \frac{2}{x+1} - 2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x+1}\right) - 2}.$$

Знаменатель принимает наименьшее значение (равное $2\sqrt{2} - 2$) при

$\frac{x+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{x+1}=1$, т. е. при $x=\sqrt{2}-1$. Значит, функция y имеет максимум, равный $\frac{1}{2\sqrt{2}-2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

График данной функции изображен на рис 31.

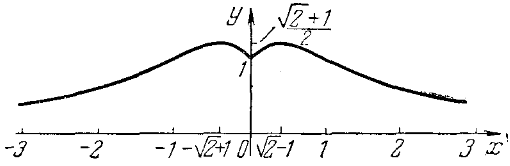

Рис. 31.

729. Исследуемая функция определена на всей числовой оси. Функция четная, а потому вначале построим график для $x \geqslant 0$, а затем достроим ту часть графика, которая соответствует $x<0$, путем симметричного отражения части графика для $x \geqslant 0$ относительно оси ординат. Если $x \to \infty$, то $y \to 0$, причем $y>0$. Следовательно, ось x является горизонтальной асимптотой. Данную функцию (для $x \geqslant 0$) можно переписать так:

$$y=\frac{x^2+1-x^2+2x-1}{x^2+1}=1-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

Отсюда видно, что функция достигает максимума, равного 1, при $x=1$. В силу четности функции функция имеет также максимум в точке -1, равный 1. Теперь найдем касательную к графику в точке 0. Имеем

$$\frac{y}{x}=\frac{2}{x^2+1}.$$

Ясно, что если $x \to 0$, то отношение $y/x \to 2$, т. е. уравнение касательной в точке 0 есть $y=2x$. Так как функция четная, то прямая $y=-2x$ также является касательной графика в точке 0 (для левой части графика).

График функции изображен на рис. 32.

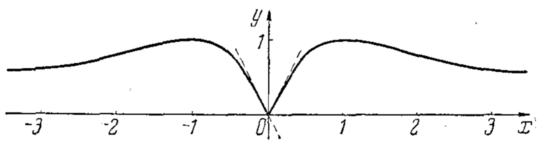

Рис. 32.

730. Так как дискриминант квадратного трехчлена x^2-x+1 отрицателен, то $x^2-x+1>0$ при любом x. Поэтому исследуемая функция определена на всей числовой оси и ее график расположен выше оси x. Поскольку при $x \to \pm\infty$ функция $y \to 0$, то ось x является горизонтальной асимптотой графика функции. Теперь найдем экстремальное значение функции. Ясно, что функция x^2-x+1 имеет минимум, а потому данная функция имеет максимум, причем этот максимум достигается в той же точке, что и минимум функции x^2-x+1. Известно, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает экстремальное значение в точке $x=-b/2a$. Следовательно, исследуемая функция достигает максимума в точке $^1/_2$, а сам максимум

$$y_{\max}=\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1}=\frac{8}{3}.$$

Впрочем, максимум исследуемой функции можно найти и иначе. Пусть

$$\frac{2}{x^2-x+1}=a.$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$ax^2-ax+(a-2)=0.$$

Решая это равенство относительно x, получим

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{8a-3a^2}}{2a}.$$

Данная функция достигает своего максимума при $x_1=x_2$, т. е. когда $8a-3a^2=0$. Так как $a\neq 0$, то $a={}^8/_3$, т. е. $y_{\max}={}^8/_3$. Этому значению y соответствует $x={}^1/_2$. Для уточнения графика найдем несколько его точек:

x	-1	0	1	2
y	2/3	2	2	2/3

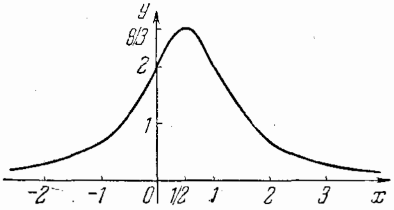

Рис. 33.

Нанеся все полученные данные на координатную плоскость, получим график исследуемой функции (рис. 33).

731. Перепишем данную функцию в виде

$$y=\frac{4\,|x|}{(x+1)(x-2)}.$$

Теперь видно, что функция определена на трех интервалах: $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 2)$, $(2,\ +\infty)$, а следовательно, график состоит из трех ветвей. Если $x\to -1$ слева, то $y\to+\infty$; если $x\to-1$ справа, то $y\to-\infty$; если $x\to 2$ слева, то $y\to-\infty$; если $x\to 2$ справа, то $y\to+\infty$. Таким образом, прямые $x=-1$ и $x=2$ являются двусторонними вертикальными асимптотами. Если $x=0$, то и $y=0$, т. е. начало координат принадлежит графику функции. Очевидно, что на интервале $(-1,\ 2)$ ветвь графика расположена не выше оси абсцисс, а на интервалах $(-\infty,\ -1)$ и $(2,\ +\infty)$ ветви графика расположены выше оси абсцисс. Определим касательные к графику в точке 0. Если $x<0$, то имеем

$$\frac{y}{x}=\frac{-4}{x^2-x-2}.$$

Ясно, что если $x\to 0$, то $y/x\to 2$, т. е. уравнение левой касательной есть $y=2x$. Если $x>0$, то

$$\frac{y}{x}=\frac{4}{x^2-x-2}.$$

В этом случае, если $x\to 0$, то $y/x\to -2$, т. е. уравнение правой касательной есть прямая $y=-2x$.

Рассмотрим разность $2x-y$ при $x<0$; имеем

$$2x-\frac{4\,|x|}{x^2-x-2}=2x+\frac{4x}{x^2-x-2}=\frac{2x\,(x^2-x)}{(x+1)(x-2)}.$$

Найденная разность на интервале $(-1,\ 0)$ положительна. Следовательно, касательная $y=2x$ (проведенная в точке 0) расположена выше соответствующей ветви графика. Теперь рассмотрим разность $-2x-y$ при $x>0$: имеем

$$-2x-\frac{4x}{x^2-x-2}=\frac{-2x(x^2-x)}{(x+1)(x-2)}.$$

Очевидно, что последняя разность отрицательна на интервале (0, 1) и положительна на интервале (1, 2). Значит, ветвь графика на интервале (0, 1) расположена выше касательной $y=-2x$ (проведенной в точке 0), а на интервале (1, 2) ниже этой касательной. Отсюда следует, что касательная $y=-2x$ пересекает график функции в точке (1, 2). График показан на рис. 34.

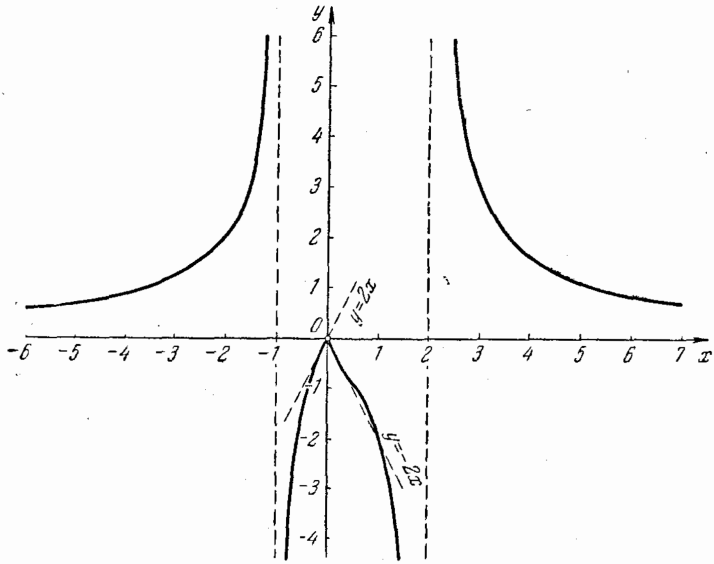

Рис. 34.

732. Данную функцию перепишем в следующем виде:

$$y=\frac{2x^3}{(x-1)(3x^2-x+1)}.$$

Так как корни квадратного трехчлена $3x^2-x+1$ комплексные, то знаменатель функции равен нулю лишь при $x=1$. Таким образом, данная функция определена на двух интервалах: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Если $x=0$, то и $y=0$, следовательно, график функции проходит через начало координат. Квадратный трехчлен $3x^2-x+1>0$ при любом значении x; поэтому, если $x\to 1$ слева, то $y\to-\infty$, а если $x\to 1$ справа, то $y\to+\infty$. Значит, прямая $x=1$ является двусторонней вертикальной асимптотой, причем левая ветвь устремляется вниз, а правая — вверх. Перепишем исследуемую функцию в виде

$$y=\frac{2}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}.$$

Ясно, что если $x\to\pm\infty$, то $y\to{}^2/_3$, а потому прямая $y={}^2/_3$ служит горизонтальной асимптотой, причем ясно, что левая ветвь графика функции расположена ниже асимптоты, а правая — выше. Наконец, покажем, что в начале координат ось абсцисс касается графика функции. Имеем

$$\frac{y}{x}=\frac{2x^3}{3x^3-4x^2+2x-1}.$$

Ясно, что если $x\to 0$, то $y/x\to 0$. Следовательно, ось абсцисс служит касательной графика функции в начале координат. График показан на рис. 35.

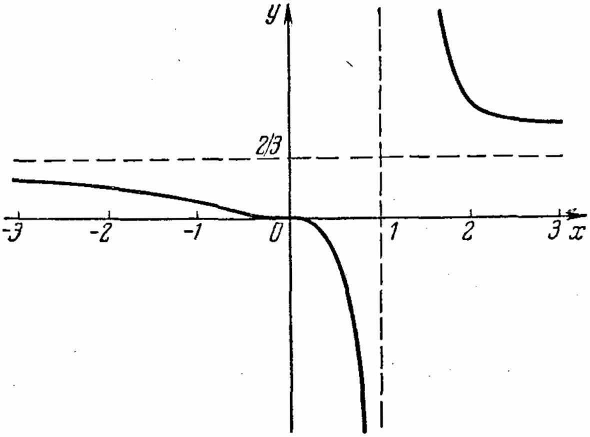

Рис. 35.

733. Функция определена для всех x, кроме нуля. Ясно, что если $x\to 0$ справа, то $y\to+\infty$, а если $x\to 0$ слева, то $y\to-\infty$. Таким образом, ось ординат является двусторонней асимптотой, причем график уходит вверх справа, а слева — вниз. Если $x\to\pm\infty$, то $y\to 0$. Следовательно, ось x служит горизонтальной асимптотой. Если $x>0$, то функция убывающая, а потому при $x>0$ функция не имеет экстремальных значений. Теперь рассмотрим функцию при $x<0$. Введем обозначение $x=-1/z$, где $z>0$. Имеем

$$y=27(z^2-z^3)=27\cdot z^2(1-z)=$$
$$=27\cdot 4\cdot\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{2}(1-z).$$

Ясно, что y достигает экстремального значения одновременно с функцией $\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{2}(1-z)$. Так как сумма $\frac{z}{2}+\frac{z}{2}+(1-z)=1$ — постоянна, то произведение $\frac{z}{2}\cdot\frac{z}{2}(1-z)$ достигает максимума при равенстве сомножителей, т. е. при $z/2=1-z$, откуда $z={}^2/_3$. Но поскольку $x=-1/z$, то исследуемая функция имеет максимум при $x=-{}^3/_2$, а потому максимум функции равен 4. Если $y=0$, то $x+1=0$, откуда $x=-1$, т. е. график функции пересекает ось x в точке -1. График исследуемой функции показан на рис. 36.

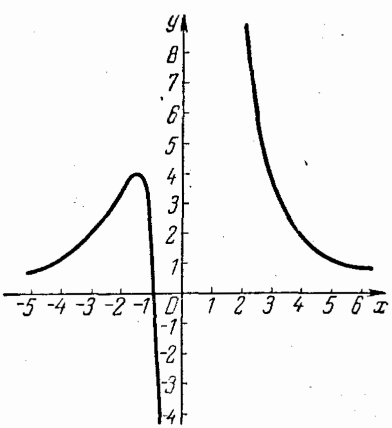

Рис. 36.

734. Исследуемая функция определена на всей числовой оси, кроме нуля. Ясно, что если $x \to 0$ слева, то функция $y \to -\infty$, а если $x \to 0$ справа, то функция $y \to +\infty$. Следовательно, ось ординат служит двусторонней вертикальной асимптотой. Поскольку исследуемая функция нечетная, то вначале построим ту часть графика функции, которая соответствует положительным значениям аргумента x, а для получения ветви графика для $x < 0$ отразим уже построенную часть (для $x > 0$) относительно начала координат. Перепишем данную функцию в следующем виде:

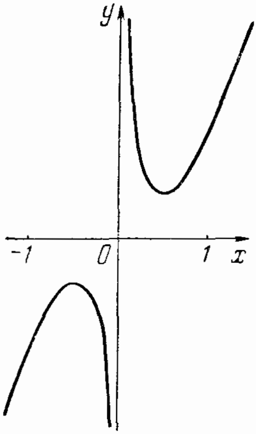

Рис. 37.

$$y = x^3 + \frac{3}{16x} = x^3 + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x} + \frac{1}{16x}.$$

Так как произведение

$$x^3 \cdot \frac{1}{16x} \cdot \frac{1}{16x} \cdot \frac{1}{16x} = \frac{1}{16^3}$$

есть постоянная величина, то исследуемая функция достигает минимума при условии

$$x^3 = \frac{1}{16x}, \text{ т. е. } x = \frac{1}{2}.$$

Минимум функции равен

$$\frac{16 \cdot (^1/_2)^4 + 3}{16 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку график функции симметричен относительно начала координат, то функция имеет максимум, равный $-^1/_2$ при $x = -^1/_2$. Наконец, заметим, что если $x \to +\infty$, то и $y \to +\infty$, а если $x \to -\infty$, то $y \to -\infty$. График функции показан на рис. 37.

735. Исследуемая функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = -1$. Рассмотрим поведение функции при $x \to -1$. Если $x \to -1$ слева, то числитель стремится к постоянному числу 6, а знаменатель $x + 1 \to 0$, причем $x + 1 < 0$. Если же $x \to -1$ справа, то числитель стремится к тому же постоянному числу, как и при стремлении x к -1 слева, а знаменатель $x + 1 \to 0$, причем $x + 1 > 0$. Следовательно, если $x \to -1$ слева, то $y \to -\infty$, а если $x \to -1$ справа, то $y \to +\infty$. Так как в точке $x = -1$ функция не определена и при $x \to -1$ функция $y \to \pm\infty$, то прямая $x = -1$ является двусторонней вертикальной асимптотой графика функции. Теперь найдем асимптоту, не параллельную оси ординат. Имеем

$$\frac{y}{x} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)x} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot 1}.$$

Очевидно, что если $x \to \infty$, то $y/x \to 1$. Таким образом, для асимптоты $y = ax + b$ коэффициент $a = 1$. Далее,

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - 1 \cdot x = \frac{-4x + 2}{x + 1} = \frac{-4 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Ясно, что если $x \to \infty$, то рассматриваемая разность стремится к числу -4, т. е. $b = -4$. Итак, уравнение асимптоты (наклонной) есть

$$y = x - 4.$$

Теперь исследуем положение графика относительно найденной асимптоты. Рассмотрим разность

$$\frac{x^2-3x+2}{x+1}-(x-4)=\frac{6}{x+1}.$$

Видно, что если $\frac{6}{x+1}>0$, т. е. $x>-1$, то график расположен над асимптотой. Если же $\frac{6}{x+1}<0$, т. е. $x<-1$, то график расположен под асимптотой. Перейдем к нахождению точек экстремума функции. Пусть

$$\frac{x^2-3x+2}{x+1}=a,$$

или

$$x^2-(a+3)x+2-a=0.$$

В точках экстремума должно быть $x_1=x_2$, а следовательно, дискриминант

$$(a+3)^2-4(2-a)=0,$$

или

$$a^2+10a+1=0,$$

откуда получаем экстремальные значения функции:

$$a_1=-5+2\sqrt{6},\ a_2=-5-2\sqrt{6}.$$

Соответствующие им значения аргумента:

$$x_1=\sqrt{6}-1,\ x_2=-(\sqrt{6}+1).$$

Так как на интервале $(-\infty, -1)$ при $x\neq-(\sqrt{6}+1)$ функция $y<-5-2\sqrt{6}$ и поскольку на интервале $(-1, +\infty)$ функция $y>-5+2\sqrt{6}$ при $x\neq\sqrt{6}-1$, то в точке $-(\sqrt{6}+1)$ функция достигает максимума, а в точке $x=\sqrt{6}-1$ — минимума. Максимум и минимум исследуемой функции можно найти и по другому. Имеем

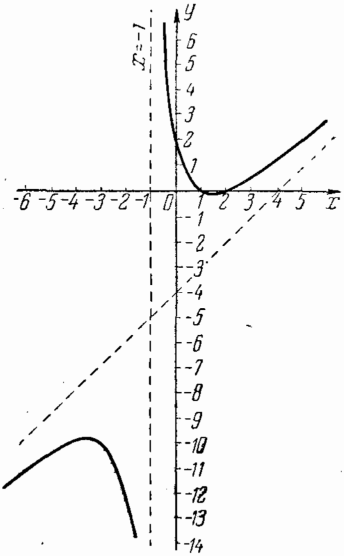

Рис. 38.

$$y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{(x+1)^2-5(x+1)+6}{x+1}=$$

$$=x+1+\frac{6}{x+1}-5=\sqrt{6}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{x+1}\right)-5.$$

Отсюда видно, что при $\frac{x+1}{\sqrt{6}}=1$, т. е. при $x=\sqrt{6}-1$, рассматриваемая функция достигает минимума, равного $2\sqrt{6}-5$, а при $\frac{x+1}{\sqrt{6}}=-1$, т. е. при $x=-1-\sqrt{6}$, — максимума, равного $-5-2\sqrt{6}$. Наконец, заметим, что график функции пересекает ось x в точках 1 и 2, а ось y — в точке (0; 2). График показан на рис. 38.

736. Функция определена на всей числовой оси, кроме нуля. Так как функция нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат. Поэтому вначале построим график для $x>0$, а потом симметричным отражением построенной части относительно начала координат получим ту часть графика, которая соответствует $x<0$. Если $x>0$, то $y=x^4-x^2$.

Поскольку $y = x^2(x+1)(x-1)$, то точка $x=1$ оси абсцисс принадлежит графику функции. Очевидно, что если $x>1$, то $x^4>x^2$, а потому $y>0$ при $x>1$. Если же $0<x<1$, то $x^4<x^2$, и, следовательно, $y<0$ при $0<x<1$. Далее, пусть $x^4-x^2=a$. Решим это уравнение относительно x:

$$x = +\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}}.$$

Отсюда видно, что корни будут кратными при $a=-{}^1/_4$ и при $a=0$. Если $a=-{}^1/_4$, то $x=+\sqrt{2}/2$, а если $a=0$, то $x=0$. Но так как $x \neq 0$, то имеем лишь $a=-{}^1/_4$ при $x=+\sqrt{2}/2$. Так как в окрестности точки $\sqrt{2}/2$ функция больше (в алгебраическом смысле), чем $-{}^1/_4$, то в точке $x=\sqrt{2}/2$ исследуемая функция имеет минимум, равный $-{}^1/_4$.

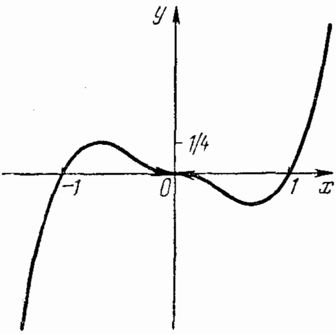

Рис. 39.

Впрочем, исследование функции можно провести и так. Имеем $y=x^4-x^2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, откуда видно, что y достигает минимума (при $x>0$), когда $x^2-\frac{1}{2}=0$, т. е. при $x=1/\sqrt{2}$, причем этот минимум равен $-{}^1/_4$. В силу нечетности функции, в точке $x=-\sqrt{2}/2$ функция достигает максимума, равного $+{}^1/_4$. Также заметим, что если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$, а если $x \to -\infty$, то $y \to -\infty$. График функции показан на рис. 39.

737. Функция определена на отрезке $[-1, 1]$. Если $-\pi/2 \leqslant \arcsin x < 0$, т. е. если $-1 \leqslant x < 0$, то $\operatorname{sign} \arcsin x = -1$. Если $\arcsin x = 0$, т. е. если $x=0$, $\operatorname{sign} \arcsin x = 0$. Если $0 < \arcsin x \leqslant \pi/2$, т. е. если $0 < x \leqslant 1$, то $\operatorname{sign} \arcsin x = 1$. Таким образом, график функции состоит из двух прямолинейных линий и изолированной точки (начало координат). График данной функции показан на рис. 40.

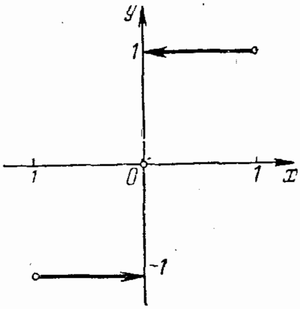

Рис. 40.

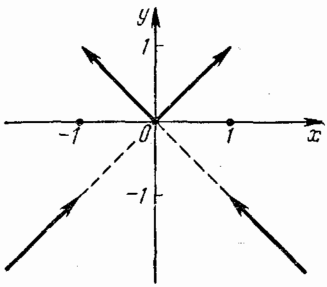

Рис. 41.

738. Функция определена на всей числовой оси. Если $1-x^2<0$, т. е. если $x<-1$ или $x>1$, то $\operatorname{sign}(1-x^2)=-1$. Следовательно, при $x<-1$ или $x>1$ данная функция имеет вид

$$y = -|x|.$$

Если $1-x^2=0$, т. е. если $x=\pm 1$, то $\operatorname{sign}(1-x^2)=0$. Значит, при $x=\pm 1$ данная функция перепишется так: $y=0$. Если $1-x^2>0$, т. е. если

$-1 < x < 1$, то $\operatorname{sign}(1-x^2)=1$, а потому при $-1 < x < 1$ данная функция такова: $y=|x|$. Таким образом, график данной функции состоит из четырех прямолинейных линий и двух изолированных точек. График показан на рис. 41.

739. Функция определена на всей числовой оси, кроме точек $\frac{\pi}{2}+k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Если $\operatorname{tg} x < 0$, т. е. если $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < k\pi$, то $\operatorname{sign}\operatorname{tg} x = -1$, а потому в этом случае данная функция имеет вид $y=1$. Если $\operatorname{tg} x=0$, т. е. $x=k\pi$, то $\operatorname{sign}\operatorname{tg} x=0$, а данная функция такова: $y=2$. Если $\operatorname{tg} x>0$, т. е. если $k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$, то $\operatorname{sign}\operatorname{tg} x=1$, и данная функция запишется так: $y=3$. Таким образом, исследуемая функция состоит из отрезков (без начал и концов) и изолированных точек. График показан на рис. 42.

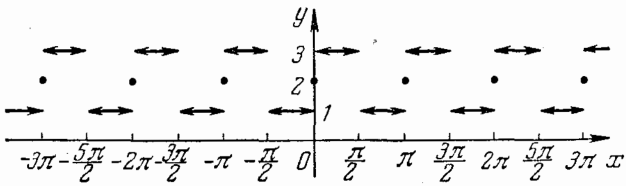

Рис. 42.

740. Функция определена на всей числовой оси. Если $\cos x < 0$, т. е. если $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, то $y=\operatorname{sign}\cos x=-1$. Если $\cos x=0$, т. е. если $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, то $y=\operatorname{sign}\cos x=0$. Если $\cos x>0$, т. е. если $2k\pi - -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$, то $y=\operatorname{sign}\cos x=1$. Таким образом, график данной функции состоит из отрезков (без начал и концов) и изолированных точек оси абсцисс. График показан на рис. 43.

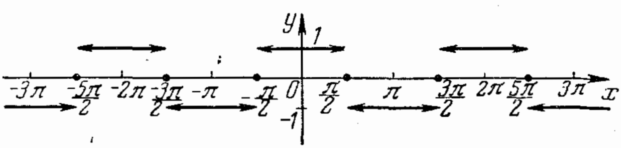

Рис. 43.

741. Функция определена на всей числовой оси, кроме точек $x=k\pi$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси ординат. Рассмотрим функцию на интервале $(0, 2\pi)$. (На интервалах $(2\pi, 4\pi)$, $(4\pi, 6\pi)$, ... значения функции такие же, как соответствующие значения функции на интервале $(0, 2\pi)$.) Если $\cos x \geqslant 0$ и $x>0$, то данная функция перепишется в следующем виде:

$$y=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2};$$

если же $\cos x \leqslant 0$ и $x > 0$, то

$$y = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Итак, на промежутках $0 < x \leqslant \pi/2$ или $3\pi/2 \leqslant x < 2\pi$ элементами графика являются части графика функции $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, а на промежутках $\pi/2 \leqslant x < \pi$ и

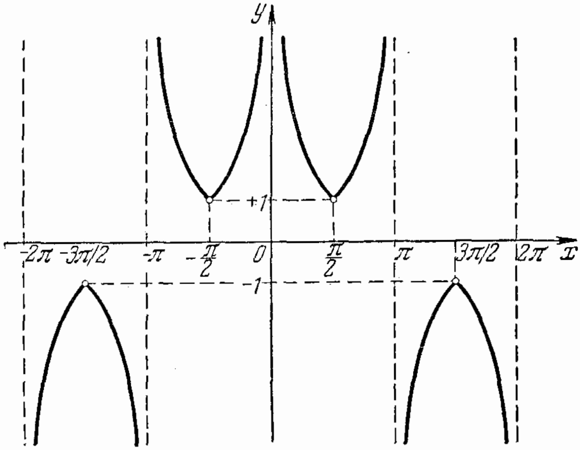

Рис. 44.

$\pi < x \leqslant 3\pi/2$ элементами графика являются части графика функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. График данной функции показан на рис. 44.

742. Функция определена на всей числовой оси, кроме нуля. Функция четная. Так как $\log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$, то данную функцию можно переписать так:

$$y = |\log_2 |x||.$$

Вначале построим график функции $y = \log_2 x$ $(x > 0)$. Затем строим график

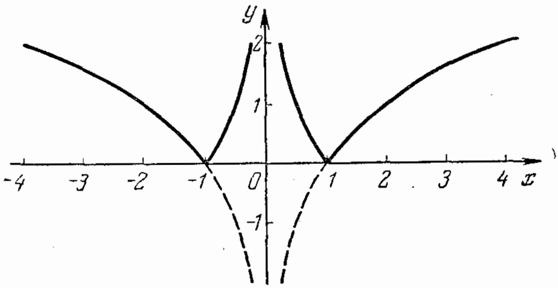

Рис. 45.

функции $y = \log_2 |x|$, т. е. сохраняем график функции $y = \log_2 x$ и дополняем этот график кривой, симметричной графику $y = \log_2 x$ относительно оси ординат. Для построения графика функции $y = |\log_2 |x||$ сохраняем те части графика функции $y = \log_2 |x|$, которые расположены не ниже оси абсцисс, а те части этого графика, которые расположены ниже оси абсцисс, отражаем симметрично относительно оси абсцисс. Заметим, что если $x \to 0$ как справа, так и слева, то $y \to +\infty$. Следовательно, ось ординат является двусторонней вертикальной асимптотой. График данной функции показан на рис. 45.

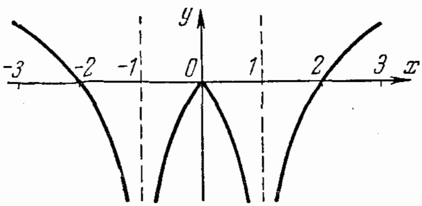

Рис. 46.

743. Функция определена на всей числовой оси, кроме точек ± 1. Функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси ординат. Данную функцию перепишем так:

$$y = \log_2 \left| |x| - 1 \right|.$$

Если $x \to \pm 1$ как справа, так и слева, то $y \to -\infty$. Следовательно, прямые $x = \pm 1$ являются двусторонними вертикальными асимптотами. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to +\infty$. Нулями функции служат числа $0, \pm 2$. На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ функция убывающая, а на интервалах $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$ функция возрастающая. График функции изображен на рис. 46.

§ 14. Пределы

744. а) Имеем

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0.$$

б) Имеем

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{1+x^2} + |x|) = \infty.$$

745. Имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} = 0.$$

746. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} = 0.$$

747. Имеем

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} [\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)] = 3.$$

748. Пусть $23 + x = z^3$, тогда $x = z^3 - 23$. Если $x \to 4$, то $z \to 3$, так как $z = \sqrt[3]{23 + x}$. Имеем

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt[3]{23+x} - 3} = \lim_{z \to 3} \frac{z^3 - 27}{z - 3} = \lim_{z \to 3} (z^2 + 3z + 9) = 27.$$

749. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2(\sqrt{1-x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\infty.$$

750. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}{(\sqrt{x^2+16}-4)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2\ (\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{4+4}{1+1}=4.$$

751. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}[x(\sqrt{x^2+1}-x)]=\lim[-|x|(\sqrt{x^2+1}+|x|)]=-\infty.$$

752. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

753. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1})}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3/2}(x^3+1-x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=\frac{2}{2}=1.$$

754. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)x+ab}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1}=\frac{a+b}{2}.$$

755. Пусть $\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=f(x)$. Имеем

$$f(x)=$$
$$=\frac{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}\right)}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$
$$=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$
$$=\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}=$$
$$=\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3(x+1)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)(x-1)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3(x-1)}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3(x+1)}=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x}\right)(x-1)}=\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^3(x-1)}=\infty,\quad \text{то } \lim_{x\to\infty}f(x)=0.$$

756. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}.$$

757. Имеем

$$\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\frac{\left(\sqrt{1-x}-3\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=$$
$$=\frac{(1-x-9)\left(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(8+x)\left(\sqrt{1-x}+3\right)}=-\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=-\lim_{x\to -8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2,$$

что и требовалось доказать.

758. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2+n}{(n-2)^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{n}}{(n-2)\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^2=1$, то искомый предел равен нулю.

759. Имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} (x + \sqrt{ax} + a) = 3a,$$ что и

требовалось доказать.

760. Обозначая $\sqrt[n]{n} - 1 = z$, где $z > 0$, находим

$$n = (1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!} z^2 + \ldots + z^n,$$

откуда

$$n > \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} z^2,$$

$$z^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{4}{n} \quad (n > 2), \qquad \text{т. е.} \quad 0 < z < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

или

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

761. Имеем

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

762. Докажем, что

$$2 \cdot 2^n > n^2 \qquad (\text{при } n \geqslant 3). \tag{1}$$

При $n = 3$ неравенство (1) верно. Допустим, что неравенство (1) верно при некотором $n = k > 3$, т. е.

$$2 \cdot 2^k > k^2. \tag{2}$$

Тогда при $n=k+1$ имеем

$$2\cdot 2^{k+1}=2\cdot 2\cdot 2^k>2k^2=k^2+k^2. \qquad (3)$$

Далее, так как при любом $k\geqslant 3$ имеет место неравенство $(k-1)^2>2$, т. е.

$$k^2>2k+1, \qquad (4)$$

то из (3) и (4) следует, что

$$2\cdot 2^{k+1}>k^2+2k+1, \text{ т. е. } 2\cdot 2^{k+1}>(k+1)^2.$$

Следовательно, неравенство (1) верно при всех $n\geqslant 3$. Отсюда следует, что

$$2^n>\frac{n^2}{2} \text{ и } 0<\frac{1}{2^n}<\frac{2}{n^2}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на n, получим $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}$, отсюда

$$0\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0.$$

763. 1) Если $0<a<1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

2) Если $a=1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0.$$

3) Если $a>1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{a^{2x}}}{1+\frac{1}{a^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

764. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}=\frac{m}{n}.$$

765. 1) Если $0<a<1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{1+a^x}=\lim_{x\to\infty}a^x\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+a^x}=0\cdot\frac{1}{1+0}=0.$$

2) Если $a=1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{1+a^x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

3) Если $a>1$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{1+a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^x}+1}=\frac{1}{0+1}=1.$$

766. Имеем

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3},$$

$$\frac{3^3-1}{3^3+1}=\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}=\frac{(n-2)(n^2-n+1)}{n(n^2-3n+3)},$$

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}.$$

Перемножив почленно все эти равенства, получим

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\dots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}{3\cdot 4\cdot 5\dots(n+1)}\cdot\frac{7\cdot 13\cdot 21\dots(n^2+n+1)}{3\cdot 7\cdot 13\dots(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right).$$

Таким образом, доказываемое равенство можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)\right]=\frac{2}{3}.$$

767. Вначале заметим, что

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}.$$

Придавая в этой формуле k значения 1, 2, 3, ..., n, получим n равенств:

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3},$$

$$\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{2}{(n-1)n(n+1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}.$$

Сложив почленно эти n равенств, получим

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots+\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Таким образом, левую часть доказываемого равенства перепишем в виде

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2+3n+2}\right)=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2+3n+2}=0.$

768. Пусть a — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию $1 \leqslant a \leqslant 100$. Найдем $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x+a)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$. Имеем

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+a)^{10}}{x^{10}+10^{10}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{10}}{1+\left(\frac{10}{x}\right)^{10}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку

$$\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}} =$$

$$= \frac{(x+1)^{10}}{x^{10}+10^{10}} + \frac{(x+2)^{10}}{x^{10}+10^{10}} + \frac{(x+3)^{10}}{x^{10}+10^{10}} + \ldots + \frac{(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}},$$

то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}} = 1 \cdot 100 = 100.$$

769. Имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

770. Имеем

$$0 < (n+1)^k - n^k = n^k \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right] < n^k \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n^{1-k}}.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^{1-k}} = 0$, то и подавно

$$\lim_{n \to \infty} [(n+1)^k - n^k] = 0.$$

771. Заметим, что при $a=0$ доказываемое соотношение очевидно. В дальнейшем будем считать, что $a \neq 0$. Пусть $a = 1/b$. Поскольку $|a| < 1$, то $|b| > 1$. Докажем, что

$$|b|^n > 1 + n(|b| - 1) \qquad (n > 1). \tag{1}$$

Пусть $|b| = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Тогда неравенство (1), подлежащее доказательству, можно записать так:

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha, \text{ где } n > 1. \tag{2}$$

Доказательство проведем методом индукции.

1) При $n = 2$ неравенство (2) верно, так как

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha.$$

2) Пусть неравенство (2) верно при $n = k$, т. е.

$$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha; \tag{3}$$

тогда при $n = k+1$ имеем, учитывая (3),

$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k (1+\alpha) > (1+k\alpha)(1+\alpha) =$$

$$= 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 > 1 + (k+1)\alpha.$$

Следовательно, согласно методу индукции неравенство (2) верно, т. е. верно неравенство (1).

Тогда $|a|^n < \frac{1}{1+n(|b|-1)}$, а следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

772. Пусть k — целое число, удовлетворяющее условию $k \leqslant a < k+1$, так что $\frac{a}{k+1} < 1$. При $n > k$ имеем

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ k}\cdot\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdots\frac{a}{n}.$$

Но

$$\frac{a}{k+2} < \frac{a}{k+1},\ \dots,\ \frac{a}{n} < \frac{a}{k+1}.$$

Поэтому

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^k}{k!}\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k}.$$

Но поскольку $\frac{a}{k+1} < 1$, то $\left(\frac{a}{k+1}\right)^{n-k} \to 0$, если $n\to\infty$, а поэтому имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

773. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n + (x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]^n + \left[x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]^n}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n\right] =$$

$$= (1-1)^n + (1+1)^n = 2^n.$$

774. Имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x+a}}\left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\sqrt{x+a}}\left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\sqrt{x+a}}\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

что и требовалось доказать

775. Так как $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ (см. задачу 264), то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \dots + n\cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

776. Имеем

$$\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n}\,\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

а потому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

777. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}=\infty.$$

778. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)^2+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)^2+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2+n^3)^{2/3}+n\,(n^2+n^3)^{1/3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^{2/3}+\left(\frac{1}{n}+1\right)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}.$$

779. Введем подстановку $x=y^n-1$, тогда искомый предел сведется к нахождению

$$\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^n-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+y+1)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+y+1}=\frac{1}{n}.$$

780. 1) Вначале покажем, что утверждение верно, когда k — натуральное число и $a=2$. Рассмотрим отношение $\frac{2^x}{x^k}$ при натуральных $x=1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ и убедимся, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^k}=+\infty.$$

Действительно, при $n>k$ имеем

$$\frac{2^n}{n^k}=\frac{(1+1)^n}{n^k}=\frac{1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n}{n^k}>\frac{C_n^{k+1}}{n^k}=\frac{(n-1)\ldots(n-k)}{n^{k-1}(k+1)!}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\dots(n-k)}{n^{k-1}(k+1)!} = \\ = \frac{1}{(k+1)!} \lim_{n\to\infty} \left[(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right)\right] = +\infty,$$

то имеем также

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^k} = +\infty.$$

Теперь пусть x — произвольное достаточно большое положительное число; обозначим через n его целую часть; $n \leqslant x < n+1$. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty} n = +\infty$ и

$$\frac{2^x}{x^k} > \frac{2^n}{(n+1)^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{n+1}}{(n+1)^k} \to +\infty,$$

а поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^k} = +\infty.$$

Далее, предположим, что k — произвольное положительное действительное число, пусть n — любое натуральное число, большее k. Так как при $x > 1$

$$\frac{2^x}{x^k} > \frac{2^x}{x^n} \to +\infty, \quad \text{то и} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^k} = +\infty.$$

Наконец, полагая $y = \alpha x$, где α — произвольное положительное число, имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\alpha x}}{x^k} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\alpha^k \cdot 2^y}{y^k} = +\infty.$$

Если $a > 1$ — произвольное основание, то имеем $a^x = 2^{x \log_2 a}$; полагая $\alpha = \log_2 a$, получим в силу изложенного

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty,$$

что и требовалось доказать.

2) При $a > 1$ и при любом $k > 0$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{a^x}{x^k}} = 0,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$.

3) При $0 < a < 1$ и при любом $k > 0$ имеем

$$\lim_{x\to\infty} (a^x x^k) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0.$$

781. 1) Положим $\log_a x = y$, т. е. $x = a^y$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^k}{x^n} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^k}{a^{ny}} = 0$$

(см. предыдущую задачу), что и требовалось доказать.

Например, при $k = n = 1$ имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0.$$

2) Действительно, положив $y = \frac{1}{x}$, имеем $\lim\limits_{x \to 0} y = +\infty$ и

$$\lim_{x \to 0} [x^n (\log_a x)^k] = \lim_{y \to +\infty} \frac{\left(\log_a \frac{1}{y}\right)^k}{y^n} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(-\log_a y)^k}{y^n} = 0,$$

что и требовалось доказать.

782. Данная последовательность имеет вид

$$-1,\ +1,\ -1,\ +1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

Предположим противное, т. е. что исследуемая последовательность имеет предел, равный некоторому постоянному числу c. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, в частности и для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, найдется такое N, что $|x_n - c| < \frac{1}{2}$ для $n > N$. Но так как x_n принимает попеременно значения 1 и -1, то должно быть

$$|1 - c| < \frac{1}{2}, \text{ а также } |(-1) - c| < \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что модуль суммы не превышает сумму модулей слагаемых, имеем

$$2 = |1 - c + c - (-1)| \leqslant |1 - c| + |c - (-1)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Итак, в силу нашего предположения получилось, что $2 < 1$. Следовательно, последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

783. Имеем

$$\left|\frac{n+1}{2n+3} - 1\right| = \left|\frac{n+1-2n-3}{2n+3}\right| = \left|-\frac{n+2}{2n+3}\right| =$$
$$= \frac{n+2}{2n+3} > \frac{n+2}{2n+4} = \frac{n+2}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы получили, что модуль разности при произвольном натуральном n больше постоянного числа $\frac{1}{2}$. Следовательно, существует такое $\varepsilon > 0$, например $\frac{1}{2}$, что даже для любого натурального n имеет место $\left|\frac{n+1}{2n+3} - 1\right| > \frac{1}{2}$. Итак, для любого $n > N$ имеем $\left|\frac{n+1}{2n+3} - 1\right| > \frac{1}{2}$. Значит, 1 не есть предел $x_n = \frac{n+1}{2n+3}$.

784. Пусть $\arcsin x = \alpha$; тогда $x = \sin \alpha$. Заметим также, что если $x \to 0$, то и $\alpha \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

785. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \frac{(a+b)x}{2} \sin \frac{(b-a)x}{2}}{x^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{(b-a)x}{2}}{\frac{(b-a)x}{2}} =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

786. Имеем

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha^n}{(\sin \alpha)^m} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{\sin \alpha^n}{\alpha^n} \cdot \alpha^n}{\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^m \cdot \alpha^m}.$$

Так как $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha^n}{\alpha^n} = 1$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^m = 1$, то искомый предел равен $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{n-m}$. Ясно, что если $n > m$, то $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{n-m} = 0$; если $n < m$, то $\lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha^{n-m} = \infty$, и если $n = m$, то

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha^{n-m} = 1.$$

787. Имеем

$$\frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{2x \sin x \cos x} = \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} \cdot \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos x} = 3$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

788. Так как $x \to 0$, то будем рассматривать x в интервале $(-\pi, \pi)$. Имеем, учитывая, что $x/2$ принадлежит интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$,

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x}=\frac{2\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{4}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{4}}{16\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8\cos^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{8}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{1}{1\cdot 1}=\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

789. Имеем

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-2}}\ldots\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-3}}\ldots\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{x}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}.$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}=\frac{\frac{\sin x}{x}}{1}=\frac{\sin x}{x}.$$

790. Пусть $x-\frac{\pi}{3}=z$; тогда $x=z+\frac{\pi}{3}$. Следовательно, если $x\to\frac{\pi}{3}$, то $z\to 0$. Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{1-2\cos\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{1-\cos z+\sqrt{3}\,\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{z}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

791. Пусть $\sin x=z$; тогда, если $x\to\pi/6$, то $z\to{}^1/_2$. Имеем

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=$$

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{(2z-1)(z+1)}{(2z-1)(z-1)}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{z+1}{z-1}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3.$$

792. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin a\sin x}{x}=$$

$$=-2\sin a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\sin a\cdot 1=-2\sin a.$$

793. Введем обозначение $x-2=z$, т. е. $x=z+2$. Тогда, если $x\to 2$, то $z\to 0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cos\frac{\pi}{4}x}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{\cos\frac{\pi}{4}(z+2)}=\lim_{z\to 0}\frac{z(z+4)}{-\sin\frac{\pi}{4}z}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\lim_{z\to 0}\frac{\pi}{4}\,\frac{z(z+4)}{-\sin\frac{\pi}{4}z}=-\frac{4}{\pi}\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}z}{\sin\frac{\pi}{4}z}\cdot\lim_{z\to 0}(z+4)=$$

$$=-\frac{4}{\pi}\cdot 1\cdot 4=-\frac{16}{\pi}.$$

794. Имеем

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{\sin(3\pi-3x)}{-\sin(2\pi-2x)}=\frac{\frac{\sin(3\pi-3x)}{3\pi-3x}}{-\frac{\sin(2\pi-2x)}{2\pi-2x}}\cdot\frac{3\pi-3x}{2\pi-2x}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(3\pi-3x)}{3\pi-3x}}{\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(2\pi-2x)}{2\pi-2x}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=-\frac{3}{2}.$$

795. Имеем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)\frac{\pi+x}{\pi^2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}\lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2}{\pi+x}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1,\quad \lim_{x\to\pi}\frac{\pi^2}{\pi+x}=\frac{\pi}{2},$$

то

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}=1\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

796. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{x^2-\alpha^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}{x^2-\alpha^2}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\dfrac{\cos 2\alpha-\cos 2x}{2}}{x^2-\alpha^2}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)}{(x+\alpha)(x-\alpha)}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x+\alpha)}{x+\alpha}\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{x-\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\cdot 1=\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha},$$

что и требовалось доказать.

797. Пусть $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x=f(x)$. Имеем

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 0=1$, а

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}=1,\quad\text{то}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

798. Пусть

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}=f(\alpha).$$

Имеем

$$f(\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\alpha(1-\cos\alpha)}{\alpha^3}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^3}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha)=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

799. Пусть

$$\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=A.$$

Имеем

$$A=\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x})(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\frac{2\sin^2 x+x\sin x}{\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}=$$

$$=\frac{\sin x\,(2\sin x+x)(1+\cos x)^2}{\sin^2 x\,(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}.$$

Поделив числитель и знаменатель на $\sin^2 x$, получим

$$A=\frac{\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)(1+\cos x)^2}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2+\frac{x}{\sin x}\right)(1+\cos x)^2}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1,\quad \lim_{x\to 0}\cos 2x=1$$

и

$$\lim_{x\to 0}(x\sin x)=0,\quad \text{то}\quad \lim_{x\to 0}A=\frac{(2+1)(1+1)^2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1}}=\frac{3\cdot 4}{2}=6,$$

что и требовалось доказать.

800. Пусть

$$\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=f(x).$$

Имеем

$$f(x)=\frac{1-\cos\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}=\frac{2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^4}=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^4\frac{x}{2}}{16\left(\frac{x}{2}\right)^4}=\frac{1}{8}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\left[\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]^2.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}=1,$$

то

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4\left[\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]^2\right\}=\frac{1}{8}\cdot 1^4\cdot 1^2=\frac{1}{8}.$$

801. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 5x}{5x}}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=1,$$

то $A=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}$, что и требовалось доказать.

802. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\cdot\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}}=1,$$

то $A=\frac{a}{b}\cdot 1\cdot 1=\frac{a}{b}$, что и требовалось доказать.

803. Обозначим левую часть доказываемого равенства через A. Имеем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx\cos kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=1,$$

то $A=k\cdot 1\cdot 1=k$, что и требовалось доказать.

804. Так как $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, то

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

805. Имеем

$$\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}-\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\cos 0}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{0,5}=2,$$

что и требовалось доказать.

806. Пусть $\sin\frac{x-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}=f(x)$. Имеем

$$f(x)=\sin\frac{x-a}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}}\cdot\left(-\frac{\pi}{a}\right)}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)=\cos 0=1,$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\lim_{\frac{x-a}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=1$$

и

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}}=\lim_{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2a}}=1,$$

то

$$\lim_{x\to a}f(x)=\frac{1\cdot 1}{1\cdot\left(-\frac{\pi}{a}\right)}=-\frac{a}{\pi}.$$

807. Пусть

$$\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}=f(x).$$

Имеем

$$f(x)=\frac{2\cos a\sin x\cos(a+x)\cos(a-x)}{\sin 2x}=\frac{\cos a\cos(a+x)\cos(a-x)}{\cos x}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos a \cos(a+x)\cos(a-x)}{\cos x} = \frac{\cos a \cos a \cos a}{\cos 0} = \cos^3 a.$$

808. Пусть $(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = f(x)$. Имеем

$$f(x) = (1-x)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}} = \lim_{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}} = 1,$$

то

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \cdot \frac{\frac{2}{\pi}}{1} = \frac{2}{\pi}.$$

809. Имеем

$$\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n+1}} - 1\right) n = \frac{\sin\frac{a}{n} - \sin\frac{a}{n+1}}{\sin\frac{a}{n+1}}\, n =$$

$$= \frac{2\cos\frac{(2n+1)a}{2n(n+1)}\sin\frac{a}{2n(n+1)}}{\sin\frac{a}{n+1}}\, n =$$

$$= \cos\frac{(2n+1)a}{2n(n+1)} \cdot \frac{\sin\frac{a}{2n(n+1)}}{\frac{a}{2n(n+1)}} \cdot \frac{\frac{a}{n+1}}{\sin\frac{a}{n+1}}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a}{2n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)a}{2(n+1)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{2n(n+1)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{(2n+1)a}{2n(n+1)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{a}{2n(n+1)}}{\frac{a}{2n(n+1)}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{n+1}}{\sin\frac{a}{n+1}} = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n+1}}-1\right)n=1,$$

что и требовалось доказать.

§ 15. Разные задачи

810. Рассмотрим решаемое уравнение в отдельности на трех промежутках:

а) $x<-2$. В этом случае $|2^{x+1}-1|=1-2^{x+1}$, $|x+2|=-x-2$, а потому данное уравнение перепишется так:

$$2^{-x-2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1,$$

или $2^{-x-2}=2$, откуда $x=-3$.

б) $-2\leqslant x<-1$. В этом случае имеем $x+1<0$, $2^{x+1}-1<0$, $|2^{x+1}-1|=1-2^{x+1}$, $x+2\geqslant 0$, $|x+2|=x+2$, и, следовательно, данное уравнение перепишется в следующем виде:

$$2^{x+2}+2^{x+1}-1=2^{x+1}+1,$$

или $2^{x+2}=2$, откуда $x=-1$, что противоречит соотношению $-2\leqslant x<-1$. Таким образом, если $-2\leqslant x<-1$, то нет решений.

в) $x\geqslant -1$. В этом случае имеем $x+1\geqslant 0$, $2^{x+1}-1\geqslant 0$, $|2^{x+1}-1|=2^{x+1}-1$, $|x+2|=x+2$, следовательно, если $x\geqslant -1$, то решаемое уравнение принимает вид

$$2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1,$$

или

$$2^{x+2}=2^{x+2},$$

что имеет место при любом x. Таким образом, любое действительное число $x\geqslant -1$ является решением данного уравнения.

Итак, данное уравнение выполняется лишь при $x=-3$ или при $x\geqslant -1$.

811. Если $6\sin x-1<0$, т. е. если

$$\sin x<{}^1/_6, \tag{1}$$

то неравенство выполняется. Если же $6\sin x-1\geqslant 0$, т. е. если

$$\sin x\geqslant {}^1/_6, \tag{2}$$

то данное неравенство равносильно такому:

$$5-2\sin x\geqslant(6\sin x-1)^2,$$

или

$$18\sin^2 x-5\sin x-2\leqslant 0,$$

или

$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{2}{9}\right)\leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$-{}^2/_9\leqslant\sin x\leqslant {}^1/_2,$$

или, учитывая (2), имеем

$${}^1/_6\leqslant\sin x\leqslant {}^1/_2. \tag{3}$$

Из (1) и (3) следует, что данное неравенство выполняется для всех тех и только тех значений x, для которых

$$\sin x \leqslant 1/2,$$

откуда находим

$$-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

812. Если $ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$, то трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет двукратный корень $x = -n/m$, а потому необходимо, чтобы дискриминант

$$b^2 - 4ac = 0.$$

Для трехчлена в области комплексных чисел это условие является и достаточным, так как при $b^2 - 4ac = 0$ имеем

$$ax^2 + bx + c = \left[\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2,$$

т. е. трехчлен $ax^2 + bx + c$ является квадратом двучлена

$$\sqrt{a}\, x + \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Для трехчлена $ax^2 + bx + c$ над областью действительных чисел, кроме $b^2 - 4ac = 0$, должно быть еще выполнено условие $a > 0$ (для того, чтобы $\sqrt{a}$ был действительным).

813. В силу условия задачи имеем

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= f(1) + a^2, \\ f(3) &= f(2) + a^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(n) &= f(n-1) + a^n. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Сложив равенства (1), получим после упрощения

$$f(n) = f(1) + a^2 + a^3 + \ldots + a^n.$$

Следовательно, $f(n) = 1 + \frac{a^2(a^{n-1} - 1)}{a - 1}$, если $a \neq 1$; если же $a = 1$, то $f(n) = n$.

814. Для того чтобы корни были действительными, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^2 - 4(a - 1) \geqslant 0, \quad \text{т. е.} \quad a^2 - 4a + 4 \geqslant 0,$$

или $(a - 2)^2 \geqslant 0$. Последнее имеет место при любом значении a. Так как оба корня больше 2, то левая часть данного уравнения при $x = 2$ положительна, т. е. $4 + 2a + a - 1 > 0$, или $3a > -3$. Таким образом,

$$a > -1. \quad (1)$$

Поскольку оба корня (x_1 и x_2) больше двух, т. е. $x_1 > 2$, $x_2 > 2$, то $x_1 + x_2 > 4$, или $-a > 4$. Следовательно,

$$a < -4. \quad (2)$$

Так как соотношения (1), (2) одновременно не выполняются, то ясно, что нет такого значения a, при котором оба корня данного уравнения были бы больше двух.

Эту задачу можно решить и исходя из следующих соображений.

Для того чтобы оба корня x_1 и x_2 данного уравнения были больше 2, необходимо, чтобы $4 < x_1 \cdot x_2 = a - 1$ и $4 < x_1 + x_2 = -a$, т. е. $a > 5$ и $a < -4$, что невозможно ни при каком значении a.

815. Если $a = 1$, то данный трехчлен есть число $2 > 0$. Если $a = -1$, то трехчлен принимает вид

$$-4x + 2,$$

это выражение положительно ни при всех x. Если $a \neq \pm 1$, то должны одновременно иметь место неравенства

$$a^2 - 1 > 0,$$

$$(a - 1)^2 - 2(a^2 - 1) < 0.$$

Первое неравенство выполняется при $a < -1$ или при $a > 1$, а второе имеет место при $a < -3$ или при $a > 1$. Следовательно, оба неравенства выполняются одновременно при $a < -3$ или при $a > 1$.

Отв. $a \geqslant 1$, $a < -3$.

816. Так как по условию данное уравнение имеет два корня, то ясно, что $k \neq 2$. В противном же случае уравнение было бы линейным и имело бы только один корень. Далее, поскольку корни уравнения должны быть действительными и различными, то дискриминант его положителен, т. е.

$$(k + 3)^2 - 4k(k - 2) > 0,$$

или

$$3k^2 - 14k - 9 < 0.$$

Так как корни левой части этого неравенства суть числа $(7 - 2\sqrt{19})/3$ и $(7 + 2\sqrt{19})/3$, то оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{3}(7 - 2\sqrt{19}) < k < \frac{1}{3}(7 + 2\sqrt{19}). \qquad (1)$$

Поскольку $k - 2 \neq 0$, то данное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$x^2 - \frac{2(k + 3)}{k - 2}x + \frac{4k}{k - 2} = 0. \qquad (2)$$

В силу условия задачи числа 2 и 3 должны быть заключены между корнями уравнения (2), и так как коэффициент при x^2 положителен $(1 > 0)$, то левая часть уравнения (2) при $x = 2$ и при $x = 3$ отрицательна, т. е.

$$\begin{cases} 4 - \dfrac{2(k + 3)}{k - 2} \cdot 2 + \dfrac{4k}{k - 2} < 0, \\ 9 - \dfrac{2(k + 3)}{k - 2} \cdot 3 + \dfrac{4k}{k - 2} < 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{k - 5}{k - 2} < 0, \\ \dfrac{7k - 36}{k - 2} < 0, \end{cases}$$

или

$$2 < k < 5, \qquad 2 < k < 5\frac{1}{7}.$$

Решениями этой системы неравенств являются все числа из промежутка

$$2 < k < 5. \qquad (3)$$

Так как промежуток (3) входит в промежуток (1), то условия задачи выполняются для всех k из промежутка (3).

Отв. $2 < k < 5$.

817. Пусть $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ — многочлен четвертой степени, удовлетворяющий тождеству $f(x) = f(1-x)$. Имеем

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + d(1-x) + e,$$

или

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4) + \\ + b(1 - 3x + 3x^2 - x^3) + c(1 - 2x + x^2) + d(1-x) + e.$$

Так как это равенство есть тождество, то должны быть равны коэффициенты при одинаковых степенях x, т. е.

$$b = -4a - b, \quad c = 6a + 3b + c, \quad d = -4a - 3b - 2c - d,$$
$$e = a + b + c + d + e,$$

откуда получаем

$$b = -2a \quad \text{и} \quad d = a - c.$$

Поэтому искомый многочлен можно привести к виду

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + cx^2 + (a-c)x + e,$$

где a, c и e — произвольные числа, или же

$$f(x) = a(x^2 - x)^2 - (a-c)(x^2 - x) + e,$$

или, наконец, если положить $-(a-c) = m$, имеем

$$f(x) = a(x^2 - x)^2 + m(x^2 - x) + e,$$

где a, m и e — произвольные числа.

818. Пусть $\dfrac{x}{x-1} = t$. Тогда $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{t}$ (придавая здесь x различные значения, мы для t получим любое значение, кроме $t = 1$) и

$$f(t) - 2f\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \qquad (1)$$

(это соотношение справедливо для любых t, кроме, может быть, $t = 1$ и $t = 0$). Заменяя в этом равенстве t на $1/t$, получим

$$f(1/t) - 2f(t) = 0. \qquad (2)$$

Умножив обе части равенства (2) на 2, получаем

$$2f(1/t) - 4f(t) = 0. \qquad (3)$$

Теперь, сложив почленно (1) и (3), имеем

$$-3f(t) = 0,$$

откуда

$$f(t) = 0,$$

что выполняется для любых t, кроме, может быть, $t = 0$ и $t = 1$.

819. Пусть $\dfrac{x-2}{x+1} = z$, тогда $x = \dfrac{z+2}{1-z}$, $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 1, \ z \neq 0)$. Следовательно, данная зависимость перепишется в следующем виде:

$$F\left(\frac{1}{z}\right) + 2F(z) = \frac{z+2}{1-z}. \qquad (1)$$

Заменяя в последнем равенстве z на $1/z$, получим

$$F(z)+2F\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1+2z}{z-1}. \tag{2}$$

Теперь, решая совместно равенства (1) и (2), получим

$$F(z)=\frac{4z+5}{3(1-z)}.$$

Подставляя в этом равенстве x вместо z, получим

$$F(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}.$$

Полученное выражение $F(x)$ справедливо для всех x, кроме, может быть, $x=0$ и $x=1$ (так как $z\neq 0$ и $z\neq 1$). Однако проверкой убеждаемся, что и при $x=0$ выражение $F(x)$ верно.

820. Предположим противное, т. е. что существует многочлен $M(x, y)$, отличный от нуля, для которого имеет место тождество $M(x, a^x)\equiv 0$. Расположим многочлен $M(x, y)$ по степеням y:

$$M(x, y)=p_n(x)y^n+p_{n-1}(x)y^{n-1}+\ldots+p_0(x).$$

Подставив в это равенство $y=a^x$, получим тождество

$$M(x, a^x)=p_n(x)a^{nx}+p_{n-1}(x)a^{(n-1)x}+\ldots+p_0(x)=0. \tag{1}$$

Пусть m — степень многочлена $p_n(x)$ (в частности, $m=0$, если $p_n(x)$ — число):

$$p_n(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0,$$

где $b_m\neq 0$. Для определенности пусть $a>1$. Перепишем правую часть равенства (1) в следующем виде:

$$a^{nx}x^m\left[b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_0}{x^m}+\frac{p_{n-1}(x)}{a^xx^m}+\frac{p_{n-2}(x)}{a^{2x}x^m}+\ldots+\frac{p_0(x)}{a^{nx}x^m}\right]\equiv 0.$$

Вопреки предположению это равенство тождественно выполняться не может, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\left[b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_0}{x^m}+\frac{p_{n-1}(x)}{a^xx^m}+\right.$$
$$\left.+\frac{p_{n-2}(x)}{a^{2x}x^m}+\ldots+\frac{p_0(x)}{a^{nx}x^m}\right]=b_m\neq 0$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}a^{nx}x^m=+\infty.$$

Поэтому абсолютная величина левой части имеет предел, равный $+\infty$, и при достаточно больших значениях $|x|$ равной нулю быть не может, что и требовалось доказать.

Если же $a<1$, то достаточно заменить a^x на $\frac{1}{a_1^x}$, где $a_1=\frac{1}{a}>0$, и этот случай сводится к предыдущему случаю ($a>1$).

Теперь докажем, что и логарифмическая функция тоже трансцендентна. Действительно, допустим, что при подстановке $y=\log_a x$ в многочлен $M(x,y)$ получается тождество

$$M(x, \log_a x)\equiv 0. \tag{2}$$

Положив здесь $x=a^y$, получим тождество $M(a^y, y)=0$, которое, как мы уже знаем, невозможно.

821. Подставляя в данный многочлен вместо y выражение $5-3x$, получим

$$\varphi(x)=(A-6B+9C)x^2+5(2B-6C+7)x+25(C-3).$$

Для того чтобы этот многочлен был тождественно равен нулю, необходимо, чтобы имели место равенства

$$A-6B+9C=0, \quad 2B-6C+7=0, \quad C-3=0.$$

Решая совместно эти равенства, получим

$$A=6, \quad B=11/2, \quad C=3.$$

При этих значениях A, B, C многочлен $f(x, y)$ обращается в

$$f(x, y)=6x^2+11xy+3y^2-31x-22y+35.$$

Поскольку $f(x, y)$ тождественно обращается в нуль, если вместо y подставить $5-3x$, то $f(x, y)$ делится на разность $y-(5-3x)$, т. е. на $3x+y-5$. Произведя деление «углом», получим

$$\frac{f(x, y)}{3x+y-5}=3y+2x-7.$$

Итак,

$$f(x, y)=(3x+y-5)(2x+3y-7).$$

Эту задачу можно решать и так. Допустим, что требуемые A, B, C найдены. Тогда, положив $x=0$ и, значит, $y=5-3x=5$, получим $C\cdot 5^2-22\cdot 5+35=0$, откуда $C=3$. Далее, положив $y=0$ и, значит, $x=5/3$, найдем значение A. Теперь, полагая $x=1$, $y=2$, найдем B (зная уже A и C).

822. Вначале заметим, что если пара чисел (x, y) — решение данной системы, то пара чисел $(-x, y)$ также является решением данной системы. Из этого следует, что если данная система имеет лишь одно решение, то это решение есть пара чисел $(0, y)$ так как должно быть $x=-x$, что возможно только при $x=0$. Если в данной системе заменить x на 0, то имеем

$$\begin{cases} y=1-a, \\ y^2=1. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что $a=0$ или $a=2$. Таким образом, необходимым условием того, что данная система имеет лишь одно решение, является условие $a=0$ или $a=2$.

1) Пусть $a=0$. Тогда данная система такова:

$$\begin{cases} y=2^{|x|}+|x|(1-|x|), \\ y^2=1-x^2. \end{cases}$$

Так как из второго уравнения системы следует, что $|x|=\sqrt{1-y^2}\leqslant 1$, то из первого уравнения находим, что $y\geqslant 1$. Из второго уравнения вытекает, что $y\leqslant 1$. Причем в обоих уравнениях $y=1$ только при $x=0$. Итак, если $a=0$, то система имеет ровно одно решение $(0, 1)$.

2) Пусть теперь $a=2$; тогда данная система принимает вид

$$\begin{cases} y=2^{|x|}-2+|x|(1-|x|), \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Лёгко заметить, что последняя система имеет более одного решения, например: $(1, 0)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$.

Отв. Система имеет ровно одно решение $(0, 1)$ лишь при $a=0$.

823. Обозначим искомый многочлен через M. Так как в произведении $M(x^2-1)$ должно быть только два члена, то, очевидно, это могут быть только высший и низший члены произведения. Пусть показатель при низшем члене равен n, а при высшем $n+k$. В силу условия задачи имеем тождество

$$M(x^2-1)=ax^{n+k}+bx^n, \tag{1}$$

где $n\geqslant 0$, $k>0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Положив в тождестве (1) $x=1$ и $x=-1$, получим

$$a+b=0, \tag{2}$$

$$a(-1)^k+b=0. \tag{3}$$

Если k нечетно, то равенство (3) имеет вид $b-a=0$. Учитывая равенство (2), получаем $a=b=0$, что противоречит условию. Если же k четно, т. е. $k=2m$, то из равенства (2) находим $b=-a$, и тождество (1) примет вид

$$M(x^2-1)=ax^n(x^{2m}-1). \tag{4}$$

Деля обе части равенства (4) на x^2-1, получим

$$M=ax^n(x^{2m-2}+x^{2m-4}+x^{2m-6}+\ldots+x^2+1).$$

Это и есть искомый многочлен, в котором $a\neq 0$, $n\geqslant 0$, $m\geqslant 1$.

824. Имеем

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)=$$
$$=a_0x^n-a_0(x_1+x_2+\ldots+x_n)x^{n-1}+a_0(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}-$$
$$-a_0(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3}+\ldots+(-1)^n a_0x_1x_2x_3\ldots x_n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим требуемые формулы.

825. Имеем

$$F(x)=x^{991}+x^{344}+1=(x\cdot x^{990}-x)+(x^2\cdot x^{342}-x^2)+(x^2+x+1)=$$
$$=x[(x^3)^{330}-1^{330}]+x^2[(x^3)^{114}-1^{114}]+(x^2+x+1).$$

Но $(x^3)^{330}-1^{330}$ делится на $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; $(x^3)^{114}-1^{114}$ делится на $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Поэтому и $F(x)$ делится на x^2+x+1.

826. Первое решение. Ясно, что все корни многочлена $F(x)$ не могут быть равными, поскольку в противном случае $F(x)$ был бы точным кубом $(x-a)^3$, что невозможно. Следовательно, многочлен имеет хотя бы два различных корня. Пусть эти корни x_1 и x_2. Для определенности пусть $x_1<x_2$. Если предположить, что $p\geqslant 0$, то $x_1^3<x_2^3$ и $px_1\leqslant px_2$.

Из этих двух неравенств следует, что

$$F(x_1)=x_1^3+px_1+q<x_2^3+px_2+q=0,$$

так как $F(x_2)=0$ (x_2 — корень многочлена).

Таким образом, получилось, что $F(x_1)<0$, т. е. что x_1 не является корнем многочлена. Следовательно, наше предположение, что $p\geqslant 0$, привело к противоречию. Итак, $p<0$, что и требовалось доказать.

Второе решение. По формулам Виета имеем

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=0,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3&=p,\\ x_1x_2x_3&=-q. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Из первого уравнения (1) имеем

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0.$$

Но, учитывая второе уравнение (1), получаем (2)

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2p=0.$$

Так как по условию $q\neq 0$, то x_1, x_2, x_3 отличны от нуля, а потому из (2) следует, что $p<0$.

827. Предположим противное, т. е. что функция y периодическая с периодом $T\neq 0$. Тогда имеем

$$\cos a(x+T)+\cos(x+T)=\cos ax+\cos x. \qquad (1)$$

Если T является периодом, то равенство (1) должно иметь место при любом x. Пусть $x=0$, тогда

$$\cos aT+\cos T=\cos 0+\cos 0=2. \qquad (2)$$

Равенство (2) возможно только тогда, когда $\cos aT=1$ и $\cos T=1$, откуда

$$aT=2\pi k, \qquad T=2\pi m \ (m\neq 0, \text{ так как } T\neq 0). \qquad (3)$$

Поделив почленно первое равенство из (3) на второе, получим

$$a=k/m.$$

Но это равенство невозможно, так как a иррационально, а k/m рационально. Таким образом, наше предположение, что функция y периодическая, отпадает.

828. Известно, что если число α есть корень биквадратного уравнения, то и число $-\alpha$ также является корнем этого уравнения. Пусть x_1 и x_2 — неотрицательные корни данного уравнения, причем $x_1<x_2$; тогда это уравнение имеет также корни $-x_1$ и $-x_2$, причем

$$-x_2<-x_1<x_1<x_2.$$

Поскольку по условию корни данного уравнения должны составлять арифметическую прогрессию, то

$$x_2-x_1=x_1+x_1=x_2-x_1,$$

откуда $x_2=3x_1$. Так как (по теореме Виета) коэффициент при x^2 есть сумма всех парных произведений корней, а свободный член этого уравнения равен произведению всех корней, то имеем

$$3m+5=x_1^2+x_2^2=10x_1^2 \text{ и } (m+1)^2=x_1^2x_2^2=9x_1^4.$$

Таким образом, имеем две системы:

$$3m+5=10x_1^2, \qquad m+1=3x_1^2$$

и

$$3m+5=10x_1^2, \qquad m+1=-3x_1^2.$$

Из первой системы находим $m=5$, $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=3\sqrt{2}$, а из второй получаем $m=-\frac{25}{19}$, $x_1=\sqrt{\frac{2}{19}}$, $x_2=3\sqrt{\frac{2}{19}}$. Итак, если $m=5$, то корни уравнения $-3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, а если $m=-\frac{25}{19}$, то корни уравнения $-3\sqrt{\frac{2}{19}}$, $-\sqrt{\frac{2}{19}}$, $\sqrt{\frac{2}{19}}$, $3\sqrt{\frac{2}{19}}$. В обоих случаях корни составляют арифметическую прогрессию.

829. Известно, что координаты вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ определяются по формулам

$$x_0=-\frac{b}{2a}, \qquad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}. \qquad (1)$$

В нашей задаче $a=1$, $b=2m+1$, $c=m^2-1$. Подставляя значения a, b, c в (1), получим

$$x_0=-m-\frac{1}{2},\qquad y_0=-m-\frac{5}{4}.$$

Ясно, что, меняя m, мы будем получать различные x_0 и y_0, т. е. x_0 и y_0 являются функциями m:

$$x_0=-m-\frac{1}{2},\qquad y_0=-m-\frac{5}{4}.$$

Вычтя почленно из второго равенства первое, получим $y_0-x_0=-\frac{3}{4}$, или $y_0=x_0-\frac{3}{4}$. Оказывается, что при любых значениях m координаты $(x_0;\ y_0)$ вершины параболы связаны уравнением первой степени, значит, вершина параболы описывает прямую линию.

830. Пусть

$$a_1=C_n^k,\quad a_2=C_n^{k+1},\quad a_3=C_n^{k+2},\quad a_4=C_n^{k+3}.$$

Тогда имеем

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{k+1}{n-k},\qquad \frac{a_3}{a_4}=\frac{k+3}{n-k-2},\qquad \frac{a_2}{a_3}=\frac{k+2}{n-k-1}.$$

Пользуясь этими равенствами, находим

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}}=\frac{1}{1+\frac{n-k}{k+1}}=\frac{k+1}{n+1},$$

$$\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{1}{1+\frac{a_4}{a_3}}=\frac{1}{1+\frac{n-k-2}{k+3}}=\frac{k+3}{n+1},$$

$$\frac{2a_2}{a_2+a_3}=\frac{2}{1+\frac{a_3}{a_2}}=\frac{2}{1+\frac{n-k-1}{k+2}}=\frac{2k+4}{n+1}.$$

Так как

$$\frac{k+1}{n+1}+\frac{k+3}{n+1}=\frac{2k+4}{n+1},$$

то утверждение задачи верно.

831. Данное в условии задачи равенство можно переписать в таком виде:

$$(2x-1)^{20}=(ax+b)^{20}+(x^2+px+q)^{10}.$$

При $x={}^1/_2$ левая часть этого равенства равна нулю. В правой части оба слагаемых всегда больше или равны нулю, поэтому при $x={}^1/_2$ оба слагаемых должны обратиться в нуль. Таким образом, $a\cdot\frac{1}{2}+b=0$, откуда $a=-2b$. Теперь тождество принимает вид

$$(2x-1)^{20}=(-2bx+b)^{20}+(x^2+px+q)^{10},$$

или

$$(2x-1)^{20}\cdot(1-b^{20})=(x^2+px+q)^{10}.$$

В последнем равенстве сравнивая коэффициенты при старшей степени в обеих частях, получим

$$2^{20}(1-b^{20})=1,\qquad b^{20}=1-\frac{1}{2^{20}},\qquad b=\frac{\pm\sqrt[20]{2^{20}-1}}{2}.$$

Теперь тождество принимает такой вид:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{20}=(x^2+px+q)^{10}.$$

Отсюда получаем

$$x^2+px+q=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2, \quad p=-1, \quad q=\frac{1}{4}.$$

Так как $a=-2b$, то задача имеет два решения:

$$a=\sqrt[20]{2^{20}-1}, \quad b=-\frac{\sqrt[20]{2^{20}-1}}{2}, \quad p=-1, \quad q=\frac{1}{4}$$

и

$$a=-\sqrt[20]{2^{20}-1}, \quad b=\frac{\sqrt[20]{2^{20}-1}}{2}, \quad p=-1, \quad q=\frac{1}{4}.$$

Проверкой можно убедиться, что найденные значения a, b, p, q действительно удовлетворяют требованию задачи.

832. Из второго соотношения имеем $y=x+a$. Поэтому данная система равносильна такой:

$$x^2+(x+a)^2+2x\leqslant 1, \quad y=x+a.$$

Первое соотношение перепишем в виде

$$2x^2+2(a+1)x+a^2-1\leqslant 0.$$

Это неравенство имеет единственное решение относительно x тогда и только тогда, когда дискриминант левой части равен нулю, т. е. когда $(a+1)^2-2(a^2-1)=0$, или $a^2-2a-3=0$, откуда $a_1=3$, $a_2=-1$. Разберем отдельно каждый из этих случаев.

Если $a=3$, то $x^2+4x+4=0$, или $(x+2)^2=0$, откуда $x_1=-2$. Соответствующий ему $y_1=1$.

Если же $a_2=-1$, то $x^2=0$, $x_2=0$, а соответствующее ему значение $y_2=-1$.

Итак, данная система имеет единственное решение только в двух случаях: когда $a=3$ и когда $a=-1$. Соответствующие им решения суть $x_1=-2$, $y_1=1$ и $x_2=0$, $y_2=-1$.

833. Нам надо доказать, что имеет место равенство

$$1+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots+\frac{C_n^k}{k+1}+\ldots+\frac{C_n^{n-1}}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$1+(n+1)+\frac{n+1}{2}C_n^1+\frac{n+1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{n+1}{k+1}C_n^k+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n+1}{n}C_n^{n-1}+1=2^{n+1}. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\frac{n+1}{k+1}C_n^k=\frac{n+1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=C_{n+1}^{k+1},$$

то левая часть равенства (1) равна

$$1+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\ldots+C_{n+1}^{k+1}+\ldots+C_{n+1}^n+1=(1+1)^{n+1}=2^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

834. Так как многочлен четвертой степени может быть квадратом только квадратного трехчлена, то пусть

$$x^4+ax^3+bx^2-8x+1=(mx^2+nx+p)^2,$$

или

$$x^4+ax^3+bx^2-8x+1=m^2x^4+2mnx^3+(n^2+2mp)\,x^2+2npx+p^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$m=\pm 1,\quad p=\pm 1,\quad 2mn=a,\quad n^2+2mp=b,\quad 2np=-8,$$

откуда $a_1=-8$, $b_1=18$; $a_2=8$, $b_2=14$.

835. 1) Имеем $x+\frac{1}{x}=a$, или $x^2-ax+1=0$. Для того чтобы это уравнение не имело действительных решений, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $a^2-4<0$, т. е. $-2<a<2$.

2) Перепишем $\sqrt{a^2-4a+4}=2-a$ в следующем виде: $\sqrt{(a-2)^2}=2-a$, или $|a-2|=2-a$. Из условия ясно, что $2-a\geqslant 0$, т. е. $a-2\leqslant 0$, т. е. $a\leqslant 2$.

3) Пусть пара чисел (x_0, y_0) — одно из решений данной системы. Тогда очевидно, что пара чисел $(x_0, -y_0)$ также удовлетворяет системе. Следовательно, для того чтобы система имела единственное решение, необходимо, чтобы $y_0=-y_0$, т. е. чтобы $y=0$. Тогда $a=x=-3$. Подставляя в первое уравнение системы вместо a число -3, убеждаемся, что при $a=-3$ система имеет единственное решение $y=0$. Итак,

$$a=-3.$$

Теперь видим, что если $-2<a<2$, то уравнения 1) и 2) выполняются, а утверждение 3) не выполняется. Если $a=-3$, то выполняются утверждения 2) и 3), а утверждение 1) не выполняется. Наконец, утверждения 1) и 3) не выполняются одновременно.

Отв. $-2<a<2$ или $a=-3$.

836. Так как $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ составляют арифметическую прогрессию, то

$$S_{n+1}=\frac{a_{k+1}+a_{n-k+1}}{2}(n+1),$$

откуда

$$a_{k+1}=\frac{2S_{n+1}}{n+1}-a_{n-k+1}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{2S_{n+1}}{n+1}-a_{n-k+1}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{2S_{n+1}}{n+1}-\sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}a_{n-k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{2S_{n+1}}{n+1}-\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}=2\,\frac{2^nS_{n+1}}{n+1}-\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}.$$

Но тогда

$$2\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}=2\cdot\frac{2^nS_{n+1}}{n+1},$$

а потому

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1},$$

что и требовалось доказать.

837. Допустим, что число $101\,010 = a^2 - b^2$, где a и b — целые числа. Имеем

$$101\,010 = (a+b)(a-b).$$

Возможны четыре случая:

1) a — четное, b — четное;
2) a — четное, b — нечетное;
3) a — нечетное, b — четное;
4) a — нечетное, b — нечетное.

В случаях 2) и 3) числа $a+b$ и $a-b$ нечетны, а потому их произведение нечетно и не может равняться четному числу 101 010. В случаях 1) и 4) числа $a+b$ и $a-b$ четны, поэтому их произведение делится на четыре и не может равняться числу 101 010, не делящемуся на 4. Итак, утверждение задачи верно.

838. Предположим противное, т. е. что имеет место равенство

$$1+\sqrt{3} = (a+b\sqrt{3})^2, \quad \text{или} \quad 1+\sqrt{3} = a^2+3b^2+2ab\sqrt{3}.$$

Так как a и b — рациональные числа, то из последнего равенства следует, что должны одновременно выполняться два равенства: $a^2+3b^2=1$ и $2ab=1$. Из второго из этих равенств (так как $b \neq 0$) находим $a^2 = \frac{1}{4b^2}$. Подставляя это значение a^2 в первое равенство, получим $12b^4-4b^2+1=0$. Последнее равенство не выполняется ни при каком действительном значении b. Следовательно, утверждение задачи верно.

839. Поскольку искомые дроби составляют арифметическую прогрессию, то имеем $\frac{x}{u}-\frac{y}{u}=\frac{y}{u}-\frac{z}{u}$, т. е. $x-y=y-z$, откуда $2y=x+z$. Но

$$\frac{y}{u}=\frac{x+x^2}{u+u^2}=\frac{x(1+x)}{u(1+u)}.$$

Отсюда находим, что

$$\frac{y}{x}=\frac{1+x}{1+u}. \tag{1}$$

Также

$$\frac{z}{u}=\frac{y^2+y}{u^2+u}=\frac{y(1+y)}{u(1+u)},$$

откуда следует, что

$$\frac{z}{y}=\frac{1+y}{1+u}. \tag{2}$$

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$\frac{y^2}{xz}=\frac{1+x}{1+y}. \tag{3}$$

Но так как $z=2y-x$, то равенство (3) перепишется в виде

$$y^2(1+y)=(1+x)(2y-x)x,$$

или

$$(x-y)(-xy-y^2+x-y+x^2)=0. \tag{4}$$

Убедимся, что $x-y\neq 0$. В самом деле, если $x-y=0$, то $x=y$. Тогда, учитывая равенство $2y=x+z$, получаем $x=y=z$, а учитывая равенство (1), имеем $x=y=z=u$, что противоречит условию задачи. Следовательно, из (4) вытекает, что

$$-xy-y^2+x-y+x^2=0,$$

или

$$y^2+(x+1)y-(x+x^2)=0.$$

Разрешив это уравнение относительно y, получим

$$y=\frac{-(x+1)\pm\sqrt{5x^2+6x+1}}{2}.$$

Поскольку y — целое число, то $\sqrt{5x^2+6x+1}$ должно быть рациональным числом. Введем обозначение: $\sqrt{5x^2+6x+1}=t$, тогда имеем

$$5x^2+6x+(1-t^2)=0,$$

откуда находим

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5t^2+4}}{5}.$$

Так как x — целое, то $\sqrt{5t^2+4}$ должно быть рациональным числом. Пусть $\sqrt{5t^2+4}=k$, или $k^2-5t^2=4$, или

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2-5\left(\frac{t}{2}\right)^2=1.$$

Наименьшие числа, удовлетворяющие этому уравнению, суть $k/2=9$, $t/2=4$, т. е. $k=18$, $t=8$. Следовательно, $x=3$, $y=2$, $z=1$, $u=5$. Итак, искомые дроби $^3/_5$, $^2/_5$, $^1/_5$.

840. Имеем

$$(x+1)^n=1+C_n^1x+\ldots+C_n^{l-1}x^{l-1}+C_n^lx^l+\ldots+x^n.$$

Поскольку этот многочлен умножается на квадратный трехчлен $(l-2)x^2+nx-l$, то очевидно, что коэффициент при x^l в произведении есть выражение

$$(l-2)C_n^{l-2}+nC_n^{l-1}-lC_n^l,$$

которое после преобразований приводится к nC_n^{l-2}.

841. Так как $kC_m^k=mC_{m-1}^{k-1}$, то имеем

$$16C_{2n}^2+32C_{2n}^4+48C_{2n}^6+\ldots+8(2n-2)C_{2n}^{2n-2}+8\cdot 2nC_{2n}^{2n}=$$
$$=8\left[2C_{2n}^2+4C_{2n}^4+6C_{2n}^6+\ldots+(2n-2)C_{2n}^{2n-2}+2nC_{2n}^{2n}\right]=$$
$$=8\left(2nC_{2n-1}^1+2nC_{2n-1}^3+2nC_{2n-1}^5+\ldots+2nC_{2n-1}^{2n-3}+2nC_{2n-1}^{2n-1}\right)=$$
$$=16n\left(C_{2n-1}^1+C_{2n-1}^3+C_{2n-1}^5+\ldots+C_{2n-1}^{2n-3}+C_{2n-1}^{2n-1}\right)=$$
$$=16n\cdot\frac{2^{2n-1}}{2}=n\cdot 2^{2n+2},$$

что и требовалось доказать.

842. Так как в силу формулы бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^k=(p+1)^n,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k T_m^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1^k + 2^k + \ldots + m^k) - 1^n - 2^n - \ldots - m^n =$$
$$= 2^n + 3^n + \ldots + (m+1)^n - 1^n - 2^n - \ldots - m^n,$$

откуда после упрощения получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k T_m^{(k)} = (m+1)^n - 1,$$

что и требовалось доказать.

843. Пусть x и $\sqrt{x^2+x+1}$ — рациональные числа. Следовательно, и их разность является рациональным числом, т. е.

$$\sqrt{x^2+x+1} - x = R \quad (R \text{ — рациональное число}).$$

Из этого соотношения следуют равенства

$$\sqrt{x^2+x+1} = x + R,$$
$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2Rx + R^2,$$
$$x(1-2R) = R^2 - 1.$$

Отсюда

$$x = \frac{R^2-1}{1-2R}.$$

Последнее возможно, так как $1-2R \neq 0$, т. е. $R \neq {}^1/_2$. Действительно, если $R = \frac{1}{2}$, то $\sqrt{x^2+x+1} = x + \frac{1}{2}$, или $x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4}$, т. е. $1 = {}^1/_4$.

Остается доказать, что если $x = \frac{R^2-1}{1-2R}$, где R — любое рациональное число, отличное от ${}^1/_2$, то $\sqrt{x^2+x+1}$ есть число рациональное. Пусть $x = \frac{R^2-1}{1-2R}$, где R — любое рациональное число, отличное от ${}^1/_2$. Тогда

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(\frac{R^2-1}{1-2R}\right)^2 + \left(\frac{R^2-1}{1-2R}\right) + 1} =$$
$$= \frac{\sqrt{R^4 - 2R^3 + 3R^2 - 2R + 1}}{|1-2R|} = \frac{\sqrt{(R^2-R+1)^2}}{|1-2R|} = \frac{R^2-R+1}{|1-2R|}.$$

Числитель берем без модуля, так как при любом рациональном R выражение $R^2 - R + 1 > 0$.

844. Имеем $x+y+z = x - (-y-x)$. Для того чтобы многочлен $F(x, y, z)$ делился без остатка на $x+y+z$, необходимо и достаточно, чтобы при подстановке в $F(x, y, z)$ вместо x выражения $-y-z$ этот многочлен обращался в нуль, т. е.

$$(-y-z)^2 - y^2 - z^2 - ayz = 0,$$

или

$$2yz - ayz = 0,$$

или

$$(2-a)\,yz = 0.$$

Легко проверить, что при $yz = 0$ многочлен $F(x, y, z)$ делится на $x+y+z$ при любом a. Если же $yz \neq 0$, то $2 - a = 0$, откуда $a = 2$.

845. Первое решение. Как известно, для того чтобы многочлен $f(x)$ делился без остатка на многочлен $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой многочлен Q, чтобы имело место тождество

$$f(x)=g(x)Q.$$

Многочлен Q — второй степени, и первый его член есть частное от деления первого члена $f(x)$ на первый член $g(x)$, т. е. $\frac{6x^4}{x^2}$, или $6x^2$. Многочлен Q имеет вид $6x^2+\lambda x+\mu$, а потому имеем тождество

$$6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=(x^2-x+b)(6x^2+\lambda x+\mu).$$

Поскольку коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны, то имеем равенства

$$-7=\lambda-6, \tag{1}$$

$$a=\mu-\lambda+6b, \tag{2}$$

$$3=-\mu+b\lambda, \tag{3}$$

$$2=b\mu, \tag{4}$$

которые позволят найти четыре неизвестных λ, μ, a, b; из равенства (1) находим $\lambda=-1$, а из (3) и (4) получаем

$$\mu=-b-3, \qquad 2=b(-b-3),$$

или

$$b^2+3b+2=0,$$

откуда находим два значения для b, а именно: -1 и -2.

Если $b=-1$, то $\mu=-2$, а следовательно, $a=-7$. Если $b=-2$, то $\mu=-1$, $a=-12$.

Таким образом, имеем следующие два тождества:

$$6x^4-7x^3-7x^2+3x+2=(x^2-x-1)(6x^2-x-2),$$

$$6x^4-7x^3-12x^2+3x+2=(x^2-x-2)(6x^2-x-1).$$

Второе решение. Обычным делением многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ получаем частное

$$Q=6x^2-x+a-6b-1$$

и остаток

$$R=(a-5b+2)x+6b^2-ab+b+2.$$

Для того чтобы $f(x)$ делилось на $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаток R был тождественно равен нулю, т. е. чтобы в этом многочлене (R) коэффициент при x и свободный член равнялись нулю. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} a-5b+2=0, \\ 6b^2-ab+b+2=0. \end{cases}$$

Эта система дает нам два решения:

1) $a=-7$, $\quad b=-1$ и 2) $a=-12$, $\quad b=-2$.

846. Ясно, что остаток от деления многочлена P на $(x+1)(x^2+1)$ есть многочлен второй степени ax^2+bx+c, и если обозначить частное через Q, то имеем тождество

$$P=(x+1)(x^2+1)Q+ax^2+bx+c. \tag{1}$$

Поскольку остаток от деления P на $x+1$ равен 4, то при $x=-1$ многочлен P обращается в 4, и, подставив в тождество (1) число -1 вместо x, получим

$$4=a-b+c. \tag{2}$$

С другой стороны, тождество (1) можно переписать в следующем виде:

$$P=(x+1)(x^2+1)Q+a(x^2+1)+bx+c-a,$$

или

$$P=(x^2+1)[(x+1)Q+a]+bx+c-a.$$

Из последнего соотношения видно, что $bx+c-a$ есть частное от деления P на x^2+1. Таким образом получаем

$$bx+c-a=2x+3,$$

откуда следует, что

$$b=2,\ c-a=3. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) находим

$$a=3/2,\ b=2,\ c=9/2.$$

Итак, искомый остаток есть трехчлен

$$\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{9}{2}.$$

847. Пусть Q — частное, а R — остаток от деления многочлена P на x^4+x^2+1. Тогда имеем тождество

$$P=(x^4+x^2+1)\ Q+R,$$

где R — многочлен третьей степени. Но так как

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

то

$$P=(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q+R.$$

Последнее равенство можно переписать и так:

$$P-R=(x^2+x+1)(x^2-x+1)Q.$$

Следовательно, $P-R$ делится без остатка как на x^2+x+1, так и на x^2-x+1. Отсюда следует, что остатки от деления P на каждый из трехчленов x^2+x+1 и x^2-x+1 совпадают с остатком от деления R на эти же трехчлены. Так как R есть многочлен третьей степени, то частные от деления его на эти трехчлены являются двучленами первой степени. Таким образом, имеем

$$R=(x^2+x+1)(ax+b)+1-x,$$

$$R=(x^2-x+1)(cx+d)+3x+5.$$

Значит, имеем тождество

$$(x^2+x+1)(ax+b)+1-x=(x^2-x+1)(cx+d)+3x+5.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$a=c,\ b+a=d-c,\ b+a-1=-d+c+3,\ b+1=d+5,$$

откуда находим $a=c=-2$, $b=4$, $d=0$. Итак, искомый остаток

$$R=-2x^3+2x^2+x+5.$$

848. Обычным делением находим, что остатки от деления многочлена ax^4+bx^3+c на x^2+1 и на x^3+1 соответственно равны $-bx+a+c$ и $-ax+c-b$. Следовательно, в силу условия задачи имеем тождество

$$(-bx+a+c)(-ax+c-b)=2\ (x-1)(x-5). \qquad (1)$$

Коэффициент левой части при x^2 равен ab, а в правой части коэффициент при x^2 равен 2; поэтому $ab=2$. Это равенство показывает, что $a\neq 0$,

$b \neq 0$. Перепишем тождество (1) в таком виде:

$$ab\left(x-\frac{a+c}{b}\right)\left(x-\frac{c-b}{a}\right)=2(x-1)(x-5).$$

Левая и правая части этого тождества должны обращаться в нуль при одних и тех же значениях x. Таким образом, имеем или

$$ab=2,\quad \frac{a+c}{b}=1,\quad \frac{c-b}{a}=5, \tag{2}$$

или

$$ab=2,\quad \frac{a+c}{b}=5,\quad \frac{c-b}{a}=1. \tag{3}$$

Два последних уравнения из (2) можно переписать так: $a+c-b=0$, $c-b-5a=0$, и, вычитая почленно одно из другого, получим $a=0$, что невозможно. Два последних уравнения (3) дают $a=2b$ и $c=3b$, а подставив $2b$ вместо a в первое уравнение (3), находим $b^2=1$, откуда $b=\pm 1$. Таким образом, получаем две системы решений: $a=\pm 2$, $b=\pm 1$, $c=\pm 3$, где одновременно берутся или верхние знаки, или нижние. Итак, искомые многочлены таковы: $\pm(2x^4+x^3+3)$.

849. Сразу заметим, что при $n=2$ многочлен $x^n-ax^{n-1}+ax-1=$ $=x^2-1$ не делится на $(x-1)^2$. В дальнейшем будем считать, что $n\neq 2$. Имеем

$$x^n-ax^{n-1}+ax-1=$$
$$=(x-1)[x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1-ax(x^{n-3}+x^{n-4}+\ldots+x+1)].$$

Для того чтобы многочлен, заключенный в квадратных скобках, делился на $x-1$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=1$ он был равен нулю, т. е. $n-a(n-2)=0$, откуда $a=\dfrac{n}{n-2}$.

Отв. $a=\dfrac{n}{n-2}$, где $n\neq 2$.

850. Обычным делением $f(x)$ на $\varphi(x)$ получаем частное $x+m$ и остаток

$$3(a-m^2)\,x^2+3(b-am)\,x+c-bm.$$

Для того чтобы $f(x)$ делилось без остатка на $\varphi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы этот остаток был тождественно равен нулю, т. е. чтобы все его коэффициенты равнялись нулю. Таким образом, имеем систему

$$a-m^2=0,\quad b-am=0,\quad c-bm=0,$$

или

$$a=m^2,\quad b=m^3,\quad c=m^4.$$

Следовательно,

$$f(x)=x^4+4mx^3+6m^2x^2+4m^3x+m^4=(x+m)^4,$$
$$\varphi(x)=x^3+3mx^2+3m^2x+m^3=(x+m)^3.$$

851. Поскольку деление многочлена $x^4+(a-b)x^3+(a-b)x+b^2$ на многочлен $x^2-(a-b)x+b^2$ совершается без остатка, то частное должно быть многочленом второй степени, у которого крайние члены представляют собой частные от деления крайних членов делимого на соответствующие члены делителя, т. е. будут равны $\dfrac{x^4}{x^2}=x^2$ и $\dfrac{b^2}{b^2}=1$. Таким образом, частное должно иметь вид $x^2+\lambda x+1$. Итак, имеем тождество

$$x^4+(a-b)x^3+(a-b)x+b^2=[x^2-(a-b)x+b^2](x^2+\lambda x+1),$$

которое приводится к такому виду:

$$x^4+(a-b)x^3+(a-b)x+b^2=$$
$$=x^4+[\lambda-(a-b)]x^3+[1-\lambda(a-b)+b^2]x^2+[-(a-b)+\lambda b^2]x+b^2.$$

Отсюда следует, что a и b удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a-b=\lambda-(a-b), \\ 0=1-\lambda(a-b)+b^2, \\ a-b=-(a-b)+\lambda b^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим $\lambda=2(a-b)$ и, подставляя это значение λ в два других уравнения, получаем

$$\begin{cases} 1-2(a-b)^2+b^2=0, & (1) \\ 2(a-b)(b^2-1)=0. & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2) следует, что либо $a-b=0$, либо $b^2-1=0$. Но если $a-b=0$, то уравнение (1) приводится к виду $b^2+1=0$, это уравнение не имеет решений. Таким образом, $b^2-1=0$, т. е. $b=\pm 1$. Если $b=1$, то уравнение (1) таково: $a^2-2a=0$, или $a(a-2)=0$, что дает либо $a=0$, либо $a=2$. Таким образом, получаем две системы решений:

$$\begin{cases} b=1, \\ a=0, \\ \lambda=2(a-b)=-2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b=1, \\ a=2, \\ \lambda=2. \end{cases}$$

Если же $b=-1$, то уравнение (1) дает $a=0$ или $a=-2$, вследствие чего получаем также две системы решений:

$$\begin{cases} b=-1, \\ a=0, \\ \lambda=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-1, \\ a=-2, \\ \lambda=-2. \end{cases}$$

Итак, предложенная задача имеет четыре решения, но заметим, что эти решения дают лишь два различных тождества:

$$x^4-x^3-x+1=(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$$

и

$$x^4+x^3+x+1=(x^2-x+1)(x^2+2x+1).$$

Отв. $a=0$, $b=1$; $a=2$, $b=1$; $a=0$, $b=-1$; $a=-2$, $b=-1$.

852. Первое решение. Разделив многочлен $f(x)$ на $(x^2-1)(x-3)$, т. е. на x^3-3x^2-x+3, получим в частном x^2+x-2, а в остатке $(m-8)x^2+(n-5)x+p+6$. Для того чтобы $f(x)$ делилось без остатка на $(x^2-1)(x-3)$, необходимо и достаточно, чтобы этот остаток был тождественно равен нулю, т. е. чтобы

$$m-8=0, \quad n-5=0 \quad \text{и} \quad p+6=0,$$

откуда

$$m=8, \quad n=5, \quad p=-6.$$

Второе решение. Для того чтобы $f(x)$ делилось без остатка на $(x^2-1)(x-3)$, т. е. на $(x-1)(x+1)(x-3)$, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось в отдельности на $x+1$, на $x-1$ и на $x-3$, т. е. чтобы $f(x)$ обращалось в нуль при подстановке вместо x чисел 1, -1, 3. Отсюда получается система уравнений

$$\begin{cases} m+n+p=7, \\ m-n+p=-3, \\ 9m+3n+p=81. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $m=8$, $n=5$, $p=-6$.

853. Обычным делением находим остатки от деления данного многочлена на x^2+d и на x^2-d. Остатки таковы:

$$(b+d)\,x+c+d^2-ad \quad \text{и} \quad (b-d)\,x+c+d^2+ad.$$

Таким образом, должны иметь место следующие тождества:

$$(b+d)\,x+c+d^2-ad=x \quad \text{и} \quad (b-d)\,x+c+d^2+ad=-x,$$

откуда следует: $b+d=1$, $c+d^2-ad=0$, $b-d=-1$, $c+d^2+ad=0$. Решая совместно последние четыре уравнения, находим

$$a=0, \quad b=0, \quad c=-1, \quad d=1.$$

854. Имеем

$$F(x)=(x^n-1)^2-n^2x^{n-1}(x-1)^2=(x-1)^2\cdot f(x),$$

где $f(x)=(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)^2-n^2x^{n-1}$. Так как $f(1)=n^2-n^2=0$, то $f(x)$ делится на $(x-1)$, т. е. $f(x)=(x-1)\,\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — многочлен. Поэтому $F(x)=(x-1)^3\,\varphi(x)$, т. е. $F(x)$ делится на $(x-1)^3$.

855. Пусть $f(x)$ — частное от деления $F(x)$ на x^2-1, а $r(x)$ — остаток. Тогда $F(x)=(x^2-1)\,f(x)+r(x)$. При делении многочлена на квадратную функцию в остатке получается двучлен первой степени (или, в частности, число), т. е. $r(x)=ax+b$. Итак, имеем $F(x)=(x^2-1)\cdot f(x)+ax+b$. Согласно условию задачи имеем $F(1)=(1-1)\cdot f(1)+a\cdot 1+b=3$, $F(-1)=(1-1)\cdot f(-1)+a\cdot(-1)+b=1$, или

$$\begin{cases} a+b=3, \\ -a+b=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a=1$, $b=2$. Следовательно, искомый остаток $ax+b=x+2$.

856. Так как оба многочлена представляют собой суммы геометрических прогрессий, то

$$x^m+x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1=\frac{x^{m+1}-1}{x-1}$$

и

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Таким образом, частное от деления первого многочлена на второй равно $\dfrac{x^{m+1}-1}{x^{n+1}-1}$. Это частное можно представить в виде

$$\frac{(x^{n+1})^{\frac{m+1}{n+1}}-1}{x^{n+1}-1}.$$

Отсюда видно, что для того, чтобы первый многочлен делился на второй, достаточно, чтобы $\dfrac{m+1}{n+1}$ было целым положительным числом, т. е. чтобы $m+1$ было кратно $n+1$.

857. Из трех последовательных целых чисел $(n-2)$, $(n-1)$ и n одно делится на 3 и по крайней мере одно делится на 2. Поэтому один из сомножителей делимого имеет вид $[(x^3)^k-1]$ и, следовательно, делится на (x^3-1); каждый из остальных сомножителей делится на $(x-1)$, и хотя бы один из трех сомножителей делимого делится на $(x+1)$. Поэтому $F(x)$ делится на $f(x)$.

858. Имеем $(mn+pq)-(mq+np)=(m-p)(n-q)$; отсюда следует, что если $mn+pq$ делится на $m-p$, то и $mq+np$ делится на $m-p$.