

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕТОК

Монография известного японского физика-теоретика И. Тоды посвящена распространению волн в одномерных решетках (цепочках) с нелинейным взаимодействием между частицами. В книге необычайно просто трактуются многие сложные математические методы, необходимые не только в физике твердого тела, но и в других областях, где изучаются волновые уравнения.

Для специалистов по теории колебаний кристаллической решетки и по физике нелинейных аффектов в твердых телах, а также для аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	11
Глава 1. Введение	14
1.1. Проблема Ферми - Паста - Улама	14
1.2. Расчет Хенона - Хейлеса	19
1.3. Открытие солитонов	23
1.4. Дуальные системы	25
Глава 2. Цепочка с экспоненциальным взаимодействием	29
2.1. Поиски интегрируемой цепочки	29
2.2. Цепочка с экспоненциальным взаимодействием	32
2.3. Периодические решения	35
2.4. Уединенные волны	39
2.5. Двухсолитонные решения	43
2.6. Предел твердых сфер	48
2.7. Континуальное приближение и время возврата	50
2.8. Применения и обобщения	54
2.9. Отображение Пуанкаре	57
2.10. Сохраняющиеся величины	59
Глава 3. Спектр и построение решений	65
3.1. Матричный формализм	65
3.2. Бесконечная цепочка	69
3.3. Рассеяние и связанные состояния	74
3.4. Уравнение Гельфанда - Левитана	81
3.5. Задача с начальными условиями	85
3.6. Солитонные решения	87
3.7. Соотношение между сохраняющимися величинами и коэффициентом прохождения	95
3.8. Обобщение уравнений движения и система Каца - Мёрбеке	101
3.9. Преобразование Бэклунда.	107
3.10. Конечная цепочка	116
3.11. Континуальное приближение.	126
Глава 4. Периодические системы	132
4.1. Дискретное уравнение Хилла	132

4.2. Дополнительный спектр	141
4.3. Соотношение между $\mu_j(k)$ и $\mu_j(0)$	147
4.4. Интегралы на римановой поверхности	153
4.5. Решение проблемы обращения Якоби	166
4.6. Временная эволюция	168
4.7. Простой пример (кноидальная волна)	176
4.8. Периодическая система из трех частиц	191
Глава 5. Применение теории Гамильтона - Якоби	198
5.1. Канонически сопряженные переменные	198
5.2. Переменные действия	206
Приложения	212
А. Метод Стильтьеса для непрерывной дроби	212
Б. Система Штурма	221
В. Простые корни уравнения $\Delta^2(\lambda) = 4$ определяет все корни	222
Г. Весь дополнительный спектр du - простой	224
Д. Интерполяционная формула Лагранжа	225
Е. ζ -функция многих переменных (ζ -функция Римана)	226
Ж. Метод Хироты	230
З. Явление индукции	233
И. Статистическая сумма	239
К. Дисперсионное соотношение для цепочки без удлинения	241
Краткие решения основных задач	245
Цитированная литература	253
Литература, добавленная в издании на английском языке	258
Литература, добавленная при переводе	259

Предисловие редактора перевода

Книга Морикацу Тоды посвящена теории нелинейных волн в дискретных системах. Чтобы лучше понять важность и новизну разбираемых в этой книге вопросов и то место, которое они занимают в теории нелинейных явлений, вспомним сначала историю этой бурно развивающейся в последнее время области физики.

150 лет назад английский инженер и естествоиспытатель Дж. Рассел впервые наблюдал уединенную волну, возбужденную в узком канале небольшим судном, которое тянула пара лошадей. Эта уединенная волна распространялась по воде как импульс, который не менял своей формы и двигался практически без потерь. В 1985 г. Кортвег и де Вриз (КдВ) впервые математически строго решили задачу о распространении таких волн в прямоугольном канале с водой и тем самым положили начало гидродинамической теории нелинейных волн. С тех пор в решении различных нелинейных уравнений, имеющих важное прикладное значение, в математике были достигнуты большие успехи.

Принято считать, что физика нелинейных явлений возникла в 1955 г., когда Ферми, Паста и Улам с помощью самой совершенной в то время ЭВМ начали исследование вопроса о термализации энергии в нелинейных дискретно нагруженных струнах. Прошло еще 10 лет, прежде чем появился столь широко используемый теперь в физике термин солитон. В обращение его ввели Забуски и Крускал, которые связали факт отсутствия термализации в численных экспериментах Ферми и др. с наличием солитонов в нелинейной струне. Собственно с этого времени и начались активные исследования нелинейных эффектов в физике. В дальнейшем развитии теории нелинейных волн исключительно важную роль сыграл хорошо разработанный в квантовой механике метод обратной задачи теории рассеяния, существенный вклад в создание которого внесли советские ученые И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, Л.Д. Фаддеев и др. В 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура впервые при-

могли этот метод к решению уравнения КдВ. Важные методические достижения и наиболее интересные физические результаты, полученные в рамках теории нелинейных волн до 1972 г. включительно, довольно полно отражены в обзоре [1].

В 1971 г. В.Е. Захаров и Л.Д. Фаддеев предложили гамильтонову интерпретацию метода обратной задачи теории рассеяния в применении к уравнению КдВ, что открывало новые возможности в теории элементарных частиц. Так, например, переход к переменным угол - действие дал возможность более строго поставить задачу об элементарных частицах как о солитонах в нелинейной квантовой теории поля [2]. Квазиклассический подход к решению этой задачи описан в обзоре [3]. Задача о квантовании солитонов подробно разбирается в обзоре [4]. Применение солитонных концепций в физике элементарных частиц обсуждается также и в обзоре [5], где, кроме того, много говорится и о роли солитонов в физике плазмы. Важные в методическом отношении вопросы теории солитонов обсуждены в вышедших недавно специальных сборниках [6 - 8].

До сих пор речь шла о развитии методов решения нелинейных уравнений для континуальных сред и об их приложении к задачам гидродинамики, физики плазмы, нелинейной оптики и теории элементарных частиц. Естественно, что многое из того, что уже известно для случая континуальных сред, по-своему проявляется и в твердых телах; это прежде всего относится к задачам нелинейной оптики и к нелинейным эффектам в электронной плазме твердых тел.

Необходимость учета нелинейных членов в различных уравнениях, специфичных именно для теории твердого тела, конечно, была осознана давно. Действительно, пренебрегая ангармонизмом решетки, нельзя было объяснить тепловое расширение твердых тел и их теплопроводность (последнее особенно относится к диэлектрикам). Однако учитывались только слабые нелинейности (в рамках теории возмущений), что порой приводило к потере важнейших особенностей, обусловленных именно нелинейностью задачи.

Из книги Тоды читатель узнает, к каким важным новым следствиям может привести точный учет сильного ангармонизма. К сожалению, точные ответы удалось получить лишь в рамках сугубо одномерных ангармонических моделей. Может показаться, что эти интересные в математическом отношении результаты относятся скорее к математической физике в одном измерении, чем к реальной физике твердого тела. Однако это не так. В последние годы особое внимание уделяется изучению так называемых квазидономерных веществ. Одна из причин интереса к таким веществам - надежда

синтезировать на их основе новые сверхпроводники с достаточно высокими критическими температурами. В твердых телах этого нового класса очень велика роль ангармонизма колебаний решетки, и, кроме того, в них нелинейные явления обретают другие, совершенно новые черты (см., например, сборник [9]).

Квазиодномерное вещество можно представить как систему параллельных цепочек атомного диаметра (расстояние между атомами внутри одной цепочки меньше, чем расстояние между атомами в разных цепочках). Слабое зацепление между цепочками отвечает как бы слабой трехмерности. В этих веществах, как показали экспериментальные и теоретические исследования, все нелинейные эффекты выражены гораздо более отчетливо, чем в обычных трехмерных веществах [10, 11]. Это можно понять на основе чисто качественных соображений. Дело в том, что почти во всех одномерных моделях многие нелинейные возбуждения "бесщелевые", тогда как в трехмерных моделях многие типы нелинейных решений, присущие одномерным системам, отделены от энергии основного состояния большой щелью в спектре и их трудно возбудить, а значит, они либо отсутствуют вообще, либо их роль незначительна. Из множества своеобразных проявлений нелинейности в квазиодномерных системах упомянем здесь лишь два. Оказывается, что перенос тока в них осуществляется не посредством элементарных возбуждений (т.е. электронами), а с помощью нелинейных волн зарядовой плотности [11]. Далее, в полиацетилене, например, в качестве носителей тока выступают солитоны, причем эти солитоны могут быть заряженными, но обладать нулевым спином или обладать спином, но не нести заряда [11]. Перечень нетривиальных проявлений нелинейных эффектов можно было бы, конечно, продолжить, однако уже сказанного, по-видимому, достаточно, чтобы понять, сколь важное место занимает теория нелинейных явлений во всех разделах современной физики.

Перейдем теперь непосредственно к обсуждению содержания книги М. Тоды. Выше уже отмечалось, что фактически в ней идет речь об одном из разделов физики твердого тела — колебаниях кристаллической решетки, но в условиях, когда сильную роль играет ангармонизм. Морикацу Тода впервые нашел такую одномерную модель ангармонизма (она получила впоследствии название "цепочка Тоды"), которая допустила строгое аналитическое рассмотрение из-за полной интегрируемости соответствующих динамических уравнений. Это был первый случай, когда удалось решить бесконечную систему нелинейных уравнений в частных разностях. В книге при-

веден целый класс решений типа нелинейных волн, найдены солитонные решения (в том числе и многосолитонные).

Однако содержание книги этим не исчерпывается. В ней описывается целый ряд важных методических достижений, значение которых далеко выходит за рамки теории колебаний нелинейных цепочек. Очень интересна схема метода обратной задачи теории рассеяния применительно к дискретным (а не к континуальным) системам. Фактически речь идет о задаче Коши для периодической цепочки. В то время как в случае бесконечной цепочки применение метода обратной задачи рассеяния приводит к дискретному уравнению Шредингера, для замкнутой (периодической) системы получается дискретное уравнение Хилла. Вместо данных рассеяния автор рассматривает более удобные для расчетов спектры дискретного уравнения Хилла и вспомогательный спектр для фиксированных граничных значений того же самого уравнения. При таком способе рассмотрения важную роль играют фундаментальное решение и дискриминант дискретного уравнения Хилла, а задача с начальными данными сводится к обратной задаче Якоби, или к обратной задаче спектральной теории. Ее изучение требует применения не совсем обычных для физиков математических методов — спектров на комплексных поверхностях и интегралов на замкнутых римановых поверхностях. Однако непривычные математические построения подробно иллюстрируются таким простым примером, как случай кноидальной волны. В книге изучена также важная, хотя и простейшая система из трех частиц, так как она показывает почти все характеристические черты системы с многими частицами. Большой методический интерес представляет и обсуждение возможности применения к нелинейной цепочке схемы Гамильтона — Якоби в переменных угол — действие. Как уже отмечалось выше, это открывает возможность последовательного квантования нелинейных колебаний. Было бы очень интересно выполнить до конца такую программу и для цепочки Тоды.

К несомненным достоинствам книги следует отнести методически удачный стиль изложения, а также наличие библиографии, охватывающей период до 1980 г. включительно. Автор широко использует и цитирует работы советских авторов, внесших крупный вклад в развитие данной области. При переводе библиография расширена за счет включения работ, появившихся в печати после 1980 г.

Для советского читателя книга Тоды может стать прекрасным дополнением к монографиям и обзорам, о которых речь шла выше. Впрочем, этот перечень был бы неполным, если не упомянуть здесь о вышедшем за рубежом в 1982 г. сборнике под общим названием "Интегрируемые квантовые теории поля" [12]. Большое внимание в

нем уделено именно квантовой обратной задаче теории рассеяния с использованием "анзатца Бете". Помимо очевидной ценности для теории элементарных частиц этот подход открывает новые методические возможности и в области теории твердого тела, ибо он позволяет отыскивать нелинейные решения и для дискретных квантовых систем, скажем для гейзенберговской цепочки спинов. Важность подобного рода ответов для современной теории магнетизма трудно переоценить.

Коллектив, участвовавший в переводе книги М. Тоды на русский язык, искренне верит, что она представит интерес не только для специалистов по теории колебаний кристаллической решетки, но и станет учебным руководством для тех, кто работает в других областях физики твердого тела и даже для тех, кто еще только приступил к ее изучению. Написанная физиком и для физиков книга М. Тоды необычайно просто и живо **трактует многие сложные математические методы**, необходимые для современных исследований не только в физике твердого тела, но и в других областях, где изучаются волновые уравнения.

Перевод выполнили канд. физ.-мат. наук А.М. Быков (гл. 3, 4) и канд. физ.-мат. наук А.А. Матышев (предисловие, гл. 1, 2, 5 и приложения). Мы благодарим канд. физ.-мат. наук И.И. Иванчика за сверку исправлений в последнем японском издании с английским изданием. Мы благодарим также профессора Морикацу Тоду, любезно приславшего второе японское издание книги, за интерес к русскому изданию.

Ю.А. Фирсов

Литература

1. Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W. The Soliton: A New Concept in Applied Science. - Proc. IEEE, 1973, v. 61 (10), p. 1443.
2. Фаддеев Л.Д., Тахтаджян Л.А. - Усп.мат.наук, 1974, т. 29, с. 249.
3. Rajaraman R. Some Non-perturbated-semiclassical Methods in Quantum Field Theory (Pedagogical Review). - Phys.Rep., 1975, v. 21 (5), p. 227.
4. Faddeev L.D., Korepin V.E. Quantum Theory of Solitons. - Phys.Rep., 1978, v. 42 (1), p. 1.

5. **Makhankov V.G. Dynamics of Classical Solitons (in Non-integrable Systems).** - *Phys.Rep.*, 1978, v. 35 (1), p. 1.
6. **Теория солитонов. Метод обратной задачи /Под ред. С.П. Новикова.** - М.: Наука, 1980.
7. **Солитоны в действии: Пер. с англ./Под ред. К. Лонгрена, Э. Скетта.** - М.: Мир, 1981.
8. **Солитоны: Пер. с англ./Под ред. Р. Булафа и Р. Кадри.** - М.: Мир, 1983.
9. **Solitons and Condensed Matter Physics: Springer Series in Solid State Science, v. 8/Eds. A.R. Bishop, T. Schneider.** - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978.
10. **Physics in One Dimension: Springer Series in Solid State Science, v. 23/Eds. J. Bernasconi, T. Schneider.** - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981.
11. **Firsov J.A., Prigodin V.N., Zeidel Ch. Ground States and Critical Temperatures in Quasi-one-dimensional Systems.** - *Phys.Rep.*, 1984 (в печати).
12. **Integrable Quantum Field Theories: Springer Series, Lecture Notes on Physics, v. 151 /Eds. J. Hietarinta, C. Montonen.** - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.

Предисловие

В этой книге рассматриваются одномерные цепочки¹⁾, образованные из частиц, между которыми действуют нелинейные силы. Центральный объект книги - цепочка с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями, так как движение в ней можно строго проанализировать.

К задаче о цепочке с экспоненциальным взаимодействием меня привела в 1966 г. идея о том, что основы математических методов для исследования нелинейных цепочек должны опираться на строгие аналитические результаты. С тех пор такая цепочка стала объектом интенсивных исследований многих ученых. Поэтому я попытался описать развитие изучения этой цепочки. Предполагалось, что материал должен быть последовательным и не зависящим от других источников.

Гл. 1 начинается с небольшого исторического введения и трактует движение в цепочках и непрерывных системах в общем. Обсуждаются основные представления, необходимые для понимания последующих глав, включая поведение стабильных импульсов (солитонов), подобное поведение частиц, и наиболее характерные свойства нелинейных волн. Описывается дуальное преобразование, меняющее роли частиц и взаимодействия. Этот вопрос развивается в следующей главе.

Гл. 2 посвящена цепочке с экспоненциальным взаимодействием. Показано, что задача о цепочке имеет такие частные решения, как периодические волны (кноидальные волны), солитоны и многосо -

¹⁾ Везде в книге автор использует термин "решетка" (*lattice*). Однако им рассматриваются только одномерные решетки, поэтому в переводе используется термин "цепочка". - Прим.перев.

литонные решения. Обсуждаются континуальное приближение для цепочки, эквивалентный нелинейный LC -контур и родственные нелинейные явления. Кроме того, с помощью результатов, полученных путем численных расчетов, продемонстрировано, что траектории этой цепочки в фазовом пространстве весьма гладкие. Осознание этого факта привело к открытию других аналитических интегралов помимо полного импульса и полной энергии. Существование многих интегралов показывает, что уравнения движения для этой цепочки интегрируемы.

В гл. 3 приводятся уравнения движения в матричной форме. Сначала получаются сохраняющиеся величины, затем представляется метод производящих решений для бесконечной цепочки при заданных начальных условиях, когда движение конечно. Для этой цели вводится дискретное волновое уравнение для волны, рассеянной движением в цепочке; это так называемый метод обратной задачи рассеяния. Обсуждается также и другой метод решения обратной задачи для конечной цепочки, использующий сохраняющиеся величины.

В гл. 4 рассмотрена задача с начальными данными для периодической цепочки. Для нахождения решения обратной задачи, имеющей параметры, подлежащие определению из начальных данных, используется дискретное волновое уравнение с периодическим потенциалом, его спектр, а также дополнительный спектр. Так как общее решение слишком сложно, представлены некоторые конкретные задачи, включающие получение кноидальной волны из однозонного спектра, расчет спектра для движения с малыми амплитудами, а также детальный расчет трехчастичной системы.

Гл. 5 снова начинается с трехчастичной системы, где уравнения движения, следующие из общих принципов механики, интегрируются с помощью определения переменных действия и угловых переменных, которые характеризуют квазипериодическое движение в цепочке. Приведен простой пример.

Приложения, комментирующие некоторые места, добавлены по порядку следования в тексте.

Интересные, но не решенные аналитические задачи, явления, обнаруженные лишь при численных расчетах, смежные проблемы физики твердого тела и теории поля не рассмотрены, так как описание ограничено строгими аналитическими методами. Например, здесь не рассматриваются такие вопросы, как распространение волн в цепочке с примесью или с примесями, возможность существования локализованных мод, нелинейные решетки более высоких размерностей, отражение волн на свободном конце цепочки, явления последо-

вательного разрушения в модифицированной нелинейной цепочке, численные эксперименты по хаотическому движению общих нелинейных цепочек и эргодическая проблема. Квантование нелинейной цепочки остается также проблемой будущего.

При написании этой книги я обращался к написанным мною статьям и обзорам, а также к записям курсов лекций, прочитанных в некоторых университетах.

Это английский перевод книги, первоначально изданной в Японии в 1978 г. В настоящем издании пересмотрены некоторые разделы и кое-что добавлено для лучшего понимания.

Исследования, связанные с темой книги, получили значительное развитие за время, прошедшее с 1978 г. В основном они носили математический характер и выходили за рамки текста. Поэтому в этом издании добавлены библиографические ссылки на последние работы.

Мне доставляет огромное удовольствие выразить свою признательность за понимание и поддержку профессорам Г.Вегеланду, Н.Забуски и Дж.Форду. Я благодарен также моим коллегам и друзьям за их помощь, особенно профессору Т.Котера и членам семинара, который я веду в течение многих лет.

Я хочу поблагодарить сотрудников издательства «Шпрингер» за большую и ценную помощь в ходе публикации книги. Я также обязан г-же М.Охиси за прекрасную работу по перепечатке рукописи.

Январь 1981

Морикацу Тода

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Строгое рассмотрение колебаний в нелинейных цепочках стало восприниматься всерьез в начале 1950-х годов, когда Ферми, Паста и Улам (ФПУ) численно изучили проблему перехода к равнораспределению энергии. Для линейной цепочки нормальные моды колебания взаимно независимы, и обмена энергией между этими модами нет. Ферми и др. считали, что если ввести нелинейность взаимодействия, то между этими линейными модами должен возникнуть поток энергии, что в конце концов и приведет к равнораспределению энергии, как этого требует статистическая механика. Они хотели проверить это утверждение с помощью численных экспериментов. Однако в противоположность их ожиданиям оказалось, что перераспределяется лишь самая малая часть энергии. Было найдено, что такие системы периодически возвращаются к своему начальному состоянию. В этой главе мы начнем именно с данной проблемы - опишем ее характерные особенности, а также сформулируем исходные теоретические положения.

1.1. ПРОБЛЕМА ФЕРМИ - ПАСТА - УЛАМА

В этой книге изучается классическая механика одномерных решеток (цепочек), в которых частицы, их образующие, взаимодействуют только с ближайшими соседями. Ограничивая рассмотрение только однородными системами (без примесей), обозначим через m массу каждой частицы, через y_n - смещение n -й частицы и через $\phi(y_{n+1} - y_n)$ - потенциал взаимодействия между соседними частицами (потенциальную энергию пружины). Тогда уравнение движения принимает вид

$$m d^2 y_n / dt^2 = \phi'(y_{n+1} - y_n) - \phi'(y_n - y_{n-1}) \quad (n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

(1.1.1)

где ϕ' — производная ϕ . Таким образом,

$$f(\chi) = -\phi'(\chi) = -d\phi(\chi)/d\chi \quad (1.1.2)$$

есть сила, с которой действует пружина, растянутая на величину χ , и

$$\chi_n = y_{n+1} - y_n \quad (1.1.3)$$

есть относительное смещение.

Когда сила $f(\chi)$ пропорциональна смещению χ , т.е. когда выполняется закон Гука, говорят, что пружина линейна, и потенциал может быть записан как

$$\phi(\chi) = \frac{\alpha}{2} \chi^2. \quad (1.1.4)$$

Тогда уравнения движения принимает вид

$$md^2 y_n / dt^2 = \alpha (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}). \quad (1.1.5)$$

Обычно под y_n понимают продольное смещение. Хотя для иллюстрации более удобна поперечная волна, представить наглядно соответствующую ей нелинейную силу довольно трудно. Более подходит представление о крутильных колебаниях системы стержней или дисков, связанных нелинейными пружинами (рис. 1.1). В этом случае m обозначает момент инерции и y_n — угол поворота.

Если $y_n^{(1)} = y_n^{(1)}(t)$ и $y_n^{(2)} = y_n^{(2)}(t)$ — решения уравнения (1.1.5), то их линейная комбинация

$$y_n = y_n^{(1)} + y_n^{(2)} \quad (1.1.6)$$

есть также решение линейного уравнения (1.1.5). В частности, когда частицы $n = 0$ и $n = N + 1$ фиксированы,

$$\begin{cases} y_n^{(l)}(t) = C_n \sin\left(\frac{\pi l}{N+1} n\right) \cos(\omega_l t + \delta_l) \\ \omega_l = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \sin \frac{\pi l}{2(N+1)} \quad (l = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (1.1.7)$$

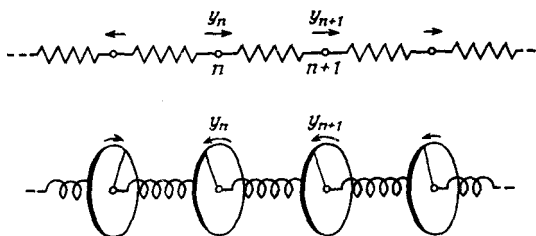


Рис. 1.1. Модели одномерных цепочек.

есть ℓ -я нормальная мода, и общее движение задается линейной суперпозицией таких мод. Амплитуда C_n каждой моды является постоянной, определяемой начальными условиями. Между модами нет передачи энергии. Поэтому линейная цепочка неэргодична. Такую систему нельзя изучать в рамках статистической механики, пока в нее не внесены некоторые модификации.

Здесь мы не будем вдаваться в тонкости проблемы эргодичности. Скажем сразу, что для приближения к эргодичности нужно модифицировать линейную цепочку следующими способами: 1) добавить нелинейность во взаимодействие; 2) ввести в цепочку примеси; 3) рассматривать решетки большей размерности. Кратко поясним изложенное. 1. В реальных кристаллах фононы рассеиваются друг на друге за счет нелинейности, которая, как считают, ответственна за конечную теплопроводность при высоких температурах. Обычные теории, включая теорию Пайерлса, неудовлетворительны с фундаментальной точки зрения, потому что они допускают необратимость с самого начала. 2. Примеси могут обусловить некоторый эффект, подобный поглощению и испусканию электромагнитных волн атомом, введенный Планком при обсуждении теплового излучения. 3. Двумерные и трехмерные решетки относятся к проблемам будущего. Однако, как мы увидим позднее, даже в одномерных цепочках нелинейность взаимодействия и примеси могут привести к явному эргодическому поведению.

Ферми в молодости занимался проблемой эргодичности, и когда были усовершенствованы ЭВМ, он вернулся к этой теме как к одной из задач, которую можно было решить с помощью компьютеров. Он думал, что если добавить нелинейный член к силе, действующей между частицами в цепочке, энергия будет перетекать от моды к моде, что в конце концов приведет систему к состоянию статистического равновесия, в котором энергия равномерно распределена между линейными модами (равнораспределение энергии). Именно эти ожидания Ферми и др. [1.1] надеялись подтвердить с помощью численных экспериментов.

Они проводили испытания с разными потенциалами: один содержа кубический член (α - константа нелинейности)

$$\phi(\chi) = \frac{\alpha}{2} \chi^2 + \frac{\alpha\alpha}{3} \chi^3, \quad (1.1.8a)$$

в другой был включен член четвертой степени (α' - константа нелинейности)

$$\phi(\chi) = \frac{\alpha}{2} \chi^2 + \frac{\alpha\alpha'}{4} \chi^4 \quad (1.1.8b)$$

и третий представлял линейную силу с кусочно-постоянным коэффициентом ($\alpha \neq \alpha'$, обе постоянные положительны)

$$f(\chi) = \begin{cases} -\alpha\chi, & (|\chi| < \chi_0), \\ -(\alpha - \alpha')\chi_0 - \alpha'\chi, & (\chi_0 < |\chi|). \end{cases} \quad (1.1.8b)$$

Оказалось, что результаты для всех трех случаев, качественно подобны.

Ферми и др. рассматривали цепочки с числом N , равным 32 и 64; оба конца ($n = 0$ и $n = N + 1$) были закреплены. В начальный момент времени цепочка покоилась, а начальные смещения были

$$y_n(0) = B \sin \frac{\pi n}{N+1}. \quad (1.1.9)$$

То есть они возбуждали наименьшую моду. Пример временного изменения энергии каждой моды показан на рис. 1.2. Как видно из рисунка, только небольшая часть (около 10%) переходит от E_1 к E_2 , E_3 и т.д., и через определенное время почти вся энергия возвращается начальной моде. Смещение каждой частицы также возвращалось к начальному значению, как показано на рис. 1.3. Это и есть так называемое явление возврата ФНУ.

Численные эксперименты иногда приводят к неожиданным результатам, и обнаружение явления возврата ФНУ - один из таких результатов. Он был проверен многими исследователями [1.2 - 4]. Можно

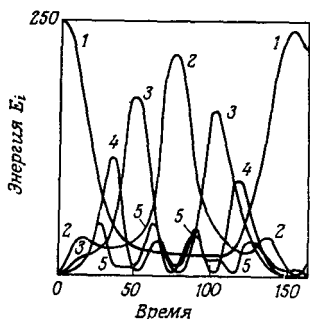


Рис. 1.2. Явления возврата ФПЧ.

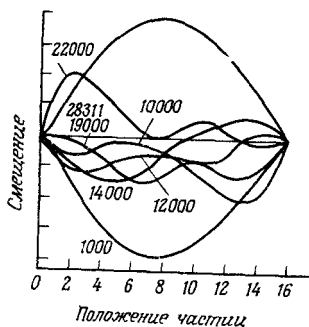


Рис. 1.3. Повторение формы волны (числа обозначают время, единица измерения времени здесь отличается от таковой на рис. 1.2).

утверждать, что если энергия невелика и если начальная форма волны достаточно гладка, то будет иметь место явление возврата. Забуски [1.5] суммировал результаты в эмпирической формуле, которая гласит, что, когда вначале возбуждена наименьшая мода, время возврата t_2 дается в виде

$$t_R = 0,44 \frac{N^{3/2}}{\sqrt{|A|B}} t_L, \quad (1.1.10)$$

где t_L - время, в течение которого волна с большой длиной волны проходит туда и обратно вдоль цепочки из N частиц при закрепленных концах (или время, необходимое для того, чтобы волна обошла замкнутую цепочку из $2N$ частиц), т.е.

$$t_L = 2N / \sqrt{\epsilon / m}. \quad (1.1.11)$$

Мы сможем объяснить (1.1.10) в терминах движения солитонов [1.6] (ср. разд. 2.7).

На основании численных экспериментов Саито (ср. приложение 3) нашел, что если первоначально возбуждены высшие моды (например, с $\ell = 11$), то равномерное распределение энергии среди мод происходит внезапно спустя некоторое время, названное периодом индукции. Эта тенденция ясно проявляется, когда энергия превышает определенное пороговое значение, которое зависит от начальной моды. Подобные результаты были получены и советскими авторами [1.7].

Саито показал, что такие результаты можно объяснить, если учесть зацепление между модами. Похоже, что обнаруженное ФНУ явление возврата происходит благодаря тому, что начальные условия были достаточно гладкими, а полная энергия и параметр нелинейности (см. приложение 3) были малы. Заметим, что, хотя в эргодической системе энергия равномерно распределена, равномерное распределение энергии само по себе еще не гарантирует ее эргодичности. Если энергия частиц распределена в соответствии с законом Максвелла, это не имеет никакого отношения к эргодичности. В самом деле, для линейной цепочки показано, что почти все начальные условия ведут немедленно к максвелловскому распределению частиц по энергии. Однако корреляция в движении частиц будет все время сохраняться.

ФНУ брали системы с числом частиц N , равным 32 и 64. В этих случаях собственные частоты, задаваемые (1.1.7), взаимно независимы, т.е. для любого набора ненулевых n_i имеем $\sum n_i \omega_i \neq 0$, что подразумевает отсутствие резонансов. Используя теорию возмущений и численные расчеты, Форд с соавторами [1.2] показали, что, хотя резонанс обычно способствует установлению равномерного распределения энергии, он не имеет тесной связи с явлением возврата. Ими же были найдены довольно устойчивые колебания цепочки, которые они назвали нормальными нелинейными модами. Это замечательное свойство ведет к нахождению интегрируемой одномерной цепочки с экспоненциальным взаимодействием. С этой цепочкой мы ознакомимся в следующей главе, а пока рассмотрим некоторые другие вопросы, тоже тесно связанные с основным содержанием книги.

1.2. РАСЧЕТ ХЕНОНА - ХЕЙЛЕСА

В дополнение к тому, о чем было упомянуто в конце предыдущего раздела, Лансфорд и Форд [1.8] обнаружили другой замечательный факт. В дальнейшем мы часто будем ссылаться на периодическую трехчастичную систему как на простейшую нелинейную систему. Гамильтониан для линейной периодической трехчастичной цепочки может быть записан в безразмерной форме в виде

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + \frac{1}{2} [(q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_1)^2], \quad (1.2.1)$$

где P обозначает импульс и Q - смещение. Так как полный импульс сохраняется, число степеней свободы может быть сведено к двум. С этой целью введем нормальные координаты ζ_1 , ζ_2 и ζ_3 и обобщенные импульсы η_1 , η_2 и η_3 соответственно таким образом, чтобы ζ_3 была циклической координатой. Это соответствует повороту в

фазовом пространстве

$$\begin{cases} Q_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \zeta_j, \\ P_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \eta_j, \end{cases} \quad (1.2.2a)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 6^{-1/2} & 2^{-1/2} & 3^{-1/2} \\ -(2/3)^{1/2} & 0 & 3^{-1/2} \\ 6^{-1/2} & -2^{-1/2} & 3^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (1.2.2b)$$

Тогда гамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \frac{3}{2} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2). \quad (1.2.3)$$

При добавлении кубического нелинейного взаимодействия гамильтониан переходит в

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{3} [(Q_1 - Q_2)^3 + (Q_2 - Q_3)^3 + (Q_3 - Q_1)^3] \quad (1.2.4)$$

и введенное выше преобразование дает

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 3 \zeta_1^2 + 3 \zeta_2^2) + \frac{3\mathcal{L}}{2^{1/2}} \left(\zeta_2 \zeta_1^2 - \frac{1}{3} \zeta_2^3 \right). \quad (1.2.5)$$

С помощью преобразования подобия

$$\zeta_1 = \frac{2^{1/2}}{\mathcal{L}} \eta_1, \quad \zeta_2 = \frac{2^{1/2}}{\mathcal{L}} \eta_2, \quad (1.2.6)$$

$$t \rightarrow t/3^{1/2}, \quad \mathcal{H} \rightarrow 6/\mathcal{L}^2 \mathcal{H}$$

приходим к гамильтониану $(p_1 = \dot{q}_1, p_2 = \dot{q}_2)$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3, \quad (1.2.7)$$

который представляет двумерное движение материальной точки.

Уравнение (1.2.7) и есть гамильтониан в модели, использованной Хеноном и Хейлесом (ХХ) [1.9] при изучении движения звезды в галактике с цилиндрической симметрией. Они численно интегрировали уравнения движения, получающиеся из (1.2.7), т.е.

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = p_1,$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = p_2, \quad (1.2.8)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = -q_1 - 2q_1 q_2,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = -q_2 - q_1^2 + q_2^2.$$

Это движение можно представить с помощью траектории в четырехмерном фазовом пространстве (q_1, q_2, p_1, p_2) . Фигура, созданная из точек, в которых траектория пересекает двумерную плоскость в фазовом пространстве, называется отображением Пуанкаре, или поверхностью сечения Пуанкаре. Когда энергия мала, отображение создает гладкие кривые, как показано на рис. 1.4,а. В этом случае каждая траектория лежит на поверхности, которая отлична от поверхности постоянной энергии, что указывает на существование другого интеграла (так называемого третьего интеграла) помимо интеграла энергии. Тогда о системе говорят, что она интегрируема. Однако, когда энергия достигает определенного критического значения, появляются некоторые области, где отображение траектории выглядит довольно беспорядочным (очевидно стохастичным). Приведенное на рис. 1.4,б множество точек принадлежит одной траектории. Если построить график площади такой стабильной области в зависимости от энергии, то получим (рис. 1.5), что значение пороговой энергии есть $E_c \approx 0,11$. Контровулос [1.10], Хенон и Сато обнаружили подобное поведение у других систем с малым числом

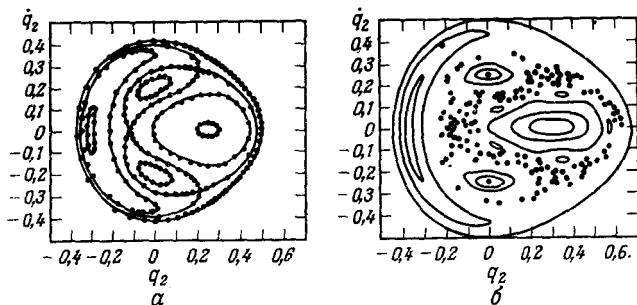


Рис. 1.4. Отображение Пуанкаре для случая, рассмотренного Хеноном и Хейлесом. а – энергия $E = 0,08333$; б – энергия $E = 0,12500$.

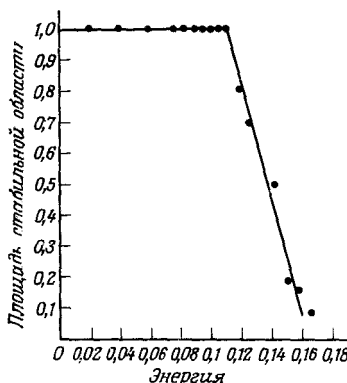


Рис. 1.5. Относительная площадь устойчивой области системы Хенона – Хейлеса.

степеней свободы. Такое хаотическое поведение еще не вполне понятно [1.11].

Так как периодическая цепочка из трех частиц с кубическим нелинейным членом эквивалентна системе ХХ, можно ожидать, что, когда энергия меньше порогового значения, движение в цепочке доступно анализу, система интегрируема. Однако, когда энергия превышает этот порог, появляются хаотические области, а когда энергия становится достаточно большой, все области в фазовом пространстве становятся эргодическими.

Для цепочки с числом частиц, много большим трех, подобное отображение весьма трудно. Вместо этого Форд изучал изменение расстояния во времени между двумя точками, первоначально очень

близкими в фазовом пространстве. Если две точки обозначить как $(Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, \dots, P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots)$ и $(Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}, \dots, P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \dots)$, то расстояние между ними будет

$$\sqrt{\sum_i [(Q_i^{(2)} - Q_i^{(1)})^2 + (P_i^{(2)} - P_i^{(1)})^2]}. \quad (1.2.9)$$

Эта величина осциллирует, но если в среднем она увеличивается линейно со временем, то две точки расходятся не слишком быстро и система интегрируема. Если же расстояние в среднем растет экспоненциально со временем, то система будет неинтегрируемой.

Такая численная проверка обнаруживает, что цепочки с кубической нелинейностью или нелинейностью четвертого порядка в потенциале ведут себя как неинтегрируемые эргодические системы, если энергия достаточно велика.

Эргодические теории говорят о возможной запутанности траекторий механических систем [1.12], и детальное изучение с помощью вычислительной техники обнаруживает невероятную сложность форм отображений. Все-таки взгляд на проблему в целом сохраняется ясным, а вклады численных экспериментов в эргодическую проблему будут в будущем увеличиваться.

Задача 1.1. Показать, что потенциал, задаваемый формулой (1.2.7), имеет симметрию правильного треугольника.

1.3. ОТКРЫТИЕ СОЛИТОНОВ

Для малых изменений γ расстояния между смежными частицами обычно можно разложить потенциал взаимодействия в ряд

$$\phi(\gamma) \approx \frac{\alpha}{2} \gamma^2 + \frac{\alpha}{3} \alpha \gamma^3 + \dots \quad (1.3.1)$$

(α - параметр нелинейности). Если положить $\alpha = 0$ и пренебречь членами высшего порядка, то получится линейная цепочка. Далее, для гладких волн с плавным изменением γ цепочку можно аппроксимировать континуумом. Если α очень мало, уравнения движения можно аппроксимировать с помощью (1.1.5). Для очень гладких волн,

положив в (1.1.5) $y_n(t) = y(x, t)$, правую часть этого же уравнения можно аппроксимировать выражением $\alpha h^2 (\partial^2 y / \partial x^2)$, где h - среднее расстояние между смежными частицами и $x = nh$

- положение частицы. В таком континуальном приближении (1.1.5) сводится к волновому уравнению $m(\partial^2 y / \partial t^2) = \alpha h^2 (\partial^2 y / \partial x^2)$ и волны

распространяются направо или налево со скоростью

$$c_0 = h \sqrt{x/m}. \quad (1.3.2)$$

Для волн, движущихся направо, введем подвижную координату

$$\xi = x - c_0 t \quad (1.3.3)$$

и сохраним наименьший нелинейный член. Тогда волны можно описывать нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных (ср. разд. 2.7)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0, \quad (1.3.4)$$

где учтена кубическая нелинейность ($\delta \neq 0$), u есть величина, пропорциональная ψ , и τ — временная переменная, пропорциональная t . Уравнение (1.3.4) было предложено Кортевегом и де Вризом [1.13] в 1895 г. для описания мелких волн на воде. Оно получило название уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ).

Около 1965 г. было отмечено, что некоторые волны в плазме описываются уравнением КдВ, и это уравнение было изучено численно, так как общего аналитического решения не нашли. Таким образом Забуски и Крускал [1.14] открыли, что волны, описываемые уравнением КдВ, состоят из особых импульсов. Каждый импульс есть частное решение уравнения КдВ и имеет вид

$$u_s = u_0 + A \operatorname{sch}^2[(\xi - ct)/\Delta], \quad (1.3.5)$$

$$\Delta = \delta \sqrt{12/A}, \quad c = u_0 + A/3.$$

Было обнаружено, что, когда два таких импульса сталкивались, они проходили один сквозь другой (или поглощались, или испускались) и вновь принимали свою начальную форму. Так как импульс имел свойство, уподобляющее его стабильной частице, его назвали солитоном, что означает одиночную волновую частицу.

Как будет показано далее, в нелинейных цепочках также имеются солитоны. Около 1965 г. Виссер и др. [1.15] численно изучали распространение волн в нелинейной цепочке, и уже из их результатов можно прийти к выводу о существовании солитонов, однако мы смогли осознать это лишь позднее. Они использовали по-

тенциалы типа Леннард-Джонса и изучали перенос энергии или теплопроводность. Для одно- и двумерных решеток со многими примесями разных масс они нашли, что перенос энергии обычно увеличивается из-за включения во взаимодействие нелинейных членов. Такие результаты могли быть поняты лишь с помощью предположения, что энергия аккумулируется в форме солитонов, которые распространяются без больших помех со стороны неоднородностей.

1.4. ДУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

К цепочке с экспоненциальным взаимодействием, главному предмету изучения этой книги, автор пришел в результате поиска модельной системы со строго периодическими решениями, на существование которых указывали численные расчеты Форда. При этом оказалась очень полезной концепция о дуальных системах. Говорят, что системы A и B дуальны, если B получается из A замещением частиц на пружины и пружин на частицы по определенным правилам. В случае гармонической цепочки более тяжелые (легкие) частицы можно заменить более слабыми (сильными) пружинами таким образом, чтобы нормальные моды частот были одинаковыми в обеих системах [1.16]. Тогда системы дуальны (рис. 1.6).

Можно обобщить идею дуальных систем с помощью следующего построения. Гамильтониан, дающий уравнения движения (1.1.1), есть [1.17]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \sum_n p_n^2 + \sum_n \phi(\zeta_n), \quad (1.4.1)$$

где импульс p_n получается из кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} \sum_n m \dot{\gamma}_n^2 \quad (1.4.2)$$

дифференцированием K по скорости $\dot{\gamma}_n$:

$$p_n = \frac{\partial K}{\partial \dot{\gamma}_n} = m \dot{\gamma}_n. \quad (1.4.3)$$

Теперь возьмем в качестве обобщенной координаты взаимное смещение ζ_n . Для краткости предположим, что крайняя левая части-

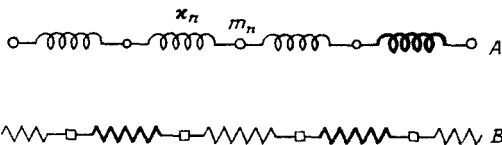


Рис. 1.6. Соотношение между дуальными системами.

ца $n = 0$ закреплена. Тогда имеем

$$y_0 = 0, \quad y_1 = z_0, \quad y_2 = z_0 + z_1, \dots,$$

$$\dot{y}_0 = 0, \quad \dot{y}_1 = \dot{z}_0, \quad \dot{y}_2 = \dot{z}_0 + \dot{z}_1, \dots \quad (1.4.4)$$

и для цепочки с N подвижными частицами

$$K = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} m (\dot{z}_0 + \dot{z}_1 + \dots + \dot{z}_n)^2. \quad (1.4.5)$$

Импульс $\mathfrak{I}_n$, сопряженный z_n , определяется из соотношения

$$\mathfrak{I}_n = \frac{\partial K}{\partial \dot{z}_n} = m \left[(\dot{z}_0 + \dot{z}_1 + \dots + \dot{z}_n) + (\dot{z}_0 + \dot{z}_1 + \dots + \dot{z}_{n+1}) + \dots + (\dot{z}_0 + \dot{z}_1 + \dots + \dot{z}_{N-1}) \right]. \quad (1.4.6)$$

Поэтому имеем

$$\mathfrak{I}_{n-1} - \mathfrak{I}_n = m \dot{z}_n, \quad (1.4.7a)$$

$$\mathfrak{I}_N = 0, \quad (1.4.7b)$$

и гамильтониан превращается в

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \sum_{n=0}^{N-1} (\mathfrak{I}_{n+1} - \mathfrak{I}_n)^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \phi(z_n). \quad (1.4.8)$$

Канонические уравнения движения следующие:

$$\dot{\gamma}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_n} = - \frac{\gamma_{n+1} - 2\gamma_n + \gamma_{n-1}}{m}, \quad (1.4.9)$$

$$\dot{\gamma}_n = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma_n} = -\phi'(\gamma_n). \quad (1.4.10)$$

Если исключить γ_n из этих уравнений, то получится уравнение

$$m\ddot{\gamma}_n = \phi'(\gamma_{n+1}) - 2\phi'(\gamma_n) + \phi'(\gamma_{n-1}), \quad (1.4.11)$$

которое, однако, есть разность между (1.1.1) и уравнением, в котором n заменено на $n+1$, и поэтому оно не является новым уравнением.

Если уравнение (1.4.10) можно обратить, то

$$\gamma_n = - \frac{1}{m} \chi(\dot{\gamma}_n). \quad (1.4.12)$$

Тогда, исключая γ_n из (1.4.9), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \chi(\dot{\gamma}_n) = \gamma_{n+1} - 2\gamma_n + \gamma_{n-1}. \quad (1.4.13)$$

Это уравнение дуально уравнению (1.4.11). Если принять γ_n за "смещение", то правую часть (1.4.13) можно интерпретировать как силу линейных пружин и $\chi(\dot{\gamma}_n)$ в левой части как импульс, сопряженный "скорости" $\dot{\gamma}_n$. Тогда оказывается, что уравнения (1.4.13) являются уравнениями механического движения.

Сила f_n пружины связана с $\dot{\gamma}_n$ соотношением

$$f_n = -\phi'(\gamma_n) = \dot{\gamma}_n, \quad (1.4.14)$$

и уравнения движения (1.4.11) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \chi(f_n) = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}. \quad (1.4.15)$$

Далее, введем интеграл от $\dot{\gamma}_n$:

$$S_n = \int \dot{\gamma}_n dt. \quad (1.4.16)$$

Выбирая подходящим образом постоянную интегрирования, из (1.4.9) имеем

$$\dot{\gamma}_n = \frac{1}{m} (S_{n+1} - S_n), \quad (1.4.17)$$

$$\ddot{\gamma}_n = -\frac{1}{m} (S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}); \quad (1.4.18)$$

уравнения движения принимают вид

$$\chi(\ddot{S}_n) = S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}. \quad (1.4.19)$$

Задача 1.2. Пусть массы и постоянные пружин двух гармонических цепочек, (m_n, x_n) и (m'_n, x'_n) соответственно, удовлетворяют соотношению

$$m_n x'_n = x_n m'_n = \text{const}(n).$$

Покажите, что частоты для всех нормальных мод этих систем совпадают. Далее, покажите, что свободный (закрепленный) конец системы соответствует закрепленному (свободному) концу дуальной системы.

Указание: выпишите гамильтонианы.

Задача 1.3. Выразите уравнения движения в терминах S'_n , когда потенциал взаимодействия $\phi(\gamma)$ гиперболический: $\phi(\gamma) = \alpha \sqrt{\beta + \gamma^2}$ (α и β — константы).

Замечание: в этом случае импульс имеет релятивистский вид.

Задача 1.4. Убедитесь, что если к цепочке приложено постоянное внешнее давление $\dot{\gamma}_n = -\phi'(\gamma_n) - f$, то (1.4.13) переходит в

$$\frac{d}{dt} \chi(\dot{\gamma}_n + f) = \dot{\gamma}_{n+1} - 2\dot{\gamma}_n + \dot{\gamma}_{n-1}.$$

Указание: к (1.4.8) следует добавить потенциальную энергию

$$f(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N).$$

Глава 2

ЦЕПОЧКА

С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В предыдущей главе было показано, что нелинейные цепочки, изучавшиеся Ферми и др., ведут себя периодически, по крайней мере когда энергия не очень велика, и что в нелинейных непрерывных системах распространяются устойчивые импульсы (солитоны). Эти факты показывают, что должна существовать некоторая нелинейная цепочка, которая допускает строгие периодические волны, а определенные импульсы (солитоны цепочки) будут устойчивыми. В настоящей главе ведутся поиски такой цепочки и показывается, что цепочка с экспоненциальным взаимодействием допускает строгие периодические решения и солитонные решения. Описываются также двух-солитонные решения. Исследуются система твердых сфер как предел резко меняющихся сил отталкивания и континуальный предел для гладких волн. Далее обсуждаются применения теории цепочки нелинейной электрической линии и формулируются некоторые обобщения. В конце указывается, что цепочка с экспоненциальным взаимодействием имеет много сохраняющихся величин помимо импульса и энергии, и это служит базисом для построения следующей главы.

2.1. ПОИСКИ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ЦЕПОЧКИ

Чтобы пролить свет на характерные особенности, присущие волнам в нелинейных цепочках, мы старались найти такую модель цепочки, которая допускает частные решения с широкой областью применимости. Имелось в виду подыскать такую потенциальную функцию $\phi(r)$, которая допускает интегрирование уравнений движения (1.1.1). Уравнение (1.1.1) или, что эквивалентно, (1.4.11) общеизвестно, но казалось трудным найти из него требуемый потенциал $\phi(r)$. Наоборот, уравнение (1.4.13) можно рассматривать как рекуррентную формулу, с помощью которой определяется $\dot{\gamma}_{n+1}$, если известны $\dot{\gamma}_{n-1}$ и $\dot{\gamma}_n$ и производная от функции $\dot{\gamma}_n$, которая связана с обратной функцией потенциала $\phi(r)$. Требуется также, чтобы потен-

циал имел физический смысл, так чтобы он действительно соответствовал механической системе с широкой областью применимости. Много функций η_n и $\phi(\tau)$ были испытаны при этих условиях, прежде чем удалось обнаружить комбинацию, которая удовлетворила бы (1.4.13) [2.1].

В случае гармонической цепочки типичные периодические волны являются синусоидальными или тригонометрическими. Поэтому думать об эллиптических функциях как о возможных типах решений было совершенно естественно, потому что в определенном смысле они являются обобщением тригонометрических функций. Однако волны, пропорциональные функциям Якоби sn или cn , не могли дать правильного ответа.

Между тем мы обратили внимание на формулу сложения для sn^2

$$sn^2(u+v) - sn^2(u-v) = 2 \frac{d}{dv} \left(\frac{sn u \, cn u \, dn u \, sn^2 v}{1 - k^2 sn^2 u \, sn^2 v} \right), \quad (2.1.1)$$

которая ведет к отыскиваемой цепочке.

Теперь, используя равенство

$$dn^2 u = 1 - k^2 sn^2 u, \quad (2.1.2)$$

определим функцию

$$\varepsilon(u) = \int_0^u (dn^2 u) du, \quad (2.1.3)$$

чтобы получить

$$\varepsilon'(u) = dn^2 u, \quad (2.1.4)$$

$$\varepsilon''(u) = -2k^2 sn u \, cn u \, dn u$$

и

$$\varepsilon(u+v) + \varepsilon(u-v) - 2\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon''(u)}{1/sn^2 v - 1 + \varepsilon'(u)}. \quad (2.1.5)$$

Хотя $\epsilon(u)$ — непериодическая функция, функция Якоби χ_n (χ — функция), определяемая соотношением

$$\chi(u) = \epsilon(u) - \frac{E}{K} u, \quad (2.1.6)$$

есть периодическая функция с периодом $2K$, где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Перепиывая (2.1.5), получаем формулу

$$\chi(u+v) + \chi(u-v) - 2\chi(u) = \frac{d}{du} \ln \left[1 + \frac{1}{1/m^2 v - 1 + E/K} \chi'(u) \right], \quad (2.1.7)$$

которую нужно сравнить с (1.4.13). Видно, что (1.4.13) удовлетворяется, если положить

$$u = 2(vt \pm \frac{\pi}{\lambda})K, \quad (2.1.8)$$

$$v = 2K/\lambda,$$

где λ (длина волны) и ν (частота) есть постоянные, и отождествить χ_n и χ с выражениями

$$\chi_n(t) = \frac{2K\nu}{\epsilon/m} \chi(u) \quad (2.1.9)$$

и

$$\chi(j) = \frac{m}{\delta} \ln \left[1 + \frac{\frac{\epsilon/m}{(2K\nu)^2}}{1/m^2 v - 1 + E/K} j \right] - m\delta, \quad (2.1.10)$$

где δ и δ — константы. $\chi(j)$ есть обратная функция потенциала $j = \phi(r)$ и не должна содержать ν и v . Отсюда следует, что множитель перед j в (2.1.10) есть постоянная, не зависящая от ν и v . Поэтому должно выполняться соотношение

$$(2Kv)^2 = \frac{a\beta}{m} \left[\frac{1}{m^2(2K/\gamma)} - 1 + \frac{E}{K} \right]^{-1}, \quad (2.1.11)$$

где a - константа. Чтобы правая часть была положительна, нужно потребовать $a\beta > 0$.

С помощью (1.4.12) и (2.1.10) получаем

$$\chi = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{j}{a} \right) + \phi \quad (2.1.12)$$

при $\chi = \chi_n$. Обращая (2.1.12) и используя (1.4.10), имеем

$$j = a \left[e^{-\beta(\chi - \phi)} - 1 \right] = -\phi'(\chi). \quad (2.1.13)$$

Следовательно, в качестве потенциала мы получаем функцию с тремя параметрами a , β и ϕ , которая может быть записана в виде

$$\phi(\chi) = \frac{a}{\beta} e^{-\beta(\chi - \phi)} + a\chi + const, \quad (2.1.14)$$

или

$$\phi(\chi) = Ae^{-\beta\chi} + a\chi. \quad (2.1.15)$$

Задача 2.1. Вычислить $\chi(j)$ в уравнении (1.4.12) для потенциала, задаваемого выражением (2.1.14).

2.2. ЦЕПОЧКА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Если за начало координат $\chi = 0$ взять положение минимума $\phi(\chi)$, потенциал (2.1.14) примет вид

$$\phi(\chi) = \frac{a}{\beta} e^{-\beta\chi} + a\chi \quad (a\beta > 0). \quad (2.2.1)$$

В дальнейшем это простое выражение будем использовать в качестве потенциала взаимодействия. Соответствующую цепочку с экспоненциальным взаимодействием часто называют цепочкой Тоды.

Потенциал (2.2.1) при $a, b > 0$ дает сильное отталкивание и слабое притяжение, как показано на рис. 2.1а. Вблизи минимума действует гармоническая сила, а с увеличением расстояния проявляется нелинейность силы. Таким образом, потенциал отражает природу физических межатомных сил. При $a, b < 0$ потенциал дает слабое отталкивание и сильное притяжение, как показано на рис. 2.1б. Далее мы остановимся на случае $a, b > 0$, но подобным же образом можно обсудить и случай $a, b < 0$.

Если разложить (2.2.1), предполагая x малым, получим

$$\phi(x) = \text{const} + \frac{ab}{2} x^2 - \frac{ab^2}{6} x^3 + \dots \quad (2.2.2)$$

Таким образом, при достаточно слабых отклонениях цепочка выглядит как линейная цепочка с постоянной пружины

$$x = av. \quad (2.2.3)$$

Для несколько больших отклонений параметр нелинейности из (1.1.8) задается выражением

$$\alpha = -b/2. \quad (2.2.4)$$

В пределе очень большого b получается система твердых сфер (стер-ней). Цепочка с экспоненциальным взаимодействием есть модель системы, которая в двух предельных случаях описывает гармоническую цепочку и систему твердых сфер, и она имеет то достоинство, что если получено частное решение, то оно применимо также в этих предельных случаях.

Если к цепочке приложено внешнее давление f , что эквива-

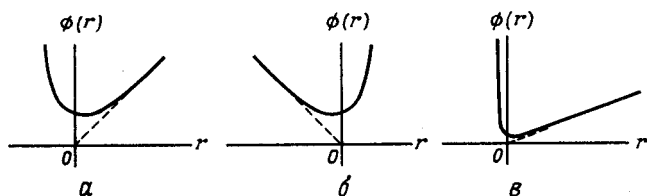


Рис. 2.1. Экспоненциальный потенциал; (а) $a, b > 0$; (б) $a, b < 0$; (в) b довольно велико.

лентно добавочному потенциалу $f\tau$, выражение для потенциала взаимодействия нужно просто заменить на

$$\phi(\tau) = \frac{a}{b} e^{-b\tau} + (a+f)\tau, \quad (2.2.5)$$

где $f > 0$ соответствует сжатию, а $f < 0$ - растяжению. Что касается (2.1.15), то в случае одномерной цепочки можно считать, что член $a\tau$ появляется благодаря постоянной внешней силе и все взаимодействие сводится только к отталкивательному потенциалу $\text{Aexp}(-b\tau)$. Далее, в (2.2.5) $a+f$ можно считать притягивающей силой, и, когда $f = \text{const}$, взяв постоянные a', b' , такие, что

$$\begin{cases} a' = a + f, \\ a' e^{-b b'} = a, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

можно (2.2.5) переписать в виде

$$\phi(\tau) = \frac{a'}{b} e^{-b(\tau + b')} + a'\tau. \quad (2.2.7)$$

Это означает, что посредством замены a на a' и сдвига начала координат τ на $-b'$ внешнюю силу можно включить в экспоненциальный тип взаимодействия.

В любом случае второй член в (2.2.1) дает постоянные силы, действующие на каждую частицу со стороны левого и правого соседей; они поэтому нейтрализуются и не появляются в уравнениях движения. В самом деле, принимая потенциал (2.2.1), имеем из (1.1.1) и (1.4.11) следующие уравнения движения:

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = a \left[e^{-b(y_n - y_{n-1})} - e^{-b(y_{n+1} - y_n)} \right], \quad (2.2.8)$$

$$m \frac{d^2 \tau_n}{dt^2} = a \left[2e^{-b\tau_n} - e^{-b\tau_{n-1}} - e^{-b\tau_{n+1}} \right]. \quad (2.2.9)$$

Для эквивалентного дуального выражения (1.4.13) дает

$$\frac{d}{dt} \ln(a + j_n) = \frac{b}{m} (s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}), \quad (2.2.10)$$

или

$$\frac{\ddot{j}_n}{a + j_n} = \frac{b}{m} (s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1}). \quad (2.2.11)$$

Дифференцируя последнее уравнение, имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln\left(1 + \frac{f_n}{a}\right) = \frac{b}{m} (f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}). \quad (2.2.12)$$

Интегрируя, при подходящем выборе постоянных интегрирования [2.1a, 2], получаем

$$\ln\left(1 + \frac{\ddot{j}_n}{a}\right) = \frac{b}{m} (S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1}). \quad (2.2.13)$$

Это и есть уравнения движения для цепочки с экспоненциальным взаимодействием. Сила, действующая на частицы в цепочке, задается с помощью (1.4.14):

$$f_n = a(e^{-b\tau_n} - 1) = j_n. \quad (2.2.14)$$

В следующих разделах мы исследуем некоторые частные решения полученных уравнений.

2.3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Имеется периодическое решение, задаваемое (2.1.9). Дифференцируя его по времени и используя (2.2.14) и (2.1.6), получаем периодическое решение в виде

$$e^{-b\tau_n} - 1 = \frac{(2Kv)^2}{ab/m} \left\{ dn^2 \left[2 \left(\frac{n}{\lambda} \pm vt \right) K \right] - \frac{E}{K} \right\}, \quad (2.3.1)$$

где длина волны λ произвольна, а частота ν связана с λ соотношением (2.1.11), или

$$2K\nu = \sqrt{\frac{ab}{m}} / \sqrt{1/\sin^2(2K/\lambda) - 1 + E/K}, \quad (2.3.2)$$

что является дисперсионным соотношением для этой волны. В приведенных выше уравнениях K и E — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода; они определяются как

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}, \quad (2.3.3a)$$

$$E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2}} dx. \quad (2.3.3b)$$

Когда модуль k мал, амплитуда периодической волны мала и волна очень похожа на синусоидальную волну. Когда k уже не мало и приближается к единице, гребень волны становится крутым и впадина становится очень плоской (что похоже на волны на поверхности воды).

Функция Якоби dn может быть выражена через sn . Как было отмечено в разд. 1.3, в континуальном приближении волны в цепочке могут быть аппроксимированы волнами уравнения КдВ, а периодическое решение этого уравнения, полученное Кортевегом и де Вризом, было выражено через функцию sn . Они использовали термин кноидальная волна (подобно тому как sin -волна названа синусоидальной волной). Можно показать, что для достаточно малой амплитуды периодическая волна (2.3.1) совпадает с кноидальной волной уравнения КдВ. Поэтому периодическая волна (2.3.1) называется кноидальной волной цепочки.

Когда модуль k близок к нулю, имеем $E/K \approx 1 - k^2/2$. Отсюда (2.3.1,2) дают приближенно

$$u_n \approx -\frac{\omega^2 k^2}{8ab^2} \cos\left(\omega t \pm \frac{2\pi n}{\lambda}\right), \quad (2.3.4a)$$

$$\omega = 2\pi\nu \approx \sqrt{\frac{ab}{m}} / \lambda, \quad (2.3.4b)$$

что отвечает синусоидальной волне. Разлагая правую часть (2.3.1) в ряд Фурье, получаем

$$dn^2(2xK) - \frac{E}{K} = \frac{\pi^2}{K^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l \cos 2\pi l x}{\operatorname{sh}(\pi l K'/K)}, \quad (2.3.5)$$

где $x = n/\lambda \pm vt$, а K' определено в терминах дополнительного модуля k' как

$$K' = K(k'), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (2.3.6)$$

Приведенную выше периодическую функцию можно также представить в виде

$$dn^2(2xK) - \frac{E}{K} = \left(\frac{\pi}{2K'}\right)^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} x h^2 \left[\frac{\pi K}{K'} (x - l) \right] - \frac{\pi}{2KK'}; \quad (2.3.7)$$

тогда кноидальную волну запишем как

$$e^{-\beta \chi n} - 1 = \frac{\pi}{a\beta} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta^2 x h^2 \left[\alpha (n - \lambda l) - \beta t \right] - 2\beta v \right\}, \quad (2.3.8a)$$

где

$$\alpha = \pi K / \lambda K', \quad \beta = \pi K v / K'. \quad (2.3.8b)$$

Уравнение (2.3.8a) гласит, что кноидальную волну можно рассматривать как ряд импульсов (вида $x h^2$), расстояние между которыми равно длине волны λ .

Пример формы волны и дисперсионного соотношения для кноидальной волны показан на рис. 2.2 и 2.3. Дисперсионное соотношение похоже на дисперсионное соотношение для гармонической цепочки.

Функция χ , введенная в (2.1.6), связана с v_0 -функцией соотношением

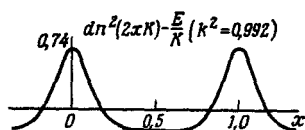


Рис. 2.2. Форма кноидальной волны.

$$2KZ(2xK) = \frac{d}{dx} \ln v_0(x), \quad (2.3.9)$$

и кноидальная волна может быть выражена в терминах v_0 . Записывая из (2.1.9) результат для z_n , имеем

$$z_n = \frac{m}{\ell} \frac{d}{dt} \ln v_0 \left(vt \pm \frac{n}{\lambda} \right). \quad (2.3.10)$$

Поэтому, согласно (1.4.7a), для импульса частицы в кноидальной волне получаем

$$m\dot{y}_n = \frac{m}{\ell} \frac{d}{dt} \ln \frac{v_0 [vt \pm (n-1)/\lambda]}{v_0 (vt \pm n/\lambda)}. \quad (2.3.11)$$

Задача 2.2. Покажите, что когда волновое число $1/\lambda$ увеличивается на произвольное целое число, кноидальная волна цепочки не меняется.

Указание: функция dn имеет период $2K$.

Задача 2.3. Имея в виду дисперсионное соотношение $\omega = \omega(1/\lambda)$ для кноидальной волны, покажите, что

$$\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \omega\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \omega\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \dots,$$

а значит, нет необходимости рассматривать волны с меньшими длинами волн, чем удвоенное среднее расстояние между частицами ($\lambda < 2$).

Задача 2.4. Используя соотношения

$$dn(\beta t \pm 2nK) = dn(\beta t),$$

$$dn[\beta t \pm (2n+1)K] = dn(\beta t + K),$$

$$dn(\beta t + K) = k' / dn(\beta t) \quad (k' = \sqrt{1-k^2}),$$

где n - целое, найдите выражение для кноидальной волны с минимальной длиной волны $\lambda = 2$ и покажите, что

$$\gamma_{2n} = \Delta + 2x, \quad \gamma_{2n+1} = \Delta - 2x$$

и что x удовлетворяет уравнению движения

$$m\ddot{x} = -2a' \operatorname{sh} 2bx$$

$$\text{с } a' = a e^{-b\Delta}.$$

Задача 2.5. Покажите, что кноидальную волну можно представить как суперпозицию двух кноидальных волн с удвоенной длиной волны.

Указание: $\varphi_0(2x, q^2) = \varphi(q) \varphi_0(x, q) \varphi_0(x \pm 1/2, q).$

Задача 2.6. Покажите, что любую кноидальную волну можно представить как суперпозицию кноидальных волн с длиной волны, равной произведению целого числа на первоначальную длину волны.

Указание: $\varphi_0(\ell x, q^\ell) = \frac{\phi(q^\ell)}{[\phi(q)]^\ell} \prod_{s=0}^{\ell-1} \varphi_0(x + s/\ell, q).$

Задача 2.7. Покажите, что кноидальную волну можно представить как суперпозицию солитонов, находящихся друг от друга на расстоянии, равном длине волны (но скорость кноидальной волны определяется взаимодействием между солитонами).

2.4. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ [2.1а, 2]

Среди различных форм уравнений движения (2.2.8-13), наиболее поддаются оценке, вероятно, уравнения (2.2.11, 13). Предполагая, что волна распространяется без изменения формы, можно видеть, что эти уравнения движения удовлетворятся, если

$$S_n = \pm \frac{\beta m}{b} \operatorname{th} (n\alpha \pm \beta t) + \text{const} \quad (2.4.1)$$

или

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \operatorname{ch} (\alpha n \pm \beta t), \quad (2.4.2)$$

где

$$\beta = \sqrt{ab/m} \operatorname{sh} \alpha. \quad (2.4.3)$$

Так как линейные члены в S_n произвольны, можно положить

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \left(1 + e^{\pm 2(\alpha n \pm \beta t)} \right). \quad (2.4.4)$$

Это ведет к решению, отвечающему уединенной волне,

$$e^{-b\psi_n} - 1 = \frac{m}{ab} \beta^2 \operatorname{sch}^2 (\alpha n \pm \beta t), \quad (2.4.5)$$

которое подобно импульсу (всплеску), распространяющемуся со скоростью

$$c = \beta/\alpha = \sqrt{\frac{ab}{m}} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha}; \quad (2.4.6)$$

здесь расстояние между частицами выбрано в качестве единицы длины. Чем больше высота, тем меньше ширина ($\sim 1/\alpha$) и тем больше скорость волны. Уединенная волна всегда распространяется быстрее, чем длинноволновые колебания, двигающиеся со скоростью $c_0 = \sqrt{ab/m}$.

Численные расчеты показывают, что уединенные волны, задаваемые (2.4.5), стабильны. То есть, даже когда существуют другие волны, например рябь, уединенные волны не разрушаются. Как будет показано в следующем разделе, когда две уединенные волны сталкиваются, они проходят одна сквозь другую и восстанавливают свою

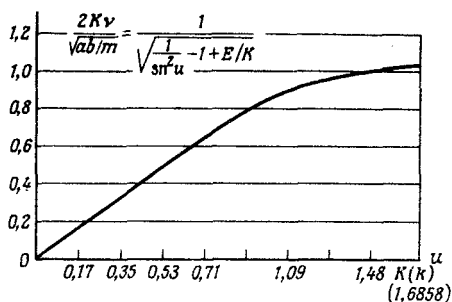


Рис. 2.3. Дисперсионное соотношение для кноидальной волны ($k = 0,5$).

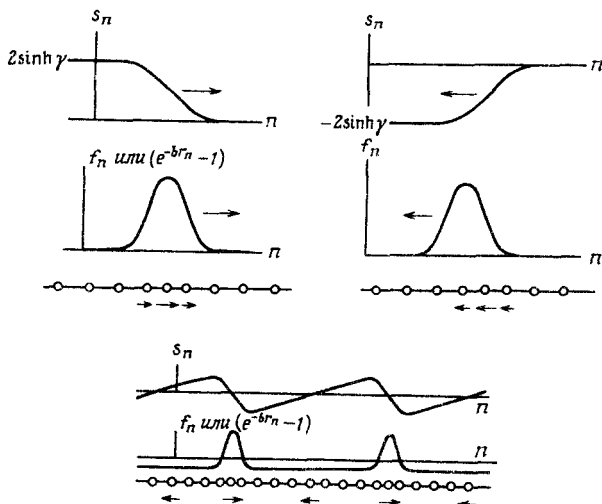


Рис. 2.4. Соотношение между солитоном и кноидальной волной.

первоначальную форму. Поскольку такие уединенные волны, задаваемые уравнением (2.4.5), ведут себя как стабильные частицы, они называются солитонами (цепочки).

Правая часть (2.4.5) положительна, поэтому $\gamma_n \neq 0$ (предполагается случай $v > 0$). Другими словами, в области солитона цепочка сжимается. Таким образом, солитон в цепочке с экспоненциальной отталкивающей силой есть уединенная волна сжатия. Рис. 2.4 показывает γ_n и $\exp(-v\gamma_n) - 1$ для солитона и для кноидальной волны, которая может рассматриваться как ряд солитонов (ср. (2.3.8a)).

Из-за сжатия солитон имеет избышек плотности массы. Подставим (2.4.5) в (1.4.17); тогда смещение y_n частицы в солитоне

задается выражением

$$y_n = \frac{1}{b} \ln \frac{1+e^{2(xn-x\pm\beta t)}}{1+e^{2(xn\pm\beta t)}} + \text{const.} \quad (2.4.7)$$

Отсюда общее сжатие, вызываемое солитоном, есть

$$y_{-\infty} - y_{\infty} = 2x/b, \quad (2.4.8)$$

и можно говорить о "массе" солитона, которая задается выражением

$$M = m(y_{-\infty} - y_{\infty}) = 2xm/b. \quad (2.4.9)$$

Задача 2.8. Покажите, что солитон (2.4.5) имеет импульс

$$P = Mc = 2mb/b,$$

где c - скорость солитона, задаваемая выражением (2.4.6).

Указание: $P = \sum m \dot{y}_n = \sum (j_{n-1} - j_n) = j_{-\infty} - j_{\infty}$.

Задача 2.9. Энергию цепочки можно записать в виде

$$E = \sum_n \left[\frac{a}{b} (e^{-bx_n} - 1) + ax_n \right] + \sum_n \frac{m}{2} \dot{y}_n^2.$$

Покажите, что солитон (2.4.5) имеет энергию

$$E = \frac{2a}{b} (\sinh x \cosh x - x);$$

предполагается, что на бесконечности нет растяжения или сжатия.

Задача 2.10. Покажите, что не существует решения типа

$$e^{-bx_n} - 1 = \gamma^2 - \alpha^2 \sinh^2(xn - \beta t)$$

(типа солитонной волны разрежения) для цепочки с экспоненциальным взаимодействием.

Задача 2.11. Покажите, что для цепочки с экспоненциальным взаимодействием существует расходящееся решение типа

$$e^{-b\gamma n - 1} = -\lambda^2 \operatorname{csch}^2(\alpha n - \beta t).$$

Замечание: это решение получается из солитонного решения (2.4.5), когда переменная заменяется величиной $i\pi/2$ ($i = \sqrt{-1}$).

Задача 2.12. Покажите, что солитон (2.4.5) можно получить из кноидальной волны (2.3.1,2) в пределе больших длин волн, $\lambda \rightarrow \infty$, и больших модулей, $k \rightarrow 1$.

Замечание: в пределе $k \rightarrow 1$ имеем $m u \rightarrow k u$, $du \rightarrow c n u \rightarrow s k u$. Таким образом, гиперболические функции могут быть включены в эллиптические функции. Их теоремы сложения нелинейны.

2.5. ДВУХСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ [2.3, 4]

Обобщая солитонные решения (2.4.2) или (2.4.4), возьмем

$$S_n = \frac{m}{b} \ln [ch(\mu_1 n - \gamma_1 t) + A ch(\mu_2 n - \gamma_2 t + \sigma)] \quad (2.5.1)$$

или

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \left(1 + A_1 e^{2(\alpha_1 n - \beta_1 t)} + A_2 e^{2(\alpha_2 n - \beta_2 t)} + A_3 e^{2[(\alpha_1 + \alpha_2)n - (\beta_1 + \beta_2)t]} \right), \quad (2.5.2)$$

где параметры $A, A_1, A_2, A_3, \beta_1$ и β_2 предполагаются функциями μ_1 и μ_2 или α_1 и α_2 . Между ними существуют связи, например

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = \mu_1 + \mu_2, & 2\beta_1 = \gamma_1 + \gamma_2, & A_1 = A e^{\sigma}, \\ 2\alpha_2 = \mu_1 - \mu_2, & 2\beta_2 = \gamma_1 - \gamma_2, & A_2 = A e^{-\sigma} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Можно взять или (2.5.1), или (2.5.2), но в дальнейшем будем использовать соотношение (2.5.2). Подставив его в уравнение движения (2.2.13), видим, что (2.2.13) удовлетворяется, если

$$\beta_1^2 = \frac{ab}{m} \operatorname{sh}^2 x_1, \quad \beta_2^2 = \frac{ab}{m} \operatorname{sh}^2 x_2, \quad (2.5.4)$$

$$A_1 A_2 = \frac{(m/ab)(\beta_1 + \beta_2)^2 - \operatorname{sh}^2(x_1 + x_2)}{\operatorname{sh}^2(x_1 - x_2) - (m/ab)(\beta_1 - \beta_2)^2} A_3.$$

В зависимости от комбинаций знаков β_1 и β_2 возможны четыре случая. Однако движения, симметричные относительно отражения (замена правого левым), могут рассматриваться как одни и те же. Таким образом, независимых случаев два. Без потери общности можно предположить, что $x_1 > x_2 > 0$.

1) Случай, когда $\beta_1 \beta_2 > 0$. Запишем

$$\beta_1 = \sqrt{ab/m} \operatorname{sh} x_1, \quad \beta_2 = \sqrt{ab/m} \operatorname{sh} x_2, \quad (2.5.5)$$

$$A_1 A_2 = \left\{ \frac{\operatorname{sh}[(x_1 + x_2)/2]}{\operatorname{sh}[(x_1 - x_2)/2]} \right\}^2 A_3.$$

Чтобы определить форму волны, сначала рассмотрим область, где

$$\varphi_1 \equiv x_1 n - \beta_1 t \approx 0. \quad (2.5.6)$$

Тогда имеем

$$\varphi_2 \equiv x_2 n - \beta_2 t = \frac{x_2}{x_1} \varphi_1 + \varepsilon t, \quad (2.5.7)$$

где

$$\varepsilon = \frac{x_2}{x_1} \beta - \beta_2.$$

Поскольку предполагалось, что $x_1 > x_2 > 0$, имеем

$\beta_1/\beta_2 = \operatorname{sh} x_1 / \operatorname{sh} x_2 > x_1/x_2$. Поэтому $\varepsilon > 0$, и в указанной области

$$S_n \simeq \frac{m}{b} \ln \left[1 + A_1 e^{2(x_1 n - \beta_1 t)} \right] \quad (t \rightarrow -\infty), \quad (2.5.8)$$

$$S_n \simeq \frac{m}{b} \ln \left[(A_2 + A_3 e^{2(x_2 n - \beta_2 t)}) e^{2(x_1 n - \beta_1 t)} \right] \quad (t \rightarrow +\infty),$$

Подобным же образом для области $\varphi_2 \equiv x_2 n - \beta_2 t \approx 0$ имеем

$$S_n \simeq \frac{m}{b} \ln \left[(A_1 + A_3 e^{2(x_2 n - \beta_2 t)}) e^{2(x_1 n - \beta_1 t)} \right] \quad (t \rightarrow -\infty), \quad (2.5.9)$$

$$S_n \simeq \frac{m}{b} \ln \left(1 + A_2 e^{2(x_2 n - \beta_2 t)} \right) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Следовательно, асимптотически имеются два солитона, которые можно записать в виде

$$e^{-b\varphi_n - 1} = \begin{cases} \frac{m}{ab} \beta_1^2 \operatorname{sch}^2(x_1 n - \beta_1 t + \delta_1^{(\pm)}) \\ \frac{m}{ab} \beta_2^2 \operatorname{sch}^2(x_2 n - \beta_2 t - \delta_2^{(\pm)}) \end{cases} \quad (t \rightarrow \pm\infty), \quad (2.5.10)$$

где фазовые сдвиги

$$\begin{cases} \delta_1^{(-)} = \frac{1}{2} \ln A_1, \quad \delta_1^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln (A_2 / A_3), \\ \delta_2^{(-)} = \frac{1}{2} \ln (A_1 / A_3), \quad \delta_2^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln A_2. \end{cases} \quad (2.5.11)$$

В этом случае два солитона распространяются в одном и том же направлении и один из них (x_1) догоняет другой (x_2). Массы солитонов M_1 и M_2 пропорциональны x_1 и x_2 , и центр масс движется с постоянной скоростью (рис. 2.5).

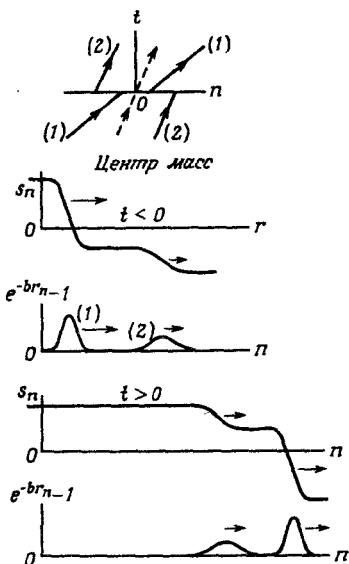


Рис. 2.5. Столкновение двух солитонов, первый из которых догоняет второй.

2) Случай, когда $\beta_1 \beta_2 < 0$. Если положить $\beta_2 < 0$, получаем

$$\beta_1 = \sqrt{ab/m} \operatorname{sh} x_1, \beta_2 = -\sqrt{ab/m} \operatorname{sh} x_2, \quad (2.5.12)$$

$$A_1 A_2 = \left\{ \frac{\operatorname{ch}[(x_1 + x_2)/2]}{\operatorname{ch}[(x_1 - x_2)/2]} \right\}^2 A_3.$$

Расчет, аналогичный приведенному выше, ведет к асимптотической форме

$$e^{-br_n} - 1 = \begin{cases} \frac{m}{ab} \beta_1^2 \operatorname{sch}^2(x_1 n - \beta_1 t + \delta_1^{(\pm)}) & (t \rightarrow \pm\infty), \\ \frac{m}{ab} \beta_2^2 \operatorname{sch}^2(x_2 n + |\beta_2| t - \delta_2^{(\pm)}) & \end{cases} \quad (2.5.13)$$

где

$$\begin{cases} \sigma_1^{(-)} = \frac{1}{2} \ln A_1, & \sigma_1^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln (A_2 / A_3), \\ \sigma_2^{(-)} = \frac{1}{2} \ln (A_1 / A_3), & \sigma_2^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln A_2. \end{cases} \quad (2.5.14)$$

В этом случае солитоны распространяются в противоположных направлениях и центр масс движется с постоянной скоростью (рис. 2.6).

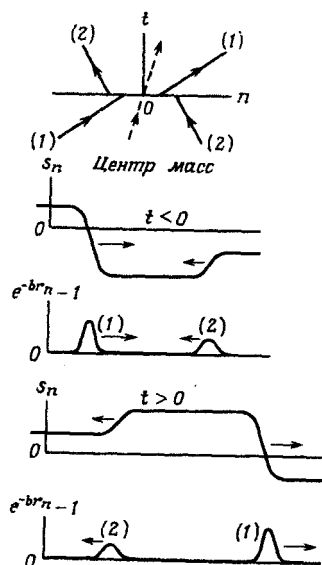


Рис. 2.6. Лобовое столкновение двух солитонов..

При численном решении Саито и др. [2.5] обнаружили, что движение с участием трех солитонов устойчиво; между тем Хирота [2.6], обобщая (2.5.2), получил многосолитонные решения, содержащие более трех солитонов. К многосолитонным решениям, которые можно вывести более систематическим путем, мы вернемся в следующей главе. Уравнение (2.5.2) содержит два экспоненциальных члена и их произведение, включающее взаимодействие двух солитонов. В соответствии с этим можно считать, что многосолитонное решение состоит из существенно двойных соударений.

Задача 2.13. Оцените максимальную высоту $\exp(-\beta \chi_n) - 1$ при лобовом столкновении солитонов одинаковой высоты.

2.6. ПРЕДЕЛ ТВЕРДЫХ СФЕР

Когда график силы отталкивания становится бесконечно крутым, а сила притяжения отсутствует, нелинейная цепочка сводится к системе твердых сфер (одномерная цепочка сводится к твердым стержням). В этом случае каждое соударение происходит независимо от других, причем, поскольку имеется в виду система равных масс, осуществляется только обмен скоростями. Следовательно, в координатах $t \sim x$ (x обозначает положение каждой частицы) график состоит из прямых линий. Другими словами, возможное движение представляет любой график из прямых линий, если он удовлетворяет условию обмена скоростями. Таким образом, в пределе твердых сфер движение одномерной системы легко понять.

Некоторые характерные черты нелинейной цепочки можно разоб-
раться при рассмотрении движения в системе твердых сфер. Однако существуют и такие особенности, которые отсутствуют в этом пре-
деле. Например, в солитоне движение частиц хорошо организовано и скоррелировано. В системе твердых сфер, если имеются параллель-
ные линии нескольких соседних частиц на графике $t \sim x$, движе-
ние осуществляется в форме импульса (всплеска), но как солитон его рассматривать нельзя.

Когда в системе твердых сфер скорость придается только од-
ной частице, результирующее движение будет соответствовать со-
литону в нелинейной цепочке. Движение можно определить из ана-
литического решения уравнений (2.4.1) или (2.4.5) в пределе
 $\beta \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow 0$. Интуиция подсказывает, что $\chi_n \sim \ln x$
в (2.4.1) должно стать ступенчатой функцией, а значит, $\chi \rightarrow \infty$.
Как следует из (1.4.7), скорость каждой частицы $\dot{\chi}_n = (\chi_{n-1} - \chi_n)/m$, что представляет движение только одной частицы, когда
 χ_n становится ступенчатой функцией. Сама скорость произвольна,
поскольку она зависит от способа осуществления предела $a \rightarrow 0$
и $\beta \rightarrow \infty$.

Рассмотрим предел твердых сфер в случае конидальной волны
[2.1а, 2]. График $t \sim x$ приобретает наглядный смысл, когда с по-
мощью приложения давления $f < 0$ к цепочке положение минимума по-
тенциала взаимодействия сохраняется и берется предел одновремен-

но для двух величин, $a' = a + f \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$, так, чтобы величина

$$C = -C' = \frac{1}{b} \ln \frac{a}{a+f} \quad (2.6.1)$$

оставалась конечной. Тогда потенциал взаимодействия принимает вид (2.2.7). Когда сохраняется частота и движение в системе конечно, из (2.1.9) видно, что $K(k) \rightarrow \infty$ (или модуль $k \rightarrow 1$) при $b \rightarrow \infty$. С другой стороны, ряд Фурье для функции Z имеет вид

$$K Z(2Kx) = 2\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{q^{\ell}}{1-q^{2\ell}} \sin 2\pi \ell x, \quad q = e^{-\pi K'/K}. \quad (2.6.2)$$

Беря предел $k \rightarrow 1$, имеем

$$q \approx 1 - \epsilon, \quad \epsilon = \pi^2 / 2K \ll 1, \quad (2.6.3)$$

и, если сохранять предельное значение

$$\lim_{\substack{K \rightarrow 1 \\ \ell \rightarrow \infty}} \frac{K \nu}{\ell / m} = C \quad (2.6.4)$$

конечным, получаем предел твердых сфер для конидальной волны:

$$j_n = \frac{4}{\pi} C \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \sin 2\pi \ell \left(\nu t - \frac{n}{\lambda} \right) = C g(\nu t - n/\lambda), \quad (2.6.5)$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 1-2x & (0 < x < 1), \\ 2|x|-1 & (-1 < x < 0). \end{cases} \quad (2.6.6)$$

Таким образом, оказывается, что скорость частицы $\dot{y}_n = (j_{n-1} - j_n)/m$ такая, как это изображено на рис. 2.7 и 2.8.

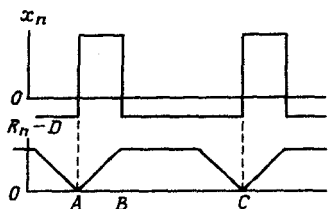


Рис. 2.7.

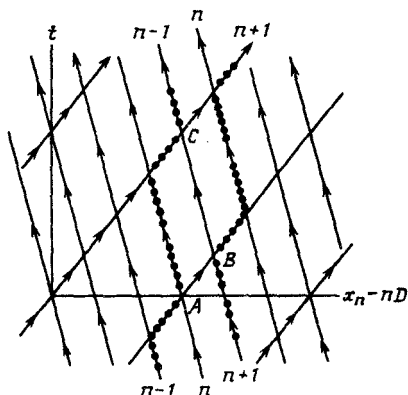


Рис. 2.8. Предел твердых сфер для кноидальной волны.

2.7. КONTИНУАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ВРЕМЯ ВОЗВРАТА

Континуальное приближение получается из рассмотрения волны, длина волны которой очень велика по сравнению с постоянной решетки. Кратко опишем метод аппроксимации. Для этой цели удобно ввести оператор сдвига [2.7]

$$e^{\pm \partial / \partial n} f(n) = f(n \pm 1). \quad (2.7.1)$$

Для цепочки с экспоненциальным взаимодействием уравнение движения по отношению к $\chi(n, t) = \chi_n(t)$ запишется в виде

$$m \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + a \left[2 \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \right]^2 e^{-b\chi} = 0. \quad (2.7.2)$$

Его можно переписать, пренебрегая производными высших порядков и высшими степенями χ :

$$\left(\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial}{\partial t} - 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial n} \chi \right) \left(\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial}{\partial t} + 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{b}{2} \chi \frac{\partial}{\partial n} \right) \chi = 0 \quad (2.7.3)$$

Следовательно, для волны, распространяющейся направо, имеем

$$\left(\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial}{\partial t} - 2\hbar \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\hbar}{2} \tau \frac{\partial}{\partial n} \right) \tau = 0, \quad (2.7.4)$$

или, формально раскладывая $\hbar$ в ряд до членов третьего порядка,

$$\sqrt{\frac{m}{ab}} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial n} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \tau}{\partial n^3} - \frac{\hbar}{2} \tau \frac{\partial \tau}{\partial n} = 0. \quad (2.7.5)$$

Вводя новые переменные с помощью соотношений

$$u = \hbar \tau / 2, \quad \tau = \sqrt{ab/m} t, \quad (2.7.6)$$

$$\xi = n - \sqrt{ab/m} t, \quad \delta^2 = 1/24,$$

получаем уравнение КдВ

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0. \quad (2.7.7)$$

Для уравнения КдВ относительно функции $u = u(\xi, \tau)$ рассмотрим связанное с ним уравнение на собственные значения

$$6\delta^2 \frac{d^2 \psi^{(\ell)}}{d\xi^2} - (u - \lambda_\ell) \psi^{(\ell)} = 0, \quad (2.7.8)$$

где $\psi^{(\ell)}$ — ℓ -я собственная функция, принадлежащая собственному значению λ_ℓ . Это уравнение имеет ту же самую форму, что и уравнение Шредингера в квантовой механике ($12\delta^2$ соответствует $\hbar^2$). Было обнаружено, что, несмотря на временную эволюцию $u = u(\xi, \tau)$, описываемую уравнением КдВ, собственные значения λ_ℓ не зависят от времени. То есть

$$\frac{d\lambda_\ell}{dt} = 0. \quad (2.7.9)$$

Как будет показано в следующей главе, подобное утверждение верно также и для цепочки.

Уравнение (2.7.7) допускает солитонное решение вида

$$u = u_{\infty} - A \operatorname{sech}^2 \lambda (\xi - c\tau), \quad (2.7.10a)$$

где u_{∞} и A — постоянные ($A > 0$), и

$$c = -u_{\infty} + \frac{A}{3}, \quad \lambda = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{A}{12}}, \quad (2.7.10b)$$

$$\lambda = u_{\infty} - \frac{A}{2}. \quad (2.7.11)$$

Используя континуальное приближение, можно обсудить вопрос о времени возврата ФПУ [2.3]. В численных экспериментах ФПУ начальные условия были таковы, что при $\tau = 0$ цепочка покоилась, а начальными смещениями были $y_n = B \sin(n\pi/N)$ [в данном разделе $N+1$ в (1.1.9) записано как N , поскольку предполагается, что $N \gg 1$]. По аналогии со случаем линейной волны кажется весьма правдоподобным предположение, что волна расщепляется на две волны половинной амплитуды, распространяющиеся в обоих направлениях вдоль циклической цепочки длины $2N$. Поскольку для гладкой волны можно использовать аппроксимацию $\gamma = \partial y_n / \partial n$, каждая волна подчинена начальному условию

$$u(\tau=0) = -\frac{\ell B \pi}{4N} \cos \frac{\pi \xi}{N}. \quad (2.7.12)$$

Когда (2.7.12) раскладывается вблизи минимума,

$$u(\tau=0) = \text{const} + \frac{1}{2} \frac{\ell B \pi}{4N} \left(\frac{\pi}{N} \right)^2 \xi^2, \quad (2.7.13)$$

что дает гармонический потенциал вида $(\omega^2/2)\xi^2$ для уравнения на собственные значения (2.7.8). Если при этом начальном условии возникают несколько солитонов, каждый из них должен иметь собственное значение

$$A = \sqrt{12 \sigma^2 \frac{\pi^3 \ell B}{4N^3}} \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.7.14)$$

соответствующее каждому уровню $(l+1/2)\hbar\omega$ квантового гармонического осциллятора. Поэтому из (2.7.10б) скорость больших солитонов имеет общую разность

$$\Delta c = \frac{2}{3} \sqrt{12\delta^2 \frac{\pi^3 \ell B}{4N^3}}, \quad (2.7.15)$$

и после временного интервала

$$\tau_R = \frac{2N}{\Delta c} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi^3}} \frac{N^{5/2}}{\sqrt{\ell B}} \quad (2.7.16)$$

первоначальная конфигурация будет повторяться (повторение будет неполным, так как малые солитоны до некоторой степени находятся не в фазе). Во временном масштабе цепочки время возврата будет

$$t_R = \frac{\tau_R}{\sqrt{a\ell/m}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \frac{N^{3/2}}{\sqrt{\ell B}} t_L, \quad (2.7.17)$$

где $t_L = 2N/\sqrt{a\ell/m}$ - так называемый линейный период. В терминах нелинейного параметра $|a| = \ell/2$

$$t_R = \frac{3}{\pi^{3/2}} \frac{N^{3/2}}{\sqrt{|a|B}} t_L = \frac{0,5 N^{3/2}}{\sqrt{|a|B}} t_L. \quad (2.7.18)$$

Это немного больше, чем эмпирическое значение (1.1.10), поскольку из-за сжатия цепочки солитоны проходят один сквозь другой с большей скоростью.

Задача 2.14. Покажите, что уравнение КдВ (2.7.7) имеет периодическое решение (кноидальную волну)

$$u = u_\infty - A \operatorname{cn}^2(k\xi - c\tau),$$

где (k - модуль)

$$c = -u_\infty + \frac{A}{3} (2 - 1/k^2), \quad \xi = \frac{1}{k\delta} \sqrt{\frac{A}{12}}.$$

Найдите это решение из кноидальной волны цепочки (2.3.1) посредством перехода к континуальному приближению.

Задача 2.15. Покажите, что функция

$$f = sch^n(x-t)$$

удовлетворяет уравнению

$$n^2 f_t + (n+1)(n+2) f^{2/n} f_x + f_{xxx} = 0,$$

где индексы обозначают производные (например, $f_{xxx} = \partial^3 f / \partial x^3$).

2.8. ПРИМЕНЕНИЯ И ОБОБЩЕНИЯ

Можно легко показать, что линейная цепочка эквивалентна линии передачи (рис. 2.9), составленной из индуктивностей L и емкостей C . Подобным же образом одномерная нелинейная цепочка

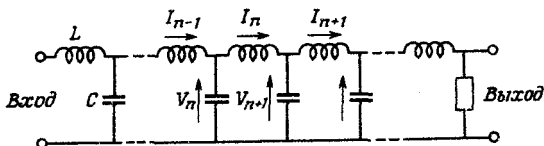


Рис. 2.9. LC -линия.

эквивалентна линии передачи с нелинейными L или C . Продемонстрируем это. Пусть I_n обозначает ток, Q_n - заряд конденсатора, Φ_n - поток индукции. Запишем уравнения для линии передачи в виде

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_{n-1} - I_n, \quad \frac{d\Phi_n}{dt} = V_n - V_{n+1}. \quad (2.8.1)$$

Предположим, что индуктивности линейны и обладают постоянной индуктивностью L :

$$\Phi_n = L I_n. \quad (2.8.2)$$

С другой стороны, пусть конденсатор нелинеен и пусть зависимость заряда от напряжения дается выражением

$$Q_n = C v_0 \ln(1 + V_n / v_0), \quad (2.8.3)$$

где C и v_0 - постоянные. Тогда (2.8.1) дает

$$C v_0 \frac{d}{dt} \ln(1 + V_n / v_0) = I_{n-1} - I_n, \quad (2.8.4)$$

$$L \frac{d}{dt} I_n = V_n - V_{n+1},$$

и поэтому

$$C L v_0 \frac{d^2}{dt^2} \ln(1 + V_n / v_0) = V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}. \quad (2.8.5)$$

По форме это совпадает с уравнениями движения (2.2.12) для цепочки с экспоненциальным взаимодействием [2.7].

Хотя реальные конденсаторы могут иметь нелинейность, отличающую от (2.8.3), если приложить подходящее смещающее напряжение и ограничиться малыми изменениями напряжения, можно использовать (2.8.3) как приближение. С помощью таких линий Хирота и Сузуки [2.7] смогли воспроизвести явления возврата и столкновение между солитонами.

Уравнения (2.8.1) представляют собой обобщение уравнений нелинейной цепочки. Однако к таким образом обобщенной системе механическая интерпретация в общем случае неприменима. Например, если предположить, что индуктивности, так же как и конденсаторы, нелинейны с зависимостями

$$\begin{cases} Q_n = C v_0 \ln(1 + V_n / v_0), \\ \Phi_n = L i_0 \ln(1 + I_n / i_0) \end{cases} \quad (2.8.6)$$

(C , v_0 , L , i_0 - постоянные), то из (2.8.1) следует [2.8]

$$\frac{d}{dt} \ln(x^{-1} + V_n) = I_{n-1} - I_n, \quad (2.8.7)$$

$$\frac{d}{dt} \ln(x + I_n) = V_n - V_{n+1}.$$

где величины t , I_n и V_n сделаны безразмерными посредством масштабных преобразований

$$\frac{t}{\sqrt{LC}} \rightarrow t, \quad \frac{I_n}{\chi^{-1} i_0} \rightarrow I_n, \quad \frac{V_n}{\chi v_0} \rightarrow V_n, \quad (2.8.8)$$

$$\text{и } \chi = \sqrt{L/C} i_0 / v_0 \quad (2.8.9)$$

есть постоянная.

Если $\chi = 1$, (2.8.7) не изменяются, когда I_n и V_n меняются местами, и в таком смысле это взаимно дуальная система. Если $\chi \gg 1$, (2.8.7) сводится к цепочке с экспоненциальным взаимодействием.

В общем, при замене t и I_n на $-t$ и $-I_n$ (2.8.7) изменяется. Это означает, что для конечных χ распространение волн направо отлично от распространения волн налево. Даже в этом случае имеются многосолитонные решения [2.8].

Нелинейные цепочки могут служить моделью для описания таких нелинейных явлений, как распространение волн в системе нервов, химические реакции и некоторые экологические системы [2.9]. Например, имеется известное уравнение Вольтерра для экологических систем

$$\frac{dN_i}{dt} = \alpha_i N_i + \sum_j \beta_{ij} N_i N_j \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.8.10)$$

где α_i и β_i — постоянные ($\alpha_i, \beta_i \geq 0$). Как простейший случай рассмотрим цепочку реакций, описываемую уравнениями

$$\frac{d}{dt} N_n = N_{n-1} N_n - N_n N_{n+1} \quad (n = \dots, 0, 1, 2, \dots). \quad (2.8.11)$$

Имеется устойчивое решение, характеризуемое условиями $N_{2n-1} = \bar{N}_1 = \text{const}$ и $N_{2n} = \bar{N}_2 = \text{const}$. Если положить

$$N_{2n-1} = \bar{N}_1 + n_1(n), \quad (2.8.12)$$

$$N_{2n} = \bar{N}_2 + n_2(n),$$

то получится система уравнений [2.8]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln [\bar{n}_1 + n_1(n)] &= n_2(n-1) - n_2(n), \\ \frac{d}{dt} \ln [\bar{n}_2 + n_2(n)] &= n_1(n) - n_1(n+1), \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

которая имеет тот же вид, что и (2.8.7). Можно интерпретировать (2.8.11) как экологическую систему, в которой n -й вид увеличивается, поедая $(n-1)$ -й вид, и уменьшается, поедаемый $(n+1)$ -м видом. Если принять эту интерпретацию, она поможет понять тот факт, что волновое распространение направо отлично, например по скорости, от волнового распространения налево.

Задача 2.16. Рассмотрите нелинейное волновое уравнение, которое получается из (2.8.1) в предположении о линейности конденсаторов и нелинейности индуктивностей вида (2.8.6).

2.9. ОТОБРАЖЕНИЕ ПУАНКАРЕ

В разд. 1.2 обсуждалось поведение нелинейной циклической цепочки, состоящей из трех частиц. Как показано Фордом, циклическая цепочка из трех частиц с кубической нелинейностью в потенциале взаимодействия эквивалентна системе Хенона-Хейлеса, и методом отображения Пуанкаре было показано, что траектории в фазовом пространстве становятся, по-видимому, стохастическими, когда энергия достигает определенного критического значения.

Сакто [2.5] применил метод отображения к цепочке с экспоненциальным взаимодействием, составленной из двух подвижных частиц с закрепленными концами, и нашел, что траектории не становятся неустойчивыми, даже когда энергия возрастает до предельно больших величин. Форд [2.10] детально исследовал отображение для циклической цепочки из трех частиц с экспоненциальным взаимодействием и получил похожие результаты, которые будут списаны далее.

Гамильтониан для циклической цепочки из трех частиц с экспоненциальным взаимодействием можно записать в безразмерной форме

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + e^{-(Q_1 - Q_3)} + e^{-(Q_2 - Q_1)} + e^{-(Q_3 - Q_2)} - 3. \quad (2.9.1)$$

Если линеаризовать его в случае малых амплитуд, получится (1.2.1).

Беря наименьший нелинейный член, получим параметр нелинейности из (2.2.4) $\lambda = -1/2$, поскольку в (2.9.1) $\ell = 1$. Применим преобразование (1.2.2), которое диагонализует соответствующую гармоническую цепочку. Тогда с помощью изменения масштабов

$$\begin{cases} \zeta_1 = 2\sqrt{2} q_1, & \zeta_2 = 2\sqrt{2} q_2, \\ t \rightarrow t/\sqrt{3} \end{cases} \quad (2.9.2)$$

получаем уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= (4\sqrt{3})^{-1} \left(-e^{2q_2+2\sqrt{3}q_1} + e^{2q_2-2\sqrt{3}q_1} \right), \\ \ddot{q}_2 &= \frac{1}{6} e^{-4q_2} - \frac{1}{12} \left(e^{q_2+2\sqrt{3}q_1} + e^{2q_2-2\sqrt{3}q_1} \right) \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

Соответствующая энергия есть

$$E = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{24} \left(e^{2q_2+2\sqrt{3}q_1} + e^{2q_2-2\sqrt{3}q_1} + e^{-4q_2} \right) - \frac{1}{8}. \quad (2.9.4)$$

Воспользуемся для отображения поверхностью сечения (q_2, p_2) , проходящей через $q_1 = 0$ в четырехмерном фазовом пространстве, и нанесем на график точки, в которых траектории пересекают поверхность в положительном направлении ($p_1 < 0$). Тогда получается отображение, показанное на рис. 2.10,а ($E = 1$) и на рис. 2.10,б ($E = 256$).

Форд исследовал отображения вплоть до $E = 56\,000$ и всегда получал гладкие кривые на (q_2, p_2) -плоскости без признаков стохастического поведения. Это показывает, что траектории лежат на гладких поверхностях. В данном случае расстояние (1.2.9) в фазовом пространстве имело в среднем линейную временную зависимость. То же самое было показано для циклической цепочки из шести частиц с экспоненциальным взаимодействием. Таким образом, вычислительная работа прямо указывала, что цепочка с экспоненциальным взаимодействием интегрируема. Другими словами, она допускает так называемый третий интеграл помимо интегралов импульса и энергии.

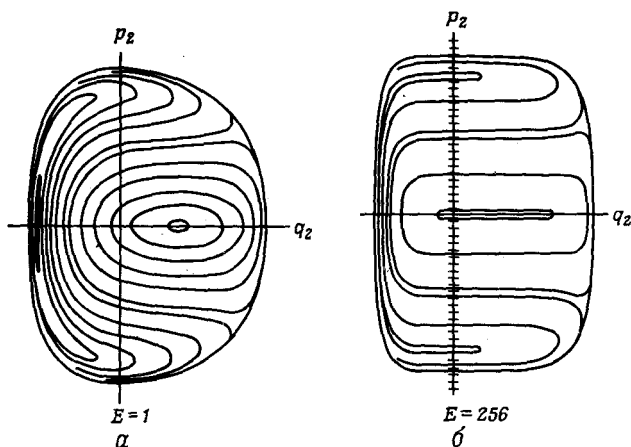


Рис. 2.10. Поверхность сечения для гамильтониана (2.9.4) [2.10].

2.10. СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Побуждаемые вычислительной работой Форда Хенон и Флашка независимо аналитически показали интегрируемость цепочки с экспоненциальным взаимодействием. Метод Флашки **обсуждается** в следующей главе. Познакомимся сначала с работой Хенона **и с некоторыми смежными вопросами** [2.11].

Уравнения движения для цепочки с экспоненциальным взаимодействием могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= P_n, \\ \dot{P}_n &= C \left(e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{-(q_{n+1} - q_n)} \right). \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

Вслед за Хеноном введем постоянную C , хотя в дальнейшем можно положить $C = 1$. Рассмотрим периодическую цепочку, состоящую из N частиц, так что

$$q_{n+N} = q_n, \quad P_{n+N} = P_n. \quad (2.10.2)$$

Далее введем

$$\chi_n = C e^{-(q_{n+1} - q_n)}, \quad (2.10.3)$$

чтобы записать уравнения движения в виде

$$\dot{X}_n = (P_n - P_{n+1}) X_n,$$

(2.10.4)

$$\dot{P}_n = X_{n-1} - X_n.$$

Хенон показал, что существует $\mathcal{N}$ сохраняющихся величин (интегралов)

$$I_m = \sum P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k} (-X_{j_1}) \dots (-X_{j_\ell}) \quad (m=1, 2, \dots, \mathcal{N}),$$

(2.10.5)

где $\sum$ обозначает суммирование членов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) Индексы $i_1, i_2, \dots, i_k, j_1 + 1, \dots, j_\ell, j_\ell + 1$ все разные (по модулю $\mathcal{N}$), где j появляются или явно или неявно через X_j .

2) Число этих индексов есть m , т.е. $m = k + 2\ell$. Два члена, отличающиеся только порядком сомножителей, не считаются различными, и поэтому только один из них появляется в сумме. Например, для $\mathcal{N} = 3$ интегралы таковы:

$$I_1 = P_1 + P_2 + P_3,$$

$$I_2 = P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1 - X_1 - X_2 - X_3,$$

(2.10.6)

$$I_3 = P_1 P_2 P_3 - P_1 X_2 - P_2 X_3 - P_3 X_1.$$

Чтобы показать, что I_m — сохраняющиеся величины, удобно воспользоваться символикой

$$P_i = [i], \quad -X_j = [j, j+1]$$

(2.10.7)

и записать (2.10.4) в виде

$$\frac{d}{dt} [i, i+1] = ([i] - [i+1]) [i, i+1],$$

(2.10.8a)

$$\frac{d}{dt}[i] = -[i-1, i] + [i, i+1]. \quad (2.10.88)$$

Следовательно, $\dot{I}_m$ является суммой членов, подобных (2.10.5), исключая такие, где один индекс может в конце концов появиться дважды. Ниже рассмотрены все возможные члены в $\dot{I}_m$, которые можно получить из исходного члена в (2.10.5).

а) Член в $\dot{I}_m$, который не имеет повторяющихся индексов. Он может получиться только от дифференцирования сомножителя $[i]$ в (2.10.5), что дает $-[i-1, i] + [i, i+1]$ или индексы $i-1$ и $i+1$ (2.10.88). Возьмем, например, индекс $i+1$ (то же самое будет и для $i-1$). Чтобы $i+1$ не появлялся дважды в этом члене, первоначальный член не должен содержать $i+1$. Но тогда среди членов в I_m имеется другой член, где $[i]$ заменено на $[i+1]$, а остальные неизменны, и при дифференцировании он дает член, содержащий $-[i, i+1]$ и уничтожающий предыдущий. Таким образом, все члены такого типа при дифференцировании исчезают.

б) Член в $\dot{I}_m$, содержащий двойной индекс, общий для множителей $[i]$ и $[i, i+1]$. Он может получаться из двух первоначальных членов. (1) $[i, i+1]$ в первоначальном члене дает $[i][i, i+1]$ в соответствии с (2.10.8а). (2) Присутствует также первоначальный член с $[i][i+1]$, и он дает $-[i][i, i+1]$ после дифференцирования $[i+1]$ в соответствии с (2.10.8б). Таким образом, вклады от (1) и (2) сокращаются.

в) Случай двойного индекса i , общего в сомножителях $[i-1, i]$ и $[i]$, рассматривается аналогично.

г) Член в $\dot{I}_m$, который имеет двойной индекс i , общий в сомножителях $[i-1, i]$ и $[i, i+1]$. Он получается из первоначального члена, содержащего $[i-1][i, i+1]$ или $[i-1, i][i+1]$, и снова продифференцированные члены сокращаются.

Таким образом,

$$\dot{I}_m = 0 \quad \text{или} \quad I_m = \text{const.} \quad (2.10.9)$$

Что все I_m взаимно независимы, ясно, когда рассматривается случай $C = 0$. Тогда I_m сводятся к симметричной функции $I_m = \sum P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_m}$ и N симметричных функций I_m ($m=1, 2, \dots, N$) независимы.

I_1 есть просто полный импульс. I_2 по существу есть интеграл энергии, потому что он связан с полной энергией H соотношением

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1^2 - H. \quad (2.10.10)$$

Другие интегралы $I_3, \dots, I_N$ не имеют простой механической интерпретации.

Приведенные выше сохраняющиеся величины Хенона также применимы к цепочке с закрепленными границами, которая численно изучалась Саито и др. [2.5]. Это было независимо отмечено Фордом и Тодой. Чтобы это показать, рассмотрим периодическую цепочку, состоящую из $2N+2$ частиц. Наложим антисимметричные начальные условия, нумеруя частицы от $-N$ до $N+1$:

$$Q_{-n} = -Q_n, \quad P_{-n} = -P_n. \quad (2.10.11)$$

Тогда ясно, что это условие выполняется все время, и оно в свою очередь подразумевает закрепленность концов $Q_0 = Q_{N+1} = 0$. В этом случае I_m при нечетных m исчезают из-за симметрии, и можно показать, что I_{2N+2} сводится к постоянной. Поэтому имеется N независимых интегралов $I_2, I_4, \dots, I_{2N}$. Любые функции $I_1, I_2, \dots$ также остаются постоянными. Отсюда неединственность выбора независимых сохраняющихся величин.

Общепринятый путь получения сохраняющихся величин должен начинаться с общего уравнения движения для динамической величины A [2.12]

$$dA/dt = [A, H], \quad (2.10.12)$$

где скобки в правой части означают скобки Пуассона и H есть гамильтониан (2.10.1) ($C=1$) периодической цепочки с экспоненциальным взаимодействием, т.е.

$$H = \frac{1}{2} \sum_n P_n^2 + \sum_n \left(e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} - 1 \right). \quad (2.10.13)$$

Можно записать

$$[A, H] = \mathcal{H}A, \quad (2.10.14)$$

где

$$\mathcal{H} = \sum_n P_n \frac{\partial}{\partial Q_n} - \sum_n e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \left(\frac{\partial}{\partial P_n} - \frac{\partial}{\partial P_{n+1}} \right). \quad (2.10.15)$$

Определяя

$$\rho = \sum e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} \frac{\partial^2}{\partial P_n \partial P_{n+1}}, \quad (2.10.16)$$

можно показать после некоторых вычислений, что [2.12]

$$\mathcal{H} e^{-\rho} \prod_{i=1}^n P_i = 0. \quad (2.10.17)$$

Поэтому $e^{\rho} \prod_{i=1}^N P_i$ - интеграл движения. Далее можно показать, что

$$\mathcal{H} \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial P_j} \right)^n e^{-\rho} \prod_{i=1}^N P_i = 0. \quad (2.10.18)$$

Появившаяся здесь функция есть не что иное, как интеграл Хенона. В самом деле, при проверке видно, что интеграл Хенона ($C = 1$) можно записать в виде

$$I_{N-n} = \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial P_j} \right)^n e^{-\rho} \prod_{i=1}^N P_i. \quad (2.10.19)$$

Сохраняющиеся величины находятся в инволюции с гамильтонианом ($[H, I_m] = 0$) и друг с другом ($[I_n, I_m] = 0$). Кроме того, движения, получающиеся при выборе сохраняющихся величин I_m в качестве новых гамильтонианов, взаимно не противоречивы.

Задача 2.17. Исследуйте интегралы типа Хенона для цепочки с $N = 3$ при закрепленных концах.

Задача 2.18. Убедитесь, что интегралы (2.10.19, 6) для периодической цепочки совпадают.

Задача 2.19. Умножая P_n^{λ} ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$) на второе из уравнений

движения (2.10.4) для цепочки и суммируя, получите уравнения

$$J_1 = \sum_n P_n = const,$$

$$J_2 = \sum_n \left(\frac{1}{2} P_n^2 + X_n \right) = const,$$

$$J_3 = \sum_n \left[\frac{1}{3} P_n^3 + P_n (X_n + X_{n+1}) \right] = const$$

для периодической цепочки или цепочки, покоящейся на бесконечности.

Замечание: для интеграла Хенона I_2 имеется соотношение $I_2 = J_1^2 - 2J_2$ и т.д. Подобным же образом, переписывая dp_n^4/dt , $dp_n^5/dt, \dots$, можно найти сохраняющиеся величины высшего порядка $J_4, J_5, \dots$. Правда, расчет очень громоздкий.

Глава 3

СПЕКТР И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

В предыдущей главе мы убедились, что цепочка с экспоненциальным взаимодействием допускает много частных решений, а циклическая цепочка имеет столько сохраняющихся величин, сколько частиц в цепочке. Таким образом, мы имеем основные понятия о распространении нелинейных волн в цепочках. В данной главе мы запишем уравнения движения цепочки в матричной форме, получим из них сохраняющиеся величины и покажем, что задача Коши является решаемой для бесконечной цепочки. Далее мы рассмотрим уравнения движения вида $dL/dt = BL - LB$ с обобщенной матрицей B и связь между системой Каца-Мёрбеке и цепочкой с экспоненциальным взаимодействием. Покажем, что можно строить новые решения из известных (преобразование Бэклунда), используя производящую функцию канонического преобразования. Далее обсудим методы интегрирования цепочек с экспоненциальным взаимодействием конечного числа частиц, включая метод Мозера. Наконец, изучим переход к континуальным системам и получим уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ), описывающее нелинейную сплошную среду.

3.1. МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Аналитическое рассмотрение цепочки, которое начал Флашка [3.1], было стимулировано численными результатами Форда, показавшего интегрируемость цепочки с экспоненциальным взаимодействием. В то время было известно, что собственные значения уравнения Шредингера, сопоставляемого с уравнением КдВ, не зависят от времени (см. разд. 2.7), и был предложен способ решения задачи Коши методом обратной задачи рассеяния. Соответствующая теория была строго сформулирована Лаксом [3.2]. С другой стороны, Кац и Кейз [3.3] установили метод дискретизации уравнения Шредингера. Перечисленные результаты позволяют подойти к аналитическому иссле-

Запишем уравнения движения цепочки в виде

и перепишем их далее как

Нумерация n и знаки a_n и b_n здесь несколько отличаются от тех, что были использованы в оригинальной работе Флашки, а также в работах Каца и др. В этой книге мы используем простые обозначения, которые позволяют осуществить гладкий переход к континуальному приближению — уравнению КдВ для волн, распространяющихся в правую сторону. Из (3.1.1) видно, что уравнения движения для a_n и b_n можно записать как

Отметим, что эти уравнения не изменяются при изменении знака α_n . Рассмотрим периодическую цепочку N частиц, такую, что

Тогда мы можем ввести матрицы L и B (размерности $N \times N$):

66

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & & & & a_N \\ a_1 & 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & -a_{n-1} & & \\ & & a_{n-1} & 0 & -a_n & \\ & & & a_n & 0 & \ddots & 0 & -a_{N-1} \\ -a_N & & & & & a_{N-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.6)$$

чтобы записать уравнение (3.1.3) в матричной форме [3.1]

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB. \quad (3.1.7)$$

Запись эволюционного уравнения в форме (3.1.7) соответствует методу Лакса. Здесь существенно, что матрица B антисимметрична. В силу антисимметрии B матрица U , определяемая уравнением

$$\frac{dU}{dt} = BU \quad \text{при} \quad U(0) = 1, \quad (3.1.8)$$

унитарна. Поэтому

$$\frac{dU^{-1}}{dt} = -U^{-1}B, \quad (3.1.9)$$

$$UU^{-1} = U^{-1}U = 1. \quad (3.1.10)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) = 0, \quad (3.1.11)$$

так что $U^{-1}LU$ от времени не зависит, а

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}. \quad (3.1.12)$$

Таким образом, $L(t)$ и $L(0)$ унитарно эквивалентны. Пусть $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ (матрицы $N \times 1$) обозначают собственные числа и собственные функции $L(t)$. Тогда при $t = 0$

$$L(0)\varphi(0) = \lambda(0)\varphi(0), \quad (3.1.13)$$

и, используя (3.1.12), получаем

$$L(t)U(t)\varphi(0) = \lambda(0)U(t)\varphi(0). \quad (3.1.14)$$

Сравним последнее с уравнением

$$L(t)\varphi(t) = \lambda(t)\varphi(t), \quad (3.1.15)$$

можно убедиться, что

$$\varphi(t) = U(t)\varphi(0) \quad (3.1.16)$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = B\varphi, \quad (3.1.17)$$

а

$$\lambda(t) = \lambda(0) = \lambda. \quad (3.1.18)$$

Следовательно, собственные значения не зависят от времени. Кроме того, поскольку все элементы матрицы L вещественны, собственные значения λ тоже вещественны.

Таким образом, движения цепочки сохраняют спектр λ (изо-спектральные деформации). В силу уравнения (3.1.15) собственные значения определяются уравнением для определителя:

$$\det(\lambda I - L) = 0. \quad (3.1.19)$$

Так как размерность матрицы L $N \times N$, имеем N собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Разлагая (3.1.19), получаем систему из N уравнений:

$$\lambda_j^N + c_1 \lambda_j^{N-1} + c_2 \lambda_j^{N-2} + \dots + c_{N-1} \lambda_j + c_N = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N), \quad (3.1.20)$$

где c_j — функция от a_n и b_n . Если мы разрешим эти уравнения относительно c_j , то получим

$$c_j(\{a_n\}, \{b_n\}) = c_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \quad (3.1.21)$$

Поскольку величины λ_j сохраняются, c_j также сохраняются. Не-
трудно убедиться, что c_j совпадают с интегралами Хенона I_j .
Из (3.1.7) непосредственно видно, что величины

$$\hat{J}_p = S_p L^p = \sum_{j=1}^N \lambda_j^p \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1.22)$$

сохраняются, а I_n могут быть выражены через $\hat{J}_p$.

Задача 3.1. Пусть $\varphi_\ell(t)$ есть ℓ -компонента $\varphi(t)$. Покажите, что норма сохраняется:

$$|\varphi(t)|^2 = \sum_{\ell=1}^N |\varphi_\ell(t)|^2 = |\varphi(0)|^2.$$

Задача 3.2. Перепишите (3.1.19) в виде

$$\det(2\lambda I - 2L) = (2\lambda)^N + I_1(2\lambda)^{N-1} + \dots + I_N = 0$$

и в случае $N=3$ убедитесь, что I_n — интегралы Хенона.

Задача 3.3. Проверьте справедливость следующих соотношений:

$$\text{Полный импульс } P = \sum_n P_n = S_p L = 2 \sum_n \lambda_n,$$

$$\text{Полная энергия } H = \sum_n \frac{1}{2} P_n^2 + \sum_n e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} = 2 \sum_n \lambda_n^2,$$

$$\frac{1}{2} \hat{J}_1 = J_1 = P, \quad \frac{1}{2} \hat{J}_2 = \frac{1}{2} I_1^2 - I_2 = H.$$

3.2. БЕСКОНЕЧНАЯ ЦЕПОЧКА

Уравнение движения (3.1.7) эквивалентно уравнениям (3.1.15)
и (3.1.17), а именно

$$L\varphi = \lambda\varphi, \quad \lambda = \text{const}, \quad (3.2.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = B\varphi. \quad (3.2.2a)$$

Чтобы убедиться в этом достаточно продифференцировать соотношение (3.2.1) по времени, поскольку

$$\frac{dL}{dt} \varphi + L B \varphi = \lambda B \varphi = B L \varphi, \quad (3.2.2\delta)$$

или

$$\left[\frac{dL}{dt} - (B L - L B) \right] \varphi = 0. \quad (3.2.2\epsilon)$$

Таким образом, приходим к (3.1.7) [обобщение (3.2.2а) см. в разд. 4.6].

В предыдущих рассуждениях мы можем добавить к матрице B произвольную мнимую константу $i\omega_0$, умноженную на единичную матрицу. Тогда B станет антиэрмитовой матрицей, $B^\dagger = -B$, а U и φ следует умножить на $\exp(i\omega_0 t)$.

Как было показано в предыдущем разделе, для того чтобы λ была постоянной, матрица B должна быть антисимметричной (антиэрмитовой). Так как φ играет такую же роль, как и волновая функция в квантовой механике, мы в дальнейшем будем называть φ волновой функцией. В то время как в периодической цепочке мы можем ввести конечную норму φ , в бесконечной цепочке ввести норму мы не можем.

В ряде следующих разделов мы рассмотрим цепочку, бесконечно длинную в обоих направлениях. Формулы предыдущего раздела применимы в этом случае, если изменить нумерацию частиц с n от 1 до N на n от $-N/2$ до $N/2$. Тогда мы сможем сделать предельный переход $N \rightarrow \infty$. Элементами матриц (3.1.5, 6) вверху справа и внизу слева при этом пренебрегаем. Таким образом, уравнения движения (3.2.1, 2) для бесконечной цепочки имеют вид [3.4]

$$(L\varphi)_n \equiv a_{n-1} \varphi(n-1) + b_n \varphi(n) + a_n \varphi(n+1) = \lambda \varphi(n),$$

$$\lambda = \text{const} \quad (n = \dots, 1, 2, \dots), \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d\varphi(n)}{dt} = (B\varphi)_n = a_{n-1} \varphi(n-1) - a_n \varphi(n+1). \quad (3.2.4)$$

В правую часть уравнения (3.2.4) мы можем добавить слагаемое вида $i\omega_0 \varphi(n)$ с произвольной величиной ω_0 .

Рассмотрим движения, ограниченные в конечной области цепоч-

ки, предполагая, что на больших расстояниях отсутствует движение. Следовательно, если $|n| \gg 1$, то $Q_{n+1} - Q_n = 0$, $P_n = 0$,

$$a_n = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0 \quad (|n| \gg 1), \quad (3.2.5)$$

так что (3.2.3, 4) сводятся к

$$\frac{1}{2} [\varphi(n-1) + \varphi(n+1)] = \lambda \varphi(n), \quad (3.2.6)$$

$$\frac{d\varphi(n)}{dt} = \frac{1}{2} [\varphi(n-1) - \varphi(n+1)]. \quad (3.2.7)$$

Таким образом, если опустить постоянный множитель, асимптотика волновой функции определяется выражением

$$\varphi(n) = e^{\pm i\omega t} \chi^{\pm n} \quad (\chi = e^{ik}), \quad (3.2.8)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} (\chi + \chi^{-1}) = \cos k, \quad (3.2.9)$$

$$-\omega = \frac{1}{2i} (\chi - \chi^{-1}) = \sin k, \quad (3.2.10)$$

и так как n — целое число, мы можем ограничить изменение k :

$$0 \leq k \leq \pi, \quad -1 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.2.11)$$

Если мы используем модифицированную матрицу B (умноженную на $i\omega_0$), то $\varphi(n)$ в (3.2.8) надо умножить на $\exp(i\omega_0 t)$.

Если $|\lambda| > 1$, асимптотические формулы при $n \rightarrow +\infty$ имеют вид

$$\varphi(n) = e^{\beta t} \chi_1^n \quad (|\chi_1| < 1), \quad (3.2.12)$$

где

$$\lambda = \frac{\chi_1 + \chi_1^{-1}}{2}, \quad (3.2.13)$$

$$\beta = \frac{\chi_1^{-1} - \chi_1}{2}. \quad (3.2.14)$$

Уравнение (3.2.12) определяет асимптотический вид волновой функции некоторого связанного состояния с $|\chi_1| \neq 1$, так что $\varphi \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Поскольку мы полагаем, что матрицы B и L вещественные, можно

считать вещественными также λ_1 и β . В случае, когда связанное состояние движется вправо, $\beta > 0$ ($\lambda_1 > 0$), а в случае движения влево $\beta < 0$ ($\lambda_1 < 0$).

Возвращаясь к (3.2.3), заметим, что волновая функция $\psi(r)$ описывает рассеяние или связанное состояние в поле с "потенциалом" $a_{n-1/2}$ и b_n , определяемым движением цепочки о $a_{n \neq 1/2}$ или $b_n \neq 0$. Термин "рассеяние" употребляется в общем смысле. В самом деле, (3.2.3) — это дифференциальное уравнение второго порядка, и, следовательно, в континуальном приближении оно сводится к уравнению Шредингера вида $[-\hbar^2(d^2/dx^2) + u]\psi = \lambda\psi$, где потенциал u определяется через $a_{n-1/2}$ и b_n . Если задан потенциал и надо определить связанные состояния и рассеяние ψ (асимптотическое поведение ψ), то мы имеем прямую задачу рассеяния. В противоположность этому, если мы ищем вид потенциала по заданному асимптотическому поведению ψ , надо пользоваться методом обратной задачи рассеяния (МОЗР).

Предположим, что мы хотим получить детальную информацию о P_n и Q_n или об a_n и b_n движущегося объекта и облучаем его светом, характеризуемым длиной волны λ . Полученное таким образом "радарное изображение" соответствует асимптотическому виду ψ , а техника предсказания движения объекта соответствует МОЗР. Здесь волновая функция ψ — не более чем математический объект, однако мы можем рассматривать рассеяние реальных волн, например рентгеновских, солитонами в нелинейной среде [3.5].

Как мы увидим ниже, солитоны определяются связанными состояниями. Следовательно, спектр связанных состояний ($|\lambda| > 1$) и их асимптотический вид более существенны для описания распространения нелинейных волн, чем состояния непрерывного спектра с $|\lambda| < 1$. Для периодических систем, как будет показано в гл. 4, нельзя говорить об асимптотическом поведении на бесконечности; вместо этого мы будем использовать дополнительный спектр для решения начальной задачи о распространении волн в цепочке. Таким образом, эти методы скорее составляют обратную спектральную теорию (ОСТ), чем метод обратной задачи рассеяния.

Если мы положим

$$\lambda = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad (3.2.15)$$

то (3.2.3) примет вид

$$a_{n-1} \varphi(n-1) + b_n \varphi(n) + a_n \varphi(n+1) = \frac{1}{2} (z + z^{-1}) \varphi(n). \quad (3.2.16)$$

Когда на бесконечности движение отсутствует, решение с асимптотическим поведением (3.2.8), или

$$\varphi(n) \rightarrow z^n e^{i\omega t}, \quad -i\omega = \frac{z - z^{-1}}{2}, \quad (3.2.17)$$

для $n \gg 1$ можно представить как

$$\varphi(n) = \phi(n, z) e^{i\omega t}, \quad (3.2.18)$$

где

$$\phi(n, z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'}. \quad (3.2.19)$$

Коэффициент $K(n, n')$ не зависит от z , но a_n и b_n зависят от t и, следовательно, $K(n, n')$ также зависит от t .

Доказательство. На больших расстояниях $n \gg 1$, как следует из (3.2.8), $\phi(n, z) \sim z^n$, ($K(n, n') = 0, n \neq n'$). Таким образом, (3.2.18) выполняется для достаточно больших n . Предположим, что оно выполняется для n и $n+1$. Тогда из (3.2.16) мы получим $\varphi(n-1, z)$ и определим $K(n-1, n')$ для $n' < n-1$.

Подставляя (3.2.18, 19) в (3.2.16) и приравнивая друг другу коэффициенты при $z^{n-1}, z^n, z^{n+1}, \dots$, получаем

$$\left\{ \begin{aligned} a_{n-1} K(n-1, n-1) &= \frac{1}{2} K(n, n), \\ a_{n-1} K(n-1, n) + b_n K(n, n) &= \frac{1}{2} K(n, n+1), \\ a_{n-1} K(n-1, n+1) + a_n K(n+1, n+1) + b_n K(n, n+1) &= \\ &= \frac{1}{2} [K(n, n) + K(n, n+2)], \\ a_{n-1} K(n-1, n+2) + a_n K(n+1, n+2) + b_n K(n, n+2) &= \\ &= \frac{1}{2} [K(n, n+1) + K(n, n+3)] \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} K(n-1, n+m) + a_n K(n+1, n+m) + b_n K(n, n+m) &= \\ &= \frac{1}{2} [K(n, n+m-1) + K(n, n+m+1)] \end{aligned} \right. \quad (3.2.20)$$

Эту систему можно разрешить относительно a_{n-1} , b_n . Из первых двух уравнений имеем

$$\begin{cases} a_{n-1} = \frac{K(n, n)}{2K(n-1, n-1)}, \\ b_n = \frac{K(n, n+1)}{2K(n, n)} - a_{n-1} \frac{K(n-1, n)}{K(n, n)}, \end{cases} \quad (3.2.21)$$

или

$$b_n = \frac{K(n, n+1)}{2K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{2K(n-1, n-1)}. \quad (3.2.22)$$

Остальные уравнения системы (3.2.20) таковы, что $K(n, m)$ с ростом m будут удовлетворять им по очереди.

Уравнения (3.2.21) и (3.1.2) дают нам

$$e^{-(Q_n - Q_{n-1})} = \left[\frac{K(n, n)}{K(n-1, n-1)} \right]^2. \quad (3.2.23)$$

Далее, $P_n = \gamma_{n-1} - \gamma_n$ (см. (1.4.7)), и (3.2.22) дает

$$\gamma_n = - \frac{K(n, n+1)}{K(n, n)} \quad (3.2.24)$$

с точностью до аддитивной постоянной. Из (2.2.14) получим

$$e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} - 1 = \gamma_n \quad (3.2.25)$$

3.3. РАССЕЯНИЕ И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ [3.4, 6]

Так как (3.2.16) - дифференциальное уравнение второго порядка, его общее решение можно представить в виде линейной комбинации двух фундаментальных решений. В качестве фундаментальных решений мы выбираем две функции $\phi(n, z)$ и $\phi(n, z^{-1})$ с асимптотическим поведением:

$$\begin{cases} \phi(n, z) \rightarrow z^n & (n \rightarrow +\infty), \\ \phi(n, z^{-1}) \rightarrow z^{-n} & (n \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (3.3.1)$$

[множитель $\exp(-i\omega t)$ в (3.2.18) мы опустили]. Аналогично имеем решения (3.2.16) вида

$$\begin{cases} \psi(n, z) \rightarrow z^{-n} & (n \rightarrow -\infty), \\ \psi(n, z^{-1}) \rightarrow z^n & (n \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Запишем их через фундаментальные решения:

$$\begin{cases} \psi(n, z) = \alpha(z)\phi(n, z^{-1}) + \beta(z)\phi(n, z), \\ \psi(n, z^{-1}) = \alpha(z^{-1})\phi(n, z) + \beta(z^{-1})\phi(n, z^{-1}). \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Так как a_n и b_n в (3.2.16) зависят от времени, α и β также имеют временную зависимость. Обращая (3.3.3), запишем

$$\begin{cases} \phi(n, z) = \bar{\alpha}(z)\psi(n, z^{-1}) + \bar{\beta}(z)\psi(n, z), \\ \phi(n, z^{-1}) = \bar{\alpha}(z^{-1})\psi(n, z) + \bar{\beta}(z^{-1})\psi(n, z^{-1}). \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Следовательно, условия совместности имеют вид

$$\begin{cases} \alpha(z)\bar{\alpha}(z^{-1}) + \beta(z)\bar{\beta}(z) = 1, \\ \alpha(z)\bar{\beta}(z^{-1}) + \beta(z)\bar{\alpha}(z) = 0, \\ \alpha(z^{-1})\bar{\alpha}(z) + \beta(z^{-1})\bar{\beta}(z^{-1}) = 1, \\ \alpha(z^{-1})\bar{\beta}(z) + \beta(z^{-1})\bar{\alpha}(z^{-1}) = 0, \end{cases} \quad (3.3.5a)$$

$$\begin{cases} \bar{\alpha}(z)\alpha(z^{-1}) + \bar{\beta}(z)\beta(z) = 1, \\ \bar{\alpha}(z)\beta(z^{-1}) + \bar{\beta}(z)\alpha(z) = 0, \\ \bar{\alpha}(z^{-1})\alpha(z) + \bar{\beta}(z^{-1})\beta(z^{-1}) = 1, \\ \bar{\alpha}(z^{-1})\beta(z) + \bar{\beta}(z^{-1})\alpha(z^{-1}) = 0. \end{cases} \quad (3.3.5b)$$

Эти условия удовлетворяются, если положить

$$\begin{cases} \bar{\alpha}(z) = \alpha(z), & \bar{\beta}(z) = -\beta(z^{-1}), \\ \alpha(z)\alpha(z^{-1}) = 1 + \beta(z)\beta(z^{-1}). \end{cases} \quad (3.3.6a)$$

Кроме того, $\bar{\beta}(z^{-1}) = -\beta(z)$ и т.п.

При $|z| = 1$

$$|\alpha(z)|^2 = 1 + |\beta(z)|^2. \quad (3.3.6b)$$

Определим "функцию рассеяния" выражением

$$S(n, z) = \frac{\psi(n, z)}{\alpha(z)} = \phi(n, z^{-1}) + R(z)\phi(n, z), \quad (3.3.7)$$

где

$$R(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}. \quad (3.3.8)$$

$S(n, z)$ является решением (3.2.16) с асимптотическим поведением

$$\begin{cases} S(n, z) \rightarrow z^{-n} + R(z)z^n & (n \rightarrow +\infty), \\ S(n, z) \rightarrow z^{-n}/\alpha(z) & (n \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом: имеется исходная волна единичной амплитуды $z^{-n} = \exp(-ikn)$, распространяющаяся влево, отраженная волна $R(z)z^n$, распространяющаяся вправо, и прошедшая волна $z^{-n}/\alpha(z)$, которая движется влево. $R(z)$ есть амплитуда коэффициента отражения, а $1/\alpha(z)$ - амплитуда коэффициента прохождения; соотношение (3.3.6b) дает закон сохранения волн

$$\frac{1}{|\alpha(z)|^2} = 1 - |R(z)|^2. \quad (3.3.10)$$

Рассмотрим коэффициент прохождения, чтобы определить его связь со связанными состояниями. Сначала найдем $\alpha(z)$, исключая $\beta(z)$ из уравнений

$$\begin{cases} \psi(n, z) = \alpha(z) \phi(n, z^{-1}) + \beta(z) \phi(n, z), \\ \psi(n+1, z) = \alpha(z) \phi(n+1, z^{-1}) + \beta(z) \phi(n+1, z); \end{cases} \quad (3.3.11)$$

получим

$$\alpha(z) = [\psi(n, z) \phi(n+1, z) - \psi(n+1, z) \phi(n, z)] / W(n), \quad (3.3.12)$$

где

$$W(n) = \phi(n, z^{-1}) \phi(n+1, z) - \phi(n+1, z^{-1}) \phi(n, z). \quad (3.3.13a)$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$W(n) = \phi(n, z^{-1}) [\phi(n+1, z) - \phi(n, z)] - [\phi(n+1, z^{-1}) - \phi(n, z^{-1})] \phi(n, z). \quad (3.3.13b)$$

Очевидно, что $W(n)$ представляет собой дискретный аналог вронскиана функций $\phi(n, z^{-1})$ и $\phi(n, z)$. Исходя из общих свойств вронскианов, можно предположить, что $W(n)$ или не зависит от n , или имеет простую зависимость от n . Чтобы проверить это утверждение, исключим ϕ_n из уравнений

$$\begin{cases} a_{n-1} \phi(n-1, z^{-1}) + a_n \phi(n+1, z^{-1}) + \phi_n \phi(n, z^{-1}) = \\ \quad = \frac{z+z^{-1}}{2} \phi(n, z^{-1}), \\ a_{n-1} \phi(n-1, z) + a_n \phi(n+1, z) + \phi_n \phi(n, z) = \frac{z+z^{-1}}{2} \phi(n, z); \end{cases} \quad (3.3.14)$$

получим

$$W(n-1) a_{n-1} = W(n) a_n. \quad (3.3.15)$$

Таким образом,

$$W(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} W(n+1) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} W(n+2) = \dots = \frac{a_N}{a_n} W(N), \quad (3.3.16)$$

но при $N \rightarrow \infty$ $a_N = 1/2$, а из (3.3.13a) следует, что

$$W(N) \rightarrow z^{-N} z^{N+1} - z^{-(N+1)} z^N = z - z^{-1} \quad (N \rightarrow +\infty). \quad (3.3.17)$$

Значит,

$$W(n) = \frac{z - z^{-1}}{2a_n}, \quad (3.3.18)$$

так что $a_n W(n)$ не зависит от n .

Далее, подставляя (3.3.18) в (3.3.12), получаем

$$\Delta(z) = \frac{2a_n}{z + z^{-1}} [\psi(n, z) \phi(n+1, z) - \psi(n+1, z) \phi(n, z)]. \quad (3.3.19)$$

По смыслу $\Delta(z)$ правая часть (3.3.19) не должна зависеть от n (см. разд. 3.7).

Обозначим через z_j ($j = 1, 2, \dots$) нули $\Delta(z)$ в комплексной плоскости переменной z :

$$\Delta(z_j) = 0. \quad (3.3.20)$$

Тогда из (3.3.3) следует, что

$$\psi(n, z_j) = \beta(z_j) \phi(n, z_j). \quad (3.3.21)$$

$\psi(n, z) \rightarrow z^{-n}$ при $n \rightarrow -\infty$, а $\phi(n, z) \rightarrow z^n$ при $n \rightarrow +\infty$ для нулей z_j , которые удовлетворяют условию

$$|z_j| < 1; \quad (3.3.22)$$

поэтому

$$\psi(n, z_j) \sim \phi(n, z_j) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \pm \infty). \quad (3.3.23)$$

Таким образом, волновую функцию связанного состояния с нормировочной постоянной μ можно представить как

$$\zeta_j(n, z_j) = \mu \psi(n, z_j) = \mu \beta(z_j) \phi(n, z_j). \quad (3.3.24)$$

При $z = z_j$ величина $1/\Delta(z)$ обращается в бесконечность. Найдем вычет

$$\text{Res} \left\{ \frac{1}{\Delta(z)} \Big|_{z=z_j} \right\} = \frac{1}{d\Delta(z)/dz}. \quad (3.3.25)$$

Чтобы определить знаменатель в (3.3.25) при помощи (3.3.19), найдем сначала

$$\psi'(n, z) = \frac{d\psi(n, z)}{dz}. \quad (3.3.26)$$

Дифференцируя уравнение

$$a_{n-1}\psi(n-1, z) + a_n\psi(n+1, z) + b_n\psi(n, z) = \lambda\psi(n, z),$$

получаем для $\psi'(n, z)$

$$a_{n-1}\psi'(n-1, z) + a_n\psi'(n+1, z) + b_n\psi'(n, z) = \lambda\psi'(n, z) + \frac{d\lambda}{dz}\psi(n, z). \quad (3.3.27)$$

Если это соотношение объединить с уравнением

$$a_{n-1}\phi(n-1, z) + a_n\phi'(n+1, z) + b_n\phi(n, z) = \lambda\phi(n, z),$$

то для $\phi(n, z)$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dz}\psi(n, z)\phi(n, z) &= a_{n-1}[\psi'(n-1, z)\phi(n, z) - \psi'(n, z)\phi(n-1, z)] - \\ &- a_n[\psi'(n, z)\phi(n+1, z) - \psi'(n+1, z)\phi(n, z)]. \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Просуммируем (3.3.28) по всем n при $z = z_j$. Тогда с учетом (3.3.2, 22) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_j)}{dz_j} \sum_{n'=-\infty}^n \psi(n', z_j)\phi(n', z_j) &= \\ &= -a_n[\psi'(n, z_j)\phi(n+1, z_j) - \psi'(n+1, z_j)\phi(n, z_j)]. \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Отметим здесь, что, хотя производная $\psi'(n, z_j) = d\psi(n, z)/dz|_{z=z_j}$ при $n \rightarrow -\infty$ обращается в нуль, она может не обращаться в нуль при $n \rightarrow +\infty$.

Таким образом, используя $\phi'(n, z)$, найдем, что

$$\frac{d\lambda(z_j)}{dz_j} \sum_{n'=n+1}^{\infty} \psi(n', z_j) \phi(n', z_j) =$$

$$= a_n [\phi'(n, z_j) \psi(n+1, z_j) - \phi'(n+1, z_j) \psi(n, z_j)]. \quad (3.3.30)$$

В данном же случае, хотя производная $\phi'(n, z_j) = d\phi(n, z)/dz|_{z=z_j}$ и обращается в нуль при $n \rightarrow +\infty$, она может не обращаться в нуль при $n \rightarrow -\infty$.

Сложим (3.3.29) и (3.3.30) и воспользуемся выражением (3.3.19); тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_j)}{dz_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(n, z_j) \phi(n, z_j) &= -a_n \frac{d}{dz} [\psi(n, z) \phi(n+1, z) - \\ &\quad - \psi(n+1, z) \phi(n, z)]_{z=z_j} = \\ &= -\frac{d}{dz} \left[\frac{z - z^{-1}}{2} \lambda(z) \right]_{z=z_j} = \\ &= -\frac{z_j - z_j^{-1}}{2} \frac{d\lambda(z)}{dz} \Big|_{z=z_j}, \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

где

$$\frac{d\lambda(z_j)}{dz_j} = \frac{z_j - z_j^{-1}}{2z_j}, \quad (3.3.32)$$

так как $\lambda = (z + z^{-1})/2$.

Таким образом, с помощью (3.3.24) найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z)}{dz} \Big|_{z=z_j} &= -\frac{1}{z_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi(n, z_j) \phi(n, z_j) = \\ &= -\frac{1}{z_j^2 \beta(z_j)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\zeta(n, z_j)]^2. \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Пронормируем (3.3.24) посредством соотношения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\zeta_j(n, z_j)]^2 = 1 \quad (3.3.34)$$

и представим асимптотический вид как

$$\zeta_j(n, z_j) \rightarrow c_j z_j^n \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (3.3.35)$$

Тогда из (3.3.24) найдем выражение для нормировочного коэффициента

$$c_j = \mu \beta(z_j). \quad (3.3.36)$$

В итоге получим выражение

$$\left. \frac{d\alpha(z)}{dz} \right|_{z=z_j} = - \frac{\beta(z_j)}{z_j c_j^2}, \quad (3.3.37)$$

которое не обращается в нуль. Следовательно, $z=z_j$ — это простой корень с вычетом

$$\text{Res} \left\{ \left. \frac{1}{\alpha(z)} \right|_{z=z_j} \right\} = - \frac{z_j c_j^2}{\beta(z_j)}. \quad (3.3.38)$$

3.4. УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА

Умножим уравнение (3.3.37) для функции рассеяния на z^{m-1} ($m \geq n$) и проинтегрируем по окружности вокруг начала координат в комплексной плоскости z . Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\psi(n, z)}{\alpha(z)} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint [\phi(n, z^{-1}) + R(z)\phi(n, z)] z^{m-1} dz. \quad (3.4.1)$$

Перепишем обе части уравнения (3.4.1) так, чтобы получить уравнение для $K(n, n')$ из (3.2.19).

Прежде чем преобразовать выражение в правой части (3.4.1), напомним, что для $|z| \leq 1$

$$\phi(n, z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'}. \quad (3.4.2)$$

Затем с помощью теоремы Коши о вычетах получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \phi(n, z^{-1}) z^{m-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') \oint z^{-n'+m-1} dz = \\ &= K(n, m) \quad (m \geq n). \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Заметив, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint R(z) \phi(n, z) z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') \oint R(z) z^{n'+m-1} dz,$$

получим, что правая часть (3.4.1) равна

$$K(n, m) + \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') F'_c(n'+m), \quad (3.4.4)$$

где F'_c представляет собой вклад от непрерывного спектра z и определяется как

$$F'_c(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} dz. \quad (3.4.5)$$

С другой стороны, интеграл вдоль единичной окружности вокруг начала координат в левой части (3.4.1) есть

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\psi(n, z)}{\lambda(z)} z^{m-1} dz = I_\lambda + I_0, \quad (3.4.6)$$

где I_λ - вклад от полюсов z_j ($z_j \neq 0$), а I_0 - вклад от полюса $z = 0$. Так как вычет в z_j определяется формулой (3.3.38), то с учетом (3.3.26)

$$\begin{aligned} I_\lambda &= - \sum_j \psi(n, z_j) z_j^{m-1} \frac{z_j c_j^2}{\beta(z_j)} = - \sum_j \phi(n, z_j) z_j^m c_j^2 = \\ &= - \sum_j c_j^2 \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z_j^{n'+m} \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Что касается полюса $\psi(n, z) z^{m-1}$, то вспомним, что

$$S(n, z) = \frac{\varphi(n, z)}{d(z)} = \phi(n, z^{-1}) + R(z)\phi(n, z). \quad (3.4.8)$$

Функция $S(n, z)z^{m-1}$ может иметь полюс при $z = 0$ из-за наличия первого слагаемого в правой части (3.4.8) (см. задачу 3.1). Чтобы непосредственно проверить это предположение, оценим $S(n, z)$ при $z \approx 0$, используя уравнение

$$a_{n-1}S(n-1, z) + a_n S(n+1, z) + b_n S(n, z) = \frac{z+z^{-1}}{2} S(n, z). \quad (3.4.9)$$

Правая часть содержит множитель z^{-1} . Следовательно, при $z \approx 0$

$$a_n S(n+1, z) \approx \frac{1}{2z} S(n, z) \quad (z \approx 0). \quad (3.4.10)$$

Таким образом, для $z \approx 0$

$$S(n, z) \approx 2z a_n S(n+1, z) \approx \dots \approx (2z)^N a_n a_{n+1} \dots a_{n+N-1} S(n+N, z). \quad (3.4.11)$$

Воспользовавшись (3.2.21), $a_n = K(n+1, n+1)/2K(n, n)$ и вспомнив (3.3.9), для $N \gg 1$ получим

$$S(N, z) \approx z^{-N} \quad (z \approx 0, N \gg 1). \quad (3.4.12)$$

Воспользовавшись далее асимптотическим видом $\phi(n, z)$, имеем

$$K(\infty, \infty) = 1. \quad (3.4.13)$$

Эти результаты приводят нас к

$$S(n, z) \approx \frac{1}{K(n, n)} z^{-n} \quad (z \approx 0). \quad (3.4.14)$$

Следовательно, когда $-n+m-1 = -1$, т.е. когда $n = m$, полюс $z = 0$ дает вклад I_0 в (3.4.6). Так как $m \geq n$, то члены $z^{-\nu}$ с $\nu < n$ не дают вклада в $S(n, z)$. Таким образом,

$$I_0 = \frac{1}{K(n, n)} \delta(n, m) \quad (m \geq n), \quad (3.4.15)$$

и для левой части (3.4.1) получим выражение

$$\frac{1}{K(n, n)} \delta(n, m) - \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') F'_b(n'+m) \quad (m \geq n), \quad (3.4.16)$$

где F_ℓ определяет вклад связанных состояний

$$F_\ell(m) = \sum_j c_j^2 z_j^m \quad (3.4.17)$$

Следовательно, (3.4.1) принимает вид

$$\frac{1}{K(n,n)} \delta(n,m) = K(n,m) + \sum_{n'=n}^{\infty} K(n,n') F(n'+m) \quad (m \geq n), \quad (3.4.18)$$

где

$$F(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} dz + \sum_j c_j^2 z_j^m. \quad (3.4.19)$$

Это уравнение представляет собой дискретное уравнение Гельфанда - Левитана (ГЛ) (его иногда называют уравнением Гельфанда-Левитана-Марченко). В принципе, если мы решим (3.4.19) с заданным ядром $F(m)$ и определим $K(n,m)$, то движение цепочки определится из соотношений (3.2.19) или (3.2.20). Хотя уравнение (3.4.19) нелинейно относительно $K(n,m)$ из-за левой части, его можно легко линеаризовать следующим способом.

Для недиагональных элементов $K(n,m)$

$$x(n,m) = \frac{K(n,m)}{K(n,n)} \quad (m > n). \quad (3.4.20)$$

Тогда для недиагональных элементов уравнение ГЛ (3.4.18) принимает вид

$$x(n,m) + F(n+m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} x(n,n') F(n'+m) = 0. \quad (3.4.21)$$

Это уравнение линейно относительно $x(n,m)$ и в принципе может быть решено. Когда мы таким образом найдем $x(n,m)$, то диагональные элементы $K(n,n)$ получим из (3.4.18) для $n=m$:

$$\frac{1}{[K(n,n)]^2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} x(n,n') F(n'+m). \quad (3.4.22)$$

3.5. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ [3.3]

Мы убедились, что цепочка с экспоненциальным взаимодействием описывается уравнениями (3.2.3, 4) и что (3.2.3) сводится к линейным уравнениям (3.4.21, 22). Если определить из (3.2.4) зависимость от времени ядра $F^1(m)$ дискретного интегрального уравнения (3.4.21), то можно решить начальную задачу. В предыдущем разделе мы записывали асимптотику функции рассеяния (3.3.9), опуская временной множитель в (3.2.18). Теперь мы восстановим множитель $\exp(-i\omega t)$, записывая падающую волну, т.е. первый член z^{-n} в (3.3.9), а также включим временную зависимость в коэффициент $R(z, t)$. Тогда асимптотика (3.3.9) примет вид

$$S(n, z, t) \rightarrow [z^{-n} + R(z, t)z^n]e^{-i\omega t} \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (3.5.1a)$$

где в соответствии с (3.2.10)

$$-i\omega = \frac{z - z^{-1}}{2}. \quad (3.5.2)$$

Поскольку $S(n, z, t)$ — волновая функция, ее временная зависимость определяется из (3.2.4) как

$$\frac{d}{dt} S(n, z, t) = a_{n-1} S(n-1, z, t) - a_n S(n+1, z, t). \quad (3.5.3)$$

С другой стороны, ее асимптотический вид при $n \rightarrow +\infty$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(n, z, t) &\rightarrow \frac{1}{2} \left[(z^{-n+1} - z^{-n-1}) + R(z, t)(z^{n-1} - z^{n+1}) \right] e^{-i\omega t} = \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2} [z^{-n} - R(z, t)z^n] e^{-i\omega t} \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Оно должно совпадать с результатом непосредственного дифференцирования по времени:

$$\frac{d}{dt} S(n, z, t) \rightarrow \dot{R}(z, t)z^n e^{-i\omega t} - i\omega [z^{-n} + R(z, t)z^n] e^{-i\omega t} \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (3.5.5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\dot{R}(z, t) &= \left(\frac{z^{-1} - z}{2} + i\omega \right) R(z, t) = \\ &= (z^{-1} - z) R(z, t).\end{aligned}\quad (3.5.6)$$

Следовательно, зависимость от времени коэффициента отражения определяется как

$$R(z, t) = \frac{\beta(z, t)}{\alpha(z, t)} = R(z, 0) e^{(z^{-1} - z)t}. \quad (3.5.7)$$

Аналогичные вычисления для $\psi(n, z, t)$ дают ($n \rightarrow +\infty$)

$$\psi(n, z, t) = \alpha(z, t) S(n, z, t) \rightarrow [\alpha(z, t) z^{-n} + \beta(z, t) z^n] e^{-i\omega t}, \quad (3.5.15)$$

что позволяет определить

$$\begin{cases} \alpha(z, t) = \alpha(z, 0), \\ \beta(z, t) = \beta(z, 0) e^{(z^{-1} - z)t}. \end{cases} \quad (3.5.8)$$

Для связанного состояния имеем единственное асимптотическое слабое, и вся временная зависимость может быть включена в нормировочный коэффициент c_j . Таким образом,

$$\zeta_j(n, z_j, t) \rightarrow c_j(t) z_j^n. \quad (3.5.9)$$

Далее, из уравнения

$$\frac{d}{dt} \zeta_j(n, z_j, t) = a_{n-1} \zeta_j(n-1, z_j, t) - a_n \zeta_j(n+1, z_j, t) \quad (3.5.10)$$

мы можем дать асимптотическую оценку

$$\dot{c}_j = \frac{z_j^{-1} - z_j}{2} c_j; \quad (3.5.11)$$

она приводит к результату

$$c_j(t) = c_j(0) e^{(z_j^{-1} - z_j)t/2}. \quad (3.5.12)$$

Рассматривая (3.5.7, 12), мы получим зависящее от времени ядро уравнения ГЛ в виде

$$F(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z, 0) e^{(z^{-1} - z)t} z^{m-1} dz + \sum_j c_j^2(0) e^{(z_j^{-1} - z_j)t} z_j^m \quad (3.5.13)$$

Если заданы значения $a_n(0)$ и $b_n(0)$, тогда, решая задачу рассеяния — линейное уравнение (3.2.3) с граничными условиями (3.3.9), — мы найдем начальное значение коэффициента отражения $R(z, 0)$ и начальное значение нормировочного коэффициента $c_j(0)$. Зная начальные данные рассеяния, мы можем построить ядро (3.5.13) и решить линейное дискретное интегральное уравнение (уравнение ГЛ) (3.4.18) для $x(n, m)$. Затем получим $K(n, m)$, и уравнения (3.2.23–25) дадут решение задачи с начальными условиями. Таким образом задача о распространении нелинейных волн в цепочке сведена к линейной задаче и, следовательно, в принципе может быть решена.

3.6. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ [3.4]

Если коэффициент отражения равен нулю в начальный момент времени $[R(z, 0) = 0]$, он остается равным нулю на всех временах $[R(z, t) = 0]$. В этом разделе мы рассмотрим случай $R(z, 0) = 0$ и найдем солитонные решения, которые характеризуются z_j -нулями $a(z)$ и нормировочными коэффициентами $c_j(0)$. Сначала обсудим случай одного нуля, z_1 , который запишем как

$$z_1 = \pm e^{-\gamma} = \text{Вещественное число}. \quad (3.6.1)$$

Так как мы полагали, что $|z_1| < 1$, имеем $\gamma > 0$. Однако существуют две возможности: $z_1 > 0$ и $z_1 < 0$. Нормировочный коэффициент, соответствующий z_1 , можно записать в соответствии с (3.5.12) как

$$c_1 = c_1(0) e^{\beta t}, \quad (3.6.2)$$

где

$$\beta = \frac{z_1^{-1} - z_1}{2} = \pm i h \gamma. \quad (3.6.3)$$

Ядро уравнения ГЛ в этом случае имеет вид

$$F(m) = c_1^2 z_1^m, \quad (3.6.4)$$

а само уравнение ГЛ сводится к

$$x(n, m) + c_1^2 z_1^{n+m} + c_1^2 z_1^m \sum_{n'=n+1}^{\infty} x(n, n') z_1^{n'} = 0. \quad (3.6.5)$$

Если мы имеем решение в виде

$$x(n, m) = c_1 A^{(n)} z_1^m, \quad (3.6.6)$$

то после подстановки в (3.6.5) получим

$$A^{(n)} = - \frac{c_1 z_1^n}{1 + e^{2\delta} z_1^{2(n+1)}}, \quad (3.6.7)$$

где

$$\begin{cases} e^{\delta} = \frac{c_1(t)}{\sqrt{1 - z_1^2}} = e^{\delta_0 + \beta t}, \\ e^{\delta_0} = \frac{c_1(0)}{\sqrt{1 - z_1^2}}. \end{cases} \quad (3.6.8)$$

Затем, используя (3.4.22), получаем

$$\begin{aligned} [K(n, n)]^{-2} &= 1 + c_1^2 z_1^{2n} + c_1^3 A^{(n)} z_1^n \sum_{n'=n+1}^{\infty} z_1^{2n'} = \\ &= \frac{1 + e^{2\delta} z_1^{2n}}{1 + e^{2\delta} z_1^{2(n+1)}} = \frac{1 + e^{2\delta - 2n\gamma}}{1 + e^{2\delta - 2(n+1)\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

Попутно заметим, что

$$\begin{cases} [K(n, n)]^2 \rightarrow 1 & (n \rightarrow +\infty), \\ [K(n, n)]^2 \rightarrow \chi_1^{-2} & (n \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (3.6.10)$$

Уравнения (3.2.23, 3.6.2, 8) дают

$$\begin{aligned} e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 &= \left[\frac{K(n, n)}{K(n-1, n-1)} \right]^2 - 1 = \\ &= \frac{(e^{\gamma} - e^{-\gamma})^2}{(e^{\gamma n - \delta} + e^{-\gamma n + \delta})^2} = \\ &= \beta^2 \, \text{sh}^2(\gamma n - \beta t - \delta_0), \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

что является солитонным решением (2.4.5). Солитон движется вправо, если $\beta > 0$ ($\chi_1 > 0$), и влево, если $\beta < 0$ ($\chi_1 < 0$).

$\mathcal{N}$ -солитонное решение имеет место, когда $R(\chi) = 0$ и имеется спектр из $\mathcal{N}$ связанных состояний χ_j ($j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$). В этом случае ядро уравнения ГЛ имеет вид

$$F(m) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j^2 \chi_j^m, \quad (3.6.12)$$

а само уравнение ГЛ сводится к

$$\dot{x}(n, m) + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j^2 \chi_j^{n+m} + \sum_{n'=1}^{\infty} \dot{x}(n, n') \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j^2 \chi_j^{n'+m} = 0 \quad (m > n). \quad (3.6.13)$$

Решение этого уравнения можно получить, положив

$$x(n, m) = \sum_j c_j A_j^{(n)} \chi_j^m, \quad (3.6.14)$$

что после подстановки в уравнение ГЛ дает

$$\sum_j c_j z_j^m (A_j^{(n)} + c_j z_j^n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_j^2 z_j^{n'+m} c_i A_i^{(n)} z_i^{n'} =$$

$$= \sum_j c_j z_j^m \left[A_j^{(n)} + c_j z_j^n + \sum_{i=1}^N c_i c_j A_i^{(n)} \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j} \right] = 0. \quad (3.6.15)$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^N \left[\delta_{ij} + c_i c_j \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j} \right] A_i^{(n)} = -c_j z_j^n \quad (j = 1, 2, \dots, N); \quad (3.6.16)$$

решив систему уравнений для $A_j^{(n)}$, получим

$$A_i^{(n)} = \frac{\det B(n)^{(i)}}{\det B(n)}, \quad (3.6.17)$$

где $B(n)$ — симметричная матрица, элементы которой имеют вид

$$[B(n)]_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}, \quad (3.6.18)$$

а $B(n)^{(i)}$ представляет собой матрицу, получающуюся заменой i -го столбца в $B(n)$ на $-(c_1 z_1^n, \dots, c_N z_N^n)^T$.

Тогда (3.4.22) принимает вид

$$[K(n, n)]^{-2} = 1 + \sum_j c_j^2 z_j^{2n} + \sum_i \sum_j c_i c_j A_i^{(n)} z_j^n \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}. \quad (3.6.19)$$

С другой стороны, если мы умножим уравнение (3.6.16) на $c_j z_j^n$ и просуммируем по всем j , то получим

$$\sum_j c_j A_j^{(n)} z_j^n + \sum_j c_j^2 z_j^{2n} + \sum_i \sum_j c_i c_j A_i^{(n)} z_j^n \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j} = 0. \quad (3.6.20)$$

Следовательно, (3.6.19) упрощается:

$$[K(n, n)]^{-2} = 1 - \sum_{j=1}^N c_j A_j^{(n)} z_j^n. \quad (3.6.21)$$

Преобразуем правую часть этого уравнения. Во-первых, заметим, что

$$\begin{cases} [B(n-1)]_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j \frac{(z_i z_j)^n}{1 - z_i z_j}, \\ [B(n)]_{ij} = \delta_{ij} + c_i c_j \frac{(z_i z_j)^n}{1 - z_i z_j} z_i z_j, \end{cases} \quad (3.6.22)$$

а также

$$[B(n-1) - B(n)]_{ij} = c_i z_i^n \cdot c_j z_j^n. \quad (3.6.23)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det B(n-1) &= \det \left\{ [B(n)]_{ij} + c_i z_i^n \cdot c_j z_j^n \right\} = \\ &= \begin{vmatrix} B_{11} + c_1 z_1^n \cdot c_1 z_1^n & B_{12} + c_1 z_1^n \cdot c_2 z_2^n & \dots \\ B_{21} + c_2 z_2^n \cdot c_1 z_1^n & B_{22} + c_2 z_2^n \cdot c_2 z_2^n & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

$$= \det B(n) + c_1 z_1^n \begin{vmatrix} c_1 z_1^n & B_{12} & B_{13} & \dots \\ c_2 z_2^n & B_{22} & B_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} +$$

$$+ c_2 z_2^n \begin{vmatrix} B_{11} & c_1 z_1^n & B_{13} & \dots \\ B_{21} & c_2 z_2^n & B_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \det B(n) - \sum_j c_j z_j^n \det B(n)^{(j)} = \\
&= \det B(n) \left(1 - \sum_j c_j z_j^n A_j^{(n)} \right),
\end{aligned}$$

и поэтому

$$[K(n, n)]^{-2} = \frac{\det B(n-1)}{\det B(n)}. \quad (3.6.25)$$

Следовательно, с помощью (3.2.23) можно получить

$$\begin{aligned}
e^{-(Q_n - Q_{n-1})} &= \left[\frac{K(n, n)}{K(n-1, n-1)} \right]^2 = \\
&= \frac{\det B(n) \det B(n-2)}{[\det B(n-1)]^2}.
\end{aligned} \quad (3.6.26)$$

Вспомнив (1.4.18), т.е. взяв

$$Q_{n+1} - Q_n = -S_{n+1} - 2S_n - S_{n-1}, \quad (3.6.27)$$

имеем

$$S_n = \ln \det B(n) + \text{Член, линейный по } n. \quad (3.6.28)$$

Далее, используя (1.4.7), получаем

$$P_n = \text{const} + \frac{d}{dt} \ln \frac{\det B(n-1)}{\det B(n)}. \quad (3.6.29)$$

Здесь, в элементах матрицы $B(n)$ из (3.6.18), зависимость от времени коэффициентов дается соотношениями

$$\begin{cases} c_j = c_j(0) e^{\beta_j t}, \\ \beta_j = \pm i\hbar \gamma_j \end{cases} \quad (3.6.30)$$

и

$$z_j = e^{-\gamma_j}. \quad (3.6.31)$$

Заметим, что аналогичные вычисления определителей в случае уравнения Шредингера были выполнены в работе Кея и Мозеса [3.5a].

Задача 3.1. Покажите, что при наличии солитона выполняется равенство

$$\phi(n, z) = K(n, n) z^n \left[1 + c_1 \hbar^{(n)} \frac{z_1^{n+1}}{z^{-1} - z_1} \right],$$

так что ($z = e^{ik}$, z_1 вещественно, $|z_1| < 1$)

$$\phi(n, z^{-1}) \longrightarrow e^{-ikn} \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$\phi(n, z^{-1}) \longrightarrow e^{-ikn - i\eta} \quad (n \rightarrow -\infty),$$

где

$$e^{-i\eta} = \frac{1}{d(z)} = \frac{1 - z_1 z}{z_1 - z},$$

а для $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned} \phi(n, z) &= K(n, n) \left[z^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} c_1 \hbar^{(n)} z_1^m z^m \right] = \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} K(n, m) z^m, \end{aligned}$$

где [ср. (3.6.6)]

$$K(n, m) = K(n, n) k(n, m) = \\ = K(n, n) c_1 A^{(n)} z_1^m.$$

Далее, используя (3.6.9, 7), убедитесь, что

$$[K(n, n)]^{-2} = 1 - c_1 A^{(n)} z_1^n$$

и что для $z \rightarrow 0$ [ср. (3.4.14)]

$$\phi(n, z^{-1}) \approx K(n, n) z^{-n} (1 - c_1 A^{(n)} z_1^n) = \\ = \frac{1}{K(n, n)} z^{-n}.$$

Задача 3.2. Покажите, что при наличии солитона собственная функция связанного состояния имеет вид

$$\zeta(n_1 z_1) = c_1 \phi(n, z_1),$$

где

$$\phi(n, z_1) = K(n, n) z_1^n \left[1 + c_1 A^{(n)} z_1^n \frac{z_1^2}{1 - z_1^2} \right],$$

так что

$$\zeta(n, z_1) = (\pm)^n c_1(0) e^{-\delta_0} \frac{e^\delta}{2} K(n, n) \operatorname{sh} [\gamma(n+1) - \rho t - \delta_0] \\ (z_1 = \pm e^{-\delta})$$

и

$$\zeta(n, z_1) \rightarrow \begin{cases} c_1(0) z_1^n e^{\rho t} & (n \rightarrow +\infty), \\ c_1(0) e^{-2\delta_0} z_1^{-n-1} e^{-\rho t} & (n \rightarrow -\infty). \end{cases}$$

Замечание 1. Сравните (3.2.12-14) со случаем, описанным выше.

Замечание 2. Если $z_1 > 0$ (солитон движется вправо), то $\zeta(n, z)$ асимптотически монотонно затухает, в то время как, если $z_1 < 0$ (солитон движется влево), данная функция, затухая, осциллирует. Эта асимметрия несущественна и может быть устранена посредством использования комплексной эрмитовой матрицы L [3.6].

Задача 3.3. При наличии солитона из (3.6.18) следует

$$B(n) = 1 + c_1^2 \frac{z^{2(n+1)}}{1 - z^2}.$$

Сравнивая (3.6.28) и (2.4.4), показать, что

$$B(n) = 1 + A e^{-2(\gamma n - \beta t)},$$

где A - константа.

3.7. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ВЕЛИЧИНАМИ И КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРОХОЖДЕНИЯ

Сохраняющиеся величины, разумеется, связаны не только с коэффициентом прохождения, но и с другими величинами. Детальное обсуждение этих соотношений было бы весьма громоздким, поэтому мы остановимся только на связи с коэффициентом прохождения $[L(z)]^{-1}$ [3.4].

Сначала перепишем (3.2.1) для $\phi_n = \phi(n)$ и $\psi_n = \psi(n)$ как

$$\begin{cases} \sum_{n'} L_{nn'} \phi_{n'} = \lambda \phi_n, & \phi_n \rightarrow z^n \quad (n \rightarrow +\infty), \\ \sum_{n'} L_{nn'} \psi_{n'} = \lambda \psi_n, & \psi_n \rightarrow z^{-n} \quad (n \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (3.7.1)$$

или

$$\begin{cases} a_{n-1} \phi_{n-1} + a_n \phi_{n+1} + b_n \phi_n = \lambda \phi_n, \\ a_{n-1} \psi_{n-1} + a_n \psi_{n+1} + b_n \psi_n = \lambda \psi_n. \end{cases} \quad (3.7.2)$$

Если первое из этих уравнений умножить на $-\psi_n$, а второе - на ϕ_n и сложить их, то получится

$$\begin{aligned}
 w &\equiv a_{n-1}(\psi_{n-1}\phi_n - \psi_n\phi_{n-1}) = \\
 &= a_n(\psi_n\phi_{n+1} - \psi_{n+1}\phi_n).
 \end{aligned}
 \tag{3.7.3}$$

Величина w не зависит от n и является дискретным вронскианом (умноженным на a_n), уже встречавшимся нам в (3.3.19). Таким образом, имеем соотношение

$$w = \frac{\Delta(z)}{2} (z - z^{-1}). \tag{3.7.4}$$

Перепишем теперь w , воспользовавшись первым уравнением (3.7.2):

$$w = a_{n-1}\psi_{n-1}\phi_n + (a_n\phi_{n+1} + b_n\phi_n - \lambda\phi_n)\psi_n. \tag{3.7.5}$$

С другой стороны, умножив первое уравнение (3.7.2) на ψ_m , получим

$$a_{n-1}\phi_{n-1}\psi_m + (a_n\phi_{n+1} + b_n\phi_n - \lambda\phi_n)\psi_m = 0, \tag{3.7.6}$$

а умножив второе уравнение на ϕ_m , -

$$a_{n-1}\psi_{n-1}\phi_m + (a_n\psi_{n+1} + b_n\psi_n - \lambda\psi_n)\phi_m = 0. \tag{3.7.7}$$

Таким образом, если мы введем определение

$$G_{n,m} = G(z, n, m) \begin{cases} \frac{\psi_n\phi_m}{w} & (n \leq m), \\ \frac{\phi_n\psi_m}{w} & (n \geq m), \end{cases} \tag{3.7.8}$$

то (3.7.5) примет вид

$$a_{n-1}G_{n-1,n} + a_nG_{n+1,n} + b_nG_{n,n} - \lambda G_{n,n} = 1, \tag{3.7.9}$$

а (3.7.6) для $n-1 \leq m$ и (3.7.7) для $n+1 \leq m$ можно будет объединить:

$$\begin{aligned}
 a_{n-1}G_{n-1,m} + a_nG_{n+1,m} + b_nG_{n,m} - \lambda G_{n,m} &= 0 \quad (n \neq m). \\
 &\tag{3.7.10}
 \end{aligned}$$

В свою очередь эти соотношения можно представить в виде

$$\sum_{n'} L_{nn'} G_{n'm} - \lambda G_{n,m} = \delta_{nm} \quad (3.7.11)$$

или, в матричной форме,

$$(L - \lambda I)G = I, \quad (3.7.12)$$

где I - единичная матрица. Таким образом, видно, что G - это функция Грина оператора $L - \lambda I$.

Возвращаясь к (3.7.1), обозначим n -компоненту индексом n и получим

$$(L - \lambda I)\psi|_n = 0, \quad \lambda = \frac{z + z^{-1}}{2}. \quad (3.7.13)$$

Если мы продифференцируем это уравнение по z , то

$$(L - \lambda I)\dot{\psi}|_n = a_{n-1}\dot{\psi}_{n-1} + a_n\dot{\psi}_{n+1} + b_n\dot{\psi}_n - \lambda\dot{\psi}_n = \frac{1-z^2}{2}\dot{\psi}_n \quad (3.7.14)$$

($\dot{\psi}_n = d\psi_n/dz$ и т.д.).

Полученное уравнение умножим на $\dot{\psi}_n$ и прибавим к нему уравнение

$$(L - \lambda I)\phi|_n = a_{n-1}\phi_{n-1} + a_n\phi_{n+1} + b_n\phi_n - \lambda\phi_n = 0, \quad (3.7.15)$$

умноженное на $\dot{\psi}_n$; тогда

$$U_{n-1} - U_n = \frac{1-z^{-2}}{2} \dot{\psi}_n \phi_n, \quad (3.7.16)$$

где

$$U_n = a_n (\phi_{n+1}\dot{\psi}_n - \phi_n\dot{\psi}_{n+1}). \quad (3.7.17)$$

Далее, проведем суммирование по n от $-N+1$ до N :

$$\sum_{n=-N+1}^N \phi_n \dot{\psi}_n = \frac{2}{z^{-2} - 1} (U_N - U_{-N}). \quad (3.7.18)$$

Используя зависимости (3.3.1 - 4), получим оценку для $N \gg 1$:

$$U_N = \frac{1}{2} \left\{ -\beta z^{2N} + [-N + (N+1)z^{-2}] \underline{\lambda} + (z - z^{-1}) \underline{\lambda} \right\},$$

$$U_{-N} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\beta} z^{2N-2} + [N - (N-1)z^{-2}] \bar{\underline{\lambda}} \right\}, \quad (3.7.19)$$

где $\bar{\underline{\lambda}} = \underline{\lambda}$ в силу (3.3.6). Таким образом, при

$$|z| < 1 \quad (3.7.20)$$

и при $N \gg 1$ имеем

$$\sum_{n=-N+1}^N \phi_n \tau_n = 2N \underline{\lambda} - z \underline{\lambda}. \quad (3.7.21)$$

Теперь обозначим через L_0 значение $\bar{L}$ при $a_n = 1/2$ и $b_n = 0$, а через G^0 - соответствующее значение G . Тогда

$$G^0(z, n, m) = \begin{cases} \frac{z^{-n+m}}{w_0} & (n \leq m), \\ \frac{z^{-m+n}}{w'_0} & (n \geq m), \end{cases} \quad (3.7.22)$$

где

$$w_0 = \frac{z - z^{-1}}{2}. \quad (3.7.23)$$

Обращая (3.7.12), запишем резольвенту в виде

$$\begin{cases} G = \frac{I}{L - \lambda I} \equiv R_\lambda, \\ G^0 = \frac{I}{L_0 - \lambda I} \equiv R_\lambda^0. \end{cases} \quad (3.7.24)$$

Сумма диагональных элементов равна

$$\begin{aligned} Sp(R_\lambda - R_\lambda^0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [G(z, m, m) - G^0(z, m, m)] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\psi(z, m) \phi(z, m)}{w} - \frac{1}{w_0} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{(z-z^{-1})\lambda(z)} \psi(z, m) \phi(z, m) - \frac{2}{z-z^{-1}} \right] = \\
&= \frac{2z}{(z^2-1)\lambda(z)} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=-N+1}^N [\psi(z, m) \phi(z, m) - \lambda(z)] = \\
&= -\frac{2z^2}{z^2-1} \frac{\dot{\lambda}(z)}{\lambda(z)} = \\
&= -\frac{d}{d\lambda} \ln \lambda(z); \tag{3.7.25}
\end{aligned}$$

здесь мы воспользовались (3.7.21).

Чтобы проинтегрировать (3.7.25), разложим левую часть равенства по степеням λ^{-1} :

$$\begin{aligned}
Sp(R_\lambda - R_\lambda^0) &= Sp\{(L - \lambda I)^{-1} - (L_0 - \lambda I)^{-1}\} = \\
&= -\frac{1}{\lambda} Sp\left\{\left(1 + \frac{L}{\lambda} + \frac{L^2}{\lambda^2} + \dots\right) - \left(1 + \frac{L_0}{\lambda} + \frac{L_0^2}{\lambda^2} + \dots\right)\right\} = \\
&= -Sp\left\{\frac{L - L_0}{\lambda^2} + \frac{L^2 - L_0^2}{\lambda^3} + \dots\right\}. \tag{3.7.26}
\end{aligned}$$

Интегрируя (3.7.25) по λ от $-\infty$ до λ , получаем

$$-\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\lambda^p} Sp\{L^p - L_0^p\} = \ln \frac{\lambda(z)}{\lambda(0)}. \tag{3.7.27}$$

Как мы видим из (3.5.8), $\lambda(z)$ не зависит от времени. Следовательно, коэффициенты при λ^{-p} в разложении $\ln \lambda(z)$ дают сохраняющиеся величины $Sp\{L^p - L_0^p\}$. Коэффициенты в разложении $\ln \lambda(z)$ по степеням z также являются сохраняющимися величинами. Это можно непосредственно показать следующим образом.

Воспользуемся формулой Пуассона-Йенсена:

$$\ln |\lambda(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\lambda(e^{i\varphi})| \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\varphi+z}}{e^{i\varphi-z}} \right\} d\varphi + \sum_{j=0}^N \ln \left| \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z} \right|, \tag{3.7.28}$$

которая имеет место для $|z| < 1$. Здесь z_j ($j = 1, 2, \dots, N$) являются нулями $\Delta(z)$. В интервале $-1 < z < 1$ коэффициент $\Delta(z)$ веществен, так что $\ln |\Delta(z)| = \ln \Delta(z)$. Для $|z| = 1$ из (3.3.10) имеем

$$|\Delta(z)|^{-2} = 1 - |R(z)|^2. \quad (3.7.29)$$

Следовательно, если мы перепишем левую часть равенства (3.7.28) в виде

$$\ln |\Delta(z)| = \ln |\Delta(0)| + \sum_{p=1}^{\infty} K_p z^p, \quad (3.7.30)$$

то K_p будут сохраняющимися величинами, определяющимися из разложения правой части равенства (3.7.28)

$$K_p = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 - |R(e^{i\psi})|^2) \cos(p\psi) d\psi + \sum_{j=0}^N \frac{1}{p} (z_j^p - \bar{z}_j^{-p}) \quad (p \neq 0). \quad (3.7.31)$$

В правой части данного равенства первый член соответствует непрерывному спектру, а второй - дискретному.

Задача 3.4. Используя равенство $\lambda = (z + z^{-1})/2$, из (3.7.27) можно получить соотношение

$$\ln \frac{\Delta(z)}{\Delta(0)} = -2 Sp \{L - L_0\} \cdot z + 2 Sp \{L^2 - L_0^2\} \cdot z^2 + \dots$$

Убедитесь, что сохраняющиеся величины, определяемые коэффициентами разложения, равны

$$-2 Sp \{L - L_0\} = -2 \sum b_n = \sum P_n = P,$$

$$2 Sp \{L^2 - L_0^2\} = \sum [(4a_n^2 - 1) + 2b_n^2] = E,$$

где P - полный импульс, а E - полная энергия:

$$E = \frac{1}{2} \sum_n P_n^2 + \sum_n (e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} - 1).$$

Указание:

$$\lambda^{-1} = \frac{2x}{1+x^2} = 2x(1-x^2+\dots).$$

Задача 3.5. Для солитона [ср. разд. 3.6 (Задача 3.1)]

$$\lambda(x) = \frac{x_1 - x}{1 - x x_1}.$$

Используя это равенство и результаты предыдущей задачи, покажите, что

$$P = -(x_1 - x_1^{-1}) = 2\hbar x \quad (x_1 = e^{-x}),$$

$$E = \frac{1}{2} (x_1^{-2} - x_1^2) = \hbar 2x.$$

Это соответственно эквивалентно коэффициентам $-K_1$ и K_2 .

Замечание. Энергия солитона, определенная в разд. 2.4 (задача 2.9), включает вклад $(-2a/v)x$ за счет слагаемого $2x$, описывающего притяжение в потенциале решетки.

3.8. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И СИСТЕМА КАЦА - МЕРБЕКЕ

Мы видели, что если матрица L в формализме Лэкса имеет только диагональные и первые элементы около диагонали, а матрица B имеет только первые элементы около диагонали, то такая система описывает цепочку с экспоненциальным взаимодействием. Данный выбор L и B - простейший. Мы можем сохранить L и усложнить B . В этом случае $BL - LB$ должно иметь только диагональные или первые околодиагональные элементы, так же как L и dL/dt . Для простоты предположим, что элементы в верхнем и нижнем левом углах равны нулю, не задумываясь пока над вопросом, какая механическая система этому соответствует (ср. разд. 3.10). Пусть L имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 \\ & a_2 & b_3 & \dots \\ 0 & & & \dots \end{bmatrix} \quad (3.8.1)$$

и пусть

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & & \\ -\beta_1 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ -\gamma_1 & -\beta_2 & 0 & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \end{bmatrix}. \quad (3.8.2)$$

Тогда требование, что $(k-1, k+2)$ -й элемент матрицы $B_2 L - L B_k$ должен обращаться в нуль, приводит к условию $a_{k-1} \gamma_k = \gamma_{k-1} a_{k+1}$. Если предположить, что элементы γ_k отличны от нуля, то они должны удовлетворять условию

$$\gamma_k = a_k a_{k+1}. \quad (3.8.3)$$

Аналогично из условия обращения в нуль $(k-1, k+1)$ -го элемента получим соотношение $a_k \beta_{k-1} + \gamma_{k-1} \vartheta_{k+1} = \gamma_{k-1} \vartheta_{k-1} + a_{k-1} \beta_k$, и это удовлетворяется условием [3.7]:

$$\beta_k = (\vartheta_k + \vartheta_{k+1}) a_k. \quad (3.8.3')$$

В этом случае движение также является изоспектральным и интегрируемым, хотя мы не можем дать какой-либо механической интерпретации соответствующим уравнениям движения. Мозер [3.7] доказал существование матрицы B_p , которая имеет элементы вплоть до p -го околодиагонального элемента.

Для упрощения положим $\vartheta_n = 0$, тогда

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & & & \\ \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & & 0 \\ & \alpha_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.8.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 d_2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & d_2 d_3 & & 0 \\ -d_1 d_2 & 0 & 0 & \ddots & & \\ & & & 0 & 0 & d_{n-2} d_{n-1} \\ & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & & -d_{n-2} d_{n-1} & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8.5)$$

В этом случае из уравнения движения

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = B\mathcal{L} - \mathcal{L}B \quad (3.8.6)$$

следует, что

$$\dot{d}_k = d_k (d_{k+1}^2 - d_{k-1}^2). \quad (3.8.7)$$

Если мы положим

$$d_k = e^{u_k/2}, \quad (3.8.8)$$

то получим

$$\dot{u}_k = \frac{1}{2} (e^{u_{k+1}} - e^{u_{k-1}}). \quad (3.8.9)$$

Если далее записать

$$t/2 \rightarrow t, \quad u_k = -R_k, \quad (3.8.10)$$

то

$$\dot{R}_k = e^{-R_{k+1}} - e^{-R_{k-1}}. \quad (3.8.11)$$

Данный тип уравнений был изучен Кацем и ван Мёрбеке с использованием метода обратной задачи рассеяния [3.8]; мы будем упоминать этот результат сокращенно как систему КМ. Хотя эта система не имеет непосредственной механической интерпретации, Кац и Мёрбеке отметили, что она просто связана с цепочкой с экспоненциальным взаимодействием.

Чтобы показать связь между системой КМ и цепочкой, положим

$$\begin{cases} R_{2k} = x_{2k+1} - x_{2k}, \\ R_{2k+1} = x_{2k+2} - x_{2k+1}. \end{cases} \quad (3.8.12)$$

Рис. 3.1 иллюстрирует соотношение между $x_{2k}, \dots$ и $R_{2k}, \dots$.
Уравнение (3.8.11) удовлетворяется, если

$$\begin{cases} \dot{x}_{2k} = e^{-R_{2k-1}} + e^{-R_{2k}} - d, \\ \dot{x}_{2k+1} = e^{-R_{2k}} + e^{-R_{2k+1}} - d, \end{cases} \quad (3.8.13)$$

где d - постоянная. Далее, положим (ср. рис. 3.1)

$$x_{2k} = Q_k, \quad x_{2k+1} = Q'_k, \quad (3.8.14)$$

а следовательно,

$$R_{2k} = Q'_k - Q_k, \quad R_{2k+1} = Q_{k+1} - Q'_k, \quad (3.8.15a)$$

$$R_{2k} + R_{2k+1} = Q_{k+1} - Q_k. \quad (3.8.15b)$$

Тогда (3.8.13) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dot{Q}_k = e^{-R_{2k-1}} + e^{-R_{2k}} - d, \\ \dot{Q}'_k = e^{-R_{2k}} + e^{-R_{2k+1}} - d. \end{cases} \quad (3.8.16)$$

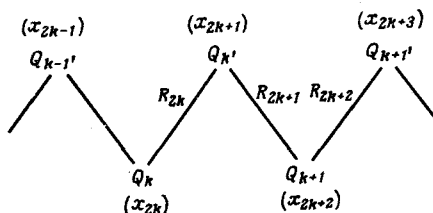


Рис. 3.1. Соотношение между системой Каца - Мёрбке и преобразованием Бэклунда (разд. 3.9).

Дифференцируя (3.8.16) по t , получаем

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_k &= -\dot{R}_{2k-1} e^{-R_{2k-1}} - \dot{R}_{2k} e^{-R_{2k}} = \\ &= (e^{-R_{2k-2}} - e^{-R_{2k}}) e^{-R_{2k-1}} + (e^{-R_{2k-1}} - e^{-R_{2k+1}}) e^{-R_{2k}} = \\ &= e^{(R_{2k-2} + R_{2k-1})} - e^{-(R_{2k} + R_{2k+1})},\end{aligned}\quad (3.8.17)$$

а значит, с учетом (3.8.15)

$$\ddot{Q}_k = e^{-(Q_k - Q_{k-1})} - e^{-(Q_{k+1} - Q_k)}.\quad (3.8.18a)$$

Это уравнение описывает цепочку с экспоненциальным взаимодействием. Аналогично можно получить уравнение

$$\ddot{Q}'_k = e^{-(Q'_k - Q'_{k-1})} - e^{-(Q'_{k+1} - Q'_k)},\quad (3.8.18b)$$

которое описывает другую цепочку с таким же экспоненциальным взаимодействием. Таким образом, система КМ позволяет получить две цепочки с экспоненциальным взаимодействием.

Далее, так как (3.8.4, 5) подразумевают, что

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{n,n+1} = \mathcal{L}_{n+1,n} = \mathcal{L}_n, \\ \mathcal{B}_{n,n+2} = -\mathcal{B}_{n+2,n} = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{n+1}, \end{cases}\quad (3.8.19)$$

а остальные элементы равны нулю, то

$$\begin{cases} (\mathcal{L}^2)_{n,n} = \mathcal{L}_{n-1}^2 + \mathcal{L}_n^2 = \frac{1}{4} (e^{-R_{n-1}} + e^{-R_n}), \\ (\mathcal{L}^2)_{n,n+2} = (\mathcal{L}^2)_{n+2,n} = \mathcal{L}_n \mathcal{L}_{n+1} = \frac{1}{4} e^{-(R_n + R_{n+1})/2}. \end{cases}\quad (3.8.20)$$

Тогда, используя (3.8.14-16), получаем

$$\begin{cases} (\mathcal{L}^2)_{2n,2n} = \frac{1}{4} \dot{Q}_n + \frac{\mathcal{L}}{4}, \\ (\mathcal{L}^2)_{2n+1,2n+1} = \frac{1}{4} \dot{Q}'_n + \frac{\mathcal{L}}{4}, \\ (\mathcal{L}^2)_{2n,2n+2} = \frac{1}{4} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)/2}, \\ (\mathcal{L}^2)_{2n+1,2n+3} = \frac{1}{4} e^{-(Q'_{n+1} - Q'_n)/2} \end{cases}\quad (3.8.21)$$

Следовательно, уравнение движения для $\mathcal{L}^2$, которое сохраняет вид

$$\frac{d\mathcal{L}^2}{dt} = B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2 B, \quad (3.8.22)$$

включает в себя уравнение движения как для Q_n (3.8.18a), так и для Q'_n (3.8.18б), т.е. уравнения $dL/dt = BL - LB$ (3.1.7) и $dL'/dt = B'L' - L'B'$, где Q_n и P_n заменены на Q'_n и P'_n .

Если положить $\alpha = 0$, то

$$\begin{cases} a_n = 2\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}, & a'_n = 2\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}, \\ b_n = 2(\alpha_{2n-1}^2 + \alpha_{2n}^2), & b'_n = 2(\alpha_{2n}^2 + \alpha_{2n+1}^2). \end{cases} \quad (3.8.23)$$

Задача 3.6. Проверьте равенство (3.8.3) для γ_k и β_k . Покажите, что если мы положим $\gamma_k = 0$, то $\beta_k \sim a_k$.

Задача 3.7. Проверьте справедливость частных решений уравнения (3.8.11)

$$R_{2n} = \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}(x_{2n} + \beta t)}{(\operatorname{ch}[x_{(n-1)} + \beta t])} \right\},$$

$$R_{2n+1} = \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}(x_{2n+1} + \beta t)}{\operatorname{ch}[x_{(n+1)} + \beta t]} \right\},$$

или

$$e^{-R_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} [1 - \mu \operatorname{th}(x_{2n} + \beta t)],$$

$$e^{-R_{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} [1 + \mu \operatorname{th}(x_{2n+1} + \beta t)],$$

где

$$\operatorname{ch} x = 1/\sqrt{1-\mu^2}, \quad \beta = \mu x.$$

Покажите, что они приводят к солитону в цепочке с экспоненциальным взаимодействием (ср. (2.4.2)).

Задача 3.8. Покажите, что (3.8.16) имеет частное решение

$$Q_k = \gamma = \text{const},$$

$$e^{Q'_n - \gamma} = \frac{\text{ch}(\alpha n + \beta t)}{\text{ch}[\alpha(n+1) + \beta t]},$$

где $\beta = \text{th } \alpha$, $\alpha = e^{\alpha} + e^{-\alpha}$.

3.9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЭКЛУНДА

В предыдущем разделе мы рассмотрели две цепочки, объединенные в систему КМ. Это значит, что если движение цепочки преобразовано посредством системы КМ, то мы получим другое возможное движение цепочки. В общем случае преобразование, позволяющее получить из одного решения другое, называется преобразованием Бэклунда. В данном случае преобразование системы КМ - преобразование Бэклунда для цепочки с экспоненциальным взаимодействием. Можно показать, что это преобразование каноническое.

I. Начнем с простого замечания. Для набора переменных $Q = \{Q_n\}$ и $P = \{P_n\}$ рассмотрим преобразование

$$\begin{cases} P_n = A \frac{f_n(Q)}{f_n(Q')} + \frac{f_{n-1}(Q')}{A f_n(Q)}, \\ P'_n = A \frac{f_n(Q)}{f_n(Q')} + \frac{f_n(Q')}{A f_{n+1}(Q)}, \end{cases} \quad (3.9.1)$$

где A - константа. Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-N_0}^N P_n'^2 + \sum_{n=-N_0}^N \frac{f_{n-1}(Q')}{f_n(Q')} \right] - \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-N_0}^N P_n^2 + \sum_{n=-N_0}^N \frac{f_n(Q)}{f_{n+1}(Q)} \right] = \\ & = \frac{1}{2A^2} \left[\frac{f_{-N_0-1}(Q')}{f_{-N_0}(Q)} \right]^2 + \frac{1}{2A^2} \left[\frac{f_N(Q')}{f_{N+1}(Q)} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

Таким образом, если каноническое преобразование определено выражением (3.9.1), оно преобразует гамильтониан

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_n P_n^2 + \sum_n \frac{f_n(Q)}{f_{n+1}(Q)} \quad (3.9.3)$$

в себя в том случае, если граничные условия обеспечивают постоянство правой части равенства (3.9.2).

Гамильтониан цепочки с экспоненциальным взаимодействием

$$H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \quad (3.9.4)$$

приводится к такому виду, если $f_n(Q) = e^{Q_n}$. Поэтому мы выбираем производящую функцию канонического преобразования в виде

$$W(Q, Q') = \sum_j \left[A e^{-(Q'_j - Q_j)} - \frac{1}{A} e^{-(Q_{j+1} - Q'_j)} + \lambda (Q'_j - Q_j) \right]. \quad (3.9.5)$$

Здесь A, λ — константы; для положительных (отрицательных) A мы можем выбрать $A = 1$ ($A = -1$), сдвигая все Q_n на соответствующую постоянную. Тогда каноническое преобразование дается соотношениями

$$\begin{cases} P_n = \frac{\partial W}{\partial Q_n} = A e^{-(Q'_n - Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_n - Q'_{n-1})} - \lambda, \\ P'_n = -\frac{\partial W}{\partial Q'_n} = A e^{-(Q'_n - Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_{n+1} - Q'_n)} + \lambda. \end{cases} \quad (3.9.6)$$

Если мы опустим аддитивную постоянную, преобразование примет тот же вид, что и (3.9.1). В качестве граничного условия предположим, что Q_n и Q'_n стремятся к постоянным значениям на бесконечности. А именно

$$\begin{cases} Q_n \rightarrow Q_{-\infty}, & Q'_n \rightarrow Q'_{-\infty} & (n \rightarrow -\infty), \\ Q_n \rightarrow Q_{\infty}, & Q'_n \rightarrow Q'_{\infty} & (n \rightarrow +\infty). \end{cases} \quad (3.9.7)$$

Так как импульсы P_n и P'_n обращаются в нуль на бесконечности, то

$$\begin{cases} A e^{-(Q'_{-\infty} - Q_{-\infty})} + \frac{1}{A} e^{-(Q_{-\infty} - Q'_{-\infty})} - \lambda = 0, \\ A e^{-(Q'_{\infty} - Q_{\infty})} + \frac{1}{A} e^{-(Q_{\infty} - Q'_{\infty})} - \lambda = 0. \end{cases} \quad (3.9.8)$$

Эти соотношения определяют связи между $\lambda, A, Q_{-\infty}$ и т. д.

А именно

$$\begin{cases} A = \exp\left(\frac{Q'_\infty + Q'_-\infty}{2} - \frac{Q_\infty + Q_-\infty}{2}\right), \\ \lambda = \exp\left(\frac{Q'_\infty - Q'_-\infty}{2} - \frac{Q_\infty - Q_-\infty}{2}\right) + \exp\left(-\frac{Q'_\infty - Q'_-\infty}{2} + \frac{Q_\infty - Q_-\infty}{2}\right), \end{cases} \quad (3.9.9)$$

где мы предполагали $A > 0$ (случай $A < 0$ может быть рассмотрен аналогично). Из (3.9.6) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (P'_n - P_n) = 2 \operatorname{sh} \left\{ \left[(Q'_\infty - Q'_-\infty) - (Q_\infty - Q_-\infty) \right] / 2 \right\}. \quad (3.9.10)$$

Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P'_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n + \operatorname{const}, \quad (3.9.11)$$

а используя еще раз (3.9.6), получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(P'_n + \lambda)^2 - (P_n + \lambda)^2] = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} e^{-(Q'_n - Q'_{n-1})} + \operatorname{const}). \quad (3.9.12)$$

Таким образом, с учетом (3.9.11) имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n'^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q'_n - Q'_{n-1})} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} + \operatorname{const}. \quad (3.9.13)$$

В общем случае каноническое преобразование, определяемое производящей функцией W , преобразует гамильтониан в виду

$$H'(Q', P') = H[Q(Q', P'), P(Q', P')] + \frac{\partial W}{\partial t}; \quad (3.9.14)$$

следовательно, каноническое преобразование (3.9.5, 6) преобразует гамильтониан (3.9.4) к новому гамильтониану такого же вида:

$$H(Q', P') = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n'^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(Q'_n - Q'_{n-1})} + \operatorname{const}. \quad (3.9.15)$$

Другими словами, каноническое преобразование преобразует цепочку с экспоненциальным взаимодействием в такую же цепочку. Это означает, что если мы имеем набор (Q, P) , дающий некоторое возможное движение цепочки, то каноническое преобразование определяет другое возможное движение цепочки (Q', P') . Так как уравнения движения дают $\dot{Q}_n = \partial H / \partial P_n = P_n$ и $\dot{Q}'_n = \partial H' / \partial P'_n = P'_n$, то соотношение (3.9.6) эквивалентно

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = A e^{-(Q'_n - Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_n - Q'_{n-1})} - \lambda, \\ \dot{Q}'_n = A e^{-(Q'_n - Q_n)} + \frac{1}{A} e^{-(Q_{n+1} - Q'_n)} - \lambda. \end{cases} \quad (3.9.16)$$

Если задано решение $Q_n = Q_n(t)$, то, решая уравнения (3.9.16) (они являются дифференциальными уравнениями первого порядка по времени), получим другое решение $Q'_n = Q'_n(t)$. Преобразование Бэклунда связывает различные решения соотношениями, которые имеют меньший порядок, чем исходные уравнения. Впервые преобразование Бэклунда было введено при изучении геометрической природы уравнения $\phi_{tt} - \phi_{xx} = \sin \phi$ (синус-уравнение Гордона). Иногда соотношения между решениями различных уравнений также называют преобразованием Бэклунда. Уравнение (3.9.16) является преобразованием Бэклунда для цепочки с экспоненциальным взаимодействием и может рассматриваться как каноническое преобразование. Далее, сравнивая (3.9.16) с (3.8.16), видим, что (3.9.16) имеет такой же вид, что и система КМ; отсюда ясно, что рис. 3.1 показывает преобразование Бэклунда для цепочки с экспоненциальным взаимодействием.

Уравнения движения цепочки допускают тривиальное решение

$$Q_n = \gamma = \text{const.} \quad (3.9.17)$$

В соответствии с результатом задачи 3.8 (разд. 3.8) соотношение (3.9.16) дает

$$e^{Q'_n - \gamma'} = z \frac{\text{ch}[x(n-1) + \beta t + \sigma]}{\text{ch}[xn + \beta t + \sigma]}, \quad (3.9.18a)$$

где σ является фазовой постоянной, а

$$\begin{cases} \beta = \gamma \hbar x, & \lambda = z + z^{-1}, \\ z = A e^{\gamma - \gamma'} = e^{-x}, \\ Q'_n \rightarrow Q'_{-\infty} = \gamma' \quad (n \rightarrow -\infty), \end{cases} \quad (3.9.18b)$$

и, таким образом, получим солитонное решение

$$e^{-(Q'_{n+1} - Q'_n)} - 1 = \gamma \hbar^2 x \text{sech}^2(xn + \beta t + \sigma). \quad (3.9.19)$$

Если мы изменим фазовую постоянную σ на $\sigma + \pi/2i$, то получим другое решение,

$$e^{-(Q'_{n+1} - Q'_n)} - 1 = -\gamma \hbar^2 x \text{cosech}^2(xn + \beta t + \sigma), \quad (3.9.20)$$

которое, хотя и расходится (антисолитон), дает возможное частное движение цепочки с ограниченной областью применимости.

II. Рассмотрим два последовательных преобразования Баклунда [3.10], характеризующихся соответственно наборами (A_1, χ_1) и (A_2, χ_2) . Мы различаем два пути, исходящие из $Q_n^{(0)}$; первый путь - находим $Q_n^{(1)}$ через (A_1, χ_1) и затем $Q_n^{(1,2)}$ через (A_2, χ_2) и второй путь - находим $Q_n^{(1,2)}$ через (A_2, χ_2) и затем $Q_n^{(2,1)}$. Далее требуем, чтобы $Q_n^{(1,2)} = Q_n^{(2,1)}$ (рис. 3.2). Мы вводим граничные условия

$$Q_{-\infty}^{(0)} = \gamma^{(0)}, \quad Q_{-\infty}^{(1)} = \gamma^{(1)}, \quad Q_{-\infty}^{(2)} = \gamma^{(2)}, \quad Q_{-\infty}^{(1,2)} = \gamma^{(1,2)} \quad (3.9.21)$$

для $n \rightarrow -\infty$ ($\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(1,2)}$ являются константами). Записывая преобразования в соответствии с (3.9.16), получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(1)}) = \chi_1 \left[e^{-(Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)} - Q_n^{(0)} + \gamma^{(0)})} - e^{-(Q_{n-1}^{(1)} - \gamma^{(1)} - Q_{n-1}^{(0)} + \gamma^{(0)})} \right], \\ \frac{d}{dt}(Q_n^{(0)} - Q_{n-1}^{(2)}) = \chi_2 \left[e^{-(Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)} - Q_n^{(0)} + \gamma^{(0)})} - e^{-(Q_{n-1}^{(2)} - \gamma^{(2)} - Q_{n-1}^{(0)} + \gamma^{(0)})} \right], \\ \frac{d}{dt}(Q_n^{(1)} - Q_{n-1}^{(1,2)}) = \chi_2 \left[e^{-(Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)} - Q_n^{(1)} + \gamma^{(1)})} - e^{-(Q_{n-1}^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)} - Q_{n-1}^{(1)} + \gamma^{(1)})} \right], \\ \frac{d}{dt}(Q_n^{(2)} - Q_{n-1}^{(1,2)}) = \chi_1 \left[e^{-(Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)} - Q_n^{(2)} + \gamma^{(2)})} - e^{-(Q_{n-1}^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)} - Q_{n-1}^{(2)} + \gamma^{(2)})} \right], \end{cases} \quad (3.9.22a)$$

где

$$\begin{cases} \chi_1 = A_1 e^{\gamma^{(0)} - \gamma^{(1)}} = A_1 e^{\gamma^{(2)} - \gamma^{(1,2)}}, \\ \chi_2 = A_2 e^{\gamma^{(0)} - \gamma^{(2)}} = A_2 e^{\gamma^{(1)} - \gamma^{(1,2)}}, \\ \gamma^{(0)} + \gamma^{(1,2)} = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}. \end{cases} \quad (3.9.22b)$$

Если мы исключим производные по времени из (3.9.22a), то получим

$$\begin{aligned} \Phi_n &\equiv \left[\chi_1 e^{-(Q_{n+1}^{(1)} - \gamma^{(1)})} - \chi_2 e^{-(Q_{n+1}^{(2)} - \gamma^{(2)})} \right] e^{+(Q_{n+1}^{(0)} - \gamma^{(0)})} + \\ &+ \left[\chi_2 e^{+(Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)})} - \chi_1 e^{+(Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)})} \right] e^{-(Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)})} = \\ &= \Phi_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.9.23)$$

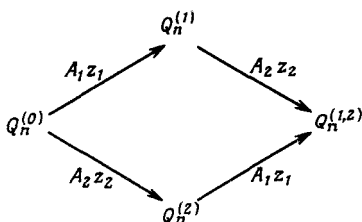


Рис. 3.2. Суперпозиция двух преобразований Бэклунда.

Отсюда видно, что Φ_n не зависит от n , а так как $\Phi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow -\infty$, то

$$\Phi_n = 0. \quad (3.9.24)$$

Следовательно,

$$e^{Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)}} + Q_{n+1}^{(0)} - \gamma^{(0)} = \frac{z_1 e^{Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)}} - z_2 e^{Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)}}}{z_1 e^{-(Q_{n+1}^{(1)} - \gamma^{(1)})} - z_2 e^{-(Q_{n+1}^{(2)} - \gamma^{(2)})}}, \quad (3.9.25)$$

$$\begin{aligned} & \text{или} \\ & e^{Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)}} + Q_{n+1}^{(0)} - \gamma^{(0)} = \\ & = \frac{z_1 e^{Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)}} - z_2 e^{Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)}}}{z_1 e^{Q_{n+1}^{(2)} - \gamma^{(2)}} - z_2 e^{Q_{n+1}^{(1)} - \gamma^{(1)}}} e^{Q_{n+1}^{(1)} - \gamma^{(1)} + Q_{n+1}^{(2)} - \gamma^{(2)}}; \end{aligned} \quad (3.9.26)$$

это значит, что если мы имеем $Q_n^{(0)}$, $Q_n^{(1)}$ и $Q_n^{(2)}$, то мы можем построить новое решение $Q_n^{(1,2)}$ посредством лишь алгебраических вычислений. Вместо $Q_n^{(0)}$ мы можем исходить из $Q_n^{(1)}$ или $Q_n^{(2)}$ или даже $Q_n^{(1,2)}$ и получать другие решения алгебраически, делая последовательные преобразования. Однако в действительности вычисления будут становиться все более и более сложными.

Например, исходим из

$$Q_n^{(0)} = \gamma^{(0)} = \text{const.} \quad (3.9.27)$$

Покажем процедуру получения двухсолитонного решения $Q_n^{(1,2)}$. Обобщая (3.9.18a), введем $Q_n^{(1)}$ и $Q_n^{(2)}$ как

$$\begin{cases} e^{Q_n^{(1)} - \gamma^{(1)}} = z_1 \frac{\psi_1(n)}{\psi_1(n+1)}, \\ e^{Q_n^{(2)} - \gamma^{(2)}} = z_2 \frac{\psi_2(n)}{\psi_2(n+1)}. \end{cases} \quad (3.9.28)$$

Тогда, согласно (3.9.26), получим

$$e^{Q_n^{(1,2)} - \gamma^{(1,2)}} = x_1 x_2 \frac{\Psi_n}{\Psi_{n+1}}, \quad (3.9.29)$$

где

$$\Psi_n = \psi_2(n) \psi_1(n+1) - \psi_1(n) \psi_2(n+1), \quad (3.9.30)$$

или, в другой форме,

$$e^{-(Q_{n+1}^{(1,2)} - Q_n^{(1,2)})} = \frac{\Psi_{n+2} \Psi_n}{\Psi_{n+1}^2}. \quad (3.9.31)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} S_n = \ln \Psi_{n+1} + \text{Член, линейный по } n, \\ e^{-(Q_{n+1}^{(1,2)} - Q_n^{(1,2)})} - 1 = \frac{d^2}{dt^2} S_n. \end{cases} \quad (3.9.32)$$

Для ψ_1 из (3.9.18a) получим

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= 2 D_1 \operatorname{ch}[(n-1)x_1 + \beta_1 t + \delta_1] = \\ &= B_1 e^{-n x_1 - \beta_1 t} + C_1 e^{n x_1 + \beta_1 t}, \end{aligned} \quad (3.9.33a)$$

где

$$D_1^2 = B_1 C_1, \quad e^{\delta_1} = \sqrt{\frac{C_1}{B_1}} e^{x_1}, \quad \beta_1 = i \hbar x_1 \quad (3.9.33b)$$

и

$$\begin{aligned} \psi_2(n) &= 2 D_2 \operatorname{ch}[(n-1)x_2 + \beta_2 t + \delta_2] = \\ &= B_2 e^{-n x_2 - \beta_2 t} + C_2 e^{n x_2 + \beta_2 t}, \end{aligned} \quad (3.9.34a)$$

где

$$D_2^2 = B_2 C_2, \quad e^{\delta_2} = \sqrt{\frac{C_2}{B_2}} e^{x_2}, \quad \beta_2 = i \hbar x_2. \quad (3.9.34b)$$

Затем получим двухсолитонное решение в виде

$$\begin{aligned} \Psi_n &= 2 D_+ \operatorname{ch}[(n-1)(x_1 + x_2) + (\beta_1 + \beta_2)t + \delta_+] + \\ &+ 2 D_- \operatorname{ch}[(n-1)(x_2 - x_1) + (\beta_2 - \beta_1)t + \delta_-], \end{aligned} \quad (3.9.35a)$$

где

$$\begin{cases} 2 D_+^2 = -4 D_1 D_2 \operatorname{th}^2(x_2 - x_1), \\ 2 D_-^2 = -4 D_1 D_2 \operatorname{th}^2(x_1 + x_2), \\ e^{2\delta_+} = -\frac{C_1 C_2}{B_1 B_2} e^{3(x_1 + x_2)}, \\ e^{2\delta_-} = -\frac{C_1 C_2}{B_1 B_2} e^{3(x_2 - x_1)}; \end{cases} \quad (3.9.35d)$$

(3.9.35a) является одной из форм двухсолитонного решения (2.5.1). Чтобы в $Q_n^{(2,2)}$ отсутствовали антисолитоны, D_+ и D_- должны иметь одинаковые знаки (вещественные и оба положительные), а значит, D_1 и D_2 имеют противоположные знаки. Таким образом, мы имеем собственное двухсолитонное решение, когда одно из $Q_n^{(1)}$ и $Q_n^{(2)}$ является солитонным решением, а другое - антисолитонным. Такая же ситуация возникает, когда мы применяем преобразование Бэклунда к уравнению КдВ, и это - общее свойство преобразования. Получить конкретное выражение для многосолитонного решения таким путем весьма трудно.

Формально мы можем пользоваться другим методом [3.10].

Обобщая (3.9.18a), положим

$$e^{Q_{n-1}} = e^{(Q_n + Q_{n-1})/2} \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)} \quad (3.9.36)$$

и, подставляя это в (3.9.16) ($A = -1, \lambda = -(z + z^{-1})$), получим

$$a_{n-1} \varphi(n-1) + a_n \varphi(n+1) + b_n \varphi(n) = \frac{z + z^{-1}}{2} \varphi(n), \quad (3.9.37)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)/2}, \quad b_n = \frac{1}{2} \dot{Q}_n. \quad (3.9.38)$$

Таким образом, мы видим, что введенная функция $\varphi(n)$ удовлетворяет уравнению (3.2.16) метода обратной задачи рассеяния. Что касается эволюции $\varphi(n)$ во времени, то заметим, что уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Q_n + Q_{n-1} - 2Q'_{n-1}) = \\ = A \left(e^{-(Q'_n - Q_n)} - e^{-(Q'_{n-1} - Q_{n-1})} \right) - \frac{1}{A} \left(e^{-(Q_n - Q'_{n-1})} - e^{-(Q_{n-1} - Q'_{n-2})} \right), \end{aligned} \quad (3.9.39)$$

которое получено из (3.9.16), с учетом (3.9.36) при $A = -1$ дает

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\varphi}(n-1)}{\varphi(n-1)} + a_{n+1} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} - a_{n-1} \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n-1)} = \\ = \frac{\dot{\varphi}(n)}{\varphi(n)} + a_n \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} - a_{n-1} \frac{\varphi(n-1)}{\varphi(n)}. \end{aligned} \quad (3.9.40)$$

Следовательно,

$$\dot{\varphi}(n) = a_{n-1} \varphi(n-1) - a_n \varphi(n+1) + F'(t) \varphi(n), \quad (3.9.41)$$

где $F'(t)$ — множитель, не зависящий от n ; он отражает произвол в выборе матрицы B в формализме Лакса $L_t = BL - LB$, поэтому мы можем положить $F'(t) \equiv 0$. Таким образом, мы можем получить новое решение Q'_n , найдя предварительно из известного решения Q_n величины a_n и b_n и решая затем уравнение (3.9.37, 41) для φ_n методом обратной задачи рассеяния. Эти уравнения также дают связь между преобразованием Баклунда и методом обратной задачи рассеяния.

III. Теперь кратко рассмотрим дуальное преобразование Баклунда для цепочки с экспоненциальным взаимодействием [3.9]. Дуальная система строится для переменных $\gamma_n = Q_{n+1} - Q_n$ и соответствующего сопряженного импульса γ_n . Подставляя соотношение $\gamma_{n-1} = \dot{Q}_n$ (I.4.7) в (3.9.16), получаем

$$\begin{cases} \gamma_n - \gamma'_n = e^{Q'_n(\gamma') - Q_{n+1}(\gamma) - \lambda}, \\ \gamma'_{n-1} - \gamma_n = e^{Q_n(\gamma) - Q'_n(\gamma') - \lambda} \end{cases} \quad (3.9.42)$$

(здесь для простоты мы положили $A = I$). В данных уравнениях $Q_n(\gamma)$ и $Q'_n(\gamma')$ следует понимать соответственно как функции $\{\gamma_j\}$ и $\{\gamma'_j\}$, или

$$\begin{cases} Q_n = Q_n(\gamma) = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \gamma_j, \\ Q'_n = Q'_n(\gamma') = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \gamma'_j, \end{cases} \quad (3.9.43)$$

где предположено, что дуальная цепочка простирается от $j = -\infty$, а не в конечной области $j = 0 \sim N$.

Преобразование Баклунда получено с использованием соотношений (2.2.14) или

$$\begin{cases} e^{-(Q_{n+1}(\gamma) - Q_n(\gamma)) - 1} = \dot{\gamma}_n, \\ e^{-(Q'_{n+1}(\gamma') - Q'_n(\gamma')) - 1} = \dot{\gamma}'_n. \end{cases} \quad (3.9.44)$$

Введем W_n и W'_n как

$$\gamma_n = W_n, \quad \gamma'_{n-1} = W'_n \quad (3.9.45)$$

и, переписав левую часть (3.9.44) с учетом (3.9.42), получим

$$\begin{cases} (\lambda + W'_n - W_n)(\lambda + W_n - W'_{n+1}) = 1 + \dot{W}_n, \\ (\lambda + W'_n - W_n)(\lambda + W_{n-1} - W'_n) = 1 + \dot{W}'_n. \end{cases} \quad (3.9.46)$$

Данная форма преобразования Бэклунда была непосредственно получена в работе [3.11] без использования (3.9.16).

Задача 3.9. Подставьте $Q_{n+1} - Q_n = 0$, $\dot{Q}_n = 0$ в (3.9.38), решите (3.9.37) для $\varphi(n)$ и получите таким образом солитонное решение (3.9.18a).

3.10. КОНЕЧНАЯ ЦЕПОЧКА

Мозер в работе [3.7] рассмотрел цепочки из конечного числа частиц $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$ с экспоненциальным взаимодействием, причем начало и конец цепочки находятся на бесконечности и оба фиксированы, а именно

$$Q_0 = -\infty, \quad Q_{N+1} = +\infty.$$

Поскольку в данном случае концы цепочки находятся на бесконечности, вклад от второго слагаемого потенциала взаимодействия, которое равно $\alpha\chi$, становится бесконечным. Однако, так как эта величина постоянна, мы можем ее опустить¹⁾. Уравнения движения теперь содержит только слагаемое с экспоненциальным отталкиванием $[(a/e)\exp(-\epsilon\chi)]$, так что система эквивалентна одномерной системе N частиц с экспоненциальным отталкиванием между ближайшими соседями.

I. Пронумеруем собственные значения λ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) $L\varphi = \lambda\varphi$ в данном случае так, чтобы собственное значение с меньшей величиной имело меньший номер, предполагая, что все собственные значения различны.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N. \quad (3.10.1)$$

¹⁾ Постоянной величиной является слагаемое в выражении для $\alpha\chi$. — Прим. перев.

Из интуитивных соображений ясно, что при $t \rightarrow \pm \infty$ все частицы будут разделены бесконечными расстояниями, и поэтому в данном пределе $a_n = (1/2)\exp(-\tau_n/2) \rightarrow 0$, следовательно, в матрице L останутся лишь диагональные элементы $b_n = (1/2)P_n$, т.е. L асимптотически становится диагональной матрицей. Таким образом, имеем (рис. 3.3)

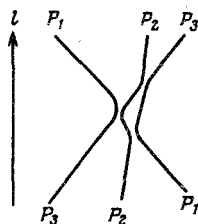


Рис. 3.3. Случай Мозера.

$$\begin{cases} P_k = 2\lambda_{N-k+1} & (t \rightarrow -\infty), \\ P_k = 2\lambda_k & (t \rightarrow +\infty). \end{cases} \quad (3.10.2)$$

Из (3.10.1) имеем граничные условия

$$a_0 = a_N = 0, \quad b_0 = b_{N+1} = 0, \quad (3.10.3)$$

так что, как и в (3.8.1, 2), элементы матриц L и B в верхнем правом и нижнем левом углах обращаются в нуль. Следовательно, уравнения для собственных значений $L\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$ и уравнения движения упрощаются как для $n = 1$, так и для $n = N$. В частности, для $n = 1$

$$a_1\varphi_j(2, t) + b_1\varphi_j(1, t) = \lambda_j\varphi(1, t), \quad (3.10.4)$$

$$\dot{\varphi}_j(1, t) = -a_1\varphi_j(2, t). \quad (3.10.5)$$

Так как $\varphi_j(n, t)$ для различных n ортогональны, после нормировки получим

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(n, t)\varphi_j(n', t) = \delta_{nn'}, \quad (3.10.6a)$$

$$\sum_{n=1}^N \varphi_j(n, t)\varphi_{j'}(n, t) = \delta_{jj'}. \quad (3.10.6b)$$

Следовательно, (3.10.4) дает

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j^2(1, t) = \varphi_1, \quad (3.10.7)$$

а переписывая правую часть уравнения (3.10.5) и используя (3.10.4), получаем

$$\dot{\varphi}_j(1, t) = -\left[\lambda_j - \sum_{\ell=1}^N \lambda_\ell \varphi_\ell^2(1, t)\right] \varphi_j(1, t), \quad (3.10.8)$$

где мы учли, что из (3.10.6а) следует $\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(1, t) = 0$. Решив (3.10.8), имеем

$$\varphi_j^2(1, t) = \frac{\varphi_j^2(1, 0) e^{-2\lambda_j t}}{\sum_{\ell=1}^N \varphi_\ell^2(1, 0) e^{-2\lambda_\ell t}}. \quad (3.10.9)$$

В самом деле, взяв натуральный логарифм (3.10.9) и дифференцируя его по времени, вернемся к (3.10.8).

Система, описываемая $D = \{\alpha_n, \varphi_n\}$, с помощью отображения $D \rightarrow \Lambda$ преобразуется к виду

$$\Lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N; \varphi_1(1, t), \dots, \varphi_N(1, t)], \quad (3.10.10)$$

где $\sum_{\ell=1}^N |\varphi_\ell(1, t)|^2 = 1$.

Поскольку полный импульс сохраняется: $\sum_n \varphi_n = 1/2 \sum_n P_n = \text{const}$, размерности обоих пространств равны $2N-1$. Отображение $\Lambda \rightarrow D$ является обратной задачей по отношению к случаю $D \rightarrow \Lambda$.

Для $N=2$ имеем $L = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \varphi_2 \end{pmatrix}$, так что $L\varphi_j = \lambda_j \varphi_j$ для $j=1$ сводится к

$$\begin{cases} \varphi_1 \varphi_1(1, t) + \alpha_1 \varphi_1(2, t) = \lambda_1 \varphi_1(1, t), \\ \alpha_1 \varphi_1(1, t) + \varphi_2 \varphi_1(2, t) = \lambda_1 \varphi_1(2, t), \end{cases} \quad (3.10.11)$$

и, таким образом,

$$-\varphi_1(2, t) = \frac{\varphi_1 - \lambda_1}{\alpha_1} \varphi_1(1, t) = \frac{\alpha_1}{\varphi_2 - \lambda_1} \varphi_1(1, t). \quad (3.10.12)$$

Из (3.10.6б) также следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi_1^2(1, t) + \varphi_1^2(2, t) = \\ &= \left(1 + \frac{\varphi_1 - \lambda_1}{\varphi_2 - \lambda_1}\right) \varphi_1^2(1, t). \end{aligned} \quad (3.10.13)$$

Если мы заметим, что след L вычисляется по формулам

$$Sp\{L\} = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (3.10.14)$$

то получим

$$\varphi_1^2(2, t) = \frac{\vartheta_1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \varphi_1^2(1, t) = \frac{\vartheta_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (3.10.15)$$

Аналогично для $j = 2$

$$\begin{cases} \varphi_2^2(2, t) = \frac{\vartheta_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \varphi_1^2(1, t), \\ \varphi_2^2(1, t) = \frac{\vartheta_1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \varphi_1^2(2, t). \end{cases} \quad (3.10.16)$$

Разрешим эти уравнения относительно ϑ_1 и ϑ_2 , а (3.10.12) - относительно a_1 через $\varphi_1(1, t)$ и $\varphi_2(1, t)$ и получим

$$\begin{cases} \vartheta_1 = \lambda_1 \varphi_1^2(1, t) + \lambda_2 \varphi_2^2(1, t), \\ \vartheta_2 = \lambda_2 \varphi_1^2(1, t) + \lambda_1 \varphi_2^2(1, t), \\ a_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) \varphi_1(1, t) \varphi_2(1, t), \end{cases} \quad (3.10.17)$$

где мы предположили, что $\varphi_1(1, t) \varphi_2(1, t) > 0$. Если (3.10.9) при $N = 2$ подставить в (3.10.17), то ϑ_1 , ϑ_2 и a_1 будут выражены через начальные условия $\varphi_1(1, 0)$, $\varphi_2(1, 0)$.

II. Для случая $N > 2$ нам надо знать общее представление отображения (3.10.10) [3.7]. Для этой цели мы обозначим через λ_k корень уравнения $(L - \lambda I)\varphi = 0$. Тогда видно, что элементы $(L - \lambda I)^{-1}$ могут быть записаны как суммы $(\lambda_k - \lambda)^{-1}$. Действительно, из равенства

$$L\varphi_k = \lambda_k \varphi_k \quad (3.10.18)$$

следует, что

$$(L - \lambda I)\varphi_k = (\lambda_k - \lambda)\varphi_k; \quad (3.10.19)$$

поэтому, если

$$R = (L - \lambda I)^{-1}, \quad (3.10.20)$$

то

$$R\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k. \quad (3.10.21)$$

Следовательно, если $f(\lambda)$ есть элемент $(1, 1)$ матрицы R ,
имеем разложение на простые дроби

$$f(\lambda) \equiv R_{11} = \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k^2}{\lambda_k - \lambda}, \quad (3.10.22)$$

где мы выбрали вещественное выражение для $\varphi_k(1)$ и положили

$$\gamma_k^2 = \varphi_k^2(1). \quad (3.10.23)$$

Устремив $|\lambda| \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k^2 = 1. \quad (3.10.24)$$

Если мы представим R_{11} как функцию a_n и b_n , то (3.10.22, 23) будут связывать их с $\varphi_k^2(t)$, которые даются выражением (3.10.9); таким образом, зависимость динамических переменных a_n и b_n от времени можно легко найти. Мы имеем уравнение

$$\det R = [\det(L - \lambda I)]^{-1}, \quad (3.10.25)$$

которое связывает R с $\Delta_n = \det(L - \lambda I)$. Можно показать, что элементы R , и в частности R_{11} , могут быть выражены через миноры определителя R . Чтобы показать это, введем определитель

$$\Delta_{N-n+1} \equiv \begin{vmatrix} b_n & -\lambda & a_n \\ a_n & b_{n+1} & -\lambda & \dots & b_{N-1} & -\lambda & a_{N-1} \\ & & & & a_{N-1} & b_N & -\lambda \end{vmatrix}; \quad (3.10.26)$$

это — определитель матрицы, которая получается, если опустить первые $n-1$ строк и столбцов. Если разложить Δ_N , то получим

$$\Delta_N = (b_1 - \lambda) \Delta_{N-1} - a_1^2 \Delta_{N-2}, \quad (3.10.27)$$

а в общем случае —

$$\Delta_{N-n+1} = (b_n - \lambda) \Delta_{N-n} - a_n^2 \Delta_{N-n-1} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (3.10.28a)$$

Если

$$\Delta_{-1} = 0, \quad \Delta_0 = 1, \quad (3.10.28b)$$

то (3.10.28a) будет иметь место вплоть до $n=N$. Теперь введем мат-

рицу $N \times I$ с элементами

$$e_1(\ell) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\ell) \varphi_k(1) = \delta_{1\ell} \quad (\ell=1, 2, \dots, N) \quad (3.10.29)$$

и матрицу $\mathcal{Z}$ $N \times I$, определенную как

$$\mathcal{Z}(\ell) = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k(\ell) \varphi_k(1)}{\lambda_k - \lambda}. \quad (3.10.30)$$

Тогда (3.10.21) дает

$$Re_1 = \mathcal{Z}. \quad (3.10.31)$$

Используя (3.10.19), можно переписать это как

$$(L - \lambda I) \mathcal{Z} = e_1. \quad (3.10.32)$$

Записывая каждый элемент, мы, таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\ell_1 - \lambda) \mathcal{Z}(1) + a_1 \mathcal{Z}(2) = 1, \\ a_1 \mathcal{Z}(1) + (\ell_2 - \lambda) \mathcal{Z}(2) + a_2 \mathcal{Z}(3) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{N-1} \mathcal{Z}(N-1) + (\ell_N - \lambda) \mathcal{Z}(N) = 0. \end{cases} \quad (3.10.33)$$

Определитель коэффициентов $\mathcal{Z}(n)$ есть Δ_N , а из (3.10.30) видно, что $\mathcal{Z}(1)$ есть R_{11} . Таким образом, находя из (3.10.33) $\mathcal{Z}(1)$, получим

$$f(\lambda) = R_{11} = \mathcal{Z}(1) = \frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N}. \quad (3.10.34)$$

Переписывая (3.10.27), имеем

$$\frac{\Delta_N}{\Delta_{N-1}} = \ell_1 - \lambda - \frac{a_1^2}{\frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_{N-2}}} \quad (3.10.35a)$$

и аналогично из (3.10.26) -

$$\frac{\Delta_{N-n+1}}{\Delta_{N-n}} = \ell_n - \lambda - \frac{a_n^2}{\frac{\Delta_{N-n}}{\Delta_{N-n-1}}}. \quad (3.10.35b)$$

Следовательно, последовательными итерациями получим для $f(\lambda) = R_{11}$ конечную непрерывную дробь [3.7]:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\ell_1 - \lambda - \frac{a_1^2}{\ell_2 - \lambda - \dots - \frac{a_{N-1}^2}{\ell_N - \lambda}}}. \quad (3.10.36)$$

Таким образом, имеем два выражения для одной и той же величины $f(\lambda)$: простая дробь (3.10.22) и непрерывная дробь (3.10.36). Сравнивая их, мы можем выразить b_n и a_n через γ_k^2 , воспользовавшись методом Стильтьеса (ср. приложение А) [3.12]. Зависимость от времени $\gamma_k^2 = \gamma_k^2(t)$ дается (3.10.9, 23). Следовательно,

$$\begin{cases} b_n = b_n(\{\gamma_k(0)\}, \{\lambda_k\}), \\ a_n = a_n(\{\gamma_k(0)\}, \{\lambda_k\}), \end{cases} \quad (3.10.37)$$

что дает решение обратной задачи отображения (3.10.10) (конкретное выражение приведено в приложении А) и определяет иной метод обратной задачи рассеяния для цепочки с экспоненциальным взаимодействием.

III. Можно вычислить непрерывную дробь (3.10.36) и временную зависимость простой дроби (3.10.22) без обращения к формализму Лакса, используя сохраняющиеся величины Хенона, т.е. интегрируя уравнения движения с помощью этих величин [3.13]. Во-первых, положим

$$\begin{cases} A_j = e^{-(Q_{j+1} - Q_j)} = (2a_j)^2, \\ B_j = P_j = 2b_j; \end{cases} \quad (3.10.38)$$

тогда уравнения движения цепочки примут вид

$$\frac{dA_j}{dt} = A_j(B_j - B_{j+1}), \quad \frac{dB_j}{dt} = A_{j-1} - A_j. \quad (3.10.39)$$

С другой стороны, используя интегралы Хенона (2.10.19), т.е.

$$I_n = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial B_j} \right)^{N-n} \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} A_k \frac{\partial^2}{\partial B_k \partial B_{k+1}} \right) \prod_{\ell=1}^N B_\ell, \quad (3.10.40)$$

построим сохраняющуюся величину

$$f_1(\Lambda) = \sum_{n=0}^N \frac{(-\Lambda)^{N-n}}{(N-n)!} I_n = \exp \left(- \sum_{k=1}^{N-1} A_k \frac{\partial^2}{\partial B_k \partial B_{k+1}} \right) \prod_{\ell=1}^N (B_\ell - \Lambda). \quad (3.10.41)$$

Разлагая правую часть (3.10.41), видим, что

$$f_1(\Lambda) \sim \det(2L - \Lambda I). \quad (3.10.42)$$

Таким образом, корни уравнения $f_1(\Lambda) = 0$ есть просто удвоен-

ные собственные значения λ_j ($j=1, 2, \dots, N$), т.е. $\Lambda_j = 2\lambda_j$.
Далее, определяя

$$f_k(\Lambda) = \exp\left(-\sum_{j=k}^{N-1} A_j \frac{\partial^2}{\partial B_j \partial B_{j+1}}\right) \prod_{l=k}^N (B_l - \Lambda), \quad (3.10.43)$$

видим, что имеет место

$$f_k(\Lambda) = (B_k - \Lambda) f_{k+1}(\Lambda) - A_k f_{k+2}(\Lambda). \quad (3.10.44a)$$

Теперь вместо периодической цепочки мы рассмотрим, следуя Мозеру, цепочку с концами на бесконечности ($Q_0 = -\infty$, $Q_{N+1} = +\infty$, так что $A_0 = A_N = 0$), и, таким образом, концы цепочки не связаны с движением внутри цепочки. В данном случае можно также использовать интегралы Хенона. Пусть далее

$$f_N(\Lambda) = B_N - \Lambda, \quad f_{N+1}(\Lambda) = 1. \quad (3.10.44b)$$

Поскольку в (3.10.44a) $A_k > 0$ ($k=1, 2, \dots, N-1$), корни уравнения $f_k(\Lambda) = 0$ образуют последовательность Штурма (см. приложение В), и поэтому каждый из них расположен между корнями уравнения $f_{k+1}(\Lambda) = 0$. Следовательно, для корня Λ_j функции $f_1(\Lambda)$ имеем $f_k(\Lambda_j) \neq 0$ ($k \neq 1$).

Из (3.10.44a) имеем разложение в непрерывную дробь

$$\frac{f_2(\Lambda)}{f_1(\Lambda)} = \frac{1}{B_1 - \Lambda - \frac{A_1}{B_2 - \Lambda - \dots - \frac{A_{N-1}}{B_N - \Lambda}}}. \quad (3.10.45)$$

В частности, при $k=1$ (3.10.44a) сводится к

$$f_1(\Lambda) = (B_1 - \Lambda) f_2(\Lambda) - A_1 f_3(\Lambda), \quad (3.10.46)$$

сравнивая же (3.10.27) и (3.10.46, 42), видим, что

$$\frac{f_2(\Lambda)}{f_1(\Lambda)} = \frac{\Delta_{N-1}}{2\Delta_N}. \quad (3.10.47)$$

Отсюда находим, что непрерывные дроби (3.10.45 и 36) эквивалентны. Из (3.10.46) получим

$$\frac{\partial}{\partial B_1} f_1(\Lambda) = f_2(\Lambda). \quad (3.10.48)$$

Зная корни Λ_ℓ функции $f_1(\Lambda)$, можем записать

$$f_1(\Lambda) = \prod_{\ell=1}^N (\Lambda_\ell - \Lambda); \quad (3.10.49)$$

отсюда

$$f_2(\Lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Lambda_j}{\partial B_1} \prod_{\ell}^{(j)} (\Lambda_\ell - \Lambda), \quad (3.10.50)$$

где $\prod^{(j)}$ получается, если опустить в произведении множитель $(\Lambda_j - \Lambda)$. Если в (3.10.50) положим $\Lambda = \Lambda_j$, то

$$\frac{\partial \Lambda_j}{\partial B_1} = \frac{f_2(\Lambda_j)}{\prod_{\ell}^{(j)} (\Lambda_\ell - \Lambda_j)}. \quad (3.10.51)$$

Таким образом, из (3.10.49-51) имеем разложение на простые дроби

$$\begin{aligned} \frac{f_2(\Lambda)}{f_1(\Lambda)} &= - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Lambda_j / \partial B_1}{\Lambda - \Lambda_j} = \\ &= - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\Lambda - \Lambda_j} \prod_{\ell} \frac{f_2(\Lambda_j)}{(\Lambda_\ell - \Lambda_j)}. \end{aligned} \quad (3.10.52)$$

Далее, полагая в (3.10.46) $\Lambda = \Lambda_j$, получаем

$$\left(\frac{f_3}{f_2} \right)_j = \frac{B_1 - \Lambda_j}{A_1}. \quad (3.10.53)$$

Здесь и в дальнейшем используется следующее сокращение:

$$f_{k+1}(\Lambda_j) / f_k(\Lambda_j) = (f_{k+1} / f_k).$$

Если (3.10.53) продифференцировать по времени, используя (3.10.39) и граничное условие $A_0 = 0$, то

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f_3}{f_2} \right)_j = -1 - (B_1 - B_2) \left(\frac{f_3}{f_2} \right)_j. \quad (3.10.54)$$

В общем случае

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} \right)_j = -1 - (B_k - B_{k+1}) \left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} \right)_j + \frac{(f_{k+2} / f_{k+1})_j}{(f_{k+1} / f_k)_j}, \quad (3.10.55)$$

что может быть доказано методом математической индукции. Пере-

писав это в виде

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}} \right)_j = - \frac{d}{dt} \ln A_k - \frac{1}{(f_{k+2}/f_{k+1})_j} + \frac{1}{(f_{k+1}/f_k)_j}, \quad (3.10.56)$$

просуммируем от $j = 1$ до N и получим

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{f_2(\Lambda_j)}{A_1 A_2 \dots A_{N+1}} = f_N(\Lambda_j) = B_N - \Lambda_j, \quad (3.10.57)$$

где мы учли, что, согласно (3.10.44а), $f_1(\Lambda_j) = 0$, $f_{N+1}(\Lambda_j) = 1$ и $f_N(\Lambda_j) = B_N - \Lambda_j$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{f_2(\Lambda_j)}{f_2(\Lambda_k)} = \Lambda_k - \Lambda_j. \quad (3.10.58)$$

Таким образом, вводя не зависящую от j величину $F = F(t)$ и постоянные C_j , которые определяются начальными условиями, видим, что (3.10.58) удовлетворяется, если

$$f_2(\Lambda_j) = C_j e^{-\Lambda_j t / F}. \quad (3.10.59)$$

Чтобы определить F , заметим, что

$$I_1 = \sum_{j=1}^N \Lambda_j = \sum_{j=1}^N B_j. \quad (3.10.60)$$

Тогда, как следует из (3.10.51),

$$1 = \frac{\partial I_1}{\partial B_1} = \sum_{\ell=1}^N \frac{\partial \Lambda_j}{\partial B_1} = \sum_{j=1}^N \frac{f_2(\Lambda_j)}{\prod_{\ell \neq j} (\Lambda_\ell - \Lambda_j)}, \quad (3.10.61)$$

и, подставляя (3.10.59), окончательно получим

$$F = \sum_{j=1}^N \frac{C_j e^{-\Lambda_j t}}{\prod_{\ell \neq j} (\Lambda_\ell - \Lambda_j)}. \quad (3.10.62)$$

Если подставить полученное выражение и (3.10.59) в (3.10.52), то получим $f_2(\Lambda)/f_1(\Lambda)$ как функцию времени, представленную в виде разложения на простые дроби. С другой стороны, та же величина $f_2(\Lambda)/f_1(\Lambda)$ была представлена в виде непрерывной дроби (3.10.45). Отсюда мы можем найти коэффициенты A_j и B_j методом Стильтеса (приложение А) как функции времени [3.14]. Изложенный выше метод, по-видимому, наиболее прямой метод получения решения с использованием сохраняющихся величин. Ана-

логичная идея, возможно, применима к периодической цепочке, хотя в настоящее время на этом пути успехов нет.

Задача 3.10. Приравнявая (3.10, 36, 22), вычислите (3.10.17) для случая $N = 2$.

Задача 3.11. Используя (3.10.54), докажите методом математической индукции (3.10.55).

Указание. Записав (3.10.44а) в виде

$$A_\ell \left(\frac{f_{\ell+2}}{f_{\ell+1}} \right)_j = B_\ell - A_j - \frac{1}{(f_{\ell+1}/f_\ell)_j},$$

продифференцируйте обе части по времени и предположите, что правая часть (3.10.55) имеет место при $k = \ell - 1$.

3.11. КONTИНУАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.

Для волн, у которых амплитуда смещения мала по сравнению со средним расстоянием между частицами цепочки, т.е. для волн с большой длиной волны, мы можем использовать континуальное приближение. Мы покажем, что уравнения движения цепочки сводятся к уравнению КдВ, если мы сохраним лишь нелинейные члены низшего порядка, а метод обратной задачи рассеяния для цепочки сводится к соответствующему методу для уравнения КдВ [3.56, 15, 16].

I. Для матриц L и B имеем

$$\begin{cases} (L\varphi)_n = a_{n-1} \varphi(n-1) + b_n \varphi(n) + a_n \varphi(n+1), \\ (B\varphi)_n = a_{n-1} \varphi(n-1) - a_n \varphi(n+1). \end{cases} \quad (3.11.1)$$

Следовательно, если ввести в рассмотрение оператор сдвига

$$e^{\pm \partial/\partial n} f(n) = f(n \pm 1) \quad (3.11.2)$$

и рассматривать n как непрерывную переменную, то получится

$$\begin{cases} L = b_n + e^{-\partial/\partial n} a_n + a_n e^{\partial/\partial n}, \\ B = e^{-\partial/\partial n} a_n - a_n e^{\partial/\partial n}. \end{cases} \quad (3.11.3)$$

Запишем формальные разложения

$$\begin{cases} e^{\pm \partial/\partial n} = 1 \pm \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{2\partial n^2} \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial n^3} + \dots, \\ a_n = \frac{1}{2} e^{-n/2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n}{2} \right), \end{cases} \quad (3.11.4)$$

а $\ell_n = P_n / 2$; тогда

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2} P_n + \left(1 - \frac{\tau_n}{2}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial n} \tau_n - \tau_n \frac{\partial}{\partial n} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2}, \\ B = -\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial n} \tau_n + \tau_n \frac{\partial}{\partial n} \right) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial n^3}. \end{cases} \quad (3.11.5)$$

В дальнейшем мы остановимся на исследовании волн, распространяющихся вправо. Введем систему координат ξ , которая движется вправо со скоростью распространения волн бесконечно малой амплитуды ($c_0 = 1$), перенормированное время τ , τ_n и новые переменные (ξ, τ) следующим образом:

$$\xi = n - t, \quad \tau = t/24, \quad u = 2\tau_n. \quad (3.11.6)$$

Теперь уравнение $\partial\psi/\partial t = B\psi$ дает

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi = \tilde{B} \psi, \quad (3.11.7)$$

где $\tilde{B}$ - перенормированная матрица B ,

$$\tilde{B} = -4 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + 3 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u + u \frac{\partial}{\partial \xi} \right). \quad (3.11.8)$$

Таким образом, видно, что $\partial/\partial \tau$ содержит старшие производные или малые величины, так что мы можем в данном приближении записать

$$P_n = -\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{1}{24} \frac{\partial Q}{\partial \tau} \approx -\tau_n = -\frac{u}{2}. \quad (3.11.9)$$

Третьим слагаемым в выражении для L (3.11.5) мы можем пренебречь как малой величиной. Таким образом, используя (3.11.9), получаем

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{u}{2} + 1, \quad (3.11.10)$$

а уравнение движения

$$L_\tau = \tilde{B}L - L\tilde{B} \quad (3.11.11)$$

дает уравнение КдВ (дифференцирование обозначено индексами)

$$u_\tau = 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.11.12)$$

Будем обозначать штрихом функции непрерывных переменных n и m в континуальном приближении. Тогда в (3.4.19, 20) мы должны записать

$$x'(n, m) = x'(n, m)h, \quad F'(n+m) = F'(n+m)h, \quad (3.11.13)$$

где h - среднее расстояние между частицами, причем $h = dn$.

В континуальном приближении уравнение ГЛ (3.4.21) сводится к интегральному уравнению

$$x'(n, m) + F'(n+m) + \int_n^{\infty} x'(n, n') F'(n'+m) dn' = 0, \quad (3.11.14)$$

а (3.4.22) принимает вид

$$\frac{1}{[K(n, n)]^2} = 1 + F'(2n) + \int_n^{\infty} x'(n, n') F'(n'+n) dn'. \quad (3.11.15)$$

Если мы запишем далее

$$\begin{cases} x = e^{ik}, & x_j = e^{-k_j}, \\ n-t = \xi, & m-t = \eta, \\ F'(n+m) = \tilde{F}(\xi+\eta), & k'(n, m) = \tilde{k}(\xi, \eta), \end{cases} \quad (3.11.16)$$

то ядро (3.4.19) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi+\eta; \tau) = \tilde{F}(\xi+\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, 0) e^{ik^3 \tau + ik(\xi+\eta)} dk + \\ + \sum c_j^2(0) e^{ik_j^3 \tau - k_j(\xi+\eta)}, \end{aligned} \quad (3.11.17)$$

где опущены члены высших порядков. Тогда уравнение ГЛ сводится к

$$\tilde{k}(\xi, \eta) + \tilde{F}(\xi+\eta) + \int_{\xi}^{\infty} \tilde{x}(\xi, \zeta) \tilde{F}(\zeta+\eta) d\zeta = 0. \quad (3.11.18)$$

Из уравнения (3.11.15) следует, что

$$K(\xi, \xi)^{-2} = 1 + \tilde{F}(2\xi) + \int_{\xi}^{\infty} \tilde{x}(\xi, \zeta) \tilde{F}(\zeta+\xi) d\zeta. \quad (3.11.19)$$

Вычитая из (3.11.19) соотношение (3.11.18), где сделана замена

$\eta \rightarrow \xi$, получаем

$$K(\xi, \xi)^{-2} = 1 - \tilde{x}(\xi, \xi), \quad (3.11.20)$$

и, следовательно, из (3.6.26) имеем

$$\begin{aligned} e^{-\tau n} &= \left[\frac{[K(n, n)]}{K(n-1, n-1)} \right]^2 \simeq \\ &\simeq \frac{1 - \tilde{x}(\xi-1, \xi-1)}{1 - \tilde{x}(\xi, \xi)} \simeq \\ &\simeq 1 + [\tilde{x}(\xi, \xi) - \tilde{x}(\xi-1, \xi-1)]. \end{aligned} \quad (3.11.21)$$

Таким образом, в этом приближении величина $u = 2v_n$ определяется из

$$u(\xi, t) = -2 \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{z}(\xi, \xi). \quad (3.11.22)$$

Уравнения (3.11.17, 18) и (3.11.22) хорошо известны в методе обратной задачи рассеяния для уравнения КдВ [3.17].

II. Уравнение Шредингера $L\varphi = \lambda\varphi$, соответствующее уравнению КдВ, обычно записывается в виде

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \left(\lambda^{(КдВ)} - u \right) \varphi = 0, \quad \lambda^{(КдВ)} = k^2. \quad (3.11.23)$$

Сравнивая (3.11.23) с уравнением, полученным из (3.11.10), именно

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \frac{u}{2} + 1 \right) \varphi = \lambda\varphi, \\ \lambda = \frac{z + z^{-1}}{2} = \cos k, \end{cases} \quad (3.11.24)$$

можно найти связь между спектром λ волн (например, солитонов) распространяющихся вправо в цепочке, и спектром $\lambda^{(КдВ)}$ уравнения КдВ. Для $\lambda \approx 1$ связь дается соотношением

$$\lambda = \cos \sqrt{\lambda^{(КдВ)}}, \quad (3.11.25)$$

и так как $\lambda^{(КдВ)}$ предполагается малым,

$$\lambda \approx 1 - \frac{\lambda^{(КдВ)}}{2}. \quad (3.11.26)$$

Таким образом, мы получим уравнение КдВ как континуальный предел уравнения для волн, распространяющихся по цепочке вправо. Как уже отмечалось ранее, мы можем рассмотреть цепочку с экспоненциальным взаимодействием и измененными знаками a_n аналогично проведенному рассмотрению. В этом случае переход к континуальному приближению дает уравнение КдВ

$$u_\tau + 6uu_\xi - u_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (3.11.27)$$

которое описывает волны, распространяющиеся влево, со спектром, приближенно, $\lambda \approx -1$.

III. Обсудим коротко континуальное приближение для преобразования Бэклунда [3.16]. Заметим сначала, что производная по времени переходит в

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Далее, разлагая Q'_n в окрестности n и Q_n в окрестности точки $n+1/2$ в равенстве (3.9.16), где $A = -I$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q'_n}{\partial n} - \frac{1}{24} \frac{\partial Q'_n}{\partial \tau} = 2 - \alpha - \frac{\partial Q_{n+1/2}}{\partial n} - (Q'_n - Q_{n+1/2})^2 - \\ - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 Q_{n+1/2}}{\partial n^3} - \frac{1}{4} (Q'_n - Q_{n+1/2}) \frac{\partial^2 Q_{n+1/2}}{\partial n^2} - \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial Q_{n+1/2}}{\partial n} \right)^2 - \frac{1}{2} (Q'_n - Q_{n+1/2})^2 \frac{\partial Q_{n+1/2}}{\partial n} \quad (3.11.28) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{n+1/2}}{\partial n} - \frac{1}{24} \frac{\partial Q_{n+1/2}}{\partial \tau} = 2 - \alpha - \frac{\partial Q'_n}{\partial n} + (Q'_n - Q_{n+1/2})^2 - \\ - \frac{1}{24} \frac{\partial^3 Q'_n}{\partial n^3} + \frac{1}{4} (Q'_n - Q_{n+1/2}) \frac{\partial^2 Q'_n}{\partial n^2} + \\ + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial Q'_n}{\partial n} \right)^2 - \frac{1}{2} (Q'_n - Q_{n+1/2})^2 \frac{\partial Q'_n}{\partial n}, \quad (3.11.29) \end{aligned}$$

где предполагалось, что порядки величин следующие:

$$Q \sim \varepsilon, \quad \partial/\partial n \sim \varepsilon, \quad \partial/\partial \tau \sim \varepsilon^3, \quad (3.11.30)$$

ε — малая величина; разложение велось до членов четвертого порядка малости включительно. Уравнения (3.11.28) и (3.11.29) разделяются на уравнения порядка ε^2 и уравнения порядка ε^4 . Если ввести

$$\begin{cases} 2Q_{n+1/2} = w(x, \tau), \\ 2Q'_n = w'(x, \tau), \end{cases} \quad (3.11.31)$$

где вместо n взята переменная x , слагаемые, пропорциональные ε^2 в (3.11.28, 29), дают одно и то же уравнение:

$$w'_x + w_x = 2(2 - \alpha) + (w' - w)^2/2; \quad (3.11.32)$$

производные обозначены здесь индексами. Что касается слагаемых, пропорциональных ε^4 , то, вычислив разность (3.11.28) и (3.11.29) и, воспользовавшись (3.11.32), получим

$$w_\tau - w'_\tau = -(w_{xxx} - w'_{xxx}) + 3(w_x^2 - w'^2_x). \quad (3.11.33)$$

Уравнения (3.11.32, 33) и есть преобразования Бэклунда [3.18] для уравнения КдВ, записанного в виде

$$w_t - 3w_x^2 + w_{xxx} = 0 \quad (u = w_x). \quad (3.11.34)$$

Глава 4

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

В этой главе мы рассмотрим периодические цепочки¹⁾. Как мы видели в предыдущей главе, в случае бесконечной цепочки использование метода обратной задачи рассеяния приводит к дискретному уравнению Шредингера. Для периодических систем это дает дискретное уравнение Хилла; вместо данных рассеяния в этом случае принято использовать спектр дискретного уравнения Хилла и дополнительный спектр уравнения при фиксированных граничных условиях. В данном случае важную роль играют фундаментальные решения и дискриминант уравнения Хилла. Дискриминант представляет собой полином от спектра, а интегралы движения выражаются через эллиптические интегралы. Таким образом, решение начальной задачи сводится к решению обратной задачи (обратной задачи Якоби), или к обратной спектральной теории. Чтобы исследовать эту задачу, мы рассмотрим спектр на комплексной поверхности и интегралы на замкнутых римановых поверхностях. В качестве простого примера вновь возьмем случай кноидальных волн и, наконец, с целью подготовки к следующей главе приведем конкретные вычисления для системы из трех частиц, покажем некоторые соотношения между дискриминантом и дополнительным спектром, рассматриваемым как набор динамических переменных.

4.1. ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ХИЛЛА

В настоящем разделе мы обсудим начальную задачу для периоди-

¹⁾ Часть настоящей и последующей глав включена в работу [4.7].

ческой цепочки с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями. Предположим, что система состоит из N частиц, а примеси отсутствуют. Для динамических переменных будем использовать такие же обозначения, как и ранее: $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$. Условия периодичности записываются как

$$a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n. \quad (4.1.1)$$

Удобно рассматривать бесконечную систему

$$-\infty < n < \infty, \quad (4.1.2)$$

составленную из таких a_n и b_n . Для этой бесконечной системы рассмотрим уравнение

$$(L\varphi)_n \equiv a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1) = \lambda\varphi(n), \quad (4.1.3a)$$

где λ - константа. Поскольку коэффициенты a_n и b_n периодические, написанное выше уравнение есть дискретный вариант уравнения Хилла [4.1]

$$d^2\varphi/dx^2 + (\lambda - u)\varphi = 0, \quad u(x+L) = u(x), \quad (4.1.3b)$$

поэтому в дальнейшем (4.1.3a) будем называть дискретным уравнением Хилла. Это уравнение является разностным уравнением второго порядка, которое может быть решено относительно $\varphi(n)$, если, например, заданы $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ - значения $\varphi(n)$ соответственно при $n = 0$ и $n = 1$. Найденная таким образом $\varphi(n)$, вообще говоря, непрерывна и может расходиться. Решение называют устойчивым, если $\varphi(n)$ не расходится. Ниже будет показано, что устойчивые решения образуют зоны спектра λ , а между этими устойчивыми зонами расположены зоны неустойчивости (щели)¹⁾. Такая структура спектра определяет определенные ограничения на вид a_n и b_n . Хотя задача нахождения a_n и b_n по известному спектру также является обратной задачей, в случае периодических систем мы не имеем асимптотики решения на бесконечности, или данных рассеяния, поэтому данную задачу более уместно называть обратной спектральной задачей, чем обратной задачей рассеяния. Будет показано, что, если из начальных условий известен определенный набор данных, мы сможем определить дальнейшую эволюцию цепочки.

¹⁾ В литературе по физике твердого тела их называют соответственно разрешенными и запрещенными зонами. - Прим. перев.

В данном случае необходимые данные - это спектр, не зависящий от времени, и начальный дополнительный спектр. Так как обратная задача для периодических систем более сложная, чем в случае бесконечной цепочки, вся данная глава будет посвящена исследованию этой проблемы. Начнем с изучения некоторых свойств дискретного уравнения Хилла [4.2, 3].

Так как дискретное уравнение Хилла (4.1.3а) - разностное уравнение второго порядка, для фиксированного λ имеем два линейно независимых решения (фундаментальные решения), а произвольное решение уравнения с тем же λ может быть записано как линейная комбинация этих фундаментальных решений. Обозначим фундаментальные решения ($-\infty < n < \infty$) (4.1.3а) как $\varphi_1(n) = \varphi_1(n, \lambda)$ и $\varphi_2(n) = \varphi_2(n, \lambda)$. Произвольное решение $\varphi(n) = \varphi(n, \lambda)$ запишется в виде

$$\varphi(n) = c_1 \varphi_1(n) + c_2 \varphi_2(n). \quad (4.1.4)$$

Хотя последующие результаты останутся в силе независимо от выбора фундаментальных решений, для определенности мы будем использовать фундаментальные решения, определяемые граничными условиями

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 1, & \varphi_1(1) = 0, \\ \varphi_2(0) = 0, & \varphi_2(1) = 1. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Когда эти решения устойчивы, мы можем считать, что $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ - функции, подобные соответственно косинусу и синусу. Записывая (4.1.3а) для $\varphi_1(n)$, имеем

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \varphi_1(2) = 0, \\ b_2 \varphi_1(2) + a_2 \varphi_1(3) = \lambda \varphi_1(2), \\ a_2 \varphi_1(2) + b_3 \varphi_1(3) + a_3 \varphi_1(4) = \lambda \varphi_1(3), \\ \dots \dots \dots ; \end{cases} \quad (4.1.6)$$

решая последовательно эти уравнения, получаем

$$\begin{cases} \varphi_1(2) = -\frac{a_0}{a_1}, \\ \varphi_1(3) = -\frac{a_0}{a_1 a_2} (\lambda - b_2), \\ \varphi_1(4) = -\frac{a_0}{a_1 a_2 a_3} [\lambda^2 - (b_2 + b_3) \lambda - a_0 a_1 a_2 + b_2 b_3], \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (4.1.7)$$

В общем случае при $n \geq 2$

$$\varphi_1(n) = -a_0 \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} \left[\lambda^{n-2} - \left(\sum_{j=2}^{n-1} b_j \right) \lambda^{n-3} + \dots \right]. \quad (4.1.8)$$

Аналогично при $n \geq 2$ для $\varphi_2(n)$ имеем

$$\varphi_2(n) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} \left[\lambda^{n-1} - \left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j \right) \lambda^{n-2} + \dots \right]. \quad (4.1.9)$$

Теперь, заменив n в (4.1.3а) на $n+N$ и вспомнив соотношение (4.1.1), видим, что $\varphi_1(n+N)$ и $\varphi_2(n+N)$ также удовлетворяют уравнению (4.1.3а), поэтому их можно выразить как линейные комбинации $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$. Таким образом, можно записать

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(N+n) \\ \varphi_2(N+n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \varphi_1(n) \\ \varphi_2(n) \end{pmatrix}, \quad (4.1.10)$$

где M — матрица 2×2 . Полагая $n = 0, 1$ и используя (4.1.5), можно определить элементы M как

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(N) & \varphi_1(N+1) \\ \varphi_2(N) & \varphi_2(N+1) \end{pmatrix}, \quad (4.1.11)$$

где M — так называемая матрица монодромии. С другой стороны, φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} a_n \varphi_1(n+1) + b_n \varphi_1(n) + a_{n-1} \varphi_1(n-1) = \lambda \varphi_1(n), \\ a_n \varphi_2(n+1) + b_n \varphi_2(n) + a_{n-1} \varphi_2(n-1) = \lambda \varphi_2(n); \end{cases} \quad (4.1.12)$$

исключая из этих уравнений λ , имеем

$$\begin{aligned} W &\equiv a_n [\varphi_1(n) \varphi_2(n+1) - \varphi_1(n+1) \varphi_2(n)] = \\ &= a_{n-1} [\varphi_1(n-1) \varphi_2(n) - \varphi_1(n) \varphi_2(n-1)]. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Данное соотношение представляет собой дискретный вариант вронскиана W , записанного для разностей $\varphi_1(n+1) - \varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n+1) - \varphi_2(n)$. Заменяя n на N и заменяя n на 1 в другой части равенства, получаем

$$\begin{aligned} W &= a_N [\varphi_1(N) \varphi_2(N+1) - \varphi_1(N+1) \varphi_2(N)] = \\ &= a_0 [\varphi_1(0) \varphi_2(1) - \varphi_1(1) \varphi_2(0)] = \\ &= a_0; \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

здесь мы использовали (4.1.5). Далее, так как $a_0 = a_n$, имеем

$$\det M = \varphi_1(N) \varphi_2(N+1) - \varphi_1(N+1) \varphi_2(N) = 1. \quad (4.1.15)$$

Для некоторых специально выбранных λ решение $\varphi(n)$ (4.1.4) может быть периодическим, а в общем случае решение удовлетворяет условию

$$\varphi(n+N) = \rho \varphi(n), \quad (4.1.16)$$

что для $n = 0, 1$ дает

$$\begin{cases} c_1 \varphi_1(N) + c_2 \varphi_2(N) = \rho c_1, \\ c_1 \varphi_1(N+1) + c_2 \varphi_2(N+1) = \rho c_2. \end{cases} \quad (4.1.17)$$

Следовательно, ρ является корнем уравнения

$$\rho^2 - \Delta(\lambda) \rho + 1 = 0, \quad (4.1.18)$$

где

$$\Delta(\lambda) = \varphi_1(N) + \varphi_2(N+1) = \text{Sp} \{M\}; \quad (4.1.19)$$

эта величина называется дискриминантом. Функция $\varphi(n)$, определенная условием (4.1.16), называется функцией Блоха (первоначально этот термин использовался для волновой функции электрона, движущегося в периодическом электрическом поле внутри твердого тела). Факт существования такой функции известен как теорема Флоке. Решением уравнения (4.1.18) является

$$\rho = \frac{1}{2} (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}). \quad (4.1.20)$$

Уравнение (4.1.19) имеет место при любом выборе фундаментальных решений.

В качестве простого примера рассмотрим цепочку в состоянии покоя:

$$a_n = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0. \quad (4.1.21)$$

Тогда (4.1.3а) сводится к

$$\frac{1}{2} [\varphi(n+1) + \varphi(n-1)] = \lambda \varphi(n). \quad (4.1.22)$$

Ищем решение в виде $\varphi \sim \exp(\pm i \alpha n)$. В результате получим

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = -\frac{\sin \lambda (n-1)}{\sin \lambda}, \\ \varphi_2(n) = \frac{\sin \lambda n}{\sin \lambda}, \\ \lambda = \cos \lambda. \end{cases} \quad (4.1.23)$$

Дискриминант в данном случае имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{\sin \lambda} [-\sin \lambda (N-1) + \sin \lambda (N+1)] = 2 \cos \lambda N; \quad (4.1.24)$$

для $|\lambda| \leq 1$ он осциллирует между ± 2 . Корни λ_j уравнения $\Delta^2 - 4 = 0$ ($\lambda_j = \pi/N$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$) двукратно вырождены, за исключением $j = 0, N$. Для $|\lambda| > 1$ корни λ мнимые, а для $\lambda \rightarrow \pm \infty$ $|\Delta(\lambda)| \rightarrow \infty$ (рис. 4.1). Когда λ удовлетворяет неравенству

$$\Delta^2(\lambda) \leq 4, \quad (4.1.25)$$

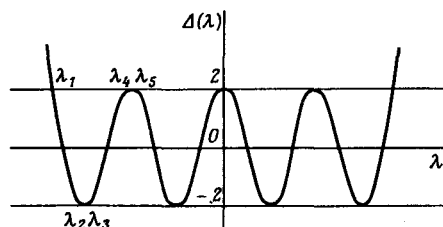


Рис. 4.1. Зависимость $\Delta(\lambda)$ в случае отсутствия движения. n четное, $g = 0$ (число простых корней равно $2g+2$).

ρ , согласно (4.1.20), вообще говоря, комплексно, а $|\rho| = 1$. Таким образом, такие λ принадлежат к области устойчивости, и, следовательно, решения устойчивы. Если $\rho = 1$, то период решения равен N , $[\varphi(n+N) = \varphi(n)]$, а если $\rho = -1$, то период равен $2N$ $[\varphi(n+N) = -\varphi(n)]$. В случае когда

$$\Delta^2(\lambda) > 4, \quad (4.1.26)$$

λ принадлежит области неустойчивости. Корни уравнений

$$\Delta(\lambda) - 2 = 0 \quad (4.1.27a)$$

и

$$\Delta(\lambda) + 2 = 0 \quad (4.1.27b)$$

соответствуют собственным функциям с периодами N и $2N$. Легко видеть, что они являются собственными функциями матриц L^+ и L^-

соответственно, где L^+ и L^- определены как

$$L^{\pm} = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & \pm a_N \\ a_1 & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & b_{N-1} & a_{N-1} \\ \pm a_N & & a_{N-1} & b_N \end{bmatrix}. \quad (4.1.28)$$

Так как элементы этих симметричных матриц вещественны, их собственные значения также вещественны. Докажем это. Пусть L — симметричная матрица, а u есть ее собственная функция, соответствующая собственному значению λ . Если обозначить звездочками комплексно-сопряженные величины, получим

$$\lambda u^* \cdot u = u^* \cdot L \cdot u,$$

$$\lambda^* u \cdot u^* = u \cdot L \cdot u^* = u^* \cdot L \cdot u$$

и тогда

$$(\lambda - \lambda^*) u^* \cdot u = 0.$$

Следовательно, λ вещественно. Все собственные значения (4.1.28) поэтому тоже вещественны.

Уравнения (4.1.8, 9, 19) дают

$$\Delta(\lambda) = \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-1} \left[\lambda^N - \left(\sum_{j=1}^N b_j \right) \lambda^{N-1} + \dots \right]. \quad (4.1.29)$$

Так как уравнение $\Delta^2(\lambda) = 4$ имеет $2N$ корней λ_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, 2N$), имеем

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-2} \prod_{\ell=1}^{2N} (\lambda - \lambda_\ell). \quad (4.1.30)$$

Если значения λ_ℓ пронумерованы в возрастающем порядке (рис. 4.2), то

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots < \lambda_{2N-2} \leq \lambda_{2N-1} < \lambda_{2N}. \quad (4.1.31)$$

Только интервалы $[\lambda_{2\ell}, \lambda_{2\ell+1}]$ ($\ell = 1, 2, \dots, N-1$) могут вырождаться в точку, давая двукратно вырожденные корни. Спектр (4.1.31) состоит из двух переплетающихся серий, одна серия — корни $\Delta - 2 = 0$, а другая — корни $\Delta + 2 = 0$, как показано ниже.

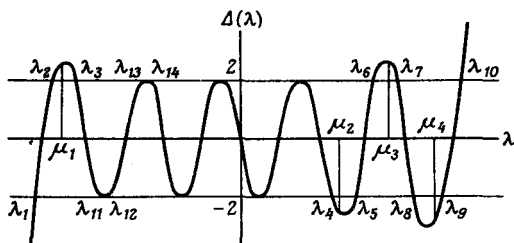


Рис. 4.2. Зависимость $\Delta(\lambda)$ в случае наличия движения. n нечетное ($=11$), $g = 4$ (простые корни пронумерованы перед двукратно вырожденными корнями).

Чтобы доказать чередование точек спектра, мы используем два решения (4.1.3а) с разными λ :

$$\varphi(n) = \varphi(n, \lambda) \quad \psi(n) = \psi(n, \lambda'). \quad (4.1.32)$$

Согласно (4.1.3а),

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda') \varphi(n) \psi(n) &= \psi(n) [a_n \varphi(n+1) + b_n \varphi(n) + a_{n-1} \varphi(n-1)] - \\ &- \varphi(n) [a_n \psi(n+1) + b_n \psi(n) + a_{n-1} \psi(n-1)] = \\ &= a_n [\varphi(n+1) \psi(n) - \varphi(n) \psi(n+1)] - \\ &- a_{n-1} [\varphi(n) \psi(n-1) - \varphi(n-1) \psi(n)], \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

так что

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda') \sum_{n=1}^N \varphi(n) \psi(n) &= \\ &= a_N [\varphi(N+1) \psi(N) - \varphi(N) \psi(N+1)] - a_0 [\varphi(1) \psi(0) - \varphi(0) \psi(1)]. \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Применяя это к двум фундаментальным решениям

$$\varphi(n) = \varphi_1(n, \lambda), \quad \psi(n) = \varphi_1(n, \lambda'), \quad (4.1.35)$$

имеем

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda') \sum_{n=1}^N \varphi_1(n, \lambda) \varphi_1(n, \lambda') &= \\ &= a_N [\varphi_1(N+1, \lambda) \varphi_1(N, \lambda') - \varphi_1(N, \lambda) \varphi_1(N+1, \lambda')]. \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

Пусть λ стремится к λ' ; введем производные

$$\varphi'_1 = \frac{d\varphi_1}{d\lambda}. \quad (4.1.37)$$

Тогда выражение для нормы имеет вид

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\|^2 &= \sum_{n=1}^N \varphi_1^2(n) = \\ &= a_N [\varphi_1(N) \varphi_1'(N+1) - \varphi_1(N+1) \varphi_1'(N)]. \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

Аналогичное выражение получается для φ_2 и для скалярного произведения $\varphi_1 \cdot \varphi_2$. Если мы найдем из этих уравнений $\varphi_1'(N+1)$, $\varphi_1'(N)$ и т.д. и затем подставим их в выражение для производной по λ от $\Delta(\lambda)$, выраженной через (4.1.19), то получим

$$\frac{d\Delta}{d\lambda} = \frac{1}{a_N} \sum_{n=1}^N \left\{ \varphi_2(N) \varphi_1^2(n) - [\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1)] \varphi_1(n) \varphi_2(n) - \varphi_1(N+1) \varphi_2^2(n) \right\}, \quad (4.1.39)$$

или, вспомнив (4.1.15),

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{d\lambda} &= - \frac{\varphi_1(N+1)}{a_N} \sum_{n=1}^N \left\{ \left[\varphi_2(n) + \frac{\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1)}{2\varphi_1(N+1)} \varphi_1(n) \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma}{4\varphi_1^2(N+1)} \varphi_1^2(n) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

где с учетом (4.1.15) и (4.1.19) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma &= [\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1)]^2 + 4\varphi_2(N) \varphi_1(N+1) = \\ &= [\varphi_1(N) + \varphi_2(N+1)]^2 - 4 = \\ &= \Delta^2 - 4. \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

Следовательно, при $\Delta^2 - 4 < 0$ $d\Delta/d\lambda$ будет иметь знак $-\varphi_1(N+1)$.

Если $\varphi_1(N+1)$ обращается в нуль при $\Delta^2 - 4 < 0$, из (4.1.15) следует, что $\varphi_1(N) \varphi_2(N+1) = 1$ и что $|\Delta| = |\varphi_1(N) + 1/\varphi_1(N)| \geq 2$, а это противоречит исходному предположению. Следовательно, $\varphi_1(N+1)$ не может обращаться в нуль при $\Delta^2 - 4 < 0$. Другими словами, $d\Delta/d\lambda$ может менять знак лишь в области $\Delta^2 - 4 > 0$.

Это доказывает чередование точек спектра. Рис. 4.2 иллюстрирует возможное соотношение между $\Delta(\lambda)$ и λ . Как уже упоминалось ранее, корни $\Delta^2 - 4 = 0$, т.е. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ не зависят от времени. Далее в разд. 4.6 будет показано, что и сам дискриминант $\Delta(\lambda)$ не зависит от времени.

Задача 4.1. Покажите, что

$$\Delta(\lambda) = -\frac{1}{a_0} (\lambda - \epsilon_1) \varphi_1(N+1) + O(\lambda^{N-2}) = (-1)^N A^{-1} \det(L^\pm - \lambda I)^{\pm 2},$$

где

$$A = a_1 a_2 \dots a_N.$$

4.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПЕКТР

Несмотря на то что полное число корней λ_j уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ (т.е. спектр) равно $2N$ и совпадает с числом динамических переменных a_n и b_n , мы не можем определить эти динамические переменные, даже если все λ_j известны. В самом деле, можно показать, что не все λ_j независимы (см. приложение В). Следовательно, чтобы решить обратную задачу, нам необходимо иметь дополнительную информацию. В качестве таковой можно использовать дополнительный спектр μ_j [4.2, 3], который определяется наложением граничных условий, отличающихся от соответствующих граничных условий для λ_j .

Определим дополнительный спектр μ_j как

$$\varphi_1(N+1, \mu_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N-1). \quad (4.2.1)$$

Так как φ_1 — полином порядка $N-1$, имеем $N-1$ корней для μ_j . В соответствии с определением φ_1 имеем $\varphi_1(1, \mu_j) = 0$ [$\varphi_1(0, \mu_j) = 1$, но это не существенно для определения μ_j]. Так как из (4.2.1) и (4.1.15) следует, что

$$\varphi_1(N, \mu_j) \varphi_2(N+1, \mu_j) = 1, \quad (4.2.2)$$

из (4.1.19) имеем

$$\Delta(\mu_j) = \varphi_1(N, \mu_j) + \frac{1}{\varphi_1(N, \mu_j)}. \quad (4.2.3)$$

Таким образом,

$$|\Delta(\mu_j)| \geq 2, \quad (4.2.4)$$

а это показывает, что μ_j лежат в области неустойчивости. Все μ_j простые (см. приложение Г) и расположены между λ_{2j} и λ_{2j+1} :

$$\lambda_{2j} \leq \mu_j \leq \lambda_{2j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1). \quad (4.2.5)$$

Теперь, поскольку в силу (4.1.8) и (4.2.1)

$$\begin{aligned}\varphi_1(N+1, \lambda) &= -a_0 \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-1} \left[\lambda^{N-1} - \left(\sum_{j=2}^N b_j \right) \lambda^{N-2} + \dots \right] = \\ &= -a_0 \left(\prod_{j=1}^N a_j \right)^{-1} \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j),\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

получим соотношение

$$\sum_{j=2}^N b_j = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j, \quad (4.2.7)$$

которое можно переписать как

$$\sum_{j=1}^N b_j - b_1 = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j. \quad (4.2.8)$$

С другой стороны, сравнивая (4.1.29, 30), имеем

$$\tilde{\Lambda} \equiv \sum_{j=1}^N b_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} \lambda_j = \text{const}. \quad (4.2.9)$$

Таким образом, если все μ_j известны, b_1 определяется как

$$b_1 = \tilde{\Lambda} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j. \quad (4.2.10)$$

В случаях когда кривая $\Delta(\lambda)$ пересекает кривые $\Delta(\lambda) = \pm 2$, имеем простые корни, а когда она касается кривых $\Delta(\lambda) = \pm 2$, имеем двукратно вырожденные корни. Если λ_{2j} и λ_{2j+1} совпадают (двукратно вырожденный корень), то μ_j также совпадает с ними ($\lambda_{2j} = \mu_j = \lambda_{2j+1}$). Если λ_{2j} и λ_{2j+1} различны (простые корни), μ_j расположен между ними (μ_j осциллирует во времени между λ_{2j} и λ_{2j+1} , как будет показано далее). В последующем рассмотрении простые корни λ_j будут играть центральную роль. Пусть число простых корней равно $2g+2$; изгибом нумерацию простых корней

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2g+2} \quad (4.2.11a)$$

и двукратно вырожденных корней

$$\lambda_{2j+1} = \lambda_{2j+2} \quad (j = g+1, \dots, N-1). \quad (4.2.116)$$

Изменим также нумерацию μ_j :

$$\lambda_{2j} < \mu_j < \lambda_{2j+1} \quad (j = 1, \dots, g), \quad (4.2.12a)$$

а для вырожденных корней

$$\mu_j = \lambda_{2j+1} = \lambda_{2j+2} \quad (j = g+1, \dots, N-1). \quad (4.2.12b)$$

Используя эти определения, перепишем (4.2.10) в виде

$$\ell_1 = \Lambda - \sum_{j=1}^g \mu_j, \quad (4.2.13)$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2g+2} \lambda_j = \text{const}. \quad (4.2.14)$$

Следовательно, если мы знаем дополнительный спектр μ_j ($j = 1, 2, \dots, g$), то можно получить ℓ_1 . Аналогичные рассуждения приводят к формуле для ℓ_k , для этого надо лишь сдвинуть индексы n на постоянную k [4.3]. Обозначим через $\varphi_1(n|k) = \varphi_1(n, \lambda|k)$ и $\varphi_2(n|k) = \varphi_2(n, \lambda|k)$ решения уравнения

$$\alpha_{n+k-1} \varphi(n-1|k) + \ell_{n+k} \varphi(n|k) + \alpha_{n+k} \varphi(n+1|k) = \lambda \varphi(n|k), \quad (4.2.15)$$

соответствующие граничным условиям

$$\begin{cases} \varphi_1(0|k) = 1, & \varphi_1(1|k) = 0, \\ \varphi_2(0|k) = 0, & \varphi_2(1|k) = 1. \end{cases} \quad (4.2.16)$$

Мы можем выразить $\varphi_1(n|k)$ и $\varphi_2(n|k)$ через

$\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ как

$$\begin{cases} \varphi_1(n|k) = \alpha_1 \varphi_1(k+n) + \beta_1 \varphi_2(k+n), \\ \varphi_2(n|k) = \alpha_2 \varphi_1(k+n) + \beta_2 \varphi_2(k+n). \end{cases} \quad (4.2.17)$$

Для $n = 0$ и $n = 1$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 \varphi_1(k) + \beta_1 \varphi_2(k), \\ 0 = \alpha_1 \varphi_1(k+1) + \beta_1 \varphi_2(k+1), \\ 0 = \alpha_2 \varphi_1(k) + \beta_2 \varphi_2(k), \\ 1 = \alpha_2 \varphi_1(k+1) + \beta_2 \varphi_2(k+1). \end{cases} \quad (4.2.18)$$

Следовательно, исключая β_1 из первых двух уравнений, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_2(k+1) &= \alpha_1 [\varphi_1(k) \varphi_2(k+1) - \varphi_1(k+1) \varphi_2(k)] = \\ &= \frac{W}{a_k} \alpha_1 = \\ &= \frac{a_0}{a_k} \alpha_1, \end{aligned} \quad (4.2.19a)$$

где мы использовали вронскиан W (4.1.14). Аналогично

$$\begin{cases} \varphi_1(k+1) = -\frac{W}{a_k} \beta_1 = -\frac{a_0}{a_k} \beta_1, \\ \varphi_2(k) = -\frac{W}{a_k} \alpha_2 = -\frac{a_0}{a_k} \alpha_2, \\ \varphi_1(k) = \frac{W}{a_k} \beta_2 = \frac{a_0}{a_k} \beta_2. \end{cases} \quad (4.2.19b)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \varphi_1(n|k) = \frac{a_k}{a_0} [\varphi_2(k+1)\varphi_1(k+n) - \varphi_1(k+1)\varphi_2(k+n)], \\ \varphi_2(n|k) = \frac{a_k}{a_0} [-\varphi_2(k)\varphi_1(k+n) + \varphi_1(k)\varphi_2(k+n)]. \end{cases} \quad (4.2.20)$$

Не сложно показать, что дискриминант является инвариантом

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda|k) &= \varphi_1(N|k) + \varphi_2(N+1|k) = \\ &= \Delta(\lambda), \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

откуда следует, что корни уравнения $\Delta^2 - 4 = 0$ также инвариантны:

$$\lambda_j(k) = \lambda_j(0) = \lambda_j. \quad (4.2.22)$$

Теперь мы определим $\mu_j(k)$ из

$$\varphi_1[N+1, \mu_j(k)|k] = 0. \quad (4.2.23)$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим

$$\lambda_{2j} \leq \mu_j(k) \leq \lambda_{2j+1}, \quad (4.2.24)$$

однако в общем случае

$$\mu_j(k) \neq \mu_j [= \mu_j(0)]. \quad (4.2.25)$$

Аналогично (4.1.8) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(N+1, \lambda|k) &= -a_k \left(\prod_{j=1}^N a_{j+k} \right)^{-1} \left[\lambda^{N-1} - \left(\sum_{j=2}^N b_{j+k} \right) \lambda^{N-2} + \dots \right] = \\ &= -a_k \left(\prod_{j=1}^N a_{j+k} \right)^{-1} \prod_{\ell=1}^{N-1} [\lambda - \mu_\ell(k)]. \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Следовательно, на основании соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^N v_{j+k} &= v_{k+3} + v_{k+2} + \dots + v_N + v_{N+1} + \dots + v_{k+N-1} + v_{k+N} = \\ &= v_{k+2} + v_{k+3} + \dots + v_N + v_1 + \dots + v_{k-1} + v_k = \\ &= \sum_{\ell=1}^N v_{\ell} - v_{k+1} \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

запишем

$$\sum_{\ell=1}^N v_{\ell} - v_{k+1} = \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j(k). \quad (4.2.28)$$

С другой стороны, имеем (4.2.9), или

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N} \lambda_j = \sum_{j=1}^N v_j. \quad (4.2.29)$$

Таким образом, приходим к формуле

$$v_{k+1} = \tilde{\Lambda} - \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j(k). \quad (4.2.30)$$

Меняем нумерацию так, чтобы корень $\mu_j(k)$ ($j = 1, 2, \dots, g$) лежал между простыми корнями; тогда

$$\begin{cases} \lambda_{2j} \leq \mu_j(k) \leq \lambda_{2j+1} & (j = 1, 2, \dots, g), \\ \mu_j(k) = \lambda_{2j+1} = \lambda_{2j+2} & (j = g+1, g+2, \dots, N-1). \end{cases} \quad (4.2.31)$$

Используя эти определения, получаем важную формулу

$$v_{k+1} = \Lambda - \sum_{j=1}^g \mu_j(k), \quad (4.2.32a)$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2g+2} \lambda_j. \quad (4.2.325)$$

4.3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ $\mu_j(k)$ И $\mu_j(0)$

В то время как корни λ_j уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$ не зависят от времени, каждый корень $\mu_j(k)$ будет осциллировать в интервале $[\lambda_{2j+1}, \lambda_{2j+2}]$ ($j=1, 2, \dots, g$) (см. разд. 4.6). Прежде чем отыскивать движение, отметим важное соотношение между $\mu_j(k)$ и $\mu_j(0)$, а затем продолжим выяснять соотношения между динамическими переменными (a_n, b_n) и $\mu_j(k)$ в разд. 4.4, 6.

Функцию Блоха, определенную условием (4.1.16), можно записать, опуская постоянный множитель, как

$$\varphi^\pm(n) = \frac{c_1}{c_2} \varphi_1(n) + \varphi_2(n), \quad (4.3.1)$$

где c_1/c_2 определяется из решения (4.1.17):

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{p - \varphi_2(N+1)}{\varphi_1(N+1)} = \frac{\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1) \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}}{2\varphi_1(N+1)}, \quad (4.3.2)$$

или, иначе,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\varphi_2(N)}{p - \varphi_1(N)} = \frac{2\varphi_2(N)}{-\varphi_1(N) + \varphi_2(N+1) \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}}. \quad (4.3.3)$$

Приравнивая эти два выражения, мы снова получаем (4.1.41). С

другой стороны, используя (4.3.1, 2) и (4.1.4I), приходим к

$$\begin{aligned}
 \varphi^+(n)\varphi^-(n) &= \\
 &= \frac{1}{4\varphi_1^2(N+1)} \left\{ [\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1) + \sqrt{\Delta^2 - 4}] \varphi_1(n) + 2\varphi_1(N+1)\varphi_2(n) \right. \\
 &\times \left. \left\{ [\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1) - \sqrt{\Delta^2 - 4}] \varphi_1(n) + 2\varphi_1(N+1)\varphi_2(n) \right\} \right\} = \\
 &= \frac{1}{\varphi_1(N+1)} \left\{ [\varphi_1(N) - \varphi_2(N+1)] \varphi_1(n)\varphi_2(n) + \varphi_1(N+1)\varphi_2^2(n) - \varphi_2(N)\varphi_1^2(n) \right\} = \\
 &= \frac{a_0/a_{n-1}}{\varphi_1(N+1)} \varphi_1(N+1|n-1), \quad (4.3.4)
 \end{aligned}$$

где для получения последней строки равенства (4.3.4) мы использовали (4.2.20) и (4.1.10, 11). Заменяя n на $n+1$, имеем

$$\varphi^+(n+1)\varphi^-(n+1) = \frac{a_0}{a_n} \frac{\varphi_1(N+1|n)}{\varphi_1(N+1)}. \quad (4.3.5)$$

Далее, по определению $\mu_j = \mu_j(0)$ имеем $\varphi_1(N+1) = 0$ при $\lambda = \mu_j$, когда в силу (4.1.4I) числитель выражения (4.3.2), в котором выбран знак плюс, имеет вид

$$\varphi_1(N, \mu_j) - \varphi_2(N+1, \mu_j) + \sqrt{\Delta^2(\mu_j) - 4} = 2\sqrt{\Delta^2(\mu_j) - 4} \quad (4.3.6)$$

и, вообще говоря, не обращается в нуль. Следовательно, $\varphi^+(n+1)$ имеет полюс при $\lambda = \mu_j$. С другой стороны, $\varphi_1(N+1|n)$ обращается в нуль при $\lambda = \mu_j(n)$, так что из (4.3.5) видим, что $\varphi^-(n+1)$ имеет нуль при $\lambda = \mu_j(n)$. Подставляя k вместо n , имеем

$$\varphi^+(k+1, \mu_j) = \infty, \quad \varphi^-[k+1, \mu_j(k)] = 0. \quad (4.3.7)$$

Можно рассматривать $\varphi^+(k+1, \lambda)$ и $\varphi^-(k+1, \lambda)$ как значения функции $\varphi(k+1, \lambda)$ на двух листах римановой по-

верхности S с разрезами вдоль интервалов между λ_{2j-1} и λ_{2j} ($j = 1, 2, \dots, g$), нулями $[\Delta^2(\lambda) - 4]^{1/2}$. На верхнем листе $[\Delta^2(\lambda) - 4]^{1/2}$ имеет значение $\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}$, а на нижнем листе — значение $-\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}$. Таким образом, функция Блоха $\varphi(k+1, \lambda)$ имеет простые нули в точках $\mu_j(k)$ и простые полюса в $\mu_j(0)$ на поверхности S и связывает их, как и ожидалось.

Функция $\varphi(k+1, \lambda)$ имеет нуль и полюс на бесконечности на римановой поверхности. В самом деле, для достаточно больших λ в силу соотношений $\varphi_1(N) \sim \lambda^{N-2}$, $\varphi_2(N) \sim \lambda^{N-1}$, $\varphi_1(N+1) \sim \lambda^{N-1}$, $\varphi_2(N+1) \sim \lambda^N$ и $\Delta(\lambda) = \varphi_1(N) + \varphi_2(N+1) \sim \lambda^N$ имеем

$$\varphi^+(k+1) \sim \varphi_2(k+1) \sim \lambda^k, \quad (4.3.8)$$

а с учетом (4.3.5, 8) и (4.2.26)

$$\varphi^-(k+1) \sim \frac{\varphi_1(N+1|k)}{\varphi_1(N+1)\varphi^+(k+1)} \sim \lambda^{-k}. \quad (4.3.9)$$

Следовательно, $\varphi(k+1)$ имеет полюс порядка k на бесконечности ∞ (на верхнем листе поверхности) и нуль порядка k на бесконечности ∞' (на нижнем листе поверхности).

Рассмотрим дифференциал

$$\omega(k) = \left[\frac{d}{d\lambda} \ln \varphi(k+1, \lambda) \right] d\lambda, \quad (4.3.10)$$

который имеет полюса в точках $\mu_j(0)$ и $\mu_j(k)$ с вычетами соответственно $+1$ и -1 и полюса на ∞ и ∞' с вычетами соответственно $+k$ и $-k$ [4.3]. Действительно, используя (4.3.1, 2), видим, что

$$\omega(k) = \left[f(\lambda) + g(\lambda)(\Delta^2 - 4)^{1/2} + \frac{h(\lambda)}{(\Delta^2 - 4)^{1/2}} \right] \frac{d\lambda}{F(\lambda)}, \quad (4.3.11)$$

где $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ и $F(\lambda)$ являются некоторыми полиномами. Конкретные выражения для них здесь не необходимы.

Так как мы имеем $2g+2$ простых корней среди $2N$ корней

уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, можем записать

$$[\Delta^2(\lambda) - 4]^{1/2} = (\text{Полином от } \lambda) \times [R(\lambda)]^{1/2}, \quad (4.3.12a)$$

где

$$R(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j). \quad (4.3.12b)$$

Введем дифференциал

$$\omega_{(1)} = \frac{\lambda^3 d\lambda}{[R(\lambda)]^{1/2}} \quad (4.3.13)$$

и базис $\{\omega_\ell\}$ гиперэллиптических функций

$$\omega_\ell = \sum_{j=0}^{g-1} c_{\ell j} \omega_{(1)}. \quad (4.3.14)$$

Такие дифференциалы не имеют полюсов и называются абелевыми дифференциалами первого рода (дифференциалы, имеющие полюса с нулевыми вычетами, называют абелевыми дифференциалами второго рода, а если вычеты ненулевые, — абелевыми дифференциалами третьего рода).

Базис $\{\omega_\ell\}$ называется нормированным дифференциалом первого рода, если коэффициенты $c_{\ell j}$ нормированы так, что

$$\int_{\alpha_j} \omega_\ell = \delta_{j\ell} \quad (j, \ell = 1, 2, \dots, g); \quad (4.3.15)$$

далее положим

$$\int_{\beta_j} \omega_\ell = \tau_{j\ell} \quad (j, \ell = 1, 2, \dots, g), \quad (4.3.16)$$

где α_j есть замкнутый контур, окружающий разрез $(\lambda_{2j+1}, \lambda_{2j+2})$ на верхнем листе, а β_j есть замкнутый контур, который начинается из λ_2 и идет по нижнему листу до λ_{2j+1} , затем пересекает верхний лист и оканчивается в λ_2 (рис. 4.3).

$\int_{\alpha} \omega$ называется α -периодом, а $\int_{\beta} \omega$ — β -периодом.

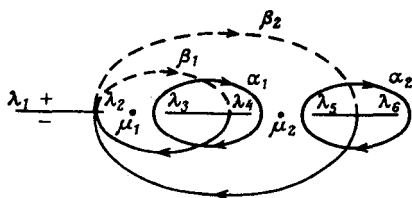


Рис. 4.3. α - и β -периоды ($g = 2$).

$[R(\lambda)]^{1/2}$ вещественна при $\lambda \rightarrow \infty$ на вещественной оси. Таким образом, $[R(\lambda)]^{1/2}$ является чисто мнимой между λ_{2j+1} и λ_{2j+2} на вещественной оси, и, следовательно, коэффициенты $c_{\ell s}$ чисто мнимы. Соответственно τ_{jk} является чисто мнимым [отметим, что в некоторых книгах в правой части (4.3.15) используется величина $\sqrt{-1} \sigma_{j\ell}$]. Можно показать, что $\tau_{jk} = \pm \tau_{kj}$ (см. задачу в следующем разделе). В соответствии с теоремой о вычетах сумма вычетов обращается в нуль. Обозначим абелев дифференциал третьего рода с вычетами 1 и -1 в точках P и Q соответственно через $\omega(P, Q)$. Можно добавить некоторые дифференциалы первого рода к дифференциалу третьего рода, так чтобы α -период обращался в нуль:

$$\int_{\alpha_j} \omega(P, Q) = 0. \quad (4.3.17a)$$

Тогда $\omega(P, Q)$ называется нормированным дифференциалом третьего рода.

Дифференциал (4.3.10) (или (4.3.11)) можно выразить как линейную комбинацию дифференциала второго рода Ω , нормированного дифференциала третьего рода $\omega(P, Q)$ и нормированного дифференциала первого рода ω_j . Учитывая полюса, (4.3.10) можно записать как

$$\omega(k) = \Omega + k \omega(\infty', \infty) + \sum_{j=1}^g \omega[\mu_j(k), \mu_j(0)] + \sum_{j=1}^g c_j \omega_j, \quad (4.3.18)$$

где c_j — некоторые комплексные числа.

В выражении (4.3.10), где определено $\omega(k)$, $\varphi(k+1, \lambda)$

— однозначная функция λ на римановой поверхности S , поэтому

$$\int_{\alpha_\ell} \omega(k) = 2\pi n_\ell i, \quad (4.3.19)$$

$$\int_{\beta_\ell} \omega(k) = 2\pi m_\ell i, \quad (4.3.20)$$

где n_ℓ и m_ℓ — некоторые целые числа. Так как $\omega[\mu_j(k), \mu_j(0)]$ нормирован, так что

$$\int_{\alpha_\ell} \omega[\mu_j(k), \mu_j(0)] = 0, \quad (4.3.19a)$$

из (4.3.18) с учетом (4.3.15) получим

$$c_j = 2\pi n_j i. \quad (4.3.21)$$

Следовательно, интеграл по β_ℓ от (4.3.18) дает

$$k \int_{\beta_\ell} \omega(\infty', \infty) + \sum_{j=1}^g \int_{\beta_\ell} \omega[\mu_j(k), \mu_j(0)] + 2\pi i \sum_{j=1}^g n_j \int_{\beta_\ell} \omega_j = 2\pi m_\ell i. \quad (4.3.22)$$

С другой стороны, можно показать (см. следующий раздел), что

$$\int_{\beta_\ell} \omega[\mu_j(k), \mu_j(0)] = 2\pi i \int_{\mu_j(0)}^{\mu_j(k)} \omega_\ell, \quad (4.3.23)$$

где ω_ℓ — нормированный дифференциал первого рода, определенный соотношением (4.3.14); таким образом, (4.3.22) дает

$$k \int_{\infty}^{\infty'} \omega_\ell + \sum_{j=1}^g \int_{\mu_j(0)}^{\mu_j(k)} \omega_\ell = - \sum_{j=1}^g n_j \tau_{\ell j} + m_\ell. \quad (4.3.24)$$

Хотя первое слагаемое в левой части равенства обращается в нуль при $k=0$, второе слагаемое зависит от пути интегрирования и равно для $k=0$ правой части, которая не зависит от k . Следо-

вательно,

$$\sum_{j=1}^g \int_{\mu_0}^{\mu_j(k)} \omega_\ell = k \int_{\infty'} \omega_\ell + \sum_{j=1}^g \int_{\mu_0}^{\mu_j(0)} \omega_\ell - \sum_{j=1}^g n_j \tau_{\ell j} + m_\ell$$

$$(\ell = 1, 2, \dots, g), \quad (4.3.25)$$

где μ_0 — некоторая произвольно выбранная фиксированная точка на поверхности S . Это и есть требуемое соотношение между $\mu_j(k)$ и $\mu_j(0)$. Если значения λ_j заданы, а $\mu_j(0)$ известны, то правая часть равенства (4.3.25) — известная величина. Для того чтобы подчеркнуть, что эта система уравнений действительно определяет g неизвестных, нахождение зависимостей $\mu_j(k)$ называют проблемой обращения Якоби. В нашем случае находить каждую функцию $\mu_j(k)$ нет необходимости, достаточно вычислить $\sum_{j=1}^g \mu_j(k)$ в (4.3.32), чтобы выразить φ_k как функцию k .

4.4. ИНТЕГРАЛЫ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Наша следующая задача — решение проблемы обращения Якоби, а так как она связана с абелевыми дифференциалами, остановимся несколько подробнее на них в данном разделе и рассмотрим некоторые теоремы [4.4]. Далее мы будем часто использовать теорему Коши для односвязной области S_0 римановой поверхности S .

Риманова поверхность S состоит из двух листов комплексной плоскости, имеющих общую границу вдоль берегов разрезов $[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_2, \lambda_3]$, Рассмотрим стереографическую проекцию двух комплексных λ -сфер на соответствующие листы комплексной плоскости (рис. 4.4). Берегам разрезов будем приписывать знаки плюс и минус: знак плюс соответствует положительной части мнимой оси, а знак минус — отрицательной.

Перевернем одну из λ -сфер так, чтобы соответствующие берега разрезов находились друг под другом, причем берег разреза одной сферы, помеченный знаком плюс (минус), под берегом разреза другой сферы, помеченным знаком минус (плюс). Теперь можно раскрыть разрезы, соединить их берега $g+1$ трубками и склеить (рис. 4.5).

Топологической деформацией данная структура может быть приведена к поверхности, состоящей из ручек (трубок) и сферы, получившейся из двух первоначальных сфер и трубки с берегами разрезов $[\lambda_1, \lambda_2]$ (рис. 4.6,а).

Далее разрежем и раскроем фигуру вдоль линий $a_1, \varphi_1, a_2, \varphi_2, \dots$ и точку 0 на рис. 4.6,а. Таким образом, получим одно-

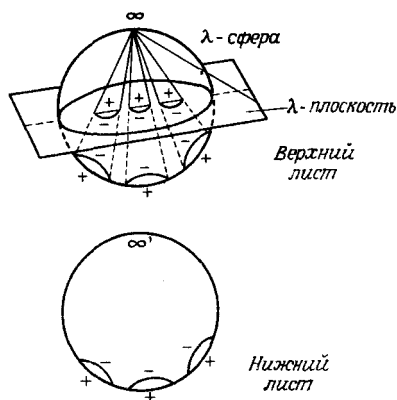


Рис. 4.4. Стереиграфическая проекция двух римановых листов.

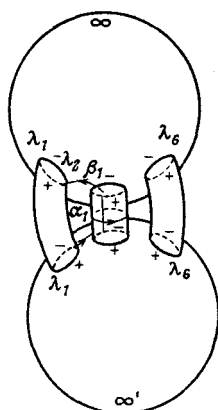


Рис. 4.5. Топологическая карта римановой поверхности.

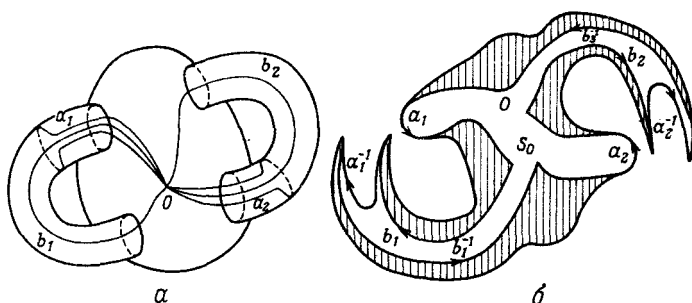


Рис. 4.6. Каноническое сечение ($g = 2$).

связную область S_0 , показанную на рис. 4.6, б. Обозначим границы этой области наборами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ и приведем поверхность к плоской, т.е. к нормальной форме $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ поверхности S_0 (рис. 4.7). В данном случае наша риманова поверхность имеет род g . a_1 определяет путь интегрирования α_1 , b_1 — путь интегрирования β_1 и т.д., a_1^{-1} определяет путь интегрирования α_1^{-1} , который является обратным по отношению к α_1 , b_1^{-1} — путь, обратный к β_1 и т.д.

I. Пусть ω и η — дифференциалы с периодами (A_i, B_i)

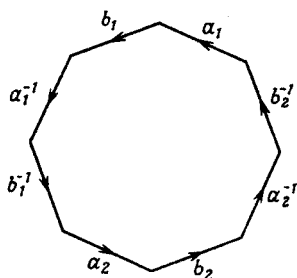


Рис. 4.7. Нормальная форма ($g = 2$).

и (A'_i, B'_i) ($i = 1, 2, \dots, g$)

$$\begin{cases} \int_{\alpha_i} \omega = A'_i, & \int_{\beta_i} \omega = B'_i, \\ \int_{\alpha_i} z = A'_i, & \int_{\beta_i} z = B'_i. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Пусть точка Q' на линии α_i^{-1} соответствует точке Q на α_i (рис. 4.8, а), и пусть

$$\omega = df. \quad (4.4.2)$$

Тогда

$$\begin{cases} \int_{QQ'} \omega = \left(\int_{QO} + \int_{OO'} + \int_{O'Q'} \right) df = \\ = \int_{OO'} df = \int_{\beta_i} df = B'_i, \\ B'_i = f(Q') - f(Q); \end{cases} \quad (4.4.3)$$

здесь

$$\int_{QO} df = - \int_{O'Q'} df.$$

Аналогично

$$-A'_i = f(R') - f(R), \quad (4.4.4)$$

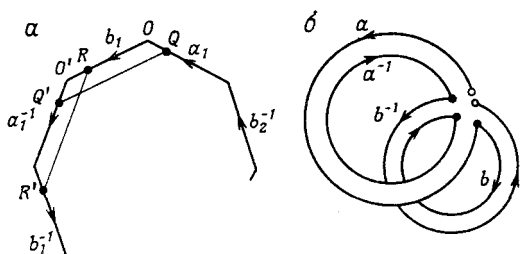


Рис. 4.8. Пути интегрирования.

где точка R' на линии ℓ_i^{-1} соответствует точке R на линии ℓ_i .

Теперь, поскольку $f(Q') = f(Q) + B_i$ и поскольку дифференциалы

$$\eta(Q') = -\eta(Q) \quad (4.4.5)$$

и т.д., имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_j + \beta_j + \alpha_j^{-1} + \beta_j^{-1}} f\eta &= \int_{\alpha_j} f\eta + \int_{\beta_j} f\eta - \int_{\alpha_j} (f+B_j)\eta - \int_{\beta_j} (f-A_j)\eta = \\ &= -\beta_j \int_{\alpha_j} \eta + A_j \int_{\beta_j} \eta = \\ &= A_j B_j' - B_j A_j'. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Следовательно,

$$\oint_C f\eta = \sum_{j=1}^g (A_j B_j' - B_j A_j'), \quad (4.4.7)$$

где контур C охватывает многоугольник $\alpha_1 \ell_1^{-1} \dots \alpha_g^{-1} \ell_g^{-1}$.

Пусть $\omega = df = \omega^{[1]}$ есть дифференциал первого рода, а $\eta = \omega^{[3]}$ — дифференциал третьего рода, и предположим, что $\omega^{[3]}$ имеет полюса P_ℓ с вычетами c_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, m$).

Тогда с помощью интегральной теоремы Коши получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g (A_j B_j' - B_j A_j') &= \oint_C f \omega^{[3]} = 2\pi i \sum_{\ell=1}^m f(P_\ell) C_\ell = \\ &= 2\pi i \sum_{\ell=1}^m C_\ell \int_{P_0}^{P_\ell} \omega^{[1]}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

где P_0 — точка поверхности S_0 , а

$$f(P_\ell) = \int_{P_0}^{P_\ell} df = \int_{P_0}^{P_\ell} \omega^{[1]}.$$

Далее, пусть $\omega^{[3]}$ — нормированный дифференциал, такой, что

$$A_j' = 0 \quad (\text{для всех } j), \quad (4.4.9)$$

и $\omega^{[1]} = \omega_\kappa$ — нормированный дифференциал первого рода (4.3.15), такой, что

$$A_j = \int_{\alpha_j} \omega_\kappa = \delta_{jk}. \quad (4.4.10)$$

Далее, как следует из (4.4.8),

$$B_k' = 2\pi i \sum_{\ell=1}^m C_\ell \int_{P_0}^{P_\ell} \omega_\kappa, \quad (4.4.11)$$

или

$$\int_{\rho_k} \omega^{[3]} = 2\pi i \sum_{\ell=1}^m C_\ell \int_{P_0}^{P_\ell} \omega_\kappa. \quad (4.4.12)$$

Если $\omega^{[3]}$ имеет полюса в $P[\mu_j(k)]$ с вычетом $C_P = 1$ и в $Q[\mu_j(0)]$ с вычетом $C_Q = -1$, то (4.4.12)

сводится к

$$\int_{P_K} \omega^{[3]} = 2\pi i \left(\int_{P_0}^P \omega_K - \int_{P_0}^Q \omega_K \right), \quad (4.4.13)$$

или к

$$\int_{P_K} \omega^{[3]} = 2\pi i \int_Q^P \omega_K, \quad (4.4.14)$$

что доказывает (4.3.23).

II. Определим многомерную $\mathcal{V}$ -функцию ($\mathcal{V}$ -функцию Римана) как

$$\mathcal{V}(u) = \sum_{m_1, \dots, m_g = -\infty}^{\infty} \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g m_j u_j + \pi i \sum_{j,k=1}^g \tau_{jk} m_j m_k \right), \quad (4.4.15a)$$

или

$$\mathcal{V}(\vec{u}) = \sum_{\vec{m}} \exp(2\pi i \vec{m} \cdot \vec{u} + \pi i \vec{m} \cdot \tau \cdot \vec{m}), \quad (4.4.15b)$$

где $\vec{u}$ и $\vec{m}$ - векторы, а τ - матрица:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_g \end{pmatrix}, \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_g \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{g1} & \tau_{g2} & \dots & \tau_{gg} \end{pmatrix}. \quad (4.4.16)$$

Удобно ввести обозначения

$$\vec{u} + e_K = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{K+1} \\ u_{K+1} \\ \vdots \\ u_g \end{bmatrix}, \quad (4.4.17a)$$

$$\vec{u} + \tau_k = \begin{bmatrix} u_1 + \tau_{1k} \\ \vdots \\ u_k + \tau_{kk} \\ \vdots \\ u_g + \tau_{gk} \end{bmatrix}. \quad (4.4.17d)$$

Легко видеть, что

$$\begin{cases} \psi(\vec{u} + e_k) = \psi(\vec{u}), \\ \psi(\vec{u} + \tau_k) = e^{-2\pi i u_k - \pi i \tau_{kk}} \psi(\vec{u}). \end{cases} \quad (4.4.18)$$

Последнее равенство получено заменой m_k на $m_k + 1$. Если ввести

$$F(\vec{u}) = \psi(\vec{u} \cdot \vec{c}), \quad (4.4.19a)$$

где $\vec{c}$ — постоянный вектор,

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_g \end{pmatrix}, \quad (4.4.19b)$$

то

$$\begin{cases} F(\vec{u} + e_k) = F(\vec{u}), \\ F(\vec{u} + \tau_k) = e^{-2\pi i (u_k - c_k) - \pi i \tau_{kk}} F(\vec{u}). \end{cases} \quad (4.4.20)$$

Теперь пусть

$$u_\ell(P) = \int_{P_0}^P \omega_\ell, \quad (4.4.21a)$$

или

$$du_\ell = \omega_\ell = \sum_{j=0}^{g-1} c_{\ell j} \frac{\lambda^j d\lambda}{[R(\lambda)]^{1/2}}, \quad (4.4.21b)$$

где P — точка римановой поверхности. Далее, запишем F в данном случае

$$f(P) = v^* [\vec{u}(P) - \vec{c}], \quad (4.4.22)$$

и пусть P_j — нули $f(P)$:

$$f(P_j) = 0. \quad (4.4.23)$$

III. В окрестности P_j имеем

$$f \rightarrow \gamma \exp(i\theta), \quad \int df/f = i \int d\theta.$$

Следовательно, для контура C вдоль границы S_0 интеграл

$$n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{df}{f} \quad (4.4.24)$$

дает число нулей P_j .

Пусть u_j^+ и u_j^- — значения в соответствующих точках на a_k и a_k^{-1} или на b_k и b_k^{-1} . Если P находится на a_k (рис. 4.8), то

$$u_j^- = u_j^+ + \int_{\beta_k} \omega_j = u_j^+ + \tau_{kj} \quad (4.4.25)$$

и

$$f^- = f(u^+ + \tau_k) = e^{-2\pi i(u_k - c_k) - \pi i \tau_{kk}} f^+, \quad (4.4.26)$$

$$df^- = e^{-2\pi i(u_k - c_k) - \pi i \tau_{kk}} (df^+ - 2\pi i f^+ du_k). \quad (4.4.27)$$

Аналогично, если P находится на $\mathcal{C}_k$, то

$$u_j^- = u_j^+ + \int_{\alpha_k} \omega_j = u_j^+ - \delta_{jk} \quad (4.4.28)$$

и

$$f^- = f(u^+ - e_k) = f^+. \quad (4.4.29)$$

Далее,

$$\begin{cases} \frac{df^-}{f^-} = \frac{df^+}{f^+} - 2\pi i \omega_k & \text{на } \alpha_k, \\ \frac{df^-}{f^-} = \frac{df^+}{f^+} & \text{на } \mathcal{C}_k. \end{cases} \quad (4.4.30)$$

Следовательно, (4.4.24) дает

$$\begin{aligned} n(f) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} + \int_{\beta_k} \right) \left(\frac{df^+}{f^+} - \frac{df^-}{f^-} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g 2\pi i \int_{\alpha_k} \omega_k = \\ &= \sum_{k=1}^g \delta_{kk} = g. \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

Таким образом, число нулей P_j функции $f(P)$ равно роду поверхности g .

II. Так как P_j — нули $f(P)$, можно записать

$$\sum_{j=1}^g u_{\ell}(P_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_C u_{\ell} \frac{df}{f}. \quad (4.4.32)$$

Используя (4.4.25, 26, 30), перепишем интеграл в правой части (4.4.32) как

$$\begin{aligned} \int_C u_{\ell} \frac{df}{f} &= \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} + \int_{\beta_k} \right) \left(u_{\ell} + \frac{df^+}{f^+} - u_{\ell}^- \frac{df^-}{f^-} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^g \int_{\alpha_k} \left[u_{\ell}^+ \frac{df^+}{f^+} - (u_{\ell}^+ + \tau_{\ell k}) \left(\frac{df^+}{f^+} - 2\pi i \omega_k \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^g \int_{\beta_k} \left[u_{\ell}^+ \frac{df^+}{f^+} - (u_{\ell}^+ - \delta_{\ell k}) \frac{df^+}{f^+} \right] = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^g \tau_{\ell k} \int_{\alpha_k} \omega_k - \sum_{k=1}^g \tau_{\ell k} \int_{\alpha_k} \frac{df^+}{f^+} + \\ &+ 2\pi i \sum_{k=1}^g \int_{\beta_k} u_{\ell}^+ \omega_k + \int_{\beta_k} \frac{df^+}{f^+}. \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

Выберем на α_k начальную точку $Q_0^{(k)}$ и конечную точку $Q_1^{(k)}$; тогда, согласно (4.4.20),

$$f^+ \left[u(Q_1^{(k)}) \right] = f^+ \left[u(Q_0^{(k)}) + e_k \right] = f^+ \left[u(Q_0^{(k)}) \right]. \quad (4.4.34)$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha_K} \frac{df^+}{f^+} = \ln f^+(\bar{Q}_1^{(k)}) - \ln f^+(\bar{Q}_0^{(k)}) = 0. \quad (4.4.35)$$

Аналогично, выбрав на β_ℓ начальную точку $\bar{Q}_0^{(k)}$ и конечную точку $\bar{Q}_1^{(k)}$, имеем

$$\begin{aligned} f^+[\mu(\bar{Q}_1^{(\ell)})] &= f^+[\mu(\bar{Q}_0^{(\ell)}) + \tau_\ell] = \\ &= \exp\left\{-2\pi i [\mu(\bar{Q}_0^{(\ell)}) - \bar{c}_\ell] - \pi i \tau_{\ell\ell}\right\} f^+[\mu(\bar{Q}_0^{(\ell)})], \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

так что

$$\begin{aligned} \int_{\beta_\ell} \frac{df^+}{f^+} &= \ln f^+[\mu(\bar{Q}_1^{(\ell)})] - \ln f^+[\mu(\bar{Q}_0^{(\ell)})] = \\ &= -2\pi i [\mu_\ell(\bar{Q}_0^{(\ell)}) - \bar{c}_\ell] - \pi i \tau_{\ell\ell}. \end{aligned} \quad (4.4.37)$$

Таким образом, используя (4.4.32, 33), получаем очень важную формулу

$$\sum_{j=1}^g \mu_\ell(P_j) = \bar{c}_\ell - K_\ell + \sum_{k=1}^g \tau_{\ell k}, \quad (4.4.38a)$$

где K_ℓ — постоянная, определяемая из

$$K_\ell = - \sum_{k=1}^g \int_{\alpha_K} \mu_\ell^+ \omega_k + \frac{1}{2} \tau_{\ell\ell} + \mu_\ell(\bar{Q}_0^{(\ell)}). \quad (4.4.38b)$$

У. Рассмотрим интеграл $\int \lambda \frac{df}{f}$. С помощью (4.4.30) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \left(\int_{\alpha_k} + \int_{\beta_k} \right) \lambda \left(\frac{df^+}{f^+} - \frac{df^-}{f^-} \right) = \sum_{k=1}^g \int_{\alpha_k} \lambda \omega_k \quad (4.4.39)$$

С другой стороны, вычисляя вычеты, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \lambda \frac{df}{f} = \sum_{j=1}^g \lambda(P_j) + \text{Res}\{\infty\} + \text{Res}\{\infty'\}, \quad (4.4.40)$$

где $\lambda(P_j)$ есть значение λ в нулях P_j функции $f(P) = v[u(P - \bar{e})]$. Вычет на бесконечности $\text{Res}\{\infty\}$ можно вычислить следующим образом.

Пусть $\zeta^{-1} = \lambda$; тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln v d\lambda = - \frac{1}{2\pi i} \int \lambda \frac{d}{d\zeta} \ln v d\zeta. \quad (4.4.41)$$

Заметив, что направление интегрирования по ζ обратно направлению интегрирования по λ , имеем

$$\text{Res}\{\infty\} = \text{Res} \left\{ \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln v \right\}_{\lambda=\infty} = \text{Res} \left\{ \lambda \frac{d}{d\zeta} \ln v \right\}_{\zeta=0}. \quad (4.4.42)$$

Однако поскольку $d/d\zeta = -(1/\zeta^2) d/d\lambda$, то, используя обозначение

$$D_\ell = \frac{\partial}{\partial u_\ell} \quad (4.4.43)$$

на верхнем листе, для малых ζ имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\zeta} \ln v(\vec{u}-\vec{c}) &= \frac{1}{\zeta^2} \sum_{\ell=1}^g \frac{du_{\ell}}{d\lambda} D_{\ell} \ln v(\vec{u}-\vec{c}) = \\
 &= -\frac{1}{\zeta^2} \sum_{\ell=1}^g \sum_{j=0}^{g-1} c_{\ell j} \frac{\lambda^j}{\sqrt{R(\lambda)}} D_{\ell} \ln v(\vec{u}-\vec{c}) = \\
 &= -\frac{1}{\zeta^2} \sum_{\ell=1}^g \frac{c_{\ell, g-1} \lambda^{g-1} + c_{\ell, g-2} \lambda^{g-2} + \dots}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g-2} (\lambda - \lambda_j)}} D_{\ell} \ln v(\vec{u}-\vec{c}) = \\
 &= -\sum_{\ell=1}^g [c_{\ell, g-1} + O(\zeta)] D_{\ell} \ln v(\vec{u}-\vec{c}). \quad (4.4.44)
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \frac{d}{d\zeta} \ln v(\vec{u}-\vec{c}) = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta} \sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_{\ell} \ln v(\vec{u}-\vec{c}), \quad (4.4.45)$$

а вычет на бесконечности определяется выражением (4.4.42) как

$$\text{Res}\{\infty\} = -\sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_{\ell} \ln v[\vec{u}(\infty)-\vec{c}]. \quad (4.4.46a)$$

На нижнем листе $\sqrt{R(\lambda)}$ имеет другой знак, поэтому

$$\text{Res}\{\infty'\} = +\sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_{\ell} \ln v[\vec{u}(\infty')-\vec{c}]. \quad (4.4.46b)$$

Следовательно, (4.4.39, 40) дают нам

$$\sum_{j=1}^g \lambda(P_j) = \sum_{\ell=1}^g \int_{\Delta_1} \lambda \omega_{\ell} + \sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_{\ell} \ln \frac{\nu[\vec{u}(\infty) - \vec{c}]}{\nu[\vec{u}(\infty') - \vec{c}]}.$$

(4.4.47)

Задача 4.2. Покажите, что $\bar{c}_{jk} = \bar{c}_{kj}$.

Указание. Используйте (4.4.7).

4.5. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ОБРАЩЕНИЯ ЯКОБИ

Пусть

$$\sum_{j=1}^g \mu_{\ell}(P_j) = X_{\ell};$$

(4.5.1)

тогда, как следует из (4.4.38a),

$$C_{\ell} = X_{\ell} + K_{\ell} - \sum_{j=1}^g \tau_{\ell j},$$

(4.5.2)

где μ_{ℓ} дается (4.4.21a). Следовательно, для заданных X_{ℓ} решение проблемы обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P_j} \omega_{\ell} = X_{\ell}$$

(4.5.3)

дается через нули $P_1, P_2, \dots, P_g$ функции $\nu[\vec{u}(P) - \vec{c}]$, где $\vec{c}$ определено соотношением (4.5.2).

Уравнение (4.3.25) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^g \int_{P_0}^{P_j(k)} \omega_{\ell} = X_{\ell}(k),$$

(4.5.4)

где

$$X_{\ell}(k) = k \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\ell} + \sum_{j=1}^g \int_{\mu_0}^{\mu_j(0)} \omega_{\ell} - \sum_{j=1}^g n_j \tau_{\ell j} + m_{\ell}. \quad (4.5.5)$$

Следовательно, если последний член (4.5.2) включен в $X_{\ell}(k)$, т.е. в третий член правой части (4.5.5), $\mu_1(k)$, $\mu_2(k)$, ..., $\mu_g(k)$ определяются как значения λ_j в нулях P_j ($j = 1, 2, \dots, g$) функции $\nu[\vec{u}(P_j) - \vec{X}(k) - \vec{K}]$, т.е.

$$\mu_j = \lambda(P_j). \quad (4.5.6)$$

Таким образом, используя (4.4.47), имеем

$$\sum_{j=1}^g \mu_j(k) = \sum_{\ell=1}^g \int_{d_{\ell}} \lambda \omega_{\ell} + \sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_{\ell} \ln \frac{\nu[\vec{u}(\infty) - \vec{X} - \vec{K}]}{\nu[\vec{u}(\infty') - \vec{X} - \vec{K}]}, \quad (4.5.7)$$

и тогда, с учетом (4.5.5) можем записать

$$u_{\ell}(\infty) - X_{\ell} - K_{\ell} = k c_1 + d_1, \quad (4.5.8)$$

где

$$\begin{cases} c_{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\ell}, \\ d_{\ell} = - \sum_{j=1}^g \int_{\mu_0}^{\mu_j(0)} \omega_{\ell} + \sum_{j=1}^g n_j \tau_{\ell j} - m_{\ell} + \int_{\mu_0}^{\infty} \omega_{\ell} - K_{\ell}. \end{cases} \quad (4.5.9)$$

Из-за периодичности (4.4.18) функции ν вторым и третьим членами в d_{ℓ} можно пренебречь. Далее,

$$u_{\ell}(\infty') = \int_{\mu_0}^{\infty'} \omega_{\ell} = \int_{\mu_0}^{\infty} \omega_{\ell} + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\ell} = u_{\ell}(\infty) + c_{\ell}. \quad (4.5.10)$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^g \mu_j(k) = \sum_{\ell=1}^g \int_{d_\ell} \lambda \omega_\ell + \sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_\ell \ln \frac{v(k\vec{c} + \vec{d})}{v[(k+1)\vec{c} + \vec{d}]}, \quad (4.5.11)$$

где первый член в правой части есть постоянная. Подставив (4.5.11) в (4.2.32а), окончательно получим

$$b_{k+1} = \text{const} - \sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_\ell \ln \frac{v(k\vec{c} + \vec{d})}{v[(k+1)\vec{c} + \vec{d}]} \quad (4.5.12)$$

4.6. ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ

Уравнения движения цепочки

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = P_n, \\ \dot{P}_n = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} \end{cases} \quad (4.6.1)$$

могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n (b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \end{cases} \quad (4.6.2)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2} e^{-(Q_{n+1} - Q_n)/2}, \quad b_n = \frac{1}{2} P_n. \quad (4.6.3)$$

Мы можем также переписать их:

$$\dot{L} = BL - LB, \quad (4.6.4)$$

где, по определению,

$$\begin{cases} (B\varphi)_n = -a_n \varphi(n+1) + a_{n-1} \varphi(n-1), \\ (L\varphi)_n = a_n \varphi(n+1) + b_n \varphi(n) + a_{n-1} \varphi(n-1). \end{cases} \quad (4.6.5)$$

Наложим также условия периодичности

$$Q_{n+N} = Q_n, \quad P_{n+N} = P_n \quad (n = -\infty, \dots, \infty), \quad (4.6.6)$$

которые означают, что

$$A = \prod_{k=1}^N a_{n_k} = 2^{-N}. \quad (4.6.7)$$

Рассмотрим функции $\varphi = \varphi(n)$ ($n = -\infty, \dots, \infty$), которые удовлетворяют (4.1.3) или уравнению с не зависящим от времени параметром λ :

$$L\varphi = \lambda\varphi, \quad (4.6.8a)$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (4.6.8b)$$

Дифференцируя (4.6.8a) по времени, получаем

$$\dot{L}\varphi + L\dot{\varphi} = \lambda\dot{\varphi}. \quad (4.6.9)$$

Если мы вычтем из данного уравнения (4.6.4), умноженное на φ , получим

$$L(\dot{\varphi} - B\varphi) = \lambda(\dot{\varphi} - B\varphi). \quad (4.6.10)$$

Данное равенство имеет вид такой же, как (4.6.8a), поэтому, если φ_1 и φ_2 - фундаментальные решения (4.6.8a), то $\dot{\varphi}_1 - B\varphi_1$ и $\dot{\varphi}_2 - B\varphi_2$ представляются в виде линейных комбинаций φ_1 и φ_2 , например,

$$(\dot{\varphi}_1 - B\varphi_1)_n = \alpha \varphi_1(n) + \beta \varphi_2(n); \quad (4.6.11a)$$

здесь α и β - некоторые константы. (Аналогичные соображения могли быть использованы в разд. 3.2 для бесконечной цепочки. Но поскольку мы предполагали, что цепочка покоится на бесконечности, то из (3.2.8) следует $\varphi \rightarrow \chi^{\pm n}$ при $n \rightarrow \infty$, что приводит к $\alpha = \beta = 0$.) Положим $n=0$ и $n=1$ в формулах

(4.6.8a, 11a) и воспользуемся условиями $\varphi_1(0)=1$, $\varphi_1(1)=0$, $\varphi_2(0)=0$, $\varphi_2(1)=1$. Таким образом, получим

$$\begin{cases} (L\varphi_1)_0 = b_0 + a_{-1}\varphi_1(-1) = \lambda, \\ (L\varphi_1)_1 = a_1\varphi_1(2) + a_0 = 0, \\ -(B\varphi_1)_0 = -a_{-1}\varphi_1(-1) = \alpha, \\ -(B\varphi_1)_1 = a_1\varphi_1(2) - a_0 = \beta \end{cases} \quad (4.6.11b)$$

и, следовательно,

$$\alpha = b_0 - \lambda, \quad \beta = -2a_0. \quad (4.6.12)$$

Таким образом, (4.6.11a) дает

$$\dot{\varphi}_1(n) = -a_n \varphi_1(n+1) + a_{n-1} \varphi_1(n-1) + (b_0 - \lambda) \varphi_1(n) - 2a_0 \varphi_2(n). \quad (4.6.13)$$

Подобным образом

$$(\dot{\varphi}_2 - B\varphi_2)_n = \alpha \varphi_1(n) + \beta \varphi_2(n), \quad (4.6.14a)$$

так что

•

$$\begin{cases} (L\varphi_2)_0 = a_0 + a_{-1} \varphi_2(-1) = 0, \\ (L\varphi_2)_1 = a_1 \varphi_2(2) + b_0 = \lambda, \\ -(B\varphi_2)_0 = a_0 - a_{-1} \varphi_2(-1) = \bar{\lambda}, \\ -(B\varphi_2)_1 = a_1 \varphi_2(2) = \bar{\beta}. \end{cases} \quad (4.6.14c)$$

и, следовательно,

$$\bar{\lambda} = 2a_0, \quad \bar{\beta} = \lambda - b_0. \quad (4.6.15)$$

Из соотношения (4.6.14a) получим

$$\dot{\varphi}_2(n) = -a_n \varphi_2(n+1) + a_{n-1} \varphi_2(n-1) + 2a_0 \varphi_2(n) + (\lambda - b_0) \varphi_2(n). \quad (4.6.16)$$

Продифференцируем по времени равенство

$$\Delta(\lambda) = \varphi_1(N) + \varphi_2(N+1) \quad (4.6.17)$$

и воспользуемся периодическими граничными условиями; тогда

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(\lambda) &= \dot{\varphi}_1(N) + \dot{\varphi}_2(N+1) = \\ &= -a_N \varphi_1(N+1) + a_{N-1} \varphi_1(N-1) + (b_N - \lambda) \varphi_1(N) - 2a_N \varphi_2(N) - \\ &- a_{N+1} \varphi_2(N+2) + a_N \varphi_2(N) + 2a_N \varphi_1(N+1) + (\lambda - b_N) \varphi_2(N+1) = \\ &= (L\varphi_1 - \lambda \varphi_1)_N - (L\varphi_2 - \lambda \varphi_2)_{N+1}. \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

Следовательно,

$$\dot{\Delta}(\lambda) = 0, \quad (4.6.19)$$

т.е. $\Delta(\lambda)$ не зависит от времени.

Теперь положим $n = N+1$ в соотношениях (4.6.5, 13), тогда

$$\begin{cases} a_1 \varphi_1(N+2) + b_1 \varphi_1(N+1) + a_0 \varphi_1(N) = \lambda \varphi_1(N+1), \\ \dot{\varphi}_1(N+1) = -a_1 \varphi_1(N+2) + a_0 \varphi_1(N) + (b_0 - \lambda) \varphi_1(N+1) - 2a_0 \varphi_2(N+1). \end{cases} \quad (4.6.20)$$

Исключая $\varphi_1(N+2)$, получаем

$$\dot{\varphi}_1(N+1) = 2a_0 \varphi_1(N) + (b_0 + b_1 - 2\lambda) \varphi_1(N+1) - 2a_0 \varphi_2(N+1). \quad (4.6.21)$$

Дополнительный спектр μ определен уравнением $\varphi_1(N+1, \mu) = 0$. Следовательно, используя (4.1.41), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(N+1, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu} &= 2a_0 [\varphi_1(N, \mu) - \varphi_2(N+1, \mu)] = \\ &= \pm 2a_0 \sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}; \end{aligned} \quad (4.6.22)$$

здесь мы воспользовались также соотношением (4.1.30). Правую часть равенства можно переписать в виде

$$\sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4} = A^{-1} Q(\lambda) \sqrt{R(\lambda)}, \quad (4.6.23a)$$

где

$$Q(\lambda) = \prod_{\ell=g+1}^{N=1} [\lambda - \mu_\ell(0)], \quad R(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j). \quad (4.6.23b)$$

С другой стороны,

$$\varphi_1(N+1, \lambda) = -a_0 A^{-1} \prod_{j=1}^g [\lambda - \mu_j(0)] Q(\lambda). \quad (4.6.24)$$

В случае $\ell \geq g+1$ $\mu_\ell(0) = \lambda_{2\ell+1} = \lambda_{2\ell+2}$ являются постоянными. Следовательно, если продифференцировать (4.6.24) по времени, сохранив λ постоянной, то получится

$$\dot{\varphi}_1(N+1, \lambda) = A^{-1} a_0 Q(\lambda) \sum_{j=1}^g \dot{\mu}_j(0) \prod_{\ell \neq j}' [\lambda - \mu_\ell(0)] - \\ - \dot{a}_0 A^{-1} Q(\lambda) \prod_{j=1}^g [\lambda - \mu_j(0)]. \quad (4.6.25)$$

Теперь устремим $\lambda \rightarrow \mu_k(0)$ и получим

$$\dot{\varphi}_1(N+1, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu_k(0)} = A^{-1} a_0 Q[\mu_k(0)] \dot{\mu}_k(0) \prod_{\ell \neq k}' [\mu_k(0) - \mu_\ell(0)]. \quad (4.6.26)$$

Приравняем (4.6.22) и (4.6.26), тогда с учетом (4.6.23а)

$$\dot{\mu}_k(0) = \mp 2 \sqrt{R[\mu_k(0)]} / \prod_{\ell \neq k}' [\mu_k(0) - \mu_\ell(0)]. \quad (4.6.27)$$

Вернемся теперь к (4.5.9) и выясним вопрос о скорости изменения во времени d_ℓ , которая, как оказывается, имеет вид

$$\dot{d}_\ell(t) = - \sum_{j=1}^g \dot{\mu}_j(0, t) \omega / d\lambda \Big|_{\lambda=\mu_j(0)} = \\ = - \sum_{j=1}^g \dot{\mu}_j(0, t) \frac{\sum_{j=0}^{g-1} C_{\ell j} \mu_j^j(0, t)}{\sqrt{R[\mu_j(0, t)]}}. \quad (4.6.28)$$

В правой части последнего равенства, используя (4.6.27), можно записать

$$\sum_{j=1}^g \frac{\dot{\mu}_j(0, t) \mu_j^j(0, t)}{\mp \sqrt{R[\mu_j(0, t)]}} = 2 \sum_{j=1}^g \frac{\mu_j^j(0, t)}{\prod_{\ell \neq j}' [\mu_j(0, t) - \mu_\ell(0, t)]}; \quad (4.6.29)$$

данное выражение можно упростить при помощи интерполяционной формулы Лагранжа (см. приложение Д):

$$\sum_{j=1}^g \frac{X_j^2}{\prod_{\ell(\neq j)=1}^g (X_j - X_\ell)} = \begin{cases} 0 & (j < g-1), \\ 1 & (j = g-1). \end{cases} \quad (4.6.30)$$

Полагая $X_j = \mu_j(0, t)$, из (4.6.29, 30) имеем

$$\sum_{j=1}^g \frac{\dot{\mu}_j(0, t) \mu_j^2(0, t)}{\pm \sqrt{R[\mu_j(0, t)]}} = \begin{cases} 0 & (j < g-1), \\ 2 & (j = g-1). \end{cases} \quad (4.6.31)$$

Уравнения (4.6.27, 31) впервые были получены в работе Каца и Ван Мёрбеке [4.2]. Подставляя (4.6.31) в (4.6.28), имеем

$$\dot{d}_\ell(t) = -2c_{\ell, g-1}, \quad (4.6.32)$$

или

$$d_\ell(t) = d_\ell(0) - 2c_{\ell, g-1} t. \quad (4.6.33)$$

Таким образом, используя (4.6.33), мы можем записать (4.5.12) в виде

$$b_n(t) = \text{const} - \sum_{\ell=1}^g c_{\ell, g-1} D_\ell \ln \frac{v[n\vec{c} + \vec{d}(t)]}{v[(n+1)\vec{c} + \vec{d}(t)]}, \quad (4.6.34)$$

где в соответствии с (4.6.33)

$$2c_{\ell, g-1} D_\ell = - \frac{d}{dt}. \quad (4.6.35)$$

Так как $b_n = P_n / 2 = \dot{Q}_n / 2$, окончательно получим

$$P_n(t) = \bar{P}_0 + \frac{d}{dt} \ln \frac{v(n\vec{c} - \vec{c}'t + \vec{\sigma}')}{v[(n+1)\vec{c} - \vec{c}'t + \vec{\sigma}']} , \quad (4.6.36)$$

$$Q_n(t) = \bar{Q}_n(0) + \bar{P}_0 t + \ln \frac{v(n\vec{c} - \vec{c}'t + \vec{\sigma}')}{v[(n+1)\vec{c} - \vec{c}'t + \vec{\sigma}']} , \quad (4.6.37)$$

где $\bar{P}_0$ и $\bar{Q}_n$ - некоторые постоянные. Эти результаты впервые были получены Дейтом и Танакой [4.3]. В данных выражениях

$$c_\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\ell , \quad c'_\ell = 2c_{\ell, g-1} , \quad (4.6.38)$$

а $\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_g)$ - фазовые постоянные, определяемые из начальных условий. $c_\ell, c'_\ell, \sigma'_\ell$ - чисто мнимые величины, как видно из конкретного примера - кноидальной волны, которая рассматривается в следующем разделе. По определению c_ℓ и c'_ℓ выражаются через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g$, и поэтому их можно найти из начальных условий.

Далее, мы можем записать

$$Q_n = S_n - S_{n+1} , \quad (4.6.39)$$

где

$$S_n = f + \ln v(n\vec{c} - \vec{c}'t + \vec{\sigma}') . \quad (4.6.40)$$

Здесь f может быть функцией n и t , но она должна удовлетворять некоторым условиям, наложенным на S_n . Например, может быть

$$f = \bar{f}(t) + n\bar{P}_0 t + Bn^2 , \quad (4.6.41)$$

где $\bar{f}(t)$ зависит лишь от t , а B - постоянная,

Как уже отмечалось, коэффициенты $c_{\ell,k}$ в ω_{ℓ} мнимые, так же как c_{ℓ} и c'_{ℓ} . Поэтому ϑ -функция в (4.6.40) имеет мнимый аргумент. В этом случае τ_{jk} также чисто мнимые. Воспользуемся мнимым преобразованием Якоби, применив его к многомерной ϑ -функции (см. приложение Е):

$$\vartheta(u|\tau) = \frac{i^{g/2}}{|\tau|^{1/2}} e^{-\pi i u \cdot \tau^{-1} u} \vartheta(\tau^{-1} u | -\tau^{-1}), \quad (4.6.42)$$

где $|\tau| = \det \tau$, а τ^{-1} - матрица, обратная τ ; мы можем переписать (4.6.40) через функцию действительного аргумента, так что

$$S_n = F + \ln \vartheta(xn - \beta t + \sigma | -\tau^{-1}), \quad (4.6.43)$$

где F есть некоторая функция, аналогичная функции f в (4.6.41), а x , β и σ - вещественные постоянные с g компонентами, такие, что

$$x = \tau^{-1} c, \quad \beta = \tau^{-1} c', \quad \sigma = \tau^{-1} \sigma'. \quad (4.6.44)$$

4.7. ПРОСТОЙ ПРИМЕР (КНОИДАЛЬНАЯ ВОЛНА)

I. Применим результаты, полученные в предыдущих разделах к простейшему случаю, когда $g = 1$. Рассмотрим четыре корня, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4, \quad (4.7.1)$$

и соответствующие разрезы $[\lambda_1, \lambda_2]$ и $[\lambda_3, \lambda_4]$ (рис. 4.9). В данном случае абелев дифференциал имеет вид

$$\omega = \frac{c_0 d\lambda}{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)}}, \quad (4.7.2)$$

где c_0 - постоянная. Введем α -период (4.3.15) и β -период

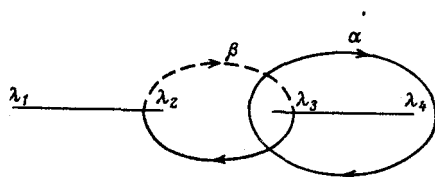


Рис. 4.9. Случай кноидальной волны.

(4.3.16) как

$$I = \int_{\alpha} \omega = 2 \int_{\lambda_3}^{\lambda_4} \frac{c_0 d\lambda}{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)}}, \quad (4.7.3)$$

$$I_1 = \int_{\beta} \omega = 2 \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \frac{c_0 d\lambda}{\sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)}}. \quad (4.7.4)$$

Как принято в теории эллиптических интегралов, сделаем линейное преобразование

$$\lambda = \frac{\lambda \sigma + \beta}{\gamma \sigma + \sigma}, \quad \sigma = \frac{\lambda \sigma - \beta}{\lambda - \lambda \gamma}, \quad (4.7.5)$$

где λ , β , γ и σ — постоянные. Получим

$$\int w = A_0 \int \frac{d\sigma}{\sqrt{(1 - \sigma/\sigma_1)(1 - \sigma/\sigma_2)(1 - \sigma/\sigma_3)(1 - \sigma/\sigma_4)}}, \quad (4.7.6)$$

где

$$\begin{cases} A_0 = \frac{(\lambda \sigma - \beta \gamma) c_0}{\sqrt{(\beta - \lambda_1 \sigma)(\beta - \lambda_2 \sigma)(\beta - \lambda_3 \sigma)(\beta - \lambda_4 \sigma)}}, \\ \sigma_1 = \frac{\lambda_1 \sigma - \beta}{\lambda - \lambda_1 \gamma}, \quad \sigma_2 = \frac{\lambda_2 \sigma - \beta}{\lambda - \lambda_2 \gamma}, \\ \sigma_3 = \frac{\lambda_3 \sigma - \beta}{\lambda - \lambda_3 \gamma}, \quad \sigma_4 = \frac{\lambda_4 \sigma - \beta}{\lambda - \lambda_4 \gamma}. \end{cases} \quad (4.7.7)$$

Введем постоянную $\mathcal{X}$, такую, что $0 < \mathcal{X} < 1$, и пусть

$$j_1 = -\frac{1}{\mathcal{X}}, \quad j_2 = -1, \quad j_3 = 1, \quad j_4 = \frac{1}{\mathcal{X}}. \quad (4.7.8)$$

Можно разрешить написанную выше систему из четырех уравнений относительно β , γ , σ и $\mathcal{X}$, полагая $\lambda = 1$. В частности, $\mathcal{X}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{X}^2 - 2 \left[1 - \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_3)}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right] \mathcal{X} + 1 = 0, \quad (4.7.9)$$

откуда видно, что один из корней, как и ожидалось, меньше единицы.

Таким образом,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\lambda} \omega = 2A_0 \int_1^{1/\mathcal{X}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\mathcal{X}^2 s^2)}} = \\ &= -2iA_0 \int_1^{1/\mathcal{X}} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-\mathcal{X}^2 s^2)}} = \\ &= -2iA_0 K(\mathcal{X}'), \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

где $K(\mathcal{X}')$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $\mathcal{X}' = \sqrt{1-\mathcal{X}^2}$. Далее имеем

$$\tau_1 = \int_{\beta} \omega = 2A_0 \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-\mathcal{X}^2 s^2)}} = 4A_0 K(\mathcal{X}). \quad (4.7.11)$$

Следовательно,

$$A_0 = i/2 K(\mathcal{X}'), \quad (4.7.12)$$

$$\tau_1 = i2K(\mathcal{X})/K(\mathcal{X}').$$

Так как при изменении $\mathcal{X}$ от нуля до единицы функция

$2K(x)/K(x')$ монотонно изменяется от 0 до ∞ , можно ввести новый модуль k , записав

$$\frac{2K(x)}{K(x')} = \frac{K(k)}{K(k')}, \quad (4.7.13)$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$; введем также

$$\tau_1 = i \frac{K(k)}{K(k')}. \quad (4.7.14)$$

В данном случае $\mathcal{V}$ -функция Римана сводится к эллиптической $\mathcal{V}$ -функции $\mathcal{V}_3$, которую можно выразить через $\mathcal{V}_0$, так как $\mathcal{V}_3(v) = \mathcal{V}_0(v+1/2)$. Имеем

$$\mathcal{V}_3(v|\tau_1) = \mathcal{V}_3(v; q_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_1^{m^2} e^{2\pi i m v}, \quad (4.7.15a)$$

где

$$q_1 = e^{i\pi\tau_1} = e^{-\pi K(k)/K(k')} \quad (4.7.15b)$$

Используя мнимое преобразование Якоби для $\mathcal{V}_3$ [4.5]:

$$\mathcal{V}_3(v|\tau_1) = \sqrt{\frac{i}{\tau_1}} e^{-v^2\pi i/\tau_1} \mathcal{V}_3\left(\frac{v}{\tau_1} \middle| -\frac{1}{\tau_1}\right), \quad (4.7.16)$$

можно выразить решения (4.6.34 - 40) через функцию $\mathcal{V}_3$ с параметром

$$q = e^{-\pi K(k')/K(k)} \quad (4.7.17)$$

Решение представим в виде

$$S_n = \bar{f}(t) + nP_0 t + Bn^2 + \ln \mathcal{V}_3\left(\frac{n}{N} - vt + \delta; q\right), \quad (4.7.18)$$

где N есть длина волны, а v - частота. Уравнение (4.7.18) описывает кноидальную волну в цепочке (2.3.10) [$\mathcal{V}_0(x) = \mathcal{V}_3(x+1/2)$]; вид этой волны изображен на рис. 4.10.

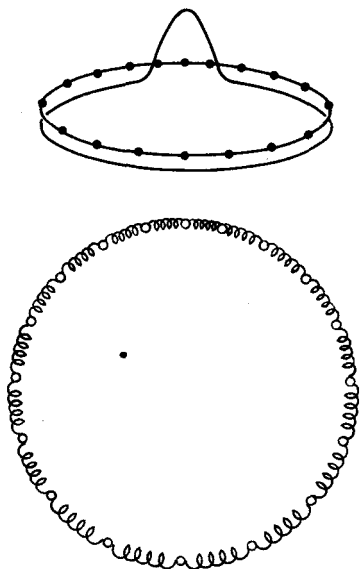


Рис. 4.10. Солитон в периодической системе (кноидальная волна).

II. Проверим некоторые результаты этой главы для кноидальной волны малой амплитуды. В этом случае используем континуальное приближение, т.е. уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ). В указанном приближении волна может быть описана посредством

$$u = 2\zeta_n, \quad \zeta_n = Q_{n+1} - Q_n \quad (4.7.19)$$

Выразим длину кноидальной волны через число частиц, и пусть оно равно N . Предположим, что модуль k достаточно мал, так что волна изначально имеет синусоидальную форму

$$u \approx -\varepsilon_0 \cos \frac{2\pi}{N} n, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4} \omega^2 k^2 = k^2 \sin^2 \frac{\pi}{N}. \quad (4.7.20)$$

Напомним, что в соответствии с (3.11.23) континуальный аналог уравнения $L\psi = \lambda\psi$ есть уравнение КдВ, т.е.

$$\frac{d^2\psi}{dn^2} + \left(\lambda^{(\text{КдВ})} - u \right) \psi = 0. \quad (4.7.21)$$

В случае синусоидальной волны данное уравнение сводится к урав-

нению Матье [4.6]

$$\frac{d^2 \varphi}{d\chi^2} + (\sigma + \varepsilon \cos \chi) \varphi = 0. \quad (4.7.22)$$

Здесь положено

$$\chi = \frac{2\pi n}{N} \quad (4.7.23)$$

(период по χ равен 2π) и введены обозначения

$$\sigma = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \lambda^{(\text{КДВ})}, \quad \varepsilon = \left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \varepsilon_0. \quad (4.7.24)$$

Для малых ε границы областей устойчивости и неустойчивости уравнения Матье (4.7.22) определяются соотношениями

$$\delta \approx 0, \quad \delta \approx \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \varepsilon, \quad (4.7.25)$$

и щель имеется в окрестности $\sigma \approx 1/4$ (рис. 4.11, а). Если переписать уравнения этих границ через $\lambda^{(\text{КДВ})}$ как функцию от ε_0 , получим (рис. 4.11, б)

$$\lambda^{(\text{КДВ})} \approx 0, \quad \lambda^{(\text{КДВ})} \approx \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \mp \frac{1}{2} \varepsilon_0. \quad (4.7.26)$$

Связь $\lambda^{(\text{КДВ})}$ и спектра цепочки $\lambda(L\varphi = \lambda\varphi)$ для волн, распространяющихся вправо, определяется соотношением

$$\begin{cases} \lambda^{(\text{КДВ})} = k^2, \\ \lambda = \cos k = \cos \sqrt{\lambda^{(\text{КДВ})}}. \end{cases} \quad (4.7.27)$$

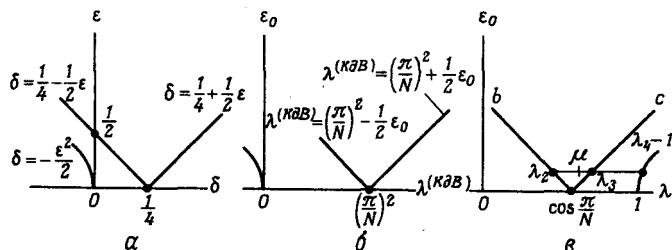


Рис. 4.11. Области неустойчивости и щели уравнения Матье.

Следовательно, границы областей устойчивости спектра цепочки (рис. 4.11, в) определяются соотношениями

$$\lambda_d \approx 1, \left(\frac{\lambda_e}{\lambda_c} \right) \approx \cos \sqrt{\left(\frac{\pi}{N} \right)^2 \mp \frac{\varepsilon_0}{2}} \approx \cos \frac{\pi}{N} \pm \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}. \quad (4.7.28)$$

Щель шириной порядка $\varepsilon_0/2$ и узкий участок спектра (разрешенная зона) над ним, в котором λ меняется от $\lambda \approx \cos(\pi/N)$ до $\lambda \approx 1$ определяются кноидальной волной. Уравнение КдВ описывает лишь волны, распространяющиеся в одном направлении, следовательно, если волны, распространяющиеся вправо, мы описываем уравнением КдВ, то окрестность точки $\lambda \approx -1$, соответствующая волнам, распространяющимся влево, не рассматривается. Если рассматриваются волны в цепочке, распространяющиеся влево, то граница между областями устойчивости и неустойчивости находится в окрестности $\lambda \approx -1$.

Если в уравнении (4.7.21) $u = 0$, собственные функции имеют вид

$$\varphi(n) = C \sin \frac{\pi}{N} n, \quad (4.7.29)$$

а соответствующие собственные значения $\lambda^{(КдВ)} = (\pi/N)^2$. Предполагая для простоты, что в континуальном приближении $\pi/N \ll 1$, нормируем собственную функцию следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^N |\varphi(n)|^2 dn &= \frac{C^2 N}{2} = 1, \\ \therefore C &= \sqrt{\frac{2}{N}}. \end{aligned} \right. \quad (4.7.30)$$

Для потенциала (4.7.20) с аргументом, смещенным на k точек цепочки, собственные значения, вычисленные в первом порядке теории

возмущений, имеют вид

$$\mu^{(КВ)}(k) = \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 - \frac{2}{N} \int_0^N \varepsilon_0 \cos \frac{2\pi}{N} (n+k) \sin^2 \frac{\pi}{N} n dn =$$

$$= \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \cos \frac{2\pi}{N} k. \quad (4.7.31)$$

Заметим, что границы областей устойчивости и неустойчивости расположены при $k=0$ и $k=N/2$. При изменении k $\mu^{(КВ)}(k)$ осциллирует в этих границах.

Мы определили λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 как границы между областями устойчивости и неустойчивости для заданного значения ε_0 . Если обозначить через a , b , c и d соответствующие границы для случая достаточно малого ε_0 , то получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \approx a = -1, \\ \lambda_2 \approx b = \cos \frac{\pi}{N} - \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}, \\ \lambda_3 \approx c = \cos \frac{\pi}{N} + \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}, \\ \lambda_4 \approx d = 1. \end{array} \right. \quad (4.7.32)$$

Можно разрешить уравнения (4.7.7, 8) относительно α , β , γ и δ , пренебрегая малыми величинами ε_0^2 и $\varepsilon_0 x$; тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 4x \cos \frac{\pi}{N}, \quad \beta = 4 \cos^2 \frac{\pi}{N}, \\ \gamma = 4x - \varepsilon_0 \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}, \quad \delta = 4 \cos \frac{\pi}{N}, \end{array} \right. \quad (4.7.33)$$

где x — один из корней уравнения

$$x^2 - 4 \left(\frac{\pi/N}{\varepsilon_0} \sin \frac{\pi}{N} \right) x + 1 = 0, \quad (4.7.34)$$

причем выбирается корень, меньший чем единица:

$$x \approx \frac{\varepsilon_0}{(4\pi/N) \sin(\pi/N)}. \quad (4.7.35)$$

Преобразование (4.7.5), определяющее связь γ и λ , а именно

$$\gamma = \frac{\sigma\lambda - \beta}{\alpha - \gamma\lambda}, \quad (4.7.36)$$

показано на рис. 4.12. Величина γ обращается в $\pm\infty$ при значениях

$$\lambda_\infty = \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{x \cos(\pi/N)}{x - \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}} = \frac{1}{\cos(\pi/N)}. \quad (4.7.37)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (4.7.35). Величина λ обращается в $\pm\infty$ при

$$\gamma_\infty = -\frac{\sigma}{\gamma} = -\frac{\cos(\pi/N)}{x - \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}} = -\frac{\lambda_\infty}{x}, \quad (4.7.38)$$

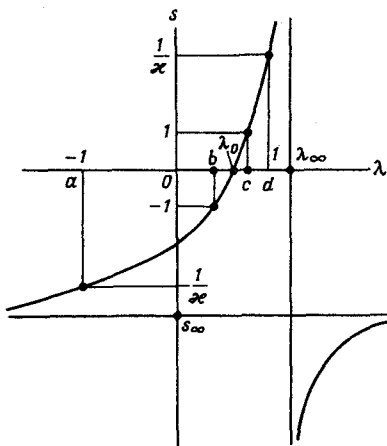


Рис. 4.12. Соотношение между γ и λ .

а γ обращается в нуль при

$$\lambda_0 = \frac{\beta}{\delta} = \cos \frac{\pi}{N} + \frac{\varepsilon_0 x \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N}}{4 \cos(\pi/N)}. \quad (4.7.39)$$

При $\lambda = \mu(k)$, т.е. когда

$$\mu(k) = \cos \sqrt{\mu(\text{КДВ})(k)} \approx \cos \frac{\pi}{N} - \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N} \cos \frac{2\pi k}{N}, \quad (4.7.40)$$

имеем

$$\gamma[\mu(k)] \approx \frac{-\cos \frac{\pi}{N} \cos \frac{2\pi k}{N}}{\cos \frac{\pi}{N} + k \cos \frac{2\pi k}{N}} \approx -\cos \frac{2\pi k}{N}. \quad (4.7.41)$$

Таким образом, левая часть соотношения (4.3.25) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\mu_0}^{\mu(k)} \omega &= A_0 \int_{-1}^{-\cos(2\pi k/N)} \frac{-ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}} = \\ &\approx A_0 \int_1^{\cos(2\pi k/N)} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \\ &= -A_0 \arccos \left(\cos \frac{2\pi k}{N} \right) = \\ &= -A_0 \frac{2\pi}{Nk} \quad (\text{mod } A_0 2\pi) \end{aligned} \quad (4.7.42)$$

С другой стороны, правая часть (4.3.25) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda=d}^{\lambda=\infty} \omega &= A_0 \left(\int_{1/x}^{\infty} + \int_{-\infty}^{1/\infty} \right) \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(x^2 s^2-1)}} = \\
 &= A_0 \left(\int_{1/x}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \right) \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(x^2 s^2-1)}} = \\
 &= A_0 \left(2 \int_{1/x}^{\infty} - \int_{1/x}^{-1/x} \right) \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(x^2 s^2-1)}} = \\
 &= A_0 \left[2K(x) - \int_1^{\lambda_{\infty}} \frac{(1/x) dy}{\sqrt{(y^2/x^2-1)(y^2-1)}} \right] = \\
 &\approx A_0 \left[2K(x) - \int_1^{\lambda_{\infty}} \frac{dy}{y \sqrt{y^2-1}} \right] = \\
 &= A_0 \left[2K(x) - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} x_1 \right], \tag{4.7.43}
 \end{aligned}$$

где

$$x_1 = \operatorname{arccsh} \lambda_{\infty}. \tag{4.7.44}$$

Следовательно, из (4.7.37) имеем

$$\operatorname{sh} x_1 = \sqrt{\lambda_{\infty}^2 - 1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{N}, \tag{4.7.45}$$

а учитывая (4.5.9) и (4.7.43), получаем

$$-c_1 = \int_{\infty'}^{\infty} \omega = 2 \int_{\lambda=d}^{\infty} \omega \approx -A_0 \frac{2\pi}{N} + \tau_1. \tag{4.7.46}$$

Уравнения (4.7.42, 46) доказывают справедливость (4.3.25).

Если x и k малы, можно использовать соотношение

$$K(x') = \frac{2}{\pi} K(x) \ln \frac{4}{x} \tag{4.7.47}$$

и записать (4.7.13) в виде

$$\frac{2}{\ln\left(\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{\ln\left(\frac{4}{k}\right)},$$

откуда следует

$$\left(\frac{4}{k}\right)^2 = \frac{4}{x},$$

т.е.

$$x = \frac{k^2}{4}. \quad (4.7.48)$$

Так как мы предполагали, что $\pi/N \ll 1$, сравнивая (4.7.20) и (4.7.35), можно проверить справедливость (4.7.48). Таким образом, при малых k из (4.7.17) имеем

$$q \approx \left(\frac{k}{4}\right)^2, \quad (4.7.49)$$

а мнимое преобразование при малых q имеет вид

$$V_3 = \sqrt{\frac{i}{\varepsilon}} e^{-v^2 \pi i / \tau_1} \left\{ 1 + 2q \operatorname{ch} \left(2\pi \frac{K(k')}{K(k)} v \right) \right\}. \quad (4.7.50)$$

Величину v в аргументе можно представить как

$$\begin{cases} c_1 = A_0 \frac{2\pi}{N} = i \frac{\pi}{N} \frac{1}{K(x')} \approx i \frac{K(k)}{N K(k')}, \\ v = n c_1 - \beta t + \sigma', \end{cases} \quad (4.7.51)$$

где мы использовали то обстоятельство, что в выражении (4.7.46) τ_1 может быть опущено, так как соответствующие слагаемые не вносят вклада в

$$\ln V_3 \approx 2q \cos \left[2\pi \left(\frac{n}{N} - vt \right) + \sigma \right] +$$

+ (Члены, линейные по v^2);

(4.7.52)

здесь v и σ — некоторые постоянные (см. (4.6.42, 43)). Таким образом,

$$u \approx 2 \frac{d^2}{dn^2} S_n = -k^2 \left(\frac{\pi}{N} \right)^2 \cos \left[2\pi \left(\frac{n}{N} - vt \right) + \sigma \right] + \text{const}, \quad (4.7.53)$$

что согласуется с исходным выражением (4.7.20).

Для солитонного решения имеем собственное значение λ (КДВ)_{<1}, т.е. связанное состояние. Кноидальная волна есть последовательность¹⁾ солитонов с равным интервалом. В случае когда модуль k близок к единице, кноидальная волна состоит из солитонов с различными амплитудами и очень узкой зоной, лежащей ниже непрерывного спектра. Так как данная ситуация аналогична случаю солитонов в бесконечной цепочке, соответствующий спектр цепочки представляет собой зону, лежащую при $\lambda > 1$ (если волна распространяется влево, имеем $\lambda < -1$). С другой стороны, если модуль k мал, кноидальная волна близка к синусоидальной волне, и, как видно из соотношения (4.7.28), спектральная зона расположена в области $\lambda \approx 1$. Если модуль кноидальной волны возрастает вплоть до $k \approx 1$, область неустойчивости уравнения Матве смещается к $\sigma < 0$. Хотя использованное выше приближение неприменимо при стремлении модуля k к единице, понятно, что область неустойчивости спектра цепочки смещается к $|\lambda| > 1$. На рис. 4.2 кривая изображает зависимость дискриминанта $\Delta(\lambda)$ от величины λ , область неустойчивости ($\Delta^2 > 4$) при $|\lambda| \approx 1$ соответствуют солитонам, а области неустойчивости с $-1 < \lambda < 1$ соответствуют волнам, подобным ряби на воде или полю излучения.

Такое поведение $\Delta(\lambda)$ было численно исследовано Флашкой с соавторами, которые показали, что в случае периодической волны j -гармоника растет в области экстремума с номером j кривой $\Delta(\lambda)$ в зависимости от λ (который может быть "пиком" или "впадиной")²⁾. Этот результат можно понять следующим образом.

Рассмотрим сначала цепочку в состоянии покоя. Тогда из (4.1.23, 24) имеем $\Delta(\lambda) = 2 \cos 2N$, $\lambda = \cos 2$, так что корни уравнения $\Delta(\lambda) = \pm 2$, т.е. позиции "пиков" и "впа-

¹⁾ Скорее суперпозиция, как это видно из (2.3.8а). — Прим. перев.

²⁾ То есть локальным максимумом или минимумом. — Прим. перев.

дин", определяются как

$$\alpha_{(l)} = \frac{l\pi}{N} \quad (l = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (4.7.54)$$

а собственное значение с номером l есть

$$\lambda_{(l)} = \cos \frac{l\pi}{N}. \quad (4.7.55)$$

Теперь будем описывать синусоидальную волну малой амплитуды в приближении КДВ, полагая, что волна распространяется вправо. В соответствии с (3.11.6) связь между полем волны u , описываемым уравнением КДВ и смещением цепочки Q_n , определяется выражением

$$u(n, t) = 2\varphi_n(t) = 2(Q_{n+1} - Q_n). \quad (4.7.56)$$

Если мы запишем j -ю гармонику волны в начальный момент как

$$u \approx -\varepsilon_0 \cos \frac{j2\pi n}{N}, \quad (4.7.57)$$

то уравнение для собственных значений

$$\frac{d^2\varphi}{dn^2} + \left(\lambda^{(\text{КДВ})} - u \right) \varphi = 0 \quad (4.7.58)$$

примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\delta + \varepsilon \cos z) \varphi = 0, \quad (4.7.59)$$

где

$$z = \frac{j2\pi n}{N}, \quad \delta = \left(\frac{N}{j2\pi} \right)^2 \lambda^{(\text{КДВ})}, \quad \varepsilon = \left(\frac{N}{j2\pi} \right)^2 \varepsilon_0. \quad (4.7.60)$$

Границы областей устойчивости и неустойчивости данного уравнения Матье есть

$$\delta \approx 0, \quad \delta \approx \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2} \varepsilon, \quad (4.7.61)$$

а соответствующие границы для уравнения КдВ -

$$\lambda^{(\text{КдВ})} \approx 0, \quad \lambda^{(\text{КдВ})} \approx \left(\frac{j\pi}{N} \right)^2 \mp \frac{1}{2} \varepsilon_0. \quad (4.7.62)$$

Так как связь между спектром уравнения КдВ $\lambda^{(\text{КдВ})}$ и спектром цепочки λ (в случае волн, распространяющихся вправо) имеет вид

$$\lambda = \cos \sqrt{\lambda^{(\text{КдВ})}}, \quad (4.7.63)$$

границы (включая границы щели) спектра цепочки определяются как

$$\lambda_{(0)} \approx 1,$$

$$\begin{aligned} \lambda_{(j)}^{\pm} &\approx \cos \frac{j\pi}{N} \pm \frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{\sin(j\pi/N)}{j\pi/N} = \\ &= \lambda_{(j)} \pm \frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{\sin(j\pi/N)}{j\pi/N}. \end{aligned} \quad (4.7.64)$$

Отсюда видно, что область неустойчивости лежит в окрестности j -го экстремума ("пика" или "впадины") функции $\Delta(\lambda)$ (рис. 4.13).

То же самое можно сказать про j -ю гармонику волны, распространяющуюся влево: если амплитуда волны малая, то в окрестности j -го экстремума $\Delta(\lambda)$ находится область неустойчивости $|\Delta(\lambda)| > 2$.

Задача 4.3. Проверьте (4.7.14), используя формулу¹⁾

$$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = M \operatorname{sn}^{-1} \left[\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}}, k \right],$$

где модуль k определяется из

$$k^2 = \frac{(c-b)(d-a)}{(d-b)(c-a)}$$

¹⁾ Здесь символом sn^{-1} обозначена функция, обратная эллиптической функции Якоби sn . - Прим. перев.

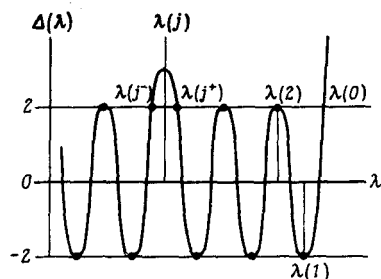


Рис. 4.13. Область неустойчивости j -й гармоники волны малой амплитуды $[\Delta(\lambda) < 2]$.

$$\int_c^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = M m^{-1} \left[\sqrt{\frac{(d-b)(x-c)}{(d-c)(x-b)}}, k' \right];$$

здесь модуль $k' = \sqrt{1-k^2}$, а

$$X = (x-d)(x-c)(x-b)(x-a),$$

$$M = 2/\sqrt{(d-b)(c-a)},$$

$$d > c > b > a.$$

4.8. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ИЗ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Случай системы из трех частиц представляет интерес, поскольку это простейший случай системы, проявляющей почти все характерные особенности системы многих частиц. Поэтому мы рассмотрим эту систему детально.

Определим сначала фундаментальные решения φ_1 и φ_2 как

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 1, & \varphi_1(1) = 0, \\ \varphi_2(0) = 0, & \varphi_2(1) = 1. \end{cases} \quad (4.8.1)$$

Наложим периодические граничные условия

$$a_0 = a_3, \quad b_0 = b_3. \quad (4.8.2)$$

Тогда получим уравнения для $\varphi = \varphi_1$ и φ_2

$$\begin{cases} a_0 \varphi(0) + b_1 \varphi(1) + a_1 \varphi(2) = \lambda \varphi(1), \\ a_1 \varphi(1) + b_2 \varphi(2) + a_2 \varphi(3) = \lambda \varphi(2), \\ a_2 \varphi(2) + b_0 \varphi(3) + a_0 \varphi(4) = \lambda \varphi(3) \end{cases} \quad (4.8.3)$$

и определитель для коэффициентов

$$L^+ - \lambda I = \begin{pmatrix} b_1 - \lambda & a_1 & a_0 \\ a_1 & b_2 - \lambda & a_2 \\ a_0 & a_2 & b_0 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.8.4)$$

Как мы знаем, собственные значения λ_j ($j = 1, 2, 3$) матрицы L^+ не зависят от времени.

Решая последовательно уравнения (4.8.3), получаем

$$\begin{cases} \varphi_1(2) = -\frac{a_0}{a_1}, \\ \varphi_1(3) = -\frac{a_0}{a_1 a_2} (\lambda - b_2), \\ \varphi_1(4) = -\frac{\lambda - b_0}{a_0} \varphi_1(3) - \frac{a_2}{a_0} \varphi_1(2) = -\frac{(\lambda - b_2)(\lambda - b_0)}{a_1 a_2} + \frac{a_2}{a_1}, \\ \varphi_2(2) = \frac{1}{a_1} (\lambda - b_1), \\ \varphi_2(3) = \frac{1}{a_1 a_2} (\lambda - b_1)(\lambda - b_2) - \frac{a_1}{a_2}, \\ \varphi_2(4) = \frac{1}{a_1 a_2 a_0} (\lambda - b_1)(\lambda - b_2)(\lambda - b_0) - \\ - \frac{a_2}{a_0 a_1} (\lambda - b_1) - \frac{a_1}{a_2 a_0} (\lambda - b_0), \end{cases} \quad (4.8.5)$$

так что

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \varphi_1(3) + \varphi_2(4) = \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 a_0} (\lambda - b_1)(\lambda - b_2)(\lambda - b_0) - \\ &- \frac{a_2}{a_0 a_1} (\lambda - b_1) - \frac{a_0}{a_1 a_2} (\lambda - b_2) - \frac{a_1}{a_2 a_0} (\lambda - b_0). \quad (4.8.6)\end{aligned}$$

В итоге

$$\det(L^+ - \lambda I) = -a_1 a_2 a_0 [\Delta(\lambda) - 2], \quad (4.8.7)$$

где $a_1 a_2 a_0 = 1/8$ и $\Delta(\lambda)$ не зависит от времени.

Дополнительный спектр определяется из

$$\varphi_1(4, \mu) = 0 \quad (4.8.8)$$

или

$$\frac{(\mu - b_2)(\mu - b_0)}{a_1 a_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (4.8.9)$$

Это совпадает с уравнением для определителя

$$\det \begin{pmatrix} b_2 - \mu & a_2 \\ a_2 & b_0 - \mu \end{pmatrix} = 0, \quad (4.8.10)$$

который можно построить, используя правые нижние элементы матрицы $L^+ - \lambda I$, т.е. с уравнением

$$\mu^2 - (b_2 + b_0)\mu + (b_0 b_2 - a_2^2) = 0. \quad (4.8.11)$$

Корни данного уравнения определяются как

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{b_2 + b_0 - \sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}}{2}, \\ \mu_2 = -\frac{b_2 + b_0 + \sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}}{2}; \end{cases} \quad (4.8.12)$$

они осциллируют во времени (рис. 4.14). В данном случае для $\mu = \mu_1$ и μ_2 имеем

$$\begin{cases} \varphi_1(3, \mu) = -\frac{a_0}{a_1 a_2} (\mu - \epsilon_2), \\ \varphi_2(4, \mu) = -\frac{a_1}{a_0 a_2} (\mu - \epsilon_0). \end{cases} \quad (4.8.13)$$

Следовательно,

$$\varphi_1(3, \mu) \varphi_2(4, \mu) = \frac{1}{a_2^2} (\mu - \epsilon_2)(\mu - \epsilon_0) = 1, \quad (4.8.14)$$

и можно записать

$$\begin{aligned} \Delta(\mu) &= \varphi_1(3, \mu) + \frac{1}{\varphi_1(3, \mu)} = \\ &= \pm 2 \operatorname{ch} \ln |\varphi_1(3, \mu)|. \end{aligned} \quad (4.8.15)$$

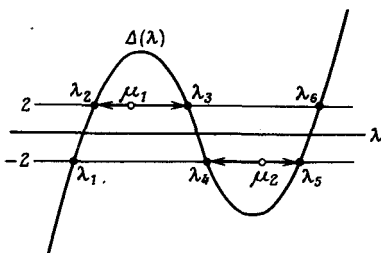


Рис. 4.14. Зависимость $\Delta(\lambda)$ и дополнительные спектры μ_1 и μ_2 в системе из трех частиц.

Далее, так как

$$[\varphi_1(3, \mu)]^2 - \Delta(\mu) \varphi_1(3, \mu) + 1 = 0, \quad (4.8.16)$$

имеем

$$\varphi_1(3, \mu) = \frac{\Delta(\mu) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}}{2} \quad (4.8.17)$$

и

$$\begin{aligned}\Delta(\mu) &= \varphi_1(3, \mu) + \varphi_2(4, \mu) = \\ &= -\frac{a_0}{a_1 a_2} (\mu - b_2) - \frac{a_1}{a_2 a_0} (\mu - b_0) = \\ &= -\frac{1}{a_1 a_2 a_0} \left[(a_0^2 + a_1^2) \mu - (a_0^2 b_2 + a_1^2 b_0) \right]. \quad (4.8.18)\end{aligned}$$

Заметив, что

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{const} \equiv b, \\ \mu_1 + \mu_2 = b_2 + b_0, \\ \mu_2 - \mu_1 = \sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}, \end{cases} \quad (4.8.19)$$

получим

$$\begin{aligned}b_1^2 + b_2^2 + b_0^2 &= (b - b_2 - b_0)^2 + b_2^2 + b_0^2 = \\ &= 2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + 2\mu_1\mu_2 - 2(\mu_1 + \mu_2)b - 2a_2^2 + b_2. \quad (4.8.20)\end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$-\frac{[\Delta(\mu_1) - \Delta(\mu_2)]}{\mu_1 - \mu_2} = 8(a_1^2 + a_0^2), \quad (4.8.21)$$

полную энергию системы можно записать в виде

$$\begin{aligned}E &= 2(b_1^2 + b_2^2 + b_0^2) + 4(a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) = \\ &= 4 \frac{-(1/8)[\Delta(\mu_1) - \Delta(\mu_2)] + \mu_1^3 - \mu_2^3}{\mu_1 - \mu_2} - 4(\mu_1 + \mu_2)b + 2b^2. \quad (4.8.22)\end{aligned}$$

Скорость изменения μ_1 найдем из (4.8.12):

$$\dot{\mu}_1 = \frac{1}{2} \left[\dot{b}_2 + \dot{b}_0 - \frac{(b_2 - b_0)(\dot{b}_2 - \dot{b}_0) + 4a_2 \dot{a}_2}{\sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}} \right]. \quad (4.8.23)$$

Используя соотношения

$$\begin{cases} \dot{b}_2 = \frac{1}{2} \dot{P}_2 = 2(a_1^2 - a_2^2), \\ \dot{b}_0 = \frac{1}{2} \dot{P}_0 = 2(a_2^2 - a_0^2), \\ \dot{a}_2 = (b_2 - b_0)a_2, \end{cases} \quad (4.8.24)$$

запишем

$$\dot{\mu}_1 = \frac{(a_1^2 - a_0^2)(\mu_2 - \mu_1) - (b_2 - b_0)(a_1^2 + a_0^2)}{\mu_2 - \mu_1}. \quad (4.8.25)$$

С другой стороны, используя (4.8.14, 18, 19), имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta^2(\mu_1) - 4} &= \frac{\pm 1}{a_1 a_2 a_0} \left[(a_0^2 - a_1^2)\mu_1 + (a_1^2 b_0 - a_0^2 b_2) \right] = \\ &= \frac{\pm 1}{2a_1 a_2 a_0} \left[(a_1^2 - a_0^2)(\mu_2 - \mu_1) - (b_2 - b_0)(a_1^2 + a_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.8.26)$$

Следовательно, получим результат:

$$\dot{\mu}_1 = \pm \frac{\sqrt{\Delta^2(\mu_1) - 4}}{4(\mu_1 - \mu_2)}. \quad (4.8.27a)$$

Вид зависимости $\Delta(\mu)$ определяется начальными условиями, так

как $\Delta(\mu)$ не зависит от времени [см. (4.6.19)]. Таким образом, μ_1 осциллирует между корнями уравнения $\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4} = 0$, т.е. между λ_1 и λ_2 . Аналогично

$$\dot{\mu}_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta^2(\mu_2)-4}}{4(\mu_2-\mu_1)} \quad (4.8.27\delta)$$

и μ_2 осциллирует между λ_4 и λ_5 . Следовательно, данная система может быть выражена через набор точек, которые осциллируют между определенными границами.

Задача 4.4. Проверьте справедливость следующих уравнений:

$$\Delta(\mu_1) + \sqrt{\Delta^2(\mu_1)-4} = \frac{-2a_1^2}{a_1 a_2 a_0} (\mu_1 - \ell_0) = \Delta(\mu_2) - \sqrt{\Delta^2(\mu_2)-4},$$

$$\Delta(\mu_1) - \sqrt{\Delta^2(\mu_1)-4} = \frac{-2a_0^2}{a_1 a_2 a_0} (\mu_1 - \ell_2) = \Delta(\mu_2) + \sqrt{\Delta^2(\mu_2)-4}.$$

Глава 5

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Эта глава начинается с нескольких простых примеров, проясняющих применение сопряженных переменных при рассмотрении дополнительного спектра. Затем с помощью этих переменных к нелинейной цепочке применяется теория Гамильтона - Якоби. Далее определяются канонически сопряженные переменные действия и угловые переменные.

5.1. КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Цепочка с экспоненциальным взаимодействием интегрируема, поэтому к ней можно применить теорию Гамильтона - Якоби и получить канонически сопряженные переменные действия и угловые переменные. Сначала переменные действия были введены для бесконечной цепочки [5.1], затем теория Гамильтона - Якоби была применена и к периодической цепочке. В основном мы будем иметь дело с периодическими системами.

Начнем с простейшего случая двухчастичной периодической цепочки [5.2]. Обратимся к системе центра масс, так что смещение одной частицы есть $q_1 = x$ и смещение другой есть $q_2 = -x$. Скоростями будут $\dot{q}_1 = \dot{x}$ и $\dot{q}_2 = -\dot{x}$, а полная энергия имеет вид

$$E = \dot{x}^2 + e^{-2x} + e^{+2x}. \quad (5.1.1)$$

Лагранжиан $L = \dot{x}^2 - (e^{-2x} + e^{2x})$ дает импульс, сопряженный с координатой x :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}. \quad (5.1.2)$$

Гамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{4} p^2 + 2 \operatorname{ch} 2x. \quad (5.1.3)$$

Если положить

$$\mu = p/4, \quad v = -4x, \quad (5.1.4)$$

то можно рассматривать v как обобщенный импульс и μ — как его сопряженную координату (конечно, можно взять в качестве импульса μ и в качестве координаты $-v$). Тогда имеем гамильтониан

$$\mathcal{H}(\mu, v) = 2 \operatorname{ch}(v/2) + 4\mu^2 \quad (5.1.5)$$

и уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} = \operatorname{sh} \frac{v}{2}, \\ \dot{v} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu} = -8\mu. \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Так как из (5.1.6) следует уравнение

$$\ddot{v} = -8 \operatorname{sh} \frac{v}{2}, \quad (5.1.7)$$

то v осциллирует около значения $v=0$ и μ также осциллирует.

Рассмотрим теперь трехчастичную периодическую систему. Как было показано в разд. 4.8, для этой системы имеются два дополнительных спектра μ_1 и μ_2 , и они подчиняются уравнениям движения

$$\dot{\mu}_1 = \pm \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\Delta_1^2 - 4}}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \dot{\mu}_2 = \pm \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\Delta_2^2 - 4}}{\mu_2 - \mu_1}, \quad (5.1.8a)$$

где

$$\Delta_1 = \Delta(\mu_1), \quad \Delta_2 = \Delta(\mu_2). \quad (5.1.8b)$$

Как было показано в предыдущем разделе, μ_1 и μ_2 осциллируют соответственно в интервалах (λ_2, λ_3) и (λ_4, λ_5) . Сравнение со случаем двухчастичной системы показывает, что в предположении $\operatorname{sh}(v/2) \sim \sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}$

можно ввести импульсы μ_1 и μ_2 , канонически сопряженные соответственно с v_1 и v_2 .

Чтобы проверить это утверждение, подсчитаем скобки Пуассона

$$[\mu_1, \Delta_1] = \frac{\partial \mu_1}{\partial Q_1} \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_1} + \frac{\partial \mu_1}{\partial Q_1} \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial Q_0} \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_0} - \\ - \frac{\partial \mu_1}{\partial P_1} \frac{\partial \Delta_1}{\partial Q_1} - \frac{\partial \mu_1}{\partial P_2} \frac{\partial \Delta_1}{\partial Q_2} - \frac{\partial \mu_1}{\partial P_0} \frac{\partial \Delta_1}{\partial Q_0}, \quad (5.1.9)$$

где μ_1 и Δ_1 — функции P_n и Q_n , входящие через a_n и b_n ($n = 0, 1, 2$). С помощью (4.8.12) и (4.8.18) получаем

$$\begin{cases} \mu_1 = [b_2 + b_0 - \sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}] / 2, \\ \mu_2 = [b_2 + b_0 + \sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}] / 2 \end{cases} \quad (5.1.10)$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = -8[(a_0^2 + a_1^2)\mu_1 - (a_0^2 b_2 + a_1^2 b_0)], \\ \Delta_2 = -8[(a_0^2 + a_1^2)\mu_2 - (a_0^2 b_2 + a_1^2 b_0)], \end{cases} \quad (5.1.11)$$

и поэтому

$$\mu_1 + \mu_2 = b_0 + b_2, \quad (5.1.12a)$$

$$\mu_2 - \mu_1 = \sqrt{(b_2 - b_0)^2 + 4a_2^2}, \quad (5.1.12b)$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = b_2^2 + b_0^2 + 2a_2^2, \quad (5.1.12b)$$

$$\mu_1 \mu_2 = b_2 b_0 - a_2^2, \quad (5.1.12v)$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = -8(a_0^2 + a_1^2)(\mu_1 - \mu_2). \quad (5.1.13)$$

После некоторых вычислений получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta_1^2 - 4} &= 4[(a_1^2 - a_0^2)(\mu_2 - \mu_1) - (b_2 - b_0)(a_1^2 + a_0^2)] = \\ &= 8[(a_0^2 - a_1^2)\mu_1 + (a_1^2 b_0 - a_0^2 b_2)], \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

а также подобную формулу для $\sqrt{\Delta_2^2 - 4}$.

Тогда, отмечая, что $a_2^2 = \{\exp[(Q_0 - Q_1)]\}/4$ и $b_2 = P_2/2$,

имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial P_1} &= 0, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial Q_1} &= 0, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial P_2} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial \ell_2} \frac{\partial \ell_2}{\partial P_2} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\ell_2 - \ell_0}{\sqrt{(\ell_2 - \ell_0)^2 + 4a_2^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\ell_2 - \ell_0}{\mu_2 - \mu_1} \right), \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial Q_2} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial (a_2^2)} \frac{\partial (a_2^2)}{\partial Q_2} = \frac{-a_2^2}{\mu_2 - \mu_1}, \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial P_0} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial \ell_0} \frac{\partial \ell_0}{\partial P_0} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\ell_2 - \ell_0}{\mu_2 - \mu_1} \right), \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial Q_0} &= \frac{\partial \mu_1}{\partial (a_2^2)} \frac{\partial (a_2^2)}{\partial Q_0} = \frac{a_2^2}{\mu_2 - \mu_1}. \end{aligned} \right. \quad (5.1.15)$$

Аналогично для производных Δ_1 имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_1} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial Q_1} &= -8 \left[-a_0^2 (\mu_1 - \ell_2) + a_1^2 (\mu_1 - \ell_0) \right], \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_2} &= -2 \left[(a_0^2 + a_1^2) \left(1 - \frac{\ell_2 - \ell_0}{\mu_2 - \mu_1} \right) - 2a_0^2 \right], \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial Q_2} &= 8 \left[a_1^2 (\mu_1 - \ell_0) + \frac{a_2^2 (a_0^2 + a_1^2)}{\mu_2 - \mu_1} \right], \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_0} &= -2 \left[(a_0^2 + a_1^2) \left(1 + \frac{\ell_2 - \ell_0}{\mu_2 - \mu_1} \right) - 2a_1^2 \right], \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial Q_0} &= -8 \left[a_0^2 (\mu_1 - \ell_2) + \frac{a_0^2 (a_0^2 + a_1^2)}{\mu_2 - \mu_1} \right]. \end{aligned} \right. \quad (5.1.16)$$

Подставляя эти уравнения в (5.1.9), получаем

$$[\mu_1, \Delta_1] = 2 \left[(a_0^2 - a_1^2) \mu_1 + (a_1^2 b_0 - a_0^2 b_2) \right] + \\ + \frac{2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ (b_2 - b_0) [a_1^2 (\mu_1 - b_0) + a_0^2 (\mu_1 - b_2)] + 2a_2^2 (a_1^2 - a_0^2) \right\}. \quad (5.1.17)$$

Если с помощью (5.1.12а) заметим, что $\mu_1 = -(\mu_2 - \mu_1)/2 + (b_2 + b_0)/2$, то после использования (5.1.12б) имеем

$$[\mu_1, \Delta_1] = 2 \left[(a_1^2 - a_0^2) \mu_1 + (a_1^2 b_0 - a_0^2 b_2) \right] + \\ + \left[-(b_2 - b_0)(a_1^2 + a_0^2) + (\mu_2 - \mu_1)(a_1^2 - a_0^2) \right]. \quad (5.1.18)$$

Поэтому (5.1.14) дает

$$[\mu_1, \Delta_1] = \frac{1}{4} \sqrt{\Delta_1^2 - 4} + \frac{1}{4} \sqrt{\Delta_1^2 - 4} = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_1^2 - 4}. \quad (5.1.19)$$

Таким образом, отмечая тот факт, что $\Delta_1 \geq 2$ (ср. рис. 4.13) и вводя v_1 с помощью соотношения

$$\Delta_1 = 2 \operatorname{ch} \frac{v_1}{2}, \quad (5.1.20)$$

(5.1.19) сводим к

$$[\mu_1, \Delta_1] = \operatorname{sh} \frac{v_1}{2}. \quad (5.1.21)$$

В общем случае если q и p есть сопряженные координата и импульс, а $f(p)$ — произвольная функция p , то $[q, f(p)] = df(p)/dp$. Поэтому (5.1.21) эквивалентно уравнению

$$[\mu_1, v_1] = 1 \quad (5.1.22a)$$

и импульс v_1 , сопряженный с μ_1 ($\Delta_1 \geq 2$), задается выражением

$$v_1 = 2 \ln \frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4}}{2}. \quad (5.1.23a)$$

Аналогично импульс v_2 , сопряженный с μ_2 ($\Delta_2 \leq -2$), задает-

ся выражением

$$v_2 = 2 \ln \left| \frac{\Delta_2 - \sqrt{\Delta_2^2 - 4}}{2} \right|. \quad (5.1.23\delta)$$

Можно показать, что удовлетворяются соотношения

$$\begin{cases} [\mu_2, v_2] = 1, \\ [\mu_1, v_2] = [\mu_2, v_1] = 0, \\ [\mu_1, \mu_2] = [v_1, v_2] = 0, \end{cases} \quad (5.1.22\delta)$$

которые и должны выполняться для этих сопряженных переменных. Здесь v_1 есть функция μ_1 , не зависящая от μ_2 , а v_2 — функция μ_2 , не зависящая от μ_1 .

Мы рассмотрели двухчастичные и трехчастичные системы. Можно распространить результаты на многочастичную периодическую цепочку [5.2, 3]. Пусть λ_j^+ ($j = 1, 2, \dots, N$) являются собственными значениями матрицы L^+ , задаваемой соотношением (4.1.28) для периодической цепочки из N частиц, или корнями уравнения

$$\det (L^+ - \lambda I) = 0. \quad (5.1.24)$$

Тогда оказывается, что полной энергией цепочки будет

$$\begin{aligned} E &= 2 (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_N^2) + 4 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2) = \\ &= 2 \operatorname{Sp} (L^+)^2 = 2 \sum_{j=1}^N (\lambda_j^+)^2. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Поскольку λ_j являются корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 2$, можно записать

$$\Delta(\lambda) = A^{-1} \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j^+) + 2, \quad (5.1.26)$$

что можно переписать в виде ряда по степеням λ :

$$\Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^N \lambda^j \beta_j. \quad (5.1.27)$$

Коэффициенты β_j не зависят от времени, потому что $\Delta(\lambda)$ не

зависит от времени. В частности, из (5.1.26, 27) видно, что

$$\begin{cases} A\beta_N = 1, \\ A\beta_{N-1} = -\sum_{j=1}^N (\lambda^+)^j = -Sp\{L^+\} = \\ = -(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \dots + \vartheta_N) = -\frac{1}{2}P, \end{cases} \quad (5.1.28)$$

где P есть полный импульс. Далее имеем соотношение

$$\begin{aligned} A\beta_{N-2} &= \sum_{i < j} \lambda_i^+ \lambda_j^+ = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^+ \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\lambda_j^+)^2 = \\ &= \frac{1}{8} P^2 - \frac{1}{4} E, \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

связанное с полной энергией E . Выберем для простоты систему координат, в которой полный импульс равен нулю:

$$P = 0, \quad \beta_{N-1} = 0. \quad (5.1.30)$$

Тогда получаем

$$E = -4A\beta_{N-2}. \quad (5.1.31)$$

Воспользуемся интерполяционной формулой Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu_i^l}{P'(\mu_i)} = \begin{cases} 0 & (l < N-2), \\ 1 & (l = N-2), \end{cases} \quad (5.1.32a)$$

где

$$P(\mu) = \sum_{j=1}^{N-1} (\mu - \mu_j), \quad (5.1.32b)$$

чтобы получить [5.2]

$$\beta_{N-2} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\beta_{N-2} \mu_i^{N-2} + \dots + \beta_0}{P'(\mu_i)} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Delta(\mu_i) - \mu_i^N \beta_N}{P'(\mu_i)}. \quad (5.1.33)$$

Отсюда, если правую часть последнего уравнения переписать, используя (5.1.27) при $\lambda = \mu_i$ [ср. первое уравнение (5.1.28)],

то получим

$$E = 4 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{-A \Delta(\mu_i) + \mu_i^N}{P'(\mu_i)}; \quad (5.1.34)$$

при этом предполагалось, что отсутствует вырождение или $\lambda_{2j} \neq \lambda_{2j+1}$, так что существуют μ_i , где i меняется от $i=1$ до $i=N-1$. Если имеется двойной корень ($\lambda_{2j} = \mu_j = \lambda_{2j+1}$), требуется специальное рассмотрение. В принципе можно предположить, что все вырождения сняты некоторым малым возмущением.

Если N нечетно (четно) и i нечетно (четно), то $\Delta(\mu_i)$ больше 2, в противном случае меньше -2. Учитывая это, запишем

$$\Delta(\mu_i) = (-1)^{N-i} 2 \operatorname{ch} \frac{v_i}{2} \quad (5.1.35)$$

и, используя (5.1.34), определим функцию от (μ_i, v_i) соотношением

$$\mathcal{H}(\mu, v) = 4 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{-A(-1)^{N-i} 2 \operatorname{ch}(v_i/2) + \mu_i^N}{P'(\mu_i)}. \quad (5.1.36)$$

Показано, что если рассматривать v_i как импульс, сопряженный с μ_i , а в качестве канонического уравнения движения взять

$$\mu_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_i}, \quad (5.1.37)$$

то оно действительно совпадает с уравнением движения для μ_i . Таким образом, $\mathcal{H}$ есть гамильтониан системы. Тогда с помощью (5.1.36) из (5.1.37) получаем

$$\dot{\mu}_i = - \frac{4A(-1)^{N-i} \operatorname{sh}(v_i/2)}{P'(\mu_i)}. \quad (5.1.38)$$

С другой стороны, (5.1.35) дает

$$(-1)^{N-i} 2 \operatorname{sh} \frac{v_i}{2} = \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_i) - 4}. \quad (5.1.39)$$

Таким образом, видно, что (5.1.38) дает точно уравнения движения (4.6.27) для μ_i , или

$$\dot{\mu}_i = \pm \frac{2A\sqrt{\Delta^2(\mu_i) - 4}}{\prod'_{k \neq i} (\mu_i - \mu_k)}. \quad (5.1.40)$$

Далее, использование (5.1.35) показывает, что выражение для $\mathcal{H}$ (5.1.36) совпадает с энергией E (5.1.34). Итак, $\mathcal{H}(\mu, v)$ из (5.1.36) есть гамильтониан системы, а v_i и μ_i являются сопряженными переменными. С помощью (5.1.39, 35) можно записать

$$v_i = 2\hbar \left| \frac{\Delta(\mu_i) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_i) - 4}}{2} \right|, \quad (5.1.41)$$

где выбирается знак плюс для нечетных (четных) i и знак минус для четных (нечетных) i , когда N нечетно (четно). v_i является функцией от μ_i и не зависит от других μ_j ($j \neq i$). Когда заданы начальные условия, определена функция $\Delta(\lambda)$, и поэтому существуют функции $v_i(\mu_i)$.

Задача 5.1. Аналогично выкладкам в тексте покажите, что

$$[\mu_1, \Delta_2] = [\mu_2, \Delta_1] = 0,$$

$$[\mu_2, \Delta_2] = -\hbar(v_2/2),$$

$$\text{где } \Delta_2 = -2\hbar(v_2/2).$$

5.2. ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЯ

Если перейти в систему координат, в которой $P = 0$, гамильтониан общей системы будет задаваться с помощью (5.1.29) в виде

$$\mathcal{H}(\mu_1, \dots, \mu_{N-1}, v_1, \dots, v_{N-1}) = E, \quad (5.2.1)$$

где $E = -4A\beta_{N-2}$. Согласно теории Гамильтона - Якоби, преобразуем переменные (μ_i, v_i) в переменные (α_i, β_i) , где β_i были определены в (5.1.27). Как обычно, введем производящую

функцию

$$W(\mu_1, \dots, \mu_{N-1}, \beta_0, \dots, \beta_{N-3}, E, t) = \\ = S(\mu_1, \dots, \mu_{N-1}, \beta_0, \dots, \beta_{N-3}, E) - Et, \quad (5.2.2)$$

которая определена таким образом, что

$$\frac{\partial S}{\partial \mu_i} = \nu_i \quad (i=0, \dots, N-1), \quad (5.2.3a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_k} = \alpha_k \quad (k=0, \dots, N-3), \quad (5.2.3b)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = t + \alpha_{N-2}, \quad (5.2.3c)$$

где положено $\beta_{N-1} = 0$, так как $P = 0$. В общем случае каноническое преобразование с производящей функцией W переводит гамильтониан в $K = \mathcal{H} + \partial W / \partial t$. Преобразование Гамильтона - Якоби (5.2.3a - 3в) таково, что

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (5.2.4)$$

Таким образом, из последнего уравнения следует, что $\dot{\alpha}_k = \frac{\partial K}{\partial \beta_k} = 0$. Поэтому α_k , сопряженная с β_k , также не зависит от времени. Подставляя (5.2.3a) в (5.2.1), получаем

$$\mathcal{H}\left(\mu_1, \dots, \mu_{N-1}, \frac{\partial S}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial \mu_{N-1}}\right) = E, \quad (5.2.5)$$

что является уравнением Гамильтона - Якоби для S .

Сравнивая (5.2.3a) с (5.1.41), видим, что

$$\frac{\partial S}{\partial \mu_i} = \nu_i = 2 \ln \left| \frac{\Delta(\mu_i) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu_i) - 4}}{2} \right|, \quad (5.2.6)$$

поэтому S распадается на сумму вида

$$S = \sum_{i=1}^{N-1} S_i, \quad (5.2.7a)$$

где

$$S_i = \int v d\mu = 2 \int_{\lambda_{2i}}^{\mu_i} \ln \left| \frac{\Delta(\mu) \pm \sqrt{\Delta^2 - 4}}{2} \right| d\mu, \quad (5.2.7d)$$

а $\Delta(\mu)$ зависит от $\beta_0, \dots, \beta_{N-2}$, если принять во внимание (5.1.27). Далее, используя (5.2.3a) и (5.1.27), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k &= \frac{\partial S}{\partial \beta_k} = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\lambda_{2i}}^{\mu_i} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}} \frac{\partial \Delta(\mu)}{\partial \beta_k} d\mu = \\ &= 2A \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\lambda_{2i}}^{\mu_i} \frac{\mu_k}{\sqrt{R(\mu)}} d\mu, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

и поэтому [ср. (4.6.31)]

$$\dot{\mathcal{L}}_k = 2A \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\mu_i^k \dot{\mu}_i}{\sqrt{R(\mu_i)}} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, N-3), \quad (5.2.9a)$$

что подтверждает, что $\mathcal{L}_k$ ($k=0, 1, \dots, N-3$) постоянны. Константы $\mathcal{L}_k$ могут быть выбраны нулевыми, если соответствующим образом прибавить β_k к W_i . В частности, для $k=N-2$ имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial E} = 0. \quad (5.2.9b)$$

Поэтому, используя (5.2.3), получаем $\mathcal{L}_{N-2} = 0$, и $\mathcal{L}_{N-2}$ — постоянная, которую можно положить равной нулю.

Импульс v_i есть функция μ_i и не зависит от других μ_j ($j \neq i$); другими словами, v_i взаимно независимы. Интегрируя по периоду, получаем переменную действия [5.1, 2]

$$\begin{aligned} J_i(\beta_0, \dots, \beta_{N-1}) &= \oint v_i d\mu_i = \\ &= 4 \int_{\lambda_{2i}}^{\lambda_{2i+1}} \ln \left| \frac{\Delta(\mu) \pm \sqrt{\Delta^2(\mu) - 4}}{2} \right| d\mu \quad (i=1, 2, \dots, N-2), \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

где λ_{2i} и λ_{2i+1} — функции $\beta_0, \dots, \beta_{N-2}$, что следует из (5.1.22a). Интегрирование в (5.2.10) производится в пределах от λ_{2j} до λ_{2j+1} , где $|\Delta(\mu)| \geq 2$. Таким образом, при движении точки происходит полное разделение переменных.

Угловая переменная w_ℓ , сопряженная с переменной действия J_ℓ , определяется как

$$w_\ell = \frac{\partial S}{\partial J_\ell}. \quad (5.2.11)$$

Если выбрать $J_k = 0$ ($k = 1, \dots, N-2$), оказывается, что угловая переменная имеет вид

$$w_\ell = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\partial S}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial J_\ell} = \frac{\partial E}{\partial J_\ell} t \quad (5.2.12)$$

[если при этом учесть (5.2.4) и тот факт, что для $k = N-2$ $E = -4A\beta_{N-2}$]. Следовательно, $\partial E / \partial J_\ell$ является частотой колебания, и если определить период T_ℓ , то получим

$$w_\ell = t / T_\ell. \quad (5.2.13)$$

Рассмотрим в качестве примера трехчастичную периодическую систему с покоящейся частицей $n = 2$. Пусть в начальный момент времени $P_2 = 0$, $P_3 = -P_1$ и $Q = Q_2 = Q_3 = 0$, так что $\ell_3 = -\ell_1$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 1/2$ при $t = 0$. Поэтому имеем

$$\Delta(\lambda) = 8\lambda(\lambda^2 - \ell_1^2) - 6\lambda = 8\lambda^3 - (6 + 8\ell_1^2)\lambda. \quad (5.2.14)$$

Если все частицы покоятся, то $\ell_1 = 0$ и корни уравнения $\Delta(\lambda) = \pm 2$ есть ± 1 и $\pm 1/2$. График $\Delta(\lambda)$ симметричен относительно точки $\lambda = 0$, когда $\ell_2 = 0$, даже если $\ell_1 \neq 0$.

Из начальных данных известна полная энергия

$$E = \frac{1}{2} (P_1^2 + P_3^2) = 4\ell_1^2. \quad (5.2.15)$$

Таким образом, можно записать

$$\Delta(\lambda) = 2 [4\lambda^3 - (3 + E)\lambda]. \quad (5.2.16)$$

Обозначая через λ_2 и λ_3 корни уравнения $\Delta(\lambda) = 2$, получаем переменную действия для n_1 в виде

$$J_1 = 4 \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} d\lambda \ln \frac{\Delta(\lambda) + \sqrt{\Delta^2 - 4}}{2}. \quad (5.2.17)$$

Поэтому

$$\delta J_1 = 4\delta E \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} d\lambda \frac{1+\Delta/\sqrt{\Delta^2-4}}{\Delta+\sqrt{\Delta^2-4}} \frac{d\Delta}{dE} = 4\delta E \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \frac{-2\lambda d\lambda}{\sqrt{\Delta^2-4}}. \quad (5.2.18)$$

В этом случае J_2 изменяется так же, так что $\delta J_1 = \delta J_2$. Следовательно, $\delta E = (\partial E / \partial J_1) \delta J_1 + (\partial E / \partial J_2) \delta J_2 = 2(\partial E / \partial J_1) \delta J_1$. Таким образом, период T задается выражением

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial E}{\partial J_1} = \left(16 \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \frac{-\lambda d\lambda}{\sqrt{\Delta^2-4}} \right)^{-1}. \quad (5.2.19)$$

Рассмотренное здесь движение очень простое, и его можно описать уравнением движения

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = e^{-a} - e^{2a}. \quad (5.2.20)$$

Интегрируя его один раз, получаем

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = E + 3 - \left(2e^{-a} + e^{2a} \right). \quad (5.2.21)$$

Отсюда получается период

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{a_-}^{a_+} \frac{da}{\sqrt{E+3-2e^{-a}-e^{2a}}} = \\ &= 2 \int_{a_-}^{a_+} \frac{e^{-a} da}{\sqrt{-2e^{-3a} + (E+3)e^{-2a} - 1}} = \\ &= 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2x^3 + (E+3)x^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

где a_- и a_+ или x_- и x_+ — нули знаменателя интегрируемой функции, являющиеся точками поворота при колебаниях.

Легко можно доказать, что (5.2.19, 22) имеют одно и то же

значение. Фактически из (5.2.19) получаем

$$T = 16 \int_{\lambda_3}^{\lambda_2} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{4\lambda^2 [4\lambda^2 - (E+3)]^2 - 4}} =$$

$$= 4 \int_{\lambda_3}^{\lambda_2} \frac{d(\lambda^2)}{\sqrt{4\lambda^2 [2\lambda^2 - (E+3)/2]^2 - 1}}. \quad (5.2.23)$$

Если положить

$$y = 2\lambda^2 - (E+3)/2, \quad (5.2.24)$$

то

$$T = 2 \int_{y_-}^{y_+} \frac{dy}{\sqrt{2y^3 + (E+3)y^2 - 1}}, \quad (5.2.25)$$

что совпадает с (5.2.22).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А. МЕТОД СТИЛЬТЪЕСА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ [А.1]

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ — положительные постоянные. Рассмотрим ряд $y, y_1, y_2, \dots$, члены которого определяются уравнениями

$$\begin{cases} y = \gamma_1 y_1 + y_2, \\ y_1 = \gamma_2 y_2 + y_3, \\ \dots\dots\dots \\ y_{k-1} = \gamma_k y_k \end{cases} \quad (A.1)$$

Перепишем последние уравнения:

$$\begin{cases} \frac{y}{y_1} = \gamma_1 + \frac{y_2}{y_1} = \gamma_1 + 1 / \frac{y_1}{y_2}, \\ \frac{y_1}{y_2} = \gamma_2 + \frac{y_3}{y_2} = \gamma_2 + 1 / \frac{y_2}{y_3}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{y_{k-1}}{y_k} = \gamma_k. \end{cases} \quad (A.2)$$

Таким образом, y/y_1 выражается в виде непрерывной дроби

$$\frac{y}{y_1} = \gamma_1 + \frac{1}{\gamma_2 + \frac{1}{\gamma_3 + \dots + \frac{1}{\gamma_k}}}. \quad (A.3)$$

С другой стороны, последовательные замены дают

$$\begin{aligned} y &= (\gamma_1 \gamma_2 + 1) \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 = \\ &= (\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_1 + \gamma_3) \gamma_3 + (\gamma_1 \gamma_2 + 1) \gamma_4 = \\ &= \dots \end{aligned} \quad (A.4)$$

Обозначим

$$[\gamma_1] = \gamma_1, \quad [\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1 \gamma_2 + 1 \quad (A.5a)$$

и введем общую систему обозначения

$$[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k] = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}] \gamma_k + [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-2}], \quad (A.5b)$$

где

$$[\gamma_\ell, \gamma_{\ell-1}] = 1. \quad (A.5b)$$

Тогда

$$y = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k] \gamma_k + [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}] \gamma_{k+1}. \quad (A.6)$$

Умножая обе стороны равенства на γ_{k+1} и используя в правой части тождество $\gamma_{k+1} \gamma_{k+1} = \gamma_k - \gamma_{k+2}$, получаем

$$[\gamma_{k+1}] y = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}] \gamma_k - [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}] \gamma_{k+2}. \quad (A.7)$$

Далее умножим обе части (A.7) на γ_{k+2} и прибавим (A.6), тогда в левой части получим $[\gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}] y$. Повторяя подобную процедуру, получаем тождество

$$\begin{aligned} [\gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}, \dots, \gamma_{k+\ell-1}] y &= [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+1}] \gamma_k + \\ &+ (-1)^{\ell+1} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}] \gamma_{k+\ell}. \end{aligned} \quad (A.8)$$

Заменяя k на ℓ и ℓ на $m+n+1$, имеем

$$[\gamma_{\ell+1}, \dots, \gamma_{\ell+m+n}]y = [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+m+n}]y_{\ell} + (-1)^{m+n} \times \\ \times [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell-1}]y_{\ell+m+n+1}. \quad (A.9)$$

С другой стороны, исключая $y_{\ell+m+1}$ из соотношений

$$[\gamma_{\ell+1}, \dots, \gamma_{\ell+m}]y = [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+m}]y_{\ell} + (-1)^m [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell-1}]y_{\ell+m+1}, \quad (A.10a)$$

$$[\gamma_{\ell+m+2}, \dots, \gamma_{\ell+m+n}]y = [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+m+n}]y_{\ell+m+1} + (-1)^{n+1} \times \\ \times [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+m}]y_{\ell+m+n+1}, \quad (A.10b)$$

которые могут быть получены из (A.8), получаем связь между y , y_{ℓ} и $y_{\ell+m+n+1}$. Сравнение этого соотношения с (A.9) после некоторых вычислений дает

$$[\gamma_{\ell+1}, \dots, \gamma_{\ell+m}] [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+m+n}] = \\ = [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell+m}] [\gamma_{\ell+1}, \dots, \gamma_{\ell+m+n}] + (-1)^m [\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell-1}] \times \\ \times [\gamma_{\ell+m+2}, \dots, \gamma_{\ell+m+n}]. \quad (A.11)$$

В случае $\ell=n+1$ имеем

$$[\gamma_1, \dots, \gamma_{m+2}] [\gamma_2, \dots, \gamma_{m+1}] = [\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}] [\gamma_2, \dots, \gamma_{m+2}] + (-1)^m, \quad (A.12)$$

где использовано (A.5b).

Уравнения (A.11) и (A.10a) имеют одну и ту же форму, и если положить $m=0$ в (A.11), то оно примет такой же вид, как (A.6). Таким образом, когда γ_{2k+1} заменяется на $\gamma_{2k+1}z$ и определены

$$\begin{cases} Q_{2n}(z) = [\gamma_1 z, \gamma_2, \gamma_3 z, \dots, \gamma_{2n-1} z, \gamma_{2n}], \\ P_{2n}(z) = [\gamma_2, \gamma_3 z, \gamma_4, \dots, \gamma_{2n-1} z, \gamma_{2n}], \\ Q_{2n+1}(z) = [\gamma_1 z, \gamma_2, \gamma_3 z, \dots, \gamma_{2n}, \gamma_{2n+1} z], \\ P_{2n+1}(z) = [\gamma_2, \gamma_3 z, \gamma_4, \dots, \gamma_{2n}, \gamma_{2n+1} z], \end{cases} \quad (A.13)$$

то (А.3) дает

$$\frac{Q_{2n}(z)}{P_{2n}(z)} = \gamma_1 z + \frac{1}{\gamma_2 + \frac{1}{\gamma_3 z + \dots + \frac{1}{\gamma_{2n}}}}, \quad (A.14a)$$

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{P_{2n+1}(z)} = \gamma_1 z + \frac{1}{\gamma_2 + \frac{1}{\gamma_3 z + \dots + \frac{1}{\gamma_{2n} + \frac{1}{\gamma_{2n+1} z}}}}. \quad (A.14b)$$

Положим теперь

$$\beta_0 = 1/\gamma_1, \quad \beta_n = 1/\gamma_n \gamma_{n+1} \quad (n \geq 1); \quad (A.15)$$

тогда (А.14а) может быть приведено к виду

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\beta_0}{z + \frac{\beta_1}{1 + \frac{\beta_2}{z + \frac{\beta_3}{1 + \dots}}}}, \quad (A.16)$$

где последний член внизу справа не выписан. Далее, используя тождество

$$z + \frac{\beta_1}{1 + \beta_2/z'} = z + \beta_1 - \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 + z'}. \quad (A.17)$$

с параметрами z и z' , получаем

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\beta_0}{z + \beta_1 - \frac{\beta_1 \beta_2}{z + \beta_2 + \beta_3 - \frac{\beta_3 \beta_4}{z + \beta_4 + \beta_5 - \dots}}}. \quad (A.18)$$

Таким образом, если обозначить

$$\begin{cases} \beta_0 = X_0, & \beta_1 = Y_1, \\ \beta_1 \beta_2 = X_1, & \beta_2 + \beta_3 = Y_2, \\ \beta_3 \beta_4 = X_2, & \beta_4 + \beta_5 = Y_3, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \end{cases} \quad (A.19)$$

получим

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{X_0}{z + Y_1 - \frac{X_1}{z + Y_2 - \frac{X_2}{z + Y_3 - \dots}}}. \quad (A.20)$$

С другой стороны, складывая (A.11) и (A.10a), имеем

$$Q_{2n}(z)P_{2n+1}(z) - P_{2n}(z)Q_{2n+1}(z) = 1 \quad (A.21)$$

или

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{(-1)^n}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)}. \quad (A.22a)$$

Если положить $n=0$, то формально получим:

$$\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} - \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} = \frac{1}{Q_0(z)Q_1(z)}, \quad (A.22b)$$

что будет удовлетворяться, если положить $P_1(z) = Q_0(z) = 1$ и $P_0(z) = 0$. Тогда

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{Q_0(z)Q_1(z)} - \frac{1}{Q_1(z)Q_2(z)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(z)Q_n(z)}. \quad (A.23)$$

Как можно видеть из (A.5a), $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — полиномы от z , и если выписать члены высшего порядка, то получится

$$\begin{cases} P_{2n}(z) = \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_{2n} z^{n-1} + \dots, \\ Q_{2n}(z) = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n} z^n + \dots, \\ P_{2n+1}(z) = \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_{2n+1} z^n + \dots, \\ Q_{2n+1}(z) = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1} z^{n+1} + \dots. \end{cases} \quad (A.24)$$

Поэтому $Q_n(z)Q_{n+1}(z)$ есть полином степени $n+1$, который может быть записан в виде

$$Q_n(z)Q_{n+1}(z) = c z(z+x_1)(z+x_2)\dots(z+x_n) \quad (A.25)$$

с положительными постоянными $c, x_1, x_2, \dots$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)} = \frac{\varepsilon_n^{(n)}}{z^n} - \frac{\varepsilon_{n+1}^{(n)}}{z^{n+1}} + \frac{\varepsilon_{n+2}^{(n)}}{z^{n+2}} - \dots, \quad (A.26)$$

где $\varepsilon_n^{(n)}, \varepsilon_{n+1}^{(n)}, \dots$ — некоторые постоянные. Предположим, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (A.27)$$

и запишем

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots - \frac{c_{2n+1}}{z^{2n}} + \frac{c_{2n}}{z^{2n+1}} - \dots \quad (A.28)$$

Тогда из (A.23) видно, например, что отношение $P_{2n}(z)/Q_{2n}(z)$ имеет такой же коэффициент при z^{-2n} и может быть записано в виде

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots - \frac{c_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{c'_{2n}}{z^{2n+1}} - \frac{c'_{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \quad (A.29)$$

Поскольку $Q_{2n}(z)$ — полином от z степени n , можно написать

$$Q_{2n}(z) = d_0 - d_1 z + d_2 z^2 + \dots + (-1)^n d_n z^n, \quad (A.30)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) - Q_{2n}(z) \frac{P(z)}{Q(z)} &= Q_{2n}(z) \left[\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \frac{P(z)}{Q(z)} \right] = \\ &= [(-1)^n z^n d_n z^n + \dots - d_1 z + d_0] \left(\frac{c'_{2n} - c_{2n}}{z^{2n+1}} - \frac{c'_{2n+1} - c_{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dots \right) \\ &= \frac{D_1}{z^{n+1}} + \frac{D_2}{z^{n+2}} - \dots, \end{aligned} \quad (A.31)$$

где $D_1, D_2, \dots$ — постоянные. Таким образом, $Q_{2n}(z)P(z)/Q(z)$ совпадает с $P_{2n}(z)$, исключая члены, порядок которых выше, чем $z^{-(n+1)}$. Однако $P_{2n}(z)$ есть полином от z . Поэтому видно, что коэффициенты перед $1/z, 1/z^2, \dots, 1/z^n$ у $Q_{2n}(z)P(z)/Q(z)$ или у $Q_{2n}(-z)P(-z)/Q(-z)$ должны исчезать, а именно

$$d_0 c_k + d_1 c_{k+1} + \dots + d_n c_{k+n} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (A.32)$$

Положим $z = -\lambda$ и определим d_k из (A.30, 32), тогда получим

$$Q_{2n}(-\lambda) = \frac{1}{\tilde{B}_n} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad (A.33)$$

где

$$\tilde{B}_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}. \quad (A.34)$$

$$Q_{2n+1}(-\lambda) = \frac{-1}{\tilde{A}_n} \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n+1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}, \quad (A.35)$$

где

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}. \quad (A.36)$$

Сравнением коэффициентов при членах высшего порядка в (A.24) можно доказать, что

$$\begin{cases} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n} = \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{B}_n}, \\ \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n+1} = \frac{\tilde{B}_n}{\tilde{A}_{n+1}}, \end{cases} \quad (A.37)$$

и, таким образом, имеем

$$\gamma_{2n} = \frac{\tilde{A}_n^2}{\tilde{B}_n \tilde{B}_{n-1}}, \quad \gamma_{2n+1} = \frac{\tilde{B}_n^2}{\tilde{A}_n \tilde{A}_{n+1}}. \quad (A.38)$$

Далее, используя (A.15, 18), получаем

$$X_n = \beta_{2n-1} \beta_{2n} = \frac{1}{\gamma_{2n-1} \gamma_{2n} \gamma_{2n+1}}. \quad (A.39)$$

Следовательно, коэффициенты непрерывной дроби (A.20) выражаются через коэффициенты элементарной дроби (A.28):

$$X_n = \frac{\tilde{A}_{n-1} \tilde{A}_{n+1}}{\tilde{A}_n^2}. \quad (A.40)$$

Эти окончательные результаты получены без обращения к коэффициентам, порядок которых выше c_{2n} ; они приложимы также к конечной непрерывной дроби (А.20). Можно убедиться, что для малых значений n условия $\tilde{A}_{-1} = \tilde{A}_0 = 1$, $\tilde{B}_{-1} = 0$ и $\tilde{B}_1 = 1$ дают согласующиеся результаты.

Для Y_n имеем

$$Y_n = \beta_{2n-2} + \beta_{2n-1} = \frac{1}{\gamma_{2n-2} \gamma_{2n-1}} + \frac{1}{\gamma_{2n-1} \gamma_{2n}} =$$

$$= \frac{\tilde{A}_n \tilde{B}_{n-2}}{\tilde{A}_{n-1} \tilde{B}_{n-1}} + \frac{\tilde{A}_{n-1} \tilde{B}_n}{\tilde{A}_n \tilde{B}_{n-1}}. \quad (A.41)$$

Если положить $\lambda = -\lambda$, $X_0 = 1$, $X_n = a_{n,n}^2$ ($n \geq 1$) и $Y_n = b_{n,n+1}$, то (А.20) даст $f(\lambda)$ из (3.10.36). С другой стороны, если записать (3.10.22) в форме элементарной дроби (А.29), можно определить a_n^2 и b_n , используя (А.40, 41).

Введем обозначения $A_n \equiv (2a_n)^2$, $B_n \equiv 2b_n$ и $\Lambda \equiv -2\lambda$ в (3.10.38) и далее. Тогда (3.10.51, 59, 62) дают

$$\frac{\partial \Lambda_j}{\partial B_1} = \frac{C_j e^{-\Lambda_j t} / \Pi^{(j)}(\Lambda_\ell - \Lambda_j)}{\sum_j C_j e^{-\Lambda_j t} \Pi^{(j)}(\Lambda_\ell - \Lambda_j)} \equiv R_j, \quad (A.42)$$

и из (3.10.52) получаем

$$\frac{f_2(\Lambda)}{f_1(\Lambda)} = - \sum_{j=1}^N \frac{R_j}{\Lambda - \Lambda_j} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{c_k}{(-\Lambda)^{k+1}}, \quad (A.43)$$

где

$$c_k = (-1)^k \sum_{j=1}^N \Lambda_j^k R_j. \quad (A.44)$$

Уравнение (А.43) соответствует уравнению (А.29) и (3.10.45) — уравнению (А.20), где $X_0 = 1$, $X_n = A_n$ и $Y_n = B_n$. Поэтому $X_n = A_n = (2a_n)^2 = e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}$ и $Y_n = B_n = 2b_n = a_n$ задаются уравнениями (А.40, 41) как функции c_k в (А.43, 44).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. СИСТЕМА ШТУРМА

Пусть

$$f_{n+1}(x) = (b_n x + c_n) f_n(x) + d_n f_{n-1}(x) \quad (Б.1)$$

при $d_n > 0$ (Б.2)

и $f_{-1}(x) = 0, f_0(x) = 1$ (Б.3)

(можно считать, что $f_0 = \cos t > 0$). Некоторые b_n могут быть нулями.

Корни уравнений $f_n(x) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) называются системой Штурма. Теперь

$$\begin{cases} f_1(x) = b_0 x + c_0, \\ f_2(x) = (b_1 x + c_1)(b_0 x + c_0) - d_1. \end{cases} \quad (Б.4)$$

Корень $f_1(x) = 0$ ($x_1 = -c_0/b_0$) лежит между двумя корнями $f_2(x) = 0$. Это легко увидеть из графика (рис. Б.1). Методом математической

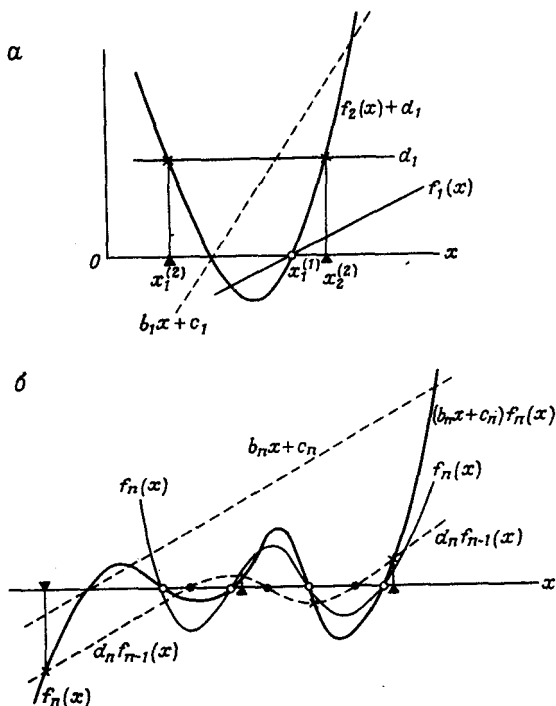


Рис. Б.1. Графическое изображение "системы Штурма": (●) - корни уравнения $f_{n-1}(x) = 0$; (○) - корни уравнения $f_n(x) = 0$; (x-▲) - корни уравнения $f_{n+1}(x) = 0$.

индукции можно доказать, что корни уравнения $f_n(x) = 0$ разделены корнями уравнения $f_{n+1}(x) = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ПРОСТЫЕ КОРНИ УРАВНЕНИЯ $\Delta^2(\lambda) = 4$
ОПРЕДЕЛЯЮТ ВСЕ КОРНИ [В.1]

Пусть λ_j^+ будут корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 2$, а λ_j^- — корнями уравнения $\Delta(\lambda) = -2$. Тогда имеем

$$\Delta(\lambda) - 2 = A^{-1} \prod (\lambda - \lambda_j^+) = A^{-1} \prod (\lambda - \lambda_j^-) - 4 \quad (B.1)$$

($A = a_1 a_2 \dots a_n$); это означает, что если заданы λ_j^+ , они определяют λ_j^- , и наоборот.

Пусть λ_i^0 ($i = 1, 2, \dots, 2g+2$) — простые корни уравнения $\Delta^2(\lambda) = 4$ и $\lambda_j^\pm$ — остальные корни. Тогда можно написать

$$4 - \Delta^2(\lambda) = c_1 \prod_{i=1}^{2g+2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i^0}\right) \prod \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j^\pm}\right)^2 \quad (B.2)$$

с некоторой постоянной c_1 (для краткости предположим, что λ_i^0 и $\lambda_j^\pm$ отличны от нуля).

С другой стороны, пусть λ'_k являются корнями уравнения

$\Delta'(\lambda) = d\Delta(\lambda)/d\lambda = 0$, находящимися между λ_{2j}^0 и λ_{2j+1}^0 . Это очевидно (мы опускаем доказательство). Поскольку $\lambda_j^\pm$ — двойной корень, он также является корнем уравнения $\Delta'(\lambda) = 0$. Поэтому можно записать

$$\Delta'(\lambda) = c_2 \prod_{k=1}^g \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda'_k}\right) \prod_j \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j^\pm}\right) \quad (B.3)$$

с некоторой постоянной c_2 . Таким образом,

$$\frac{\Delta'(\lambda)}{\sqrt{4 - \Delta^2(\lambda)}} = c_3 \frac{\prod (\lambda - \lambda'_k)}{\sqrt{\prod (\lambda - \lambda^0)}} \quad (B.4)$$

где c_3 — постоянная. Пусть теперь

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos \varphi(\lambda); \quad (B.5)$$

тогда

$$\begin{aligned}\varphi' &= \frac{d\varphi}{d\lambda} = - \frac{\Delta'(\lambda)}{2 \sin \varphi} = \pm \frac{\Delta'(\lambda)}{\sqrt{4 - \Delta^2}} = \\ &= c_4 \frac{\prod (\lambda - \lambda'_k)}{\sqrt{\prod (\lambda - \lambda_i^0)}}\end{aligned}\quad (B.6)$$

с $c_4 = \pm c_3$. Интегрируя, получаем

$$\varphi(\lambda) = c_4 \int_{\lambda_i}^{\lambda} \frac{\prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda'_k)}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_i^0)}} d\lambda. \quad (B.7)$$

Поэтому для очень больших λ получается $\varphi(\lambda) \sim c_4 \ln \lambda + \dots$. Но тогда $\Delta(\lambda) \sim \lambda^{-1} (\lambda^N + \dots)$. Отсюда видно, что

$$c_4 = \pm \sqrt{-1} N. \quad (B.8)$$

Далее, поскольку $\Delta^2 > 4$ и Δ' вещественно в промежутке $[\lambda_{2j-1}^0, \lambda_{2j}^0]$, φ' является чисто мнимой величиной в этой области, и

$$\varphi(\lambda_{2j-1}^0) - \varphi(\lambda_{2j}^0) = \sqrt{-1} \varepsilon, \quad (B.9)$$

где ε — некоторое вещественное число. Однако λ_{2j}^0 — корень уравнения $\Delta^2 = 4$. Это подразумевает, что $\cos \varphi(\lambda_{2j}^0) = \pm 1$ или

$$\varphi(\lambda_{2j}^0) = \pm m_j \pi \quad (B.10)$$

при некотором целом m_j . Поэтому

$$\pm 1 = \cos \varphi(\lambda_{2j-1}^0) = \cos(\pm m_j \pi + \sqrt{-1} \varepsilon) = \pm \cosh \varepsilon. \quad (B.11)$$

Таким образом, $\varepsilon = 0$, и

$$\varphi(\lambda_{2j-1}^0) = \varphi(\lambda_{2j}^0). \quad (B.12)$$

Вследствие этого имеется система уравнений

$$\int_{\lambda_{2j-1}^0}^{\lambda_{2j}^0} \frac{\prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda'_k)}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_i^0)}} d\lambda = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, g). \quad (B.13)$$

Она определяет λ_k как функции от (λ_j^0) , а значит, функции $\psi(\lambda)$, а также все корни уравнения $\Delta^2(\lambda) = 4$ определяются простыми корнями λ_i^0 .

ПРИЛОЖЕНИЕ Г. ВЕСЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПЕКТР μ_j - ПРОСТОЙ

Уравнение для $\varphi_j(n)$ имеет вид

$$a_n \varphi_1(n+1) + b_n \varphi_1(n) + a_{n-1} \varphi_1(n-1) = \lambda \varphi_1(n). \quad (Г.1)$$

Дифференцируя по λ и обозначая $\varphi_1' = d\varphi_1/d\lambda$, получаем

$$a_n \varphi_1'(n+1) + b_n \varphi_1'(n) + a_{n-1} \varphi_1'(n-1) = \varphi_1(n) + \lambda \varphi_1'(n). \quad (Г.2)$$

Умножим первое уравнение на $\varphi_1'(n)$, второе - на $\varphi_1(n)$ и вычтем одно из другого, а затем просуммируем по n . В результате имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N [a_n \varphi_1(n+1) \varphi_1'(n) - a_{n-1} \varphi_1(n) \varphi_1'(n-1)] - \\ - \sum_{n=1}^N [a_n \varphi_1(n) \varphi_1'(n+1) - a_{n-1} \varphi_1(n-1) \varphi_1'(n)] = - \sum_{n=1}^N \varphi_1^2(n). \end{aligned} \quad (Г.3)$$

Поскольку дополнительный спектр удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \varphi_1(N+1, \mu_j) = 0, \\ \varphi_1'(0, \mu_j) = \varphi_1'(1, \mu_j) = 0, \end{cases} \quad (Г.4)$$

то

$$a_N \varphi_1(N, \mu_j) \varphi_1'(N+1, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu_j} = \sum_{n=1}^N \varphi_1^2(n, \mu_j) \neq 0. \quad (Г.5)$$

Поэтому

$$\begin{cases} \varphi_1(N, \mu_j) \neq 0, \\ \left. \frac{d\varphi_1(N+1, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\mu_j} \neq 0. \end{cases} \quad (Г. 6)$$

Второе уравнение означает, что μ_j — простые.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

Рассмотрим полином степени $n+1$

$$P(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_\ell) \quad (Д. 1)$$

с константами x_ℓ . По теореме Коши для контура, охватывающего все x_ℓ , имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^m dz}{P(z)(z-x)} = \frac{x^m}{P(x)} + \sum_{j=0}^n \frac{x_j^m}{P'(x_j)(x_j-x)}. \quad (Д. 2)$$

С другой стороны, интеграл в левой части равен интегралу по бесконечно удаленному кругу

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^m dz}{P(z)(z-x)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^m}{P(R)}. \quad (Д. 3)$$

Поэтому

$$\frac{x^m}{P(x)} + \sum_{j=0}^n \frac{x_j^m}{P'(x_j)(x_j-x)} = \begin{cases} 0 & (0 \leq m \leq n), \\ 1 & (m = n+1), \end{cases} \quad (Д. 4)$$

где

$$P'(x_j) = \prod_{\ell \neq j} (x_j - x_\ell). \quad (Д. 5)$$

Если положить $x = 0$, получим

$$\sum_{j=0}^n \frac{x_j^{m-1}}{\prod_{\ell \neq j} (x_j - x_\ell)} = \begin{cases} 0 & (m < n+1), \\ 1 & (m = n+1), \end{cases} \quad (Д. 6)$$

или, изменяя нумерацию, -

$$\sum_{j=1}^g \frac{x_j^j}{\prod_{\ell(\neq j)=1}^g (x_j - x_\ell)} = \begin{cases} 0 & (j < g-1), \\ 1 & (j = g-1). \end{cases} \quad (4.7)$$

Например, при $g = 2$

$$1/(x_1 - x_2) + 1/(x_2 - x_1) = 0,$$

$$x_1/(x_1 - x_2) + x_2/(x_2 - x_1) = 1.$$

Если $f(x)$ является полиномом порядка n , то, поскольку

$$f(x) = \sum_{m=0}^n c_m x^m, \quad (4.8)$$

получаем

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j) P(x)}{P'(x_j)(x - x_j)}, \quad (4.9)$$

что является интерполяционной формулой Лагранжа.

ПРИЛОЖЕНИЕ Е. $\mathcal{V}$ -ФУНКЦИЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ($\mathcal{V}$ -ФУНКЦИЯ РИМАНА)

Эта функция определяется соотношением [Е.1]

$$\mathcal{V}(u_1, u_2, \dots, u_g) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_g=-\infty}^{m_1, m_2, \dots, m_g=\infty} \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^g u_j m_j + \right. \\ \left. + \pi i \sum_{j,k=1}^g \tau_{jk} m_j m_k \right) \quad (E.1)$$

или

$$\mathcal{V}(\vec{u}) = \mathcal{V}(\vec{u} | \tau) = \sum_{\vec{m}} \exp(2\pi i \vec{u} \cdot \vec{m} + \pi i \vec{m} \cdot \tau \vec{m}), \quad (E.2)$$

где

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_g \end{pmatrix}, \quad \vec{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_g \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1g} \\ \tau_{21} & \dots & \tau_{2g} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_{g1} & \dots & \tau_{gg} \end{pmatrix}. \quad (E.3)$$

1. Пусть

$$\vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (E.4)$$

является вектором с единичной k -й компонентой; тогда ясно, что

$$\psi(\vec{u} + \vec{e}_k | \tau) = \psi(\vec{u} | \tau). \quad (E.5)$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \psi(\vec{u} | \tau) &= \sum_{\vec{m}} e^{i \vec{m} \cdot 2\pi i (\vec{m} + \vec{e}_k) \cdot \vec{u} + \pi i (\vec{m} + \vec{e}_k) \cdot \vec{\tau} (\vec{m} + \vec{e}_k)} = \\ &= e^{2\pi i \vec{e}_k \cdot \vec{u} + \pi i \vec{e}_k \cdot \vec{\tau} \vec{e}_k} \sum_{\vec{m}} e^{2\pi i \vec{m} \cdot (\vec{u} + \vec{\tau} \vec{e}_k) + \pi i \vec{m} \cdot \vec{\tau} \vec{m}} = \\ &= e^{2\pi i \vec{e}_k \cdot \vec{u} + \pi i \vec{e}_k \cdot \vec{\tau} \vec{e}_k} \sum_{\vec{m}} e^{2\pi i \vec{m} \cdot (\vec{u} + \vec{\tau} \vec{e}_k) + \pi i \vec{m} \cdot \vec{\tau} \vec{m}}, \end{aligned}$$

то

$$\psi(\vec{u} | \tau) = e^{2\pi i \vec{u}_k + \pi i \tau_{kk}} \psi(\vec{u} + \vec{\tau} \vec{e}_k | \tau). \quad (E.6)$$

Если ввести обозначение

$$\vec{\tau} \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1k} \\ \tau_{2k} \\ \vdots \\ \tau_{gk} \end{pmatrix} = \vec{\tau}_k, \quad (E.7)$$

получаем

$$\psi(\vec{u} + \vec{\tau}_k | \tau) = e^{-2\pi i \vec{u}_k - \pi i \tau_{kk}} \psi(\vec{u} | \tau). \quad (E.8)$$

2. Пусть $\vec{x}$ - вектор:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_g \end{pmatrix} \quad (E.9)$$

и $f(\vec{x})$ — функция вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} g(\vec{x} + \vec{m}). \quad (E.10)$$

Тогда $f(\vec{x})$ — периодическая функция с периодом I . Пусть ее рядом Фурье является

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}}, \quad (E.11)$$

где $\vec{n}$ есть вектор, компоненты которого — целые числа; тогда

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 f(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{y}} d\vec{y} = \\ &= \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} \int_0^1 g(\vec{y} + \vec{m}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{y}} d\vec{y} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{y}} d\vec{y}, \end{aligned} \quad (E.12)$$

где вектор $\vec{y}$ того же типа, что и $\vec{x}$. Тогда

$$\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} g(\vec{x} + \vec{m}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \vec{n} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{y}} d\vec{y}. \quad (E.13)$$

Если положить $\vec{x} = 0$, получим

$$\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} g(\vec{m}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{y}) e^{-2\pi i \vec{n} \cdot \vec{y}} d\vec{y}, \quad (E.14)$$

т.е. формулу суммирования Пуассона.

Если отметить, что

$$\begin{cases} \mathcal{V}(\vec{u}|\tau) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} g(\vec{m}), \\ g(\vec{m}) = e^{2\pi i \vec{m} \cdot \vec{u} + \pi i \vec{m} \cdot \tau \vec{m}}, \end{cases} \quad (E.15)$$

то с помощью формулы Пуассона получим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\vec{u}|\tau) &= \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \vec{y} \cdot \tau \vec{y} + 2\pi i \vec{y} \cdot \vec{u} - 2\pi i \vec{n} \cdot \vec{y}} d\vec{y} = \\ &= \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \vec{y} \cdot \tau \vec{y} + 2\pi i (\vec{u} - \vec{n}) \cdot \vec{y}} d\vec{y} = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} J(\vec{u} - \vec{n}), \end{aligned} \quad (E.16)$$

где

$$J(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \vec{y} \cdot \tau \vec{y} + 2\pi i \vec{x} \vec{y}} d\vec{y} \quad (E.17)$$

с $\vec{x} = \vec{u} - \vec{n}$.

3. Чтобы вычислить $J(\vec{x})$, введем матрицу τ^{-1} , обратную к τ -матрице, и заметим, что

$$(\vec{y} + \tau^{-1} \vec{x}) \cdot \tau (\vec{y} + \tau^{-1} \vec{x}) = \vec{y} \cdot \tau \vec{y} + 2\vec{x} \vec{y} + \vec{x} \cdot \tau^{-1} \vec{x}. \quad (E.18)$$

Тогда получаем

$$J(\vec{x}) = e^{-\pi i \vec{x} \cdot \tau^{-1} \vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (\vec{y} + \tau^{-1} \vec{x}) \cdot \tau (\vec{y} + \tau^{-1} \vec{x})} d\vec{y} =$$

$$= e^{-\pi i \vec{x} \cdot \tau^{-1} \vec{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \vec{y} \cdot \tau \vec{y}} d\vec{y}. \quad (E.19)$$

Предположим, что $i\tau$ - симметричная матрица; введем матрицы: унитарную S и транспонированную S' , чтобы диагонализировать матрицу $-\pi i \tau$, собственными значениями которой пусть будут числа a_l ($l = 1, 2, \dots, g$):

$$S' \tau S = -\frac{1}{\pi i} \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_g \end{pmatrix}. \quad (E.20)$$

Далее, введя обозначение $\vec{y} = S \vec{z}$, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \vec{y} \cdot \tau \vec{y}} d\vec{y} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (S \vec{z}) \cdot \tau (S \vec{z})} d\vec{z} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \vec{z} \cdot (S' \tau S) \vec{z}} d\vec{z} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_g z_g^2)} dz_1 \dots dz_g =$$

$$= \frac{\pi^{g/2}}{(a_1 \dots a_g)^{1/2}} = \frac{\pi^{g/2}}{(-\pi i)^{g/2} |\tau|^{1/2}} = \frac{i^{g/2}}{|\tau|^{1/2}}, \quad (E.21)$$

$$\text{где } |\tau| = \det \tau. \quad (E.22)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi(\vec{u}|\tau) &= \frac{i^{g/2}}{|\tau|^{3/2}} \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i(\vec{u}-\vec{n}) \cdot \tau^{-1}(\vec{u}-\vec{n})} = \\ &= \frac{i^{g/2}}{|\tau|^{3/2}} e^{-\pi i \vec{u} \cdot \tau^{-1} \vec{u}} \sum_{\vec{n}=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \vec{n} \cdot \tau^{-1} \vec{u} - \pi i \vec{n} \cdot \tau^{-1} \vec{n}} \quad (E.23) \end{aligned}$$

Поэтому

$$\psi(\vec{u}|\tau) = i^{g/2} |\tau|^{-3/2} e^{-\pi i \vec{u} \cdot \tau^{-1} \vec{u}} \psi(\tau^{-1} \vec{u} | -\tau^{-1}), \quad (E.24)$$

что является мнимым преобразованием для ψ -функции многих переменных. В случае $g = 1$ получаем мнимое преобразование Якоби (4.7.16).

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. МЕТОД ХИРОТЫ

Запишем уравнение движения для бесконечной цепочки ($n = -\infty, \dots$

$$\dots, \infty) \text{ в форме } m d^2 y_n / dt^2 = a (e^{-\epsilon z_{n-1}} - e^{-\epsilon z_n}), \quad z_n = y_{n+1} - y_n,$$

и обозначим

$$V_n(t) = a (e^{-\epsilon z_n} - 1);$$

тогда получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln(1 + V_n) = V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n. \quad (Ж.1)$$

Если представить решение в виде

$$V_n(t) = \frac{d^2}{dt^2} \ln f_n(t), \quad (Ж.2)$$

получим уравнение

$$\ddot{f}_n f_n - 2\dot{f}_n \dot{f}_n + f_n \ddot{f}_n - (f_{n+1} f_{n-1} - 2f_n f_n + f_{n-1} f_{n+1}) = 0. \quad (Ж.3)$$

Ему может быть придана следующая форма:

$$[D_t^2 - 4\pi\hbar^2(D_n/2)]f_n \cdot f_n = 0, \quad (Ж.4)$$

где D_t и D_n определяются соотношениями ($l = 1, 2, \dots$)

$$\begin{cases} D_t^l a(t) \cdot b(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^l a(t) b(t') \Big|_{t=t'}, \\ D_n^l a(n) \cdot b(n) = \left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n'} \right)^l a(n) b(n') \Big|_{n=n'}. \end{cases} \quad (\text{Ж.5})$$

Хирота (ср. [Ж.1]) начал использовать эти операторы, чтобы получить многосолитонные решения и обсудить преобразование Бэклунда. Метод Хироты применим не только к нелинейным цепочкам; его можно также использовать в уравнении КдВ, синус-уравнении Гордона $[(\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2)\psi = \sin \psi]$ и в других системах.

Для этих операторов получено много тождеств. Например,

$$\begin{cases} D_x^m a \cdot 1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m a, \\ D_x^m a \cdot b = (-1)^m D_x^m b \cdot a. \end{cases} \quad (\text{Ж.6})$$

Если $F(D_t, D_n)$ — полином от D_t и D_n , то в общем случае имеем

$$\begin{aligned} F(D_t, D_n) e^{\Omega_1 t + P_1 n} &= \\ &= \frac{F(\Omega_1 - \Omega_2, P_1 - P_2)}{F(\Omega_1 + \Omega_2, P_1 + P_2)} \cdot F(D_t, D_n) \exp[(\Omega_1 + \Omega_2)t + (P_1 + P_2)n] \cdot 1. \end{aligned} \quad (\text{Ж.7})$$

Как будет видно ниже, такие тождества полезны при расчетах.

Возьмем формальное решение вида (далее положим $\xi = 1$)

$$f_n(t) = 1 + \xi f_n^{(1)} + \xi^2 f_n^{(2)} + \dots \quad (\text{Ж.8})$$

Для коэффициента перед ξ^1 получаем уравнение

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[2\gamma h \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \right]^2 \right\} f_n^{(1)}(t) = 0, \quad (\text{Ж.9a})$$

а для коэффициента перед ξ^2 — уравнение

$$2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[2\gamma h \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \right]^2 \right\} f_n^{(2)}(t) = - \left\{ D_t^2 - \left[2\gamma h \frac{D_n}{2} \right]^2 \right\} f_n^{(1)}(t) \cdot f_n^{(1)}(t). \quad (\text{Ж.9б})$$

Затем получаем уравнения для высших степеней ξ . Решая их последовательно, приходим к многосолитонному решению. Если взять односолитонное решение в виде

$$f_n^{(1)}(t) = e^{2\eta}, \quad f_n^{(2)}(t) = f_n^{(3)}(t) = 0, \quad (\text{Ж.10a})$$

то (Ж.9a) будет удовлетворяться, если

$$\eta = \Omega t - p n - \eta_0, \quad \Omega = \pm \gamma \hbar p, \quad (\text{Ж.10б})$$

а (Ж.9б) будет удовлетворяться, если $f_n^{(2)} = 0$.

Чтобы получить двухсолитонное решение, возьмем

$$f_n^{(1)} = e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2}. \quad (\text{Ж.11})$$

Если положить

$$\eta_i = \Omega_i t - p_i n - \eta_i^0, \quad (\text{Ж.11'})$$

$$\Omega_i = (\pm)_i \gamma \hbar p_i$$

для $i = 1, 2$ (η_i^0 — постоянные), то (Ж.9a) для ξ^1 будет удовлетворено. Поскольку (Ж.7) дает уравнение

$$\left\{ D_t^2 - \left[2\gamma \hbar \frac{D_n}{2} \right]^2 \right\} f_n^{(1)} \cdot f_n^{(1)} =$$

$$= 2 \frac{[2(\Omega_1 - \Omega_2)]^2 - [2\gamma \hbar (p_1 - p_2)]^2}{[2(\Omega_1 + \Omega_2)]^2 - [2\gamma \hbar (p_1 + p_2)]^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left[2\gamma \hbar \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \right]^2 \right\} e^{2(\eta_1 + \eta_2)}, \quad (\text{Ж.12})$$

видно, что (Ж.9б) будет удовлетворено, если

$$f_n^{(2)}(t) = e^{A + 2\eta_1 + 2\eta_2}, \quad (\text{Ж.13a})$$

где

$$e^A = \frac{[2(\Omega_1 - \Omega_2)]^2 - [2\gamma \hbar (p_1 - p_2)]^2}{-[2(\Omega_1 + \Omega_2)]^2 + [2\gamma \hbar (p_1 + p_2)]^2}. \quad (\text{Ж.13б})$$

В этом случае легко показать, что можно взять $f_n^{(3)}(t) = f_n^{(4)}(t) = \dots = 0$. Таким образом получается двухсолитонное решение.

Временные переменные можно дискретизировать с помощью опре-

делений

$$\Delta_t F(t) = \sigma^{-1} \left[F\left(t + \frac{1}{2}\sigma\right) - F\left(t - \frac{1}{2}\sigma\right) \right], \quad (\text{Ж. 14})$$

$$\Delta_t^2 F(t) = [F(t + \sigma) + F(t - \sigma) - 2F(t)] / \sigma^2. \quad (\text{Ж. 15})$$

Тогда получается уравнение

$$\Delta_t^2 \ln(1 + V_n(t)) = V_{n+1}(t) + V_{n-1}(t) - 2V_n(t). \quad (\text{Ж. 16})$$

Хирота показал, что это уравнение также дает многосолитонные решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ЯВЛЕНИЕ ИНДУКЦИИ

Если возбудить колебательную моду цепочки, энергия будет перетекать к другим модам из-за наличия нелинейного взаимодействия.

Рассмотрим одномерную цепочку с закрепленными концами ($n = 0$ и $n = N$). Предположим, что потенциал взаимодействия содержит члены четвертого порядка (это более удобно при численных расчетах). Тогда гамильтониан имеет вид

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \dot{x}_j^2 + \frac{1}{2} (x_j - x_{j-1})^2 + \frac{\lambda}{4} (x_j - x_{j-1})^4 \right], \\ x_0 = x_N = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Введем нормальные координаты с помощью соотношения

$$x_j = i \sum_{k=-N}^N (a_k / \omega_k) e^{-i \pi j k / N}, \quad (3.2)$$

где ω_k — собственные частоты линейной моды,

$$\omega_k = 2 \sin(\pi k / 2N) \quad (-N \leq k \leq N), \quad (3.3)$$

и

$$a_0 = 0, \quad (3.4a)$$

$$a_k = a_{-k} \quad (3.4b)$$

Уравнениями движения будут

$$\ddot{a}_k = -\omega_k^2 a_k - \lambda \omega_k^2 \sum_{k'} \sum_{k''} \sum_{k'''} a_{k'} a_{k''} a_{k'''} D(k+k'+k''+k''') \quad (k=-N, \dots, N), \quad (3.5)$$

где

$$\omega_k^2 D(k+k'+k''+k''') = -\omega_k \sin \frac{\pi(k'+k''+k''')}{2N} \times \\ \times \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^N e^{i\pi j(k+k'+k''+k''')} \quad (3.6)$$

Максимальное значение $|k+k'+k''+k'''|$ есть $4N$. Имеем

$$k+k'+k''+k''' = 0, \quad D(0) = 1, \quad (3.7a)$$

$$k+k'+k''+k''' = \pm 2N, \quad D(\pm 2N) = -1, \quad (3.7b)$$

$$k+k'+k''+k''' = \pm 4N, \quad D(\pm 4N) = 1. \quad (3.7c)$$

$D(k+k'+k''+k''') = 0$ для остальных значений $k+k'+k''+k'''$.

Уравнение (3.7a) дает правила отбора [3.1].

Если возбуждена мода k_0 , а для остальных мод в начальный момент времени $a_k = 0$, то

$$\ddot{a}_{k_0} = -\omega_{k_0}^2 a_{k_0} - 3\lambda \omega_{k_0}^2 a_{k_0}^3, \quad (3.8)$$

что позволяет выразить первоначально возбужденное колебание a_{k_0} через эллиптические функции.

В общем случае имеются следующие наборы k', k'', k''' , которые позволяют удовлетворить условию (3.7a), накладываемому требованию на $k+k'+k''+k'''$:

$$k' = -k, k'' = -k''' = k_0 \quad \text{и эквивалентные (6 наборов)}, \quad (3.9)$$

$$-k' = k'' = -k''' = k \quad \text{и эквивалентные (3 набора)}. \quad (3.10)$$

Поэтому (3.5) дает уравнение

$$\ddot{a}_k = -\omega_k^2 a_k - 6\lambda \omega_k^2 a_{k_0}^2 a_k - 3\lambda \omega_k^2 a_k^3 - (\text{другие члены}). \quad (3.11)$$

Второй член справа в (3.11) происходит от (3.9), а третий — от (3.10).

Если никакие члены не удовлетворяют условию $D(k+k'+k''+k''') \neq 0$ и если в начальный момент времени $a_k = 0$, то все время

$a_k = 0$. Это означает, что мода k не возбуждается модой k_0 .

Однако для особых значений, таких, как

$$k_1 = 3k_0 \quad (3.12)$$

или

$$k_1 = \pm (2N - 3k_0), \quad (3.13)$$

набор значений

$$|k'| = |k''| = k''' = k_0 \quad (3.14)$$

удовлетворяет условиям (3.7а) или (3.7б), т.е. $D(k_1 + k' + k'' + k''') \neq 0$. Поэтому для таких значений k_0 уравнение движения имеет вид

$$\ddot{a}_{k_1} + \omega_{k_1}^2 (1 + 6\lambda a_{k_0}^2) a_{k_1} + 3\lambda \omega_{k_1}^2 a_{k_1}^3 = \pm \lambda \omega_{k_1}^2 a_{k_0}^2, \quad (3.15)$$

где знаки $\pm$ в правой части формулы возникают из-за (3.12, 13).

Поскольку последний член слева пропорционален $a_{k_1}^3$ и остается малым по сравнению с другими членами, пренебрежем им; тогда

$$\ddot{a}_{k_1} + \omega_{k_1}^2 (1 + 6\lambda a_{k_0}^2) a_{k_1} = \pm \lambda \omega_{k_1}^2 a_{k_0}^3. \quad (3.16)$$

Член $6\lambda a_{k_0}^3$ слева возник из-за (3.9), и в этом случае $k - k + k_0 - k_0 = 0$.

Например, допустим, что

$$N = 16, \quad k_0 = 11. \quad (3.17)$$

Возбуждена 11-я мода; тогда (3.13) дает

$$k_1 = 3k_0 - 2N = 1; \quad (3.18)$$

Поэтому мода

$$k_1 = 1 \quad (3.19)$$

возбуждается. Поскольку в этом случае $D(2N) = -1$, получаем

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2 (1 + 6\lambda a_{11}^2) a_1 = +\lambda \omega_1^2 a_{11}^3. \quad (3.20)$$

После возбуждения моды a_{11} , возбуждается мода $k = 3$, потому что $k_3 - k_1 - k_1 - k_1 = 0$. То есть (3.9) удовлетворяется не только набором $3-3-11-11 = 0$, но также и набором $3-1-1-1 = 0$, и эта связь между двумя наборами приводит к возбуждению моды $k = 3$.

Процесс этот описывается уравнением вида

$$\ddot{a}_3 + \omega_3^2 (1 + 6\lambda a_{11}^2) a_3 = -\lambda \omega_3^2 a_1^3, \quad (3.21)$$

в котором вынуждающая сила зависит от a_1 .

После возбуждения $k_1 = 1$ возникает другой поток энергии, потому что (3.9) удовлетворяется, помимо набора $9-9+11-11 = 0$, еще и набором $9-11+1+1 = 0$, приводя таким образом к возбуждению моды $k = 9$ за счет взаимодействия с нормальной координатой a_1 :

$$\ddot{a}_9 + \omega_9^2 (1 + 6\lambda a_{11}^2) a_9 = -3\lambda \omega_9^2 a_1^2 a_{11}. \quad (3.22)$$

Аналогично, поскольку (3.9) удовлетворяется не только набором $13-13+11-11 = 0$, но и $13-11-1-1 = 0$, через посредство a_1 возбуждается и мода $k = 13$:

$$\ddot{a}_{13} + \omega_{13}^2 (1 + 6\lambda a_{11}^2) a_{13} = -3\lambda \omega_{13}^2 a_1^2 a_{11}. \quad (3.23)$$

Для $k = 13$ дополнительно имеем $13-9-3-1 = 0$. Поэтому мода $k = 13$ возбуждается также за счет взаимодействия с модами $k = 9$, $k = 3$ и $k = 1$.

Таким образом, если в начале в цепочке с $N = 16$ возбуждена мода $k_0 = 11$, первой возбуждается мода $k = 1$ и затем последовательно возбуждаются моды $k = 3$, 9 и 13 . В дальнейшем энергия будет перетекать и к другим модам. Однако энергия этих мод не может увеличиваться. Энергия моды может увеличиваться только в том случае, если она находится в области неустойчивости. То есть энергия моды, которая может возбуждаться, будет возрастать только тогда, когда удовлетворены два условия:

- 1) правила отбора,
- 2) условия неустойчивости.

Если для примера взять $n = 16$, $k_0 = 11$, то начальное состояние есть

$$a_{11} = a \cos \omega_{11} t. \quad (3.24)$$

Это состояние сохраняется в течение некоторого времени, и (3.20 - 23) есть уравнения Матье

$$\frac{d^2 a_k}{d\tau^2} + (\lambda_k + 2h_k^2 \cos 2\tau) a_k = 0, \quad (3.25)$$

где

$$\begin{cases} \tau = \omega_{11} t, \\ \lambda_k = (\omega_k / \omega_{11})^2 (1 + 3\lambda a^2), \\ h_k^2 = (\omega_k / \omega_{11})^2 3\lambda a^2 / 2. \end{cases} \quad (3.26)$$

d_k и h_k^2 определяются как функции от λa^2 и ω_k из (3.26), что удобно представить как точку пересечения двух прямых:

$$d_k = [2 + 2 / (3 \lambda a^2)] h_k^2, \quad (3.27)$$

$$d_k = 2 h_k^2 + (\omega_k / \omega_{11})^2, \quad (3.28)$$

где (3.27) определено, когда задана величина λa^2 , и прямая (3.28) перемещается параллельно, когда изменяется k или ω_k .

Например, на рис. 3.1 изображен случай, когда

$$\lambda a^2 = 0,195. \quad (3.29)$$

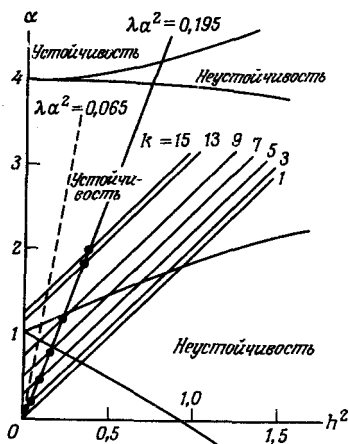


Рис. 3.1. Области устойчивости и неустойчивости (Саито и др. [3.1]).

На этом же рисунке изображена область неустойчивости уравнения Матье. Видно, что когда $\lambda a^2 = 0,195$, только $k = 9$ находится в области неустойчивости. Поэтому единственной модой, чья энергия возрастает, будет мода $k = 9$. На рис. 3.2 показан результат численных расчетов для этого случая [3.1]. Энергия каждой моды показана на рис. 3.3 и 3.4. Сначала возбуждается мода $k = 1$, но на протяжении всего времени ее энергия сильно не возрастает, по прошествии времени мода $k = 9$ и затем мода $k = 13$ набирают большие энергии. Далее, благодаря аналогичным каскадным процессам другие моды начинают набирать большие энергии, и после некоторого времени первоначально возбужденная мода (в данном случае $k_0 = 11$) довольно внезапно теряет энергию. Это было названо яв-

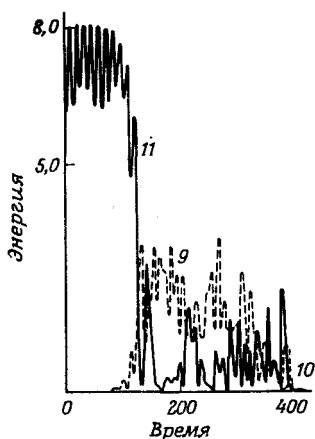


Рис. 3.2. Пример явления индукции (Саито и др. [3.1]).

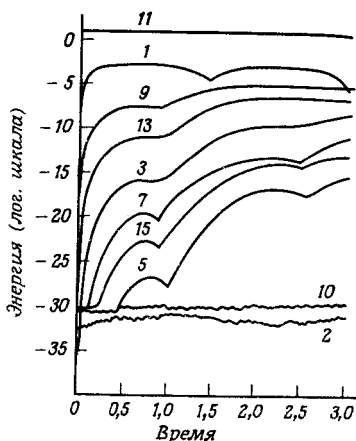


Рис. 3.3. Распределение энергии — малые времена (Саито и др. [3.1]).

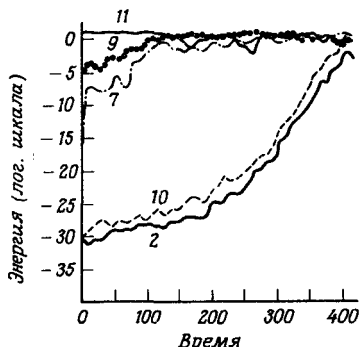


Рис. 3.4. Распределение энергии — большие времена (Саито и др. [3.1]).

лением индукции. Как видно из приведенного выше примера, если нелинейность имеет четвертый порядок, а вначале возбуждена нечетная (четная) мода, то четные (нечетные) моды никогда не возбуждаются. Приведенные правила отбора запрещают передачу энергии между модами с разной четностью. Однако из-за неизбежных ошибок вычисления и ошибок в начальных условиях мода, четность которой отлична от четности предполагаемой начально возбужденной моды, может возбуждаться. Затем через эту моду энергия может перетекать и к другим модам. Тот факт, что моды $k = 10$ и $k = 2$ набирают

энергию через длительный промежуток времени, можно объяснить именно так.

Таким образом, когда возбуждены некоторые моды, поток энергии переносится именно ими. Если, кроме k_0 , небольшую энергию получает в начале некоторая другая мода (рассеивание), то время индукции уменьшается. Это хорошо известный в численных экспериментах факт [3.2].

Если параметр нелинейности λ велик и энергия, полученная системой, достаточно велика, то равномерное распределение энергии будет достигаться постольку, поскольку его допускают правила отбора [3.3]. Такое поведение известно даже для цепочки с экспоненциальным взаимодействием [3.4]. Необходимо также отметить, что в случае увеличения размеров системы одновременно сближаются области неустойчивости и, следовательно, улучшается распределение энергии.

С другой стороны, если параметр нелинейности мал и энергия системы тоже мала, будут исчезать области неустойчивости, и равномерное распределение энергии не будет иметь места. Система будет вести себя как периодическая. Поскольку численный эксперимент ФПУ не удовлетворял условию неустойчивости, он и дал явление периодического повторения.

Распределение энергии не означает эргодичности. Даже в линейной цепочке по отношению к энергии частиц распределение энергии обычно достигается за короткое время. В нелинейной цепочке распределение энергии между линейными модами также совершается легко.

ПРИЛОЖЕНИЕ II. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

Для цепочки с экспоненциальным взаимодействием классическая статистическая сумма может быть строго рассчитана [И.1].

Для ансамбля при постоянном давлении статистическая сумма дается (для одномерной системы) формулой (И.2)

$$Z(p, T) = (2\pi m k T / \hbar^2)^{N/2} Q^N, \quad (\text{И.1})$$

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\phi(r) + pr] / kT} dr, \quad (\text{И.2})$$

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[\frac{a}{b} (e^{-bz} - 1) + (a+p)z \right] / kT \right\} dz. \quad (\text{И.3})$$

Если положить

$$y = e^{-bz},$$

то

(И.4)

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{b} e^{a/bkT} \int_0^{\infty} y^{[(a+p)/bkT]-1} e^{-ay/bkT} dy = \\ &= \frac{e^{a/bkT}}{b} \left(\frac{bkT}{a} \right)^{(a+p)/bkT} \Gamma \left(\frac{a+p}{bkT} \right), \end{aligned} \quad (\text{И.5})$$

где $\Gamma(x)$ обозначает гамма-функцию. Тепловое расширение решетки задается как среднее значение z :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-[\phi(z)+pz]/kT} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\phi(z)+pz]/kT} dz} = -kT \frac{\partial}{\partial p} \ln Q = \\ &= -\frac{1}{b} \left[\ln \frac{bkT}{a} + \psi \left(\frac{a+p}{bkT} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{И.6})$$

и средняя энергия, приходящаяся на одну частицу (энтальпия), определяется как

$$\begin{cases} E/N = kT/2 + \bar{\phi}(z), \\ \bar{\phi}(z) = -\frac{\partial}{\partial(1/kT)} \ln Q = (a+p)\bar{z} + \frac{p}{b}, \end{cases} \quad (\text{И.7})$$

где $\bar{\phi}(z)$ обозначает среднюю потенциальную энергию. В (И.6) ψ обозначает логарифмическую производную Γ -функции

$$\psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx}. \quad (\text{И.8})$$

Для низкой температуры или малой нелинейности получаем

$$\bar{\chi} = \frac{kT}{2(a+p)}. \quad (\text{и. 9})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ К. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ БЕЗ УДЛИНЕНИЯ

1. Кноидальное волновое решение имеет вид (2.3.1)

$$e^{-\epsilon \tau n} - 1 = \frac{(2Kv)^2}{a\ell/m} \left\{ dn^2 \left[2 \left(\frac{n}{\lambda} + vt \right) K \right] - \frac{E}{K} \right\}. \quad (\text{K. 1})$$

Благодаря формуле

$$v \int_0^{1/v} dn^2 \left[2 \left(\frac{n}{\lambda} + vt \right) K \right] dt = \frac{E}{K} \quad (\text{K. 2})$$

усреднение по времени дает

$$\overline{e^{-\epsilon \tau n} - 1} = 0. \quad (\text{K. 3})$$

Это означает, что средняя сила $f(\tau) = -d\phi/d\tau$ для экспоненциального взаимодействия $\phi(\tau) = (a/\ell)e^{-\epsilon \tau} + a\tau$ исчезает:

$$\overline{f(\tau)} = a \overline{(e^{-\epsilon \tau n} - 1)} = 0. \quad (\text{K. 4})$$

Поэтому (K.1) есть решение для нулевой средней силы в нелинейной цепочке, т.е. в случае, когда на цепочку не действует внешняя сила.

Эта сила не появится в уравнениях движения, даже если приложить к цепочке постоянное давление. Однако потенциал взаимодействия можно модифицировать таким образом, чтобы он включал внешнюю силу. Положим, что к системе приложено постоянное внешнее давление $f_{\text{внеш}}$. Это эквивалентно утверждению, что к энергии каждой пружины добавлена потенциальная энергия $f_{\text{внеш}} \tau$, так что эффективный потенциал имеет вид

$$\phi_{\text{эфф}}(\tau) = \frac{a}{\ell} e^{-\epsilon \tau} + (a + f_{\text{внеш}}) \tau = \frac{a'}{\ell} e^{-\epsilon(\tau + \tau_0')} + a' \tau, \quad (\text{K. 5})$$

где введена постоянная δ' следующим соотношением:

$$\alpha' \equiv \alpha + f_{\text{внеш}} = \alpha e^{\delta \delta'} \quad (K.6)$$

Поскольку $\phi_{\text{эфф}}(\tau)$ имеет минимум при $\tau = -\delta'$, ясно, что δ' — сжатие пружины, возникающее благодаря статистическому давлению $f_{\text{внеш}}$.

Таким образом, видно, что уравнения движения (2.3.9) имеют, кроме (K.1), решение

$$e^{-\delta(\tau_n + \delta')} - 1 = \frac{(2Kv)^2}{\alpha' \delta / m} \left\{ dn^2 \left[2 \left(\frac{n}{\lambda} + vt \right) K \right] - \frac{E}{K} \right\}, \quad (K.7)$$

где дисперсионное соотношение получается из (2.3.2) замещением α на α' , или

$$2Kv = \sqrt{\frac{\alpha' \delta}{m}} / \sqrt{\frac{1}{m^2 (2K/\lambda)} - 1 + \frac{E}{K}}. \quad (K.8)$$

Сила пружины такая же, как и в пружине без давления,

$$f_n = -d\phi(\tau_n)/d\tau_n = \alpha (e^{-\delta \tau_n} - 1), \quad (K.9)$$

что можно переписать в виде

$$f_n = \alpha' (e^{-\delta(\tau_n + \delta')} - 1) + f_{\text{внеш}} \quad (K.10)$$

Усреднение по времени (K.7) дает

$$\overline{e^{-\delta(\tau_n + \delta')} - 1} = 0, \quad (K.11)$$

поэтому получаем

$$\overline{f_n} = f_{\text{внеш}}. \quad (K.12)$$

Таким образом, средняя сила пружины равна внешнему давлению, что является вполне естественным результатом.

2. Когда приложено постоянное давление $f_{\text{внеш}}$, τ_n заменяется на $\tau_n + \delta'$ и α на α' . Таким образом, в общем случае

$$e^{-\delta(\tau_n + \delta')} - 1 = \frac{1}{\alpha'} \frac{d^2}{dt^2} S_n, \quad (K.13)$$

$$\tau_n + \delta' = \frac{1}{m} (-S_{n-1} - S_{n+1} + 2S_n), \quad (K.14)$$

а уравнениями движения являются

$$\ln \left(1 + \frac{1}{a'} \frac{d^2}{dt^2} S_n \right) = \frac{b}{m} (S_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n). \quad (K.15)$$

Уравнение (K.14) получается интегрированием уравнения $m \dot{y}_n = y_{n-1} - y_n$. Должно быть понятно, что S_n включают дополнительный член, не зависящий от времени, но он может зависеть от n .

3. Отметим следующую формулу для φ_0 -функций:

$$\frac{\varphi_0(x+y) \varphi_0(x-y)}{[\varphi_0(x)]^2} = C \left[1 + v_1^2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \varphi_0(x) \right], \quad (K.16)$$

где

$$C = C(y) = \left[\frac{\varphi_0(y)}{\varphi_0(0)} \right]^2 \left[1 - \left(1 - \frac{E}{K} \right) m^2 (2Ky) \right], \quad (K.17)$$

$$v_1^2 = v_1^2(y) = m^2 (2Ky) / (2K)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{E}{K} \right) m^2 (2Ky) \right]. \quad (K.18)$$

Положив $y = 1/\lambda$, получаем решение

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \left[\varphi_0 \left(\sqrt{t} - \frac{n}{\lambda} \right) / C^{n^2/2} \right] \quad (K.19)$$

уравнений движения (K.15). Тогда (K.13) дает кноидальное волновое решение (K.7). Чтобы удовлетворить уравнения движения, необходимо, чтобы дисперсионное соотношение имело вид

$$v^2 = \frac{a'b}{m} v_1^2 = \frac{a'b}{m} \frac{1}{(2K)^2} \frac{m^2 (2K/\lambda)}{1 - (1 - E/K) m^2 (2K/\lambda)}, \quad (K.20)$$

которое, конечно, совпадает с (K.8).

4. Когда конец цепочки не закреплен и цепочка может менять свою длину, дисперсионное соотношение для кноидальной волны принимает вид

$$\omega = \frac{\pi}{K(k)} \sqrt{\frac{a'b}{m}} / \sqrt{\frac{cn^2 (2K/\lambda)}{m^2 (2K/\lambda)} + \frac{E(k)}{K(k)}}, \quad (K.21)$$

а расширение есть

$$\bar{\epsilon}_n = \frac{1}{\epsilon} \ln C, \quad (K.22)$$

где

$$C = \left[\frac{v_0(1/\lambda)}{v_0(0)} \right]^2 \left[1 - \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \operatorname{sn}^2 \frac{2K}{\lambda} \right]. \quad (K.23)$$

Если модуль k кноидальной волны из-за удлинения цепочки увеличивается, то частота не увеличивается, а уменьшается, и на самом деле для наименьшей длины волны $\lambda = 2$ частота

$$\omega_m = \omega(\lambda=2) = \pi \sqrt{\frac{ab}{m}} \sqrt{\frac{1}{E(k)K(k)}} \quad (K.24)$$

уменьшается с увеличением модуля k .

Предположим, имеется внешнее давление $f_{\text{внеш}}$. Если давление таково, что

$$e^{-\epsilon \epsilon'} = \frac{a}{a + f_{\text{внеш}}} = \frac{a}{a'}, \quad (K.25)$$

то цепочка сжимается на величину ϵ' . Пусть теперь по цепочке распространяется кноидальная волна, удлиняющая ее на величину $(1/\epsilon) \ln C$. Поэтому, если выбрать внешнее давление таким, чтобы выполнялось условие

$$\epsilon' = \frac{1}{\epsilon} \ln C, \quad (K.26)$$

то удлинение благодаря кноидальной волне будет компенсироваться сжатием из-за давления. Чтобы устранить удлинение, необходимо приложить давление

$$a' = a + f_{\text{внеш}} = aC. \quad (K.27)$$

Для минимальной длины волны $\lambda = 2$ имеем

$$C(\lambda=2) = \left[\frac{v_0(1/2)}{v_0(0)} \right]^2 \frac{E(k)}{K(k)} = \frac{1}{(1-k^2)^{1/2}} \frac{E(k)}{K(k)}, \quad (K.28)$$

где использована формула

$$\left[\frac{v_0(1/2)}{v_0(0)} \right]^2 = \left[\frac{v_3(0)}{v_0(0)} \right]^2 = \frac{1}{k'} = \frac{1}{(1-k^2)^{1/2}}. \quad (K.29)$$

Следовательно, максимальная частота для давления, компенсирующе-

го удлинение, дается выражением

$$\begin{aligned}\omega_m = \omega(\lambda=2) &= \pi \sqrt{\frac{a'b}{m}} \sqrt{\frac{1}{E(k)K(k)}} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{ab}{m}} \sqrt{C} \sqrt{\frac{1}{E(k)K(k)}} = \frac{\pi \sqrt{ab/m}}{K(k)(1-k^2)^{1/4}}. \quad (K.30)\end{aligned}$$

Если оценивать значение частоты в предельных случаях $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 1$, то $K(k) \rightarrow \pi/2$ для $k \rightarrow 0$ и $K(k) \rightarrow \ln(4/\sqrt{1-k^2})$ для $k \rightarrow 1$, так что получаем

$$\omega_m \rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{\frac{ab}{m}} & (k \rightarrow 0), \\ \frac{\pi}{K(k)} \sqrt{\frac{ab}{m}} e^{K/8} \rightarrow \infty & (k \rightarrow 1). \end{cases} \quad (K.31)$$

Значение ω_m для $k \rightarrow 0$ то же, что и для линейной цепочки. В случае компенсации удлинения $\omega_m \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 1$. Это является следствием того, что нелинейная цепочка служит приближением для системы твердых сфер, в которой энергия увеличивается из-за сильного отталкивания между частицами.

КРАТКИЕ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ

Задача 1.1. Функция

$$U = \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$$

имеет минимум при $q_1 = q_2 = 0$. Переходя к полярным координатам (r, θ)

$$q_1 = r \cos \theta, \quad q_2 = r \sin \theta,$$

преобразуем функцию U к виду

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} r^2 + \frac{r^3}{3} (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta = \\ &= \frac{1}{2} r^2 + \frac{r^3}{3} (3 - 4 \sin^2 \theta) \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 + \frac{r^3}{3} \sin 3\theta.\end{aligned}$$

Таким образом, U обладает симметрией правильного треугольника.

Далее, $\partial U / \partial q_1 = 0$ при $q_2 = -1/4$ и $\partial U / \partial q_1 = \partial U / \partial q_2 = 0$ при $q_1 = 0$, $q_2 = 1$.

Задача 1.2. Выпишем гамильтониан линейной цепочки.

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m_n} P_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\alpha_n}{2} (y_{n+1} - y_n)^2$$

($y_0 = 0$). С помощью дуального преобразования $(y, p) \rightarrow (z, \gamma)$ получаем

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m_n} (\gamma_n - \gamma_{n-1})^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\alpha_n}{2} z_n^2.$$

Используя каноническое преобразование

$$z_n = P_{n+1} / a, \quad \gamma_n = -a Q_{n+1} \quad (a = \text{const}),$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n}{2a^2} P_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^2}{2m_n} (Q_{n+1} - Q_n)^2 = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m'_n} P_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{2} (Q_{n+1} - Q_n)^2; \end{aligned}$$

здесь $\frac{1}{m'_n} = \frac{\alpha_n}{a^2}, \quad \alpha'_n = \frac{a^2}{m_n}.$

Задача 1.3. Для $\phi(z) = \alpha(\beta + z^2)^{-1/2}$ имеем

$$\dot{z} = -\phi'(z) = -\alpha z (\beta + z^2)^{-1/2},$$

что можно переписать в виде

$$(\alpha^2 - \dot{z}^2) z^2 = \beta \dot{z}^2.$$

Таким образом (полагая, что $\dot{z} \rightarrow -\alpha z \beta^{-1/2}$ для $z \rightarrow 0$), получаем

$$z = \frac{-\sqrt{\beta} \dot{z}}{\sqrt{\alpha^2 - \dot{z}^2}} \equiv -\frac{1}{m} \chi(\dot{z}_n),$$

и уравнения движения (1.4.13) сводятся к

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{z}_n}{\sqrt{1 - \dot{z}_n^2 / c^2}} = -\gamma (2\gamma_n - \gamma_{n-1} - \gamma_{n+1});$$

здесь $c = d$, $j = d/\sqrt{\beta}$.

В последнем уравнении выражение $m\dot{j}/\sqrt{1-j^2/c^2}$ можно интерпретировать как импульс в специальной теории относительности, где $\dot{j}$ — скорость частицы, а c — скорость света.

Задача 2.4. Поскольку для $\lambda = 2$ $nK = 1$, дисперсионное уравнение (2.3.2) дает

$$\frac{m}{ab} (2Kv)^2 = K/E.$$

Поэтому, введя обозначение $\beta = 2vK$, получим

$$e^{-\beta \tau_n} = \frac{(2Kv)^2}{ab/m} dn^2 \left[(n \pm 2vt)K \right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{K}{E} dn^2 \beta t & (n \text{ четное}), \\ \frac{K}{E} k'^2 / dn^2 \beta t & (n \text{ нечетное}). \end{cases}$$

Таким образом, если записать $\tau_n = \Delta + 2x$ (n четное) и $\tau_n = \Delta - 2x$ (n нечетное), то получим

$$e^{-2\beta\Delta} = \left(\frac{K}{E} \right)^2 k'^2 \quad \text{или} \quad e^{-\beta\Delta} = \frac{K}{E} k'.$$

Следовательно,

$$e^{-2\beta x} = \frac{1}{k'} dn^2 \beta t,$$

и уравнения движения (2.2.9) сводятся к уравнению

$$m\ddot{x} = -2a' \operatorname{sn} 2\beta x.$$

Задача 2.5. По определению,

$$v_0(x) = v_0(x, q) = \phi(q) \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - 2q^{2r-1} \cos 2\pi x + q^{4r-2} \right),$$

где

$$\phi(q) = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - q^{2r}).$$

Величина q связана с модулем k соотношением

$$q = e^{-\pi K(k')/K(k)} = e^{-\pi K'/K},$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$. Отмечая, что

$$\begin{aligned} (1-2q_1 \cos 2\pi x + q_1^2) \left[1-2q_1 \cos 2\pi \left(x \pm \frac{1}{2}\right) + q_1^2 \right] = \\ = 1-2q_1^2 \cos 4\pi x + q_1^4, \end{aligned}$$

получаем

$$\mathcal{V}_0(2x, q^2) = \varphi(q) \mathcal{V}_0(x, q) \mathcal{V}_0\left(x \pm \frac{1}{2}, q\right),$$

где $\varphi(q)$ — некоторая функция q . Поэтому

$$\begin{aligned} S_n\left(\sqrt{t} - \frac{n}{\lambda}\right) &= \ln \mathcal{V}_0\left(\sqrt{t} - \frac{n}{\lambda}, q\right) + \text{const} = \\ &= \ln \mathcal{V}_0\left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{n}{2\lambda}, \sqrt{q}\right) + \ln \mathcal{V}_0\left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{n+\lambda}{2\lambda}, \sqrt{q}\right) + \text{const} = \\ &= S'_n\left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{n}{2\lambda}\right) + S'_n\left(\frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{n+\lambda}{2\lambda}\right) + \text{const}, \end{aligned}$$

где S'_n есть значение S_n для кноидальной волны с удвоенной длиной волны и с параметром

$$q' \equiv \sqrt{q} = e^{-\pi K(k')/2K(k)}.$$

Следовательно, если ввести новый модуль x с помощью соотношения

$$q' = e^{-\pi K(x')/K(x)} \quad (x' = \sqrt{1-x^2}),$$

то получим

$$K(k')/2K(k) = K(x')/K(x),$$

где с обеих сторон стоят монотонно возрастающие функции k и x соответственно. Значение функции в левой части есть ∞ при $k=0$ и 0 при $k=1$. Так же ведет себя и функция в правой части. Таким образом, для $0 < k < 1$ однозначно определяется x ($0 < x < 1$). Если записать кноидальную волну в виде

$e^{-\gamma n-1} = d^2 S_n / dt^2$, получим

$$\begin{aligned} e^{-\gamma n-1} &= [2K(k)v]^2 \left\{ dn^2 \left[2 \left(vt - \frac{n}{\lambda} \right) K(k), k \right] - \frac{E(k)}{K(k)} \right\} = \\ &= [K(x)v]^2 \left\{ dn^2 \left[\left(vt - \frac{n}{\lambda} \right) K(x), x \right] - \frac{E(x)}{K(x)} \right\} + \\ &+ [K(x)v]^2 \left\{ dn^2 \left[\left(vt - \frac{n}{\lambda} - 1 \right) K(x), x \right] - \frac{E(x)}{K(x)} \right\}. \end{aligned}$$

Задача 2.6. Используя указание, соотношение $e^{-\gamma n-1} = d^2 \ln v_0 / dt^2$ приводим к виду

$$\begin{aligned} e^{-\gamma n-1} &= [2K(k)v]^2 \left\{ dn^2 \left[2 \left(vt - \frac{n}{\lambda} \right) K(k), k \right] - \frac{E(k)}{K(k)} \right\} = \\ &= \left[2K(x) \frac{v}{\ell} \right]^2 \sum_{j=0}^{\ell-1} \left\{ dn^2 \left[2 \left(vt - \frac{n}{\ell \lambda} + \frac{j}{\ell} \right) K(x), x \right] - \frac{E(x)}{K(x)} \right\}, \end{aligned}$$

где x связан с k уравнением

$$K(k') / \ell K(k) = K(x') / K(x).$$

Задача 2.7. В предыдущей задаче можно провести суммирование по j в пределах от $j = -\ell/2$ до $(\ell/2) - 1$. Сдвигая таким образом пределы суммирования, перейдем к пределу $\ell \rightarrow \infty$; тогда $x \rightarrow 1$ и кноидальная волна с длиной волны λ выразится в виде суммы солитонов с центрами в точках $n = j\lambda$ ($j = -\infty, \dots, 0, 1, \dots, \infty$). В результате получаем (2.3.8).

Задача 2.8. Для простоты возьмем безразмерные формулы. Тогда

$$e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} = \beta^2 \operatorname{sch}^2(xn - \beta t),$$

$$\gamma_n = -\beta \operatorname{th}(xn - \beta t) + \operatorname{const},$$

$$S_n = \ln \operatorname{ch}(xn - \beta t) + \text{член, линейный по } n \text{ и } t,$$

$$Q_n = S_{n-1} - S_n = \ln \frac{\operatorname{ch}[x(n-1) - \beta t]}{\operatorname{ch}(xn - \beta t)} + \operatorname{const},$$

где $\beta = \gamma h x$.

Отсюда

$$P_n = \dot{Q}_n = \gamma_{n-1} - \gamma_n = \beta \{ \operatorname{th} [\beta t - x(n-1)] - \operatorname{th} (\beta t - x n) \}$$

$$\text{и } M = Q_{-\infty} - Q_{\infty} = 2x,$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{Q}_n = \gamma_{-\infty} - \gamma_{\infty} = 2\beta = Mc,$$

где $c = \beta/x$ есть скорость солитона.

Задача 2.9. Восстановим размерности в предыдущих формулах:

$$\begin{aligned} E &= \sum_n \frac{a}{b} \left[e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} - 1 + (Q_{n+1}-Q_n) \right] + \sum \frac{a}{2b} \dot{Q}_n^2 = \\ &= \sum_n \frac{a}{b} \left[\beta^2 \gamma h^2 (xn - \beta t) + (Q_{n+1} - Q_n) \right] + \\ &+ \sum_n \frac{a}{2b} \beta^2 \left\{ \operatorname{th} [\beta t - x(n-1)] - \operatorname{th} (\beta t - x n) \right\}^2 = \\ &= \frac{a}{b} \beta^2 \sum_n \left[1 - \operatorname{th}^2 (xn - \beta t) \right] - \frac{2ax}{b} + \\ &+ \frac{a}{2b} \beta^2 \sum_n \left\{ \operatorname{th}^2 [x(n-1) - \beta t] + \operatorname{th}^2 (xn - \beta t) \right\} - \\ &- 2 \operatorname{th} [x(n-1) - \beta t] \operatorname{th} (xn - \beta t) = \\ &= -\frac{2ax}{b} + \frac{a}{b} \beta^2 \sum_n \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{th}^2 [x(n-1) - \beta t] - \operatorname{th}^2 (xn - \beta t) \right\} + \\ &+ \frac{a}{b} \beta^2 \sum_n \frac{\operatorname{th} [x(n-1) - \beta t] - \operatorname{th} (xn - \beta t)}{\operatorname{th} x} ; \end{aligned}$$

здесь использовано тождество

$$1 - \operatorname{th} \alpha \operatorname{th} \beta = \frac{\operatorname{th} \alpha - \operatorname{th} \beta}{\operatorname{th} (\alpha - \beta)}.$$

Далее, учитывая, что при $n \rightarrow \pm \infty$ $\operatorname{th} (xn - \beta t) \rightarrow \pm 1$, по-

лучаем

$$E = -\frac{2ax}{b} + \frac{2a}{b} \frac{\beta^2}{\operatorname{th} x} = \frac{2a}{b} (\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - x).$$

Задача 3.1. Устремим $n \rightarrow -\infty$ в (3.6.7) при $|z_1| < 1$; тогда

$$c_1 A^{(n)} \rightarrow -c_1 (t)^2 e^{-2\sigma} z_1^{-n-2} = -(1-z_1^2) z_1^{-n-2};$$

здесь использованы соотношения (3.6.8). Далее, при $n \rightarrow -\infty$ $K(n, n) \rightarrow z_1$ [ср. (3.6.10)], поэтому

$$\begin{aligned} \phi(n, z) &\rightarrow z_1 z^n \left[1 - (1-z_1^2) z_1^{-n-2} \frac{z_1^{n+1}}{z^{-1} - z_1} \right] = \\ &= z_1 z^n \left(1 - \frac{z_1^{-1} - z_1}{z^{-1} - z_1} \right) = z^n z_1 \frac{z^{-1} - z_1^{-1}}{z^{-1} - z_1}. \end{aligned}$$

Если z заменить на z^{-1} , то получим

$$\phi(n, z^{-1}) \rightarrow z^{-n} \frac{z z_1^{-1} - 1}{z - z_1}.$$

Таким образом,

$$e^{-iz} = \frac{1 - z z_1}{z_1 - z}.$$

С другой стороны, из определения коэффициента прохождения, когда $R(z, t) = \beta(z, t) = 0$, следует

$$S(n, z, t) = \frac{\gamma(n, z, t)}{\alpha(z)} = \phi(n, z^{-1}) e^{i\omega t}.$$

При $n \rightarrow -\infty$ $\gamma(n, z, t) \rightarrow z^{-n} e^{i\omega t}$, поэтому $1/\alpha(z) = e^{-iz}$.

Задача 4.2. Положим в (4.4.1) $\omega = df = \omega_\ell$, $\eta = \omega_k$. Тогда

$$A_i = \int_{\Delta_i} \omega_\ell = \sigma_{i\ell}, \quad B_i = \int_{\rho_i} \omega_\ell = \tau_{i\ell},$$

$$A'_i = \int_{\Delta_i} \omega_k = \sigma_{ik}, \quad B'_i = \int_{\rho_i} \omega_k = \tau_{ik}.$$

ω_ℓ и ω_k не имеют полюсов (абелевы дифференциалы первого рода),

и f и z - дифференциалы без полюсов. Следовательно, используя (4.4.7), получаем

$$0 = \sum_j (\sigma_{il} \tau_{jk} - \tau_{jl} \sigma_{jk}) = \tau_{lk} - \tau_{kl}.$$

Цитированная литература

Глава I

- 1.1 (a) E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam: Los Alamos Rpt. LA-1940 (1955); Collected Papers of Enrico Fermi (Univ. of Chicago Press, Chicago 1965), Vol.II, p.978.
(b) J.L. Tuck: Los Alamos Rpt. LA-3990 (1968); J.L.Tuck, M.T. Menzel: Adv.Math., 2, 339-407 (1972).
(c) N.J.Zabusky: In "Mathematical Models in Physical Sciences", ed by S.Drobot (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 1963).
(d) R.S.Northcote, R.B.Potts: J.Math.Phys., 5, 85 (1964).
- 1.2 (a) J.Ford: J.Math.Phys., 2, 387 (1961).
(b) J.Ford, J.Waters: J.Math.Phys., 4, 1293 (1963).
(c) J.Waters, J.Ford: J.Math.Phys., 7, 399 (1966).
- 1.3 (a) E.A.Jackson: J.Math.Phys., 4, 551 (1963).
(b) K.Miura: Thesis, Dept. of Computer Science, University of Illinois (1973).
- 1.4 (a) N.Saito, H.Hirooka: J.Phys.Soc.Jpn., 23, 167 (1967).
(b) H.Hirooka, N.Saito: J.Phys.Soc.Jpn., 26, 624 (1969).
(c) N.Ooyama, H.Hirooka, N.Saito: J.Phys.Soc.Jpn., 27, 815 (1969).
(d) N.Saito, N.Ooyama, Y.Aizawa, H.Hirooka: Prog.Theor.Phys. Suppl., 45, 209 (1970).
(e) R.I.Bivins, W.Metropolis, J.R.Pasta: J.Comp.Phys., 12, 65 (1973).
(f) N.J.Zabusky: Comput.Phys.Comm., 5, 1 (1973).
- 1.5 (a) N.J.Zabusky, G.S.Deem: J.Comp.Phys., 2, 207 (1968).
(b) N.J.Zabusky: J.Phys.Soc.Jpn.Suppl., 26, 196 (1969).
(c) R.D.Tappert, C.N.Judice: Phys.Rev.Lett., 29, 1308 (1972).
- 1.6 (a) M.Toda: Proc.Int.Conf.Statistical Mechanics, Kyoto, 1968; J.Phys.Soc.Jpn.Suppl., 26, 235 (1969).
(b) M.Toda: Prog.Theor.Phys.Suppl., 45, 174 (1970).

- 1.7 (a) Израилев Ф.М., Чириков Б.В.-ДАН СССР, 1966, т. 11, с. 80.
 (b) Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.-ИЗВ., 1967, т. 52, №5, с. 1083.
- 1.8. G.H.Lunsford, J.Ford: J.Math.Phys., 13, 700 (1972).
- 1.9. M.Hénon, C.Heiles: Astron.J., 69, 73 (1964).
- 1.10 (a) G.Contropoulos: Astron.J., 76, 147 (1971).
 (b) G.H.Walker, J.Ford: Phys.Rev., 188, 416 (1969).
- 1.11 (a) M.Toda: Phys.Lett., A48, 335 (1974).
 (b) G. Casati: Lett.Nuovo Cimento, 14, 311 (1975).
 (c) G.Benettin, R.Brambilla, L.Galgani: Physica, A87, 381 (1977).
- 1.12 (a) A.S.Wightman: "Statistical Mechanics and Ergodic Theory", in "Statistical Mechanics at the Turn of the Decade", ed. by E.G.D.Cohen (Dekker, New York 1971).
 (b) V.I.Arnold, A.Avez: Problèmes ergodiques de la mécanique classique (Gauthier-Villars, Paris 1967); Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, New York 1968).
 (c) J.Ford. Adv. Chem.Phys., 24, 155 (1973).
- 1.13. D.J.Korteweg, G.de Vries: Phil.Mag., 39, 422 (1895).
- 1.14. N.J.Zabusky, M.D.Kruskal: Phys.Rev.Lett., 15, 240 (1963).
- 1.15 (a) D.N.Payton, R.Rich, W.M.Visscher: Phys.Rev., 160, 129 (1967); "Proc.Int.Conf. on Localized Excitations in Solids", California 1967 (Plenum New York 1968), p.657.
 (b) M.Rich, W.M.Visscher, D.N.Payton: Phys.Rev., A4, 1682 (1971).
 (c) E.A.Jackson, J.R.Pasta, J.F.Waters: J.Comp.Phys., 2, 1207 (1968).
- 1.16. M.Toda: J.Phys.Soc.Jpn., 20, 2095 (1965).
- 1.17. M.Toda: Prog.Theor.Phys.Suppl., 36, 113 (1966).

ГЛАВА 2

- 2.1 (a) M.Toda: J.Phys.Soc.Jpn., 22, 431 (1967).
 (b) G.B.Whitham: Linear and Nonlinear Waves (Wiley, New York 1973) p.612. [Имеется перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977.]
- 2.2. M.Toda: J. Phys.Soc.Jpn., 23, 501 (1967).
- 2.3. ср. [1.6a].
- 2.4 (a) ср. [1.6b].
 (b) M.Toda, M.Wadati: J.Phys.Soc.Jpn., 34, 18 (1973).
- 2.5 (a) N.Saito, N.Ooyama, Y.Aizawa: RIMS Rpt.Kyoto Univ., 171, 191 (1973).
 (b) N.Ooyama, N.Saito: Prog.Phys.Suppl., 45, 201 (1970).

- 2.6. R.Hirota: J.Phys.Soc.Jpn., 35, 286 (1973).
- 2.7. R.Hirota, K.Suzuki: J.Phys.Soc.Jpn., 28, 1388 (1970); Proc. IEEE 61, 1483 (1973).
- 2.8. R.Hirota, J.Satsuma: Prog.Theor.Phys.Suppl., 59, 64 (1976).
- 2.9. A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.Mclaughlin: Proc.IEEE, 61, 1443 (1973).
- 2.10 (a) J.Ford: Paper Presented at the Int.Conf. on Point Mappings and Their Applications, Toulouse, Sept. 1973.
(b) J.Ford, S.D.Stoddard, J.S.Turner: Prog.Theor.Phys., 50, 1547 (1973).
- 2.11. M.Hénon: Phys.Rev., B9, 1921 (1974).
- 2.12. K.Sawada, T.Kotera: Prog.Theor.Phys.Suppl., 59, 101 (1976).

ГЛАВА 3

- 3.1. H.Flaschka: Phys.Rev., B9, 1924 (1974).
- 3.2. P.D.Iax: Comm.Pure Appl.Math., 21, 467 (1968).
- 3.3 (a) K.M.Case, M.Kac: J.Math.Phys., 14, 594 (1973).
(b) K.M.Case: J.Math.Phys., 14, 916 (1973).
- 3.4. H.Flaschka: Prog.Theor.Phys., 51, 703 (1974).
- 3.5 (a) I.Kay, H.E.Moses: J.Appl.Phys., 27, 1503 (1956).
(b) M.Toda: Phys.Norv., 5, 203 (1971).
(c) G.Papini: Bull.Math.Biol., 39, 129 (1977).
- 3.6. M.Toda: Phys.Rep. 18C, 1 (1974); Ark.Fys.Semin.Trondheim 2 (1974).
- 3.7. J.Moser (ed): Dynamical Systems, Theory and Application, Lecture Notes in Physics, Vol.38 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1975), p.467; Adv.Math., 16, 197 (1975).
- 3.8. M.Kac, P.van Moerbeke: J.Math.Phys., 72, 2879 (1974).
- 3.9. M.Toda, M.Wadati: J.Phys.Soc., 39, 1204 (1975).
- 3.10. M.Wadati, M.Toda: J.Phys.Soc., 39, 196 (1975).
- 3.11. H.Chen, C.Liu: J.Math.Phys., 16, 1428 (1975).
- 3.12. T.J.Stieltjes: Faculté de Toulouse VIII, 1 (1894).
- 3.13. K.Sawada, T.Kotera: J.Phys.Soc.Jpn., 44, 655 (1977). cp. [2.12].
- 3.14. T.Kotera, S.Yamazaki: J.Phys.Soc.Jpn., 43, 1797 (1977).
- 3.15 (a) cp.[2.2].
(b) cp.[3.5b].
(c) M.Toda: Mathematical Problems in Physics, Lecture Notes in Physics, Vol. 39 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1975), p. 387.
- 3.16. M.Toda: Prog.Theor.Phys.Suppl., 59, 1 (1976).

- 3.17 (a) I.M.Gel'fand, B.M.Levitan: Amer.Math.Soc.Transl. Ser. 2, 1, 253 (1955).
 (b) I.Kay, H.E.Moses: Nuovo Cimento, 2, 276 (1956).
 (c) I.Kay, H.E.Moses: J.Appl.Phys., 27, 1503 (1956).
 (d) Z.S.Agranovich, V.A.Marchenko: The Inverse Problem of Scattering Theory (Gordon and Breach, London 1963), p.22.
 (e) L.D.Faddeev: Amer.Math.Soc.Transl., Ser.2, 65, 139 (1967).
 (f) C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.Miura, Phys.Rev. Lett., 19, 1095 (1967).
- 3.18. M.Wadati, H.Sanuki, K.Konno: Prog. Theor.Phys., 53, 419 (1975).

ГЛАВА 4

4.1. cp.[3.3].

- 4.2 (a) M.Kac, P.van Moerbeke: Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 72, 1627, 2879 (1974).
 (b) P.van Moerbeke: Invent Math., 37, 45 (1976).
- 4.3. E.Date, S.Tanaka: Prog.Theor.Phys., 55, 457 (1976); Prog. Theor.Phys.Suppl., 59, 107 (1976).
- 4.4 (a) C.L.Siegel: Topics in Complex Function Theory I, II, III, (Wiley-Interscience, New York 1971).
 (b) G.Springer: Introduction to Riemann Surfaces (Addison-Wesley, Reading, MA 1957).
 (c) Y.Kusunoki: Theory of Functions (Asakura, Tokyo 1973) (на японском языке).
- 4.5. Эллиптические функции:
- (a) E.T.Whittaker, G.N.Watson: A Course of Modern Analysis, 4th ed. (Cambridge Univ.Press, Cambridge 1946). [Имеется перевод: Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. В 2-х томах. - М.: Физматгиз, 1963.]
- (b) A.G.Greenhill: The Application of Elliptic Functions (Dover, New York 1957).
- (c) H.Jeffreys, B.S.Jeffreys Mathematical Physics, 3rd ed. (Cambridge Univ.Press, Cambridge 1956), Chap. 25.
- (d) H.Hancoch: Theory of Elliptic Functions (Dover, New York 1958).
- (e) E.Tricomi: Elliptische Funktionen (Academische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1948).

- (f) S.Tomochika: Theory of Elliptic Functions (Kyoritsu, Tokyo 1958) (на японском языке).
 - (g) S.Ando: Introduction to Elliptic Integrals and Elliptic Functions (Nisshin, Tokyo 1970) (на японском языке).
 - (h) M.Toda: Introduction to Elliptic Functions (Nihon-Kyogon, Tokyo 1976) (на японском языке).
- 4.6. Уравнение Матъе и уравнение Хилла:
- (a) см. [4.5a] .
 - (b) H.P.Mckean, P.van Moerbeke: Invent Math., 30, 217 (1974).
 - (c) H.Hochstadt: The Functions of Mathematical Physics (Wiley, New York 1971).
 - (d) K.Husimi: Classical Mechanics (Iwanami, Tokyo 1964), p.287 (на японском языке).
- 4.7. M.Toda: Ark.Fys.Semin.Trondheim, 3 (1977).
- 4.8. Советская литература по задачам с периодическими граничными условиями указана в [4.3] . Кроме того, см.: Кричевер И.М. — ДАН СССР, 1976, т. 227, №2, с.291; Функц. анализ, 1976, т.10, №1, с.75.

Глава 5

- 5.1 (a) D.W.McLaughlin: J.Math.Phys., 16, 76, 1704 (1975).
- (b) H.Flaschka, D.W.McLaughlin: In "Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications, ed. by R.M.Miura. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1976), p 253.
- 5.2 (a) H.Flaschka, D.W.McLaughlin: Prog.Theor.Phys., 55, 438 (1976).
- (b) H.Flaschka: [3.7], p. 441.
- 5.3 ср. [4.6b].

Приложения

- A.1. ср. [3.12] .
- B.1. ср. [4.6b] , H.Hochstadt: Arch.Rat.Math.Anal., 19, 353 (1965).
- E.1. R.Bellman: A Brief Introduction to Theta Functions (Holt, Rinehart, and Winston, New York 1961).
- Ж.1. R.Hirota, J.Satsuma: Prog.Theor.Phys.Suppl., 59, 64 (1976).

- 3.1 (a) N.Saito, N.Hirotsu, A.Ichimura: J.Phys.Soc.Jpn., 39, 1431 (1975).
 (b) N.Saito, A.Ichimura; Prog.Theor.Phys.Suppl., 52, 137 (1976).
 3.2. R.L.Bivins, N.Metropolis, J.Pasta: J.Comp.Phys. 12, 65 (1973).
 3.3. cp. [1.7].
 3.4. N.Saito, N.Ooyama, Y.Aizawa, H.Hirooka: Prog.Theor.Phys.Suppl. 45, 209 (1970).
 И.1. cp. [1.6b].
 И.2. Н.Тakahashi: Proc.Phys.Math.Soc., 24, 60 (1942); Е.Н.Идзидэ: D.C. Mattis: Mathematical Physics in One Dimension (Academic New York 1966), p.25.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ В ИЗДАНИИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

Об общих вопросах теории солитонов, преобразовании Бäcklund и методе обратной задачи рассеяния можно прочитать в: R.K.Bullough, P.J.Caudrey (eds); Solitons, Topics in Current Physics, Vol.17 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1980), куда включены следующие статьи, касающиеся проблемы цепочки:

- M.Toda: On a Nonlinear Lattice, pp. 143-155;
 R.Hirota: Direct Methods in Soliton Theory, pp. 157-176;
 M.Wadati: Generalised Matrix Form of the Inverse Scattering Method, pp. 287-300;
 L.D.Paddeev: A Hamiltonian Interpretation of the Inverse Scattering Method, pp. 339-354.
 [Имеется перевод: Солитоны: Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кедри. - М.: Мир, 1983.]

Тщательно разработанное математическое толкование в терминах алгебры Ли: Bertram Konstant: The Solution to a Generalised Toda Lattice and Representation Theory, Adv.Math., 34, 195-338 (1979). Также см.

- O.I.Bogoyavlensky: On Perturbation of the Periodic Toda Lattice, Commun.Math.Phys., 51, 201 (1976);
 W.W.Symes: Hamiltonian Group Actions and Integrable Systems, Physica D, 1D, 339-374 (1980).

Разд. 1.3. 0 теплопроводности твердых тел также см.

- M.Toda: Solitons and Heat Conduction, Phys.Scr., 20, 424-430 (1979).

Разд. 2.1-5. Общий обзор работ по проблеме цепочки можно найти в:

M.Toda: Problems in Nonlinear Dynamics, Rocky Mountain Math., 8, 197-209 (1978).

Разд. 2.7 и 3.II. Показано, что цепочка с экспоненциальным взаимодействием и уравнение Кортевега - де Вриза вполне могут быть связаны вследствие их интегрируемости:

W.Saitoh: A Transformation Connecting the Toda Lattice and KdV Equation, J.Phys.Soc.Jpn., 49, 409-416 (1980).

Разд. 3.8. Некоторое обобщение интегрируемой цепочки сделано в работе:

Михайлов А.В. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Toda. - Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, № 7, с.443-448.

Разд. 4.4. Гиперэллиптические кривые, или римановы поверхности, связанные с периодическими системами, обсуждаются в работе:

H.P.McKean, P.van Moerbeke: Hill and Toda Curves, Commun. Pure Appl.Math., 38, 23-42 (1980).

Приложение X. О методе Хироты и дискретизации по времени см. также

R.Hirota: Difference Analogue of the Korteweg-de Vries Equation, J.Phys. Soc. Jpn., 43, 1424-1433 (1977);

Discrete Time Equation, J.Phys.Soc.Jpn., 43, 2074-2078

(1977); Discrete Sine-Gordon Equation, J.Phys.Soc.Jpn.,

43, 2079-2086 (1977); Bäcklund Transformation for the Discrete Time Toda Equation, J.Phys.Soc.Jpn., 45, 321-332 (1978).

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

- 1*. Теория солитонов: Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова. - М.: Наука, 1980.
- 2*. Солитоны: Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодрн. - М.: Мир, 1983.
- 3*. Беттх Дж., Пауэлл Дж. Распространение солитонов в одномерной цепочке при ударном сжатии. - В кн.: Солитоны в действии: Пер. с англ. / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. - М.: Мир, 1981, с. 269.
- 4*. Watanabe S., Toda M. Interaction of Soliton with Impurity in Nonlinear Lattice. - J. Phys. Soc. Jpn., 1981, v. 50, p. 3436.
- 5*. Watanabe S., Toda M. Experiment on Soliton - Impurity Interaction in Nonlinear Lattice Using LC Circuit. - J. Phys. Soc. Jpn., 1981, v. 50, p. 3443.

- 6 *. Muroya K., Saitoh N., Watanabe S. Experiment on Lattice Soliton by Nonlinear LC Circuit - Observation of a Dark Soliton. - J. Phys. Soc. Jpn., 1982, v. 51, p. 1024.
- 7 *. Yoshida F., Sakuma T. Statistical Mechanics of the Toda Lattice Based on Soliton Dynamics. - Phys.Rev. A., 1982, v. 25, p. 2750.
- 8 *. Olshanetsky M.A. Explicit Solitons of Classical Generalized Toda Models. - Physica D, 1981, v. 3, p. 118.
- 9 *. Holmes P. Proof of Non-integrability for the Henon - Heiles Hamiltonian near an Exceptional Integrable Case. - Physica D, 1982, v. 5, p. 335.
- 10 *. Henon M. On the Numerical Computation of Poincare Maps. - Physica D, 1982, v. 5, p. 412.
- 11 *. Gorbacheva O.B., Ostrovsky L.A. Nonlinear Vector Waves in a Mechanical Model of a Molecular Chain. - Physica D, 1983, v. 8, p. 223.
- 12 *. Budinsky N., Bountis T. Stability of Nonlinear Models and Chaotic Properties of 1D Fermi - Pasta - Ulam Lattices.- Physica D, 1983, v. 8, p. 445.
- 13 *. Klinker T., Lautenborn W. Scattering of Lattice Solitons from a Mass Interface - a Synergetic Approach. - Physica D, 1983, v. 8, p. 249.
- 14 *. Gibbon J. Poles of the Toda Lattice.- in: Solitons and Condensed Matter Physics. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981, p. 44.
- 15 *. Levi D. The Spectral Transform as a Tool for Solving Non-linear Discrete Evolution Equations. - in: Solitons and Condensed Matter Physics. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981, p. 91.
- 16 *. Rogers C., Shadwick W.F. Bäcklund Transformation and their Applications (Mathematica in Science and Engineering, v. 161). - New York: Academic Press, 1982, p. 334.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	11
Глава 1. Введение	14
1.1. Проблема Ферми - Паста - Улама	14
1.2. Расчет Хенона - Хейлеса	19
1.3. Открытие солитонов	23
1.4. Дуальные системы	25
Глава 2. Цепочка с экспоненциальным взаимодействием	29
2.1. Поиски интегрируемой цепочки	29
2.2. Цепочка с экспоненциальным взаимодействием	32
2.3. Периодические решения	35
2.4. Уединенные волны	39
2.5. Двухсолитонные решения	43
2.6. Предел твердых сфер	48
2.7. Континуальное приближение и время возврата	50
2.8. Применения и обобщения	54
2.9. Отображение Пуанкаре	57
2.10. Сохраняющиеся величины	59
Глава 3. Спектр и построение решений	65
3.1. Матричный формализм	65
3.2. Бесконечная цепочка	69
3.3. Рассеяние и связанные состояния	74
3.4. Уравнение Гельфанда - Левитана	81
3.5. Задача с начальными условиями	85
3.6. Солитонные решения	87
3.7. Соотношение между сохраняющимися величинами и коэффициентом прохождения	95

3.8.	Обобщение уравнений движения и система Каца - Мёрбеке	101
3.9.	Преобразование Бэклунда	107
3.10.	Конечная цепочка	116
3.11.	Континуальное приближение	126
Глава 4.	Периодические системы	132
4.1.	Дискретное уравнение Хилла	132
4.2.	Дополнительный спектр	141
4.3.	Соотношение между $\mu_j(k)$ и $\mu_j(0)$	147
4.4.	Интегралы на римановой поверхности	153
4.5.	Решение проблемы обращения Якоби	166
4.6.	Временная эволюция	168
4.7.	Простой пример (кноидальная волна)	176
4.8.	Периодическая система из трех частиц	191
Глава 5.	Применение теории Гамильтона - Якоби	198
5.1.	Канонически сопряженные переменные	198
5.2.	Переменные действия	206
Приложения		212
А.	Метод Стильтьеса для непрерывной дроби	212
Б.	Система Штурма	221
В.	Простые корни уравнения $\Delta^2(\lambda)=4$ определяют все корни	222
Г.	Весь дополнительный спектр μ_j - простой	224
Д.	Интерполяционная формула Лагранжа	225
Е.	ψ -функция многих переменных (ψ -функция Римана).	226
Ж.	Метод Хироты	230
З.	Явление индукции	233
И.	Статистическая сумма	239
К.	Дисперсионное соотношение для цепочки без удлинения	241
	Краткие решения основных задач	245
	Цитированная литература	253
	Литература, добавленная в издании на английском языке	258
	Литература, добавленная при переводе	259