

В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский
ТЕОРИЯ СОЛИТОНОВ: МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Книга представляет собой первое в мировой литературе систематическое изложение чрезвычайно популярного метода обратной задачи рассеяния, включая все необходимые математические сведения. До сих пор с методами теории солитонов возможно было познакомиться лишь по журнальным статьям и сборникам обзоров, не содержащим систематического изложения основ.

Содержание

Предисловие	5
Введение. Слабая нелинейность и дисперсия	9
Глава I. Метод обратной задачи рассеяния	20
§ 1. Сведения из теории рассеяния. Обратная задача квантовой теории рассеяния	21
§ 2. Схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния	33
§ 3. Безотражательные потенциалы и N -солитонные решения	37
§ 4. Уравнение КдФ как гамильтонова система	44
§ 5. Полиномиальные интегралы движения	48
§ 6. Полная интегрируемость уравнения КдФ. Высшие уравнения КдФ	51
§ 7. Дифференциально-разностные системы	60
§ 8. Нелинейное уравнение Шредингера и уравнение sin-Gordon	74
§ 9. Обратная задача рассеяния для системы двух дифференциальных уравнений	78
§ 10. Нелинейное уравнение Шредингера	85
§ 11. Уравнение sin-Gordon	98
Глава II. Периодические решения уравнения КдФ	112
§ 1. Уравнение Шредингера с периодическим потенциалом. Периодический аналог уравнений Гарднера — Грина — Крускала — Миуры	112
§ 2. Стационарная задача для высших КдФ. Метод отыскания точных решений КдФ	120
§ 3. Стационарные решения высших КдФ и потенциалы уравнения Шредингера с конечным числом зон. Римановы поверхности	127
§ 4. Аналитические свойства блоховской собственной функции конечнозонного потенциала на римановой поверхности	132
§ 5. Некоторые приложения	138
§ 6. Сведения из теории римановых поверхностей. Циклы на римановой поверхности	147
§ 7. Дифференциалы на римановых поверхностях. Абелевы (голоморфные) дифференциалы и дифференциалы с полюсами	158
§ 8. Елоховская собственная функция и квазиимпульс. Связанные с ними дифференциалы на римановой поверхности, их временная динамика	168
§ 9. Точные формулы для конечнозонных потенциалов и решений КдФ	178
§ 10. Некоторые частные решения КдФ	181

Глава III. Дальнейшее развитие методов построения интегрируемых систем и их решений	187
§ 1. Регулярная задача Римана	187
§ 2. Задача Римана с нулями	190
§ 3. Обратная задача рассеяния для матричной системы первого порядка	197
§ 4. Задача n -волн	209
§ 5. Солитонные решения	216
§ 6. Системы, интегрируемые при помощи задачи Римана	222
§ 7. Релятивистски-инвариантные системы — киральные поля	227
Глава IV. Асимптотики решений при больших временах	245
§ 1. Интегральные соотношения. Нелинейная дифракция Фраунгофера	247
§ 2. Явные формулы для асимптотик (нелинейное уравнение Шредингера)	251
§ 3. Явные формулы для асимптотик (уравнение Кортевега — де Фриза)	257
§ 4. Метод усреднения Уитема	261
Приложение. Теория уравнения Кадомцева — Петвиашвили (двумерного КдФ). Некоторые дискретные системы	285
§ 1. Некоторые интегрируемые двумерные системы	285
§ 2. Законы сохранения	289
§ 3. Метод одевания	291
§ 4. Солитоноподобные решения уравнения КП	294
§ 5. Точные решения, зависящие от функциональных параметров	298
§ 6. Метод римановых поверхностей. Конечноточные решения ранга 1	300
§ 7. Рациональные решения уравнения КП. Дискретные системы частиц на прямой	304
§ 8. Метод голоморфных векторных расслоений над римановыми поверхностями. Функциональные параметры в точных решениях	307
§ 9. Некоторые замечания о периодической цепочке Тода	315
Литература	317

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних 15—20 лет в различных областях физики большое количество исследований было посвящено изучению нелинейных волновых процессов. Это относится в первую очередь (кроме классических задач гидродинамики) к различным вопросам теории плазмы и нелинейной оптики. В процессе развития теории нелинейных волн выявились простейшие «модельные» нелинейные волновые уравнения, которые обладают, в некотором смысле, свойством универсальности, т. е. могут встречаться в задачах самой разной физической природы подобно классическому линейному уравнению Даламбера. К числу таких уравнений относятся, например, известное уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), нелинейное уравнение Шредингера, уравнение $\sin$ -Gordon. Эти уравнения — по крайней мере, в одномерном случае — обладают замечательным математическим свойством. В них имеется скрытая алгебраическая симметрия, приводящая к «интегрируемости» с помощью так называемого метода обратной задачи для вспомогательного линейного оператора. Изложению этого математического метода и его обобщений посвящена, в основном, данная книга, главной целью которой является элементарное, по мере возможности, изложение этого метода вместе со всеми необходимыми сведениями из теории рассеяния, римановых поверхностей, гамильтоновых систем и т. д. Особую главу книги представляют асимптотические задачи о поведении решений на больших временах. Здесь в некоторых

случаях существенные качественные результаты могут быть получены с помощью методов, не связанных с теорией рассеяния (см. § 4 гл. IV) и аналогичных классическому «методу усреднения» Боголюбова и др.

Для иллюстрации тезиса об «универсальности» уравнений КдФ и нелинейного уравнения Шредингера мы приведем во Введении их вывод в некоторых физических задачах.

Метод обратной задачи рассеяния ведет свое начало с работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [3]. В настоящее время литература по методу обратной задачи содержит сотни статей, обзорение которых представляет значительные трудности. Мы цитируем в тексте книги только список обзорных статей и сборников, посвященных развитию нового метода [1—26]. Авторы сочли нужным приложить к литературе список основных работ, на которых основывается научный материал книги: это статьи [27—40] по материалу главы I, [41—51] по главе II, [52—59, 63] по главе III и [60—62] по главе IV.

Дадим краткий исторический обзор теории солитонов, предшествовавшей знаменитой работе [3].

Солитонное решение — для длинных волн на поверхности жидкости — было впервые получено Буссинеском в 1872 г. Уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) было выведено его авторами в 1895 г. — тогда же были получены периодические (кноидальные) волны, выражающиеся через эллиптические функции. В последующие годы происходило постепенное уточнение этих результатов, закончившееся строгим доказательством существования солитона на поверхности жидкости конечной глубины, предъявленным Лаврентьевым и Фридрихсом; историю этого периода можно найти в прекрасной книге Стокера [14].

Интерес к солитонам возобновляется в связи с исследованиями по физике плазмы. В 1958 г. Сагдеев [13]

показал, что в плазме могут распространяться солитоны, вполне аналогичные солитонам на поверхности жидкости; Гарднер и Моригава [4] установили прямую аналогию между уравнениями, описывающими плазму в сильном магнитном поле, и уравнениями мелкой воды. С этого времени уравнение Кортевега — де Фриза приобретает общефизический характер и вскоре устанавливается возможность его применения к разнообразным волновым задачам (см. монографию Уитема [15a]). Параллельно прогресс в области нелинейной оптики (см. монографии Ахманова и Хохлова [1] и Бломбергена [2]) привел к рассмотрению задачи о трехволновом параметрическом взаимодействии и позднее к нелинейному уравнению Шредингера (см. обзор Кадомцева и Карпмана [8]).

Открытию метода обратной задачи предшествовала работа по численному моделированию уравнения Кортевега — де Фриза. Еще в 1954 г. Ферми, Паста и Улам (см. 16)], изучая на ЭВМ поведение цепочки нелинейных осцилляторов, обнаружили аномально медленную стохастизацию этой динамической системы. В 1964 г. Крускал и Забуский (см. в [3]) обнаружили путем численного моделирования, что солитоны в КдФ сталкиваются упруго. Этот результат дал толчок к новым аналитическим исследованиям. Вскоре были открыты бесконечные серии законов сохранения и, наконец, в 1967 г. это развитие увенчалось открытием метода обратной задачи рассеяния [3].

Дальнейшее развитие этого метода началось с работ, в которых был вскрыт алгебраический механизм, лежащий в основе процедуры работы [3] (П. Лакс, 1968), и построена теория уравнения КдФ как гамильтоновой системы (С. С. Гарднер, В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, 1971). Уже в начале 70-х годов стали обнаруживаться другие важные нелинейные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи, в частности, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение $\sin$ -Gordon и др. Процедура

нахождения периодических решений, потребовавшая глубокого использования гамильтонова формализма и привлечения методов алгебраической геометрии, была найдена только в 1974—75 гг. даже для уравнения КдФ. Обзор этого периода можно найти в [6]. Развитие самых последних лет происходило в следующих направлениях: 1) выявление новых физически важных систем, интегрируемых методом обратной задачи или его обобщениями; 2) развитие методов теории рассеяния и алгебраической геометрии для нахождения решений; 3) построение и изучение квантовых релятивистски-инвариантных моделей, в которых сохраняется точная интегрируемость.

По мнению авторов, накопленная информация о точных решениях пока еще слабо используется для расчета конкретных физических эффектов. Мы надеемся, что данная книга, по которой можно овладеть всей необходимой техникой, будет способствовать расширению приложений этого метода, который, без сомнения, представляет собой одно из самых красивых открытий математической физики XX века.

Авторы

СЛАБАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ И ДИСПЕРСИЯ

Как известно, широкий класс волновых процессов в самых различных однородных средах описывается волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (1)$$

описывающим распространение незатухающих волн с постоянной скоростью u_0 . При выводе этого уравнения используются три основных обстоятельства. Во-первых, отсутствие диссипации. Оно выражается инвариантностью (1) относительно обращения времени, т. е. замены $t \rightarrow -t$. Во-вторых, амплитуда колебаний должна быть достаточно мала. При этом нелинейные по колеблющейся величине ψ члены малы и ими можно пренебречь. Наконец, в рассматриваемом диапазоне длин волн должна отсутствовать дисперсия, т. е. зависимость скорости распространения от частоты и длины волны. Обычно (и мы будем иметь в виду вначале именно этот случай) это соответствует пределу сколь угодно больших длин волн.

Подчеркнем еще раз универсальность уравнения (1), вид которого не зависит от конкретных свойств среды; эти свойства отражаются только на величине скорости u_0 . Если отказаться от пренебрежения диссипацией, нелинейностью и дисперсией, эта общность, разумеется, исчезнет. Каждая среда будет описываться своей особой системой уравнений. Замечательно, однако, что если не пренебрегать полностью указанными эффектами, но считать их малыми, то снова можно получить уравнение, вид которого один и тот же для широкого класса явлений.

Уравнение Кортвега — де Фриза. Прежде всего, возникает вопрос, имеет ли смысл учитывать эти малые поправки, т. е. имеются ли случаи, когда эти малые поправки приводят к новым качественным эффектам. В противном случае они, разумеется, были бы совершенно неинтересны. Легко понять, однако, что если процесс происходит достаточно длительное время, то все указанные эффекты могут существенно изменить решение. Действительно, даже малая диссипация энергии приведет за достаточно большое время к затуханию волны. Дисперсия приводит к расплыванию волнового пакета, что также за достаточно большое время может исказить решение до неузнаваемости. Что касается нелинейных эффектов, то они приводят к «укручению фронтов» в решении — эффекту также вовсе не малому.

Наша цель сейчас состоит в получении приближенного уравнения, которое будет правильно описывать эти «большие эффекты малых поправок». При этом мы ограничимся консервативными системами, тем самым по-прежнему полностью пренебрегая диссипацией.

Решение уравнения (1) имеет вид суммы двух волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$\psi = \psi_1(x - u_0 t) + \psi_2(x + u_0 t). \quad (2)$$

Легко убедиться в том, что и при учете малой нелинейности и дисперсии можно рассматривать волны, бегущие в разных направлениях, независимо. Физическая причина этого состоит в том, что такие волны слишком быстро движутся друг относительно друга, так что «накопление поправок» не успевает происходить. Уже это замечание позволяет существенно упростить задачу. Каждая из бегущих волн в (2) удовлетворяет уравнению первого порядка, в частности, волна, бегущая в положительном направлении оси x , уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Нам, таким образом, нужно искать поправки именно к этому уравнению.

Проще всего определить поправку, связанную с дисперсией. Пусть точный закон дисперсии линейных волн

в нашей среде имеет вид

$$\omega = ku(k). \quad (4)$$

При $k \rightarrow 0$ скорость u должна стремиться к u_0 . В общем случае $u(k)$ — аналитическая функция k , разложимая по степеням k . Легко понять, что в отсутствие диссипации это разложение происходит по степеням k^2 . Действительно, закон дисперсии (4) получается из некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами. Поэтому результат решения этой системы можно представить в виде зависимости $i\omega$ от ik с вещественными коэффициентами. Чтобы ω в (4) была вещественной (что выражает отсутствие диссипации), необходимо, чтобы разложение u шло по четным степеням ik .

С учетом сказанного при малых k зависимость $\omega(k)$ можно записать, учитывая только первую поправку:

$$\omega = u_0 k - \beta k^3. \quad (5)$$

Сразу ясно, что для того чтобы получить правильный закон дисперсии (5), нужно добавить к (3) член с третьей производной:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0. \quad (6)$$

Перейдем теперь к нелинейности. Это удобнее всего сделать, если учесть, что в консервативных системах, которые мы здесь рассматриваем, всегда имеются точные законы сохранения некоторых величин. (Фактически речь может идти о законе сохранения числа частиц.) Запишем один из таких законов сохранения в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

(Поскольку в линейном приближении все колеблющиеся величины удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению, всегда можно считать, что уравнение (1) было написано именно для возмущения сохраняющейся величины ψ .) Задача вывода состоит в том, чтобы приближенно выразить поток j через ψ . Из сравнения (7) и (6) видно, что в линейном по ψ приближении $j = u_0 \psi + \beta \partial^2 \psi / \partial x^2$. В следующем приближении появится квадратичный по

ψ член:

$$j = u_0 \psi + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2} \psi^2,$$

где α — постоянная. В результате получаем искомое уравнение, учитывающее первые не исчезающие поправки:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \alpha \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Произведем теперь замену переменных

$$\xi = x - u_0 t, \quad \psi = \frac{\beta}{\alpha} \eta.$$

Уравнение тогда сведется к стандартному виду уравнения Кортевега — де Фриза:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0. \quad (8a)$$

Во избежание недоразумений заметим, что изложенные соображения охватывают наиболее общие случаи, когда нет специальных причин для особых зависимостей дисперсионных и нелинейных членов. Можно, однако, представить себе случай, когда в силу соображений симметрии в разложении j по ψ могут быть только нечетные члены. Тогда в (8) появится нелинейность вида $\eta^2 \partial \eta / \partial x$. Могут быть и более сложные неаналитические зависимости $j(\psi)$. Изложенная схема вывода уравнения Кортевега — де Фриза оказывается весьма удобной при фактических вычислениях, поскольку позволяет независимо определять коэффициенты α и β .

Проиллюстрируем эту процедуру на нескольких примерах. Определим прежде всего коэффициент α в гидродинамике среды с политропическим уравнением состояния $p = C \rho^\gamma$. (Для адиабатического движения идеального газа с постоянной теплоемкостью значение γ равно отношению теплоемкостей c_p/c_v .) В качестве величины ψ выберем изменение плотности ρ' ($\rho = \rho_0 + \rho'$, где ρ_0 — невозмущенная плотность). Уравнению (7) будет тогда соответствовать уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

которое следует дополнить уравнением Эйлера

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (10)$$

С точностью до членов второго порядка связь p с ρ' можно записать как $p - p_0 = u_0^2 \left(\rho' + \frac{\gamma - 1}{2\rho_0} \rho'^2 \right)$, где $u_0 = (dp/d\rho)^{1/2}$ — «невозмущенная» скорость волны. Систему уравнений (9), (10) можно поэтому, с точностью до членов второго порядка, представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\partial (\rho' x)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} &= - \frac{u_0^2 (\gamma - 2)}{2\rho_0^2} \frac{\partial \rho'^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Исключим теперь из этих уравнений v , для чего продифференцируем первое уравнение по t и выразим $\partial v / \partial t$ из второго уравнения. Получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho' &= \\ &= - \frac{\partial^2 (\rho' v)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{u_0 \gamma}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь в левой части (12) можно с должной точностью сделать замену $\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \simeq - 2u_0 \frac{\partial}{\partial x}$, а в правой части положить $\frac{\partial}{\partial t} \simeq u_0 \frac{\partial}{\partial x}$ и $v \simeq \frac{u_0}{\rho_s} u'$. (Последнее приближенное равенство следует из предыдущего и любого из уравнений (11).) Опуская знак $\partial / \partial x$ в левой и правой частях уравнения, получаем значение α

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{2\rho_0} u_0. \quad (13)$$

Применим полученные результаты к важному случаю ионно-акустических волн в бесстолкновительной плазме при условии $T_e \gg T_i$. В этом случае можно пользоваться для ионов гидродинамическим уравнением, пренебрегая тепловым разбросом их скоростей:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{Z e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (14)$$

(M — масса иона).

Электроны же можно считать распределенными по Больцману:

$$n_e = Zn_0 e^{e\varphi/T_e}$$

(n_0 — равновесная плотность ионов), так что уравнение Пуассона для потенциала φ имеет вид

$$\Delta\varphi = -4\pi e (Zn_i - Zn_0 e^{e\varphi/T_e}). \quad (15)$$

Для определения коэффициента α пренебрежем дисперсией, что эквивалентно пренебрежению второй производной в уравнении (15). Тогда вместо (15) получается условие квазинейтральности

$$\frac{e\varphi}{T_e} = \ln \frac{n}{n_0}.$$

Подставляя $e\varphi$ из этого соотношения в (14), получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{ZT_e}{M} \frac{\nabla n_i}{n_i}. \quad (16)$$

Это, однако, просто уравнение гидродинамики, причем скорость звука $u_0 = \sqrt{ZT_e/M}$, а показатель политропы $\gamma = 1$. Поэтому для этого случая

$$\alpha = \frac{u_0}{Mn_0} = \sqrt{\frac{ZT_e}{M} \frac{1}{Mn_0}}. \quad (17)$$

Для определения коэффициента β линеаризуем уравнение (14), считая, что все величины $\sim e^{i(kx - \omega t)}$:

$$-i\omega v = -ikZe\varphi/M,$$

и используя уравнение Пуассона

$$\left(\frac{4\pi Zn_0 e^2}{T_e} + k^2 \right) \varphi = 4\pi Ze n_i'$$

и уравнение непрерывности

$$-i\omega n_i' + ikn_0 v = 0.$$

Приравнивая нулю определитель системы, находим закон дисперсии

$$\omega = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}} k (1 + k^2 D^2)^{-1/2} = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}} k - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ZT_e}{M}} k^3 D^2,$$

где $D = \sqrt{T_e/(4\pi Z n_0 e^2)}$ — дебаевский радиус экранирования электронов в плазме. Таким образом, мы определили и второй коэффициент в уравнении (8) для этого случая:

$$\beta = 1/2 D^2 \sqrt{Z T_e / M}. \quad (18)$$

Классическим примером применения уравнения Кортевега — де Фриза является проблема распространения волн на мелкой воде. (Именно для этой проблемы Кортевег и де Фриз вывели уравнение в 1895 г.) Имея в виду прежде всего получить коэффициент α , выишем уравнения для случая предельно длинных волн ($k \rightarrow 0$). Пусть h — колеблющаяся толщина слоя жидкости. Тогда, считая жидкость несжимаемой и учитывая, что в тонком слое жидкость течет практически вдоль поверхности, запишем уравнение непрерывности в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Уравнение же для скорости имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (20)$$

поскольку изменение потенциальной энергии жидкости при изменении h есть $dU = g h dh$.

Система уравнений (19), (20), однако, опять формально совпадает с системой уравнений гидродинамики, если считать, что h есть плотность, а давление равно $gh^2/2$. Тогда

$$u_0 = \sqrt{gh_0}, \quad \gamma = 2, \quad (21)$$

так что в уравнении для h'

$$\alpha = 3/2 \sqrt{g/h_0}.$$

Для определения коэффициента β нужно решить линейаризованную задачу о колебаниях с конечной длиной волны в слое толщиной h_0 . Закон дисперсии для этого случая (см. [14]) имеет вид

$$\omega \simeq \sqrt{gh_0} [k - 1/2 (kh_0)^2].$$

Таким образом, в этом случае

$$\beta = 1/2 \sqrt{gh_0} h_0^2. \quad (22)$$

Нелинейное уравнение Шредингера. Нелинейные члены в уравнении распространения волн, рассмотренные в предыдущем разделе, имеют, в общем, тот же характер, что и нелинейности в уравнениях гидродинамики. Эти члены выражаются через значения колеблющейся величины в тот же момент времени и ее производные. Можно сказать, что они носят «локальный» характер. Если в начальный момент возмущение носило гармонический во времени характер, то нелинейности этого типа вызовут быстрое появление высших гармоник и исказят начальный профиль.

Существуют, однако, нелинейности и другого типа. Рассмотрим, например, электронные плазменные колебания. (Количественно этот пример будет рассмотрен далее. Здесь нас интересует только общий характер явлений.) Эти колебания происходят с электронной плазменной частотой $\omega_0 = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m}$. Ионы, благодаря своей большой массе, принимать участие в колебаниях практически не будут. Поскольку, однако, в силу квазинейтральности плотность ионов должна быть равна плотности электронов, последняя не может иметь переменной составляющей с частотой порядка ω_0 . Это, тем не менее, не мешает изменению плотности плазмы за счет средней по времени силы, действующей на плазму в поле. Такое, в первом приближении не зависящее от времени возмущение будет определяться средним по времени значением зависящих от поля величин. В слабых полях, мало отличающихся от гармонических, это означает зависимость закона дисперсии от $|\psi_0|^2$, где ψ_0 здесь означает комплексную амплитуду поля $\psi = \psi_0 \exp[i(kx - \omega t)]$. Нелинейности такого рода легко возникают при нагреве среды, поскольку температура при условии $\omega \gg \nu$ (ν — эффективное число соударений) не может успеть за колебаниями поля, а определяется его средним значением.

Нетрудно получить уравнение, учитывающее слабые нелинейные поправки такого рода для полей, мало отличающихся от гармонических. Пусть поле имеет вид

$$\psi = \psi_0 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}, \quad (23)$$

где ψ_0 медленно меняется в пространстве и во времени. Тогда в спектральном разложении поля будут лишь волновые векторы, близкие к k_0 . Поэтому правую часть дисперсионного уравнения $\omega = \omega(k)$ можно разложить по

степеням $k - k_0$:

$$\omega = \omega(k_0) + u_0(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2. \quad (24)$$

Этому закону дисперсии соответствует линейное уравнение

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_0 \psi + u_0 \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - k_0 \right) \psi + \beta \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - k_0 \right)^2 \psi. \quad (25)$$

Если подставить в (25) поле в виде (23), то для ψ_0 получится уравнение вида

$$i \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) = -\beta \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2}.$$

Нам осталось учесть нелинейность. Согласно сказанному, она сводится к зависимости закона дисперсии от $|\psi_0|$. В первом приближении можно учитывать только зависимость $\omega(k_0)$ и взять только поправку порядка $|\psi_0|^2$:

$$\omega(k_0) = \omega_0 + \alpha |\psi|^2.$$

Комбинируя эти уравнения, получаем

$$i \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) = -\beta \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \alpha |\psi_0|^2 \psi_0. \quad (26)$$

В пренебрежении правой частью это уравнение описывает распространение волнового пакета с групповой скоростью $u_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_0}$. Правая часть учитывает дисперсионные и нелинейные поправки.

Интересно отметить, что уравнение (26) встречается и в совсем другом классе физических задач. Оно описывает поведение неидеального бозе-газа со слабым взаимодействием между частицами. В этой задаче уравнению (26) удовлетворяет так называемая волновая функция конденсата, так что оно имеет буквальный смысл уравнения Шредингера [17]. Разумеется, в этом случае вывод уравнения не содержит какого-либо усреднения по быстрым колебаниям и требует только разреженности газа.

Определим постоянные в уравнении (26) для уже упоминавшегося случая ленгмюровских плазменных волн, в которых нелинейность создается при вытеснении плазмы электрическим полем.

Как известно, закон дисперсии ленгмюровских волн при малых k имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{2} (kD)^2 \quad (27)$$

$$(kD \ll 1).$$

Поэтому в нашем случае $\omega(k_0) = \omega_0 = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m}$, $u_0 = 0$, $\beta = \frac{3}{2} D^2$.

Для определения α необходимо найти изменение плотности плазмы под влиянием поля волны. На электроны в поле действует сила, равная

$$f = -\partial U_{\text{эфф}} / \partial x,$$

где

$$U_{\text{эфф}} = \frac{e^2}{4m\omega^2} |\psi|^2.$$

Распределение электронов в этом поле имеет вид

$$n_e = Zn_0 \exp\left(-\frac{U_{\text{эфф}} - e\varphi}{T}\right) \simeq Zn_0 \left(1 - \frac{U_{\text{эфф}} - e\varphi}{T}\right),$$

где φ — потенциал электростатического поля, возникающего из-за возмущения плазмы силой f . Действием же переменного поля на ионы вообще можно пренебречь, так что распределение ионов имеет вид

$$n_i = n_0 e^{-Ze\varphi/T} \simeq n_0 (1 - Ze\varphi/T).$$

Учтем теперь, что плазма квазинейтральна:

$$n_e = Zn_i.$$

Исключая из этих трех уравнений φ , легко получаем, что

$$\delta n_e = -n_e \frac{Z}{Z+1} \frac{e^2}{4m\omega_0^2} |\psi|^2.$$

Поскольку $\delta\omega_0/\omega_0 \simeq \frac{1}{2} \delta n_e/n_e$, окончательно находим

$$\alpha = -\frac{Z}{Z+1} \frac{e^2}{8m\omega_0^2}.$$

Мы не будем останавливаться на важном в этом примере вопросе о возможности пренебрежения эффектами нагрева плазмы, решение которого требует большей конкретизации условий эксперимента.

Полезно сделать также замечание об уравнении sin-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u.$$

Это уравнение появилось впервые в XIX веке в задачах геометрии. Именно, если задана метрика постоянной отрицательной кривизны на поверхности, то так называемое «уравнение вложения» этой метрики в евклидово трехмерное пространство (вытекающее из соотношений Гаусса — Петерсона — Кодацци между метрикой и второй квадратичной формой) в наиболее естественных переменных точно сводится к уравнению sin-Gordon. Классиками геометрии были обнаружены (на геометрическом языке) так называемые «беклунд-преобразования» для этого уравнения — т. е. подстановки, которые позволяют из более простых решений строить более сложные. В настоящее время известно, что наличие беклунд-преобразований всегда или почти всегда указывает на интегрируемость методом обратной задачи и наоборот.

Как известно, к уравнению sin-Gordon сводятся некоторые задачи теории сверхпроводимости, а также «теория n -поля» — кирального поля единичных (трехкомпонентных) векторов в двумерном пространстве, используемая как в задачах геометрии, так и в моделях ферромагнетизма.

Г л а в а I

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В классической форме метод обратной задачи рассеяния весьма удобен при решении задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Можно даже сказать, что он идеально приспособлен для этого. В быстроубывающем случае, когда задача Коши решается в классе достаточно быстро убывающих на бесконечности функций, эффективность метода обратной задачи та же, что и метода Фурье при интегрировании линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В последнем случае преобразование Фурье превращает уравнение в частных производных в бесконечную совокупность обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. При этом, если коэффициенты уравнения не зависят от координат, эти уравнения для фурье-гармоник независимы и тривиально интегрируются. Аналогичная ситуация имеет место и в методе обратной задачи. Роль преобразования Фурье в этом методе играет отображение коэффициентных функций некоторого линейного дифференциального оператора в совокупность «данных рассеяния». Так, уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) интегрируется с помощью перехода от потенциала одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x)\psi = k^2\psi$$

к коэффициенту отражения $r(k)$ на этом потенциале; при эволюции потенциала в силу КдФ зависимость коэффициента отражения от времени оказывается тривиальной:

$$r(k, t) = r(k, 0) e^{-8ik^3t}.$$

Таким образом, задача интегрирования КдФ приводит к задаче о восстановлении потенциала $u(x)$ по данному коэффициенту отражения — обратной задаче квантовой теории рассеяния.

В этой главе мы будем изучать нелинейные уравнения, интегрируемые с помощью перехода к данным рассеяния для линейных уравнений второго порядка. Наиболее интересные среди таких эволюционных уравнений — это КдФ, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение $\sin$ -Gordon. Кроме этих уравнений в § 7 мы рассмотрим некоторые дискретные системы — конечно-разностный аналог КдФ и систему уравнений, известную как «цепочка Тоды». Качественная структура решений этих, на первый взгляд не имеющих ничего общего, систем в значительной мере одинакова. Много общего имеют и соответствующие спектральные задачи. Все это связано с тем, что эти системы интегрируются с помощью уравнений второго порядка (или их дискретных аналогов); именно по этой причине они и объединены в рамках одной главы.

Мы начинаем изложение метода обратной задачи рассеяния с теории уравнения КдФ, следуя как историческому развитию, так и (прежде всего) педагогическим соображениям — многие факты из спектральной теории оператора Штурма — Лиувилля на прямой хорошо известны читателю-физику из курса квантовой механики.

§ 1. Сведения из теории рассеяния.

Обратная задача квантовой теории рассеяния

Рассмотрим одномерный оператор Шредингера (оператор Штурма — Лиувилля) $L = -d^2/dx^2 + u(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Вещественный потенциал $u(x)$ будем считать достаточно гладким и обращающимся в нуль при $|x| \rightarrow \infty$.

Задачу на собственные значения

$$L\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x)\psi = \lambda\psi$$

будем рассматривать в классе ограниченных на всей оси функций $\psi(x)$. Кроме дискретного спектра, собственные функции которого квадратично интегрируемы, имеется двукратно вырожденный непрерывный спектр с ненорми-

руемыми собственными функциями. Непрерывный спектр заполняет вещественную полуось $\lambda \geq 0$; собственные значения дискретного спектра оператора L отрицательны. Из стандартных учебников квантовой механики известно, что число их может быть бесконечным — собственные значения могут накапливаться в окрестности $\lambda = 0$. Это имеет место для медленно спадающих при $|x| \rightarrow \infty$ потенциалов, например, кулоновского $u(x) = -\alpha/x$ или же потенциала $u(x) = \alpha/x^2$. Потенциалы с бесконечным числом связанных состояний мы будем исключать, налагая на $u(x)$ ограничение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| (1 + |x|) dx < \infty. \quad (1)$$

Перейдем к описанию задачи рассеяния. При этом нам вместо энергии λ будет удобнее пользоваться импульсом k ($\lambda = k^2$). Уравнение на собственные функции запишем в виде

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x)\psi = k^2\psi. \quad (2)$$

Непрерывному спектру теперь отвечают вещественные k , дискретному же спектру соответствуют точки мнимой оси $k = i\kappa_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, $\kappa_n > 0$.

При каждом вещественном $k \neq 0$ множество решений уравнения (2) образует двумерное линейное пространство G_k . Фиксируем в G_k два базиса. Первый из них состоит из решений $\psi_{1,2}(x, k)$ уравнения (2), определяемых асимптотическим условием на $+\infty$ по x :

$$\psi_1(x, k) = e^{-ikx} + o(1),$$

$$\psi_2(x, k) = e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty;$$

второй базис $\bar{\psi}_{1,2}(x, k)$ задается аналогичными условиями на $-\infty$:

$$\bar{\psi}_1(x, k) = e^{-ikx} + o(1),$$

$$\bar{\psi}_2(x, k) = e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Ввиду вещественности потенциала имеем

$$\bar{\psi}_1(x, k) = \overline{\psi_2(x, k)}, \quad \psi_1(x, k) = \overline{\bar{\psi}_2(x, k)}. \quad (3)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\varphi_1(x, k) = \varphi_2(x, -k), \quad \psi_1(x, k) = \psi_2(x, -k). \quad (4)$$

Векторы любого из базисов представляют собой линейную комбинацию векторов другого:

$$\varphi_i(x, k) = \sum_{l=1,2} T_{il}(k) \psi_l(x, k), \quad i = 1, 2.$$

Определенную таким образом матрицу $T(k)$ мы будем называть матрицей перехода. Ввиду (3) T имеет вид

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем индекс 1 у функций φ_1 и ψ_1 мы будем опускать. Таким образом,

$$\varphi(x, k) = a(k) \psi(x, k) + b(k) \bar{\psi}(x, k). \quad (5)$$

Определитель Вронского $W(f_1, f_2) = f_1 \frac{df_2}{dx} - f_2 \frac{df_1}{dx}$ любой пары решений f_1, f_2 уравнения (2) не зависит от x . Очевидно, $W(\varphi, \bar{\varphi}) = W(\psi, \bar{\psi}) = 2ik$. Это соотношение вместе с формулой (5) означает, что

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad (6)$$

т. е. матрица перехода унимодулярна: $\det T(k) = 1$.

Легко видеть, что величины $a^{-1}(k)$ и $b(k)a^{-1}(k)$ представляют собой соответственно коэффициенты прохождения и отражения для волны, падающей на потенциал $u(x)$ справа. В самом деле, асимптотика собственной функции $\varphi(x, k)a^{-1}(k)$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ вид

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)} e^{ikx} + o(1),$$

т. е. представляет собой суперпозицию падающей (e^{-ikx}) и отраженной ($ba^{-1}e^{ikx}$) волн. На другом конце прямой x

$$\frac{\varphi(x, k)}{a(k)} = \frac{e^{-ikx}}{a(k)} + o(1),$$

т. е. имеем прошедшую волну. Иными словами, $t(k) = a^{-1}(k)$ представляет собой амплитуду рассеяния вперед, а $r(k) = b(k)a^{-1}(k)$ — назад. Из (6) следует при этом, что рассеяние унитарно:

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1.$$

В учебниках квантовой механики подробно изучаются аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед. Известно, что $t(\lambda)$ является аналитической функцией энергии λ на физическом листе римановой поверхности $\sqrt{\lambda}$ ($\text{Im } \sqrt{\lambda} > 0$), за исключением точек дискретного спектра $\lambda = \lambda_n$, в которых амплитуда имеет простые полюсы. Кроме того, амплитуда рассеяния вперед не обращается в нуль на физическом листе. Для функции $a(k)$ все это, очевидно, означает, что $a(k)$ аналитична в верхней полуплоскости k и имеет простые нули в точках $k_n = i\kappa_n$, $\kappa_n^2 = -\lambda_n$. Ясно также, что $a(k) \rightarrow 1$ при $|k| \rightarrow \infty$, $\text{Im } k \geq 0$. Ввиду принципиальной важности и определенной универсальности этих аналитических свойств диагональных элементов матрицы перехода (аналогичные утверждения имеют место в теории рассеяния для других дифференциальных операторов), мы приведем ниже доказательства этих фактов.

Матрица перехода $T(k)$ доставляет нам исчерпывающую информацию о непрерывном спектре оператора Шредингера. Фактически же вся информация о $T(k)$ содержится в коэффициенте отражения

$$r(k) = b(k)/a(k)$$

(который ввиду (3), (4) достаточно задать на полуоси $k > 0$, поскольку $r(-k) = \bar{r}(k)$). Действительно, из (6) находим

$$|a(k)|^2 = (1 - |r(k)|^2)^{-1},$$

т. е. модуль $r(k)$ однозначно определяет $|a(k)|$. Зная же нули аналитической в верхней полуплоскости функции $a(k)$, мы можем однозначно определить аргумент последней по ее модулю. Для этого рассмотрим функцию $a_1(k)$:

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n}. \quad (7)$$

Эта функция по-прежнему аналитична при $\text{Im } k > 0$, но уже не имеет там нулей, так что $\ln a_1(k)$ аналитичен в верхней полуплоскости и обращается в нуль при $|k| \rightarrow \infty$. При этом на вещественной оси $|a_1(k)| = |a(k)|$. Дисперсионное соотношение для функции $\ln a_1(k) =$

$= \ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k)$ дает $\arg a_1(k)$:

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')| dk'}{k' - k}.$$

Таким образом,

$$\arg a(k) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')| dk'}{k' - k}. \quad (8)$$

Эта простая формула будет весьма полезна в дальнейшем.

Итак, $a(k)$ восстанавливается по модулю коэффициента отражения. Функция же $b(k)$ есть просто $r(k) a(k)$.

Опишем теперь соответствующие характеристики дискретного спектра оператора Шредингера, естественным образом примыкающие к характеристикам рассеяния.

Собственные функции, соответствующие собственному значению $\lambda_n = -\kappa_n^2$, удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x)\psi = -\kappa_n^2\psi.$$

Дискретный спектр оператора Шредингера, как известно, простой, так что все решения этого уравнения получаются из какого-либо одного умножением последнего на константу. На бесконечности собственные функции имеют асимптотики

$$\psi \rightarrow c_{\pm} e^{\mp \kappa_n x}, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Фиксируем собственную функцию $\varphi^{(n)}(x)$ ее асимптотикой на $-\infty$ по x :

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}). \quad (9)$$

При этом при $x \rightarrow +\infty$ функции

$$\varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\kappa_n x} + o(e^{-\kappa_n x}),$$

очевидно, вещественны, так что вещественны и величины b_n . Занумеруем собственные значения λ_n обычным образом, в порядке возрастания λ_n (т. е. убывания κ_n):

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < 0.$$

При этом λ_1 представляет собой энергию основного со-

стояния, а $\varphi^{(1)}$ — волновую функцию этого состояния; $\varphi^{(1)}$ не имеет нулей, а $\varphi^{(n)}$ ровно $n - 1$ раз проходит через нуль. Поэтому

$$b_n = |b_n| (-1)^{n-1}. \quad (10)$$

Положительные величины $|b_n|$ составляют дополнительные к собственным значениям характеристики дискретного спектра. Эти характеристики вместе с коэффициентом $r(k)$ и набором собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ полностью определяют спектр задачи (2). Совокупность $s = (r(k), \kappa_n, |b_n|, n = 1, \dots, N)$ называется данными рассеяния. Отображение $u(x) \rightarrow s$ потенциалов $u(x)$ в данные рассеяния однозначно обратимо. Процедура восстановления $u(x)$ по s составляет предмет обратной задачи теории рассеяния.

При изучении обратной задачи фундаментальную роль играют аналитические свойства введенных выше специальных решений уравнения Шредингера. Оказывается, именно, что при любом x функция $\varphi(x, k) \exp(ikx)$ аналитична в верхней полуплоскости k и имеет там асимптотику

$$\varphi(x, k) \exp(ikx) = 1 + O(1/k), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k > 0,$$

а решение $\psi(x, k)$ аналитично в нижней полуплоскости k и также имеет асимптотику

$$\psi(x, k) \exp(ikx) = 1 + O(1/k), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k < 0.$$

Для того чтобы убедиться в этом, перейдем от уравнения (2) к эквивалентному интегральному уравнению для $\varphi(x, k)$, используя для этого функцию Грина $G(x, x', k)$ оператора $-d^2/dx^2 + k^2$:

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', k) u(x') \varphi(x', k) dx'.$$

Имея в виду асимптотику $\varphi(x, k)$ на $-\infty$ по x , найдем нужную нам функцию Грина:

$$G(x, x', k) = \begin{cases} -\frac{\sin k(x - x')}{k}, & x > x', \\ 0, & x < x'. \end{cases}$$

Таким образом, $\chi_+(x, k) = \varphi(x, k) e^{ikx}$ удовлетворяет

уравнению

$$\chi_+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x') \chi_+(x', k) dx'. \quad (11)$$

При выходе в верхнюю полуплоскость k экспонента в ядре уравнения (11) остается ограниченной (более того — затухающей). Интегрирование ведется по области $x' < x$. По этой причине $\chi_+(x, k)$ допускает аналитическое продолжение в область $\text{Im } k > 0$. Совершенно аналогично, записывая уравнение на функцию $\chi_-(x, k) = \psi(x, k) e^{-ikx}$,

$$\chi_-(x, k) = 1 - \int_x^{\infty} \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x') \chi_-(x', k) dx',$$

видим, что $\chi_-(x, k)$ аналитически продолжима в нижнюю полуплоскость k ; при $|k| \rightarrow \infty$ имеем

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^{\infty} u(x') dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (12)$$

Отметим, наконец, что функция $\bar{\psi}(x, \bar{k})$ аналитична в верхней полуплоскости k , что следует непосредственно из аналитичности $\psi(x, k)$ внизу.

Функция $a(k)$ может быть выражена через аналитические в верхней полуплоскости функции $\varphi(x, k)$, $\bar{\psi}(x, \bar{k})$.

Вычисляя вронскианы $W(\varphi, \bar{\psi})$ и $W(\psi, \varphi)$ и используя (5), находим

$$\begin{aligned} a(k) &= (2ik)^{-1} [\bar{\psi}_x(x, k) \varphi(x, k) - \bar{\psi}(x, k) \varphi_x(x, k)], \\ b(k) &= (2ik)^{-1} [\varphi_x(x, k) \psi(x, k) - \varphi(x, k) \psi_x(x, k)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первой из этих формул следует, что $a(k)$ аналитична в верхней полуплоскости k и имеет асимптотику

$$a(k) = 1 + O(1/k), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k \geq 0.$$

Точки верхней полуплоскости, в которых $a(k)$ обращается в нуль, соответствуют дискретному спектру оператора L . Действительно, равенство нулю вронскиана функций $\varphi(x, k_0)$, $\bar{\psi}(x, \bar{k}_0)$ ($a(k_0) = 0$) означает линейную

зависимость последних:

$$\varphi(x, k_0) = c\bar{\psi}(x, \bar{k}_0).$$

Из этого соотношения следует, что $\varphi(x, k_0)$ экспоненциально убывает как при $x \rightarrow -\infty$ (что является непосредственным следствием определения φ), так и на $+\infty$ по x (поскольку $\bar{\psi}(x, \bar{k}) = e^{ikx}$, $x \rightarrow +\infty$). Таким образом, $\varphi(x, k_0)$ является собственной функцией дискретного спектра L , а k_0^2 — собственным значением L . Из самосопряженности вытекает, что k_0^2 вещественно, т. е. все нули $a(k)$ лежат на мнимой оси. Пусть, далее, $\lambda_n = -\kappa_n^2$ — собственное значение L . Функция $\varphi(x, i\kappa_n)$ имеет ту же асимптотику при $x \rightarrow -\infty$, что и определенная выше собственная функция $\varphi^{(n)}(x)$, поэтому $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(x, i\kappa_n)$. На $+\infty$ по x $\varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\kappa_n x} + o(e^{-\kappa_n x})$, т. е. *)

$$\varphi(x, i\kappa_n) = b_n \bar{\psi}(x, -i\kappa_n) = b_n \psi(x, -i\kappa_n). \quad (14)$$

Таким образом, $a(i\kappa_n) = 0$ и между нулями $a(k)$, расположенными в верхней полуплоскости k , и собственными значениями L имеется взаимно-однозначное соответствие.

Нули $a(k)$ простые. Для того чтобы убедиться в этом, продифференцируем уравнение $L\varphi(x, k) = k^2\varphi(x, k)$ по k в точке $k = i\kappa_n$:

$$(L + \kappa_n^2) \varphi'(x, i\kappa_n) = 2i\kappa_n \varphi(x, i\kappa_n).$$

Умножим это соотношение на $\varphi(x, i\kappa_n)$ и проинтегрируем полученное равенство по всем x . Дважды перебрасывая дифференцирование в интеграле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\kappa_n) (L + \kappa_n^2) \varphi'(x, i\kappa_n) dx$$

и учитывая, что главный член в асимптотике $\varphi'(x, i\kappa_n)$ на $+\infty$ по x имеет вид $a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x}$ (поскольку $a(i\kappa_n) = 0$), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i\kappa_n) dx = ia'(i\kappa_n) b_n, \quad (15)$$

*) На мнимой оси функции $\varphi(x, k)$ и $\psi(x, k)$, очевидно, вещественны.

т. е. $a' (i\kappa_n) \neq 0$. Из этой формулы следует также, что величина $ia' (i\kappa_n)$ вещественна и имеет тот же знак, что и b_n .

Вместе с (15) отметим еще формулу для скалярного произведения собственных функций непрерывного спектра:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x, k) \varphi(x, k') dx = \\ = 2\pi |a(k)|^2 \delta(k - k') + 2\pi \bar{a}(k) \bar{b}(k) \delta(k + k'). \end{aligned}$$

Теперь мы готовы заняться выводом уравнений обратной задачи рассеяния.

Умножим формулу (5) на $e^{ikx} a^{-1}(k)$ и, вспоминая определение функций $\chi_{\pm}(x, k)$, напомним

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = \chi_-(x, k) + r(k) \bar{\chi}_-(x, k) e^{2ikx}. \quad (16)$$

Левая часть (16) аналитична в верхней полуплоскости k , за исключением точек мнимой оси $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$, в которых $\chi_+(x, k)a^{-1}(k)$ имеет простые полюсы. Функция $\chi_-(x, k)$ аналитична при $\text{Im } k \leq 0$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k) a^{-1}(k), & \text{Im } k > 0, \\ \chi_-(x, k), & \text{Im } k < 0; \end{cases} \quad (17)$$

$\Phi(x, k)$ имеет простые полюсы в верхней полуплоскости и скачок на вещественной оси, равный, как видно из (16), $r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}$. Во всех остальных точках комплексной плоскости функция $\Phi(x, k)$ аналитична и на бесконечности имеет предельным значением единицу. Очевидно, что функция $\Phi(x, k)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k') \bar{\chi}_-(x, k') e^{2ik'x} dk'}{k' - k} \quad (\text{Im } k \neq 0), \quad (18) \end{aligned}$$

где введено обозначение $\Gamma_n(x)$ для вычета функции $\Phi(x, k)$ в точке $k = i\kappa_n$. Выражение (18) является непосред-

венным следствием формулы Коши

$$\Phi(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi(x, k') - 1}{k' - k} dk',$$

в которой контур интегрирования γ выбран, как показано на рис. 1. Величину $\Gamma_n(x)$ можно связать со значением

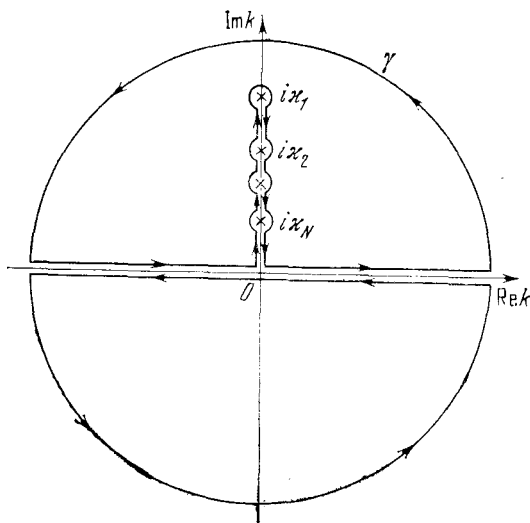


Рис. 1. Контур интегрирования γ .

$\Phi(x, k)$ в точке нижней полуплоскости $k = -i\kappa_n$ (т. е. с $\bar{\chi}_-(x, -i\kappa_n)$). В самом деле, используя (14), видим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{\varphi(x, i\kappa_n) e^{-\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} = \frac{b_n \psi(x, -i\kappa_n) e^{-\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} = \\ &= \frac{b_n}{a'(i\kappa_n)} \chi_-(x, -i\kappa_n) e^{-2\kappa_n x}. \end{aligned}$$

Определяя $\chi_-(x, -i\kappa_n)$ с помощью (18), находим

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{b_n e^{-2\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} \left\{ 1 + i \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k') \bar{\chi}_-(x, k') e^{2ik'x} dk'}{k' + i\kappa_n} \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Устремим теперь k в формуле (18) к вещественной оси снизу; так как согласно определению (17) $\Phi(x, k - i0) = \chi_-(x, k)$, то

$$\chi_-(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k') \bar{\chi}_-(x, k') e^{2ik'x} dk'}{k' - k + i0}. \quad (20)$$

Выражение типа $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k')}{k' - k \pm i0} dk'$ следует понимать, как всегда, как $\mp \pi i f(k) + \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k')}{k' - k} dk'$, где символ $\oint$ означает

интеграл в смысле главного значения. Соотношения (19), (20) представляют собой замкнутую систему линейных уравнений на функцию $\chi_-(x, k)$ и набор $\Gamma_n(x)$, $n = 1, \dots, N$, т. е. на собственные функции оператора L , и являются одним из вариантов записи уравнений обратной задачи. Остается выразить потенциал $u(x)$ через решения системы (19), (20). Проще всего это сделать, сравнив асимптотическое разложение $\chi_-(x, k)$ по степеням $1/k$, следующее из (20), с формулой (12):

$$u(x) = -\frac{d}{dx} \left(2i \sum_{n=1}^N \Gamma_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) \bar{\chi}_-(x, k) e^{2ikx} dk \right). \quad (21)$$

Уравнения (19), (20) однозначно разрешимы. В качестве собственных значений κ_n можно выбирать произвольные положительные числа $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N > 0$, от величин $c_n = (-1)^{n-1} b_n$, $n = 1, \dots, N$, также требуется лишь положительность. Коэффициентом $r(k)$ может являться любая комплексная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $r(-k) = \bar{r}(k)$;
2. $|r(k)| < 1$, $k \neq 0$;
3. $r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$, $|k| \rightarrow \infty$;

4. Преобразование Фурье коэффициента $b(k)$, построенного по $r(k)$,

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ikx} dk$$

должно удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{dB}{dx} \right| dx < \infty.$$

В частности, можно рассматривать потенциалы, для которых $r(k) = 0$ при всех k . Такие потенциалы называются безотражательными и полностью определяются характеристиками дискретного спектра.

Мы написали уравнение обратной задачи в форме системы сингулярных интегральных уравнений. Для оператора Шредингера (Штурма — Лиувилля) более известной формой уравнений обратной задачи является так называемое уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко. Для того чтобы получить это уравнение, заметим, что преобразование Фурье аналитической в нижней полуплоскости k функции $\chi_-(x, k)$ обрывается, т. е. χ_- всегда представима в виде

$$\chi_-(x, k) = 1 + \int_0^{\infty} A(x, y) e^{-iky} dy.$$

Для $\psi(x, k)$ это означает, что существует такая функция $K(x, y)$, что

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} K(x, y) e^{-iky} dy. \quad (22)$$

Очевидно, что $K(x, y) = A(x, y - x)$. Из формулы (22) следует, что существует линейный оператор, преобразующий решение уравнения Шредингера с нулевым потенциалом (e^{-ikx}) в решение этого уравнения с потенциалом $u(x)$. Функция $K(x, y)$ называется ядром оператора преобразования. Поскольку $\psi(x, -k) = \psi(x, k)$, $\text{Im } k = 0$, то $K(x, y)$ вещественно.

Умножим равенство (5) на $e^{iky}/a(k)$ и проинтегрируем по всем вещественным k :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi(x, k) e^{iky}}{a(k)} - e^{ik(x-y)} \right) dk = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{iky} [\psi(x, k) - e^{-ikx} + r(k) \bar{\psi}(x, k)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Вычислим интеграл в левой части этой формулы. Подынтегральная функция имеет в верхней полуплоскости лишь конечное число простых полюсов и убывает при $|k| \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл представляется в виде

$$2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{\varphi(x, i\kappa_n) e^{-\kappa_n y}}{a'(i\kappa_n)}.$$

Используя (14) и представление (22) при $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$, получаем выражение для рассматриваемого интеграла:

$$2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n(x+y)}}{a'(i\kappa_n)} + 2\pi i \int_x^\infty K(x, z) \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n(z+y)}}{a'(i\kappa_n)} dz.$$

Подставляя далее (22) в правую часть равенства (23) и вводя обозначение

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \frac{b_n e^{-\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r(k) e^{ikx} dk, \quad (24)$$

находим окончательно:

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x, z) F(z+y) dz = 0 \quad (25)$$

— уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко.

Из (22) следует асимптотическое разложение $\chi_-(x, k)$:

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{ik} K(x, x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Сравнивая это выражение с (12), приходим к выражению для потенциала $u(x)$ через ядро оператора преобразования:

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (26)$$

§ 2. Схема интегрирования уравнения КДФ методом обратной задачи рассеяния

Возникновение метода обратной задачи рассеяния связано с замечательным наблюдением Гарднера, Грина, Крускала и Миуры (ГГКМ).

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + u(x, t)f = k^2 f \quad (1)$$

с убывающим на бесконечности потенциалом $u(x)$. Для определенности под f будем понимать какое-нибудь специальное решение задачи (1), например, задаваемое асимптотикой $f(x, k) = e^{-ikx} + o(1)$, $x \rightarrow -\infty$, т. е. определенное в § 1 решение $\varphi(x, k)$. Если потенциал в уравнении (1) зависит от дополнительного параметра t (времени), то $\varphi(x, k)$ также приобретает зависимость от t . Функциями t становятся и данные рассеяния; асимптотика $\varphi(x, k)$ на $+\infty$ по x выглядит так:

$$\varphi(x, k) = a(k, t)e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx} + o(1). \quad (2)$$

В случае произвольной зависимости $u(x, t)$ от t найти зависимость данных рассеяния от времени, очевидно, невозможно. Однако, если $u(x, t)$ меняется во времени как решение КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

то $a(k, t)$ и $b(k, t)$ подчиняются уравнениям ГГКМ

$$\dot{a}(k) = 0, \quad \dot{b}(k, t) = 8ik^3 b(k, t)(!!!), \quad (3)$$

а зависимость $\varphi(x, k)$ от t дается уравнением

$$\dot{\varphi}(x, k) = -A\varphi(x, k) + 4ik^3\varphi(x, k), \quad (4)$$

где оператор A есть

$$A = 4 \frac{d^3}{dx^3} - 3 \left(u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right). \quad (5)$$

Верно и обратное утверждение: если данные рассеяния меняются во времени как решения ГГКМ, то потенциал $u(x, t)$ (однозначно ими определяемый) удовлетворяет КдФ. Простейший способ убедиться в справедливости сделанных утверждений — это заметить, что КдФ тождественно уравнению для операторов $L = -d^2/dx^2 + u$ и A , задаваемому выражением (5):

$$\dot{L} = [L, A]. \quad (6)$$

Действительно, $\dot{L}$ есть оператор умножения на функцию u_t , а коммутатор $[L, A]$, как показывают простые вычис-

ления, также является оператором умножения на $6u_{xx}$ — u_{xxx} , так что (6) совпадает с КДФ.

Представление эволюционных уравнений в форме (6) называется представлением Лакса. Тривиальным следствием этого представления является независимость собственных чисел оператора L от времени, поскольку, ввиду антисимметричности A в $L_2(R)$, оператор $L(t)$ унитарно эквивалентен $L(0)$. Таким образом, собственные значения L суть интегралы КДФ. Рассмотрим теперь уравнение (1) и продифференцируем его по времени:

$$\dot{L}f + L\dot{f} = k^2\dot{f} \quad \left(\frac{dk^2}{dt} = 0 \right).$$

Используя выражение (6) для $\dot{L}$, находим

$$(L - k^2)(\dot{f} + Af) = 0,$$

т. е. $\dot{f} + Af$ является собственной функцией L с тем же собственным значением, что и f . Обозначим эту функцию через $\tilde{f}$:

$$\dot{f} + Af = \tilde{f}, \quad (L - k^2)\tilde{f} = 0. \quad (7)$$

Выше мы фиксировали f ее асимптотикой на $-\infty$ по x : $f = \varphi(x, k)$. Это однозначно определяет решение $\tilde{f}$: асимптотика $\tilde{f}$ при $x \rightarrow -\infty$ не зависит от времени и имеет вид e^{-ikx} , значит, $f + Af \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 4ik^3 e^{-ikx}$, т. е.

$$\tilde{f} = 4ik^3 e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty,$$

или $\tilde{f} = 4ik^3 \varphi(x, k)$. Таким образом, уравнение (7) в точности совпадает с (4). Уравнения же ГГКМ являются немедленным следствием (4) и определения данных рассеяния (2). Устремляя в (4) $x \rightarrow +\infty$ и полагая $u(x) = 0$, находим

$$a\dot{e}^{-ikx} + b\dot{e}^{ikx} = \left(-4 \frac{d^3}{dx^3} + 4ik^3 \right) (ae^{-ikx} + be^{ikx}),$$

т. е. уравнения (3).

Столь же просто решается задача об эволюции во времени данных рассеяния в дискретном спектре $\kappa_n(t)$, $b_n(t)$, $n = 1, \dots, N$. Как уже выяснилось, собственные значения $\lambda_n = -\kappa_n^2$ от времени не зависят, поскольку $L(t)$ эквивалентно $L(0)$. Этот же результат извлекается и непосредственно из уравнения $\dot{a}(k) = 0$: $i\kappa_n$ представляют со-

бой нули не зависящей от времени аналитической функции $a(k)$, т. е. $\dot{\kappa}_n = 0$. Зависимость же $b_n(t)$ находится из уравнения (4), поскольку b_n по определению является коэффициентом в асимптотическом разложении $\varphi(x, i\kappa_n)$:

$$\varphi(x, i\kappa_n) = b_n(t)e^{-\kappa_n x} + o(e^{-\kappa_n x}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Подставляя эту асимптотику в (4) при $k = i\kappa_n$, находим

$$\dot{b}_n = 8\kappa_n^3 b_n. \quad (8)$$

Итак, эволюция данных рассеяния во времени имеет вид

$$s(t) = \{r(k, 0)e^{sik^3 t}, \kappa_n, b_n e^{8\kappa_n^3 t}, \quad n = 1, \dots, N\}. \quad (9)$$

Фактически мы проинтегрировали КдФ путем (неявной) замены переменных $u(x) \rightarrow s$. В новых переменных уравнения движения $\dot{s} = F(s)$ превратились в совокупность тривиально интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений. Обращение замены $s(t) \rightarrow u(x, t)$ дает решение КдФ. Таким образом, схема решения задачи Коши для КдФ выглядит так:

$$u(x, 0) \xrightarrow{\text{I}} s(0) \xrightarrow{\text{II}} s(t) \xrightarrow{\text{III}} u(x, t).$$

Первый этап в этой схеме состоит в вычислении данных рассеяния $s(0)$ по начальному условию $u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0)$ с помощью решения уравнений на собственные функции оператора Шредингера с потенциалом $u(x, 0)$. Второй этап заключается в решении задачи Коши в терминах данных рассеяния. Эта задача оказывается тривиальной: ее общее решение дается формулами (9). Наконец, на последнем этапе нашей схемы необходимо указать потенциал $u(x, t)$ в операторе Шредингера, имеющий $s(t)$ в качестве данных рассеяния, т. е. решить обратную задачу рассеяния — найти, например, решение уравнения (1.25).

Все этапы схемы связаны с изучением линейных задач. Несмотря на то, что общее аналитическое решение как прямой, так и обратной задачи рассеяния отсутствует, последовательное применение метода позволяет исследовать решения КдФ с той же степенью подробности, что и решения линейного уравнения в частных производных. Мы сможем предъявить, во-первых, множество весьма

замечательных точных решений КдФ. Это N -солитонные решения в быстроубывающем случае ($u \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$) и аналоги этих решений в периодической задаче. Во-вторых, мы опишем явными формулами асимптотику общего решения $u(x, t)$, $t \rightarrow \infty$ задачи Коши непосредственно в терминах начальных данных — т. е. сделаем все, что можно сделать в линейных задачах.

§ 3. Безотражательные потенциалы и N -солитонные решения

Существует замечательный класс потенциалов, для которых как прямая, так и обратная задачи рассеяния решаются точно. Это безотражательные потенциалы, для которых коэффициент отражения $r(k)$ тождественно равен нулю при всех k . С этим классом потенциалов связано семейство точных решений уравнения КдФ — так называемые N -солитонные решения. Эти решения описывают процесс столкновения солитонов. Замечательной особенностью уравнения КдФ является отсутствие неупругих эффектов при столкновениях солитонов — после столкновения возникают те же солитоны, что и до столкновения. Именно этот факт, установленный впервые с помощью численных экспериментов на ЭВМ, и вызвал повышенный интерес к этому уравнению.

Рассмотрим данные рассеяния вида $s = (r(k) = 0, \kappa_n, b_n, n = 1, \dots, N)$. Поскольку $b(k) = 0$, то $|a(k)| = 1$ и $a(k)$ однозначно определяется своими нулями:

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n}.$$

По этой причине мы можем считать известными величины $\frac{da}{dk} \Big|_{k=i\kappa_n} = a'(i\kappa_n)$. При этом $ia'(i\kappa_n)$ вещественны и имеют тот же знак, что и удовлетворяющие условиям (1.10) величины b_n (см. формулу (1.15)). Таким образом, ядро $F(x)$ (1.24) уравнения Гельфанда — Левитана имеет вид

$$F(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n e^{-\kappa_n x}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0. \quad (1)$$

Уравнение (1.25)

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z) F(z + y) dz = 0$$

при этом легко решается, поскольку является уравнением с вырожденным ядром. Решение $K(x, y)$ необходимо искать в виде

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^N K_n(x) e^{-x_n y}. \quad (2)$$

Выполняя интегрирование, получаем систему линейных алгебраических уравнений на функции $K_n(x)$

$$\begin{aligned} K_n(x) + \sum_{m=1}^N \frac{\beta_n}{x_n + x_m} e^{-(x_n + x_m)x} K_m(x) = \\ = -\beta_n e^{-x_n x}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим через $A(x)$ квадратную матрицу $N \times N$ с элементами

$$A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{\beta_n}{x_n + x_m} e^{-(x_n + x_m)x}. \quad (4)$$

Согласно известной формуле линейной алгебры, решение системы (3) есть

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)},$$

где через $A^{(n)}(x)$ обозначена матрица, получающаяся из матрицы A заменой n -го столбца в последней на столбец $-\beta_n e^{-x_n x}$:

$$A_{mn}^{(n)} = -\beta_n e^{-x_n x}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Поскольку потенциал $u(x)$ определяется функцией $K(x, x)$, подсчитаем ее с помощью формулы (2):

$$K(x, x) = (\det A)^{-1} \sum_{n=1}^N \det A^{(n)}(x) e^{-x_n x}.$$

Вспоминая известное правило дифференцирования определителя, заметим, что числитель в этом выражении пред-

ставляет собой производную $\det A$, так что $K(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x)$. Это замечание позволяет записать выражение для потенциала $u(x)$ (1.26) в компактной форме:

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x). \quad (5)$$

Эта формула дает полное описание всего семейства безотражательных потенциалов. Поскольку свойство безотражательности сохраняется во времени при динамике КдФ (если $r(k, 0) = 0$, то $r(k, t) = r(k, 0)e^{8ik^3t} = 0$), уравнение (5) определяет набор точных решений КдФ. Временная динамика безотражательных потенциалов получается простой заменой в определении (4) матрицы A

$$\beta_n \rightarrow \beta_n \exp(8\kappa_n^3 t).$$

Простейший нетривиальный безотражательный потенциал имеет один-единственный дискретный уровень $-\kappa_n^2$,

$A(x) = 1 + \frac{\beta e^{-2\kappa x + 8\kappa^3 t}}{2\kappa}$ и решение $u(x, t)$ есть

$$u(x, t) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}, \quad (6)$$

где введено обозначение

$$\varphi = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\beta}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa} \ln b. \quad (7)$$

Решение (6) представляет собой солитон уравнения КдФ. Таким образом, солитон — это безотражательный потенциал, в котором имеется одно связанное состояние. Энергия этого состояния $-\kappa^2$ определяет как амплитуду, так и скорость v солитона: $v = 4\kappa^2$. Величина φ представляет собой координату центра солитона при $t = 0$ — эту величину мы будем далее, для краткости, именовать фазой солитона.

В общем случае решение (5) зависит от $2N$ параметров $\kappa_1, \dots, \kappa_N, \beta_1(0), \dots, \beta_N(0)$. Имея в распоряжении явную формулу (5) для решения, можно убедиться, что оно описывает процесс столкновения N солитонов со скоростями $V_n = 4\kappa_n^2$ (и соответствующими амплитудами), иными словами — асимптотика решения (5) при $t \rightarrow -\infty$

представляет собой суперпозицию солитонных решений (6):

$$u(x, t) \rightarrow \sum_{n=1}^N u_n(x - v_n t), \quad t \rightarrow -\infty, \quad (8)$$

где $u_n(x, t)$ — решение (6) с $\kappa = \kappa_n$. Однако извлечение этого утверждения непосредственно из формулы (5) связано с весьма длинными вычислениями. Мы поступим иначе: покажем, что данные рассеяния для потенциала (8) (при соответствующем выборе фаз солитонов φ_n (7)), отнесенные к моменту $t = 0$, совпадают с набором (κ_i, b_i) , определяющим решение (5). В силу взаимной однозначной связи потенциала и данных рассеяния этого вполне достаточно. Фиксируем некоторое большое по модулю отрицательное число T : $T < 0$, $|T| \gg 1$, и рассматриваем функцию $u(x, T)$, построенную по формуле (8) в качестве потенциала в операторе Шредингера. Если модуль T достаточно велик, то вне зависимости от выбора фаз φ_n отдельных солитонов, составляющих $u(x, T)$, потенциал представляет собой последовательность солитонных потенциальных ям; координата n -й ямы $x_n = v_n T + \varphi_n$, так что расстояние между соседними ямами $x_n - x_{n-1} \sim (v_n - v_{n-1}) T$ много больше их размеров $\sim \kappa^{-1}$. Такой потенциал, очевидно, с точностью до экспоненциально малых по $|T|$ членов является безотражательным: $|r(k)| = O(e^{-\lambda|T|})$ при всех k . Поэтому мы вправе забыть про непрерывный спектр оператора Шредингера. Рассмотрим поведение решения $\varphi(x, i\kappa_n)$. Его асимптотика при $x \rightarrow -\infty$ есть $e^{\kappa x}$. Если бы мы имели один-единственный солитон (данные рассеяния κ_0, b_0) с координатой x_0 , то при «прохождении» через солитон, т. е. в области $x \gg x_0$, асимптотика $\varphi(x, i\kappa)$ имела бы вид $a(\kappa, \kappa_0)e^{\kappa x}$, $a(\kappa, \kappa_0) = (\kappa - \kappa_0)/(\kappa + \kappa_0)$, т. е. представляла бы собой растущую с x экспоненту, за исключением случая $\kappa = \kappa_0$, когда растущая экспонента сменяется затухающей и $\varphi(x, i\kappa_0) = b_0 e^{-\kappa_0 x}$, $x \rightarrow \infty$.

Вернемся теперь к потенциалу $u(x, T)$ и разобьем ось x на области

$$\xi_1 = (-\infty, x_1), \quad \xi_2 = (x_1, x_2), \quad \dots \\ \dots, \quad \xi_N = (x_{N-1}, x_N), \quad \xi_{N+1} = (x_N, \infty).$$

В области ξ_1 функция $\varphi(x, i\kappa)$ имеет вид $e^{\kappa x}$. При прохождении через первый солитон, т. е. в ξ_2 вид $\varphi(x, i\kappa)$

сохраняется; φ приобретает лишь множитель $a(\kappa, \kappa_1)$ (если $\kappa \neq \kappa_1$); $\varphi(x, i\kappa) = a(\kappa, \kappa_1)e^{\kappa x}$. Теперь перед нами второй солитон и та же самая задача, т. е. в ξ_3 $\varphi(x, i\kappa)$ есть $a(\kappa, \kappa_1) \cdot a(\kappa, \kappa_2) \cdot e^{\kappa x}$, если $\kappa \neq \kappa_1, \kappa_2$. Продолжая этот процесс до конца, найдем, что если κ не совпадает ни с каким из κ_i , то при $x \rightarrow +\infty$ (т. е. в ξ_{N+1}) асимптотика $\varphi(x, i\kappa)$ есть

$$\varphi(x, i\kappa) = \prod_{n=1}^N a(\kappa, \kappa_n) e^{\kappa x}.$$

Таким образом, в потенциале $u(x, T)$ не может быть связанных состояний с энергиями, отличными от $-\kappa_n^2$ (опять-таки с экспоненциальной по $|T|$ точностью).

Пусть теперь $\kappa = \kappa_k$, $1 \leq k \leq N$. Поступая как и выше, найдем, что в области ξ_k функция $\varphi(x, i\kappa_k)$ имеет вид

$$\varphi(x, i\kappa_k) = \prod_{n=1}^{k-1} a(\kappa_k, \kappa_n) e^{\kappa_k x}. \text{ Однако для } k\text{-го солитона } e^{\kappa_k x}$$

представляет собой асимптотику собственной функции слева от него, так что в ξ_{k+1} растущая экспонента сменяется убывающей:

$$\varphi(x, i\kappa_k) = b^{(k)}(T) \prod_{n=1}^{k-1} a(\kappa_k, \kappa_n) e^{-\kappa_k x}, \quad x \in \xi_{k+1}, \quad (9)$$

где $b^{(k)}(T)$ связано с координатой k -го солитона формулой

$$x_k = \frac{1}{2\kappa_k} \ln b^{(k)}(T) = 4\kappa_k^2 T + \varphi_k \quad (10)$$

(см. (6), (7)). Продолжить решение (9) за $(k-1)$ -й солитон мы уже не можем, ввиду некорректности такой задачи; вместо этого изучим поведение решения, имеющего асимптотику $e^{-\kappa_k x}$, $x \rightarrow +\infty$, т. е. решения $\psi(x, -i\kappa_k)$. Как и для функции $\varphi(x, i\kappa)$, мы можем заметить, что при прохождении справа налево через n -й солитон $\psi(x, -i\kappa)$ приобретает всего лишь множитель $a(\kappa, \kappa_n)$. Таким образом, в области ξ_{k+1}

$$\psi(x, -i\kappa_k) = \prod_{n=k+1}^N a(\kappa_k, \kappa_n) e^{-\kappa_k x}. \quad (11)$$

Сравнивая (11) и (9), находим, что

$$\varphi(x, i\kappa_k) = b^{(k)}(T) \prod_{n=1}^{k-1} a(\kappa_k, \kappa_n) \prod_{n=k+1}^N a^{-1}(\kappa_k, \kappa_n) \psi(x, -i\kappa_k). \quad (12)$$

Таким образом, $-\kappa_n^2$, $k = 1, 2, \dots, N$, суть собственные значения оператора Шредингера с потенциалом $u(x, T)$. Рассмотрим теперь $u(x, T)$, $T \rightarrow -\infty$ в качестве начального условия для уравнения КдФ, т. е. рассмотрим задачу о столкновении солитонов со скоростями $v_n = 4\kappa_n^2$ и фазами φ_n , $n = 1, \dots, N$. Данные рассеяния для такого начального условия мы считали: $r(k) = 0$, собственные значения $-\kappa_n^2$, а соответствующие нормировочные множители $\varphi(x, i\kappa_n) \cdot \psi^{-1}(x, -i\kappa_n)$ даются формулами (12), (10). Эти данные относятся к моменту времени $t = T$. Отнесем их теперь к моменту $t = 0$. Тем самым мы укажем, какое именно из семейства решений (4), (5) отвечает задаче столкновения данных при $t \rightarrow -\infty$ солитонов. Достаточно, очевидно, подсчитать $b_k(0)$:

$$b_k(0) = e^{2\kappa_k \varphi_k} \prod_{n=1}^{k-1} \frac{\kappa_k - \kappa_n}{\kappa_k + \kappa_n} \prod_{n=k+1}^N \frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n}. \quad (13)$$

Эта формула задает взаимно-однозначное соответствие между φ_k и $b_k(0)$, удовлетворяющими условию (1.10) $(-1)^{n-1} b_n > 0$.

Итак, любое из решений (5) описывает столкновение N солитонов. Эти решения называются N -солитонными. Каков результат столкновения, т. е. какова асимптотика N -солитонного решения при $t \rightarrow +\infty$?

Совершенно очевидно, что в результате столкновения мы снова получим набор солитонов с теми же самыми скоростями (и амплитудами), что и до столкновения. Это следует из того, что скорости равны $v_n = 4\kappa_n^2$ и из инвариантности КдФ относительно замены $t \rightarrow -t$, $x \rightarrow -x$. Могут измениться, таким образом, лишь фазы солитонов φ_n . Это изменение проще всего найти, воспользовавшись указанной инвариантностью и формулой (13). При замене $x \rightarrow -x$ изменится порядок расположения солитонов на оси x ; поэтому для того, чтобы связать фазы φ_k^+ образу-

щихся при $t \rightarrow +\infty$ солитонов с $b_k(0)$, достаточно поменять местами символы $\prod$ в (13):

$$b_k(0) = e^{2\kappa_k \varphi_k^+} \prod_{n=k+1}^N \frac{\kappa_k - \kappa_n}{\kappa_k + \kappa_n} \prod_{n=1}^{k-1} \frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n}. \quad (14)$$

Снабдим фазы солитонов на $-\infty$ по времени значком «минус». Формулы (13), (14) дают

$$\varphi_k^+ - \varphi_k^- = \frac{1}{2\kappa_k} \sum_{n=k+1}^N \ln \left(\frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n} \right)^2 - \frac{1}{2\kappa_k} \sum_{n=1}^{k-1} \ln \left(\frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n} \right)^2. \quad (15)$$

(Напомним, что солитоны занумерованы в порядке убывания их скоростей, так что самый быстрый солитон имеет первый номер, номер самого медленного — N .)

Рассмотрим подробнее столкновение двух солитонов. В этом случае

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \frac{1}{\kappa_1} \ln \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right|, \quad \varphi_2^+ - \varphi_2^- = \frac{-1}{\kappa_2} \ln \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right|,$$

т. е. быстрый солитон получает в результате столкновения дополнительный сдвиг вперед на величину $\Delta\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-$, а медленный — назад. Наиболее интенсивно взаимодействуют солитоны с близкими скоростями. Если $\Delta\kappa = \kappa_1 - \kappa_2 \ll \kappa$, то

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{2\kappa}{\Delta\kappa} \quad (16)$$

и неограниченно возрастает при $\Delta\kappa \rightarrow 0$. Логарифмическую зависимость сдвигов солитонов от расстояния между уровнями при $\Delta\kappa/\kappa \ll 1$ нетрудно понять. Из анализа явной формулы (5) двухсолитонного решения (которая хотя и весьма громоздка, но все же обозрима) можно увидеть, что при малой разности скоростей солитонов качественная картина решения такова. Решение $u(x, t)$ в любой момент времени имеет два ярко выраженных минимума, причем расстояние между ними много больше их характерных размеров. При достаточно больших по модулю отрицательных t каждый из этих минимумов движется с постоянной скоростью, и быстрый солитон приближается к медленному. По мере его приближения амплитуда быстрого минимума уменьшается, а медленного —

увеличивается. Соответственно скорость первого уменьшается, а второго — возрастает. В момент максимального сближения минимумов амплитуды их совпадают. Дальнейшее развитие событий происходит в том же направлении: амплитуда первоначально меньшего минимума продолжает монотонно возрастать, асимптотически приближаясь к начальной амплитуде быстрого солитона. Быстрый же солитон превращается в медленный, после чего солитоны, обменявшись скоростями и амплитудами, расходятся. При этом, очевидно, сдвиг быстрого солитона по порядку величины равен минимальному расстоянию, на которое солитоны сближаются. Это расстояние легко оценить. В момент максимального сближения амплитуды минимумов потенциала $u(x, t)$ одинаковы. Если бы второго минимума не было, в потенциальной яме первого был бы один дискретный уровень с энергией $-\kappa^2$ и наоборот. Из-за наличия двух минимумов этот уровень расщепляется на величину $\Delta\kappa \sim e^{-\kappa l}$ (интеграл перекрытия), где l — расстояние между минимумами. Отсюда, поскольку $\Delta\kappa$ нам известно, $l \sim \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\Delta\kappa}$, что приводит к формуле (16).

В заключение отметим замечательное следствие формулы (15): полный сдвиг фазы солитона равен сумме сдвигов фаз при рассеянии его на всех остальных солитонах по отдельности, т. е. многочастичные эффекты в N -солитонном решении полностью отсутствуют.

§ 4. Уравнение КдФ как гамильтонова система

В отличие от других уравнений, изучаемых в этой книге, факт гамильтоновости уравнения КдФ не является вполне очевидным и требует определенных пояснений.

Прежде всего напомним общее определение гамильтоновой системы. Гамильтонова структура в четномерном фазовом пространстве M размерности n задается скобкой Пуассона. Скобка Пуассона $\{f, g\}$ сопоставляет каждой паре функций f, g на M , $f, g: M \rightarrow R$ третью функцию $h = \{f, g\}$, $h: M \rightarrow R$. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — координаты точки $\xi \in M$, то операция $\{, \}$ по определению имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i, k=1}^n \omega^{ik}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_k}, \quad (1)$$

где ω — невырожденная матрица $n \times n$. Скобка Пуассона обязана обладать свойством антисимметричности

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (2)$$

Это означает, что матрица $\omega^{ik}(\xi)$ кососимметрична:

$$\omega^{ik}(\xi) = -\omega^{ki}(\xi). \quad (3)$$

Кроме того, скобка Пуассона должна удовлетворять тождеству Якоби

$$\{\{f, g\}h\} + \{\{h, f\}g\} + \{\{g, h\}f\} = 0, \quad (4)$$

которое эквивалентно некоторой системе уравнений на $\omega^{ik}(\xi)$, которые совпадают с первой парой уравнений Максвелла для обратной к ω матрице W : $W_{ik} = (\omega^{-1})_{ik}$,

$$W_{ik,l} + W_{li,k} + W_{kl,i} = 0. \quad (4a)$$

В математической литературе определяют дифференциальную форму, т. е. выражение $W = W_{ik} d\xi^i \wedge d\xi^k$, где $d\xi^i \wedge d\xi^k = -d\xi^k \wedge d\xi^i$. Уравнение (4a) называется «замкнутостью» формы W .

Скобка Пуассона превращает линейное пространство функций на фазовом пространстве в алгебру Ли. Выбрав какую-либо функцию $h(\xi)$ и назвав ее функцией Гамильтона, мы можем определить зависящее от параметра t отображение этой алгебры на себя $f(\xi) \rightarrow f(\xi, t)$, $f(\xi, 0) = f(\xi)$ с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dt} = \{f, h\}. \quad (5)$$

В частности, выбрав f в виде $f(\xi, t) = \prod_{i=1}^n \delta(\xi_i - \xi_i(t))$, получим для $\xi_i(t)$ уравнения

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \omega^{ik} \frac{\partial h}{\partial \xi_k} \quad (6)$$

— уравнения Гамильтона.

Всякая кососимметричная невырожденная матрица ω с помощью линейного преобразования в фазовом прост-

пространстве может быть приведена к блочному виду

$$\omega = \begin{pmatrix} J & 0 & & & \\ 0 & J & 0 & & \\ 0 & 0 & J & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & & J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначая соответствующие координаты в M посредством $\xi_{2k-1} = p_k$, $\xi_{2k} = q_k$, $k = 1, \dots, n/2$, получим из (6) уравнения

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial h}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial h}{\partial p_k},$$

т. е. уравнения Гамильтона в привычном виде. Пары переменных p_k и q_k являются канонически сопряженными. В этих переменных скобка Пуассона записывается в виде

$$\{f, g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}.$$

Переходя теперь непосредственно к уравнению КдФ, заметим, что оно может быть переписано в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} (3u^2 - u_{xx}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)}, \quad (7)$$

где функционал H есть

$$H[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x^2}{2} + u^3 \right) dx, \quad (8)$$

а символ $\delta/\delta u$ означает вариационную производную. Записывая далее $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)}$ как

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x') \frac{\delta H}{\delta u(x')} dx',$$

убеждаемся, что уравнение (7) имеет вид (6). При этом под координатами функции u (точки в фазовом пространстве) следует понимать совокупность ее значений в точках прямой x , так что x и x' играют роль индексов в формуле (6); $\omega(x, x') = -\delta'(x - x')$, т. е. ω очевидным образом кососимметрична и на функциях, убывающих при $|x| \rightarrow$

$\rightarrow \infty$, невырождена ввиду обратимости оператора $\partial/\partial x$ на таких функциях. Поскольку, далее, ω не зависит от точки u в фазовом пространстве, то скобка Пуассона

$$\{S, R\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta S}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta R}{\delta u(x)} dx \quad (9)$$

удовлетворяет тождеству Якоби (3).

Итак, уравнение КДФ является гамильтоновым. Функцией Гамильтона является функционал H (8), фазовое пространство состоит из достаточно гладких, убывающих на бесконечности функций $u(x)$, а гамильтонова структура задается скобкой (9), т. е. кососимметричным в $L_2(R)$ оператором $\partial/\partial x$.

В заключение этого параграфа отметим, что всякое уравнение вида $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}$ с трансляционно инвариантным гамильтонианом H имеет по крайней мере три интеграла движения. Первый из них очевиден — это функция Гамильтона H . Другой интеграл связан со структурой скобки Пуассона (9), т. е. с наличием в ней оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ — это $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx$. Наконец, сохранение третьего интеграла, играющего роль импульса, связано с трансляционной инвариантностью гамильтониана H . Именно, если $H[u(x+a)] - H[u(x)] = 0$ для любой функции $u(x)$, то, разлагая при $a \rightarrow 0$ функционал $H[u(x+a)]$ по a , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta H}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Замечая, что $u(x) = \frac{1}{2} \frac{\delta P}{\delta u}$, $P = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$, находим

$$\{P, H\} = 0,$$

т. е. $\dot{P} = 0$ (см. (5)).

§ 5. Полиномиальные интегралы движения

Уравнение КдФ имеет бесконечный набор интегралов движения. Это, в силу уравнений ГГКМ, функция $a(k)$, $0 < k < \infty$, которая при каждом k представляет собой однозначно определенный функционал от u . Однако эти функционалы определены неявным образом (с помощью решений уравнения Шредингера). В этом параграфе мы построим по $a(k)$ интегралы движения вида

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(l)}) dx,$$

где P — полиномы по функции $u(x)$ и ее производным. Интегралы такого типа называются локальными полиномиальными.

Решение уравнения Шредингера $\varphi(x, k)$ при достаточно больших $|k|$ можно представить в виде

$$\varphi(x, k) = \exp\left(-ikx + \int_{-\infty}^x \chi(x', k) dx'\right).$$

Если $\text{Im } k > 0$, то при $x \rightarrow \infty$ $\varphi(x, k)e^{ikx} = a(k)$. Поэтому

$$\ln a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, k) dx. \quad (1)$$

Поскольку $a(k)$ не зависит от времени при изменении потенциала $u(x)$ в силу КдФ, то выражения $\int \chi(x, k) dx$ при всех k представляют собой интегралы движения. Поскольку, далее, $\varphi(x, k)$ есть решение уравнения Шредингера, функция $\chi(x, k)$ удовлетворяет уравнению типа Рикатти

$$\chi_x + \chi^2 - u - 2ik\chi = 0 \quad (2)$$

и допускает асимптотическое разложение

$$\chi(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(x)}{(2ik)^n}. \quad (3)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2), получаем

рекуррентные соотношения для $\chi_n(x)$:

$$\chi_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} \chi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \chi_k(x) \chi_{n-k}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$\chi_1(x) = -u(x).$$

Несколько первых коэффициентов $\chi_n(x)$ имеют вид

$$\chi_2 = -u_x, \quad \chi_3 = -u_{xx} + u^2,$$

$$\chi_4 = -u_{xxx} + 2 \frac{d}{dx} u^2,$$

$$\chi_5 = -u_x^{(4)} + \frac{d^2}{dx^2} u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3.$$

Мы видим, что $\chi_2(x)$ и $\chi_4(x)$ являются полными производными. Это свойство справедливо для всех $\chi_{2n}(x)$. Действительно, полагая k в уравнении (2) вещественным, представим $\chi(x, k)$ в виде суммы действительной и мнимой частей: $\chi = \chi_R + i\chi_I$. Отделяя, далее, мнимую часть в (2), находим

$$\frac{d\chi_I}{dx} + 2\chi_R\chi_I - 2k\chi_R = 0,$$

откуда $\chi_R = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(\chi_I - k)$, т. е. $\chi_R(x)$ является полной производной; коэффициенты же $\chi_{2n}(x)$ представляют собой, очевидно, коэффициенты асимптотического разложения $\chi_R(x)$.

Обозначим

$$2I_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{2n+1}(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Ввиду (1), (3), I_n являются интегралами движения уравнения КдФ. Приведем явный вид первых четырех:

$$\begin{aligned} 2I_{-1} &= - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx, & 2I_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx, \\ 2I_1 &= - \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^2 + 2u^3) dx, \\ 2I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_{xx}^2 - 5u^2u_{xx} + 5u^4) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Первые три из I_n имеют, как было указано в предыдущем параграфе, простую интерпретацию и одинаковое для всех уравнений вида $u_l = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}$ происхождение. Сохранение I_{-1} связано со структурой скобки Пуассона, отвечающей уравнениям типа КдФ; сохранение I_0 является следствием трансляционной инвариантности КдФ, т. е. I_0 играет роль импульса, а $-I_1$ представляет собой функцию Гамильтона уравнения КдФ и имеет смысл энергии. Высшие I_n , $n \geq 2$, не допускают простой интерпретации.

Мы получили рекуррентные формулы (4), позволяющие строить полиномиальные интегралы движения I_n в терминах $u(x)$. Выразим теперь I_n непосредственно через $a(k)$. С этой целью воспользуемся формулой (1.8), которую перепишем в виде

$$\ln a(k) = \sum_{l=1}^N \ln \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l} + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')| dk'}{k' - k - i0}. \quad (7)$$

Для бесконечно гладких потенциалов $u(x)$ (а только для таких $u(x)$ и имеют смысл все I_n , $n < \infty$) коэффициент отражения $r(k)$ убывает при $|k| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $1/|k|$. Поэтому, вычисляя коэффициенты асимптотического разложения $\ln a(k)$ по степеням $1/k$, мы можем забыть про наличие в знаменателе интеграла в (7) символа $i0$. Поскольку, далее, $|a(-k)| = |a(k)|$, коэффициенты при четных степенях $1/k$ в таком разложении равны нулю. Таким образом,

$$\ln a(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+1}} \left[\frac{2(-1)^{j+1}}{2j+1} \sum_{l=1}^N \kappa_l^{2j+1} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk \right]. \quad (8)$$

Сравнивая теперь соотношения (1), (3), (8) и (5), получаем

$$2I_{j+1}[u] = \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1} \sum_{l=1}^N \kappa_l^{2j+1} + + 2^{2(j+1)} (-1)^{j+1} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk. \quad (9)$$

В частности, гамильтониан $H = -I_1$, есть

$$H = -\frac{32}{5} \sum_{l=1}^N \kappa_l^5 + \frac{32}{\pi} \int_0^{\infty} k^4 \ln |a(k)| dk. \quad (10)$$

Любопытно отметить, что вклад в энергию от переменных непрерывного спектра положителен (так как $|a(k)| \geq 1$), а дискретного — отрицателен.

§ 6. Полная интегрируемость уравнения КдФ. Высшие уравнения КдФ

Выше мы установили серию замечательных и совершенно удивительных фактов, касающихся КдФ. Оказалось, во-первых, что имеется замена переменных, состоящая в переходе от потенциала оператора Шредингера к данным рассеяния для последнего — такая, что в новых переменных КдФ, т. е. нелинейное уравнение в частных производных, распадается в бесконечный набор тривиально интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений — уравнений ГГКМ. Далее нам удалось сконструировать счетную совокупность локальных полиномиальных интегралов КдФ, смысл которых пока что совершенно неясен, за исключением, правда, трех интегралов, один из которых — гамильтониан уравнения КдФ.

Все эти факты получают естественную интерпретацию при рассмотрении КдФ как гамильтоновой системы. Именно, оказывается, что КдФ представляет собой полностью интегрируемую гамильтонову систему; замена $u(x) \rightarrow$ «данные рассеяния» является преобразованием в фазовом пространстве к переменным типа действие — угол, а каждый полином $I_j[u]$, представляющий собой интеграл КдФ, определяет, в свою очередь, вполне интегрируемую гамильтонову систему, задаваемую нелинейным уравнением в частных производных

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_j}{\delta u(x)}. \quad (1)$$

Уравнения вида (1) с $j \geq 3$ называются высшими уравнениями КдФ; они интегрируются с помощью той же замены переменных и имеют те же интегралы движения, что и КдФ.

Следует заметить, что до появления метода обратной задачи рассеяния нетривиальных примеров интегрируемых систем с большим числом степеней свободы известно не было. Существовавшие примеры сводились к линейным задачам.

Для «линейного уравнения КдФ»

$$u_t = -u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_L}{\delta u}$$

с гамильтонианом

$$H_L = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

переменные действие — угол — получаются фурье-преобразованием $u(x)$. Вводя комплексную функцию $c(p)$ ($p > 0$)

$$c(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ipx} dx$$

и используя выражение для скобки Пуассона (4.9), легко видеть, что

$$\{c(p), \bar{c}(p')\} = i\delta(p - p'), \quad \{c(p), c(p')\} = 0,$$

т. е. $c(p)$ и $\bar{c}(p)$ — канонически сопряженные переменные. Выражая через $c(p)$ гамильтониан H_L , получаем

$$H_L = \int_0^{\infty} p^3 \bar{c}(p) c(p) dp.$$

При этом полный импульс системы $P = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$ есть

$$P = -\int_0^{\infty} p \bar{c}(p) c(p) dp.$$

Уравнения движения в новых переменных имеют вид $\dot{c}(p) = \{c(p), H_1\}$ или

$$\dot{c}(p) = ip^3 c(p), \text{ т. е. } c(p, t) = c(p, 0) e^{ip^3 t}.$$

Переменные $c(p)$, $\bar{c}(p)$ являются классическими анало-

гами квантовомеханических операторов рождения и уничтожения; переменные типа действия $N(p)$ представляют собой числа заполнения состояний с импульсом p

$$N(p) = \bar{c}(p) c(p).$$

Сопряженной к $N(p)$ канонической переменной является фаза $c(p)$, $\Phi(p) = \arg c(p)$, так что

$$\begin{aligned} \{N(p), \Phi(p')\} &= -\delta(p - p'), \\ \{N(p), N(p')\} &= \{\Phi(p), \Phi(p')\} = 0. \end{aligned}$$

В переменных действие — угол гамильтониан зависит только от половины полного набора переменных — он является функцией действий

$$H_L = \int_0^\infty p^3 N(p) dp,$$

так что уравнения движения гласят

$$\dot{N}(p) = 0, \quad \dot{\Phi}(p) = p^3.$$

Перейдем теперь к непосредственной задаче этого параграфа — введению переменных действие — угол для КдФ. Прежде всего укажем канонические переменные в терминах данных рассеяния. Для этого необходимо вычислить скобки Пуассона (4.9) от всевозможных пар последних. Рассмотрим, например, $\{a(k), b(k')\}$

$$\begin{aligned} \{a(k), b(k')\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta b(k')}{\delta u(x)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta a}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta b}{\delta u} - \frac{\delta b}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta a}{\delta u} \right) dx. \quad (2) \end{aligned}$$

Для вычисления $\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)}$, $\frac{\delta b(k)}{\delta u(x)}$ воспользуемся представлением (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} &= \frac{1}{2ik} \left[\frac{\delta \varphi(y, k)}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}(y, k) - \frac{\delta \bar{\psi}(y, k)}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, k) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi(y, k) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta \bar{\psi}(y, k)}{\delta u(x)} - \bar{\psi}(y, k) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta \varphi(y, k)}{\delta u(x)} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Функция $G(x, y, k) = \frac{\delta\varphi(y, k)}{\delta u(x)}$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + u(y)G = k^2 G - \delta(x-y)\varphi(y, k), \quad (4)$$

получающемуся в результате «дифференцирования» уравнения Шредингера по $u(x)$. При этом, поскольку $\varphi(x, k)$ определена асимптотикой при $y \rightarrow -\infty$, решение $G(x, y, k)$ уравнения (4) фиксируется дополнительным условием

$$G(x, y, k) = 0 \text{ при } y < x.$$

Как решение уравнения (4) $G(x, y, k)$ является непрерывной функцией y при всех y ; однако $\partial G/\partial y$ имеет разрыв в точке $y = x$. Граничное значение $\partial G(x, y, k)/\partial y$ справа от этой точки легко находится из (4):

$$\frac{\partial G(x, y, k)}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow x+0} = \varphi(x, k). \quad (5)$$

Используем теперь то обстоятельство, что правая часть выражения (3) не зависит от y . Положим $y = x + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как значение функции $\psi(y, k)$, определенной асимптотикой при $x \rightarrow +\infty$, очевидным образом не зависит от значений потенциала в точках, лежащих левее y , то $\delta\varphi(y, k)/\delta u(x) = 0$ ($y > x$) и формула (3) приобретает вид

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2ik} \bar{\psi}(x, k) \varphi(x, k). \quad (6)$$

Совершенно аналогично находим

$$\frac{\delta b(k)}{\delta u(x)} = \frac{1}{2ik} \psi(x, k) \varphi(x, k). \quad (7)$$

Подставляя найденные выражения в (2), приходим к задаче вычисления интеграла

$$\{a(k), b(k')\} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8kk'} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\psi}(x, k) \varphi(x, k) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, k') \varphi(x, k') - \\ &\quad - \psi(x, k') \varphi(x, k') \frac{\partial}{\partial x} \bar{\psi}(x, k) \varphi(x, k)] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Подынтегральная функция в (8) является, на самом деле, полной производной. Действительно, пусть f_1, g_1, f_2, g_2 — произвольные пары решений уравнения Шредингера с k^2 , равными k_1^2, k_2^2 соответственно, т. е.

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 f_{1,2}}{dx^2} + u(x) f_{1,2} &= k_{1,2}^2 f_{1,2}, \\ -\frac{d^2 g_{1,2}}{dx^2} + u(x) g_{1,2} &= k_{1,2}^2 g_{1,2}. \end{aligned}$$

Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} f_1 g_1 \frac{d}{dx} f_2 g_2 - f_2 g_2 \frac{d}{dx} f_1 g_1 &= \\ &= \frac{1}{k_1^2 - k_2^2} \frac{d}{dx} [(f_1 f_{2x} - f_2 f_{1x})(g_1 g_{2x} - g_2 g_{1x})]. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая $f_1 = \bar{\psi}(x, k)$, $f_2 = \psi(x, k')$, $g_1 = \varphi(x, k)$, $g_2 = \varphi(x, k')$, находим из (8), (9)

$$\begin{aligned} \{a(k), b(k')\} &= \frac{1}{8kk'} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[a(k) a(k') e^{-2ik'x} - b(k) b(k') e^{2ikx} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k+k'}{k-k'} a(k) b(k') - \frac{k+k'}{k-k'} a(k') b(k) e^{2i(k-k')x} \right] - \\ &= -\frac{1}{8kk'} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-a(k) \bar{a}(k') e^{-2ik'x} + \bar{b}(k) b(k') e^{-2ikx} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k-k'}{k+k'} a(k) b(k') - \frac{k-k'}{k+k'} \bar{a}(k') \bar{b}(k) e^{-2i(k+k')x} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом мы воспользовались тем обстоятельством, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\psi(x, k) \rightarrow e^{-ikx}, \quad \varphi(x, k) \rightarrow a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx},$$

а при $x \rightarrow -\infty$

$$\varphi(x, k) \rightarrow e^{-ikx}, \quad \psi(x, k) \rightarrow \bar{a}(k)e^{-ikx} - b(k)e^{ikx}.$$

Теперь необходимо выяснить, в каком смысле следует понимать фигурирующие в (10) пределы. Для этого заметим, что при вычислении скобок Пуассона функционалов от $u(x)$ величины типа $\{a(k), b(k')\}$ всегда интегрируются по k, k' с некоторыми гладкими функциями k, k' . Поскольку $\{a(k), b(k')\}$ содержит сингулярные знаменатели, договоримся понимать такие интегралы в смысле главного значения. Используя теперь известное в теории

обобщенных функций соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P \frac{e^{ikx}}{k} = \pi i \delta(k),$$

где символ P означает главную часть, получаем из (9)

$$\{a(k), b(k')\} = \frac{1}{2} \frac{a(k) b(k')}{k^2 - k'^2} - \frac{\pi i}{4k} a(k) b(k) \delta(k - k').$$

Аналогичным образом считаются скобки Пуассона остальных пар элементов данных рассеяния. Вычислив их, нетрудно убедиться, что величины

$$n(k) = \frac{2k}{\pi} \ln |a(k)|^2, \quad \varphi_k = \arg b(k), \quad k > 0 \quad (11)$$

удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} \{n(k), n(k')\} &= \{\varphi(k), \varphi(k')\} = 0, \\ \{\varphi(k), n(k')\} &= \delta(k - k'). \end{aligned}$$

В общем случае данные рассеяния содержат также характеристики дискретного спектра. Для вычисления скобок Пуассона, содержащих эти характеристики, необходимо найти вариационные производные $\delta \kappa_n^2 / \delta u(x)$, $\delta b_n / \delta u(x)$. Выражение для первой из этих производных следует из известной формулы теории возмущений:

$$-\delta \kappa_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta u(x) f_n^2(x) dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_n^2(x) dx \right]^{-1},$$

где $f_n(x)$ — собственная функция оператора Шредингера с собственным значением $-\kappa_n^2$. Выбирая в качестве f_n функцию $\varphi(x, i\kappa_n)$ и используя выражение (1.15) для нормы этой функции, находим

$$\frac{\delta \kappa_n^2}{\delta u(x)} = -\varphi^2(x, i\kappa_n) [ia'(i\kappa_n) b_n]^{-1}. \quad (12)$$

Для вычисления $\delta b_n / \delta u(x)$ воспользуемся следующим стандартным приемом. «Обрежем» потенциал $u(x)$ на некотором конечном интервале, т. е. рассмотрим потенциал, обращающийся в нуль вне этого интервала. Для обрезанного потенциала все решения $\varphi(x, k)$, $\psi(x, k)$ могут быть

аналитически продолжены с вещественной оси в любую точку комплексной плоскости k . (Это следует из теоремы об аналитической зависимости решений уравнений от параметра.) Поэтому для финитных потенциалов

$$b_n = b(i\kappa_n)$$

и вариационная производная от b_n находится из формулы (7), в которой следует положить $k = i\kappa_n$. Вычисляя скобки Пуассона, содержащие κ_n , b_n (возникающие интегралы без труда вычисляются с помощью формулы (9)), находим, что переменные

$$N_l = \kappa_l^2, \quad \Phi_l = 2 \ln \frac{1}{|b_l|} \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

также имеют канонические перестановочные соотношения

$$\{N_l, \Phi_{l'}\} = -\delta_{ll'}, \quad \{N_l, N_{l'}\} = \{\Phi_l, \Phi_{l'}\} = 0$$

и, кроме того, коммутируют с переменными непрерывного спектра $n(k)$, $\varphi(k)$.

Совокупность канонических переменных $n(k)$, $\varphi(k)$, N_l , Φ_l , $l = 1, \dots, N$, является, очевидно, полной, поскольку данные рассеяния однозначно ими определяются:

$$\begin{aligned} r(k) &= \left[1 - e^{-\frac{\pi n(k)}{2k}}\right]^{1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ i\varphi_k + \frac{ik}{2} \int_0^\infty \frac{n(k')}{k'(k'^2 - k^2)} dk' \right\} \prod_{l=1}^N \frac{k + iN_l^{1/2}}{k - iN_l^{1/2}}, \quad (14) \\ \kappa_l &= N_l^{1/2}, \quad b_l = (-1)^{l+1} e^{-\Phi_l/2}. \end{aligned}$$

Мы выполнили первую часть нашей программы — в фазовом пространстве, состоящем из функций $u(x)$ со скобкой Пуассона (4.9), мы ввели канонические координаты $n(k)$, $\varphi(k)$, N_l , Φ_l . Мы можем, далее, используя формулы предыдущего параграфа, указать явный вид полиномиальных функционалов $I_j[u]$ в этих координатах. Формула (5.9) выглядит так:

$$2I_{j+1}[u] = \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1} \sum_{l=1}^N N_l^{\frac{2j+1}{2}} + 2^{2j} (-1)^{j+1} \int_0^\infty k^{2j-1} n(k) dk. \quad (15)$$

Поскольку все $n(k)$, N_l коммутируют между собой, то и скобки Пуассона функционалов $I_j[u]$ равны нулю:

$$\{I_j, I_{j'}\} = 0 \quad (16)$$

для любых j и j' . Это значит, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I_j}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{j'}}{\delta u} dx = 0. \quad (17)$$

Подынтегральное выражение в (17) представляет собой некоторый полином по $u(x)$ и ее производным. Равенство нулю интеграла от этого полинома при произвольном виде функции $u(x)$ означает, что $\frac{\delta I_j}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{j'}}{\delta u}$ является полной производной:

$$\frac{\delta I_j}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{j'}}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial x} F_{j,j'},$$

где $F_{j,j'}$ — также полином по $u(x)$ и ее производным. Этот факт позволяет утверждать, что построенные с помощью рекуррентных соотношений предыдущего параграфа функционалы I_j коммутируют между собой и в случае, до сих пор не рассматривавшемся, когда $u(x)$ является периодической функцией x . В частности, это означает, что КдФ и в периодическом случае имеет счетный набор интегралов движения:

$$\frac{d}{dt} I_j[u] = 0.$$

Вернемся, однако, к случаю убывания $u(x)$ на бесконечности. Рассмотрим функционал H вида

$$H = \sum_{j=1}^M c_j I_j[u], \quad M < \infty. \quad (18)$$

Мы можем объявить H функцией Гамильтона, т. е. рассмотреть уравнение в частных производных вида

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}. \quad (19)$$

Любое такое уравнение будет полностью интегрируемым, так как во введенных здесь канонических переменных H является функцией только от $n(k)$, N_l и не зависит от

угловых переменных $\varphi(k)$, Φ_i . В частности, полностью интегрируемым является и КДФ, гамильтониан которого (5.10) в новых переменных имеет вид

$$H = -\frac{32}{5} \sum_i N_i^{5/2} + 8 \int_0^\infty k^3 n(k) dk. \quad (20)$$

Уравнения движения

$$\dot{n} = 0, \quad \dot{\varphi} = 8k^3, \quad \dot{N}_i = 0, \quad \dot{\Phi}_i = -16N_i^{3/2}$$

в точности воспроизводят уравнения ГГКМ (2.3), (2.8) и тривиально интегрируются:

$$\begin{aligned} n(k, t) &= n(k, 0), \quad \varphi(k, t) = \varphi(k, 0) + 8k^3 t, \\ N_i(t) &= N_i(0), \quad \Phi_i(t) = \Phi_i(0) - 16N_i^{3/2} t. \end{aligned}$$

Таким же образом обстоит дело и с произвольным «высшим» КДФ (19) с гамильтонианом (18). Все эти уравнения сохраняют собственные значения оператора Шредингера и имеют в качестве интегралов движения функцию $a(k)$ и полиномиальные интегралы $I_j[u]$. Зависимость же угловых переменных от времени дается формулами

$$\varphi(k, t) = \varphi(k, 0) + \frac{\delta H}{\delta n} t, \quad \Phi_i(t) = \Phi_i(0) + \frac{\partial H}{\partial N_i} t.$$

При этом из (15), (18) видно, что $\delta H / \delta n$ представляет собой полином по нечетным степеням k :

$$\frac{\delta H}{\delta n(k)} = \sum_n a_n k^{2n-1} = P(k).$$

Таким образом, зависимость коэффициента отражения от времени при эволюции потенциала $u(x)$ в силу высшего КДФ (19) имеет вид

$$r(n, t) = r(k, 0) e^{iP(k)t}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор A_m степени $2m+1$ с коэффициентами, зависящими от $u(x)$ и ее производных, такой, что, во-первых, он при $u \equiv 0$ равен $\frac{1}{2} P\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и, во-вторых, удовлетворяет условию

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - u(x), A_m \right] = F(u, u_x, \dots, u^{(2m+1)}),$$

где F — оператор умножения на функцию. Такой опера-

тор A_m очевидно, существует; для него коэффициентов нетрудно получить рекуррентные формулы, позволяющие выражать эти коэффициенты через $u(x)$. Очевидно, далее, что уравнение

$$u_t = F(u, u_x, \dots, u_x^{(2m+1)}), \quad (22)$$

тождественно представимое в форме Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A_m],$$

будет в точности совпадать с уравнением (19), поскольку эволюция данных рассеяния в силу (22), по построению, имеет вид (21). Таким образом, всякое высшее КдФ имеет лаксовское представление. Этим фактом мы воспользуемся при изучении периодических решений КдФ.

§ 7. Дифференциально-разностные системы

Метод обратной задачи рассеяния может быть использован и для изучения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad -\infty < n < \infty, \quad c_n(t) > 0. \quad (1)$$

Эта система возникает, в частности, при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний в плазме. По этой причине мы будем иногда называть систему (1) «ленгмюровской цепочкой». Уравнения (1) записываются в лаксовской форме $\dot{L} = [L, A]$ с помощью пары бесконечных квадратных матриц L и A с элементами

$$L_{nm} = c_n^{1/2} \delta_{n, m+1} + c_m^{1/2} \delta_{n+1, m}, \quad (2)$$

$$A_{nm} = \frac{1}{2} [c_n^{1/2} c_{n-1}^{1/2} \delta_{n, m+2} - c_m^{1/2} c_{m-1}^{1/2} \delta_{n+2, m}], \quad (3)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера: $\delta_{nm} = 0$, если $n \neq m$ и $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$. Непосредственно вычисляя коммутатор $LA - AL$, убеждаемся, что он совпадает с dL/dt , вычисленной согласно (1).

Другим примером интегрируемой дифференциально-разностной системы является система уравнений, описывающая динамику одномерной цепочки частиц с экспонен-

циальным взаимодействием ближайших соседей:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n+1} - x_n} - e^{x_n - x_{n-1}}, \quad (4)$$

где $x_n(t)$ можно понимать как координату n -го атома в решетке. Система (4) называется цепочкой Тоды, впервые в 1970 г. рассмотревшего решетку такого типа и обнаружившего точное решение уравнений (4) — солитон, описывающее движение дислокации в решетке. Уравнения (4) тождественно переписываются в виде

$$\dot{c}_n = c_n (v_n - v_{n-1}), \quad \dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \quad (5)$$

где $v_n = \dot{x}_n$, $c_n = \exp(x_n - x_{n-1})$, $c_n > 0$.

Система (5) интегрируется с помощью следующей $L-A$ -пары:

$$L_{nm} = c_n^{1/2} \delta_{n, m+1} + c_m^{1/2} \delta_{n+1, m} + v_n \delta_{nm}, \quad (6)$$

$$A_{nm} = 1/2 (c_n^{1/2} \delta_{n, m+1} - c_m^{1/2} \delta_{n+1, m}). \quad (7)$$

Заметим, что оператор (6) отличается от оператора (2) лишь на диагональную матрицу.

Уравнение (1) представляет собой разностный аналог уравнения КдФ и в континуальном пределе переходит в последнее. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию $c(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющую уравнению (1):

$$\dot{c}(x) = c(x)[c(x+\delta) - c(x-\delta)].$$

Будем считать $0 < \delta \ll 1$, а $c(x)$ предполагать достаточное число раз дифференцируемой по x . Положим далее

$$c(x) = 1 - \delta^2 v(x),$$

где $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = v(x+\delta) - v(x-\delta) - \delta^2 v(x)[v(x+\delta) - v(x-\delta)].$$

Разложим правую часть этого уравнения в ряд по δ с точностью до членов δ^3 :

$$\dot{v} = 2\delta v_x + \frac{1}{3} \delta^3 v_{xxx} - 2\delta^3 v(x) v_x + O(\delta^5).$$

Член $2\delta v_x$ устраняется галилеевским преобразованием

$t' = t$, $x' = x - 2\delta t$; в штрихованных переменных уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t'} = \frac{1}{3} \delta^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x'^3} - 2\delta^3 v \frac{\partial v}{\partial x'} + O(\delta^5).$$

Полагая, наконец, $-\frac{\delta^3}{3} t' = \tau$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6v \frac{\partial v}{\partial x} + O(\delta^2).$$

Устремляя теперь δ к нулю, получаем уравнение КдФ.

Аналогичный предельный переход может быть осуществлен и в терминах $L - A$ -пары. Для этого рассмотрим эквивалентные представлению Лакса уравнения

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{nm} \psi_m = \lambda \psi_n, \quad \frac{d\psi_n}{dt} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm} \psi_m = 0, \quad -\infty < n < \infty, \quad (8)$$

где операторы L и A определены формулами (2), (3). Записывая (8) в виде

$$(1 - \delta^2 v(x))^{1/2} \psi(x - \delta) + (1 - \delta^2 v(x + \delta))^{1/2} \psi(x + \delta) - 2\psi(x) = (\lambda - 2)\psi(x)$$

и разлагая это соотношение по δ , получим

$$\delta^2 (\psi_{xx} - v(x)) = (\lambda - 2) \psi(x) + O(\delta^3).$$

Обозначим $\lambda - 2 = -\delta^2 k^2$. При этом

$$\psi_{xx} - v(x)\psi = -k^2 \psi + O(\delta).$$

Проводя аналогичную процедуру для второго из уравнений (8) с учетом использованных выше замен $x \rightarrow x'$, $t \rightarrow t' \rightarrow \tau$, найдем, что

$$\psi_\tau + A\psi = O(\delta),$$

где оператор A в точности совпадает с (2.5). В этом смысле континуальным пределом $L - A$ -пары (2), (3) является соответствующая пара операторов для КдФ, а оператор (2) представляет собой конечноразностный аналог оператора Штурма — Лиувилля — Шредингера. Отметим, наконец, что континуальным пределом системы (4) является уравнение нелинейной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2,$$

также интегрируемое с помощью метода обратной задачи [6].

Перейдем к изучению задачи Коши для систем (1), (4). В случае бесконечных цепочек естественными граничными условиями являются $c_n \rightarrow 1$, $|n| \rightarrow \infty$ для ленгмюровской цепочки (1) и $c_n \rightarrow 1$, $v_n \rightarrow 0$, $|n| \rightarrow \infty$ для цепочки Тоды (4). В последнем случае $c_n = 1$ эквивалентно $x_n - x_{n-1} = 0$. Если x_n — смещение n -й частицы от положения равновесия $x_n = 0$, то принятое условие означает, что на бесконечности решетка получается, вообще говоря, сдвигом из покоящейся решетки $x_n = 0$. Решая задачу Коши для исследуемых уравнений по схеме метода обратной задачи (§2), мы должны прежде всего изучить прямую и обратную задачи рассеяния для соответствующих операторов L . Эти задачи естественным образом формулируются и имеют очень много общего с теорией рассеяния для оператора Шредингера.

Уравнение на собственные функции оператора L (6) имеет вид

$$\sqrt{c_n} \psi_{n-1} + \sqrt{c_{n+1}} \psi_{n+1} + v_n \psi_n = \lambda \psi_n, \quad -\infty < n < \infty; \quad (9)$$

ψ_n мы будем считать комплексными числами. Собственные функции оператора L , ассоциированного с ленгмюровской цепочкой, удовлетворяют (9) при $v_n \equiv 0$. Мы будем считать, что коэффициенты задачи (19) удовлетворяют условиям

$$\prod_{-\infty}^{\infty} c_n^{-1/4} < \infty, \quad \left| \sum_{-\infty}^{\infty} v_n \right| < \infty. \quad (10)$$

Первое из этих условий, в терминах цепочки Тоды, означает, что сдвиги решетки на бесконечности по n конечны, второе означает, очевидно, конечность импульса. (Приведенные выражения являются, очевидно, интегралами движения системы (5).)

Задача (9) имеет вырожденный непрерывный спектр, заполняющий отрезок $-2 \leq \lambda \leq 2$; кроме того, она имеет, вообще говоря, дискретный спектр. Собственные значения дискретного спектра по модулю больше двух, соответствующие собственные функции ψ_n квадратично суммируемы. Собственные функции непрерывного спектра $\psi_n(\lambda)$ ограничены при всех n . Если λ принадлежит не-

прерывному спектру, то асимптотика ψ_n при $n \rightarrow \pm \infty$ имеет вид

$$\psi_n = c_1 z^n + c_2 z^{-n} + o(1), \quad |z| = 1, \quad \lambda = z + z^{-1}.$$

Введем специальные решения задачи (9) $\psi_n(z)$ и $\varphi_n(z)$, определенные асимптотиками

$$\begin{aligned} \psi_n(z) &= z^n + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\ \varphi_n(z) &= z^{-n} + o(1), \quad n \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Функции $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ при любом n аналитичны внутри единичного круга комплексной плоскости z . Вторая пара решений (9) $\tilde{\psi}_n(z)$, $\tilde{\varphi}_n(z)$, определенная асимптотиками

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n(z) &= z^{-n} + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \\ \tilde{\varphi}_n(z) &= z^n + o(1), \quad n \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

аналитична вне этого круга *). На единичной окружности, очевидно,

$$\tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n(z), \quad \tilde{\varphi}_n(z) = \bar{\varphi}_n(z), \quad |z| = 1.$$

Продолжая эти соотношения в комплексную плоскость, получим

$$\psi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \quad \tilde{\varphi}_n(z) = \bar{\varphi}_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{z}\right). \quad (11)$$

В плоскости z ($\lambda = z + z^{-1}$) непрерывный спектр задачи (9) представляет собой единичную окружность. При $|z| = 1$ решения $\psi_n(z)$ и $\bar{\psi}_n(z)$ линейно независимы. Поскольку, далее, число линейно независимых решений уравнения (9) не больше двух, то всякое решение (9) должно быть линейной комбинацией $\psi(z)$ и $\bar{\psi}(z)$. В частности,

$$\varphi_n(z) = \alpha(z) \bar{\psi}_n(z) + \beta(z) \psi_n(z), \quad |z| = 1. \quad (12)$$

Для любых двух решений $\psi^{(1,2)}$ уравнения (9) с одним и

*) Заметим, что как решения вещественного уравнения с асимптотиками, даваемыми вещественными функциями z введенные функции удовлетворяют соотношениям $\tilde{\varphi}_n(z) = \varphi_n(\bar{z})$, $\tilde{\psi}_n(z) = \psi_n(\bar{z})$ и т. д.

тем же λ выражение

$$W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \sqrt{c_n} (\psi_n^{(1)} \psi_{n-1}^{(2)} - \psi_{n-1}^{(1)} \psi_n^{(2)}) \quad (13)$$

не зависит от номера n . В нашей теории форма W играет роль вронскиана; в частности, если $W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = 0$, то решения $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ линейно зависимы. В описанном выше континуальном пределе W непосредственно переходит в определитель Вронского. Вычисляя вронскиан $W(\varphi(z), \psi(z))$:

$$W(\varphi, \psi) = \alpha(z) W(\bar{\psi}, \psi) \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \alpha(z) (z^{-1} - z),$$

находим

$$\alpha(z) = - \frac{W(\varphi(z), \psi(z))}{z - z^{-1}}. \quad (14a)$$

Эта формула показывает, что $\alpha(z)$ аналитична при $|z| < 1$. Вычисляя аналогичным образом $W(\varphi, \bar{\varphi})$, найдем, что

$$|\alpha(z)|^2 - |\beta(z)|^2 = 1, \quad |z| = 1. \quad (14b)$$

Точки вещественной оси z_n , $0 < |z_n| < 1$, $n = 1, 2, \dots$, ..., N , в которых $\alpha(z_n) = 0$, взаимно-однозначно соответствуют собственным значениям дискретного спектра оператора L : $\lambda_n = z_n + z_n^{-1}$, $\text{Im } z_n = 0$. В этих точках

$$\varphi_n(z_k) = b_k \psi_n(z_k), \quad \text{Im } b_k = 0, \quad (15)$$

т. е. $\varphi_n(z_k)$ — собственные функции.

Совокупность

$$s = (r(z), z_n, b_n, n = 1, 2, \dots, N),$$

где $r(z) = \beta(z)\alpha^{-1}(z)$, $|z| = 1$, по аналогии с теорией оператора Шредингера назовем данными рассеяния для оператора L . Оператор L (2) является частным случаем (6). Полагая в (9) $v_n = 0$, легко видеть, что при этом $\varphi_n(-z) = (-1)^n \varphi_n(z)$, $\psi_n(-z) = (-1)^n \psi_n(z)$ для всякого n , так что для оператора L (2)

$$\alpha(-z) = \alpha(z), \quad \beta(-z) = \beta(z), \quad |z| = 1.$$

Поэтому в терминах данных рассеяния выделение оператора (2) состоит в том, что $r(-z) = r(z)$, $|z| = 1$. Точки z_n при этом образуют множество, симметричное относительно $z = 0$; в симметричных точках нормировочные множители b_k совпадают.

Эволюция данных рассеяния во времени в силу динамики системы (5) определяется из уравнения

$$\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial t} + (A\varphi)_n = \frac{1}{2} (z - z^{-1}) \varphi_n(z),$$

в котором правая часть выбрана так, чтобы асимптотика $\varphi_n(z)$ при $n \rightarrow -\infty$ не зависела от времени; оператор A задается матрицей (7). Подставляя в это уравнение выражения (12), (15), найдем

$$\begin{aligned} r(z, t) &= r(z, 0) \exp [(z - z^{-1}) t], \\ b_n(t) &= b_n(0) \exp [(z_n - z_n^{-1}) t]. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом, разумеется, собственные значения (z_n) от времени не зависят.

Аналогичным образом находится зависимость от времени данных рассеяния, если коэффициенты оператора (2) удовлетворяют уравнениям (1):

$$\begin{aligned} r(z, t) &= r(z, 0) \exp [(z^2 - z^{-2}) t], \\ b_n(t) &= b_n(0) \exp [(z_n^2 - z_n^{-2}) t]. \end{aligned} \quad (17)$$

Переходя к обратной задаче рассеяния, введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} c_k^{-1/2} \theta_n(z), \\ \tilde{\psi}_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} c_k^{-1/2} \tilde{\chi}_n(z), \\ \psi_n(z) &= z^n \prod_{k=n+1}^{\infty} c_k^{-1/2} \chi_n(z). \end{aligned} \quad (18)$$

Ввиду (11), по-прежнему имеем

$$\tilde{\chi}_n(z) = \chi_n(z^{-1}). \quad (19)$$

Функции $\theta_n(z)$ и $\tilde{\chi}_n(z)$, аналитические соответственно внутри и вне единичного круга, удовлетворяют уравнению

$$z\theta_{n-1} + z^{-1}c_{n+1}\theta_{n+1} + v_n\theta_n = (z + z^{-1})\theta_n \quad (20)$$

(такому же уравнению удовлетворяет и $\tilde{\chi}_n$). При $z \rightarrow 0$ из

(20) следует

$$c_n = \frac{\theta_{n-1}(0)}{\theta_n(0)}; \quad (21)$$

$\tilde{\chi}_n(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение

$$\tilde{\chi}_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}^{(k)}}{z^k}.$$

Подставляя это разложение в (20), находим

$$v_n = \tilde{\chi}_n^{(1)} - \tilde{\chi}_{n-1}^{(1)}. \quad (22)$$

Перепишем теперь соотношение (12) в терминах (18):

$$\frac{\theta_n(z)}{\alpha(z)} = \tilde{\chi}_n(z) + z^{2n} r(z) \chi_n(z), \quad |z| = 1. \quad (23)$$

Повторяя соответствующие рассуждения § 1, введем в рассмотрение кусочно-аналитическую функцию $\Phi_n(z)$:

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \theta_n(z) \alpha^{-1}(z), & |z| < 1, \\ \tilde{\chi}_n(z), & |z| > 1. \end{cases}$$

Эта функция имеет простые полюсы в точках единичного круга $z_1, z_2, \dots, z_N$, в которых $\alpha(z)$ обращается в нуль. Вычет $\Phi_n(z)$ в точке z_k согласно (15), (18), (19) равен

$$\frac{z_k^{2n} b_k}{\alpha'(z_k)} \tilde{\chi}_n(z_k^{-1}).$$

На единичной окружности скачок функции $\Phi_n(z)$ есть, как видно из (23),

$$z^{2n} r(z) \chi_n(z).$$

Наконец, при $|z| \rightarrow \infty$ функция $\Phi_n(z) \rightarrow 1$.

Эти характеристики однозначно определяют $\Phi_n(z)$:

$$\Phi_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{z_k^{2n} b_k \tilde{\chi}_n(z_k^{-1})}{\alpha'(z_k)(z - z_k)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z'|=1} \frac{z'^{2n} r(z') \chi_n(z') dz'}{z' - z}. \quad (24)$$

Интегрирование в (24) по единичной окружности ведется в положительном направлении (против часовой стрелки). Формула (24) позволяет написать замкнутую систему

уравнений на функцию $\chi_n(z)$, $|z| = 1$ и величины $\tilde{\chi}_n(z_k^{-1})$, которые мы для краткости обозначим через $\Gamma_n^{(k)}$. Устремляя точку z к единичной окружности снаружи, получим из (24)

$$\tilde{\chi}_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{z_k^{2n} \Gamma_n^{(k)} b_k}{\alpha'(z_k)(z - z_k)} + \frac{1}{2} z^{2n} r(z) \chi_n(z) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z'^{2n} r(z') \chi_n(z') dz'}{z' - z}. \quad (25)$$

Полагая, далее, в (24) $z = z_k^{-1}$, получим N уравнений на $\Gamma_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$,

$$\Gamma_n^{(k)} = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{z_m^{2n} b_m \Gamma_n^{(m)}}{\alpha'(z_m)(z_k^{-1} - z_m)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} r(z) \chi_n(z) dz}{z - z_k^{-1}}. \quad (26)$$

Величины c_n , v_n определяются через решения системы (25), (26) формулами (21), (22), в которых следует положить

$$\frac{\theta_n(\theta)}{\alpha(0)} = 1 - \sum_{m=1}^N z_m^{2n-1} b_m \alpha'^{-1}(z_m) \Gamma_n^{(m)} - \frac{1}{2\pi i} \int z^{2n-1} r(z) \chi_n(z) dz, \quad (27)$$

$$\tilde{\chi}_n^{(1)} = \sum_{m=1}^N z_m^{2n} b_m \alpha'^{-1}(z_m) \Gamma_n^{(m)} + \frac{1}{2\pi i} \int z^{2n} r(z) \chi_n(z) dz.$$

Нетрудно проверить, что при указанных выше ограничениях на данные рассеяния, выделяющих оператор L (2), функция $\tilde{\chi}_n^{(1)}$ автоматически обращается в нуль, что гарантирует $v_n = 0$.

Как и для оператора Шредингера, уравнения обратной задачи (25), (26) легко решаются, когда коэффициент $r(z)$ есть тождественный нуль. В этом случае c_n , v_n определяются исключительно характеристиками дискретного спектра. При $\beta(z) = 0$ на окружности $|z| = 1$

$$|\alpha(z)|^2 = 1,$$

как это следует из (146). В этом случае $\alpha(z)$ однозначно определяется своими нулями z_i , $i = 1, 2, \dots, N$, и условием $\alpha(0) > 0$. Последнее условие не имеет отношения

к ситуации $\beta(z) = 0$ и является общим. Оно является следствием формулы

$$\alpha(0) = \prod_{-\infty}^{\infty} c_n^{-1/2} > 0,$$

вытекающей непосредственно из (14а) и (18). При $\beta = 0$

$$\alpha(z) = \text{sign}(\Pi z_i) \Pi \frac{z - z_i}{z z_i - 1}.$$

Знаки нормировочных множителей b_i должны удовлетворять условиям, вытекающим из формулы

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(z_i) = -z_i \alpha'(z_i) b_i, \quad (28)$$

следующей из тех же соображений, что и формула (1.15). В остальном b_i могут выбираться произвольно.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда $\alpha(z)$ внутри единичного круга имеет единственный нуль в точке $z = z_1 = x$. В этом случае система алгебраических уравнений (26) состоит из единственного уравнения на $\Gamma_n^{(1)} = \Gamma_n$:

$$\Gamma_n = 1 - cx^{2n} \Gamma_n,$$

где через c обозначена величина

$$c = -\frac{b}{\alpha'(x)(x^{-1} - x)},$$

которая, ввиду (28), положительна. Вычисляя с помощью (27) $\theta_n(0)$, $\chi_n^{(1)}$, находим

$$\frac{\theta_n(0)}{\alpha(0)} = 1 + (x^{-2} - 1) \frac{cx^{2n}}{1 + cx^{2n}},$$

$$\chi_n^{(1)} = -(x^{-1} - x) \frac{cx^{2n}}{1 + cx^{2n}}.$$

Введем обозначение

$$n_0 = \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)^{-1} \ln c.$$

В силу (16), n_0 является линейной функцией времени:

$$n_0(t) = n_0(0) - \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)^{-1} (x^{-1} - x)t.$$

Используя (21), найдем смещения частиц решетки $x_n(t)$:
 $x_n(t) = -\ln \theta_n(0) + \text{const} =$

$$= -\ln \left[1 + (x^{-2} - 1) \frac{x^{2(n-n_0(t))}}{1 + x^{2(n-n_0(t))}} \right]. \quad (29)$$

Таким образом, решение (29) представляет собой движущуюся с постоянной скоростью деформацию решетки, причем форма деформации не меняется во времени. Такое решение мы будем называть солитоном. Скорость солитона зависит от положения нуля $\alpha(z)$,

$$v = - \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)^{-1} (x^{-1} - x),$$

причем v положительно, если $x < 0$, и отрицательно, если $x > 0$. (Напомним, что $|x| < 1$.) Легко видеть, что $|v| > 1$.

В общем случае, когда $\alpha(z)$ имеет N нулей, а $r(z) = 0$, система уравнений обратной задачи (25), (26) сводится, как и в односолитонной ситуации, к системе N линейных алгебраических уравнений на величины $\Gamma_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$, и всегда может быть решена. Как и для КдФ, соответствующее решение уравнений (4) является N -солитонным, т. е. описывает процесс столкновения солитонов. Рассмотрение этой задачи может быть проведено точно так же, как и в теории КдФ; такими же оказываются и результаты. Скорости солитонов до и после столкновения одинаковы, изменения испытывают лишь фазы ($n_0(0)$) солитонов, причем «многочастичные» эффекты в столкновениях солитонов отсутствуют.

Столь же просто находится солитон ленгмюровской цепочки (1). В этом случае, ввиду четности, $\alpha(z)$ имеет четное число нулей внутри единичного круга, причем если $\alpha(z_i) = 0$, то и $\alpha(-z_i) = 0$. В простейшем случае ($r(z) = 0$) $\alpha(z)$ имеет два нуля, $z_1 = x > 0$, $z_2 = -x$. Обозначим

$$\frac{z_1 b_1}{\alpha'(z_1)} = -c = \frac{z_2 b_2}{\alpha'(z_2)};$$

ввиду (28) $c > 0$. Полагая $\Gamma_n^{(1)} = \Gamma_n^{(2)} = \Gamma_n$ и решая уравнение (26), находим

$$\Gamma_n = \left(1 + 2c \frac{x^{2n}}{x^{-2} - x^2} \right)^{-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Формулы (27), (21) дают решение системы (1) $c_n(t)$. При этом следует вспомнить, что ввиду (17)

$$\begin{aligned} c(t) &= c(0) \exp[(x^2 - x^{-2})t], \\ c_n(t) &= \frac{1 + 2cx^{2n-4} \Gamma_{n-1}}{1 + 2cx^{2n-2} \Gamma_n}. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, (30) представляет собой солитон, движущийся со скоростью

$$v = -(\ln x^{-2})^{-1}(x^{-2} - x^2).$$

Очевидно, что для любого x скорость $v(x) < -1$. При $x \rightarrow 1$ решение (30), как и следовало ожидать, превращается в солитон КдФ. Многосолитонные решения лентмюровской цепочки ведут себя так же, как и N -солитонные решения КдФ.

В заключение этого параграфа докажем полную интегрируемость периодической цепочки Тоды. Такую цепочку можно представлять как систему N частиц на окружности, соединенных «пружинками». Для бесконечной системы уравнений (5) выделение такой системы эквивалентно наложению периодических условий

$$v_{n+N} = v_n, \quad c_{n+N} = c_n.$$

Задачу на собственные значения (9) также будем рассматривать в классе периодических функций, полагая $\psi_{n+N} = \psi_n$. При этом бесконечная матрица (6) редуцируется до симметричной матрицы $N \times N$, имеющей N независимых собственных значений. Эта матрица имеет вид

$$L = \begin{vmatrix} v_1 & \sqrt{c_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_2} & v_2 & \sqrt{c_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_3} & v_3 & \sqrt{c_4} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sqrt{c_{N-1}} & v_{N-1} & \sqrt{c_N} \\ \sqrt{c_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{c_N} & v_N \end{vmatrix},$$

а ее собственные значения λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\det \| L - \lambda I \| = 0,$$

где I — единичная матрица.

Покажем, что все собственные значения λ_i находятся в инволюции, т. е. скобка Пуассона любой пары λ_i, λ_j равна нулю (собственные значения L коммутируют между собой). Система (4) гамильтонова. Ее гамильтониан есть

$$H = \sum_n \frac{v_n^2}{2} + e^{x_{n+1} - x_n},$$

а v_n, x_n — канонически сопряженные переменные. В этих переменных скобка Пуассона имеет обычный вид:

$$\{S, T\} = \sum_n \frac{\partial S}{\partial x_n} \frac{\partial T}{\partial v_n} - \frac{\partial S}{\partial v_n} \frac{\partial T}{\partial x_n}.$$

В переменных c_n, v_n $\{S, T\}$ переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \{S, T\} = \sum_n c_n \left(\frac{\partial S}{\partial c_n} \frac{\partial T}{\partial v_n} - \frac{\partial S}{\partial v_n} \frac{\partial T}{\partial c_n} \right) - \\ - c_{n+1} \left(\frac{\partial S}{\partial c_{n+1}} \frac{\partial T}{\partial v_n} - \frac{\partial S}{\partial v_n} \frac{\partial T}{\partial c_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Вычислим теперь производные $\partial \lambda_i / \partial c_n, \partial \lambda / \partial v_n$. Для этого воспользуемся известной формулой теории возмущений, определяющей изменение собственных чисел оператора при малом изменении последнего:

$$\delta \lambda = \langle \psi | \delta L | \psi \rangle.$$

Здесь ψ — нормированный на единицу собственный вектор L . Имеем

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial c_n} = \frac{1}{\sqrt{c_n}} \psi_n(j) \psi_{n-1}(j), \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial v_n} = \psi_n^2(j),$$

где $\psi(j)$ — собственная функция L с $\lambda = \lambda_j$.

Заметим теперь, что для любых двух собственных функций оператора L справедливо следующее, непосредственно вытекающее из (9) соотношение:

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \psi_n(j) \psi_n(i) = \\ = W_n(\psi(j), \psi(i)) - W_{n+1}(\psi(j), \psi(i)), \end{aligned}$$

где W дается формулой (13).

Используя приведенные выражения, нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\{\lambda_i, \lambda_j\} &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \sum_{n=1}^N [W_{n+1}^2(\psi(i), \psi(j)) - W_n^2(\psi(i), \psi(j))] = \\ &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} [W_{N+1}^2(\psi(i), \psi(j)) - W_1^2(\psi(i), \psi(j))].\end{aligned}$$

Это выражение при наложении периодических граничных условий обращается в нуль, т. е.

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0.$$

Собственные значения λ_i являются, в силу представления Лакса, интегралами движения. Таким образом, мы показали, что гамильтонова система (4) с N степенями свободы имеет N независимых, коммутирующих между собой интегралов движения. В силу известной теоремы Лиувилля (см., например, [20]) это означает полную интегрируемость рассматриваемой системы.

Заметим еще, что гамильтониан цепочки Тоды выражается через след квадрата матрицы L :

$$H = \frac{1}{2} \text{Sp } L^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \lambda_n^2.$$

Согласно той же теореме Лиувилля, величины λ_i могут быть выбраны в качестве канонических действий системы (4). Последняя же формула демонстрирует гамильтониан в этих переменных. Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство: тот факт, что все собственные значения L коммутируют, никак не связан с конкретным видом системы (4). Поэтому мы можем утверждать, что полностью интегрируемой является любая система вида

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial v_n}, \quad \dot{v}_n = - \frac{\partial H}{\partial x_n},$$

где гамильтониан H — произвольная функция от инвариантов матрицы L ; последние можно выбрать в виде $I_n(x, v) = \text{Sp } L^n$, так что $H = f(I_1, I_2, \dots, I_N)$ и I_n , $n = 1, \dots, N$, являются каноническими действиями.

§ 8. Нелинейное уравнение Шредингера и уравнение sin-Gordon

Развитая в первых параграфах этой главы теория уравнения КдФ опиралась на представление Лакса $\dot{L} = [L, A]$ уравнения КдФ. Сейчас мы укажем другое коммутационное представление этого уравнения, отправляясь от которого мы увидим возможности обобщения надлежащим образом модифицированной теории на другие эволюционные уравнения.

При интегрировании КдФ фундаментальную роль играло обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка — уравнение Шредингера

$$\psi_{xx} = u\psi = -k^2\psi. \quad (1)$$

Было отмечено, что если потенциал в этом уравнении меняется во времени согласно КдФ, то ψ удовлетворяет еще одному линейному уравнению, а именно

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi. \quad (2)$$

Эти два дифференциальных уравнения на ψ являются, вообще говоря, переопределенными. Условие совместности этих уравнений при всех k^2 является условием на потенциал $u(x, t)$ и есть не что иное, как требование, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяло КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы убедиться в том, что (3) представляет собой условие совместности (1) и (2), удобно поступить следующим образом. Перейдем от уравнения второго порядка (1) к системе двух уравнений первого порядка, вводя новую неизвестную функцию ψ_1 , так что

$$\psi_x = ik\psi + \psi_1. \quad (4)$$

Тогда из (1) имеем

$$\psi_{1x} = -ik\psi_1 + u\psi. \quad (5)$$

Система (4), (5) очевидно тождественна (1). С помощью (4), (5) можно исключить все производные по x из уравнения (2), в результате чего получим

$$\psi_t = 4ik^3\psi + 4k^2\psi_1 + 2iku\psi - u_x\psi_1 + 2u\psi_1. \quad (6)$$

Из этого уравнения, используя (4) и (5), можно получить аналогичное уравнение для ψ_1 :

$$\psi_{1t} = -4ik^3\psi_1 + 4k^2u\psi + 2iku_x\psi - \\ - 2iku\psi_1 + (2u^2 - u_{xx})\psi + u_x\psi_1. \quad (7)$$

Формируя из ψ и ψ_1 столбец $\begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \varphi$, системы уравнений (4), (5) и (6), (7) можно записать в компактной форме

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \quad (8)$$

$$\varphi_t = V(\lambda)\varphi \quad (9)$$

с помощью матриц U и V , зависящих от параметра λ :

$$U(\lambda) = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \\ V(\lambda) = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ u_x & -u \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -u_x & 2u \\ 2u^2 - u_{xx} & u_x \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрицы U , V зависят от x , t через посредство функции $u(x, t)$.

Система уравнений (8), (9) на вектор φ является переопределенной. Дифференцируя (8) по t , (9) по x и приравнивая ответы, получим условие совместности (8), (9):

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0. \quad (11)$$

Матрицы U и V зависят от произвольного комплексного параметра λ (в рассматриваемом случае U , V — полиномы по λ). Поэтому левая часть (11) также представляет собой полином по λ . Поскольку (11) должны выполняться при всех λ , коэффициенты этого полинома должны быть равны нулю. Подставляя (10) в (11), находим, что указанная структура (10) матриц U и V обеспечивает обращение в нуль всех коэффициентов этого полинома, за исключением свободного члена, и левая часть (11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t - 6uu_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}.$$

Требование равенства нулю этой матрицы означает, что $u(x, t)$ удовлетворяет КдФ. Таким образом, (11) представ-

ляет собой новое коммутационное представление КдФ, которое играет большую роль в теории периодических решений — см. § 3 гл. II, где $U = Q$, $V = \Lambda$.

Коммутационное представление (11) КдФ подсказывает путь обобщения теории КдФ на другие эволюционные уравнения: интегрируемое уравнение должно представляться условием совместности уравнений (8), (9) с матрицами U и V , зависящими рациональным образом от спектрального параметра λ и содержащими в качестве коэффициентов решения рассматриваемого уравнения. Изучение возникающей при этом конструкции в случае произвольной матричной размерности U , V и общей зависимости U от λ мы отложим до гл. III. Здесь же мы ограничимся случаем, когда U , V являются матрицами 2×2 и U — линейная функция λ . Этот случай, как видно из (10), представляет собой естественное (и минимальное) обобщение КдФ и требует лишь незначительной модификации теории. Будем считать, что $U(x, t; \lambda)$ имеет вид

$$U = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где q , r — вообще говоря, комплекснозначные функции x , t . Матрицы же $V(\lambda)$ будем подбирать из условия, чтобы (11) сводилось к некоторым уравнениям в частных производных для q , r . Уже такое минимальное обобщение оказывается весьма содержательным.

Выбирая V в виде

$$V = 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -r_x & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} r_q & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix}, \quad (13)$$

убеждаемся, что (11) эквивалентно системе уравнений

$$ir_t + r_{xx} + 2qr^2 = 0,$$

$$iq_t - q_{xx} - 2rq^2 = 0.$$

Полагая $r = \bar{q}$ или $r = -\bar{q}$, получаем

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0 \quad (r = \bar{q}), \quad (14a)$$

$$ir_t + r_{xx} - 2|r|^2 r = 0 \quad (r = -\bar{q}). \quad (14b)$$

Уравнения (14) будем называть нелинейными уравнениями Шредингера.

Выбрав в качестве V матрицу

$$V = -4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4i\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} qr & -iq_x \\ ir_x & -qr \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} qr_x - rq_x & iq_{xx} + 2iq^2r \\ ir_{xx} + 2ir^2q & -qr_x + rq_x \end{pmatrix}, \quad (15)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} q_t + q_{xxx} + 6rq q_x &= 0, \\ r_t + r_{xxx} + 6qrr_x &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Будем считать q и r вещественными. Частным случаем (16) с $r = -1$ является уравнение КдФ. Полагая же $r = q$ или $r = -q$, получаем

$$r_t + r_{xxx} + 6r^2r_x = 0 \quad (r = q), \quad (17a)$$

$$r_t + r_{xxx} - 6r^2r_x = 0 \quad (r = -q) \quad (17b)$$

— так называемые модифицированные КдФ (МКдФ) или КдФ с кубической нелинейностью. Если $q = -1 + \alpha r$, то

$$r_t + r_{xxx} - 6rr_x + 6\alpha r^2r_x = 0.$$

Таким образом, это уравнение также попадает под действие метода обратной задачи.

Положим теперь $r = q = u_x/2$ и рассмотрим матрицу

$$V = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Для u получим из (11)

$$u_{xt} = \sin u \quad (r = q = u_x/2) \quad (19a)$$

— уравнение sin-Gordon.

Полагая же $r = -q = -u_x/2$ и

$$V = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & -i \operatorname{sh} u \\ -i \operatorname{sh} u & -\operatorname{ch} u \end{pmatrix},$$

находим

$$u_{xt} = \operatorname{sh} u \quad (19b)$$

— уравнение sh-Gordon.

Все перечисленные уравнения связаны с задачей (8), в которой матрица $U(\lambda)$ имеет вид (12). Поэтому нашей бли-

жайшей задачей является изучение связанных с системой уравнений (8) прямой и обратной задач рассеяния и вычисление зависимости от времени соответствующим образом определенных данных рассеяния. Все это мы сделаем в следующем параграфе.

§ 9. Обратная задача рассеяния для системы двух дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений на комплексные функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$

$$\begin{aligned}\psi_x^{(1)} &= i\lambda\psi^{(1)} + iq(x)\psi^{(2)}, \\ \psi_x^{(2)} &= -i\lambda\psi^{(2)} + ir(x)\psi^{(1)}.\end{aligned}\quad (1)$$

От комплексных функций $r(x), q(x)$ потребуем, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx < \infty. \quad (2)$$

При каждом вещественном λ система (1) имеет два линейно независимых решения. Как и при изучении обратной задачи для оператора Шредингера (§ 1), мы рассмотрим в пространстве решений два базиса. Один из них будет состоять из пары функций, определенных асимптотиками при $x \rightarrow +\infty$, другой — при $x \rightarrow -\infty$.

Итак, пусть $\psi_1(x, \lambda), \psi_2(x, \lambda)$ — решения (1), определяемые с помощью асимптотического условия

$$\begin{aligned}\psi_1(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} + o(1), \\ \psi_2(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix} + o(1);\end{aligned}\quad x \rightarrow +\infty,$$

решения же $\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda)$ определяются асимптотиками

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_2(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix},\end{aligned}\quad x \rightarrow -\infty.$$

векторы ψ_1, ψ_2 образуют базис, так что

$$\varphi_i(x, \lambda) = \sum_{k=1,2} T_{ki}(\lambda) \psi_k(x, \lambda). \quad (3)$$

Определенную таким образом матрицу $T(\lambda)$ снова будем называть матрицей перехода; $T(\lambda)$, очевидно, унимодулярна:

$$\det T(\lambda) = 1, \quad (4)$$

поскольку определитель Вронского

$$W(\chi_1, \chi_2) = \det \begin{vmatrix} \chi_1^{(1)} & \chi_2^{(1)} \\ \chi_1^{(2)} & \chi_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

любой пары решений χ_1, χ_2 уравнения (1) с одним и тем же λ не зависит от x .

Вычисляя $W(\varphi_1, \psi_2)$, $W(\varphi_2, \psi_1)$, находим

$$\begin{aligned} T_{11}(\lambda) &= W(\varphi_1(x, \lambda), \psi_2(x, \lambda)), \\ T_{22}(\lambda) &= W(\varphi_2(x, \lambda), \psi_1(x, \lambda)). \end{aligned} \quad (5)$$

Так же, как и в § 1, мы можем показать, что решения $\psi_1(x, \lambda)$ и $\varphi_2(x, \lambda)$ допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость λ , а $\psi_2(x, \lambda)$, $\varphi_1(x, \lambda)$ аналитичны в нижней полуплоскости λ . При этом

$$\begin{aligned} \psi_1(x, \lambda) e^{-i\lambda x} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \varphi_2(x, \lambda) e^{i\lambda x} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |\lambda| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} \lambda &\geq 0; \\ \psi_2(x, \lambda) e^{i\lambda x} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \varphi_1(x, \lambda) e^{-i\lambda x} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ |\lambda| &\rightarrow \infty, & \operatorname{Im} \lambda &< 0. \end{aligned}$$

Из (5) теперь следует, что $T_{11}(\lambda)$ аналитична в нижней полуплоскости, а $T_{22}(\lambda)$ — в верхней полуплоскости, причем эти функции при $|\lambda| \rightarrow \infty$ стремятся к единице.

При комплексных значениях λ уравнения (1) могут, вообще говоря, иметь решения, убывающие (при выполнении (2) — экспоненциально) как при $x \rightarrow \infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. Такие значения спектрального параметра λ мы будем называть точками дискретного спектра. Если $\operatorname{Im} \lambda > 0$, то, как легко видеть, дискретный спектр совпадает со множеством нулей функции $T_{22}(\lambda)$, точки же дискретного спектра, лежащие в нижней полуплоскости λ , совпадают с нулями $T_{11}(\lambda)$. В точках дискретного спектра

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda_n) &= c_n \psi_2(x, \lambda_n) \quad (T_{11}(\lambda_n) = 0, \operatorname{Im} \lambda_n < 0); \\ \varphi_2(x, \lambda_n) &= b_n \psi_1(x, \lambda_n) \quad (T_{22}(\lambda_n) = 0, \operatorname{Im} \lambda_n > 0). \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, будем считать нули T_{11} и T_{22} простыми.

Установив аналитические свойства решений и описав дискретный спектр, мы могли бы немедленно получить систему уравнений обратной задачи совершенно аналогично тому, как это было сделано в § 1 или в § 7, сведя обратную задачу к задаче сопряжения аналитических функций. Именно так мы несколько ниже и поступим, ограничившись однако специальными случаями связи $r(x)$ и $q(x)$: $r = \bar{q}$ или $r = -\bar{q}$, представляющими особый интерес.

Если положить в системе (1)

$$r = \bar{q}, \quad (a)$$

то в решениях уравнений (1) возникает инволюция. Именно, если $\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix}$ — решение (1) с вещественным λ , то столбец

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6a)$$

также является решением (1) с тем же самым λ . Наличие инволюции позволяет, очевидно, зная какое-либо одно решение, найти другое решение, линейно не зависящее от первого. При редукции (a)

$$\psi_2(x, \lambda) = \tilde{\psi}_1(x, \lambda), \quad \varphi_1(x, \lambda) = -\tilde{\varphi}_2(x, \lambda).$$

При этом из (3) следует, что

$$T_{11}(\lambda) = \bar{T}_{22}(\lambda), \quad T_{12}(\lambda) = -\bar{T}_{21}(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda = 0),$$

т. е. матрица T имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda) & b(\lambda) \\ -\bar{b}(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ввиду (4)

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1. \quad (7a)$$

Если же в системе (1)

$$r(x) = -\bar{q}(x), \quad (6)$$

то вместе с $\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix}$ решением (1) является и столбец

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}^{(2)} \\ \overline{\psi}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

В этом случае $\psi_2(x, \lambda) = \tilde{\psi}_1(x, \lambda)$, $\varphi_1(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$, а матрица $T(\lambda)$ выглядит так:

$$T = \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda) & b(\lambda) \\ \bar{b}(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix},$$

так что

$$|a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2 = 1. \quad (76)$$

Обозначим теперь $\varphi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda)$. При любой из редукций (а), (б) имеем из (3)

$$\varphi(x, \lambda) = a(\lambda) \tilde{\psi}(x, \lambda) + b(\lambda) \psi(x, \lambda),$$

так что

$$a(\lambda) = W(\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)). \quad (8)$$

Функции $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$, $a(\lambda)$ аналитичны в верхней полуплоскости λ . В нулях $a(\lambda)$

$$\varphi(x, \lambda_n) = b_n \psi(x, \lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Заметим, однако, что при редукции (б) задача (1) является самосопряженной; поэтому в этом случае дискретный спектр отсутствует.

Переходя к обратной задаче, рассмотрим функцию

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\varphi(x, \lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda x}, & \text{Im } \lambda > 0, \\ \tilde{\psi}(x, \bar{\lambda}) e^{i\lambda x}, & \text{Im } \lambda < 0. \end{cases}$$

Ввиду (8), (9) $\Phi(x, \lambda)$ имеет представление в виде

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n \psi(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x}}{a'(\lambda_n) (\lambda - \lambda_n)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda') \psi(x, \lambda') e^{i\lambda' x} d\lambda'}{\lambda' - \lambda}, \quad (10)$$

где через $r(\lambda)$ обозначен «коэффициент отражения» $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$. Поступая так же, как

и в §§ 1, 7, извлекаем из представления (10) замкнутую систему уравнений на $\psi(x, \lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, и $\psi(x, \lambda_n)$, $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, \lambda) e^{i\lambda x} = & \binom{0}{1} + \sum_{n=1}^N \frac{b_n \psi(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x}}{(\lambda - \lambda_n) a'(\lambda_n)} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda') \psi(x, \lambda') e^{i\lambda' x} d\lambda'}{\lambda' - \lambda + i0}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x} = & \binom{0}{1} + \sum_{m=1}^N \frac{b_m \psi(x, \lambda_m) e^{i\lambda_m x}}{(\lambda_n - \lambda_m) a'(\lambda_m)} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda) \psi(x, \lambda) e^{i\lambda x} d\lambda}{\lambda - \lambda_n}. \quad (12) \end{aligned}$$

Вместе с определением операции инволюции (а) или (б) уравнения (11), (12) представляют собой полную систему уравнений обратной задачи.

Вычисляя, далее, коэффициенты асимптотического разложения функции $\psi(x, \lambda) e^{i\lambda x}$ по степеням $1/\lambda$ из уравнений (1), найдем, что

$$\tilde{\psi}(x, \lambda) e^{i\lambda x} = \binom{0}{1} + \frac{1}{\lambda} \left(-q(x)/2 \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Определяя те же самые величины из (10), приходим к формулам

$$\begin{aligned} q(x) = & -2 \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{a'(\lambda_n)} \psi^{(1)}(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x} + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) \psi^{(1)}(x, \lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \\ \int_x^{\infty} r(x') q(x') dx' = & -2i \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{a'(\lambda_n)} \psi^{(2)}(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda) \psi^{(2)}(x, \lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (13) \end{aligned}$$

выражающим «потенциал» $q(x)$ непосредственно через решения уравнений (11), (12).

В случае уравнения sin-Gordon потенциал в уравнении (1) кроме условия (а) удовлетворяет еще одному дополнительному условию — он является вещественным:

$$q(x) = \bar{q}(x) = r(x). \quad (14)$$

При этом, как легко видеть, возникает связь между решениями системы (1) с противоположными знаками λ .

Именно, если $\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(\lambda') \\ \psi^{(2)}(\lambda') \end{pmatrix}$ — решение (1) с $\lambda = \lambda'$, то

$$\psi' = \begin{pmatrix} \psi^{(2)}(\lambda') \\ \psi^{(1)}(\lambda') \end{pmatrix}$$

есть решение (1) с $\lambda = -\lambda'$. Вместе с инволюцией (6а) последнее обстоятельство означает, что

$$\varphi^{(1)}(x, \lambda) = -\bar{\varphi}^{(1)}(x, -\bar{\lambda}),$$

$$\varphi^{(2)}(x, \lambda) = \bar{\varphi}^{(2)}(x, -\bar{\lambda}),$$

$$\psi^{(1)}(x, \lambda) = \bar{\psi}^{(1)}(x, -\bar{\lambda}),$$

$$\bar{\psi}^{(2)}(x, \bar{\lambda}) = -\psi^{(2)}(x, -\lambda).$$

При этом из (8) видно, что

$$a(\lambda) = \bar{a}(-\bar{\lambda}), \quad b(\lambda) = -\bar{b}(-\bar{\lambda}). \quad (15)$$

Первая из формул (15) означает, в частности, что нули $a(\lambda)$ расположены симметрично относительно мнимой оси; при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ $a(\lambda)$ вещественно. Вторая же из формул (15) имеет смысл, строго говоря, лишь на вещественной оси, где она дает

$$r(-\lambda) = -\bar{r}(\lambda). \quad (16)$$

Однако, если $q(x)$, $r(x)$ — финитные функции, решения $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ являются целыми функциями λ и $b(\lambda)$ может быть определено во всей комплексной плоскости. При этом, если λ_n является нулем $a(\lambda)$, то нормировочный множитель b_n , определенный формулой (9), есть

$$b_n = b(\lambda_n).$$

Таким образом, (15) означает, что если λ_n лежит на мни-

мой оси, то $\operatorname{Re} b_n = 0$. Если же $\lambda_n = -\bar{\lambda}_m$, то из (15) следует, что $b_n = -\bar{b}_m$.

Уравнения обратной задачи показывают, что потенциал в уравнении (1) однозначно определяется совокупностью

$$s = (\lambda_n, b_n, n = 1, \dots, N, \operatorname{Im} \lambda_n > 0; \\ r(\lambda), -\infty < \lambda < \infty),$$

которую назовем данными рассеяния для уравнений (1). Отображение $q(x) \rightarrow s$ в силу (11), (12) однозначно обратимо.

Найдем зависимость данных рассеяния от времени, если $q(x)$ удовлетворяет какому-либо из перечисленных в предыдущем параграфе уравнений. Заметим прежде всего, что при приведенные выше матрицы $V(\lambda)$ определены с точностью до матрицы, пропорциональной единичной. Эту добавку к $V(\lambda)$ мы каждый раз будем выбирать таким образом, чтобы асимптотика $\phi(x, \lambda)$ при $x \rightarrow -\infty$ не зависела от времени (напомним, что зависимость ϕ от t дается уравнением (8.9)). Для нелинейного уравнения Шредингера (8.14) это условие означает, что к матрице $V(\lambda)$ (8.13) следует добавить $2i\lambda^2$; устремляя затем x к $+\infty$, подставляя вместо $\phi(x, \lambda)$ ее асимптотическое выражение, следующее из (8), и полагая $r, q = 0$, находим из (8.9)

$$\dot{a}(\lambda) = 0, \quad \dot{b}(\lambda) = 4i\lambda^2 b(\lambda),$$

т. е.

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) \exp(4i\lambda^2 t). \quad (17)$$

Собственные значения λ_n , являясь нулями не зависящей от времени функции $a(\lambda)$, также не зависят от времени. Зависимость же от t множителей b_n может быть найдена либо путем продолжения (17) в комплексную плоскость, либо же непосредственно из (8.9), (9):

$$b_n(t) = b_n(0) \exp(4i\lambda_n^2 t). \quad (18)$$

Отметим, что зависимость данных рассеяния от времени для уравнений (8.14а), (8.14б) одна и та же. При этом, разумеется, следует помнить, что операция инволюции для этих задач устроена по-разному; это обстоятельство, в частности, приводит к тому, что для уравнения (8.14б) $r(\lambda)$,

ввиду (7б), по модулю не превосходит единицы:

$$|r(\lambda)| < 1.$$

Кроме того, данные рассеяния для (8.14б) не содержат характеристик дискретного спектра, ввиду отсутствия последнего при редукции (б). Все сказанное, очевидно, относится в равной степени ко всем эволюционным уравнениям предыдущего параграфа, номер которых содержит букву б.

Совершенно аналогично находится зависимость данных рассеяния от времени для уравнений МКдФ (8.17):

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) \exp(-8i\lambda^3 t), \\ \dot{\lambda}_n = 0, \quad b_n(t) = b_n(0) \exp(-8i\lambda_n^3 t). \quad (19)$$

Для уравнения sin-Gordon (8.19а) естественным граничным условием при $|x| \rightarrow \infty$ является

$$u(x) \rightarrow 0 \pmod{2\pi}.$$

Поэтому эволюция данных рассеяния в силу (8.19а) имеет вид

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) \exp\left(-\frac{1}{2\lambda} t\right), \\ \dot{\lambda}_n = 0, \quad b_n(t) = b_n(0) \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_n} t\right). \quad (20)$$

Этими же формулами дается зависимость данных рассеяния от времени и для уравнения (8.19б). При этом, естественно, следует полагать $u \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

§ 10. Нелинейное уравнение Шредингера

В этом параграфе мы подробно изучим решения нелинейного уравнения Шредингера (8.14а)

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0 \quad (1)$$

с быстроубывающими начальными условиями

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(x, 0)| dx < \infty.$$

Прежде всего опишем семейство точных решений (1) — N -солитонные решения. Как и в теории КдФ, им отве-

чают «безотражательные потенциалы», для которых $r(\lambda) = 0$ при всех λ . Обращение в нуль коэффициента отражения означает, что

$$|a(\lambda)|^2 = 1 \quad (\text{Im } \lambda = 0)$$

и аналитическая в верхней полуплоскости λ функция $a(\lambda)$ полностью определяется своими нулями $\lambda_1 \dots \lambda_N$ ($\text{Im } \lambda_i > 0$):

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^N \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \bar{\lambda}_n}.$$

При этом система уравнений обратной задачи (9.11), (9.12) превращается в систему линейных алгебраических уравнений на функции $\psi(x, \lambda_n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, \lambda_n) e^{i\bar{\lambda}_n x} = \\ = \binom{0}{1} + \sum_{m=1}^N \frac{c_m \psi(x, \lambda_m) e^{i\lambda_m x}}{\lambda_n - \lambda_m}, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

где через c_n обозначены величины $c_n = b_n/a'(\lambda_n)$. Применяя к уравнениям (2) операцию эволюции и учитывая, что $\tilde{\tilde{\psi}} = -\psi$, найдем

$$\psi(x, \lambda_n) e^{-i\lambda_n x} \approx \binom{1}{0} + \sum_{m=1}^N \frac{\bar{c}_m \tilde{\psi}(x, \lambda_m) e^{-i\bar{\lambda}_m x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n}. \quad (3)$$

Подставляя, далее, (2) в (3), получим замкнутую систему уравнений на $\psi(x, \lambda_n)$; обозначая $\psi(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n x} = \chi_n(x)$, получим

$$\begin{aligned} \chi_n(x) = \binom{1}{0} e^{2i\lambda_n x} + \binom{0}{1} \sum_{m=1}^N \frac{\bar{c}_m e^{2i(\lambda_n - \bar{\lambda}_m)x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} - \\ - \sum_{k, m} \frac{\bar{c}_m e^{2i\lambda_n x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} \frac{c_k e^{-2i\bar{\lambda}_m x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_m} \chi_k(x). \end{aligned} \quad (4)$$

При этом уравнения для компонент векторов $\chi_n(x)$ независимы. Как видно из (9.13), $\chi_n^{(1,2)}(x)$ определяют $q(x)$,

$|r(x)|^2$:

$$|r(x)|^2 = 2i \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^N c_n \chi_n^{(2)}(x), \quad (5)$$

$$q(x) = -2 \sum_{n=1}^N c_n \chi_n^{(1)}(x). \quad (6)$$

Решая систему (4) и подставляя $\chi_n^{(2)}$ в (5), найдем, используя рассуждения, аналогичные приведенным в § 3, что

$$|r(x)|^2 = \frac{d^2}{dx^2} \ln \det (1 + \bar{A}A), \quad (7)$$

где квадратная $N \times N$ матрица $A(x)$ имеет вид

$$A_{nm} = \frac{c_m e^{-2i\bar{\lambda}_n x}}{\lambda_m - \bar{\lambda}_n}. \quad (8)$$

Зависимость решения (7) от времени следует из формулы (9.18), согласно которой c_m в (8) следует заменить на

$$c_m(t) = c_m(0) \exp(4i\lambda_m^2 t).$$

Простейшим представителем указанного класса решений уравнения (1) является солитон. Полагая $N = 1$ и вводя обозначения

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \xi, \quad \operatorname{Im} \lambda_1 = \eta, \quad x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln |b_1(0)|, \quad (9)$$

получим из (7)

$$|r(x, t)|^2 = \frac{4\eta^2}{\operatorname{ch}^2 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)}.$$

Находя же $\chi_n^{(1)}(x)$ и подставляя в (6), найдем непосредственно $r(x)$

$$r(x) = 2i\eta \frac{\exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)}. \quad (10)$$

Здесь

$$\varphi_0 = \arg b_1(0). \quad (11)$$

Таким образом, $\eta = \operatorname{Im} \lambda_1$ определяет амплитуду (и ширину) солитона, а $\xi = \operatorname{Re} \lambda_1$ — его скорость $v = -4\xi$.

В общем случае, если среди величин $\operatorname{Re} \lambda_n$, $n = 1, \dots, N$, нет совпадающих, решение (7), (8) асимптотически

при $t \rightarrow \pm\infty$ представляет собой сумму N солитонов (10) с амплитудами $\eta_i = \text{Im } \lambda_i$ и скоростями $v_i = -4\text{Re}\lambda_i$. Эти параметры солитонов одни и те же как при $t \rightarrow -\infty$, так и при $t \rightarrow +\infty$. Как и в теории КдФ, изменение испытывают лишь фазы солитонов x_{0i} , φ_{0i} . При подсчете изменения последних можно буквально следовать процедуре § 3. Если занумеровать солитоны в порядке возрастания их скоростей, полагая

$$\text{Re}\lambda_1 > \text{Re}\lambda_2 > \dots > \text{Re}\lambda_N,$$

то разности $\Delta x_{0i} = x_{0i}(+\infty) - x_{0i}(-\infty)$, $\Delta\varphi_0 = \varphi_{0i}(+\infty) - \varphi_{0i}(-\infty)$ даются формулами

$$\Delta x_{0i} = \frac{1}{2\eta_i} \sum_{n=i+1}^N \ln \left| \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n} \right|^2 - \frac{1}{2\eta_i} \sum_{n=1}^{i-1} \ln \left| \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n} \right|^2,$$

$$\Delta\varphi_{0i} = 2 \sum_{n=i+1}^N \arg \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n} - 2 \sum_{n=1}^{i-1} \arg \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n}.$$

Эти формулы можно интерпретировать, приняв, что солитоны попарно сталкиваются (причем каждый солитон сталкивается с каждым). При каждом парном столкновении более быстрый солитон дополнительно сдвигается вперед на величину

$$\frac{1}{2\eta_m} \ln \left| \frac{\lambda_m - \bar{\lambda}_p}{\lambda_m - \lambda_p} \right|^2, \quad \text{Re } \lambda_m < \text{Re } \lambda_p,$$

а более медленный сдвигается назад на величину

$$- \frac{1}{2\eta_p} \ln \left| \frac{\lambda_m - \bar{\lambda}_p}{\lambda_m - \lambda_p} \right|^2.$$

Полный сдвиг солитона равен алгебраической сумме его сдвигов при парных столкновениях, так что эффект многочастичных столкновений полностью отсутствует. Аналогично обстоит дело и с фазами φ_{0i} .

Скорость расхождения пары солитонов пропорциональна разности значений их параметров $\xi_i = \text{Re } \lambda_i$. При совпадающих ξ_i солитоны не расходятся, а образуют связанное состояние. Рассмотрим связанное состояние N солитонов, положив для простоты $\xi_j = 0$. Тогда $c_m(t) = c_m(0) \exp(-4i\eta_m^2 t)$. Непосредственно из общих формул

(7), (8) видно, что связанное состояние представляет собой условно периодическое решение уравнения (1), характеризующееся в общем случае N частотами $\omega_n = 4\eta_n^2$. Фактически в ответ (7) входят всевозможные разности частот, поэтому связанное состояние из двух солитонов характеризуется всего одной частотой $4(\eta_1^2 - \eta_2^2)$ и представляет собой периодическое решение уравнения (1). Следует, однако, подчеркнуть, что связанного состояния в буквальном смысле здесь нет: энергия описанного образования в точности равна сумме энергий отдельных солитонов (см. ниже), т. е. энергия связи равна нулю. Это состояние является неустойчивым, поскольку практически любое малое возмущение в начальном условии $r(x, 0)$ приводит к распаду связанного состояния на отдельные солитоны, скорости которых пропорциональны возмущению и, вообще говоря, различны.

Рассмотрим теперь в рамках уравнения (1) «большое» начальное условие, при котором число собственных значений системы (9.1)

$$\begin{aligned}\psi_x^{(1)} &= i\lambda\psi^{(1)} + i\bar{r}(x)\psi^{(2)}, \\ \psi_x^{(2)} &= -i\lambda\psi^{(2)} + ir(x)\psi^{(1)}\end{aligned}\quad (12)$$

велико. Кроме того, будем полагать начальную функцию меняющейся плавно, так что $r_x/r \ll \lambda$. Применительно к нелинейному уравнению Шредингера это означает, что рассматривается начальное условие, при котором нелинейный член много больше линейного члена r_{xx} . При этих условиях к уравнению (1) применима «нелинейная геометрическая оптика», позволяющая найти решение $r(x, t)$ методом характеристик. При этом, однако, оказывается, что гладкое решение существует только до конечных t — решение разрушается из-за образования фокусов или каустик, после чего приближение геометрической оптики становится неприемлемым.

С нашей точки зрения случай большого начального условия — это случай, когда к системе (12) можно применить квазиклассическое приближение. Выражая $\psi^{(2)}$ через $\psi^{(1)}$ с помощью первого из уравнений (12) и подставляя во второе, получим в пренебрежении $r_{xx}(x, 0)$:

$$-\psi_{xx}^{(1)} - |r(x, 0)|^2\psi^{(1)} = \lambda^2\psi^{(1)}, \quad (13)$$

т. е. уравнение Шредингера. В квазиклассическом приближении коэффициент отражения оказывается экспоненциально малым для всех не слишком малых λ^2 . Поэтому эволюцию решения с квазиклассическим начальным условием можно с экспоненциальной точностью моделировать неким N -солитонным решением. Для нахождения параметров входящих в него солитонов, отметим, что с указанной точностью собственные значения (12) ввиду (13) лежат на мнимой оси: $\lambda_n^2 < 0$; $\lambda_n = i\eta_n$. При этом η_n даются правилом квантования Бора:

$$\oint \sqrt{|r|^2 + \eta_n^2} dx = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Фактически λ_n расположены не строго на мнимой оси, а имеют малые действительные добавки, которые обеспечивают расхождение отдельных солитонов. Простая оценка дает характерное отношение действительной части к мнимой: $\xi/\eta \sim N^{-1/2}$, где N — общее число уровней,

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| dx \quad (14)$$

— в квазиклассическом пределе большая величина.

Рассмотрим теперь противоположную ситуацию и поставим вопрос: какому условию должен удовлетворять потенциал задачи (12) для того, чтобы последняя вообще не имела дискретного спектра? Ответ формулируется довольно просто: для этого достаточно выполнения неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| dx < \ln(2 + \sqrt{3}) \simeq 1,32. \quad (15)$$

Таким образом, если начальное условие $r(x, 0)$ для уравнения (1) удовлетворяет (15), то решение $r(x, t)$ не будет содержать ни одного солитона.

Для того чтобы убедиться в сделанном утверждении, рассмотрим решения $\varphi^{(1)}(x, \lambda)$, $\varphi^{(2)}(x, \lambda)$ задачи (12) с асимптотикой $\varphi^{(1)} \rightarrow 0$, $\varphi^{(2)} \rightarrow \exp(-i\lambda x)$, $x \rightarrow -\infty$. Как следует из (9.8), $\chi = \varphi^{(2)} \exp(i\lambda x) \rightarrow a(\lambda)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Функция $\chi(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^x r(x') \int_{-\infty}^{x'} \exp(2i\lambda(x' - x'')) \times \\ \times \bar{r}(x'') \chi(x'', \lambda) dx'' dx'. \quad (16)$$

Из (16) следует, что при $\text{Im } \lambda \geq 0$

$$|\chi(x, \lambda)| \leq 1 + \int_{-\infty}^x |r(x')| \int_{-\infty}^{x'} |r(x'')| |\chi(x'', \lambda)| dx'' dx'. \quad (17)$$

Итерируя полученное неравенство, найдем

$$|\chi(x, \lambda)| \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x |r(x')| dx' \right)^2 + \\ + \frac{1}{4!} \left(\int_{-\infty}^x |r(x')| dx' \right)^4 + \dots = \text{ch} \int_{-\infty}^x |r| dx'.$$

Уравнение (16) означает также, что

$$|\chi(x, \lambda) - 1| \leq \int_{-\infty}^x |r(x')| \int_{-\infty}^{x'} |r(x'')| |\chi(x'', \lambda)| dx'' dx'.$$

Подставляя в правую часть этого неравенства (17), получим

$$|\chi(x, \lambda) - 1| \leq \text{ch} \int_{-\infty}^x |r(x')| dx' - 1.$$

Таким образом, при $\text{Im } \lambda \geq 0$

$$|a(\lambda) - 1| \leq \text{ch} \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| dx - 1. \quad (18)$$

Если теперь

$$\text{ch} \int_{-\infty}^{\infty} |r(x)| dx - 1 < 1,$$

то из (18) следует $|a(\lambda)| > 0$, т. е. задача не имеет дискретного спектра. Предыдущее же неравенство эквивалентно (15), что и требовалось проверить.

Изучим теперь вопрос о структуре интегралов движения нелинейного уравнения Шредингера. Как и рассматривавшиеся ранее уравнения, интегрируемые методом обратной задачи, уравнение (1) имеет бесконечное число однозначных первых интегралов. Этими интегралами, как видно из (9.17), являются функционалы $a(\lambda) [r, \bar{r}]$ при любом λ . Из этой совокупности мы выделим счетный набор локальных полиномиальных по $r, \bar{r}$ интегралов движения уравнения (1). Как и для уравнения КдФ, мы получим их из разложения $\ln a(\lambda)$ по степеням $1/\lambda$:

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(2i\lambda)^n}. \quad (19)$$

Поскольку $a(\lambda)$ не зависит от времени для всех указанных в § 8 уравнений, функционалы $c_n[r, q]$ будут интегралами движения уравнения $\sin$ -Gordon и МКдФ. Поэтому мы вычислим $c_n[r, q]$ в общем случае системы (9.1):

$$\varphi_x^{(1)} = i\lambda\varphi^{(1)} + iq\varphi^{(2)}, \quad \varphi_x^{(2)} = -i\lambda\varphi^{(2)} + ir\varphi^{(1)}.$$

Так как $a(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(2)}(x, \lambda) e^{i\lambda x}$, где $\varphi^{(1,2)}$ — решение этой системы с асимптотикой $\varphi^{(1)} \rightarrow 0$, $\varphi^{(2)} \rightarrow e^{-i\lambda x}$ при $x \rightarrow -\infty$, положим $\varphi^{(2)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x + \Phi(x, \lambda)}$ и, исключая $\varphi^{(1)}$, получим для $\Phi(x, \lambda)$:

$$2i\lambda\Phi_x = rq + \Phi_x^2 + r \frac{d}{dx} \frac{\Phi_x}{r}. \quad (20)$$

При этом

$$\ln a(\lambda) = \Phi(\infty, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(x, \lambda) dx.$$

Подставляя, далее, разложение

$$\Phi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{(2i\lambda)^n}$$

в (20), получим рекуррентную систему для $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_{n+1} = r \frac{d}{dx} \frac{\varphi_n}{r} + \sum_{n_1+n_2=n} \varphi_{n_1}\varphi_{n_2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

причем $\varphi_1(x) = r(x) q(x)$. Искомые функционалы $c_n[r, q]$ даются интегралами

$$c_n[r, q] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx.$$

Приведем явный вид первых четырех c_n :

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} r q dx, & c_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} r q_x dx, \\ c_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (r q_{xx} + r^2 q^2) dx, & (21) \\ c_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(r q_{xxxx} + r \frac{d}{dx} r q^2 + 2r^2 q q_x \right) dx. \end{aligned}$$

Интегралы движения нелинейного уравнения Шредингера (1) получаются из $c_n[r, q]$, если в последних положить $q = \bar{r}$:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |r|^2 dx, & c_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} r \bar{r}_x dx, \\ c_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} (-|r_x|^2 + |r|^4) dx. & (22) \end{aligned}$$

Первые три из $c_n[r, \bar{r}]$ имеют простой физический смысл: c_1 имеет смысл «числа частиц», c_2 — с точностью до множителя совпадает с полным импульсом поля, а $-c_3$ представляет собой гамильтониан уравнения (1). Сохранение c_2 связано с трансляционной инвариантностью нелинейного уравнения Шредингера, c_3 — с инвариантностью относительно сдвигов во времени; c_1 сохраняется, поскольку уравнение (1) инвариантно по отношению к преобразованиям вида $r \rightarrow r e^{i\alpha}$, $\bar{r} \rightarrow \bar{r} e^{-i\alpha}$.

Уравнение (1) является гамильтоновой системой. Фазовое пространство состоит из пар функций $(r(x), \bar{r}(x))$, скобка Пуассона имеет вид

$$\{S, T\} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\delta S}{\delta r(x)} \frac{\delta T}{\delta \bar{r}(x)} - \frac{\delta S}{\delta \bar{r}(x)} \frac{\delta T}{\delta r(x)} \right), \quad (23)$$

так что (1) записывается следующим образом:

$$\dot{r} = \{r, H\} = -i \frac{\delta H}{\delta \bar{r}}, \quad (24)$$

где $H = -c_3$. При этом при дифференцировании функции r и $\bar{r}$ следует считать независимыми.

Как гамильтонова система нелинейное уравнение Шредингера является полностью интегрируемым. Переменные действие — угол просто выражаются через данные рассеяния. Соответствующие вычисления мало чем отличаются от приведенных в § 6, поэтому детали выкладок мы опускаем.

Прежде всего необходимо найти производные от элементов матрицы перехода по $r(x)$, $\bar{r}(x)$. Это нетрудно сделать, воспользовавшись представлением (9.8) для $a(\lambda)$:

$$a(\lambda) = W(\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)),$$

и аналогичным выражением для $b(\lambda)$:

$$b(\lambda) = W(\varphi(x, \lambda), \tilde{\psi}(x, \lambda)).$$

Вычисляя теперь вариационные производные $\delta a(y, \lambda)/\delta r(x)$, $\delta a(y, \lambda)/\delta \bar{r}(x)$ и т. д., находим, что

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta r(x)} = i\psi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda);$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta r(x)} = -i\varphi^{(1)}(x, \lambda)\tilde{\psi}^{(1)}(x, \lambda),$$

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \bar{r}(x)} = -i\psi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda);$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta \bar{r}(x)} = i\varphi^{(2)}(x, \lambda)\tilde{\psi}^{(2)}(x, \lambda).$$

Теперь можно найти скобки Пуассона между элементами матрицы перехода. Так, например,

$$\begin{aligned} \{a(\lambda), b(\lambda')\} = & -i \int_{-\infty}^{\infty} dx [\psi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda') \times \\ & \times \tilde{\psi}^{(2)}(x, \lambda') - \psi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda')\tilde{\psi}^{(1)}(x, \lambda')]. \end{aligned}$$

Как и в § 6, подынтегральное выражение является полной производной, поскольку имеет место непосредственно про-

веряемое соотношение

$$\begin{aligned} & \varphi^{(1)}(x, \lambda) \psi^{(1)}(x, \lambda) \varphi^{(2)}(x, \lambda') \tilde{\psi}^{(2)}(x, \lambda') - \\ & \quad - \psi^{(2)}(x, \lambda) \varphi^{(2)}(x, \lambda) \varphi^{(1)}(x, \lambda') \tilde{\psi}^{(1)}(x, \lambda') = \\ & = \frac{1}{2i(\lambda - \lambda')} \frac{d}{dx} [W(\varphi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda')) W(\psi(x, \lambda), \tilde{\psi}(x, \lambda'))]. \end{aligned}$$

Выражая, далее, асимптотики φ и ψ через данные рассеяния, приходим к формуле

$$\{a(\lambda), b(\lambda')\} = \frac{a(\lambda)b(\lambda')}{2(\lambda - \lambda')} - \frac{\pi i}{2} a(\lambda)b(\lambda)\delta(\lambda - \lambda').$$

Вычисляя таким образом скобки между всевозможными парами элементов матрицы перехода, нетрудно найти, что переменные

$$n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|a(\lambda)|^2}, \quad \varphi(\lambda) = \arg b(\lambda) \quad (25)$$

являются канонически сопряженными. Так же можно найти, что дискретному спектру отвечает дополнительный набор канонически сопряженных переменных

$$N_k = 2\lambda_k, \quad \Phi_k = \ln \frac{1}{b_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Эти переменные комплексные.

Восстанавливая далее $\ln a(\lambda)$ по $n(\lambda)$, N_k , находим, что

$$c_m[r, \bar{r}] = \sum_k \frac{i^m}{m} (\bar{N}_k^m - N_k^m) + (2i)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{m-1} n(\lambda) d\lambda. \quad (27)$$

В частности, функция Гамильтона нелинейного уравнения Шредингера представляется в виде

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} (|r_x|^2 - |r|^4) dx = \sum_k \frac{i}{3} (\bar{N}_k^3 - N_k^3) + 4 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 n(\lambda) d\lambda, \quad (28)$$

т. е. уравнение (1) является полностью интегрируемым. Вместе с нелинейным уравнением Шредингера полностью интегрируемым будет любое уравнение вида (24), гамильтониан которого является функцией только $c_n[r, \bar{r}]$. Взяв,

например, в качестве H функционал $c_4[r, \bar{r}]$, получим уравнение

$$ir_t + r_{xxx} + 6|r|^2 r_x = 0$$

— комплексный вариант МКдФ. Собственно МКдФ (8.17а) представляется в виде

$$r_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta r},$$

где $H = -c_3/2$ при $r = q$, и также является полностью интегрируемым. Последнее утверждение требует специального доказательства, чего мы, однако, делать не будем. Отметим еще, также без доказательства, что полностью интегрируемой является любая система вида

$$\dot{r} = \frac{\delta H}{\delta q}, \quad \dot{q} = -\frac{\delta H}{\delta r} \quad (29)$$

с гамильтонианом H , функционально порожденным интегралами $c_n[r, q]$. Например, система уравнений (8.16) получается из (29) при $H = c_4[r, q]$.

Вернемся, однако, к уравнению (1). Вместо набора комплексных переменных (26) весьма удобно ввести удвоенный набор вещественных канонических переменных. Положим

$$\begin{aligned} N_k &= i(\bar{N}_k - N_k), & \mu_k &= (\bar{\Phi}_k - \Phi_k)/2i, \\ v_k &= -(N_k + \bar{N}_k), & v_k &= -(\Phi_k + \bar{\Phi}_k)/2, \end{aligned}$$

так что $N_k > 0$.

Пары переменных N_k, μ_k и v_k, v_k являются канонически сопряженными. Интегралы движения в новых переменных выглядят следующим образом:

«число частиц»

$$N = \sum_k N_k + \int n(\lambda) d\lambda, \quad (30)$$

импульс

$$P = ic_2 = i \int r \bar{r}_x dx = \sum_k \frac{v_k N_k}{2} - 2 \int \lambda n(\lambda) d\lambda, \quad (31)$$

энергия

$$E = -c_3 = \int (|r_x|^2 - |r|^4) dx = \sum_k \left(-\frac{N_k^3}{12} + \frac{N_k v_k^2}{4} \right) + 4 \int \lambda^2 n d\lambda. \quad (32)$$

Введенная таким образом переменная $v_k = -4 \operatorname{Re} \lambda_k$ есть не что иное, как скорость k -го солитона. Из (31) при этом видно, что $N_k/2$ следует интерпретировать как массу солитона; слагаемое $N_k v_k^2/4$ представляет собой кинетическую энергию солитона, а $-N_k^3/12$ — его энергию покоя. Из (31), (32) видно также, что $(n(\lambda)/2) d\lambda$ следует интерпретировать как массу частиц, движущихся в интервале скоростей $(-4\lambda, -4\lambda + d\lambda)$. Как будет показано в гл. IV, эти высказывания можно понимать буквально, если речь идет об асимптотиках решений уравнения (1) при $t \rightarrow \pm \infty$.

В заключение этого параграфа рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера при другом знаке нелинейного числа, т. е. уравнение (8.14б):

$$ir_t + r_{xx} - 2|r|^2 r = 0. \quad (33)$$

С этим уравнением связана редукция $q = -\bar{r}$ в задаче (9.1). Как уже отмечалось, в этом случае $|a(\lambda)| \geq 1$ в верхней полуплоскости λ и, следовательно, (33) не имеет (при $|r| \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$) солитонных решений. Нелинейное уравнение Шредингера в форме (33) также является полностью интегрируемым. Функцией Гамильтона является интеграл $c_3[r, q]|_{q=-\bar{r}}$; в канонических переменных

$$n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \ln |a(\lambda)|^2, \quad \varphi(\lambda) = \arg b(\lambda)$$

гамильтониан имеет вид

$$H = \int (|r_x|^2 + |r|^4) dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 n(\lambda) d\lambda.$$

При этом

$$N = -c_1 = \int |r|^2 dx = \int n(\lambda) d\lambda, \\ P = -ic_2 = i \int r \bar{r}_x dx = -2 \int \lambda n(\lambda) d\lambda.$$

§ 11. Уравнение sin-Gordon

Этот параграф посвящается изучению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \sin u. \quad (1)$$

Непосредственно в такой форме это уравнение возникает как уравнение вложения плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. В переменных $\xi = x + t$, $\tau = t - x$ оно приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sin u = 0 \quad (2)$$

и также имеет разнообразные физические приложения. Уравнение sin-Gordon в форме (2) интересно также и тем, что служит нетривиальной моделью теории поля.

Уравнение (1) интегрируется с помощью системы дифференциальных уравнений (8.12), в которой следует положить $r = q = u_x/2$:

$$\begin{aligned} \psi_x^{(1)} &= i\lambda\psi^{(1)} + i\frac{u_x}{2}\psi^{(2)}, \\ \psi_x^{(2)} &= -i\lambda\psi^{(2)} + i\frac{u_x}{2}\psi^{(1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Результаты предыдущих параграфов позволяют немедленно указать семейство N -солитонных решений уравнения (1). В самом деле, для безотражательных потенциалов система уравнений на собственные функции задачи (3) имеет вид (10.4)

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \binom{1}{0} e^{i\lambda_n x} + \binom{0}{1} \sum_{m=1}^N \frac{\bar{c}_m e^{i(\lambda_n - 2\bar{\lambda}_m)x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} - \\ &- \sum_{k,m} \frac{\bar{c}_m e^{i\lambda_n x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} \frac{c_k e^{i(\lambda_k - 2\bar{\lambda}_m)x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_m} \psi_k(x), \end{aligned} \quad (4)$$

в которой, однако, следует учесть факт вещественности потенциала. Последняя, как мы знаем, приводит к ограничениям на расположение нулей $a(\lambda)$; именно, эти нули расположены симметрично относительно мнимой оси, т. е. вместе с точкой λ множеству нулей принадлежит и точ-

ка $-\bar{\lambda}$. Кроме того, ввиду (9.15) фигурирующие в уравнениях (4) величины $c_n = b_n/a'$ (λ) в симметрично расположенных нулях комплексно сопряжены друг другу. Потенциал же определяется по решениям (4) по формуле (10.6):

$$u_x = -4 \sum_n c_n \psi_n^{(1)} e^{i\lambda_n x}. \quad (5)$$

Имея в виду указанные ограничения, уравнение (4) для $\psi_n^{(1)}$ можно переписать в виде

$$\psi_n^{(1)} - \sum_{k, m} \frac{c_m e^{i(\lambda_n + \lambda_m)x}}{\lambda_n + \lambda_m} - \frac{c_k e^{i(\lambda_m + \lambda_k)x}}{\lambda_m + \lambda_k} \psi_k^{(1)} = e^{i\lambda_n x}. \quad (5a)$$

Вводя матрицу

$$v_{nm} = \frac{c_m e^{i(\lambda_n + \lambda_m)x}}{\lambda_n + \lambda_m}; \quad n, m = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

и обозначая через ψ , $e^{i\lambda x}$ столбцы $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$, ..., $\psi_N^{(1)}$ и $e^{i\lambda_1 x}$, $e^{i\lambda_2 x}$, ..., $e^{i\lambda_N x}$, представим систему (5a) в виде

$$(1 - v^2) \psi = e^{i\lambda x}.$$

Таким образом,

$$(1 - v) \psi = (1 + v)^{-1} e^{i\lambda x},$$

$$(1 + v) \psi = (1 - v)^{-1} e^{i\lambda x},$$

откуда

$$\psi = \frac{1}{2} [(1 + v)^{-1} + (1 - v)^{-1}] e^{i\lambda x}.$$

Теперь нетрудно видеть, что правая часть формулы (5) представляет собой логарифмическую производную и

$$u(x) = -\frac{2}{i} \ln \frac{\det(1 + v)}{\det(1 - v)}.$$

Вместо матрицы v удобнее использовать подобную ей матрицу

$$\tilde{v}_{nm}(x, t) = \frac{c_m^{(0)}}{\lambda_n + \lambda_m} \exp \left(2i\lambda_m x - \frac{i}{2\lambda_m} t \right), \quad (7)$$

где мы уже учли зависимость $c_n(t)$ согласно (9.20). Таким образом, N -солитонные решения уравнения (1) дают-

ся формулой

$$u(x, t) = -\frac{2}{i} \ln \frac{\det(1 + \tilde{v})}{\det(1 - \tilde{v})} = -4 \arg \det(1 + \tilde{v}). \quad (8)$$

Рассмотрим простейшие из них.

Пусть $a(\lambda)$ имеет единственный нуль, расположенный на мнимой оси в точке $\lambda_1 = i\lambda$; при этом величина $c(0)$ обязана быть вещественной. Тогда

$$u(x, t) = 4\varepsilon \operatorname{arctg} \exp[-2\lambda(x - x_0) - t/2\lambda] = \\ = 4 \operatorname{arctg} \exp[-\varepsilon(2\lambda(x - x_0) + t/2\lambda)] \pmod{2\pi}, \quad (9)$$

$$\text{где } \varepsilon = \operatorname{sign} c(0), \quad x_0 = \frac{1}{2\lambda} \ln \left| \frac{c(0)}{2\lambda} \right|.$$

Решение (9) с $\varepsilon = -1$ мы будем называть солитоном, а с $\varepsilon = 1$ — антисолитоном уравнения (1). Наиболее естественно эти решения выглядят в переменных $\xi = t + x$, $\tau = t - x$:

$$u(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi - \xi_0 - v\tau}{\sqrt{1 - v^2}}\right), \quad (10)$$

где $v = (4\lambda^2 - 1)/(4\lambda^2 + 1)$, $\xi_0 = (1 + v)x_0$. Решение (10) представляет собой солитон (антисолитон) уравнения (2), движущийся со скоростью v . Эти решения имеют ненулевой «топологический заряд» Q

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi} d\xi,$$

являющийся, очевидно, первым интегралом уравнения (2). На решениях (10)

$$Q = -\varepsilon.$$

Для солитона $Q = 1$, для антисолитона $Q = -1$.

Другим элементарным образованием является решение (7), (8), когда $a(\lambda)$ имеет пару симметричных относительно мнимой оси нулей, $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda$, $\lambda_2 = -\operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda$. При этом $c_1 = \bar{c}_2 = c$ и выражения (7), (8) приводят к ответу

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\operatorname{Re} \lambda|} \frac{\sin \left[\frac{\operatorname{Re} \lambda}{2|\lambda|^2} t - 2 \operatorname{Re} \lambda x - \varphi_0 \right]}{\operatorname{ch} \left[2 \operatorname{Im} \lambda (x - x_0) + \frac{\operatorname{Im} \lambda}{2|\lambda|^2} t \right]} \right\}, \quad (11)$$

или, в терминах уравнения (2),

$$u(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\operatorname{Re} \lambda|} \frac{\sin \left[\frac{\operatorname{Re} \lambda}{|\lambda|} \left(\frac{\tau - v\xi}{\sqrt{1-v^2}} - \psi_0 \right) \right]}{\operatorname{ch} \left[\frac{\operatorname{Im} \lambda}{|\lambda|} \left(\frac{\xi - v\tau - \xi_0}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right]} \right\}, \quad (12)$$

где

$$v = \frac{4|\lambda|^2 - 1}{4|\lambda|^2 + 1}, \quad x_0 = \frac{1}{2 \operatorname{Im} \lambda} \ln \left[\frac{\operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \frac{c}{2\lambda} \right],$$

$$\varphi_0 = \arg \frac{c}{2\lambda}, \quad \psi_0 = \frac{|\lambda|}{\operatorname{Re} \lambda} \varphi_0, \quad \xi_0 = (1 + v) x_0.$$

Эти решения мы будем называть двойными (или пульсирующими) солитонами. Их можно интерпретировать, во всяком случае при достаточно малых значениях $\operatorname{Re} \lambda / \operatorname{Im} \lambda$, как связанное состояние солитона и антисолитона. При $|\lambda| = 1/2$, т. е. при $v = 0$, решение (12) является периодической функцией времени τ . Посмотрим, как выглядит (12) в моменты времени τ_0 , когда $\sin [2 \operatorname{Re} \lambda (\tau_0 - \psi_0)] = 1$.

Очевидно, при этом $\frac{\partial}{\partial \tau} u(\xi, \tau)|_{\tau=\tau_0} = 0$. Пусть, далее, $\operatorname{Re} \lambda \ll 1$. Тогда при $|\xi| \gg \ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$ функция $u(\xi, \tau_0) = 0$; в области же $|\xi| \ll \ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$ функция $u(\xi, \tau_0) \simeq 2\pi$.

При $\xi \sim \ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$ (или $\xi \simeq -\ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$) имеем из (12) $u(\xi, \tau_0) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left(-\xi + \ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \right)$ (соответственно $u(\xi, \tau_0) = 4 \operatorname{arctg} \exp \left(\xi + \ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \right)$). Таким образом, при $\tau = \tau_0$ выражение (12) представляет собой суперпозицию неподвижных солитона и антисолитона, разнесенных на расстояние порядка $2 \ln \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}$, что и позволяет говорить о двойном солитоне, как о связанном состоянии. Его топологический заряд равен нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению столкновений солитонов. Простейшим (и совершенно нетривиальным) из решений такого рода является решение, получающееся из (12) предельным переходом $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow 0$. При $v = 0$ имеем из (12)

$$u(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\operatorname{ch} \xi}.$$

Это решение описывает взаимодействие солитона и анти-солитона, имеющих на бесконечности нулевую скорость.

Общее двухсолитонное решение получается из формул (7), (8), когда $a(\lambda)$ имеет два нуля на мнимой оси в точках $i\lambda_1, i\lambda_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$):

$$u(\xi, \tau) =$$

$$= 4 \operatorname{arctg} \frac{\frac{c_1}{2\lambda_1} \exp\left(-\frac{\xi - v_1\tau}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) + \frac{c_2}{2\lambda_2} \exp\left(-\frac{\xi - v_2\tau}{\sqrt{1-v_2^2}}\right)}{1 - \frac{c_1 c_2}{4\lambda_1 \lambda_2} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \exp\left(-\frac{\xi - v_1\tau}{\sqrt{1-v_1^2}} - \frac{\xi - v_2\tau}{\sqrt{1-v_2^2}}\right)}, \quad (13)$$

где $v_i = (4\lambda_i^2 - 1)/(4\lambda_i^2 + 1)$. Непосредственный анализ этого выражения показывает, что (13) описывает при $\tau \rightarrow \pm \infty$ пару невзаимодействующих солитонов, движущихся со скоростями v_1 и v_2 . Действительно, полагая, например, $v_2 > v_1$, рассмотрим асимптотику (13) на прямой $\xi = v_1\tau + \xi', \tau \rightarrow -\infty$, как функцию ξ' :

$$u(v_1\tau + \xi', \tau) \rightarrow 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{c_1}{2\lambda_1} \exp\left(-\frac{\xi'}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) \right].$$

В зависимости от знака c_1 это выражение описывает солитон или антисолитон с координатой центра

$$\xi_0^{(1)}(-\infty) = \sqrt{1-v_1^2} \ln \frac{|c_1|}{2\lambda_1}.$$

Рассматривая, далее, асимптотику (13) на той же прямой при $\tau \rightarrow +\infty$, находим

$$\begin{aligned} u(v_1\tau + \xi', \tau) &\rightarrow -4 \operatorname{arctg} \left[\frac{2\lambda_1}{c_1} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \exp\left(\frac{\xi'}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) \right] = \\ &= 2\pi + 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{c_1}{2\lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \exp\left(-\frac{\xi'}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) \right], \end{aligned}$$

т. е. имеем солитон с тем же топологическим зарядом, что и на $-\infty$ по τ ; его координата есть

$$\xi_0^{(1)}(\infty) = \sqrt{1-v_1^2} \ln \left[\frac{|c_1|}{2\lambda_1} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right].$$

Таким образом, при столкновении со вторым солитоном первый испытывает сдвиг на величину

$$\Delta \xi_{50}^{(1)} = -\sqrt{1-v_1^2} \ln \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} < 0.$$

Совершенно аналогично для второго (быстрого) солитона

$$\Delta \xi_{50}^{(2)} = \sqrt{1-v_2^2} \ln \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

Мы видим, что быстрый солитон дополнительно сдвигается вперед, а медленный — назад. При этом рассеяние солитонов совершенно не зависит от их зарядов. Наиболее просто полученные результаты выглядят в системе центра инерции солитонов, где $v_2 = v = -v_1$. В этой системе отсчета

$$\Delta \xi_{50}^{(2)} = -\Delta \xi_{50}^{(1)} = \sqrt{1-v^2} \ln \frac{1}{v^2}.$$

Так же, как для других систем, рассмотренных в этой главе, можно показать, что при многосолитонном столкновении полный сдвиг каждого солитона равен сумме сдвигов при столкновениях со всеми остальными по-отдельности, т. е. многочастичные эффекты отсутствуют.

Развитые выше методы позволяют эффективно исследовать уравнение (1). В частности, задача Коши для (1) сводится к решению прямой и обратной задач рассеяния для системы (3). Однако для уравнения (2) приведенная схема дает лишь некоторую параметризацию всей совокупности решений, но не позволяет решать задачу Коши. Для решения последней использованную схему необходимо переформулировать непосредственно в переменных ξ , τ .

Уравнение (1) представляется как условие совместности системы

$$\psi_x = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ u_x & 0 \end{pmatrix} \psi,$$

$$\psi_t = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix} \psi.$$

В переменных ξ , τ эта система приобретает вид

$$\psi_{\xi} = \frac{i\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi + \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & u_{\xi} - u_{\tau} \\ u_{\xi} - u_{\tau} & 0 \end{pmatrix} \psi - \frac{1}{8i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix} \psi, \quad (14)$$

$$\psi_{\tau} = -\frac{i\lambda}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi - \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & u_{\xi} - u_{\tau} \\ u_{\xi} - u_{\tau} & 0 \end{pmatrix} \psi + \frac{1}{8i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix} \psi. \quad (15)$$

Условием совместности системы (14), (15) является, очевидно, уравнение (2). Теперь мы можем действовать по стандартной схеме метода обратной задачи: определить данные рассеяния для уравнения (14), найти зависимость последних от времени с помощью (15) и, наконец, исследовать вопрос о восстановлении u (ξ , τ) по данным рассеяния, т. е. решить обратную задачу рассеяния для уравнения (14). Однако, как мы сейчас увидим, нет никакой необходимости детально исследовать уравнение (14), поскольку имеется тождественное соответствие решений задач (3) и (14). Рассмотрим, например, решение $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{pmatrix}$ системы (14), (15), определенное асимптотикой при $\xi \rightarrow -\infty$:

$$\Phi^{(1)} \rightarrow 0, \quad \Phi^{(2)} \rightarrow \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi + \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) \tau \right].$$

Как решение (14) Φ имеет асимптотику на $+\infty$ по ξ вида

$$\Phi^{(1)} \rightarrow B(\lambda, \tau) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi + \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) \tau \right],$$

$$\Phi^{(2)} \rightarrow A(\lambda, \tau) \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi + \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) \tau \right].$$

Определенные таким образом функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ дают нам данные рассеяния для (14) в непрерывном спектре.

При этом из (15) имеем

$$\frac{\partial A(\lambda, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial B(\lambda, \tau)}{\partial \tau} = -i \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) B(\lambda, \tau).$$

Эти формулы определяют эволюцию данных рассеяния во времени. Решение Φ как функция ξ и τ , $\Phi(\lambda, \xi, \tau)$, однозначно определено во всей плоскости ξ, τ . Совершенно очевидно, что $\Phi(\lambda; x+t, t-x)$ как функция x удовлетворяет системе (3) с потенциалом $u(x, t)$, являющимся решением (2). Спрашивается, какую асимптотику имеет $\Phi(\lambda; x+t, t-x)$ при $x \rightarrow -\infty, t = \text{const}$? Для ответа на этот вопрос заметим, что всякое решение уравнения (2), отвечающее достаточно гладким убывающим при $|\xi| \rightarrow \infty$ начальным условиям $u(\xi, \tau)|_{\tau=0} = u(\xi)$, $u_\tau(\xi, \tau)|_{\tau=0} = w(\xi)$, заключено при $\tau \rightarrow \pm \infty$ внутри светового конуса $|\tau| > |\xi|$. Это утверждение достаточно очевидно. По этой причине при продолжении асимптотики $\Phi(\lambda; \xi, \tau)$ из области $\xi \rightarrow -\infty, \tau = \text{const}$ в область $\xi = -\tau, \xi \rightarrow -\infty$ (т. е. $x \rightarrow -\infty, t = \text{const}$) мы постоянно находимся в области, где $u(\xi, \tau) = 0$. Таким образом, при $x \rightarrow \infty$

$$\Phi(\lambda; x, -x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-i\lambda x) \end{pmatrix}$$

и совпадает с введенным выше решением $\varphi(x, \lambda)$ системы (3). Точно так же обстоит дело и при $\xi \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$: решение (14) $\psi(\lambda; \xi, \tau)$, определенное асимптотикой $\psi^{(1)} \rightarrow \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi - \frac{i}{2} \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) \tau \right]$, $\psi^{(2)} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$, получается из решения $\psi(\lambda, x, t)$ системы (3) простой заменой переменных. Итак, имеет место следующее утверждение. Пусть $u(\xi) = u(\xi, 0)$, $w(\xi) = u_\tau(\xi, 0)$ — начальные условия для уравнения (2), $A(\lambda), B(\lambda)$ — данные рассеяния задачи (14), отвечающие этим значениям u, u_τ . Пусть далее $u(\xi, \tau)$ — решение (2) с указанными начальными условиями; $u(x, 0) = u(x, -x)$ — начальное условие для уравнения (1), а $a(\lambda), b(\lambda)$ — данные рассеяния системы (3), отвечающие этому начальному условию. Тогда, если $u(\xi), w(\xi)$ — достаточно гладкие и хорошо убывающие при $|\xi| \rightarrow \infty$ функции $a(\lambda) \equiv A(\lambda), b(\lambda) \equiv B(\lambda)$, соответствующие характеристики дискретных спектров задач (14) и (3) также совпадают. Уравнения обратной задачи получаются из уравнений (9.11), (9.12)

тривиальной заменой переменных:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\lambda, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi \right] = \\ = \binom{0}{1} + \sum_{n=1}^N \frac{c_n \psi(\lambda_n, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda_n - \frac{1}{4\lambda_n} \right) \xi \right]}{\lambda - \lambda_n} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda') \psi(\lambda', \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda' - \frac{1}{4\lambda'} \right) \xi \right]}{\lambda' - \lambda + i0} d\lambda', \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\lambda_n, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\bar{\lambda}_n - \frac{1}{4\bar{\lambda}_n} \right) \xi \right] = \\ = \binom{0}{1} + \sum_m \frac{c_m \psi(\lambda_m, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda_m - \frac{1}{4\lambda_m} \right) \xi \right]}{\bar{\lambda}_n - \lambda_m} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\lambda) \psi(\lambda, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi \right]}{\lambda - \bar{\lambda}_n} d\lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

В этих уравнениях $\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} -\tilde{\psi}^{(2)} \\ \tilde{\psi}^{(1)} \end{pmatrix}$, суммирование ведется по всем нулям $A(\lambda)$, лежащим в верхней полуплоскости, $R(\lambda) = B(\lambda)/A(\lambda)$, $c_n = B(\lambda_n)/A'(\lambda_n)$. Под $\psi(\lambda, \xi)$ следует понимать решение уравнений (14) с асимптотикой $\psi^{(2)} \rightarrow 0$, $\psi^{(1)} \rightarrow \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi \right]$, $\xi \rightarrow +\infty$. Данные рассеяния удовлетворяют, ввиду (9.15), известным ограничениям:

$$R(\lambda) = -\bar{R}(-\lambda); \quad (18)$$

вместе с λ_n собственным значением является $-\bar{\lambda}_n$; соответствующие c_n комплексно сопряжены. Если $\sin u$ и u_τ как функции ξ бесконечно дифференцируемы и убывают при $|\xi| \rightarrow \infty$ вместе со всеми своими производными, то коэффициент отражения $R(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ убывает быстрее любой степени $1/\lambda$. Этот факт справедлив как для системы (3) с потенциалом общего положения, так и для системы (14). Однако для системы (14) при указанных условиях $R(\lambda)$ убывает быстрее любой степени λ и при

$\lambda \rightarrow 0$. В этом легко убедиться, совершив в (14) замену

$$\psi = e^{i \frac{u}{2} \sigma_1} \psi' = \begin{pmatrix} \cos \frac{u}{2} & i \sin \frac{u}{2} \\ i \sin \frac{u}{2} & \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix} \psi' \quad (19)$$

и замечая, что ψ' удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \psi'_\xi = \frac{1}{8i\lambda} \sigma_3 \psi' - \frac{i}{4} (u_\xi + u_\tau) \sigma_1 \psi' + \\ + \frac{i\lambda}{2} e^{-\frac{i u}{2} \sigma_1} \sigma_3 e^{i \frac{u}{2} \sigma_1} \psi', \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из (19), (20) видно также, что при $\lambda \rightarrow 0$

$$\tilde{\psi}(\lambda, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi \right] \rightarrow \begin{pmatrix} i \sin \frac{u}{2} \\ \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix} (-1)^{u(+\infty)/2\pi}.$$

Сравнивая это выражение с (16), находим

$$\begin{aligned} \cos \frac{u(\xi)}{2} = (-1)^{u(+\infty)/2\pi} \left[1 - \right. \\ \left. - \sum_n \frac{c_n}{\lambda_n} \psi^{(2)}(\lambda_n, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda_n - \frac{1}{4\lambda_n} \right) \xi \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{R(\lambda)}{\lambda} \psi^{(2)}(\lambda, \xi) \exp \left[\frac{i}{2} \left(\lambda - \frac{1}{4\lambda} \right) \xi \right] d\lambda \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Формула (21) позволяет восстановить потенциал по решениям уравнений обратной задачи (16), (17).

Уравнение (2) записывается в стандартной лагранжевой форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\delta L}{\delta u_\tau} - \frac{\delta L}{\delta u} = 0,$$

где

$$L = \frac{1}{\gamma} \int d\xi \left(\frac{u_\tau^2}{2} - \frac{u_\xi^2}{2} + \cos u - 1 \right),$$

и является, очевидно, гамильтоновым. Его гамильтониан

есть

$$H = \int d\xi u_\tau \frac{\delta L}{\delta u_\tau} - L = \\ = \int d\xi \left[\frac{\gamma w^2}{2} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_\xi^2}{2} + 1 - \cos u \right) \right], \quad (22)$$

где $w = \delta L / \delta u_\tau$ — канонически сопряженная к u (ξ) переменная. Постоянная γ играет роль константы взаимодействия. Гамильтонова система имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\delta H}{\delta w}, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = - \frac{\delta H}{\delta u}. \quad (23)$$

Укажем канонические переменные в терминах данных рассеяния, которые, как и в рассмотренных выше примерах, окажутся переменными действие — угол для системы (22), (23). Вариационные производные от данных рассеяния можно, как всегда, вычислять, исходя из формул

$$a(\lambda) = W(\psi(\lambda), \varphi(\lambda)), \quad b(\lambda) = -W(\tilde{\psi}(\lambda), \varphi(\lambda)). \quad (24)$$

При этом, поскольку задача (14) содержит u_ξ , удобно перейти к функциям $\varphi' = \exp\left(-\frac{i u}{4} \sigma_1\right) \varphi$, $\psi' = \exp\left(-\frac{i u}{4} \sigma_1\right) \psi$, являющимся решением уравнения

$$\varphi'_\xi = \left[-\frac{i u_\tau}{4} \sigma_1 + \frac{i \lambda}{2} \exp\left(-\frac{i u}{4} \sigma_1\right) \sigma_1 \exp\left(\frac{i u}{4} \sigma_1\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8 i \lambda} \exp\left(i \frac{u}{4} \sigma_1\right) \sigma_3 \exp\left(-i \frac{u}{4} \sigma_1\right) \right] \varphi'. \quad (25)$$

Так как $\det \exp\left(i \frac{u}{4} \sigma_1\right) = 1$, выражения для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ через штрихованные переменные совпадают с (24). Применяя, далее, стандартные рассуждения и возвращаясь от φ' , ψ' к φ , ψ , находим

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau} = -\frac{i}{4} W(\psi, \sigma_1 \varphi) = -\frac{i}{4} (\psi_1 \varphi_1 - \psi_2 \varphi_2), \\ \frac{\delta b(\lambda)}{\delta u_\tau} = \frac{i}{4} (\tilde{\psi}_1 \varphi_1 - \tilde{\psi}_2 \varphi_2), \\ \frac{\delta a(\lambda)}{\delta u} = -\frac{i}{2} \left[\left(\frac{i \lambda}{2} - \frac{\cos u}{8 i \lambda} \right) (\psi_1 \varphi_1 + \tilde{\psi}_2 \varphi_2) + \right. \\ \left. + \frac{\sin u}{8 \lambda} (\varphi_2 \psi_1 + \varphi_1 \psi_2) \right], \quad (26)$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta u} = \frac{i}{2} \left[\left(\frac{i\lambda}{2} - \frac{\cos u}{8i\lambda} \right) (\tilde{\psi}_1 \varphi_1 + \tilde{\psi}_2 \varphi_2) + \right. \\ \left. + \frac{\sin u}{8\lambda} (\varphi_2 \tilde{\psi}_1 + \varphi_1 \tilde{\psi}_2) \right].$$

Вычислим теперь скобки Пуассона:

$$\{a(\lambda), b(\lambda')\} = \gamma \int d\xi \left(\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u} \frac{\delta b(\lambda')}{\delta u_\tau} - \frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau} \frac{\delta b(\lambda')}{\delta u} \right). \quad (27)$$

Здесь мы учли, что $\delta/\delta w = \gamma \delta/\delta u_\tau$. Путем прямых, но несколько утомительных вычислений можно убедиться, что подынтегральное выражение в (27) является полной производной. Именно,

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u} \frac{\delta b(\lambda')}{\delta u_\tau} - \frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau} \frac{\delta b(\lambda')}{\delta u} = \\ = \frac{1}{16} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'} Z_2 - \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda - \lambda'} Z_1 \right),$$

где

$$Z_1(\psi(\lambda), \varphi(\lambda); \tilde{\psi}(\lambda'), \varphi(\lambda')) = \\ = (\psi_1(\lambda) \tilde{\psi}_2(\lambda') - \psi_2(\lambda) \tilde{\psi}_1(\lambda')) (\varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda') - \varphi_2(\lambda) \varphi_1(\lambda')), \\ Z_2(\psi(\lambda), \varphi(\lambda); \tilde{\psi}(\lambda'), \varphi(\lambda')) = (\psi_1(\lambda) \tilde{\psi}_1(\lambda') - \\ - \psi_2(\lambda) \tilde{\psi}_2(\lambda')) (\varphi_1(\lambda) \varphi_1(\lambda') - \varphi_2(\lambda) \varphi_2(\lambda')).$$

Аналогичные формулы имеются и для других скобок:

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u} \frac{\delta a(\lambda')}{\delta u_\tau} - \frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau} \frac{\delta a(\lambda')}{\delta u} = \\ = -\frac{1}{16} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'} Z_2(\psi(\lambda), \varphi(\lambda); \psi(\lambda'), \varphi(\lambda')) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda - \lambda'} Z_1(\psi(\lambda) \varphi(\lambda); \psi(\lambda') \varphi(\lambda')) \right]$$

и т. д. Производя интегрирование в (27), находим

$$\frac{1}{\gamma} \{a(\lambda), b(\lambda')\} = \frac{1}{4} \frac{\lambda \lambda'}{\lambda^2 - \lambda'^2} (a(\lambda) b(\lambda') - \\ - \frac{\pi i \lambda}{8} a(\lambda) b(\lambda') \delta(\lambda - \lambda') + \frac{\pi i \lambda}{8} a(\lambda) b(\lambda') \delta(\lambda + \lambda')), \quad (28)$$

$$\{a(\lambda), a(\lambda')\} = 0 \text{ и т. д.}$$

Используя эти выражения и свойства симметрии $\bar{a}(\lambda) = a(-\lambda)$, $\bar{b}(\lambda) = -b(-\lambda)$, нетрудно проверить,

что переменные

$$P_\lambda = \frac{4}{\pi\lambda\gamma} \ln \frac{1}{|a(\lambda)|^2}, \quad Q_\lambda = \arg b(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

являются канонически сопряженными. Продолжая формулы (28) в комплексную плоскость

$$\{a(\lambda), b(\lambda')\} = \frac{\gamma}{16} \left(\frac{\lambda + \lambda'}{\lambda - \lambda'} - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'} \right) a(\lambda) b(\lambda')$$

и учитывая, что изменение положения $\delta\lambda_n$ нуля $a(\lambda)$ связано с вариацией δa соотношением $\delta\lambda_n = -\frac{1}{a'(\lambda_n)} \delta a$, находим

$$\{\lambda_n, b_m\} = \frac{\gamma}{8} \lambda_n b_n \delta_{nm},$$

где $b_n = b(\lambda_n)$. Таким образом, каноническими переменными дискретной части спектра являются

$$p_n = \ln \lambda_n, \quad q_n = -\frac{8}{\gamma} \ln b_n, \quad \operatorname{Re} \lambda_n \geq 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_n > 0.$$

Эти переменные комплексны, если $\operatorname{Re} \lambda_n \neq 0$. Удобно перейти к вещественным переменным

$$p_n = \ln |\lambda_n|, \quad q_n = -\frac{8}{\gamma} \ln |b_n| \quad (\operatorname{Re} \lambda_n = 0), \quad (29)$$

$$n_k = 4 \ln |\lambda_k|, \quad \varphi_k = -\frac{4}{\gamma} \ln |b_k|, \quad (30)$$

$$\eta_k = \frac{16}{\gamma} \arg \lambda_k, \quad \psi_k = \arg b_k \quad \left(0 < \arg \lambda_k < \frac{\pi}{2} \right).$$

Набор переменных (29) относится к солитонам (антисолитонам). Следует отметить, что p_n, q_n (29) не определяют полностью эту часть спектра, поскольку они не чувствительны к заряду солитона, определяемому, как мы знаем, знаком b_n . Эти характеристики, имеющие не динамическое, а топологическое происхождение, должны быть добавлены к (29). Переменные же (30) полностью описывают двойные солитоны.

Выразим теперь гамильтониан через новые переменные. Это нетрудно сделать, заметив, что непосредственно из (14) следует, что первые члены разложения $\ln a(\lambda)$ на бесконечности по λ и в окрестности точки $\lambda = 0$ имеют,

соответственно, вид

$$\ln a(\lambda) = -\frac{i}{8\lambda} \int \left[\frac{(u_\xi - u_\tau)^2}{2} + (1 - \cos u) \right] d\xi + \\ + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

$$\ln a(\lambda) = \frac{i\lambda}{2} \int \left[\frac{(u_\xi + u_\tau)^2}{2} + (1 - \cos u) \right] d\xi + O(\lambda^2), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Восстанавливая далее $\ln a(\lambda)$ по переменным P_λ , p_n , находим

$$H = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\lambda} + \lambda \right) P_\lambda d\lambda + \\ + \sum \frac{2}{\gamma} (e^{-P_k} + 4e^{P_k}) + \sum \frac{4}{\gamma} \sin \frac{\gamma \eta_k}{16} \left(e^{-\frac{n_k}{4}} + 4e^{\frac{n_k}{4}} \right). \quad (31)$$

Импульс поля записывается в новых переменных в виде

$$P = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\lambda} - \lambda \right) P_\lambda d\lambda + \\ + \sum \frac{2}{\gamma} (e^{-P_k} - 4e^{P_k}) + \sum \frac{4}{\gamma} \sin \frac{\gamma \eta_k}{16} \left(e^{-\frac{n_k}{4}} + 4e^{\frac{n_k}{4}} \right). \quad (32)$$

В терминах частиц, связанных с нашей динамической системой, эти формулы имеют простую интерпретацию. При фиксированном λ переменные P_λ , Φ_λ образуют пару канонических переменных типа «число частиц — фаза», так что P_λ можно интерпретировать как плотность частиц, $(1/4\lambda - \lambda) P_\lambda$ — как импульс, а $(1/4\lambda + \lambda) P_\lambda$ — как соответствующую энергию. Таким образом, первые члены в первых частях формул (31), (32) представляют собой вклад в энергию и импульс от частиц с единичной массой. Вторые слагаемые, отвечающие вкладам солитонов, представляют собой вклад от частиц с массой $8/\gamma$, т. е. масса солитона есть $8/\gamma$. Наконец, последние слагаемые в (31), (32) отвечают двойным солитонам. Их масса меняется в интервале от 0 до $16/\gamma$, в зависимости от их «амплитуды».

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КдФ

Как уже отмечалось во Введении, периодические по x решения типа стационарной простой волны $u(x - ct)$ (их еще называют «кноидальными волнами») были открыты в XIX в. в теории мелкой воды. Позднее, в 50-х годах XX в. волны этого типа были обнаружены также в теории плазмы. Численный эксперимент, проводившийся в 60-х годах для решения уравнения КдФ с периодическими по x начальными условиями, указывал на квазипериодическую по времени динамику. Кроме того, периодическая задача обладает бесконечным числом законов сохранения (см. § 5 гл. I). Все это указывает на полную интегрируемость задачи Коши с периодическими граничными условиями. Однако, по причинам математического характера, периодическая задача для КдФ оказалась более трудной, чем в быстроубывающем случае. В частности, долгое время не было известно ни одного точного периодического по x решения, кроме кноидальной волны. Не удавалось также применить аналог метода обратной задачи рассеяния. Решение периодической задачи, найденное в 1974 г. (см. обзор [6]), потребовало существенного развития теории одномерного уравнения Шредингера с периодическим потенциалом и использования ряда нетрадиционных для физики математических средств.

§ 1. Уравнение Шредингера с периодическим потенциалом.

Периодический аналог уравнений

Гарднера — Грина — Крускала — Миуры

В этом параграфе мы изложим необходимые для нас элементарные сведения из теории уравнения Шредингера и выведем периодический аналог уравнений ГТКМ для

динамики в силу КдФ коэффициентов прохождения и отражения (см. (I.2.3)), из которого будут отчасти видны трудности периодической задачи сравнительно с быстроубывающей.

Пусть, как и ранее, $L = -d^2/dx^2 + u(x)$ есть одномерный оператор Шредингера, и потенциал u имеет период T : $u(x+T) = u(x)$. Представление Лакса (I.2.6) для временной динамики уравнения КдФ сохраняет свое значение и в периодическом случае:

$$\dot{L} = [A, L],$$

если $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$, где потенциал $u(x, t)$ зависит от времени t как от параметра. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора L

$$L\psi = E\psi. \quad (1)$$

Для удобства выберем базис решений уравнения (1), нормированный в точке x_0 одним из двух способов:

$$L\varphi_{\pm} = E\varphi_{\pm}, \quad \varphi_{\pm}(x_0) = 1, \quad \varphi'_{\pm}(x_0) = \pm ik, \quad k^2 = E; \quad (2')$$

$$Lc = Ec, \quad Ls = Es, \quad c(x_0) = 1, \quad c'(x_0) = 0, \quad (2'')$$

$$s(x_0) = 0, \quad s'(x_0) = 1.$$

Базисы (2') и (2'') мы будем обозначать соответственно через $\varphi_{\pm}(x, x_0, E)$ и $c(x, x_0, E)$, $s(x, x_0, E)$. Как обычно, рассматривается оператор трансляции на период, коммутирующий с оператором Шредингера L (потенциал u имеет период T):

$$\hat{T}: \psi(x) \rightarrow \psi(x+T), \quad \hat{T}L = L\hat{T}. \quad (3)$$

В математической литературе оператор трансляции $\hat{T}$ называют часто «оператором монодромии». В любом из базисов решений уравнения (1) оператор $\hat{T}$ запишется как матрица второго порядка:

$$\begin{aligned} \hat{T}\varphi_+ &= a\varphi_+ + b\varphi_-, & \hat{T}\varphi_- &= c\varphi_+ + d\varphi_-, \\ \hat{T}c &= \alpha_{11}c + \alpha_{12}s, & \hat{T}s &= \alpha_{21}c + \alpha_{22}s. \end{aligned} \quad (4)$$

При вещественных k , где $k^2 = E$, мы имеем

$$\varphi_- = \overline{\varphi_+}, \quad c = \bar{b}, \quad d = \bar{a}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для базиса (2) при вещественных E матрица $\hat{T} = (\alpha_{ij})$ будет вещественна (потенциал $\bar{u}$ предполагается всегда вещественным). Как известно, детерминант Вронского любой пары решений является константой. Отсюда следует

$$\det \hat{T} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = ad - bc = 1. \quad (6)$$

При вещественных k , в силу (5), получаем

$$|a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (7)$$

Матрица $\hat{T}$ зависит, вообще говоря, от начальной точки x_0 и от E (или от k), $\hat{T} = \hat{T}(x_0, E)$.

Важной величиной в теории уравнения Шредингера с периодическим потенциалом является след матрицы трансляции

$$\text{Sp } \hat{T} = \alpha_{11} + \alpha_{22} = a + d. \quad (8)$$

При вещественных k мы имеем $d = \bar{a}$ и поэтому

$$\text{Sp } \hat{T} = a + d = a + \bar{a} = 2a_R, \quad a = a_R + ia_I. \quad (9)$$

Собственные числа матрицы $\hat{T}$ мы будем всегда обозначать через $\exp(\pm ipT)$, где T — период; число $p = p(E)$ называется «квазиимпульсом». Так как $\det \hat{T} = 1$, собственные числа выражаются через след $\text{Sp } \hat{T}$ и имеют вид

$$\exp(\pm ipT) = a_R \pm \sqrt{a_R^2 - 1}, \quad (10)$$

$$2 \cos(pT) = \text{Sp } \hat{T} = 2a_R = \alpha_{11} + \alpha_{22}.$$

Строго говоря, эти формулы написаны при вещественном k , но мы всегда будем величину $1/2 \text{Sp } \hat{T} = 1/2 (\alpha_{11} + \alpha_{22})$ обозначать через a_R даже при комплексных E .

Напомним, что собственная функция $\psi_{\pm}(x)$ называется блоховской (или функцией Флоке), если она является собственным вектором также коммутирующего с L оператора трансляции $\hat{T}$:

$$\begin{aligned} L\psi_{\pm} &= E\psi_{\pm}, \\ \hat{T}\psi_{\pm} &= \exp(\pm ipT)\psi_{\pm}. \end{aligned} \quad (11)$$

Как говорят, блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, E)$ принадлежит блоховскому спектру оператора L на

прямой (функция Флоке находится в разрешенной зоне или зоне стабильности), если квазиимпульс $p(E)$ вещественный или $|\exp(ipT)| = 1$.

Из формул (10) видно, что зоны блоховского спектра (разрешенные зоны, зоны стабильности) задаются уравнением

$$\left| \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \hat{T} \right| = |a_R| \leq 1. \quad (12)$$

Запрещенные зоны (или зоны неустойчивости) задаются условием $|a_R| > 1$ на вещественной оси E . Хотя матрица

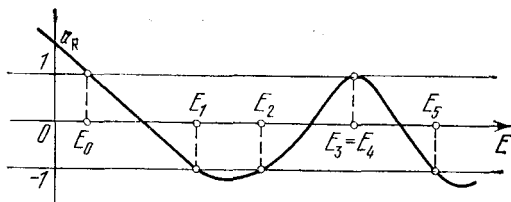


Рис. 2. Разрешенные зоны $[E_0 E_1]$, $[E_2 E_3]$, $\dots$, где $a_R \leq 1$.

$\hat{T}$ зависит от x_0 , E , ее след $\operatorname{Sp} \hat{T} = 2a_R$ уже зависит только от E и его типичный график имеет вид, указанный на рис. 2. Точки $E_0, E_1, E_2, \dots$ образуют края разрешенных зон.

Возможен, однако, случай, когда запрещенная зона стягивается к нулевой длине и исчезает (например, точка $E_3 = E_4$ на рис. 2). В этом случае точка $E_3 = E_4$ уже не является краем зоны, и отрезок $[E_2 E_5]$ образует одну разрешенную зону. Тривиальный пример такого рода дает постоянный потенциал $u = \text{const}$; все края зон, кроме E_0 , попарно слились, и возникла лишь одна разрешенная зона $E \geq E_0$ (рис. 3).

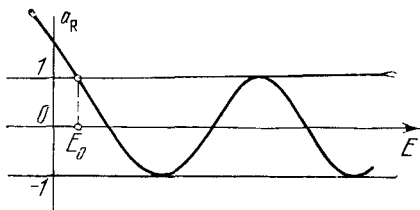


Рис. 3. График $a_R(E)$ для $u = \text{const}$; при $E \geq E_0$ всегда $|a_R| \leq 1$.

Края разрешенных и запрещенных зон E_i таковы, что $|a_R| = 1$ или $\exp(\pm ipT) = \pm 1$. Вследствие этого блоховская собственная функция $\psi(x, E_i)$ такова, что

$\hat{T}\psi = \pm \psi$ при $E = E_i$. Это означает, что функция ψ при $E = E_i$ является периодической с периодом T или периодом $2T$. Сама матрица $\hat{T}$ при $E = E_i$ имеет совпадающие собственные числа $\exp(ipT) = \exp(-ipT)$, где $pT = 0, \pi$.

В невырожденном случае матрица $\hat{T}$ при $E = E_i$ приводится к жордановой клетке: она имеет два совпадающих собственных значения, но лишь один собственный вектор. В этом случае $b(x_0, E_i) \neq 0$ и $a_R = \pm 1$. В невырожденном случае уровень E_i действительно является концом зоны.

Если матрица $\hat{T}$ диагональна при $E = E_i$ или $\hat{T} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $b(x_0, E_i) \equiv 0$, то такой уровень E_i двукратно вырожден и не является концом разрешенной зоны. Мы не доказываем эти элементарные факты, хорошо известные из любого учебника по теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами или из учебников по теории твердого тела [18].

Заметим, что матрица $\hat{T}(x_0, E)$ является периодическим аналогом квантовомеханической матрицы перехода, для быстроубывающих потенциалов $u(x)$ использованная в § 1 гл. I. Действительно: пусть $T \rightarrow \infty$, $x_0 \rightarrow -\infty$, $x_0 + T \rightarrow +\infty$, а потенциал $u(x)$ стремится к быстроубывающему при $T \rightarrow \infty$. Тогда базис (φ_+, φ_-) в точках x_0 и $x_0 + T$ стремится к базисам, имеющим асимптотику двух экспонент $\exp(\pm ikx)$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Поэтому матрица $\hat{T}$ перехода от x_0 к $x_0 + T$ при $T \rightarrow \infty$ перейдет в матрицу рассеяния, использованную в гл. I для решения КДФ на быстроубывающих по x функциях. Для быстроубывающих решений КДФ $u(x, t)$ мы получили в § 2 гл. I уравнение Гарднера — Грина — Крускала — Миуры (ГГКМ)

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = 8ik^3b.$$

Выведем сейчас периодический аналог этого уравнения для матрицы $\hat{T}(x_0, t, E)$, если периодический по x потенциал $u(x, t)$ меняется со временем в силу КДФ или любого из высших КДФ. Рассмотрим уравнение Лакса

$$\dot{L} = [L, A]$$

для динамики в силу любого из высших КДФ. Здесь

$A = \sum_{i=0}^n c_i A_{n-i}$ — оператор порядка $2n + 1$, коэффициенты которого зависят от $u, u', u'', \dots$. Для исходного КдФ оператор $A = A_1$ имеет вид (I.2.5). Рассмотрим любой из базисов (2') или (2'') решений уравнения (1). В базисе (2') по аналогии с (I.2.4) имеем

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_+ &= -A\varphi_+ + \lambda\varphi_+ + \mu\varphi_-, \\ \dot{\varphi}_- &= -A\varphi_- + \gamma\varphi_+ + \delta\varphi_-.\end{aligned}\quad (13)$$

При вещественных k ($k^2 = E$) имеем $\gamma = \bar{\mu}$, $\delta = \bar{\lambda}$ и $\lambda + \delta = 0$, так как $\varphi_- = \bar{\varphi}_+$ и A — вещественный оператор. Действительно, из уравнений $\dot{L} = [L, A]$ и $L\varphi_{\pm} = E\varphi_{\pm}$ имеем равенство

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t}(L - E)\varphi_{\pm} = \dot{L}\varphi_{\pm} + (L - E)\dot{\varphi}_{\pm} = \\ &= (LA - AL)\varphi_{\pm} + (L - E)\dot{\varphi}_{\pm} = -(L - E)(A\varphi_{\pm} + \dot{\varphi}_{\pm}),\end{aligned}$$

которое эквивалентно уравнениям (13).

Рассмотрим теперь матрицу $\Lambda(x_0, E)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Периодический аналог ГГКМ пишется следующим образом:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = [\Lambda, \hat{T}] = \Lambda \hat{T} - \hat{T} \Lambda. \quad (15)$$

Матрица $\Lambda(x_0, E)$, входящая в это уравнение, определяется из уравнения (13) подстановкой $x = x_0$, где $\dot{\varphi}_+ = \dot{\varphi}_- = (\dot{\varphi}_+)' = (\dot{\varphi}_-)' = 0$ при $x = x_0$. По определению базиса φ_+, φ_- мы получаем

$$(A\varphi_+)_{x=x_0} = \lambda + \mu, \quad (A\varphi_-)_{x=x_0} = \gamma + \delta, \quad (16)$$

$$\left(\frac{d}{dx} A\varphi_+\right)_{x=x_0} = ik(\lambda - \mu), \quad \left(\frac{d}{dx} A\varphi_-\right)_{x=x_0} = ik(\gamma - \delta).$$

Так как коэффициенты дифференциального оператора A выражены через $u, u', u'', \dots$, то формулы (16) дают выражение матрицы Λ через $u(x_0), u'(x_0), u''(x_0), \dots$. Аналогичные вычисления можно проделать и в базисе (2'') для определения матрицы Λ , которая будет полиномиаль-

но зависеть также от E (в базисе $(2')$ матрица $k\Lambda$ полиномиально зависит от k).

Для вывода уравнения (15) мы воспользуемся тем же уравнением (13) в точке $x_0 + T$, применяя оператор трансляции $\hat{T}$. Обозначим пару (φ_+, φ_-) через φ , и $A\varphi = (A\varphi_+, A\varphi_-)$, $\dot{\varphi} = (\dot{\varphi}_+, \dot{\varphi}_-)$. В матричной записи мы имеем

$$\begin{aligned}\hat{T}(\varphi) &= \hat{T}A\varphi + \hat{T}\Lambda\varphi, \\ (\hat{T}\varphi)' &= A(\hat{T}\varphi) + \Lambda(\hat{T}\varphi),\end{aligned}\quad (17)$$

так как для базиса $\hat{T}\varphi$ также справедливо уравнение (13). Коэффициенты оператора A выражаются через u , u' , u'' , ... с постоянными коэффициентами. Поэтому получаем

$$\begin{aligned}\hat{T}A\varphi &= A\hat{T}\varphi, \\ (\hat{T}\varphi)' &= \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\varphi + \hat{T}\varphi = \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\varphi + \hat{T}A\varphi + \hat{T}\Lambda\varphi, \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\varphi &= (\Lambda\hat{T} - \hat{T}\Lambda)\varphi.\end{aligned}\quad (18)$$

Последнее равенство равносильно уравнению (15). Если потенциал $u(x)$ быстроубывающий, то $x_0 = -\infty$, $x_0 + T = +\infty$, $T = \infty$, $u \rightarrow 0$, $u' \rightarrow 0$, ..., $u^{(n)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Поэтому матрица Λ для быстроубывающих потенциалов окажется постоянной. Вследствие этого ГГКМ (15) будет сразу проинтегрировано. Например, для основного уравнения КДФ мы имеем (базис $(2')$):

$$\begin{aligned}A &= 4 \frac{d^3}{dx^3} - 3 \left(u \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u \right), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\mu} & \frac{\mu}{\lambda} \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}, \\ \lambda &= ik^{-1} \left(-\frac{u''}{2} + u^2 - 4ik^4 \right), \\ \mu &= u' + ik^{-1} \left(\frac{u''}{2} - u^2 - 2k^2 u \right);\end{aligned}\quad (19)$$

если $u(x_0) = u'(x_0) = \dots = u^{(n)}(x_0) = 0$, то $\Lambda = \begin{pmatrix} 4ik^3 & 0 \\ 0 & -4ik^3 \end{pmatrix}$ и уравнение (15) сведется к виду (I.2.3):

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = 8ik^3 b.$$

Именно эта ситуация реализуется в случае быстроубывающих потенциалов. В периодическом случае мы получили общее уравнение (15), где матрица Λ зависит сложным об-

разом от $u(x_0)$, $u'(x_0)$, ... Это уравнение уже не интегрируется — во всяком случае, столь просто. В базисе (2'') матрица Λ всегда полиномиальна по E . Для КдФ она имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -u' & u'' - 2u^2 - 2uE + 4E^2 \\ 2(u + 2E) & u' \end{pmatrix}. \quad (19')$$

След матрицы $\hat{T}$ является интегралом уравнения (15). Действительно, этот факт вытекает из того, что правая часть (15) имеет вид коммутатора. Так как $\frac{1}{2} \text{Sp } \hat{T} = a_R$ определяет блоховский спектр оператора L , то весь этот спектр сохраняется (т. е. сохраняются все края зон E_i). Этот набор интегралов, однако, эквивалентен уже ранее найденным законам сохранения Крускала (см. § 5 гл. I), так как набор концов зон полностью определяет функцию $a_R(E)$, где E_i определяются из уравнения $a_R^2 = 1$, если все кратности равны единице.

Дело в том, что целая функция $a_R^2(E)$ комплексной переменной E имеет порядок $\frac{1}{2}$, т. е. оценивается по модулю $|a_R^2(E)| < \text{const} \cdot \exp(\alpha \sqrt{E})$. Такие функции полностью определяются набором значений $a_R^2 = 1$ с указанием кратности с помощью разложения в бесконечное произведение.

Таким образом, прямой аналог процедуры ГГКМ не дает серьезных результатов в периодической задаче, хотя периодический аналог уравнения ГГКМ (15) будет полезен в ряде случаев.

Выведем еще одно полезное уравнение для матрицы $\hat{T}$. Так как матрица $\hat{T}$ зависит от параметра x_0 и при изменении x_0 ее собственные числа не меняются, то можно написать

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0} = [Q, \hat{T}]. \quad (20)$$

Здесь матрица Q зависит от $u(x_0)$, $u'(x_0)$, ..., E . В базисах (2') и (2'') для матрицы Q несложно получаются формулы

$$\text{базис (2'')}: \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & E - u \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\text{базис (2')}: \quad Q = ik \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{iu}{2k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

§ 2. Стационарная задача для высших КДФ. Метод отыскания точных решений КДФ

Как было указано в предыдущем параграфе, периодический аналог уравнения ГГКМ (1.15) не дает серьезных результатов для интегрирования периодической задачи, в отличие от быстроубывающей. При отыскании точных решений КДФ мы воспользуемся другим методом. В гл. I вводились так называемые «высшие уравнения КДФ», также интегрируемые методом обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера L (см. (I.6.1)). Все эти уравнения имеют вид

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=0}^n c_j \frac{\delta I_{n-j}}{\delta u(x)} \right), \quad c_0 = 1, \quad (1)$$

где I_{n-j} — интегралы (законы сохранения) Крускала уравнения КДФ, указанные в § 5 гл. I. Все эти уравнения представляют собой гамильтоновы системы с бесконечным числом степеней свободы, коммутирующие друг с другом, согласно § 6 гл. I. Эти уравнения также допускают представление Лакса

$$\dot{L} = [L, A], \quad (2)$$

где $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$, $A = A_n + \sum_{j=1}^n A_{n-j} c_j$, c_j — константы.

Наша программа построения точных решений КДФ такова: найдем все стационарные решения любого из высших КДФ

$$\frac{\delta I_n}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_{n-1}}{\delta u} + \dots + c_n \frac{\delta I_0}{\delta u} = \text{const} = -c_{n+1}. \quad (3)$$

Возьмем любое из найденных решений уравнения (3) в виде начального условия для исходного КДФ. Используем то, что при сдвиге по времени в силу КДФ из начальной функции будет с течением времени в любой момент получаться снова функция этого же типа: решение уравнения (3) с теми же константами $c_1, \dots, c_n, c_{n+1}$. Для реализации этой программы необходимо полностью решить стационарное уравнение (3) и найти зависимость этих функций $u(x)$ от времени t в силу КДФ.

Говоря языком динамических систем, любое из высших КДФ определяет нам однопараметрическую группу преобразований пространства всех функций $u(x)$, причем все эти группы попарно коммутируют. Поэтому совокупность (множество) стационарных точек (решений) любого из высших КДФ инвариантна относительно всех остальных высших КДФ — в частности, исходного КДФ.

В виде простейшего примера рассмотрим случай $n = 1$. Уравнение (3) здесь имеет вид

$$\frac{\delta I_1}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_0}{\delta u} = -c_2, \quad (4)$$

где

$$I_0 = \int \frac{u^2}{2} dx, \quad I_1 = \int \left(\frac{u'^2}{2} + u^3 \right) dx.$$

Таким образом, уравнение (4) приобретает вид

$$u'' = - \frac{\partial}{\partial u} \left(u^3 + \frac{c_1}{2} u^2 + c_2 u \right). \quad (5)$$

Решение этого уравнения есть эллиптическая функция Вейерштрасса

$$x - x_0 = \int \frac{du}{\sqrt{2u^3 + c_1 u^2 + 2c_2 u + d}}. \quad (6)$$

Само КДФ имеет вид

$$\dot{u} = 6uu' - u''' = \left(\frac{\delta I_1}{\delta u} \right)'$$

Функция $u(x - ct)$ является решением уравнения КДФ, если $c = c_1$. Мы получаем обычную кноидальную волну.

Более сложным является случай $n = 2$. Уравнение (3) будет иметь четвертый порядок. Его элементарное интегрирование весьма затруднительно.

В дальнейшем выяснится, что все быстроубывающие многосолитонные решения КДФ $u(x, t)$ удовлетворяют одному из уравнений (3) по x . Оказывается, почти все решения уравнения (3) периодичны или квазипериодичны по x . Поэтому соответствующие решения КДФ являются периодическим и квазипериодическим аналогом многосолитонных решений (см. далее § 10 этой главы). Все уравнения (3) имеют вид вариационных производных

$$\frac{\delta I}{\delta u} = 0; \quad (7)$$

здесь $I = I_n + c_1 I_{n-1} + \dots + c_n I_0 + c_{n+1} I_{-1}$, где $I_{-1} = \int u \, dx$. Отсюда с учетом невырожденности лагранжианов I_n извлекается гамильтоновость уравнений (3) по x

$$p_i' = \partial H / \partial q_i, \quad q_i' = -\partial H / \partial p_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$q_i = u^{(i-1)}, \quad p_i = \sum_{s=0}^{n-i} \left(\frac{d^s}{dx^s} \frac{\partial Q}{\partial u^{(i+s)}} \right) (-1)^s \quad (8)$$

и гамильтониан H имеет вид

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i u^{(i)} - Q, \quad (9)$$

причем $dH/dx \equiv u' \delta I / \delta u$.

Построим интегралы уравнения (7) по x . Согласно инволютивности интегралов Крускала для КДФ, установленной в § 6 гл. I, мы имеем

$$\{I, I_i\} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

или, если

$$I_i = \int P_i(u, u', \dots, u^{(i)}) \, dx,$$

$$I = \int (P_n + c_1 P_{n-1} + \dots + c_{n+1} u) \, dx = \int Q \, dx,$$

то

$$\frac{\delta I}{\delta u} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_i}{\delta u} = \frac{dT_i}{dx}, \quad (10)$$

где $T_i(u, u', \dots, u^{(2n-1)})$ — некоторый многочлен от $u, u', u'', \dots, u^{(2n-1)}$.

Из соотношения (10) и уравнения (7) мы видим, что T_i — интеграл уравнения (7). Итак, мы имеем набор интегралов $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ уравнения (7). Так как

$$I_0 = \int \frac{u^2}{2} \, dx, \quad \frac{dT_0}{dx} = \frac{\delta I}{\delta u} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_0}{\delta u} = u' \frac{\delta I}{\delta u},$$

то $T_0 = H(p, q)$ согласно обычному определению энергии.

Оказывается, все интегралы $H = T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ инволютивны и независимы; гамильтонова система (7) вполне интегрируема; «почти» все решения окажутся периодическими и квазипериодическими функциями (возможно, с полюсами). Однако инволютивность этих

интегралов трудно проверить прямым вычислением. Ее удобно непосредственно извлечь из коммутативности всех высших КДФ, рассматриваемых как однопараметрические группы преобразований пространства функций $u(x)$.

Рассмотрим высшее КДФ с номером i , имеющее вид $\dot{u} = \left(\frac{\delta I_i}{\delta u}\right)'$, как группу преобразований множества стационарных решений уравнения (1). Стационарные решения уравнения (1) параметризуются набором констант $c_1, \dots, c_{n+1}$ и начальной точкой при $x = x_0$, т. е. набором фазовых координат $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$, указанных в (8). Зависимость этих решений от x определяется далее из гамильтоновой системы с гамильтонианом (9).

Тем самым высшее КДФ с номером i , рассматриваемое на множестве стационарных точек уравнения (1), изображается как динамическая система в пространстве $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. При разных номерах i эти системы, по определению, коммутируют как группы преобразований. Мы проверим, что полученная конечномерная система с номером i является гамильтоновой с теми же каноническими переменными p, q и гамильтонианом T_i . Это, очевидно, достаточно для инволютивности интегралов T_i . Кроме того, отсюда вытекает другой важный вывод: само исходное КДФ в координатах p, q запишется как гамильтонова система с гамильтонианом $H_1 = T_1$.

Согласно формулам (8), (9), гамильтониан H имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n p_i u^{(i)} - Q = \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} + p_n q'_n - Q(q_1, \dots, q_n, q'_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} + \Phi(q_1, \dots, q_n, p_n), \end{aligned} \quad (11)$$

где $p_n = \partial Q / \partial q'_n$ согласно (8). Отсюда вытекают, в частности, простые соотношения:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_{j-1}} \equiv 1, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial q_s} \equiv 0, \quad l < n, \quad s < n. \quad (12)$$

Легко непосредственно проверить общее тождество:

$$-p_1' - \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\delta I}{\delta u}. \quad (13)$$

Поэтому лишь первое из гамильтоновых уравнений с гамильтонианом $H(p, q)$ эквивалентно уравнению $\delta I / \delta u = 0$. Все же остальные гамильтоновы уравнения, кроме этого, можно рассматривать как соотношения, позволяющие выразить $u, u', \dots, u^{(2n-1)}$ через фазовые переменные $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Тождество (13) в силу (10) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dT_i}{dx} &= \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} - p_1' \right) \left(\frac{d}{dx} \frac{\delta I_i}{\delta u} \right) = \\ &= \frac{\partial T_i}{\partial p_1} p_1' - \sum_{j=2}^n \frac{\partial T_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тождество (13) верно для любой функции $u(x)$, поэтому в тождестве (14) можно считать, что p_1' — любое число. Отсюда имеем

$$\frac{d}{dx} \frac{\delta I_1}{\delta u} \equiv \frac{\partial T_i}{\partial p_1}. \quad (15)$$

Рассмотрим теперь поток $\dot{u} = (\delta I_i / \delta u)'$ в фазовом пространстве (p, q) . Производные вдоль этого потока будем обозначать точкой. Производные по x в силу гамильтониана H будем обозначать штрихом. Из (15) следует равенство $\dot{q}_1 = -\partial T_i / \partial p_1$, так как $u = q_1$. Если уравнение $\dot{q}_j = -\partial T_i / \partial p_j$ ($j = 1, \dots, k$) уже выведено, то для $j = k+1$ имеем

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{u}^{(k)} = (\dot{u}^{(k-1)})' = \dot{q}_k' = -\frac{d}{dx} \frac{\partial T_i}{\partial p_k}. \quad (16)$$

Скобку Пуассона в пространстве (p, q) мы обозначим через $[,]$. Из уравнения (16) и тождества Якоби получим

$$\begin{aligned} \dot{q}_{k+1} &= -\frac{d}{dx} \frac{\partial T_i}{\partial p_k} = -[H, [T_i, q_k]] = \\ &= [T_i, [H, q_k]] + [q_k, [H, T_i]]. \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, имеют место равенства

$$[q_k, H] = -\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k' = (u^{(k-1)})' = u^{(k)} = q_{k+1}.$$

Так как T_i — интеграл гамильтоновой системы (7), то $[T_i, H] = 0$. Поэтому для q_{k+1} получаем

$$\dot{q}_{k+1} = - \frac{\partial T_i}{\partial p_{k+1}} = - \frac{d}{dx} \frac{\partial T_i}{\partial p_k}.$$

Тем самым половина гамильтоновых уравнений выведена. Выведем вторую половину уравнений, начиная с индекса n до единицы.

Так как $(\dot{\zeta}_n)' = (q_n)'$, то имеем

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_n} \right)' = \left(\frac{\partial T_i}{\partial p_n} \right)'.$$

Из формулы (11) извлекаются равенства

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_n},$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_n} \right)' = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_j} \frac{\partial T_i}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2} \dot{p}_n = (q_n)'. \quad (18)$$

Далее, мы получаем из тождества Якоби и вида $H(p, q)$

$$\begin{aligned} (\dot{\zeta}_n)' &= - \left[H, \frac{\partial T_i}{\partial p_n} \right] = - [H, [T_i, p_n]] = \\ &= [T_i, [q_n, H]] + [q_n, [H, T_i]] = - \left[T_i, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right] = \\ &= - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_j} \frac{\partial T_i}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2} \frac{\partial T_i}{\partial q_n}. \quad (19) \end{aligned}$$

Сопоставляя (19) и (18), находим уравнение

$$\dot{p}_n = \frac{\partial T_i}{\partial q_n}.$$

Выведем теперь уравнение Гамильтона для $\dot{p}_j$ для всех $j < n$; используем равенство $(\dot{p}_j)' = (p_j)'$. Если для номера j гамильтоновость уравнения для $\dot{p}_j$ уже установлена,

мы получаем

$$\begin{aligned}
 (\dot{p}_i)' &= \left[H, \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right] = [H, [p_j, T_i]] = -[p_j, [T_i, H]] + \\
 &\quad + [[H, p_j], T_i] = \left[T_i, \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] = \\
 &= \sum_l \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_l} \frac{\partial T_i}{\partial p_l} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_j} \frac{\partial T_i}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_{j-1}} \frac{\partial T_i}{\partial q_{j-1}}, \\
 (\dot{p}_j)' &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial q_j} \frac{\partial T_i}{\partial p_l} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_n} \frac{\partial T_i}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_{j-1}} \dot{p}_{j-1}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Так как из вида гамильтониана H (см. (11)) следует равенство

$$\partial^2 H / \partial q_j \partial p_{j-1} = 1,$$

получаем окончательно

$$\dot{p}_{j-1} = \partial T_i / \partial q_{j-1}.$$

Тем самым мы установили, что поток (высшее КдФ $\dot{u} = (\delta I_i / \delta u)'$) является гамильтоновой системой в переменных p, q с гамильтонианом T_i . При этом все скобки Пуассона $[T_l, T_s]$ равны нулю, поскольку соответствующие потоки коммутируют. Отсюда уже следует, что стационарное уравнение (7) является вполне интегрируемой (по Лиувиллю) системой.

Заметим, что при выводе гамильтоновости потока $\dot{u} = (\delta I_i / \delta u)'$ в переменных p, q (т. е. на множестве стационарных точек другого потока) мы опирались лишь на тождество (10), означающее равенство нулю скобок Пуассона: $\{I, I_i\} = 0$. Поэтому фактически мы вывели общее утверждение о сохранении гамильтоновости при такой операции ограничения потока. Это утверждение неочевидно а priori ввиду отсутствия какой-либо прямой связи между скобками Пуассона в функциональном пространстве $u(x)$ и скобками Пуассона в конечномерном пространстве (p, q) для уравнения типа Эйлера — Лагранжа $\delta I / \delta u = 0$. Тем не менее, утверждение о сохранении гамильтоновости при описанной выше операции ограничения потока оказывается чрезвычайно общим. Итак, мы установили факт инволютивности интегралов $H = T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ стационарного уравнения (7) для высших КдФ. Первым нетривиальным случаем является случай $n = 2$. Урав-

нение (3) приобретает вид

$$\frac{\delta I}{\delta u} = \frac{\delta I_2}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_1}{\delta u} + c_2 \frac{\delta I_0}{\delta u} = -c_3, \quad I = \int Q \, dx. \quad (21)$$

Заменой $u \rightarrow u + \text{const}$ можно добиться того, что $c_1 = 0$.

Прямое вычисление по формулам (10), (1.5.6), (3) дает нам формулы для интегралов ($p, q \rightarrow \tilde{p}, \tilde{q}$):

$$\begin{aligned} T_0 &= H = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 + V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2), \\ aT_0 + T_1 &= \tilde{p}_1^2 + 2u\tilde{p}_1\tilde{p}_2 + (2q - c_2)\tilde{p}_2^2 + D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2), \\ u &= \tilde{q}_1; \quad q = \tilde{q}_2 = \frac{\partial Q}{\partial u}, \quad \tilde{p}_1 = q', \quad \tilde{p}_2 = -u', \end{aligned} \quad (22)$$

$$V = -\frac{q^2}{2} - \frac{5}{2}qu^2 - \frac{5}{8}u^4 + \frac{c_2}{2}u^2 + c_3u,$$

$$D = u^5 + c_2u^3 - 4uq^2 + 2c_2uq + 2c_3q.$$

Напомним, что $T_1(p, q)$ есть гамильтониан временной динамики в силу КдФ в этих переменных. Гамильтонова система (21) с двумя степенями свободы зависит от двух констант c_2, c_3 ($c_1 = 0$) и является вполне интегрируемой в смысле Лиувилля. Известен алгоритм введения угловых переменных на поверхности $T_0 = \text{const}$, $T_1 = \text{const}$; однако этот алгоритм технически неудобен, и мы не будем его использовать. Интегрирование этих уравнений будет завершено позднее (в § 8 гл. II) из других соображений.

§ 3. Стационарные решения высших КдФ и потенциалы уравнения Шредингера с конечным числом зон. Римановы поверхности

Периодические потенциалы $u(x)$ одномерного уравнения Шредингера, удовлетворяющие стационарным высшим КдФ (2.3), обладают замечательным спектральным свойством: в их блоховском спектре имеется лишь конечное число запрещенных зон. Вывод этого факта будет приведен ниже в данном параграфе. Свойство конечнотонности лежит в основе отыскания точных решений КдФ, а также аналитического вида самих конечнотонных потенциалов и их собственных функций. Давно известно, что эллиптическая функция Вейерштрасса $u = 2\wp(x)$ является периодическим потенциалом (уравнение Ламе) с одной конечной запрещенной зоной. Этот факт указан, например, в [26]

(см. т. 3). Там же указано, что высшие потенциалы Ламе $u_n(x) = n(n+1)\wp(x)$ при всех целых n имеют ровно n конечных запрещенных зон в блоховском спектре. Других конечнозонных потенциалов до теории уравнения КДФ известно не было. Обратим внимание на то, что для эллиптической функции Вейерштрасса $u(x) = 2\wp + \text{const}$ функция $u(x - ct)$ при определенном c является кноидальной волной уравнения КДФ и удовлетворяет стационарному уравнению (2.3) при $n = 1$. Это совпадение оказывается не случайным: мы покажем, что все периодические и квазипериодические решения стационарных высших КДФ (2.3) являются конечнозонными потенциалами, а быстроубывающие решения тех же уравнений — безотражательными потенциалами.

Предположим, что потенциал является периодическим с периодом T , как в § 1. Воспользуемся уравнениями (1.15) и (1.20) для матрицы трансляции $\hat{T}(x_0, t, E)$, где матрица $\hat{T}$ зависит от t в силу какого-либо из высших КДФ (2.1). Уравнения (1.15) и (1.20) должны быть совместны:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right).$$

Из требования совместности вытекает

$$\frac{\partial}{\partial t} [Q, \hat{T}] = \frac{\partial}{\partial x_0} [\Lambda, \hat{T}], \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial t}, \hat{T} \right] + \left[Q, \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0}, \hat{T} \right] + \left[\Lambda, \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0} \right].$$

Из тождества Якоби

$$[Q, [\Lambda, \hat{T}]] + [\hat{T}, [Q, \Lambda]] + [\Lambda, [\hat{T}, Q]] = 0$$

получаем

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} - [\Lambda, Q], \hat{T} \right] = 0. \quad (2)$$

Матрицы Λ , Q , $[\Lambda, Q]$ имеют нулевой след и зависят полиномиально от E , $u(x_0)$, $u'(x_0)$, ... Отсюда следует окончательное уравнение, которое несколько иначе было выведено в § 8 гл. I, — см. (I.8.11), где $Q = U$, $V = \Lambda$:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} - [\Lambda, Q] = 0 \quad (3)$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda, \frac{\partial}{\partial x_0} - Q \right] = 0.$$

Матрица Q указана формулами (1.21). Вычисление матрицы Λ через коэффициенты оператора A указано в формулах (1.16) для базиса (1.2'). Уравнение (3) дает новое весьма полезное коммутационное представление уравнения КдФ и его высших аналогов, отличающееся от представления Лакса $\dot{L} = [L, A]$. В базисе (1.2'') обе матрицы Λ, Q полиномиально зависят от параметра E , а также от $u(x_0), \dots, u^{(k)}(x_0)$. Удобство этого представления, например, видно из следующего. Рассмотрим стационарное уравнение (2.3) для любого из высших КдФ. Тогда мы имеем

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{\Lambda} = \dot{Q} = \dot{T} = 0, \quad \dot{L} = [L, A] = 0. \quad (4)$$

Сопоставляя уравнения (4) и (3), получаем

$$\frac{d\Lambda}{dx_0} = [\Lambda, Q]; \quad (5)$$

это дает нам представление типа Лакса для стационарных высших КдФ (2.3), через замену x_0 на x . Из представления (5) мы сразу получаем интегралы уравнения (2.3), составленные из коэффициентов характеристического многочлена матрицы Λ :

$$\det(\lambda \cdot 1 - \Lambda) = P(\lambda, E) = \lambda^2 - (\text{Sp } \Lambda) \lambda + \det \Lambda. \quad (6)$$

Однако, $\text{Sp } \Lambda = 0$. Поэтому

$$\det(\lambda \cdot 1 - \Lambda) = \lambda^2 + \det \Lambda = \lambda^2 + R(E), \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx_0} \det \Lambda = 0.$$

Для высшего КдФ с номером n сам детерминант $-\det \Lambda = R(E)$ является полиномом от E степени $2n + 1$ с постоянным старшим членом и коэффициентами, полиномиально зависящими от $u(x_0), u'(x_0), \dots, u^{(2n-1)}(x_0)$:

$$R(E) = E^{2n+1} + a_1 E^{2n} + \dots + a_{2n} E + a_{2n+1}. \quad (8)$$

Можно показать, что первые $n + 1$ коэффициентов $a_1, \dots, a_{n+1}$ фактически выражаются лишь через констан-

ты $c_1, \dots, c_{n+1}$, входящие в уравнение (2.3); нетривиальными интегралами являются $Q_j = a_{n+1+j}$, $j = 1, \dots, n$. Набор интегралов $Q_1, \dots, Q_n$ для системы (2.3) с n степенями свободы эквивалентен набору интегралов $T_0, \dots, T_{n-1}$, указанных в § 2 (см. (2.10)). (На самом деле эти наборы даже совпадают.) Для базиса (1.2') решений $\varphi = (\varphi_+, \varphi_-)$ мы из формул (1.13) получим

$$L\varphi - E\varphi = 0, \quad A\varphi - \Lambda\varphi = 0. \quad (9)$$

Поэтому, в частности, в полиноме $P(\lambda, E) = \det(\lambda \cdot 1 - A)$ можно вместо E подставить оператор L и вместо λ — оператор A . После этого получится соотношение между операторами L и A , если $[L, A] = 0$:

$$P(A, L) = A^2 + R(L) = 0. \quad (10)$$

Здесь $R(E)$ — полином степени $2n + 1$ с постоянными коэффициентами. Соотношение (10) вытекает из формул (9), поскольку оператор $P(A, L)\varphi \equiv 0$ при всех E , в силу (9).

Применим периодический аналог уравнения ГГКМ (1.15), учитывая, что $\hat{T} = 0$:

$$[\Lambda, \hat{T}] = 0. \quad (11)$$

Напомним, что блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, E)$ определялась как собственный вектор матрицы трансляции (см. (1.11)):

$$\hat{T}\psi_{\pm} = e^{\pm ipT}\psi_{\pm}, \quad L\psi_{\pm} = E\psi_{\pm}.$$

Так как матрицы $\hat{T}$ и Λ коммутируют (см. (11)), то блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, E)$ является собственным вектором также и для матрицы Λ :

$$\Lambda\psi_{\pm} = \mu_{\pm}\psi_{\pm}. \quad (12)$$

Вспомним теперь, что матрица $\Lambda(E)$ полиномиально зависит от E в базисе (1.2"). В линейной алгебре известен такой простой факт: если матрица Λ полиномиально зависит от параметра E , то ее собственные векторы и собственные значения (как функции от E) будут многозначными мероморфными функциями от E , причем риманова поверхность этих многозначных функций $\lambda(E)$ опреде-

ляется из уравнения

$$0 = P(\lambda, E) = \det(\lambda \cdot 1 - \Lambda(E)) = 0. \quad (13)$$

В нашем случае матрица Λ имеет порядок два и $\text{Sp } \Lambda = 0$. Отсюда мы имеем

$$\lambda_{\pm}(E) = \mu_{\pm}(E) = \pm \sqrt{R(E)}. \quad (14)$$

Формула (14) дает нам двулистную риманову поверхность, ветвящуюся в точках $E_0, \dots, E_{2n}$:

$$R(E_j) = \det \Lambda(E_j) = 0, \quad j = 0, \dots, 2n. \quad (15)$$

Таким образом, блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, E)$ оказывается мероморфной функцией комплексной переменной E , определенной на двулистной римановой поверхности $\sqrt{R(E)}$ с точками ветвления в нулях $E_0, E_1, \dots, E_{2n}$. Покажем, что эти точки ветвления E_j являются точно концами зон блоховского спектра. Действительно, функция $\psi_{\pm}(x, E)$ согласно (1.11) определялась как собственный вектор операторов L и $\hat{T}$ и зоны спектра совпадали с отрезками вещественности квазиимпульса $p(E)$. Концы зон согласно § 1 определялись как точки E_j , где $pT = 0$, π , $\exp(\pm ipT) = \pm 1$ и матрица $\hat{T}$ жорданова, т. е. имеет лишь один собственный вектор при двукратно вырожденном собственном числе. Таким образом, над каждым значением энергии E (вещественным и комплексным) мы имеем ровно две функции $\psi_{\pm}(x, E)$ кроме концов зон E_j , где эти функции сливаются в одну. Мы видим, что блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, E)$ для любого периодического потенциала определена фактически на римановой поверхности, причем точками ветвления являются концы зон. Однако, у типичного потенциала число зон бесконечно, и тем самым число точек ветвления бесконечно. В нашем случае, если потенциал удовлетворяет стационарному уравнению (2.3), число точек ветвления и тем самым число зон конечно и равно n . Разрешенные зоны располагаются так:

$$(E_0 E_1), (E_2 E_3), \dots, (E_{2n-2} E_{2n-1}), (E_{2n} \infty)$$

(рис. 4). Для того чтобы $\psi_{\pm}(x, E)$ имела наименьшее число нулей и полюсов, ее удобно нормировать следующим

образом:

$$\psi_{\pm}(x, E) = 1, \quad x = x_0 \quad (16)$$

для всех E .

Нормированную так собственную функцию мы обозначим через $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$. Очевидно, при вещественных $p(E)$ — т. е. в разрешенных зонах — мы имеем $\psi_- = \bar{\psi}_+$.

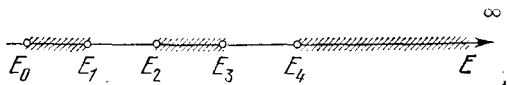


Рис. 4. Разрешенные зоны (заштрихованы).

Для гладкого вещественного потенциала нули и полюсы функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$, располагаются по одному в запрещенных зонах или на их границах. Более детально аналитические свойства функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ на римановой поверхности мы выясним в следующем параграфе.

§ 4. Аналитические свойства блоховской собственной функции конечнозонного потенциала на римановой поверхности

Риманову поверхность двузначной функции $\sqrt{R(E)}$ мы обозначим буквой Γ , а точки этой поверхности буквами $P, Q, \dots$, которые изображаются точкой E -плоскости и знаком листа: $P = (E, \pm)$, кроме точек ветвления $E_0, E_1, \dots, E_{2n}$, где $(E_j, +)$ и $(E_j, -)$ изображают одну и ту же точку римановой поверхности. Операция «забывания знака» $P = (E, \pm) \rightarrow E$ может рассматриваться как проекция римановой поверхности Γ на E -плоскость или как числовая (комплексная) функция точки римановой поверхности $E(P)$. Поскольку риманова поверхность Γ определяется спектром оператора L (набором концов зон E_j , являющихся точками ветвления), то мы часто будем саму риманову поверхность Γ называть «спектром» оператора L . Блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$, нормированная условием (3.16), может рассматриваться как однозначная функция $\psi = \psi(x, x_0, P)$ точки $P = (E, \pm)$ на римановой поверхности, зависящая от параметров x, x_0 .

Введем функцию $i\tilde{\chi}_{\pm} = d \ln \psi_{\pm}/dx = \chi - ik$ (см. (I.5.2)). Согласно определению имеем формулу

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = \exp \left\{ i \int_{x_0}^x \tilde{\chi}_{\pm}(x, x_0, E) dx \right\}, \quad (1)$$

причем $\tilde{\chi}_{\pm}$ не зависит от x_0 . Функция $\tilde{\chi}_{\pm}$ также является однозначной функцией на римановой поверхности Γ . Из определения вытекает уравнение Риккати для $\tilde{\chi}_{\pm}$ и формула для квазиимпульса:

$$\begin{aligned} i\tilde{\chi}'_{\pm} - \tilde{\chi}_{\pm}^2 &= u - E, \\ \pm p(E) &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \tilde{\chi}_{\pm} dx + n\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

Изменим далее обозначения из § 5 главы I $\chi_R \rightarrow \chi_I$, $\chi_I - k \rightarrow \chi_R$. Мы получаем:

$$\tilde{\chi}_{\pm} = \chi_R + i\chi_I, \quad \chi_I = -\frac{1}{2}(\ln \chi_R)'. \quad (3)$$

Поэтому, в частности, имеем

$$p(E) = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R dx. \quad (4)$$

Сопоставляя (3) с (1), получаем выражения для $\psi_{\pm}$:

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = \sqrt{\frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}} \exp \left\{ \pm i \int_{x_0}^x \chi_R dx \right\}. \quad (5)$$

Отсюда следует

$$\psi_+ \psi_- = \frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}. \quad (6)$$

Произведение $\psi_+ \psi_-$ по самому определению уже является однозначной функцией на E -плоскости (напомним, что $\psi_+ \psi_- = |\psi_{\pm}|^2$ в разрешенных зонах, где $\psi_+ = \bar{\psi}_-$). В базисе (1.2'') функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ имеет вид

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = c(x, x_0, E) + i \alpha_{\pm}(x_0, E) s(x, x_0, E) \quad (7)$$

в силу нормировки (3.16).

Оказывается, коэффициент $\alpha_{\pm}$ совпадает с $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$:

$$\alpha_{\pm}(x_0, E) = \tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E). \quad (8)$$

Дадим вывод формулы (8). При $x = x_0$ мы имеем

$$\psi'_{\pm}(x_0, x_0, E) = i\alpha_{\pm}(x_0, E),$$

$$\psi_{\pm}(x_0, x_0, E) = 1.$$

Поэтому $-i(\ln \psi_{\pm})'_{x=x_0} = \tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \alpha_{\pm}(x_0, E)$. Так как $c(x, x_0, E)$ и $s(x, x_0, E)$ являются однозначными целыми функциями комплексной переменной E , то полюсы $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ на римановой поверхности Γ и их кратности точно совпадают с полюсами $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$ и тем самым зависят лишь от x_0 .

Для гладких вещественных потенциалов $u(x)$ из этого факта вместе с формулой (6) вытекает важный вывод: если полюс блоховской функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ находится в точке $(E, +)$ поверхности Γ , то в точке $(E, -)$ полюса нет (за исключением точек ветвления $(E_j, +) = (E_j, -)$). Действительно, из формулы (7) следует, что полюсы $\psi_{\pm}$ те же, что и полюсы $\tilde{\chi}_{\pm}$ с учетом кратностей. Если $\psi_{\pm}$ имеет полюсы одновременно в точках $(E, +)$ и $(E, -)$ кратностей m_+ и m_- , то произведение $\psi_+ \psi_-$ будет иметь в точке E комплексной плоскости полюс кратности $m_+ + m_-$, т. е. большей. Это противоречит формуле (6), из которой следует, что произведение $\psi_+ \psi_-$ имеет те же полюсы, что и $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$ вместе с кратностями.

Позднее мы покажем, что все полюсы функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ просты и находятся в точках $P_j = (\gamma_j(x_0), \pm)$, $j = 1, \dots, n$, по одному в каждой запрещенной зоне конечной длины или в их границах E_j .

Выведем формулу для $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$ через коэффициенты матрицы трансляции $\hat{T}(x_0, E)$. Так как $\psi_{\pm} = c + i\tilde{\chi}_{\pm}(x_0)s$ в силу (8) и $\hat{T}\psi_{\pm} = e^{\pm ipT}\psi_{\pm}$, $\hat{T}c = \alpha_{11}c + \alpha_{12}s$, $\hat{T}s = \alpha_{21}c + \alpha_{22}s$, мы из определения собственного вектора для $\hat{T}$ через коэффициенты α_{ij} получим

$$\begin{aligned} \hat{T}\psi_{\pm} &= \hat{T}(c + i\tilde{\chi}_{\pm}s) = \alpha_{11}c + \alpha_{12}s + i\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha_{21}c + \alpha_{22}s) = \\ &= e^{\pm ipT}(c + i\tilde{\chi}_{\pm}s) \end{aligned}$$

или

$$\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \frac{\sqrt{1 - a_R^2}}{\alpha_{21}} + \frac{i}{2} \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \quad (9)$$

где $2a_R = \text{Sp } \hat{T} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$. При вещественных E все α_{ij} вещественны. В разрешенных зонах по E имеем $a_R^2 \leq \leq 1$ и поэтому величина $\tilde{\chi}_{\pm} = \chi_R + i\chi_I$, где

$$\begin{aligned}\chi_R(x_0, E) &= \frac{\sqrt{1 - a_R^2}}{\alpha_{21}}, \\ \chi_I(x_0, E) &= -\frac{1}{2} (\ln \chi_R)' = \frac{1}{2} \frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{21}}.\end{aligned}\quad (10)$$

При вещественных k ($k^2 = E$) имеем $\alpha_{21} = (a_I + b_I) k^{-1}$.

Аналитические свойства целых функций $1 - a_R^2(E)$ и $\alpha_{21}(x_0, E)$ комплексной переменной E таковы: функция $1 - a_R^2(E)$ имеет простые нули в концах зон $E_0, \dots, E_{2n}$, если потенциал n -зонный, и двукратные нули в остальных точках E_γ ($\gamma > 2n$, $a_R^2 = 1$); все эти точки вещественны и $\hat{T}(x_0, E_\gamma) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В тех же точках E_γ функция $\alpha_{21}(x_0, E)$ имеет нули. Функция $\chi_R = \sqrt{1 - a_R^2}/\alpha_{21}$ двузначна и имеет асимптотику $\chi_R \sim \pm k$ при $E \rightarrow \infty$, как следует из уравнения Риккати (2) и уже указывалась в § 5 гл. I. Напомним, что функция $1 - a_R^2(E)$, как указывалось в § 1 данной главы, имеет порядок роста $1/2$ при $E \rightarrow \infty$ (т. е. оценивается $|1 - a_R^2| < Ce^{\alpha\sqrt{E}}$). Тем самым $1 - a_R^2$ определяется полностью как бесконечное произведение своими нулями:

$$1 - a_R^2(E) = \text{const} \prod_{j=0}^{2n} \left(1 - \frac{E}{E_j}\right) \prod_{\gamma > 2n} \left(1 - \frac{E}{E_\gamma}\right)^2. \quad (11)$$

Рассмотрим функцию $f(E)$, определяемую равенством

$$\chi_R(x_0, E) = \frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{2n} (E - E_j)}}{f(E)} = \frac{\sqrt{R(E)}}{f(E)}. \quad (12)$$

Из аналитических свойств функций $1 - a_R^2(E)$ и α_{21} следует, что корень в знаменателе извлекается (все нули E_γ двукратные) и нули знаменателя сокращаются с нулями числителя. Поэтому функция $f(E)$ — целая на всей E -плоскости.

Так как $\chi_R f(E) = \sqrt{R(E)}$ и $\sqrt{R(E)} \sim \sqrt{E^{2n+1}}$, $\chi_R \sim \sqrt{E}$, $E \rightarrow \infty$, то $f(E) \sim E^n$.

Вывод: $f(E)$ есть полином степени n (n — число зон)

$$f(E) = \prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x_0)). \quad (13)$$

Окончательно имеем следующие формулы для χ_R и χ_I :

$$\chi_R(x, E) = \frac{\sqrt{R(E)}}{\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x))}, \quad (14)$$

$$\chi_I = -\frac{1}{2} (\ln \chi_R)' = -\frac{1}{2} \frac{\left[\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x)) \right]'}{\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x))}.$$

Согласно формуле (6) получаем

$$\psi_+ \psi_- = \frac{\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x))}{\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x_0))}. \quad (15)$$

Вронскиан $W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1' \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2'$ любой пары решений уравнения $L\varphi = E\varphi$ не зависит от x . Из формулы (8) мы получаем в разрешенных зонах

$$W(\psi_+, \psi_-) = 2i\chi_R(x_0, E) = 2i \frac{\sqrt{R(E)}}{\prod_k (E - \gamma_k(x_0))}, \quad (16)$$

$$W(c, s) = -W(s, c) = -1.$$

Формулы (16) определяют аналитическое продолжение на все E величины $\chi_R(x, E)$ как комплексно-аналитическую функцию от E . Это определение может применяться и для комплексных потенциалов $u(x)$, где для $\tilde{\chi}_{\pm} = -i(\ln \psi_{\pm})'$ с учетом (3) получим

$$\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \frac{W(\psi_+, \psi_-)}{2i} - \frac{i}{2} \left(\frac{W'}{2iW} \right). \quad (17)$$

Такая величина $\tilde{\chi}_{\pm}$ удовлетворяет уравнению Риккати (2).

Как известно, для гладкого вещественного периодического потенциала $u(x)$ функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ обязана иметь нуль в каждой запрещенной зоне конечной длины. Отсюда следует, поскольку мы имеем ровно n нулей $\gamma_k(x)$ и n зон согласно формуле (15), что в каждой запрещенной зоне имеется ровно один нуль $\gamma_k(x)$ и ровно один полюс $\gamma_k(x_0)$. Более точно, как указывалось выше, полюс $\gamma_k(x_0)$ может лежать лишь на одном листе римановой поверхности Γ — либо в точке $P_+ = (\gamma_k, +)$, либо в точке $P_- = (\gamma_k, -)$, если эти точки различны (т. е. кроме ветвлений). Если же $\gamma_k(x_0) = E_j$ совпадает с точкой ветвления $(E_j, +) = (E_j, -)$, то произведение $\psi_+\psi_-$ имеет двукратный полюс на римановой поверхности Γ (заметим, что $\psi_+ = \psi_-$ при $E = E_j$). Локальная координата на Γ около этой точки связана с координатой на E -плоскости корневым преобразованием — поэтому на E -плоскости двукратности полюса нет.

Итак, мы приходим к следующим выводам ($u(x)$ — гладкий вещественный периодический потенциал):

1. Блоховская функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ мероморфна на римановой поверхности Γ и имеет асимптотику $\psi_{\pm} \sim \exp\{\pm i\sqrt{E}(x - x_0)\}$ при $E \rightarrow \infty$.

2. Функция $\psi_{\pm}$ имеет ровно n нулей $\gamma_i(x)$ и n полюсов $\gamma_i(x_0)$ по одному в запрещенных зонах или на их границах.

3. На поверхности Γ нули и полюсы $(\gamma_i, \pm)$ все простые; нуль или полюс могут лежать лишь в одной из двух точек $(\gamma_k, +)$ и $(\gamma_k, -)$.

4. Нули $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ являются функциями лишь от x ; эти точки поверхности $P_k = (\gamma_k(x), \pm)$ зависят от x точно так же, как полюсы $Q_k = (\gamma_k(x_0), \pm)$ зависят от x_0 : $P_k(x) \equiv Q_k(x_0)$ при $x \equiv x_0$, поскольку $\psi_{\pm}(x_0, x_0, E) \equiv 1$.

5. Функция $\chi_R = \frac{1}{2i}(\psi'_+\psi_- - \psi'_-\psi_+)$ выражается на поверхности Γ через набор нулей по формуле (14). Сопоставим формулу (14) с уравнением Риккати и асимптотическим разложением при $E \rightarrow \infty$ ($k^2 = E$) (см. (I. 5.3)):

$$\tilde{\chi}_{\pm}(x, k) = \pm k + \sum_{n \geq 0} \frac{\chi_{2n+1}(x)(-1)^{n+1}}{(2k)^{2n+1}} + i \sum_{n \geq 0} \frac{\chi_{2n+2}(x)(-1)^n}{(2k)^{2n+2}}. \quad (18)$$

Отсюда мы получим выражение коэффициентов $\chi_n(x)$ через набор нулей $\gamma_k(x)$, где χ_n вычислены через u , u' , u'' , . . . согласно § 5 гл. I. В частности, получаем

$$u(x) = -2 \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) + \sum_{j=0}^{2n} E_j, \quad (19)$$

$$\frac{1}{8} (3u^2 - u'') = \sum_{k < l} \gamma_k \gamma_l - \frac{1}{2} \sum_{i < j} E_i E_j + \frac{3}{8} \left(\sum_j E_j \right)^2.$$

§ 5. Некоторые приложения

I. Выведем уравнение по x для нулей и полюсов $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$. Рассмотрим величину

$$\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \frac{\sqrt{R(E)} - \frac{i}{2} \frac{d}{dx_0} \left[\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x_0)) \right]'}{\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x_0))}, \quad (1)$$

где полюсы $\tilde{\chi}_{\pm}$ расположены в одной (и только в одной) из точек $(\gamma_k(x_0), +)$ или $(\gamma_k(x_0), -)$ на римановой поверхности Γ над точкой $\gamma_k(x_0)$ в E -плоскости. Пусть полюс находится в точке $Q_k = (\gamma_k(x_0), +)$. Условие отсутствия полюса в точке $(\gamma_k, -)$ равносильно обращению в нуль при $E = \gamma_k(x_0)$ числителя формулы (1), поскольку знаменатель имеет нуль:

$$\sqrt{R(E)}|_{E=\gamma_k(x_0)} = \frac{i}{2} \frac{d}{dx_0} [\Pi(E - \gamma_k(x_0))] |_{E=\gamma_k(x_0)}. \quad (2)$$

Уравнение (2) можно разрешить относительно γ'_k . Сделав замену $x_0 \rightarrow x$, получим

$$\gamma'_k = \pm 2i \sqrt{R(\gamma_k)} \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)^{-1}. \quad (3)$$

При этом, согласно (4.19), потенциал имеет вид

$$u(x) = -2 \sum \gamma_k(x) + \sum E_j.$$

Пример 1. Пусть $n = 1$. Тогда имеем одно уравнение

$$\gamma'_1 = \pm 2i \sqrt{R(\gamma_1)} \quad (4)$$

при

$$u(x) = -2\gamma_1(x) + \sum_{j=0}^2 E_j. \quad (4)$$

Мы еще раз получаем однозонный потенциал Ламе.

Пример 2. Пусть $n = 2$. В этом случае имеем два уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= 2i \sqrt{R(\gamma_1)} (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}, \\ \gamma_2' &= 2i \sqrt{R(\gamma_2)} (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, отсюда получаем

$$-\frac{d\gamma_1}{\sqrt{-R(\gamma_1)}} = \frac{d\gamma_2}{\sqrt{-R(\gamma_2)}} = \frac{2dx}{\gamma_2 - \gamma_1} = d\tau. \quad (5)$$

При этом всегда $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$, так как γ_1 и γ_2 лежат в различных запрещенных зонах по E , разделенных разрешенной зоной:

$$\begin{aligned} E_0 < E_1 \leq \gamma_1 \leq E_2 < E_3 \leq \gamma_2 \leq E_4, \\ E_1 < E_2, \quad E_3 < E_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (5), очевидно, можно проинтегрировать, после чего получим потенциал $u(x) = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \sum E_j$. Введем две вещественные периодические функции $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$, для которых имеем соответственно:

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{E_1}^{F_1} \frac{d\gamma}{\sqrt{-R(\gamma)}}, \quad F_1 = F_1(\tau); \\ \tau &= \int_{E_3}^{F_2} \frac{d\gamma}{\sqrt{-R(\gamma)}}, \quad F_2 = F_2(\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Очевидно, функции F_1 и F_2 определены в областях

$$\begin{aligned} E_1 \leq F_1 \leq E_2, \\ E_3 \leq F_2 \leq E_4, \end{aligned} \quad (8)$$

так как график полинома $R(E)$ имеет вид, указанный на рис. 5.

Из уравнения (5) получаем

$$u(\tau(x)) = -2(F_1(-\tau) + F_2(\tau + \tau_0)) + \sum_{j=0}^4 E_j, \quad (9)$$

$$x - x_0 = \int_0^{\tau} \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) d\tau.$$

Эти формулы дают, вообще говоря, двухзонные квазипериодические потенциалы, если задать набор краев зон E_j произвольно. Выбор

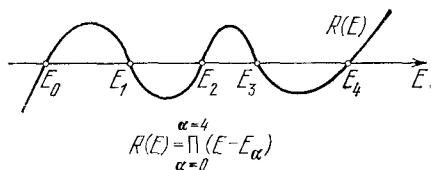


Рис. 5. График полинома $R(E)$.

начальных точек τ_0, x_0 однозначно определяется формулами (7), (9) вместе с определением гиперэллиптических функций F_1 и F_2 . Заметим кстати, что в комплексной области две функции F_1 и F_2 по су-

ществу представляют собой одну функцию. Используя формулы (4.19), легко непосредственно проверить, что уравнение (5) совпадает со стационарным высшим уравнением КдФ при $n = 2$, где γ_1 и γ_2 — координаты на поверхности уровня двух интегралов (2.22). Поэтому сам потенциал $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2.3) при $n = 2$. Полное интегрирование уравнения (3) для всех $n \geq 2$ и удобную аналитическую формулу для потенциала $u(x)$ мы получим позднее, в § 9 этой главы.

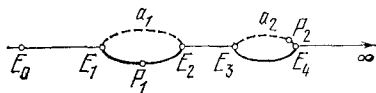


Рис. 6. Над запрещенными зонами «висят» циклы a_i на римановой поверхности.

Решения уравнения (5) являются квазипериодическими функциями с двумя, вообще говоря, рационально-независимыми периодами T_1, T_2 , полностью определяемыми римановой поверхностью Γ (см. § 9). Геометрически уравнение (5) можно представить себе так: точки римановой поверхности, лежащие над запрещенными зонами, образуют циклы a_1, a_2 (здесь $n = 2$) (рис. 6); нули P_1, P_2 функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ лежат по одному на циклах a_1 и a_2 , как показано на рисунке, и меняют свое положение

при изменении x . Топологически циклы a_1 и a_2 являются окружностями, а «фазовая точка» $(P_1, P_2) = (\gamma_1, \pm, \gamma_2, \pm)$ лежит на двумерном торе. Уравнение (5) описывает динамику «фазовой точки» (P_1, P_2) по этому тору.

Общее уравнение (3) аналогичным образом описывает движение фазовой точки $(P_1, \dots, P_n) = (\gamma_1, \pm, \gamma_2, \pm, \dots, \gamma_n, \pm)$ по n -мерному тору, где каждая из точек $P_j = (\gamma_j, \pm)$ лежит на цикле a_j на поверхности Γ над заперщенной зоной с номером j .

Замена переменных, вводящая «угловые» координаты φ_k на этом торе, такие, что $\varphi'_k = \text{const}$, будет указана позднее (см. § 8). Для этой цели придется ввести ряд фактов из теории римановых поверхностей (см. §§ 6, 7).

II. Укажем сопоставление нашего языка с традиционным языком спектральной теории операторов. Параметры $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ имеют интерпретацию на языке дополнительного спектра задачи типа Штурма — Лиувилля для оператора $L = -d^2/dx^2 + u$, традиционного в теории «обратных задач». Собственная функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ обращается в нуль при $E = \gamma_k$ на одном из листов поверхности Γ . Пусть этот лист со знаком плюс. Тогда $\psi_+(x, x_0, \gamma_k(x)) = 0$. Кроме того, $\psi_+ \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ (если нуль лежит на листе «минус», то $\psi_-(x, x_0, \gamma_k(x)) = 0$ и $\psi_- \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$). Рассмотрим $\psi_+(x + \tau, x_0, \gamma_k(x))$ и оператор $L_{\tau} = -d^2/d\tau^2 + u(\tau + x)$. Мы имеем

$$L_{\tau} \psi_+(x + \tau, x_0, \gamma_k(x)) = \gamma_k(x) \psi_+(x + \tau, x_0, \gamma_k(x)),$$

причем

$$\psi_+ = 0 \text{ при } \tau = 0; \quad \psi_+ \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, функция $\psi_+(x + \tau, x_0, \gamma_k(x))$ является собственной функцией дискретного спектра оператора L_{τ} , отвечающей уровню $E = \gamma_k(x)$ на полупрямой $\tau \geq 0$ с нулевым граничным значением при $\tau = 0$ (здесь x — параметр). Это дает спектральную интерпретацию точки $P_k^+ = (\gamma_k, +)$. Если бы нуль лежал в точке $P_k^- = (\gamma_k, -)$ на поверхности Γ , то аналогичный оператор L_{τ} имел бы точку дискретного спектра на полупрямой $\tau \leq 0$, так как $\psi_-(x + \tau, x_0, \gamma_k(x)) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Согласно формулам (4.19), набор нулей функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ определяет однозначно потенциал $u(x)$ вместе с исходным блоховским спектром, задающим риманову поверх-

ность Γ . Указанная здесь спектральная интерпретация нулей $(\gamma_k(x), \pm)$ не единственна. При тех же условиях функция $\psi_{\pm}(x + \tau, x_0, \gamma_k(x))$ имеет нули при всех $\tau = nT$, где T — период потенциала, поскольку $\psi_{\pm}(x + \tau + T) = e^{ipT}\psi_{\pm}(x + \tau)$ и $\psi_{\pm}(x + \tau, x_0, \gamma_k(x)) = 0$ при $\tau = 0$. Поэтому уровень $E = \gamma_k(x)$ для оператора L_{τ} является точкой спектра задачи Штурма — Лиувилля с нулевыми граничными условиями на отрезке $(0, T)$. Однако такая интерпретация не указывает никакой информации о листе $\pm$ на поверхности Γ , где лежит нуль функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$.

III. Выведем общие формулы для вариационных производных квазиимпульса $p(E)$ по потенциалу $u(x)$ при фиксированном периоде и установим как следствие тот факт, что всякий конечнозонный потенциал удовлетворяет одному из уравнений (2.3) — стационарному высшему КДФ.

Согласно (4.2), (4.4) для квазиимпульса мы имеем

$$\pm pT = \int_{x_0}^{x_0+T} \tilde{\chi}_{\pm} dx = \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R dx. \quad (10)$$

В силу уравнения Риккати (4.2), квазиимпульс $p(E)$ фактически зависит лишь от $u - E$. Для вариационной производной мы выведем формулу

$$\frac{\partial p}{\partial u(x)} = -\frac{1}{2\chi_R}. \quad (11)$$

Заметим следующее: так как $p = p\{u - E\}$, то из (11) получим

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{dx}{2\chi_R} = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x))}{\sqrt{R(E)}} dx. \quad (12)$$

Рассмотрим оператор Шредингера $L_i = -d^2/dx^2 + u_i(x)$. Пусть y_1, y_2 — решения уравнений $L_i y_i = E y_i$, где $i = 1, 2$. Для вронскиана $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ имеем

$$\frac{dW}{dx} = (u_1 - u_2) y_1 y_2. \quad (13)$$

Оба потенциала u_1, u_2 мы считаем периодическими с пе-

приодом T . Рассмотрим блоховские функции $\psi_{\pm}^{(i)}(x, x_0, E)$ для обоих этих операторов L_i в разрешенной зоне и положим

$$y_1 = \psi_+^{(1)}, \quad y_2 = \psi_-^{(2)}.$$

Интегрируя тождество (13) от x_0 до $x_0 + T$, получим

$$W|_{x=x_0+T} - W|_{x=x_0} = \int_{x_0}^{x_0+T} (u_1 - u_2) \psi_+^{(1)} \psi_-^{(2)} dx.$$

Так как $\psi_{\pm}^{(i)} = c^{(i)} + i\bar{\chi}_{\pm}^{(i)}(x_0)s^{(i)}$ в силу (4.8) для обоих потенциалов $u_i(x)$ в базисе (1.2"), мы найдем из определения $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$:

$$i(e^{i(p_1-p_2)T} - 1)(\bar{\chi}_+^{(1)}(x_0) - \bar{\chi}_-^{(2)}(x_0)) = \int_{x_0}^{x_0+T} (u_1 - u_2) \psi_+^{(1)} \psi_-^{(2)} dx. \quad (14)$$

В разрешенных зонах мы имеем $\bar{\chi}_+ = -\bar{\chi}_-$.

Пусть теперь $u_1 - u_2 = \delta u(x)$ мало. Оставляя в равенстве (14) линейные члены, получаем

$$-(\delta p) T (\bar{\chi} + \bar{\bar{\chi}})_{x_0} = \int_{x_0}^{x_0+T} \delta u |\psi_{\pm}|^2 dx. \quad (15)$$

Так как

$$\bar{\chi} + \bar{\bar{\chi}} = 2\chi_R(x_0), \quad |\psi_{\pm}|^2 = \frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)},$$

в силу формулы (15) находим

$$\delta p = -\frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\delta u(x) dx}{2\chi_R(x, E)}.$$

Тем самым выведены формулы (11) и (12).

Мы знаем вид χ_R для конечнозонных потенциалов (см. (4.14)). Разложим теперь обе части равенства (11) по $1/\sqrt{E}$ при $E \rightarrow \infty$. Получим ($k^2 = E$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{\delta}{\delta u(x)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2k)^{2n+1}} \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_{2n+1}(x) dx \right) = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\gamma_j(x)}{E} \right) \prod_{\alpha=0}^{2n} \left(1 - \frac{E_{\alpha}}{E} \right)^{-1/2}, \quad (16) \end{aligned}$$

где $2I_{n-2} = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_{2n+1} dx$ есть полиномиальный интеграл

Крускала и гамильтониан высшего КДФ. Правая часть равенства (16) имеет вид

$$-\frac{1}{2\sqrt{E}} \left(1 + \frac{b_1}{E} + \frac{b_2}{E^2} + \dots \right),$$

причем все b_i для $i \geq 1$ линейно (с постоянными коэффициентами) выражаются через набор из n элементарных симметрических функций от $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Отсюда следует линейное соотношение вида

$$b_{n+1} + \sum_{k=0}^n c_{k+1} b_{n-k} = 0, \quad (17)$$

где $c_1, \dots, c_{n+1}$ — константы и $b_0 = 1$. Однако, из равенства (16) следует

$$b_k = \pm 2 \frac{\delta I_{k-1}}{\delta u}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (18)$$

Сопоставляя соотношения (17) и (18), получаем вывод: любой n -зонный периодический потенциал удовлетворяет одному из стационарных уравнений (2.3) для высших КДФ

$$\frac{\delta I_n}{\delta u(x)} + \bar{c}_1 \frac{\delta I_{n-1}}{\delta u(x)} + \dots + \bar{c}_n \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} + c_{n+1} = 0, \quad (19)$$

где $\bar{c}_k = \pm c_k$ и $I_{-1} = \frac{1}{T} \int u dx$.

IV. Выведем уравнения для временной динамики нулей и полюсов блоховской собственной функции в силу КДФ и высших КДФ.

Рассмотрим любое из высших КДФ (2.1) и его представление Лакса (2.2). Напомним уравнение (1.13) для базиса собственных функций (1.2') или (1.2'') оператора L :

$$\dot{\phi} = -A\phi + \Lambda\phi,$$

где матрица Λ указана в (1.16). Выведем общую формулу

$$\dot{\chi}_R = (\lambda \chi_R)', \quad (20)$$

где $\lambda = \lambda_{21}$ в базисе (1.2'') и $\lambda = \frac{1}{k} (\lambda_I + \mu_I)$ в базисе (1.2')

при вещественных k ($k^2 = E$). Напомним, что $\Lambda = (\lambda_{ij})$ в базисе (1.2'') и $\Lambda = \left(\frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu}{\lambda} \right)$ в базисе (1.2') при вещественных k , согласно (4.13). Отметим, что формула (19) представляет собой полезное уточнение законов сохранения для КдФ и высших КдФ, так как согласно § 5 гл. I мы имели

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^T \chi_R dx \right) = 0$$

и полиномиальные законы сохранения I_q получались из величины $\frac{1}{T} \int \chi_R dx$ асимптотическим разложением по $1/\sqrt{E}$ при $E \rightarrow \infty$. Напомним кстати, что согласно (4.4) величина $\frac{1}{T} \int_0^T \chi_R dx$ есть точно квазиимпульс $p(E) + m\pi$. Для

вывода формулы (20) мы воспользуемся уравнением для матрицы трансляции $\hat{T}$ по параметру x_0 (1.20). Из уравнений (3.3), (1.20) в базисе (1.2') вытекают общие тождества:

$$\begin{aligned} 2\mu_R &= -\frac{d}{dx_0} \left(\frac{\lambda_I + \mu_I}{k} \right) = -\frac{d}{dx_0} \lambda_{21}, \\ 2b_R &= -\frac{d}{dx_0} \left(\frac{a_I + b_I}{k} \right) = -\frac{d}{dx_0} a_{21}. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользуемся теперь периодическим аналогом уравнений ГГКМ (4.15) для динамики матрицы $\hat{T}$ в силу любого из высших КдФ, а также выражением величины $\chi_R(x_0, E)$ через коэффициенты матрицы трансляции $\hat{T}(x_0, E)$, указанным в (4.10). Произведем вычисления в базисе (1.2'). Так как $\chi_R = \sqrt{1 - a_R^2} \alpha_{21}^{-1}$, где $a_R = 0$ в силу любого из высших КдФ, нам необходимо вычислить $\dot{\alpha}_{21}$ или $(\dot{a}_I - \dot{b}_I)/k$ в базисе (1.2''). Подставив выражение для временных производных из (4.15) и воспользовавшись (21), мы приходим к требуемой формуле (20), заменив x_0 на x .

Применим теперь общую формулу (20) к динамике конечнозонного потенциала $u(x)$; величина χ_R , согласно (4.12), имеет вид $\chi_R = \sqrt{R(E)} P_n^{-1}(x, E)$, где

$P_n = \prod_{k=1}^n (E - \gamma_k(x))$. Из формулы (20) получаем (при всех E):

$$\dot{P}_n = \lambda' P_n - \lambda P_n' \quad (22)$$

Пусть теперь $E = \gamma_k$. Тогда $P_n = 0$. Из этого следует

$$(\dot{P}_n)_{E=\gamma_k} = (\lambda P_n')_{E=\gamma_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Для величины $(P_n')_{E=\gamma_k}$ мы уже получили ранее формулу (2), откуда вместе с (22) имеем

$$(\dot{P}_n)_{E=\gamma_k} = (\lambda P_n')_{E=\gamma_k} = -2i\lambda \sqrt{R(\gamma_k)}, \quad (24)$$

где $R(E) = \prod_{j=0}^{2n} (E - E_j)$ и $\lambda = \lambda_{12}$ в базисе (1.2"). Как и для уравнений (3), мы можем разрешить уравнение (2) относительно величин $\dot{\gamma}_k$ и получить окончательно

$$\dot{\gamma}_k = 2i(\lambda)_{E=\gamma_k} \sqrt{R(\gamma_k)} \prod_{j \neq k} (\gamma_k - \gamma_j)^{-1}. \quad (25)$$

В частности, для динамики в силу обычного КДФ мы имеем формулу (1.19) для матрицы Λ , где

$$\lambda = \lambda_{12} = \frac{1}{k} (\lambda_1 + \mu_1) = -2(u + 2E). \quad (26)$$

Если число зон $n = 1$, то мы из формул (25) обычным образом получим снова кноидальную волну $u(x - ct)$ Кортевега — де Фриза. Первым нетривиальным случаем является $n = 2$. Уравнения (25) для $n = 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\gamma}_1}{\sqrt{-R(\gamma_1)}} &= \frac{8(\gamma_2 - \sum E_j/2)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \\ \frac{\dot{\gamma}_2}{\sqrt{-R(\gamma_2)}} &= \frac{8(\gamma_2 - \sum E_j/2)}{\gamma_2 - \gamma_1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим потенциал u такой, что $\sum E_j = 0$. Введем параметр w по формуле

$$dw = \frac{8\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} dt. \quad (28)$$

Уравнения (27) приобретут вид

$$\frac{\gamma_1 d\gamma_1}{V - R(\gamma_1)} = - \frac{\gamma_2 d\gamma_2}{V - R(\gamma_2)} = dw. \quad (29)$$

Уравнения (29) очевидным образом интегрируются. Опуская вычисления, приведем ответ для динамики $u(x, t)$ в виде (9)

$$u(x, t) = -2 [F_1(-\tau(x - x_0(t)) + F_2(\tau_0(t) + \tau(x - x_0))], \quad (30)$$

где $\sum E_j = 0$.

Для параметров $\tau_0(t)$, $x_0(t)$ получим

$$\tau_0(t) = 4t, \quad \dot{x}_0 = 4F_1(\tau_0(t)). \quad (31)$$

Формулы (30) полностью описывают временную динамику двухзонных потенциалов в силу КдФ.

§ 6. Сведения из теории римановых поверхностей.

Циклы на римановой поверхности

Как известно из теории функций комплексного переменного, риманова поверхность определяется как график многозначной функции на комплексной плоскости независимой переменной E . Удалив из E -плоскости некоторое количество отрезков (прямых или кривых и, возможно, уходящих одним концом в ∞), именуемых «разрезами», обычно получают область E -плоскости, над которой график многозначной функции распадается на куски, не связанные друг с другом непрерывным путем. Каждый из таких кусков есть график однозначной функции и одна из «ветвей» многозначной функции. Этот стандартный для математического анализа язык неудобен для наших целей. Мы вводим риманову поверхность Γ следующим образом: пусть задана комплексно-аналитическая функция $F(y, E)$ двух комплексных переменных y, E ; риманова поверхность Γ («комплексная кривая») задается как совокупность решений уравнения

$$F(y, E) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) определяет многозначную функцию $y = y(E)$ и поверхность Γ является римановой поверхностью этой многозначной функции. Наглядно можно себе

представлять, что многозначная функция $y(E)$ получается из поверхности Γ проектированием ее на E - и на y -плоскости. Если P — некоторая точка поверхности Γ , заданная координатами y_0, E_0 , то по определению $y_0 = y(E_0)$. Проекция поверхности Γ на E -плоскость может не быть взаимно однозначной: может быть несколько точек $P_i = (y_i, E_0)$, имеющих общую координату E_0 . Тогда все y_i являются значениями многозначной функции $y(E_0) = \{y_i\}$. Это и есть источник многозначности функции $y(E)$.

Точка $P = (y_0, E_0)$ поверхности Γ (1) называется неособой, если комплексный градиент не равен нулю:

$$\nabla_{\mathbb{C}} F = \left(\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial E} \right)_{y_0, E_0} \neq 0. \quad (2)$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, то около точки E_0 можно определить однозначную ветвь $y(E)$ такую, что $y(E_0) = y_0$. В этом случае точки поверхности Γ около (y_0, E_0) имеют вид

$$\Gamma = (y(E), E). \quad (3)$$

Говорят, что параметр E в малой области около E_0 является локальной координатой на поверхности Γ .

2. Если $\frac{\partial F}{\partial E} \neq 0$, то около точки y_0 можно определить однозначную ветвь обратной функции $E(y)$ такую, что $E(y_0) = E_0$. В этом случае точки поверхности Γ около (y_0, E_0) имеют вид

$$\Gamma = (y, E(y)). \quad (4)$$

Во втором случае говорят, что параметр y является локальной координатой около точки $(y_0, E_0) = P$. Около точек, где $\partial F/\partial y \neq 0$ и $\partial F/\partial E \neq 0$, локальной координатой являются как y , так и E ; поэтому можно делать замены $y \rightleftharpoons E$.

Особые точки римановой поверхности Γ определяются условием $\nabla_{\mathbb{C}} F = 0$.

Точки ветвления многозначной функции $y(E)$, определенной поверхностью Γ в (y, E) -плоскости, находятся из условия

$$\partial F/\partial y = 0. \quad (5)$$

Вместе с уравнением поверхности Γ , два условия (1), (5) на точки ветвления в (y, E) -пространстве дают дискретное множество точек $P_0, P_1, \dots, P_N$ поверхности Γ . Проекции $E_0, E_1, E_2, \dots, E_N$ этих точек на E -плоскость дают точки ветвления функции $y(E)$. Ввиду дискретности множества точек ветвления, оно не разделяет поверхность Γ и E -плоскость на части. Над оставшейся частью E -плоскости листы (значения функции $y(E)$) варьируются непрерывно при изменении E , не сливаясь друг с другом, хотя и могут меняться местами после обхода по замкнутому контуру.

Наиболее содержательной является теория алгебраических римановых поверхностей Γ . Мы будем считать, что функция $F(y, E)$, определяющая поверхность Γ с помощью уравнения (1), является полиномом от двух переменных y, E степени m

$$F(y, E) = \sum a_{ij} y^i E^j = 0 \quad (6)$$

для $i \geq 0, j \geq 0, i + j \leq m$. Это и есть общая алгебраическая риманова поверхность Γ . Ее уравнение можно записать в виде

$$y^m + a_1(E)y^{m-1} + \dots + a_m(E) = F = 0, \quad (7)$$

где все $a_i(E)$ являются рациональными функциями (отношениями многочленов от E). В этом случае функция $y(E)$ имеет m значений, кроме точек ветвления $\partial F / \partial y = 0$, где корни многочлена F кратные.

Простейший класс римановых поверхностей, который и будет нужен нам в теории уравнения КдФ и уравнения Шредингера с конечнозонным периодическим потенциалом, — это так называемые гиперэллиптические римановы поверхности Γ , задаваемые уравнением

$$F(y, E) = y^2 + R(E) = 0, \quad (8)$$

где $R(E)$ — полином от E с постоянными коэффициентами (в теории уравнений КдФ и Шредингера важен случай полиномов $R(E)$ нечетной степени).

Если степень полинома $R(E)$ равна 1 или 2, то такую поверхность называют «рациональной» или рода 0 (топология сферы).

Если степень полинома $R(E)$ равна 3 или 4, то поверхность Γ называют эллиптической или рода 1 (тополо-

гия тора). Мы будем рассматривать неособые римановы поверхности Γ , для которых $\nabla_{\mathbf{c}} F \neq 0$ всюду, где $F = 0$.

Для гиперэллиптической поверхности (8) условие неособости означает следующее:

$$F = y^2 + R(E), \quad \nabla_{\mathbf{c}} F = (2y, R'(E)) \neq 0. \quad (9)$$

1. Если $y \neq 0$, то $\nabla_{\mathbf{c}} F \neq 0$ и локальной координатой около таких точек $P = (y_0, E)$ поверхности Γ является E .

2. Если $y = 0$, то в силу (9) неособость точек $P = (0, E_j)$ поверхности Γ равносильна неразрешимости пары уравнений

$$R(E_j) = 0, \quad R'(E_j) = 0 \quad (10)$$

или отсутствию кратных корней полинома $R(E)$. Если $y = 0$, то локальной координатой около такой точки $(0, E_j)$ поверхности Γ является y и $R(E_j) = 0$. Эти точки являются точками ветвления функции $y = \sqrt{-R(E)}$, причем поверхность Γ имеет ровно два листа.

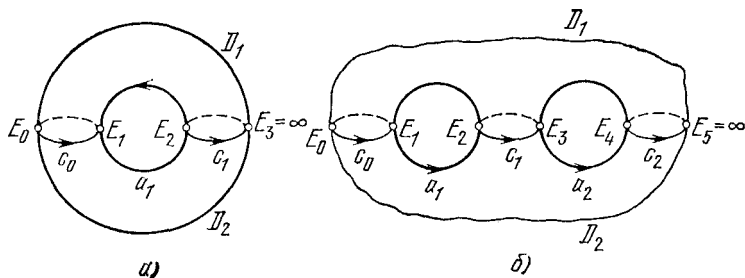


Рис. 7. Поверхности: а) рода $g = 1$,

$$y^2 = \prod_{\alpha=0}^2 (E - E_{\alpha}); \quad б) \text{ рода } g = 2, \quad y^2 = \prod_{\alpha=0}^4 (E - E_{\alpha}).$$

Пусть, для удобства, все корни E_j полинома $R(E)$ вещественны и различны (неособая поверхность Γ):

$$E_0 < E_1 < \dots < E_m, \quad (11)$$

если полином $R(E)$ имеет степень $m + 1$. Разберем топологию такой поверхности Γ . Удалим из E -плоскости отрезки $(E_0 E_1)$, $(E_1 E_2)$, $\dots$. Рассмотрим два случая (рис. 7 и 8).

С л у ч а й 1. Степень $m + 1$ полинома нечетна. Удалим отрезки $(E_0 E_1), \dots, (E_{m-2} E_{m-1}), (E_m \infty)$ из E -плоскости (как говорят, делаем разрезы). Оставшаяся часть поверхности Γ распадается на два куска D_1 и D_2 с одинаковыми границами («берегами» разрезов). После склейки этих двух кусков вдоль краев выкинутых отрезков

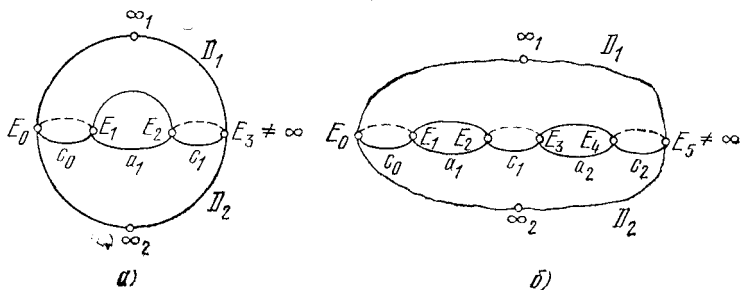


Рис. 8. Поверхности: а) рода $g = 1$,

$$y^2 = \prod_{\alpha=0}^3 (E - E_{\alpha}); \text{ б) рода } g = 2, y^2 = \prod_{\alpha=0}^5 (E - E_{\alpha}).$$

получится поверхность рода $g = m/2$ (сфера с g «ручками»). Строго говоря, из этой поверхности выкинута одна точка — бесконечно удаленная — так как мы рассматривали пока риманову поверхность Γ над конечной частью E -плоскости.

С л у ч а й 2. Степень $m + 1$ полинома $R(E)$ четна. Удаляем отрезки $(E_0 E_1), \dots, (E_m E_{m+1})$; ∞ не является точкой ветвления. Все остальное полностью аналогично случаю, изображенному на рис. 8 для $g = 1, 2$ ($g = m/2$).

Точка ∞ , как и в случае 1, удалена из Γ , но эта точка расширенной E -плоскости уже не является точкой ветвления. Фактически на каждом листе D_1 и D_2 есть своя бесконечно удаленная точка ∞_1 и точка ∞_2 , которая удалена из Γ , пока мы рассматриваем риманову поверхность лишь над конечной частью E -плоскости.

В теории одномерного уравнения Шредингера с бесконечнозонным периодическим потенциалом блоховская функция мероморфна на неалгебраической римановой поверхности Γ , где $y^2 = g(E)$ (см. §§ 1, 3 данной главы),

если все нули $g(E)$ простые. Топологически эта риманова поверхность изображена на рис. 9. Как видно, точка ∞ на этой поверхности для трансцендентной функции $g(E) = 1 - a_R^2$ с бесконечным числом простых нулей уже является точкой скопления циклов a_j , размеры которых

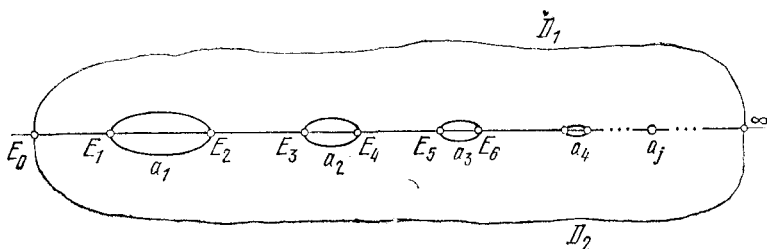


Рис. 9. Поверхность бесконечного рода, $y^2 = \sqrt{g(E)}$, где $g(E)$ — трансцендентная функция. Размеры запрещенных зон уменьшаются при $n \rightarrow \infty$.

уменьшаются при $j \rightarrow \infty$ (эти циклы получены из запрещенных зон на E -плоскости).

Алгебраические римановы поверхности (6) обладают «бесконечно удаленными» точками, присоединение которых делает поверхность Γ , как говорят, «замкнутой» (компактной, не имеющей границы, т. е. имеющей конечное число ручек). Гиперэллиптические примеры уже указывались на рис. 7 и 8. Введем формальную процедуру определения бесконечно удаленных точек поверхности Γ , задаваемой уравнением (6)

$$F = \sum_{i+j \leq m} a_{ij} y^i E^j = 0.$$

Рассмотрим «проективные координаты» (u, v, w) такие, что $y = u/w$ при $E = v/w$. Будем считать, что вектор $(u, v, w) \neq 0$ и что пропорциональные (с комплексным λ) векторы определяют одну и ту же точку:

$$(u, v, w) \sim (\lambda u, \lambda v, \lambda w), \lambda \neq 0. \quad (12)$$

Если $w \neq 0$, то выбором $\lambda = 1/w$ всегда можно в классе эквивалентных векторов (u, v, w) найти вектор вида $(y, E, 1)$, где $y = u/w$, $E = v/w$. Точки, где $w = 0$, мы назовем «бесконечно удаленными».

Уравнение (6) приобретает вид

$$0 = \Phi = w^m F\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) = \sum a_{ij} u^i v^j w^{m-i-j}. \quad (13)$$

При этом полином $\Phi(u, v, w)$ уже однородный степени m :

$$\Phi(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \lambda^m \Phi(u, v, w). \quad (14)$$

Конечные решения уравнения $\Phi = 0$ (т. е. $w \neq 0$) совпадают с поверхностью Γ после перехода к переменным y, E . Кроме этого имеется конечное число бесконечно удаленных точек, задаваемых парой уравнений

$$\Phi = 0, \quad w = 0. \quad (15)$$

Напомним, что векторы (u, v, w) и $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ определяют одну и ту же точку.

Полная риманова поверхность Γ вместе с бесконечно удаленными точками задается в проективных координатах уравнением $\Phi = 0$. Локальная координата около бесконечно удаленной точки $w = 0$ на поверхности Γ выбирается так: если точка $P = (u_0, v_0, 0)$ бесконечно удаленная и $u_0 \neq 0$, то следует перейти в окрестности этой точки к координатам

$$(\tilde{y}, E) = \left(\frac{v}{u}, \frac{w}{u}\right), \quad P = \left(\frac{v_0}{u_0}, 0\right)$$

и уравнение $\Phi(u, v, w) = 0$ привести к виду $\Phi(u, v, w) = u^m \tilde{F}(\tilde{y}, E) = 0$ ($u \neq 0$). Далее, если точка P неособая (т. е. $\nabla_{\tilde{y}} \tilde{F} \neq 0$), то локальная координата около нее выбирается, как и ранее, но в переменных $\tilde{y}, E$.

Для гиперэллиптических поверхностей Γ мы имеем два случая.

С л у ч а й 1. $y^2 = R(E)$, где степень $R(E)$ нечетна. Здесь имеется одна бесконечно удаленная точка $P = \infty$, являющаяся точкой ветвления. Локальная координата около этой точки на поверхности Γ есть $z = 1/\sqrt{E}$. Разложение по переменной z — разложение в ряд Тейлора по z около точки $P = \infty$ для функций на поверхности Γ . Например, проекция поверхности Γ на E -плоскость может считаться числовой функцией $E(Q)$ для точек Q на поверхности Γ со следующими свойствами: 1) функция E имеет полюс второго порядка в точке $P = \infty$; 2) функция

$E(Q)$ имеет нулевой градиент во всех точках ветвления на поверхности Γ .

С л у ч а й 2. $y^2 = R(E)$, где $R(E)$ — полином четной степени. Здесь имеется две бесконечно удаленные точки $P_1 = \infty_1$, $P_2 = \infty_2$, так как бесконечность не является точкой ветвления и попадает на оба листа поверхности Γ . Величина $z = 1/E$ может быть принята за локальную координату около обеих точек $P_1 = \infty_1$, $P_2 = \infty_2$. Проекция на E -плоскость есть числовая функция $E(Q)$ для точек Q на поверхности Γ ; эта функция имеет два простых полюса в точках P_1 и P_2 и нулевой градиент во всех точках ветвления.

Перейдем теперь к циклам на римановых поверхностях. Конечно, замкнутая направленная кривая γ (гладкая с ненулевой касательной или кусочно-гладкая с конечным числом изломов), будет считаться циклом на поверхности Γ . Циклом будет считаться также формальная сумма замкнутых направленных кривых γ_j (возможно, пересекающихся друг с другом):

$$\text{цикл } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k, \quad (16)$$

где γ_j — замкнутые направленные кривые.

Циклом — γ называется сумма тех же кривых с противоположными направлениями. Итак, мы описали циклы. Нам нужно четко сказать, какие циклы мы будем считать эквивалентными друг другу и какие — эквивалентными нулю. Введем отношение эквивалентности, называемое в топологии «гомологичностью циклов», более сильное, чем «гомотопность» двух замкнутых кривых, которые можно непрерывно деформировать друг в друга по поверхности Γ . Сформулируем некоторые правила.

1. Если два цикла γ и $\tilde{\gamma}$ гомотопны друг другу (т. е. переводятся друг в друга непрерывной деформацией в Γ), то они, конечно, гомологичны.

2. Более того, разрешается разделять замкнутую направленную кривую на замкнутые части и переставлять их порядок прохождения (рис. 10)

$$\gamma \approx \gamma_1 + \gamma_2 \approx \gamma_2 + \gamma_1,$$

$$\gamma \approx \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \approx \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_2 \approx \dots,$$

где значок $\approx$ означает эквивалентность (гомологичность).

3. Цикл, состоящий из набора несамопересекающихся направленных кривых $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ и не пересекающихся попарно, гомологичен нулю, если этот набор кривых ограничивает кусок поверхности Γ , причем кривые γ_j входят в границу куска с правильными ориентациями (рис. 11). Если сумма циклов $\gamma_1 + \gamma_2$ эквивалентна нулю, то $\gamma_1 \approx -\gamma_2$. Если $\gamma \approx 0$, то $\gamma_1 + \gamma \approx \gamma_1$ и т. д. Применяя правила 1, 2, 3, мы получим из цикла все ему эквивалентные (гомологичные).

Классы эквивалентных циклов образуют «группу одномерных гомологий», обозначаемую в топологии через $H_1(\Gamma)$.

В группе одномерных гомологий $H_1(\Gamma)$ поверхности Γ имеется еще одна важная операция (кроме сложения и вычитания циклов), именуемая «пересечением циклов». Мы

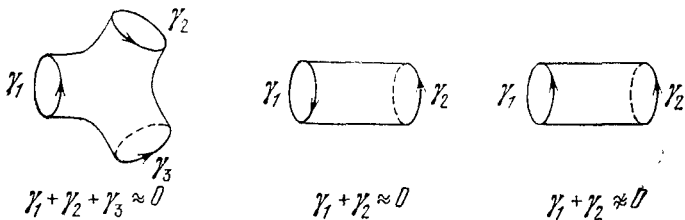


Рис. 11. Примеры гомологичности циклов.

будем предполагать, что на поверхности Γ определено понятие «правого» и «левого» базисов (поверхность ориентируется); это всегда верно для римановых поверхностей, ввиду их комплексности (все используемые замены координат комплексно-аналитичны и имеют тем самым положительный якобиан).

Индекс пересечения $\gamma_1 \circ \gamma_2$ двух замкнутых направленных кривых γ_1 и γ_2 определяется так:

1. Предполагается, что кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в конечном числе точек под ненулевыми углами на по-

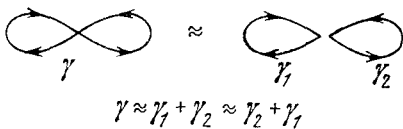


Рис. 10. Гомологичность циклов — более грубое понятие, чем гомотопность.

верхности Γ . Обозначим точки пересечения через P_α , $\alpha = 1, \dots, q$. В каждой точке P_α имеем два вектора $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$. Положим

$\text{sign } P_\alpha = 1$, если репер $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$ правый в точке P_α ,
 $\text{sign } P_\alpha = -1$, если репер $(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$ левый в точке P_α . (17)

Индекс пересечения равен

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 = \sum_{\alpha=1}^q \text{sign } P_\alpha = -\gamma_2 \circ \gamma_1.$$

2. Если пара кривых γ_1, γ_2 пересекается не так, как требуется в пункте 1, то надо продеформировать γ_2 , приведя пересечение пары γ_1, γ_2 к условиям пункта 1 и затем взять пересечение. Это и будет индекс пересечения.

3. По определению, индекс пересечения аддитивен по обоим аргументам, кососимметричен и имеет целочисленные значения

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + \tilde{\gamma}_1) \circ \gamma_2 &= \gamma_1 \circ \gamma_2 + \tilde{\gamma}_1 \circ \gamma_2, \\ \gamma_1 \circ \gamma_2 &= -\gamma_2 \circ \gamma_1. \end{aligned} \quad (18)$$

4. Индекс пересечения корректно определен на классах гомологичных циклов (цикл, гомологичный нулю, имеет нулевые индексы пересечения с любым другим циклом).

Каноническим базисом циклов на замкнутой поверхности рода n называется набор циклов $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, где все a_i, b_i независимы и матрица индексов пересечения устроена так (рис. 12):

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}. \quad (19)$$

Вычислим нужные нам в дальнейшем канонические базисы циклов на гиперэллиптических римановых поверхностях $y^2 = R(E)$ для обоих случаев — четной и нечетной степени $R(E)$.

С л у ч а й 1. Степень $R(E)$ нечетна. Точки ветвления имеют вид $E_0 < E_1 < \dots < E_{2n} < \infty$. На поверхности Γ имеются два набора циклов:

а) Циклы a_i , лежащие над запрещенными зонами $(E_1 E_2), \dots, (E_{2i-1} E_{2i}), (E_{2n-1} E_{2n})$ поверхности Γ , $a_1, \dots, a_n$.

б) Циклы c_j над всеми разрешенными зонами на поверхности Γ (всего $n + 1$ штук), $(E_0 E_1), \dots, (E_{2n} \infty)$, $c_0, \dots, c_n$. Удаляя циклы $c_0, \dots, c_n$ из поверхности Γ ,

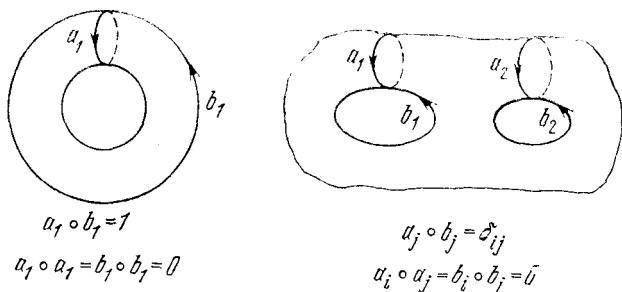


Рис. 12. Индекс пересечения циклов. Канонический базис циклов на поверхности.

мы разбивали ее на две части (делались разрезы). Отсюда имеем

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n \approx 0. \quad (20)$$

Из рис. 7 для $n = 1, 2$ легко видна матрица пересечений:

$$a_i \circ a_j = 0, \quad c_\alpha \circ c_\beta = 0, \quad c_0 \circ a_1 = a_1 \circ c_1 = c_1 \circ a_2 = a_2 \circ c_2 = \\ = \dots = a_n \circ c_n = 1. \quad (21)$$

Все остальные пересечения равны нулю. Для рода $g = 1$ канонический базис образуют циклы $a_1, b_1 = c_1, a_1 \circ b_1 = 1$. Заметим, что канонический базис $a_1, -c_0$ совпадает с предыдущим, так как $c_0 + c_1 \approx 0$. Для любого рода $n \geq 1$ канонический базис выглядит так:

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \quad (22)$$

где

$$b_1 = -c_0, \quad b_2 = -c_1 - c_0,$$

$$b_3 = -c_2 - c_1 - c_0, \quad \dots, \quad b_n = -\sum_{j=0}^{n-1} c_j.$$

Из формул (21) вытекает соотношение

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0 \quad (a_i \circ b_j = \delta_{ij}). \quad (23)$$

С л у ч а й 2. Степень $R(E)$ четна. Точки ветвления имеют вид $E_0 < E_1 < \dots < E_{2n+1}$. Полностью аналогич-

но нечетному случаю (точки ∞ заменяется на E_{2n+1}) здесь вводятся циклы $a_1, \dots, a_n, c_0, \dots, c_n$, удовлетворяющие соотношениям (20), (21) (см. рис. 8). Поэтому канонический базис циклов запишется в виде (22).

Существование канонического базиса a_i, b_i есть следствие замкнутости и ориентируемости римановой поверхности. Не на всех двумерных поверхностях (многообразиях) это так. Например, если из плоскости выколоть любое число точек, то нетривиальные циклы будут (число независимых циклов равно числу выколотых точек), но индекс пересечения тождественно равен нулю. На замкнутых ориентируемых поверхностях матрица пересечений базисных циклов имеет детерминант ± 1 и кососимметрична — поэтому и существует канонический базис (23).

§ 7. Дифференциалы на римановых поверхностях. Абелевы (голоморфные) дифференциалы и дифференциалы с полюсами

Напомним, что в области плоскости с координатами x, y дифференциалом (или дифференциальной формой степени 1) называется выражение

$$\Omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (1)$$

где пара (P, Q) ведет себя как компоненты градиента функции при заменах координат (тензора первого ранга с одним нижним индексом):

$$x = x(x', y'), \quad y = y(x', y'), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Omega = Pdx + Qdy &= P'dx' + Q'dy' = \\ &= \left(P \frac{\partial x}{\partial x'} + Q \frac{\partial y}{\partial x'} \right) dx' + \left(P \frac{\partial x}{\partial y'} + Q \frac{\partial y}{\partial y'} \right) dy'. \end{aligned}$$

Когда речь идет о произвольной двумерной поверхности (двумерном многообразии), то дифференциал Ω должен быть определен на всей поверхности и записывается в любой локальной системе координат x_α, y_α в виде (1), где $\Omega = P_\alpha dx_\alpha + Q_\alpha dy_\alpha$; в области действия двух локальных систем координат x_α, y_α и x_β, y_β одни координаты выражаются через другие:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(x_\beta, y_\beta), \\ y_\alpha &= y_\alpha(x_\beta, y_\beta). \end{aligned} \quad (3)$$

Две разные записи одного и того же дифференциала Ω в координатах x_α, y_α и x_β, y_β должны переходить друг в друга по формулам (2) в общей области действия этих координатных систем.

По существу дифференциалы (или дифференциальные формы первой степени) представляют собой дифференциальную форму записи тензоров первого ранга с одним нижним индексом. (Точно так же дифференциальные формы любой степени k $\Omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ на

любом n -мерном многообразии представляют собой просто форму записи кососимметричных тензоров ранга k со всеми нижними индексами. Эти формы можно интегрировать по любым k -мерным поверхностям, расположенным в многообразии, абсолютно инвариантным образом — результат не зависит от метрики и от координат на поверхности и в многообразии.)

Дифференциал Ω на римановой поверхности можно очевидным образом интегрировать по любому (направленному) пути γ между точками P и Q этой поверхности (рис. 13).

Дифференциал Ω называют замкнутым, если выполнено тождество (в любой системе локальных координат)

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (4)$$

и точным, если на поверхности имеется всюду определенная гладкая однозначная числовая функция f , такая, что в любой системе координат компоненты дифференциала являются компонентами градиента этой функции (точный дифференциал всегда замкнут).

Свойства дифференциалов:

1. Интеграл точного дифференциала по любому циклу на поверхности равен нулю.

2. Интеграл от замкнутого дифференциала по циклу, эквивалентному (гомологичному) нулю, тождественно равен нулю.

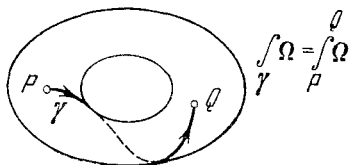


Рис. 13. Интеграл от 1-формы Ω по пути γ на поверхности.

3. Если известны все интегралы от замкнутого дифференциала по циклам на поверхности, то он определяется однозначно с точностью до прибавления любого точного дифференциала. Все определения интересующих нас двумерных многообразий — римановых поверхностей — производятся с помощью комплексно-аналитических функций. Все локальные координаты, которые мы вводили в § 6, на римановых поверхностях таковы, что переход от одних к другим осуществляется конформным преобразованием.

В этом случае удобно вводить, как обычно, комплексные координаты

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

и дифференциалы

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy. \quad (5)$$

Если формально ввести операторы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

то дифференциал функции будет иметь вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (7)$$

Любой дифференциал Ω вида (1) может быть записан в виде

$$\Omega = P dx + Q dy = A dz + B d\bar{z}. \quad (8)$$

Условие замкнутости (4) приобретет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (9)$$

Условия комплексной аналитичности функции $f(z)$ (уравнения Коши — Римана), как известно, имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0 \quad (10)$$

или

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Рассмотрим любой замкнутый дифференциал вида

$$\Omega = A dz, \quad (11)$$

где условие замкнутости (9) имеет вид

$$\partial A / \partial \bar{z} \equiv 0.$$

Поэтому коэффициент A замкнутого дифференциала вида (11) комплексно-аналитичен и наоборот. Такие дифференциалы мы далее будем называть голоморфными.

Полюсом дифференциала вида (11) называется, естественно, полюс коэффициента A ; все эти понятия инвариантны относительно голоморфных (аналитических) замен

$$z = \bar{z}(w), \quad z = x + iy, \quad w = x' + iy', \quad (12)$$

$$\partial z / \partial \bar{w} \equiv 0,$$

и поэтому имеют смысл на римановых поверхностях, изучавшихся в § 6 и задававшихся комплексно-аналитическим уравнением вида (6.6).

Важнейшими дифференциалами на алгебраических римановых поверхностях вида (6.6), к которым присоединены также и бесконечно удаленные точки (см. § 6), являются так называемые абелевы или всюду голоморфные дифференциалы (именуемые иногда дифференциалами первого рода) на римановой поверхности Γ , не имеющие полюсов нигде на этой поверхности, а также и в бесконечно удаленных точках из Γ .

Кроме того, для нас будут важны также голоморфные дифференциалы на Γ , имеющие ровно один полюс (второго рода) на поверхности Γ . Если P — точка поверхности Γ , в которой дифференциал Ω имеет единственный полюс, и $z = x + iy$ — локальная координата около точки P на поверхности Γ , то мы имеем при z , близких к нулю:

$$\Omega = dz \left(\sum_{k=n}^1 \frac{a_{-k}}{z^k} + f(z) \right), \quad (13)$$

где $f(z)$ аналитична в точке $z = 0$. Оказывается, для таких дифференциалов (однополюсных) слагаемое a_{-1}/z всегда равно нулю (на замкнутой поверхности Γ). Число a_{-1} называется вычетом дифференциала Ω в полюсе P . Вычет не зависит от выбора локальной координаты z .

Более общий факт состоит в следующем: если голоморфный дифференциал Ω имеет ровно k полюсов $P_1, \dots, P_k$ на замкнутой поверхности Γ и $a_{-1}^{(1)}, \dots, a_{-1}^{(k)}$ — его вычеты в полюсах $P_1, \dots, P_k$, то их сумма есть нуль:

$$\sum_{q=1}^k a_{-1}^{(q)} = 0. \quad (14)$$

Для нас также будут важны дифференциалы Ω^{PQ} («дипольные»), имеющие ровно два полюса первого порядка на Γ в точках P и Q с вычетами соответственно 1 и -1 (дифференциалы третьего рода).

Известны следующие утверждения:

1) на римановой поверхности Γ (алгебраической) всегда имеется базис $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ абелевых дифференциалов (первого рода), число которых n равно роду поверхности. Любой всюду голоморфный (абелев) дифференциал Ω есть линейная комбинация базисных с постоянными комплексными коэффициентами:

$$\Omega = \sum \alpha_k \Omega_k.$$

2) Любой замкнутый (не обязательно голоморфный) дифференциал $\tilde{\Omega}$, всюду определенный и гладкий на поверхности Γ , представляется в виде суммы точного дифференциала и некоторой линейной комбинации базисных абелевых дифференциалов $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ и их комплексно сопряженных $\bar{\Omega}_1, \dots, \bar{\Omega}_n$. Размерность линейного пространства замкнутых дифференциалов (с пренебрежением точными) равна $2n$, где n — род (число ручек).

Рассмотрим теперь важнейшие для нас примеры гиперэллиптических римановых поверхностей.

Для поверхности рода $n = 0$, задаваемой уравнением $y^2 + R(E) = 0$, где $R(E) = E - E_0$ или $R(E) = (E - E_0)(E - E_1)$, абелевых дифференциалов вообще нет, так как их число равно роду. Рассмотрим общий случай полиномов $R(E)$. Любой голоморфный дифференциал на поверхности Γ (имеющий, возможно, полюсы) можно написать в конечной части E -плоскости в виде (корни полинома $R(E)$ некрatны)

$$\Omega = \frac{P(E)}{Q(E)} \frac{dE}{\sqrt{R(E)}} + \text{тривиальный}, \quad (15)$$

где Q и P — полиномы; тривиальная часть имеет вид $P_1(E) dE/Q_1(E)$ (P_1 и Q_1 — полиномы от E). Исследуем полюсы дифференциала Ω , без тривиальной части. Они могут быть следующих видов: а) в нулях $Q(E)$, б) в точках ветвления E_α , где $R(E_\alpha) = 0$, в) в бесконечно удаленной точке $E = \infty$. Случай в) мы рассмотрим позднее.

а) В любой точке, где $E \neq E_\alpha$, полюс Ω может быть лишь в нулях $Q(E)$.

б) Если мы находимся в точке ветвления поверхности Γ , где $E = E_\alpha$ и $y = 0$, то согласно § 6 должны выбрать y за локальную координату около этой точки. Совершив замену $E(y)$, мы получим

$$\Omega = \frac{dE(y)}{y} \cdot \frac{P(E(y))}{Q(E(y))}. \quad (16)$$

Так как $R(E) \sim (E - E_\alpha) \text{ const}$ около точки E_α , то имеем

$$\Omega = \frac{d(E - E_\alpha)}{y} \cdot \frac{\tilde{P}(E - E_\alpha)}{\tilde{Q}(E - E_\alpha)},$$

причем $E - E_\alpha \sim \text{const} + y^2$ около E_α . Окончательно получаем

$$\Omega = dy \frac{\tilde{P}(y^2)}{\tilde{Q}(y^2)}. \quad (17)$$

Таким образом, дифференциал Ω имеет полюс в точке $y = 0$, $E = E_\alpha$ римановой поверхности Γ только в том случае, если полином $Q(E)$ имеет нуль в точке $E = E_\alpha$. Если мы хотим найти абелевы дифференциалы без полюсов, мы должны искать их в виде

$$\Omega = \frac{P(E) dE}{\sqrt{R(E)}}, \quad (18)$$

где $P(E)$ — полином. Дифференциалы вида (18) не имеют полюсов на поверхности Γ над конечной частью E -плоскости.

Рассмотрим теперь два случая.

С л у ч а й 1. Степень полинома $R(E)$ нечетна,

$$R(E) = \prod_{\alpha=0}^{2m} (E - E_\alpha), \quad E_\alpha \neq E_\beta.$$

Как указывалось в § 6, имеется одна бесконечно удаленная точка $E = \infty$ на поверхности Γ и локальной координатой около этой точки является параметр $z = 1/\sqrt{E}$. Если дифференциал Ω имеет вид (18), где $P(E) = a_0 + \dots + a_n E^n$ и $a_n \neq 0$, то после замены $E(z)$ около точки $z = 0$ мы получим ($E = z^{-2}$)

$$\Omega = \frac{dz^{-2} (a_n + z^2 a_{n-1} + \dots + a_0 z^{2n})}{z^{2n} z^{2m+1} \sqrt{\prod_{\alpha=0}^{2m} (1 - E_{\alpha} z^2)}} \quad (19)$$

или окончательно, при малых z :

$$\Omega = -2z^{2m-2n-2} dz (a_n + f(z)), \quad (20)$$

где $a_n \neq 0$ и $f(z)$ аналитична и обращается в нуль в точке $z = 0$.

Итак, мы можем сделать следующие выводы:

1. Дифференциал Ω вида (18) не имеет полюсов нигде (в том числе в точке $E = \infty$), если степень полинома $P(E)$ равна 0, 1, ..., $m-1$. Здесь m — род поверхности Γ . Мы имеем базис абелевых дифференциалов вида

$$\Omega_i = \frac{E^i dE}{\sqrt{R(E)}}, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (21)$$

2. Если степень полинома $R(E)$ равна $m+k$, то дифференциал Ω вида (18) имеет единственный полюс в точке $z = 0$ на Γ (второго рода), причем кратность полюса равна $2k+2$ для $k = 0, 1, 2, \dots$. Разложение в ряд Лорана в этом полюсе, вытекающее из (19), содержит лишь четные степени $z^{-2k-2}, \dots, z^{-2i}, \dots, z^{-2}$:

$$\Omega = \left[\frac{a_{-2k-1}}{z^{2k+2}} + \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \varphi(z) \right] dz; \quad (22)$$

$\varphi(z)$ аналитична при $z = 0$.

С л у ч а й 2. Степень полинома $R(E) = \prod_{\alpha=0}^{2m+1} (E - E_{\alpha})$ четна и корни различны $E_{\alpha} \neq E_{\beta}$, $y^2 + R(E) = 0$. В конечной части E -плоскости все рассуждения полностью аналогичны, и полюсов здесь не имеют дифференциалы

вида

$$\Omega = \frac{dE P(E)}{\sqrt{R(E)}}, \quad (23)$$

где $P(E) = a_n E^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$.

Согласно § 6, имеются две бесконечно удаленные точки на Γ , локальной координатой в которых может быть принята (в обеих) $z = 1/E$. Около точек P_+ , P_- в координате z дифференциал Ω приобретает вид

$$\Omega \approx \mp z^{m-n-1} dz (a_n + \varphi(z)), \quad (24)$$

где $\varphi(z)$ аналитична около $z = 0$ и $\varphi(0) = 0$. Дифференциал Ω является абелевым (не имеет полюсов), если $m - n - 1 \geq 0$. Согласно § 6, род поверхности Γ равен m . Мы получаем ровно m независимых абелевых дифференциалов вида (23)

$$\Omega_i = \frac{E^i dE}{\sqrt{R(E)}}, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (25)$$

Если $n = m$ и $a_n = 1$, то дифференциал Ω имеет два полюса первого порядка в точках P_+ , P_- с вычетами ± 1 . Здесь, как и в § 6, P_+ и P_- — две бесконечно удаленные точки. В качестве первой иллюстрации мы посмотрим, какие виды дифференциалов мы фактически уже встречали в § 5 в различных формулах, связанных с конечнозонными потенциалами оператора Шредингера и их динамикой в силу уравнения КдФ и его высших аналогов.

1. Поверхности рода 1, $y^2 + R_3(E) = 0$. Здесь $R_3(E) = (E - E_0)(E - E_1)(E - E_2)$, все E_0, E_1, E_2 вещественны и $E_0 < E_1 < E_2$. Если $u(x)$ — однозонный потенциал Ламе и E_0, E_1, E_2 — концы зон, то блоховская собственная функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ фактически мероморфна на этой поверхности Γ (см. § 5). Мы имеем один абелев дифференциал

$$\Omega_1 = \frac{dE}{\sqrt{R(E)}}.$$

Интеграл от этого дифференциала по пути на Γ как функция концевой точки есть многозначная функция на E -плоскости

$$x = \int_{P_0}^Q \Omega_1. \quad (26)$$

Выберем точки P_0, Q на цикле a_1 (см. § 6) на поверхности Γ над запрещенной зоной — отрезком $[E_1, E_2]$ E -плоскости. Тогда обратная функция к (26) будет вещественной периодической функцией $Q(x)$. Согласно (5.4), имеем формулу для потенциала $u(x - x_0)$

$$u(x - x_0) = -2Q(x) + \sum_{\alpha=0}^2 E_{\alpha}.$$

Функция, обратная к (26), является двоякопериодической функцией комплексного аргумента x . Она называется эллиптической функцией Вейерштрасса (обозначается через $\wp(x)$). Изменение $u(x)$ в силу КдФ имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x - ct), \\ u(x, 0) &= u(x), \quad c = \sum E_{\alpha}/2. \end{aligned} \quad (27)$$

2. Поверхность рода II, $y^2 + R_5(E) = 0$, $R_5 = \prod_{\alpha=0}^4 (E - E_{\alpha})$, $E_0 < E_1 < \dots < E_4 < \infty$. Для двухзонных потенциалов $u(x)$ функция $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ мероморфна на Γ (см. § 5). Здесь имеется два абелевых дифференциала

$$\Omega_1 = \frac{dE}{\sqrt{-R_5(E)}}, \quad \Omega_2 = \frac{E dE}{\sqrt{-R_5(E)}}.$$

При вычислении аналитического вида двухзонного потенциала мы опять вводили обратные функции $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ (см. (5.7) — (5.9)),

$$\tau = \int_{E_1}^Q \Omega_1, \quad \tau = \int_{E_3}^Q \Omega_1,$$

где Q берется в первой или второй запрещенной зоне (на циклах a_1 или a_2 из Γ). При вычислении временной динамики $u(x, t)$ двухзонного потенциала в силу КдФ в формулах (5.29) появлялся дифференциал Ω_2 . Вспомним теперь, что на римановой поверхности имеется канонический базис циклов $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ с индексами пересечения (6.19). Набор абелевых дифференциалов $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ связан с базисом циклов следующими нетривиальными соотношениями (Римана):

1. Матрица интегралов по циклам a_k невырождена:

$$b_{kj} = \oint_{a_j} \Omega_k, \quad \det b_{kj} \neq 0.$$

Поэтому можно выбрать новый базис дифференциалов

$$\oint_{a_q} \tilde{\Omega}_j = \delta_{qj} \cdot 2\pi i, \quad i^2 = -1. \quad (28)$$

2. В базисе $\tilde{\Omega}_j$ матрица b_{qj} интегралов по циклам b_{qj} обладает свойством симметрии $b_{qk} = b_{kq}$ и ее вещественная часть $\operatorname{Re} b_{qk} = \operatorname{Re} b_{kq}$ отрицательно определена, $b_{qj} = \oint_{b_q} \tilde{\Omega}_j$.

Если риманова поверхность гиперэллиптична и все точки ветвления вещественны, то матрица b -периодов b_{ij} вещественна, симметрична и отрицательно определена. Рассмотрим простейшую θ -функцию (Римана):

$$\theta(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k, j} b_{kj} m_k m_j + \sum_k \eta_k m_k \right\}. \quad (29)$$

Из свойства $\operatorname{Re} b_{kq}$ вытекает, что ряд (29) быстро сходится и определяет целую аналитическую функцию θ комплексных переменных $\eta_1, \dots, \eta_n$. Если род поверхности $g = 1$, то θ -функция Римана сведется к обычной θ -функции Якоби одной комплексной переменной

$$\theta(\eta) = \sum_m \exp \left\{ \frac{1}{2} b m^2 + m \eta \right\},$$

где m — это все целые числа.

Из определения θ -функции Римана вытекает

$$\theta(\eta_1, \dots, \eta_k + 2\pi i, \dots, \eta_n) = \theta(\eta_1, \dots, \eta_k, \dots, \eta_n), \quad (30)$$

$$\theta(\eta_1 + b_{k1}, \dots, \eta_n + b_{kn}) = \exp \{ -b_{kk}/2 - \eta_k \} \theta(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Тождества (30) показывают, что θ -функция Римана связана с так называемой решеткой Якоби из $2n$ векторов в n -мерном комплексном линейном пространстве C^n . Эти

векторы имеют вид $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n$,

$$e_k = (0, \dots, 0, 2\pi i, 0, \dots, 0), \quad (31)$$

$$e'_k = (b_{k1}, \dots, b_{kn}).$$

Любой вектор решетки Якоби имеет вид $\sum m_q e_q + \sum n_q e'_q$, где m_q, n_q — целые числа. По существу, решетка (31) задается матрицей периодов абелевых дифференциалов на римановой поверхности Γ по базисным циклам a_i, b_i при нормировке (28). В случае рода $g = 1$ мы обычным образом имеем решетку на комплексной плоскости. В общем случае $g \geq 1$ фактор-группа C^n_i по решетке представляет собой $2n$ -мерный комплексный тор, называемый в математической литературе «многообразием Якоби римановой поверхности Γ ».

§ 8. Блоховская собственная функция и квазиимпульс. Связанные с ними дифференциалы на римановой поверхности, их временная динамика

Рассмотрим периодический конечнозонный потенциал $u(x)$ оператора Шредингера $L = -d^2/dx^2 + u$, его блоховскую собственную функцию $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$, определенную в § 1, и квазиимпульс $p(E)$, $\hat{T}\psi_{\pm} = \exp(\pm ipT)\psi_{\pm}$, $\hat{T}$ — оператор трансляции на период. Мы уже выяснили в § 4 аналитические свойства функции $\psi_{\pm}$ на римановой поверхности Γ вида

$$y^2 + R(E) = 0, \quad R(E) = \prod_{\alpha=0}^{2n} (E - E_{\alpha}), \quad E_{\alpha} \text{ — концы зон.}$$

Рассмотрим дифференциал следующего вида на римановой поверхности Γ :

$$W = \left(\frac{\partial \ln \psi_{\pm}}{\partial E} \right) dE. \quad (1)$$

Оказывается, дифференциал W имеет лишь нули и полюсы на поверхности Γ , включая бесконечно удаленную точку. Это вытекает из следующих свойств функции $\psi_{\pm}$:

1. Если $z = 1/\sqrt{E}$ — локальная координата около бесконечно удаленной точки на Γ , то около $z = 0$ дифференциал W имеет вид

$$W = i(x - x_0) dz (1/z^2 + \varphi(z)),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична при $z = 0$. Это свойство следует из асимптотики

$$\psi_{\pm} \sim \exp [\pm i\sqrt{E}(x - x_0)]$$

при $E \rightarrow \infty$.

2. Дифференциал W в конечной части E -плоскости на Γ имеет ровно n полюсов первого порядка с вычетами $+1$ в нулях $\psi_{\pm}$ и ровно n полюсов первого порядка с вычетами -1 в полюсах $\psi_{\pm}$. Напомним, что нули и полюсы функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$, согласно § 4, лежат в точках $Q_j = (\gamma_j(x), \pm)$ и $P_j = (\gamma_j(x_0), \pm)$ соответственно по одному над запрещенной зоной $[E_{2j-1}, E_{2j}]$ на поверхности Γ или, как мы указывали, на цикле a_j .

3. В силу определения (1) дифференциала W на римановой поверхности Γ , экспонента от его интеграла по пути дает однозначную функцию

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = \exp \left\{ \int_{Q_0}^Q W \right\}, \quad (2)$$

где $Q = (E, \pm)$ — точка поверхности Γ , Q_0 — начальная точка и интеграл берется по любому пути на Γ , соединяющему эти точки. Из однозначности функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ на Γ следует важный вывод: все интегралы от W по циклам на Γ являются целыми кратными $2\pi i$:

$$\oint_{a_j} W = 2\pi i m_j, \quad \oint_{b_j} W = 2\pi i n_j, \quad (3)$$

где m_j и n_j — целые числа.

Оказывается, свойства 1—3 для функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ на любой замкнутой римановой поверхности Γ однозначно определяют функцию $\psi_{\pm}$; мы будем называть такую функцию $\psi_{\pm}$ «функцией Бейкера — Ахиезера» на римановой поверхности Γ . При этом набор нулей Q_j однозначно определится ниже через набор полюсов P_j . Здесь P — точка поверхности Γ (в нашем случае $P = (E, \pm)$) и x, x_0 — параметры. Проекция поверхности Γ на E -плоскость, как

уже указывалось в § 4, можно считать числовой функцией $f(P)$, где $f(E, \pm) = E$ по определению.

Для потенциала $u(x)$ в § 4 уже указывалась формула (4.19), откуда следует

$$u(x) = -2 \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) + \sum_{\alpha=0}^{2n} E_{\alpha} = -2 \sum_j f(Q_j(x)) + \sum_{\alpha=0}^{2n} E_{\alpha}. \quad (4)$$

Мы уже ввели в § 6 канонический базис циклов на поверхности $\Gamma(a_j, b_j)$ и в § 7 — нормированный базис абелевых дифференциалов $\tilde{\Omega}_j$ (см. (7.28)), где

$$\oint_{a_j} \tilde{\Omega}_k = 2\pi i \delta_{jk}, \quad \oint_{b_j} \tilde{\Omega}_k = b_{jk} = b_{kj}. \quad (5)$$

Введем теперь нормированные дифференциалы II и III рода. Рассмотрим некоторые виды дифференциалов, которые нам понадобятся на гиперэллиптической поверхности Γ , задаваемой уравнением

$$y^2 + R_{2n+1}(E) = 0, \quad R_{2n+1}(E) = \prod_{\alpha=0}^{2n} (E - E_{\alpha});$$

все E_{α} вещественны (концы зон спектра), $E_0 < E_1 < \dots < E_{2n}$.

а) Дифференциалы II рода ω_k , имеющие полюс лишь в бесконечно удаленной точке с локальной координатой $z = 1/\sqrt{E}$. Около этой точки потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\omega_k = dz \left(\frac{1}{z^{2k+2}} + \varphi(z) \right), \quad (6)$$

где $\varphi(z)$ аналитична при $z = 0$ и $k = 0, 1, 2, \dots$, и, кроме того, чтобы дифференциал ω_k был нормирован условием

$$\oint_{a_j} \omega_k = 0. \quad (7)$$

Условия (6) и (7) полностью определяют ω_k . Как указывалось в § 7,

$$\omega_k = \frac{dE}{\sqrt{R(E)}} \left(-\frac{1}{z} + a_{n+k-1}E + a_{n+k-2}E^2 + \dots + a_n E^{n+k} \right), \quad (8)$$

где коэффициенты a_q определяются из условий (6), (7). Нас особо будут интересовать дифференциалы ω_0 и ω_1 .

б) Дифференциалы III рода $\Omega^{P_j Q_j}$, имеющие два полюса первого порядка в точках P_j, Q_j , где P_j, Q_j — нуль и полюс блоховской функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ над запрещенной зоной $[E_{2j-1} E_{2j})$ на поверхности Γ . Мы требуем, чтобы вычет дифференциала $\Omega^{P_j Q_j}$ был равен $+1$ в точке P_j и -1 в точке Q_j . Нормировка такова:

$$\oint_{a_q} \Omega^{P_j Q_j} = 0, \quad q = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Из указанных выше свойств дифференциала $W = d_E \ln \psi_{\pm}$ вытекает представление

$$W = i(x - x_0) \omega_0 + \sum_{j=1}^n \Omega^{P_j Q_j} + \Omega, \quad (10)$$

где Ω — абелев дифференциал

$$\Omega = \sum_{j=1}^n k_j \tilde{\Omega}_j, \quad (11)$$

и

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = \exp \left\{ \int_{Q_0}^Q W \right\},$$

где $Q = (E, \pm)$, Q_0 — некоторая начальная точка на Γ .

Представление (10) для W вытекает из того, что разность $W - i(x - x_0) \omega_0 - \sum_j \Omega^{P_j Q_j}$ уже не имеет полюсов на поверхности Γ и является тем самым абелевым дифференциалом.

Коэффициенты k_j в формуле (11) могут быть определены из условия однозначности $\psi_{\pm}$, откуда вытекает, что все a -периоды от W — целые кратные $2\pi i$. Из условий нормировки (9), (7) для ω_0 и $\Omega^{P_j Q_j}$ имеем

$$2\pi i m_j = \oint_{a_j} W = \oint_{a_j} \Omega = \oint_{a_j} \sum_q k_q \tilde{\Omega}_q, \quad (12)$$

где m_j — целые числа. Из нормировки (5) для $\tilde{\Omega}_q$ получаем

$$2\pi i m_j = 2\pi i \sum_q k_q \delta_{jq} = 2\pi i k_j. \quad (13)$$

Отсюда следует, что все k_j — целые числа, $k_j = m_j$. Используем теперь условие целочисленности b -периодов дифференциала W :

$$\begin{aligned} 2\pi i n_j &= \oint_{b_j} W = \\ &= i(x - x_0) \int_{b_j} \omega_0 + \sum_{q=1}^n \oint_{b_j} \Omega^{P_q Q_q} + \sum_{q=1}^n m_q \oint_{b_j} \tilde{\Omega}_q. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $U_j = \oint_{b_j} \omega_0$ — периоды дифференциала ω_0 .

В теории абелевых дифференциалов имеется важное соотношение: если a_j, b_j — канонический базис, Ω^{PQ} — дипольный дифференциал III рода с вычетами $+1, -1$ в точках P, Q , соответственно в полюсах P и Q первого порядка на поверхности Γ и если $\oint_{a_j} \Omega^{PQ} = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то можно провести путь γ из P в Q , так что верна формула

$$2\pi i \oint_{b_j} \Omega^{PQ} = \int_P^Q \tilde{\Omega}_j \quad (15)$$

(интеграл справа берется вдоль пути γ) при нормировке (5).

Применяя общее соотношение (15) к формуле (14) для b -периодов, получаем

$$2\pi i n_j - \sum_q m_q b_{jq} = i(x - x_0) U_j + \sum_{q=1}^n \int_{P_q(x_0)}^{Q_q(x)} \tilde{\Omega}_j, \quad (16)$$

где Q_q и P_q — нули и полюсы $\psi_{\pm}$ на Γ , интегралы берутся по некоторому пути на Γ , соединяющему точки P_j и Q_j . Напомним, что мы ввели решетку в n -мерном комплексном пространстве из векторов $e_1, \dots, e_n, e'_1, \dots, e'_n$, где

$$e_j^{\alpha} = 2\pi i \delta_j^{\alpha}, \quad e'_j{}^{\alpha} = \oint_{b_{\alpha}} \tilde{\Omega}_j = b_{\alpha j} = b_{j\alpha}.$$

Соотношение (16) можно переписать в виде

$$\left(\sum_{q=1}^n n_q e_q + \sum_{q=1}^n m_q e'_q - i(x - x_0) U \right)^j = \sum_{q=1}^n \int_{P_q(x_0)}^{Q_q(x)} \tilde{\Omega}_j. \quad (17)$$

Вектор U имеет компоненты $U^j = \oint_{b_j} \omega_0$.

Если мы изменим пути γ_q справа между точками P_q и Q_q на любой цикл $\gamma_q \rightarrow \gamma_q + \sum_k \lambda_{qk} a_k + \mu_{qk} b_k$, где λ_{qk} , μ_{qk} — любые целые числа, то весь вектор изменится на некоторый вектор решетки (e, e'). Заметим, что слева стоит вектор $i(x - x_0) U$ плюс некоторый вектор решетки. Введем вектор A с компонентами, равными

$$A^j(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) = \sum_{q=1}^n \int_{P_q}^{Q_q} \tilde{\Omega}_j. \quad (18)$$

Пренебрегая векторами решетки в формуле (17), мы имеем

$$-i(x - x_0) U \cong A(Q_1(x), \dots, Q_n(x), P_1(x_0), \dots, P_n(x_0)), \quad (19)$$

где значок $\cong$ означает равенство с точностью до любого вектора решетки.

Напомним, что нули и полюсы ψ на Γ имели вид

$$Q_j = (\gamma_j(x), \pm), \quad P_j = (\gamma_j(x_0), \pm).$$

Для этого набора $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ с учетом знаков $\pm$ (их положений на Γ) мы имели ранее дифференциальное уравнение (5.3) по x и уравнение (5.25) по времени t в силу КдФ, причем потенциал выражался формулой (4.19).

Рассмотрим замену переменных, именуемую отображением Абеля, от набора точек $Q_q = (\gamma_q(x), \pm)$ на поверхности Γ к набору параметров A^j , где

$$A^j(Q(x), P(x_0)) = \sum_q \int_{P_q}^{Q_q} \tilde{\Omega}_j. \quad (20)$$

Точки $P_q(x_0)$ здесь фиксированы, и набор параметров A^j определяется с точностью до добавления любого вектора решетки. В силу формулы (17) замена Абеля (20) линейна-

ризует уравнения (5.3) для $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, так как $A^j(x) = i(x - x_0) U^j$ и вектор U постоянен.

Фактически параметры Абеля A^j представляют собой «углы» $A^j = \varphi_j$, которые можно ввести для вполне интегрируемой гамильтоновой системы (2.3) согласно известной теореме Лиувилля. Можно ввести также и канонически сопряженные переменные «действия».

Замена Абеля (20) обратима. Можно выразить, наоборот, точки $Q_j = (\gamma_j, \pm)$ через параметры A^j и тем самым потенциал $u = -2\sum \gamma_j + \sum E_\alpha$ будет функцией от параметров A^j . Это задача «обращения абелевых интегралов», которая, как известно, решается через многомерные θ -функции, связанные с решеткой (7.31) из $2n$ векторов в n -мерном комплексном пространстве. Удобное выражение для потенциала $u(x)$ через θ -функцию Римана, определенную в § 7, будет дано позднее (в § 9).

Временная динамика конечнозонного потенциала $u(x)$ в силу КДФ (а также всех высших уравнений КДФ) линеаризуется при переходе от набора точек $Q_j = (\gamma_j, \pm)$ к набору параметров A^j с помощью замены (18). Для проверки этого факта надо обратить внимание на следующее: блоховская собственная функция $\psi_\pm(x, x_0, E)$ имеет асимптотику $\exp\{\pm i(x - x_0) \sqrt{E}\}$ при $E \rightarrow \infty$. Если же потенциал меняется в силу КДФ и $u \rightarrow u(x, t)$, то асимптотика функции ψ при $E \rightarrow \infty$ будет иметь вид

$$\psi_\pm(x, x_0, t) \sim \exp\{\pm i(x - x_0) k \pm ik^3 t\}, \quad (20')$$

где $k = \sqrt{E}$.

Асимптотика (20') вытекает из представления Лакса

$$\partial L / \partial t = [L, A], \quad (21)$$

указанного в § 1 для КДФ, где оператор третьего порядка A имеет вид (1.2.5). При $E \rightarrow \infty$ потенциал u несуществен. Полагая $u = 0$, мы из (21) немедленно получаем (20) при $E \rightarrow \infty$. Для высших КДФ все аналогично, но оператор $A = A_q + c_1 A_{q-1} + \dots + c_q A_0$ имеет порядок $2q + 1$. Рассуждая, как и выше, мы из (21) получим

для $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ асимптотику

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) \sim \exp \{i [(x - x_0) k + (k^{2q+1} + c_1 k^{2q-1} + \dots + c_q k) t]\} \quad (22)$$

при $E \rightarrow \infty$.

Из асимптотики (22) мы получим, как и ранее,

$$A(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) \cong i(x - x_0)U + Vt, \quad (23)$$

где знак $\cong$ означает равенство с точностью до вектора решетки (7.31). Для вектора $V = V_q + c_1 V_{q-1} + \dots + c_q V_0$ имеем формулу ($V_0 = U$)

$$V_k^j = \oint_{b_j} \omega_k, \quad k = 0, \dots, q, \quad q < n. \quad (24)$$

Дифференциалы II рода ω_q (см. (8)) имеют нулевые a -периоды: $\oint_{a_j} \omega_q = 0$, единственный полюс в точке ∞ на Γ

с лорановским разложением

$$\omega_q \sim dz \left(\frac{1}{z^{2q+2}} + \varphi(z) \right),$$

где $z = 1/\sqrt{E}$, $\varphi(z)$ аналитична при $z = 0$. Точки $Q_j = (\gamma_j, \pm)$ уже зависят от x и t . Формула (24) следует из асимптотики (22) точно так же, как и для зависимости от x . Формулы (23) и (24) для производных по x и по t от параметров A^j можно получить и непосредственно, не используя асимптотики собственной функции $\psi_{\pm}$ при $E \rightarrow \infty$. Для этого надо вычислить замену переменных (18) для A^j в уравнениях (5.3) и (5.25) по x и по t и убедиться, что замена (18) их линеаризует. Мы не будем проводить здесь это вычисление. Динамике в силу КдФ в параметрах A^j отвечает вектор V_1 , где $c_1 = 1$, $c_0 = 0$, $c_j = 0$, $j > 1$.

Так как параметры A^j фактически являются угловыми координатами на n -мерном вещественном торе для гладких вещественных $u(x, t)$, то из формулы (23) следует квазипериодичность динамики по t для решений $u(x, t)$. В формуле (23) угловой характер этих вещественных параметров A^j следует из того, что они определены с точностью до добавления любого вектора n -мерной решетки,

порожденной в вещественном n -мерном пространстве векторами $e'_1, \dots, e'_n$ (см. (7.31)).

Обратим внимание на весьма любопытное аналитическое свойство решений $u(x, t)$ и вообще конечнозонных потенциалов $u(x)$. Все они квазипериодичны также по мнимым осям, если считать x и t комплексными. Это свойство вытекает также из формулы (23), так как мы имеем дело фактически с решеткой из $2n$ векторов в n -мерном комплексном пространстве. Оно является естественным обобщением на все n -зонные потенциалы двоякопериодичности эллиптической функции Вейерштрасса в комплексной области S , которая была однозонным потенциалом и кноидальной волной для КДФ.

Обратимся теперь к квазиимпульсу $p(E)$, определенному в § 1 равенством

$$\widehat{T}\psi_{\pm} = e^{\pm i p T} \psi_{\pm} = \psi_{\pm}(x + T),$$

где T — период потенциала. Как мы уже знаем, квазиимпульс $p(E)$ определен с точностью до прибавления целых кратных π , коэффициенты его разложения по $z = 1/\sqrt{E}$ при $E \rightarrow \infty$ в точности совпадают с полиномиальными интегралами I_n уравнения КДФ и всех его высших аналогов, введенными в гл. I,

$$p(E) \sim k + \sum_{n \geq 1} \frac{\pm 2I_n}{(2k)^{2n+3}}, \quad (25)$$

а сами высшие КДФ имеют вид

$$\dot{u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)}.$$

Для $p(E)$ мы имели формулу

$$\begin{aligned} p(E) &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\chi}_{\pm}(x, E) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \chi_R dx = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sqrt{R(E)} dx}{\prod_k (E - \gamma_k(x))}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь видом дифференциала $W = d_E \ln \psi_{\pm}$.

В силу (10) мы имеем

$$W = i(x - x_0)\omega_0 + \sum_{j=1}^n \Omega^{P_j(x_0)Q_j(x)} + \sum k_j \tilde{\Omega}_j, \quad (26)$$

где $P_j = (\gamma_j^0, \pm)$, $Q_j = (\gamma_j(x), \pm)$. Если все $Q_j(x)$ периодичны по x с периодом T (а это так для периодических по x потенциалов $u(x)$), то оператор трансляции $\hat{T}: x \rightarrow x + T$ действует на W следующим образом:

$$\hat{T}: W \rightarrow W + iT\omega_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{\Omega}_j, \quad (27)$$

где λ_j — целые числа. Меняя непрерывно x от x_0 до $x_0 + T$ и учитывая установленную выше целочисленность чисел k_j , получаем для $\lambda_j = 0$

$$\hat{T}: W \rightarrow W + iT\omega_0. \quad (28)$$

Так как $\psi_{\pm} = \exp \{ \int W \}$, то можно записать

$$d_E p(E) = \frac{\partial p}{\partial E} dE = \omega_0. \quad (29)$$

Теперь мы можем сделать следующий вывод: квазиимпульс p представляет собой интеграл по пути на поверхности Γ от дифференциала II рода ω_0 , нормированного условиями (6), (7). Набор b -периодов $U^j = \oint_{b_j} \omega_0$ определяет производные по x от параметров A^j (см. (23)). Из формулы (29) для $p(E)$ мы видим, что в случае n -зонного потенциала квазиимпульс $p(E)$ представляется в виде интеграла от выражения вида $P_n(E) dE / \sqrt{R(E)}$. Ранее этот факт был получен иначе из формулы (4.4). Мы видим, что $P_n(E)$ — полином степени n со старшим членом единица, определяемый условиями нормировки (нулевые a -периоды). Так как b -периоды этого дифференциала не равны нулю, для определения однозначной ветви функции $p(E)$ следует сделать разрезы в E -плоскости вдоль всех запрещенных зон конечной и бесконечной длины (их ровно $n + 1$):

$$(-\infty, E_0), (E_1, E_2), \dots, (E_{2n-1}, E_{2n}).$$

Поверхность Γ распадается на два куска над этой плоскостью с разрезами. На каждом куске функция $p(E)$ уже

будет определена однозначно, так как обходы вокруг разрывов являются циклами a_j и a -периоды равны нулю для $d_E p = \omega_0$. Можно выбрать «физический лист», где значения функции $p(E)$ лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } p \geq 0$. Мы не будем здесь заниматься более детально аналитическими свойствами этого и обратного отображения $E(p)$.

§ 9. Точные формулы

для конечнозонных потенциалов и решений КДФ

Пусть, как и выше, $u(x)$ — n -зонный потенциал оператора Шредингера $L = -d^2/dx^2 + u(x)$; гиперэллиптическая риманова поверхность Γ ($y^2 + R(E) = 0$) определена спектром $E_0, E_1, \dots; (\gamma_j, \pm)$ — нули и полюсы блоховской собственной функции $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ на Γ . Для потенциала мы имеем выражение (4.19)

$$u(x) = -2 \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) + \sum_{\alpha=0}^{2n} E_{\alpha}.$$

Было получено также соотношение (8.16)

$$i(x - x_0) U_q \cong \sum_{j=1}^n \int_{(\gamma_j(x_0), \pm)}^{(\gamma_j(x), \pm)} \tilde{\Omega}_q.$$

Для случая $n = 2$ уравнение (5.3) динамики параметров γ_1, γ_2 по x точно совпадает с уравнением (по времени) для случая Ковалевской в найденных ею переменных в теории тяжелого волчка (см. книгу [22]). Формула (4.19) выражает потенциал $u(x)$ через простейшую симметрическую функцию $\sum \gamma_i$ от набора из n точек $(\gamma_1, \pm), \dots, (\gamma_n, \pm)$ на поверхности Γ рода n . В силу замены Абеля (8.20), все симметрические функции вида $\sum \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}$ от набора из n точек поверхности Γ определены как мероморфные функции n комплексных переменных, $2n$ -периодические относительно решетки (7.31). В стандартной литературе по θ -функциям (см. *Kratzer A. Lehrbuch der Thetafunktionen.* — Leipzig: Teubner, 1903) указывается выражение таких симметрических функций через θ -функции, используемое в [22], откуда следует формула для потенциала $u(x)$. Однако

для первого симметрического полинома можно существенно улучшить вид формулы. Оказывается возможным получить простое выражение через θ -функцию Римана

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta((x - x_0)U + K) + C(\Gamma), \quad (1)$$

где значение констант $C(\Gamma)$ и K_q будет дано ниже.

Опишем основное аналитическое свойство θ -функции Римана, которое используется при выводе формулы (1). Рассмотрим многозначную функцию одной комплексной переменной

$$\theta\left(\dots, \int_{\infty}^P \tilde{\Omega}_j + (x - x_0)U_j + g_j, \dots\right) = f(E), \quad (2)$$

где

$$P = (E, \pm), \quad g_j = - \sum_{q=1}^n \gamma_q^{(0)} \int_{\infty}^P \tilde{\Omega}_j + \pi i q - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_{jq}.$$

Функция $f(E)$ является однозначной в области σ , полученной из поверхности Γ разрезанием всех циклов a_i, b_j (рис. 14). При этом функция $f(E)$ имеет ровно n нулей на σ ; оказывается, эти нули точно совпадают с набором точек $[\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)]$, дающих решение проблемы Якоби об обращении абелевых интегралов (см. [21]). Указанный в [21] алгоритм решения проблемы Якоби требует интегрирования выражения $E d \ln f(E)$ по границе σ . Отсюда получается система алгебраических уравнений

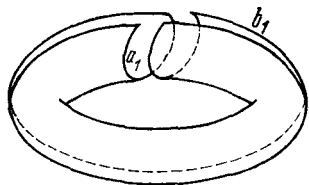


Рис. 14. Разрез по циклам a_1, b_1 превращает тор (род $g = 1$) в квадрат.

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j(x) = \sum_q \oint_{a_q} E \tilde{\Omega}_q - \operatorname{res}_{E=\infty} \{E d \ln f(E)\}. \quad (3)$$

Сопоставляя (3) с (4.19), получаем формулу для потенциала

$$u(x) = 2 \operatorname{res}_{E=\infty} \{E d \ln f(E)\} + C(\Gamma), \quad (4)$$

где

$$C(\Gamma) = \sum_{\alpha=0}^{2n} E_{\alpha} - 2 \sum_{q=1}^n \oint_{a_q} E \tilde{\Omega}_q.$$

Для вывода основной формулы (1) необходимо вычислить вычет в точке $E = \infty$, где локальной координатой на поверхности Γ является $z = 1/\sqrt{E}$. Мы имеем, по определению,

$$E d \ln f(E) = \sum_k -2z^{-k} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial E} dz = -2z^{-5} \sum_k \Omega_k \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k}, \quad (5)$$

где $\eta_k = \int_{\infty}^P \tilde{\Omega}_k$, $P = (E, \pm)$. Пусть

$$\tilde{\Omega}_k = (c_k^1 E^{n-1} + \dots + c_k^n) dE \prod_{\alpha=0}^{2n} (E - E_{\alpha})^{-1/2},$$

как указано в § 7. При $E \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{c_k^1 E^{n-1} + \dots + c_k^n}{\sqrt{\prod_{\alpha} (E - E_{\alpha})}} \sim c_k^1 E^{-3/2} \left(1 - \frac{d_0}{2} E^{-1} - \frac{d_1}{2} E^{-2} \right) + c_k^2 E^{-5/2} \left(1 - \frac{d_0}{2} E^{-1} - \dots \right). \quad (6)$$

Отсюда для $E d \ln f$ получим

$$E \frac{d \ln f}{dz} dz = -2 dz \sum_k \left(\frac{c_k^1}{z^2} + \dots \right) \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k}, \quad (7)$$

где $\eta_k = \int_{\infty}^P \Omega_k + (x - x_0) U_k + g_k$, $P = (E, \pm)$. Так как функция $\partial \ln \theta / \partial \eta_k$ регулярна на σ в окрестности точки $z = 0$ (или $E = \infty$), мы находим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{E=\infty} (E d \ln f(E)) &= \left(-2 \sum_k \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k} c_k^1 \right)_{z=0} = \\ &= 4 \sum_{i,j} c_i^1 c_j^1 \frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \ln \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

В окрестности точки $z = 0$ ($E = \infty$) мы имеем

$$\omega \sim \frac{dz}{z^2}, \quad \tilde{\Omega}_k \sim -2c_k^1 dz. \quad (9)$$

Далее, сопоставляя тождество (см. [24])

$$U_k = -2\pi i c_k^1 \quad (10)$$

с формулой (8), мы окончательно получаем

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \theta(\eta_1, \dots, \eta_n) + C(\Gamma), \quad (11)$$

$$C(\Gamma) = \sum_{\alpha} E_{\alpha} - 2 \sum_{q=1}^n \oint_{a_q} E \tilde{\Omega}_q,$$

где

$$\eta_k = \int_{\infty}^P \tilde{\Omega}_k + (x - x_0) U_k + g_k. \quad (12)$$

Сравнивая формулу (11) с результатом § 8, мы получим окончательную общую формулу для конечнозонных решений КдФ

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta((x - x_0) U + Vt + K) + C(\Gamma). \quad (13)$$

§ 10. Некоторые частные решения КдФ

1. *Многосолитонные решения.* Среди построенных конечнозонных решений $u(x, t)$ уравнения КдФ имеются как предельный случай известные (см. § 3 гл. I) многосолитонные решения, убывающие при $|x| \rightarrow \pm \infty$. Дело в том, что безотражательные потенциалы уравнения Шредингера могут быть получены как пределы периодических (и квазипериодических) потенциалов $u_T(x)$ с периодом T при $T \rightarrow \infty$, где число зон не меняется. При $T \rightarrow \infty$ разрешенные зоны конечного размера стягиваются к изолированным точкам дискретного спектра, а край бесконечной разрешенной зоны сходится к нулю.

На языке римановых поверхностей Γ происходит следующее (поверхность Γ_T имеет вид $y^2 = \prod_{\alpha} (E - E_{\alpha}(T))$):

при $T \rightarrow \infty$ пары точек ветвления $[E_0(T), E_1(T)]$, $[E_2(T), E_3(T)]$, $\dots$, $[E_{2n-2}(T), E_{2n-1}(T)]$ сближаются и

$E_{2n}(T) \rightarrow 0$. Кроме того, при $T \rightarrow \infty$ риманова поверхность вырождается в рациональную $\{y^2 = E\} = \Gamma_\infty$ и предельное положение пар таково:

$$E_{2i}(\infty) = E_{2i+1}(\infty) = -\kappa_i^2.$$

Само уравнение римановой поверхности приобретает вид

$$y^2 = E \prod_{i=0}^n (E + \kappa_i^2)^2.$$

Уравнения (5.3) и (5.25) для набора нулей $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ приобретут вид

$$\begin{aligned} \gamma_j' &= \frac{2i}{\prod_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k)} \prod_{q=1}^n (\gamma_j - i\kappa_q) \sqrt{\gamma_j}, \\ \dot{\gamma}_j &= \frac{8i \left(\sum_{q \neq j} \gamma_q - \frac{1}{2} \sum_i E_i \right)}{\prod_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k)} \prod_{q=1}^n (\gamma_j - i\kappa_q) \sqrt{\gamma_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения легко решаются и приводят к формулам (§ 3 гл. I) для многосолитонных решений. Можно непосредственно проследить вырождение при $T \rightarrow \infty$ в формулах (9.13) через θ -функцию Римана: при $T \rightarrow \infty$ мы из формулы (9.13) получим в точности выражение (I.3.5) для многосолитонных решений через вторую логарифмическую производную от детерминанта Δ .

На языке стационарной задачи (2.3) для высших КДФ можно сказать, что эти решения представляют собой наиболее вырожденный тип сепаратрис.

Отыскание многосолитонных решений, конечно, можно излагать без всяких методов *a posteriori*, так как эти решения являются рациональными выражениями от экспонент (в таком виде их можно искать).

2. *Солитоны на фоне конечнозонных потенциалов.* Возможна ситуация, когда риманова поверхность Γ_T при $T \rightarrow \infty$ вырождается лишь частично: часть пар $[E_{2i}(T), E_{2i+1}(T)]$ при $T \rightarrow \infty$ сближается к изолированным точкам $-\kappa_i^2$ для $i = i_0, \dots, i_k$, где $k < n - 1$. Соответствующие потенциалы $u_T(x)$ при $T \rightarrow \infty$ вырождаются в потенциал $u_\infty(x)$, который имеет конечнозонную асимптотику

при $x \rightarrow \pm \infty$. Точно это означает, что имеется два конечн-
нозонных потенциала $u_+(x)$ и $u_-(x)$ с числом зон
 $q = n - k$, такие, что

$$u_\infty(x) - u_+(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$u_\infty(x) - u_-(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Оба потенциала $u_\pm(x)$ имеют общий спектр — риманову
поверхность Γ вида

$$y^2 = \prod_{\alpha \neq 2i_s, 2i_s+1} (E - E_\alpha). \quad (2)$$

Однако потенциалы $u_\pm(x)$ различны. Если $P_1^{(+)}, \dots$
 $\dots, P_{n-k}^{(+)}$ — набор нулей блоховской функции потенциа-
ла $u_+(x)$, где $P_j = (\tilde{\gamma}_j(x), +)$, то набор нулей
 $P_1^{(-)}, \dots, P_{n-k}^{(-)}$ потенциала $u_-(x)$ будет иметь вид
 $P_j^{(-)} = (\tilde{\gamma}_j, -)$. Лишь в случае четных потенциалов
 $u_+(x) = u_+(-x)$ мы будем иметь $u_+ = u_-$. Для этого не-
обходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\gamma}_j$ для всех $j = 1, \dots, n - k$
лежало в концах точек ветвления.

Такие потенциалы $u_\infty(x)$ порождают решения $u(x, t)$
уравнения КдФ, называемые «многосолитонными решения-
ми на фоне конечнозонных»; сами эти потенциалы называ-
ются «безотражательными потенциалами на фоне конечно-
зонных». Эти потенциалы являются сепаратрисными реше-
ниями стационарной задачи для высших КдФ.

Уравнения (5.3), (5.25) приобретут вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_q &= \frac{2i}{\prod_{k \neq q} (\gamma_q - \gamma_k)} \left(\prod_{\alpha \neq 2i_s, 2i_s+1} (\gamma_q - E_\alpha) \right)^{1/2} \cdot \prod_{\alpha=2i_s} (\gamma_q - E_\alpha), \\ \dot{\gamma}_q &= \frac{8i \left(\sum_{q=k} \gamma_k - \frac{1}{2} \sum E_i \right)}{\prod_{q \neq k} (\gamma_q - \gamma_k)} \left(\prod_{\alpha \neq 2i_s, 2i_s+1} (\gamma_q - E_\alpha) \right)^{1/2} \times \\ &\quad \times \prod_{\alpha=2i_s} (\gamma_q - E_\alpha). \quad (3) \end{aligned}$$

В случае одной зоны $n - k = 1$ эллиптические формулы
см. Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. — ЖЭТФ, 1974,
т. 67, вып. 11.

3. *Решение в эллиптических функциях.* Кроме вырожденных типов решений, указанных выше в пунктах 1, 2, имеются некоторые невырожденные решения уравнения КДФ и конечнозонные потенциалы, записываемые через эллиптические функции. Напомним, что простейшее решение типа простой (кноидальной) волны $u(x - ct)$ имеет вид эллиптической функции Вейерштрасса

$$u(x - ct) = 2\wp(x - ct) - c/6, \\ x - x_0 = \int \frac{du}{(4u^3 - g_2u - g_3)^{1/2}}. \quad (4)$$

Функция $\wp(x)$ комплексной переменной x является, как известно, двоякопериодической с действительным периодом T и мнимым периодом T' , где

$$T = b/U_1, \quad T' = 2\pi i/U_1. \quad (5)$$

Общий конечнозонный потенциал $u(x)$ с римановой поверхностью $\Gamma(y^2 = \prod_{\alpha} (E - E_{\alpha}))$ и соответствующей матрицей Римана

$$(2\pi i \delta_{kq}, b_{kq})$$

имеет набор действительных периодов

$$T_q^{-1} = \sum_j b^{jq} U_j, \quad b^{jq} b_{qs} = \delta_s^j \quad (6)$$

и мнимых периодов

$$T'_q = 2\pi i/U_q. \quad (6')$$

Поэтому потенциал $u(x)$ такого вида является квазипериодической функцией комплексной переменной x . Для периодичности потенциала на действительной оси x необходимо и достаточно выполнение $n - 1$ целочисленных соотношений

$$\sum_{q=1}^n m_{qk} T_q = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (7)$$

Однако из соотношений (7) еще не вытекает никаких соотношений на мнимые периоды T'_q . Поэтому потенциал $u(x)$ будет квазипериодической функцией комплексной переменной x . Для того чтобы потенциал был двоякопериодическим и тем самым выражался через эллиптические функ-

ции, необходимо и достаточно выполнение еще $n - 1$ соотношений на мнимые периоды

$$\sum_{q=1}^n m'_{qk} T'_q = 0, \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (8)$$

Совокупность всех n -зонных потенциалов образует $3n + 1$ -мерное семейство ($2n + 1$ точек ветвления или краев зон и n параметров при заданном спектре). Учитывая тривиальное преобразование $u \rightarrow u + \text{const}$ и $2n - 2$ соотношений на действительные и мнимые периоды (7), (8), мы видим, что эллиптические потенциалы должны образовывать не более, чем $(n + 2)$ -мерное семейство с точностью до прибавления константы.

Соотношения (7), (8) на группу периодов определяются только поверхностью Γ . Поэтому из эллиптического n -зонного потенциала при движении во времени в силу любого из высших КДФ будет снова получаться эллиптический потенциал. Мы знаем следующие n -зонные эллиптические потенциалы Ламе — Айнса:

$$u_n(x) = \frac{n(n+1)}{2} u_1(x) = n(n+1) \wp(x). \quad (9)$$

Спектр этого семейства потенциалов зависит от двух параметров (кроме прибавления константы). Итак, мы получим $(n + 2)$ -мерное семейство эллиптических n -зонных потенциалов из потенциалов Ламе — Айнса, решая задачу Коши для всевозможных высших КДФ. Мы не знаем, существуют ли другие семейства эллиптических потенциалов.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. Спектр потенциала $u(x) = 6\wp(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_0 &= 3e_1, & E_1 &= -(3g_2)^{1/2}, & E_2 &= 3e_2, \\ E_3 &= (3g_2)^{1/2}, & E_4 &= 3e_3, & 4e_i^3 - g_2 e_i - g_3 &= 0, \\ & & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Решим задачу Коши для уравнения КДФ с начальным условием $u(x, 0) = 6\wp(x)$. Все эллиптические потенциалы этого семейства будут иметь вид (см. [6])

$$u(x - x_0, t) + \text{const}, \quad (11)$$

где $u(x, 0) = 6\wp(x)$.

Мы знаем заранее, что решение КДФ будет эллиптической функцией — как следствие ранее полученных результатов. Используя этот факт и начальное условие, элементарным вычислением получим

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^3 2 \wp(x - \alpha_i(t)), \quad (12)$$

где

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 0, \quad t = \int_0^{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{dz}{12(g_2 - 3\wp^2(z))^{1/2}}, \quad (13)$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \frac{1}{2} \wp^{-1} \{ -\wp(\alpha_1 - \alpha_3) + [g_2 - 3\wp^2(\alpha_1 - \alpha_3)]^{1/2} \}.$$

Найденное здесь точное решение уравнения КДФ представляет собой сумму трех простых волн, движущихся без изменения формы, но с весьма сложно скоррелированными фазами $\alpha_i(t)$. По-видимому, это простейшее с аналитической точки зрения невырожденное двухзонное решение КДФ.

Г л а в а III

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ И ИХ РЕШЕНИЙ

Классический метод обратной задачи, изложенной в гл. I, позволяет решать уравнение с убывающими при $x \rightarrow \pm\infty$ коэффициентами, поскольку при решении существенно используется асимптотическая область вещественной оси, необходимая для построения теории рассеяния. В настоящей главе мы переформулируем метод обратной задачи так, что он позволит нам строить некоторые решения интегрируемых уравнений локально, в окрестности каждой точки x, t . Эта переформулировка окажется чрезвычайно полезной и позволит наметить общий подход к построению как систем уравнений, интегрирование которых возможно, так и их точных решений.

§ 1. Регулярная задача Римана

Центральную роль в новой формулировке метода играет одна из классических задач теории функций комплексного переменного, известная как задача Римана. Она формулируется следующим образом. Пусть на плоскости комплексного переменного λ задан замкнутый контур Γ , возможно, проходящий через бесконечно удаленную точку, и пусть на нем задана матричная (порядка N) функция $G(\lambda)$. Требуется построить матричную функцию $\psi_1(\lambda)$, аналитичную внутри контура, и матричную функцию $\psi_2(\lambda)$, аналитичную вне контура, причем ψ_1 и ψ_2 на контуре удовлетворяют условию

$$\psi_1(\lambda) \psi_2(\lambda) = G(\lambda). \quad (1)$$

Очевидно, что решение задачи Римана не единственно. Так, если ψ_1, ψ_2 — некое такое решение, а g — произвольная невырожденная матричная функция, не зависящая от λ , то пара матричных функций $\psi_1 g, g^{-1} \psi_2$ снова есть решение задачи Римана с той же функцией $G(\lambda)$.

Чтобы избавиться от этой неоднозначности, необходимо нормировать задачу Римана, задав значение одной из функций ψ_1, ψ_2 в некоторой точке из области аналитичности. Разным выборам этой точки и функции отвечают разные нормировки задачи Римана. В большинстве случаев мы будем рассматривать нормировку на единичную матрицу в бесконечно удаленной точке. Такую нормировку мы будем называть канонической.

Предположим, что функции ψ_1 и ψ_2 в областях своей аналитичности нигде не вырождаются, т. е. $\det \psi_1 \neq 0$, $\det \psi_2 \neq 0$. В этом случае задача Римана называется регулярной. Решение регулярной задачи Римана с данной нормировкой является единственным. Действительно, пусть $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}$ и $\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}$ — два решения регулярной задачи. Тогда на контуре имеем

$$\psi_1^{(1)} \psi_2^{(1)} = \psi_1^{(2)} \psi_2^{(2)}.$$

Рассмотрим функцию $\chi(\lambda) = [\psi_1^{(2)}(\lambda)]^{-1} \psi_1^{(1)}(\lambda) = \psi_2^{(2)}(\lambda) [\psi_2^{(1)}(\lambda)]^{-1}$. Эта функция аналитически продолжается с контура Γ на всю комплексную плоскость и, следовательно, по теореме Лиувилля является постоянной. После фиксации нормировки это означает, что $\chi \equiv 1$.

Решение регулярной задачи Римана сводится к решению определенной системы сингулярных интегральных уравнений на контуре Γ . Пусть задача Римана нормирована в точке λ_0 , находящейся, например, вне контура Γ , и пусть

$$\psi_2(\lambda_0) = g.$$

Будем искать решения задачи Римана в виде

$$\psi_1^{-1}(\lambda) = h + \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \quad \text{внутри контура} \quad (2)$$

и

$$\psi_2(\lambda) = h + \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \quad \text{вне контура.}$$

Тогда из условия нормировки имеем

$$h = g - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi. \quad (3)$$

На контуре по формулам Сохоцкого — Племеля имеем

$$\psi_1^{-1} = h + \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - \lambda} + \pi i \varphi(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma. \quad (4)$$

$$\psi_2 = h + \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - \lambda} - \pi i \varphi(\lambda),$$

Подставляя (3) и (4) в (1), получим для φ сингулярное интегральное уравнение ($\lambda \in \Gamma$)

$$g - \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi + \pi i \varphi(\lambda) T(\lambda) + \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - \lambda} = 0, \quad (5)$$

где $T = (G + 1)(G - 1)^{-1}$, решение которого и дает решение регулярной задачи Римана. В наиболее простом случае, когда контур представляет собой вещественную ось и нормировка является канонической ($h = g = 1$), уравнение (5) приобретает вид

$$\frac{1}{\pi i} \left[\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + 1 \right] + \varphi(\lambda) T(\lambda) = 0. \quad (6)$$

Если $N = 1$ и ψ_1 и ψ_2 являются числовыми функциями (скалярный случай), регулярная задача Римана допускает явное решение. Логарифмируя соотношение (1), имеем

$$\ln \psi_2 - \ln \psi_1^{-1} = \ln G. \quad (7)$$

Поскольку по предположению регулярности функции ψ_1 и ψ_2 не имеют нулей в областях аналитичности, их логарифмы также являются аналитическими функциями, допускающими представление в виде интеграла Коши.

Уравнение (7) удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned} \ln \psi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, & \operatorname{Im} \lambda < 0, \\ \ln \psi_1^{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, & \operatorname{Im} \lambda > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \right], \\ \psi_1 &= \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \right].\end{aligned}\quad (9)$$

Формулы (9) дают представление об условиях разрешимости регулярной задачи Римана. Видно, что достаточным условием разрешимости является сходимость интегралов (8), в частности отсутствие полюсов и нулей у функции $G(\lambda)$ (нулевой индекс задачи Римана). В матричном случае условия разрешимости задачи Римана являются более сложными, и требование ограниченности и невырожденности матричной функции $G(\lambda)$ может оказаться недостаточным. Как показано в [25], достаточным является, например, требование $\operatorname{Re} G > 0$, т. е. требование положительности вещественной части матрицы $G(\lambda)$ при всех значениях λ на контуре Γ . Ниже мы будем всюду, если не оговорено противное, предполагать, что регулярная задача Римана разрешима. Как мы уже знаем, в этом случае после наложения нормировки она разрешима однозначно.

§ 2. Задача Римана с нулями

Будем говорить, что матричная функция $\psi(\lambda)$ имеет нуль в точке $\lambda = \lambda_0$, если в этой точке ее определитель равен нулю ($\det \psi(\lambda_0) = 0$). Очевидно, в этой точке обратная матрица имеет особенность — полюс конечного порядка. Будем называть нуль $\lambda = \lambda_0$ простым, если этот полюс имеет порядок единицу, т. е. если в окрестности $\lambda \simeq \lambda_0$

$$\psi^{-1}(\lambda) = \frac{A}{\lambda - \lambda_0} + C + \dots \quad (1)$$

Сама функция ψ в окрестности $\lambda = \lambda_0$ имеет разложение

$$\psi(\lambda) = B + D(\lambda - \lambda_0) + \dots \quad (2)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}AB &= BA = 0, \\ AD + CB &= BC + DA = 1.\end{aligned}\quad (3)$$

В скалярном случае числовых функций ψ очевидным образом $B = 0$, и точка $\lambda = \lambda_0$ является нулем функции $\psi(\lambda)$ в обычном смысле.

Мы начнем изучение задачи Римана с нулями с рассмотрения именно этого случая. Калибровку задачи Римана будем предполагать канонической. Пусть функция ψ_1 , аналитичная внутри контура Γ , имеет там n простых нулей $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и функция ψ_2 , аналитичная вне контура, имеет в этой области также n простых нулей $\mu_1, \dots, \mu_n$ и пусть ни один из нулей λ_i, μ_i не лежит на контуре Γ .

Рассмотрим вспомогательные функции

$$\tilde{\psi}_1 = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda - \mu_i}{\lambda - \lambda_i} \psi_1, \quad (4)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda - \mu_i} \psi_2, \quad (5)$$

которые также являются аналитичными, но нулей уже не имеют. Очевидно, что $\tilde{\psi}_2(\infty) = \psi_2(\infty) = 1$ и на контуре Γ , где определены обе функции $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 = \psi_1 \psi_2 = G$. Таким образом, задача об определении функций $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ является регулярной задачей Римана и дается формулами (1.9). Этот пример показывает, что при наличии нулей единственность задачи Римана нарушается — кроме функции G , контура Γ и нормировки, необходимо еще задавать расположение нулей. Заметим, что задача с нулями и единичной калибровкой на бесконечности разрешима, если только число нулей вне и внутри контура одинаково.

В отличие от регулярной задачи Римана, задача Римана с нулями имеет смысл, даже если функция G на контуре тождественно равна единице. В этом случае $\psi_2 = 1/\psi_1$, нули функции ψ_2 являются полюсами функции ψ_1 и решение задачи Римана сводится к построению мероморфной аналитической функции по ее нулям и полюсам. В общем случае решение задачи может быть разбито на две части — построение рациональной аналитической функции с заданными особенностями и решение регулярной задачи Римана.

Перейдем теперь к матричному случаю. В матричном случае уже нетривиальной является задача о построении

рациональной функции по нулям и полюсам. Начнем с простейшего случая функции, имеющей один нуль и один полюс.

Пусть даны функции ψ_1 и ψ_2 такие, что $\psi_1\psi_2 = 1$, $\psi_1(\infty) = \psi_2(\infty) = 1$, причем функция ψ_1 имеет единственный нуль в точке $\lambda = \lambda_0$, а функция ψ_2 — единственный нуль в точке $\lambda = \mu_0$. Требуется найти в общем виде функции ψ_1 , ψ_2 .

Заметим, что нули ψ_1 совпадают с полюсами ψ_2 , а нули ψ_2 — с полюсами ψ_1 . Поэтому функции ψ_1 и ψ_2 имеют всего по одному полюсу и их разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\psi_1 = 1 + \frac{A_1}{\lambda - \mu_0}, \quad \psi_2 = 1 + \frac{A_2}{\lambda - \lambda_0}. \quad (6)$$

Из $\psi_1\psi_2 = 1$ следует

$$\left(1 + \frac{A_1}{\lambda - \mu_0}\right)\left(1 + \frac{A_2}{\lambda - \lambda_0}\right) = 1.$$

Разлагая произведение на простые дроби, получим

$$A_1 - \frac{A_1 A_2}{\lambda_0 - \mu_0} = 0, \quad A_2 + \frac{A_1 A_2}{\lambda_0 - \mu_0} = 0.$$

Откуда следует, что $A_2 = -A_1$ и

$$A_1 = -(\lambda_0 - \mu_0)P, \quad A_2 = (\lambda_0 - \mu_0)P,$$

где $P^2 = P$.

Матрицы A_1 , A_2 можно рассматривать как матрицы линейных операторов в комплексном N -мерном пространстве C^N . Очевидно, P является матрицей некоторого проекционного оператора. Этот оператор можно задавать произвольно — он и характеризует ту степень произвола, с которой восстанавливаются матричные функции ψ_1 и ψ_2 по положению их нулей. Явные выражения для ψ_1 и ψ_2 имеют вид

$$\psi_1 = 1 - \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\lambda - \mu_0} P, \quad \psi_2 = 1 + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\lambda - \lambda_0} P. \quad (7)$$

При этом

$$\psi_1(\lambda_0) = \psi_2(\mu_0) = 1 - P = B_1.$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать язык линейной алгебры в пространстве C^N . Пусть в этом про-

пространстве задан некоторый линейный оператор U . Обозначим через $\ker U$ ядро оператора U , т. е. совокупность тех векторов из C^N , которые оператор U переводит в нуль, а через $\operatorname{Im} U$ — образ оператора U , т. е. результат применения оператора U ко всему пространству C^N . Очевидно, $\ker U$ и $\operatorname{Im} U$ суть линейные подпространства в C^N , а их прямая сумма составляет все пространство C^N . Последний факт мы обозначим таким образом:

$$\ker U \oplus \operatorname{Im} U = C^N.$$

Вернемся к операторам A и B . Легко проверить, что из (3) следует

$$\ker A = \operatorname{Im} B \text{ и } \ker B = \operatorname{Im} A.$$

Подпространства $\ker U$ и $\operatorname{Im} U$ являются нетривиальными только для вырожденных операторов, в невырожденном случае $\det U \neq 0$, $\ker U = 0$, $\operatorname{Im} U = C^N$.

Вырожденный оператор U , вообще говоря, не характеризуется однозначно подпространствами $\ker U$ и $\operatorname{Im} U$. Исключение представляет проекционный оператор $P^2 = P$, который на подпространстве $\operatorname{Im} P$ действует тривиально как единичный. Поэтому проекционный оператор полностью определяется своим образом и ядром. Заметим еще, что оператор $1 - P$ также является проекционным, причем

$$\ker (1 - P) = \operatorname{Im} P, \quad \operatorname{Im} (1 - P) = \ker P.$$

Итак, проекционный оператор P в формулах (7) мы можем построить по подпространствам

$$N = \operatorname{Im} \psi_1(\lambda_0), \quad M = \ker \psi_2(\mu_0)$$

(в данном случае $\psi_1(\lambda_0) = \psi_2(\mu_0)$).

Теперь ясно, как построить функции ψ_1 и ψ_2 при наличии у каждой из них n нулей. Зададим n проекционных операторов $P_1, \dots, P_n$ и построим произведения

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \left(1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \mu_1} P_1\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda - \mu_n} P_n\right), \\ \psi_2 &= \left(1 + \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda - \lambda_n} P_n\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \lambda_1} P_1\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим ψ_1, ψ_2 в точках $\lambda = \lambda_k, \lambda = \mu_k$:

$$\begin{aligned} B_k &= \psi_1(\lambda_k) = U_k (1 - P_k) V_k, \\ \tilde{B}_k &= \psi_2(\mu_k) = V_k^{-1} (1 - P_k) U_k^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} U_k &= \left(1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_k - \mu_1} P_1\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\lambda_{k-1} - \mu_{k-1}}{\lambda_k - \mu_{k-1}} P_{k-1}\right), \\ V_k &= \left(1 - \frac{\lambda_{k+1} - \mu_{k+1}}{\lambda_k - \mu_{k+1}} P_{k+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_k - \mu_n} P_n\right) \end{aligned} \quad (10)$$

— невырожденные матрицы.

Пусть $N_{0k} = \text{Im}(1 - P_k)$, $M_{0k} = \ker(1 - P_k)$. Из (9) следует, что

$$N_k = \text{Im} \psi_1(\lambda_k) = U_k N_{0k}, \quad M_k = \ker \psi_2(\mu_k) = U_k M_{0k}. \quad (11)$$

Очевидно, подпространства N_{0k} и M_{0k} не имеют нетривиального пересечения и их прямая сумма составляет все линейное пространство C^N . Из (11) следует, что это же справедливо для подпространств N_k и M_k .

Для последующего важную роль будет играть задача построения матриц ψ_1 и ψ_2 по заданным N_k, M_k . Итак, пусть на комплексной плоскости λ задано два набора точек $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_n$, а также два набора подпространств N_k и M_k , причем $N_k \oplus M_k = C^N$ и N_k и M_k не пересекаются. Требуется построить пару функций ψ_1, ψ_2 таких, что $\psi_1(\lambda) \psi_2(\lambda) = 1$, $\text{Im} \psi_1(\lambda_k) = N_k$ и $\ker \psi_2(\mu_k) = M_k$. Приведем два способа решения этой задачи.

Первый из них есть способ рекуррентного построения проекционных операторов P_k . Положим $\text{Im} P_1 = \ker(1 - P_1) = N_1$, $\ker P_1 = \text{Im}(1 - P_1) = M_1$. Далее, пусть $k-1$ первых проекционных операторов уже построены. Тем самым мы знаем невырожденную матрицу U_k . Теперь подпространства, определяющие k -й проектор P_k , могут быть найдены из формул (11): $\ker P_k = M_k U_k^{-1}$, $\text{Im} P_k = N_k U_k^{-1}$. Окончательно функции ψ_1 и ψ_2 даются формулами (8). Второй способ основан на

разложении функций ψ_1, ψ_2 на простые дроби. Положим

$$\psi_1 = 1 + \sum_k \frac{A_k}{\lambda - \mu_k} = \psi_2^{-1}. \quad (12)$$

Отсюда очевидно, что $\text{Im } A_k = M_k$. Введем в подпространстве M_k базис m_k^i ($i = 1, \dots, q_k$). Тогда оператор A_k может быть представлен в виде

$$(A_k)_{\alpha\beta} = \sum_i (m_k^i)_\alpha (X_k^i)_\beta,$$

где X_k^i — некоторые неизвестные векторы. Введем также базис в подпространстве N_k ; пусть он состоит из векторов

$$n_k^i \quad (i = 1, \dots, P_k), \quad p_k + q_k = N,$$

и дополним его векторами $\tilde{n}_k^i$ ($i = 1, \dots, q_k$) до базиса во всем пространстве C^N .

Введем в C^N каким-нибудь образом скалярное произведение (например, просто определив $xy = \sum x_\alpha y_\alpha$) и потребуем, чтобы векторы $\tilde{n}_k^j$ были ортогональными в смысле этого произведения векторам n_k^i :

$$n_k^i \tilde{n}_k^j = 0.$$

Из условий $N_k = \text{Im } \psi_1(\lambda_k)$ имеем

$$[\psi_1(\lambda_k)]_{\alpha\beta} = [B_k]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{p_k} (n_k^i)_\alpha (Y_k^i)_\beta. \quad (13)$$

Отсюда следует набор соотношений

$$\sum_\alpha (\tilde{n}_k^j)_\alpha [\psi_1(\lambda_k)]_{\alpha\beta} = 0, \quad j = 1, \dots, q_k. \quad (14)$$

Подставляя (12) и (13) в (14), получим систему линейных уравнений на векторы X_k^j

$$\tilde{n}_k^i + \sum_q \sum_{i=1}^{q_k} \frac{\tilde{n}_k^i m_q^j}{\lambda_k - \mu_q} X_q^j = 0. \quad (15)$$

Находя из (15) X_q^j , мы полностью определяем функцию ψ_1 . Аналогичным образом можно найти функцию ψ_2 .

Вернемся к задаче Римана с нулями. Мы сформулируем ее следующим образом. Пусть на комплексной плоскости λ задан контур Γ и два набора точек: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ внутри контура, и $\mu_1, \dots, \mu_n$ вне контура. Кроме того, на контуре определена матричная функция $G(\lambda)$ и заданы два набора подпространств N_k и M_k , причем $N_k \oplus M_k = C^N$. Требуется найти аналитические внутри и вне контура функции $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\psi_2(\infty) = 1$, такие, что на контуре $\psi_1(\lambda) \psi_2(\lambda) = G(\lambda)$, и, кроме того,

$$\text{Im } \psi_1(\lambda_i) = N_i, \quad \ker \psi_2(\mu_i) = M_i.$$

Для решения этой задачи вначале одним из двух предложенных выше способов построим рациональную функцию $\psi_0(\lambda)$ такую, что

$$\text{Im } \psi_0(\lambda_i) = N_i, \quad \ker \psi_0^{-1}(\mu_i) = M_i,$$

и представим ψ_1, ψ_2 в виде

$$\psi_1 = \psi_0 \tilde{\psi}_1, \quad \psi_2 = \tilde{\psi}_2 \psi_0^{-1}.$$

Очевидно, $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ являются аналитическими и неособыми матричными функциями внутри и вне контура соответственно. На контуре Γ

$$\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 = \tilde{G} = \psi_0^{-1} G \psi_0.$$

Задача об определении $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ свелась к регулярной матричной задаче Римана. Можно и непосредственно свести задачу Римана с нулями к решению системы алгебраических и интегральных уравнений. Для этого представим функции ψ_1, ψ_2^{-1} в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 1 + \sum_k \frac{A_k}{\lambda - \mu_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\lambda - \xi}, \\ \psi_2^{-1} &= 1 + \sum_k \frac{A_k}{\lambda - \mu_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\lambda - \xi}, \end{aligned} \quad (16)$$

где λ внутри Γ в верхней формуле и λ вне Γ в нижней.

Как мы знаем, $\text{Im } A_k = M_k$, следовательно, A_k может быть представлена в виде (13). Повторяя предыдущие рассуждения для точек $\lambda = \lambda_k$, получим систему

линейных алгебраических уравнений на X_k^j

$$\tilde{n}_k^i \left(1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - \lambda_k} \right) + \sum_q \sum_{j=1}^{q_k} \frac{(\tilde{n}_k^i, m_q^j)}{\lambda_k - \mu_q} X_q^j = 0. \quad (17)$$

Далее, подставляя (16) в соотношение

$$\psi_1(\lambda) = G\psi_2^{-1}(\lambda),$$

получим интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi i} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)_{\alpha\beta} d\xi}{\xi - \lambda} + 1 + \sum_{k,j} \frac{(m_k^j)_{\alpha} X_{k\beta}^j}{\lambda - \mu_k} \right] + T_{\alpha\gamma}(\lambda) \varphi_{\beta\gamma}(\lambda) = 0, \quad (18)$$

где $T = (1 - G)/(1 + G)$ — преобразование Кэли матрицы G . Уравнения (17), (18) образуют полную систему уравнений, решающих матричную задачу Римана с нулями.

§ 3. Обратная задача рассеяния для матричной системы первого порядка

Покажем, каким образом задача Римана может быть использована для решения обратных задач рассеяния в более общей ситуации, чем разобранный в гл. I. Рассмотрим спектральную задачу

$$-i\varphi_x = (J\lambda + U)\varphi. \quad (1)$$

Здесь J — заданная постоянная диагональная матрица N -го порядка, U — зависящая от x матрица с нулевыми диагональными элементами. Выразим этот факт, записав матрицу U в виде

$$U = [J, Q], \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_{ij}(x)| dx < \infty. \quad (3)$$

Пусть матрица J вещественна и невырождена и среди ее собственных чисел нет одинаковых. Тогда

$$J = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

(обозначается $J = \text{diag } a_i$). Упорядочим числа a_i в порядке убывания:

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n.$$

Решением уравнения (1) являются векторы из N элементов φ_i . Полные наборы решений образуют фундаментальные матрицы решений φ_{ik} . Здесь первый индекс — векторный, второй обозначает номер решения, $\det \varphi \neq 0$. Если φ — матрица решений, то φR (где $R = R(\lambda)$, $\det R \neq 0$) — тоже матрица решений. Здесь $R(\lambda)$ — произвольная невырожденная матричная функция λ . В дальнейшем удобно рассматривать (1) как матричное дифференциальное уравнение. Наряду с (1) полезно рассмотреть родственные матричные уравнения

$$i\tilde{\varphi}_x = \tilde{\varphi} (J\lambda + U), \quad (4)$$

$$-i\psi_x = (J\lambda + U)\psi - \lambda\psi J, \quad (5)$$

$$i\tilde{\psi}_x = \tilde{\psi} (J\lambda + U) - \lambda J\tilde{\psi}. \quad (6)$$

Очевидно, для любых двух решений уравнений (1), (4) имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi} \varphi = 0 \quad (\tilde{\varphi} \varphi = G(\lambda)). \quad (7)$$

В частности, уравнению (4) удовлетворяет обратная матрица $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}$. Уравнениям (5), (6) удовлетворяют матрицы

$$\psi = \varphi e^{iJ\lambda x}, \quad \tilde{\psi} = e^{-iJ\lambda x} \tilde{\varphi}. \quad (8)$$

Имеет место соотношение

$$\tilde{\psi}(x, \lambda) \psi(x, \lambda) = e^{-iJ\lambda x} G(\lambda) e^{iJ\lambda x}. \quad (9)$$

В этих формулах $G(\lambda)$ — некоторая произвольная невырожденная матричная функция λ .

Рассмотрим два набора решений уравнения (1) $\varphi^\pm$, определяемые асимптотиками

$$\begin{aligned} (\varphi^\pm)_{ik} &\rightarrow \delta_{ik} e^{ia_k \lambda x}, \\ x &\rightarrow \pm \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Каждый из этих наборов является фундаментальным, поэтому найдется матрица $S(\lambda)$, такая что

$$\varphi^-(x, \lambda) = \varphi^+(x, \lambda) S(\lambda). \quad (11)$$

Воспользуемся известным тождеством

$$-i \frac{d}{dx} \ln \det \varphi = \operatorname{Sp} (J\lambda + U) = \operatorname{Sp} J\lambda = \lambda \sum a_n,$$

из которого следует

$$\det \varphi^+ = \det \varphi^-,$$

и

$$\det S(\lambda) = 1. \quad (12)$$

Обратная задача рассеяния для системы (1) состоит в восстановлении матричной функции $U(x)$ по заданной матричной функции $S(\lambda)$, а также в выяснении требований, которые нужно наложить на $S(\lambda)$, чтобы такое восстановление было возможно. Последнее не тривиально, поскольку матрица $S(\lambda)$ содержит больше элементов, чем матрица $U(x)$ (диагональные элементы $U(x)$ равны нулю).

Рассмотрим задачу о факторизации матрицы $S(\lambda)$, т. е. представим ее в форме

$$S^+ = SS^-, \quad (13)$$

где S^+ , S^- — треугольные матрицы вида

$$S^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^+ & S_{12}^+ & S_{13}^+ & \dots \\ 0 & S_{22}^+ & S_{23}^+ & \dots \\ 0 & 0 & S_{33}^+ & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$S^- = \begin{bmatrix} S_{11}^- & 0 & 0 & 0 & \dots \\ S_{21}^- & S_{22}^- & 0 & 0 & \dots \\ S_{31}^- & S_{32}^- & S_{33}^- & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Элементы матриц S^+ , S^- могут быть определены решением некоторых систем линейных уравнений, следующих из (13). Наиболее простое уравнение связывает S^+ и S^- :

$$S_{NN}^+ = S_{NN} S_{NN}^-. \quad (15)$$

Далее имеем

$$S_{iN}^+ = S_{iN} S_{NN}^-.$$

Для величин $S_{N-1, N-1}^-$ и $S_{N, N-1}^-$ возникают два уравнения

$$S_{N-1, N-1}^+ = S_{N-1, N-1} S_{N-1, N-1}^- + S_{N-1, N} S_{N, N-1}^-, \quad (16)$$

$$0 = S_{N-1, N} S_{N-1, N-1}^- + S_{N, N} S_{N, N-1}^-.$$

Остальные уравнения получаются аналогично. Как видно уже из (15) и (16), задача факторизации не вполне однозначна — именно, можно произвольным образом задавать диагональные элементы одной из матриц $S^\pm$. Неоднозначность можно убрать, потребовав, чтобы элементы матриц $S^\pm$ целым образом без деления выражались через элементы матрицы S . Тогда

$$S_{NN}^+ = S_{NN},$$

$$S_{N-1, N-1}^+ = S_{N-1, N-1} S_{NN} - S_{N-1, N} S_{N, N-1}.$$

Вообще,

$$S_{kk}^+ = \Delta_{N-k+1}^-, \quad (17)$$

где Δ_k^- — k -й нижний главный минор матрицы S . При этом легко показать по индукции, что

$$S_{kk}^- = \Delta_{N-k}^-, \quad \Delta_0^- = 1. \quad (18)$$

Остальные элементы матриц $S^\pm$ также составлены из миноров матрицы S . Умножая соотношение (11) справа на S^- , введем новую матрицу χ^+ :

$$\chi^+ = \varphi^+ S^+ = \varphi^- S^-. \quad (19)$$

Из (19) следует, что решение χ^+ имеет при $x \rightarrow \pm\infty$ «треугольные» асимптотики

$$\begin{aligned} \chi_{ik}^+ &\rightarrow 0, & i > k, \\ \chi_{kk}^+ &\rightarrow \Delta_{N-k+1}^-(\lambda) e^{i\lambda a_k x}, & x \rightarrow +\infty, \\ \chi_{ik}^+ &\rightarrow 0, & i < k \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (20)$$

Из однозначной разрешимости задачи факторизации следует, что χ^+ полностью определяется этими асимптотиками; при этом автоматически

$$\chi_{kk}^+ \rightarrow \Delta_{N-k}^-(\lambda) e^{i\lambda a_k x}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

При построении обратных задач, рассмотренных в гл. I, основную роль играл факт аналитичности функций Йоста, определенных асимптотиками типа (10). В нашем случае функции $\varphi^\pm(x, \lambda)$, вообще говоря, не допускают никакого аналитического продолжения с вещественной оси λ . Замечательно, однако, что уравнение (1) все же имеет аналитическое в верхней полуплоскости λ решение, и этим

решением оказывается введенная по формулам (19) матрица $\chi^+(x, \lambda)$.

Вместо матрицы χ^+ удобно рассматривать решение системы (5)

$$\psi^+ = \chi^+ e^{-i\lambda x}.$$

Оно имеет те же асимптотики, что и χ (см. (20)), за исключением диагональных элементов, для которых

$$\psi_{kk}^+ \rightarrow \Delta_{N-k+1}^-(\lambda) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

$$\psi_{kk}^+ \rightarrow \Delta_{N-k}^-(\lambda) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty.$$

Покажем, что матрица ψ_{ik}^+ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^+ &= i \int_{-\infty}^x \sum_j U_{ij}(x') \psi_{jk}^+(x', \lambda) e^{i\lambda(a_i - a_k)(x - x')} dx', \quad i < k, \\ \psi_{kk}^+ &= \Delta_{N-k+1}^-(\lambda) - i \int_x^\infty \sum_j U_{kj}(x', \lambda) \psi_{jk}^+(x', \lambda) dx', \\ \psi_{ik}^+ &= -i \int_x^\infty \sum_j U_{ij}(x') \psi_{jk}^+(x', \lambda) e^{i\lambda(a_i - a_k)(x - x')} dx', \quad i > k. \end{aligned} \quad (21)$$

Действительно, прямым дифференцированием формул (21) легко убедиться, что решение системы (21) удовлетворяет уравнению (5). С другой стороны, устремляя x к $\pm\infty$, легко проверить с учетом (3) выполнение асимптотик (20).

Произведем теперь «обрезание» $U(x)$, т. е. положим, что вне некоторого большого интервала $(-L, L)$ функция $U(x) = 0$. Матричные функции $\varphi^\pm(x, \lambda)$ являются теперь решениями задачи Коши

$$\varphi_{ik}^+(x, \lambda) = \delta_{ik} e^{ia_k x} \big|_{x=\pm L} \quad (22)$$

и, следовательно, целыми функциями λ . Соотношение (11) можно переписать в виде

$$S(\lambda) = \varphi^-(x, \lambda)(\varphi^+(x, \lambda))^{-1}. \quad (23)$$

Обратная к φ^+ матрица есть решение уравнения (4) с начальным условием

$$(\varphi_{ik}^+(x, \lambda))^{-1} = \delta_{ik} e^{-ia_k \lambda x} \big|_{x=L}$$

и тоже является целой функцией λ . Следовательно, $S(\lambda)$ —

целая функция λ ; при выбранном нами способе факторизации матрицы $S^\pm$ (и с ними χ^+) также оказываются целыми функциями параметра λ .

После обрезания уравнение (21) примет вид

$$\begin{aligned}\psi_{ik}^+ &= i \int_{-L}^{\infty} \sum_j U_{ij}(x') \psi_{jk}^+(x', \lambda) e^{i\lambda(a_i - a_k)(x - x')} dx', \quad i < k, \\ \psi_{kk}^+ &= \Delta_{N-k+1}^-(\lambda) - i \int_x^L \sum_j U_{kj}(x') \psi_{jk}^+(x', \lambda) dx', \\ \psi_{ik}^+ &= -i \int_x^L \sum_j U_{ij}(x') e^{i\lambda(a_i - a_k)(x - x')} \psi_{jk}^+(x', \lambda) dx', \quad i > k.\end{aligned}\quad (24)$$

При вещественных λ уравнение (21) получается из (24) предельным переходом $L \rightarrow \infty$. При комплексном λ возможность такого предельного перехода не очевидна, поскольку интегралы в (24) могут оказаться при $L \rightarrow \infty$ расходящимися. Вспоминая, что числа a_i упорядочены ($a_i > a_j$, если $j > i$), убеждаемся, что такой предельный переход возможен в верхней полуплоскости λ , если только выполнено условие (3), и, вообще говоря, невозможен в нижней полуплоскости. Это означает, что функция $\psi_{ik}^+(x, \lambda)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость λ .

Пусть $\text{Im } \lambda > 0$, $|\lambda| \rightarrow \infty$. Из (24) имеем

$$\psi_{ik}^+ = \Delta_{N-k+1}^- \delta_{ik} + O(1/\lambda). \quad (25)$$

Устремляя x к $\pm\infty$ и пользуясь асимптотиками (20), заключаем, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\Delta_k^- - \Delta_{k-1}^- = O(1/\lambda).$$

Отсюда, поскольку $\Delta_0^- = 1$, имеем

$$\Delta_k^- = 1 + O(1/\lambda). \quad (26)$$

С учетом (26) имеем из (24)

$$\psi_{ik}^+ = \delta_{ik} + \frac{U_{ik}}{\lambda(a_i - a_k)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (27)$$

или

$$U = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [J, \psi^+]. \quad (28)$$

Формула (28) показывает, что для определения U достаточно найти асимптотику функции ψ^+ при $\lambda \rightarrow \infty$. Наряду с факторизацией (13) можно рассмотреть факторизацию

$$R^- = SR^+, \quad (29)$$

где R^- , R^+ — треугольные матрицы вида (14). Факторизация является однозначной, если, как и раньше, предположить, что элементы матриц $R^\pm(\lambda)$ целым образом зависят от $S_{ij}(\lambda)$. При этом $R_{kk}^- = \Delta_k^+(\lambda)$, $R_{kk}^+ = \Delta_{k-1}^+(\lambda)$, где $\Delta_k^+(\lambda)$ — верхние главные миноры матрицы $S(\lambda)$: $\Delta_0^+ = 1$.

Определим решение системы (1)

$$\chi^- = \varphi^- R^+ = \varphi^+ R^-. \quad (30)$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, можно доказать, что $\chi^-(x, \lambda)$, а также $\psi^- = \chi^- e^{-i\lambda Jx}$ и миноры $\Delta_k^+(\lambda)$ допускают аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость и имеют такие асимптотики:

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^- &\rightarrow \delta_{ik} + O(1/\lambda), \\ \Delta_k^+ &\rightarrow 1 + O(1/\lambda), \\ |\lambda| &\rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda < 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Обратимся теперь к уравнению (4). Определим его решения $\tilde{\varphi}^\pm$ асимптотиками

$$(\tilde{\varphi}^\pm)_{ik} \rightarrow \delta_{ik} e^{-i\lambda a_{ik}}, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

Введем матрицу $\tilde{S}$ условием

$$\tilde{\varphi}^- = \tilde{S} \tilde{\varphi}^+.$$

Очевидно, $\tilde{\varphi}^\pm = (\varphi^\pm)^{-1}$, $\tilde{S} = S^{-1}$. Поскольку $\det S = 1$, элементы матрицы $\tilde{S}$ целым образом выражаются через элементы матрицы S .

Рассмотрим две целые факторизации матрицы $\tilde{S}$:

$$\tilde{S}^+ = \tilde{S}^- \tilde{S}, \quad \tilde{R}^- = \tilde{R}^+ \tilde{S}. \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{S}^+ &= (S^+)^{-1} \Delta^-, & \tilde{S}^- &= (S^-)^{-1} \Delta^-; \\ \tilde{R}^+ &= (R^+)^{-1} \Delta^+, & \tilde{R}^- &= (R^-)^{-1} \Delta^+, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta^- &= \det S^- = \det S^+ = \prod_{k=1}^{N-1} \Delta_k^-, \\ \Delta^+ &= \det R^- = \det R^+ = \prod_{k=1}^{N-1} \Delta_k^+.\end{aligned}\quad (33)$$

Определим два набора решений уравнения (4):

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^+ &= \tilde{S}^+ \tilde{\varphi}^+ = \tilde{S}^- \tilde{\varphi}^-, \\ \tilde{\chi}^- &= \tilde{R}^+ \tilde{\varphi}^- = \tilde{R}^- \tilde{\varphi}^+, \end{aligned}\quad (34)$$

а также соответствующие решения уравнения (6):

$$\tilde{\psi}^\pm = e^{i\lambda Jx} \tilde{\chi}^\pm.$$

Очевидно, функции $\tilde{\chi}^+$ аналитичны в верхней, а $\tilde{\chi}^-$ — в нижней полуплоскости параметра λ и, как и $\chi^\pm$, имеют единичную асимптотику на бесконечности.

Для произведений матриц $\tilde{\psi}$, ψ в согласии с формулами (9) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}^+ \psi^- &= e^{iJ\lambda x} G_1(\lambda) e^{-iJ\lambda x}, \\ \tilde{\psi}^- \psi^+ &= e^{iJ\lambda x} G_2(\lambda) e^{-iJ\lambda x}.\end{aligned}\quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned}G_1(\lambda) &= \tilde{R}^+(\lambda) S^-(\lambda) = \tilde{R}^-(\lambda) S^+(\lambda), \\ G_2(\lambda) &= \tilde{S}^-(\lambda) R^+(\lambda) = \tilde{S}^+(\lambda) R^-(\lambda).\end{aligned}\quad (36)$$

Формулы (36) дают способ решения обратной задачи рассеяния для (1). Нужно по $\tilde{S}(\lambda)$ найти одну из матриц $G_{1,2}(\lambda)$ — это сводится к решению конечного числа линейных алгебраических уравнений, затем решить при каждом x одну из задач Римана (35). Контуром Γ в обоих случаях является вещественная ось, нормировка задачи Римана в обоих случаях каноническая — единичная при $\lambda = \infty$.

Пусть $N = 2$. Тогда

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = 1.$$

Произведя факторизацию, получим

$$\begin{aligned} S^+ &= \begin{bmatrix} 1 & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}, & S^- &= \begin{bmatrix} S_{22} & 0 \\ -S_{21} & 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{S}^+ &= \begin{bmatrix} S_{22} & -S_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \tilde{S}^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \\ R^+ &= \begin{bmatrix} 1 & -S_{12} \\ 0 & S_{11} \end{bmatrix}, & R^- &= \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{R}^+ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \tilde{R}^- &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}, \\ G_1 &= \begin{bmatrix} 1 & S_{12} \\ -S_{21} & 1 \end{bmatrix}, & G_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -S_{12} \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

Анализируя формулы (37), можно сделать важный вывод. Именно, матрицы G_1 , G_2 , входящие в задачу Римана, содержат только два элемента матрицы S , S_{12} и S_{21} , — столько же, сколько ненулевых элементов в матрице U . Поэтому задача восстановления матрицы S по матрице G_1 или G_2 является нетривиальной. При ее решении необходимо использовать свойства аналитичности диагональных элементов S . В данном случае элемент S_{11} аналитичен в нижней, а S_{22} — в верхней полуплоскости. Так же обстоит дело и в общем случае. Матрицы $G_1, 2$ содержат по $N(N-1)$ независимых элементов, и при восстановлении по ним матрицы S необходимо использовать аналитичность ее главных миноров — нижних в верхней полуплоскости и верхних в нижней. Условие аналитичности главных миноров и единичности детерминанта вместе с условием разрешимости задачи Римана является полным набором достаточных условий, определяющих матрицу S . Доказательство этого факта выходит за рамки настоящей книги.

Обе задачи Римана эквивалентны, поэтому мы в дальнейшем будем говорить только об одной из них, например о задаче, связанной с матрицей $G_2(\lambda)$. Эта задача не обязательно является регулярной. Миноры $\Delta_k^+(\lambda)$, $\Delta_k^-(\lambda)$ могут иметь в областях их аналитичности конечное число нулей. Покажем, что с этими нулями связаны нули задачи Римана.

Пусть потенциал $U(x)$ «обрезан» вне интервала $(-L, L)$ и минор Δ_{N-k+1}^- имеет нуль в точке $\lambda = \lambda_0$. Тогда в этой точке треугольные матрицы $S^\pm$ вырождены, причем

$S_{kk}^+ = 0$ и $S_{k-1, k-1}^-$. Вырожденной является и матрица χ^+ , ранг ее равен $N - 1$. Существует, следовательно, единственный вектор c , для которого $\chi^+ c = 0$. Пользуясь формулами (19) и сокращая на невырожденные матрицы Φ^+ , Φ^- , получим

$$S^+ c = 0, \quad S^- c = 0. \quad (38)$$

Из треугольности матриц S^+ и S^- легко получить, что вектор c имеет всего две ненулевые компоненты c_{k-1} и c_k . Таким образом, при $\lambda = \lambda_0$

$$\chi_{k-1}^+ = \text{const} \cdot \chi_k^+. \quad (39)$$

Устремим теперь L к ∞ . Формула (39) при этом сохранится, что и доказывает тот факт, что $\lambda = \lambda_0$ есть нуль задачи Римана в верхней полуплоскости. Поскольку матрицы $\tilde{S}^+$ и $\tilde{S}^-$ состоят из алгебраических дополнений к матрицам S^+ , S^- , они тоже вырождены — вместе с ними в точке $\lambda = \lambda_0$ вырождена матрица $\tilde{\chi}^+$. Ранг ее по-прежнему равен $N - 1$, однако линейную зависимость между ее компонентами в общем виде вычислить не удастся, так как все диагональные элементы матриц $\tilde{S}^+$ и $\tilde{S}^-$, кроме одного, равны нулю. Аналогичным образом устанавливается, что нули миноров Δ_k^+ являются нулями задачи Римана в нижней полуплоскости. Формула (39) показывает, что простые нули одного из главных миноров — весьма частные случаи нулей задачи Римана. В общем случае простого нуля задачи Римана матрица ψ^+ (и соответственно χ^+) может быть сколь угодно сильно вырождена — иметь произвольный ранг; даже при ранге $N - 1$ зависимость между ее столбцами может иметь более общий вид. Чтобы осуществить эти варианты, необходимо обращение в одной точке λ_0 в нуль нескольких главных миноров. Так, для того чтобы цепочка (39) содержала в правой части p элементов

$$\chi_{k-1}^+ = c_0 \chi_k^+ + \dots + c_p \chi_{k+p}^+,$$

необходимо одновременное обращение в нуль p главных миноров

$$\Delta_{N-k+1}, \dots, \Delta_{N-k+p+1}.$$

В дальнейшем нас будет интересовать только случай, рассмотренный в § 2, когда задача Римана имеет одина-

ковое количество нулей в верхней и нижней полуплоскостях:

$$\begin{aligned} \det \chi^+|_{\lambda=\lambda_n} &= 0, & \det \tilde{\chi}^-|_{\lambda=\mu_n} &= 0, \\ \operatorname{Im} \lambda_n &> 0, & \operatorname{Im} \mu_n &< 0, \end{aligned} \quad (40)$$

причем степени вырождений матриц $\chi^+|_{\lambda=\lambda_n}$ и $\tilde{\chi}^-|_{\lambda=\mu_n}$ совпадают. Поскольку коэффициенты линейных связей между столбцами матриц χ^+ и строками матриц $\tilde{\chi}^-$ очевидным образом не зависят от x , можно ввести два подпространства

$$\begin{aligned} N_n^0 &= \operatorname{Im} \tilde{\chi}^-|_{\lambda=\mu_n}, & M_n^0 &= \ker \chi^+|_{\lambda=\lambda_n}, \\ \frac{dN_n^0}{dx} &= \frac{dM_n^0}{dx} = 0, & M_n^0 \oplus N_n^0 &= C^N. \end{aligned}$$

Для решения задачи Римана с нулями нам нужны подпространства

$$N_n = \operatorname{Im} \tilde{\Psi}^-(\mu_n), \quad M_n = \ker \Psi^+(\lambda_n). \quad (41)$$

Очевидно,

$$N_n = e^{iJ\mu_n x} N_n^0, \quad M_n = e^{-iJ\lambda_n x} M_n^0. \quad (42)$$

Задание матрицы $S(\lambda)$ (точнее, матрицы $G(\lambda)$, чисел μ_n , λ_n и подпространств N_n^0 и M_n^0) и представляет собой набор данных рассеяния, по которым восстанавливается потенциал при помощи решения задачи Римана с нулями.

Вклад нулей $\Delta_n^\pm$ напоминает вклад дискретного спектра в рассмотренных в гл. I примерах обратной задачи рассеяния.

При положительной матрице J задача (1) не может иметь собственных значений в обычном смысле, поскольку на одном из концов оси x все элементы матрицы $e^{iJ\lambda x}$ экспоненциально растут при любом λ . Тем не менее нули задачи Римана представляют собой — в некотором обобщенном смысле — собственные значения спектральной задачи. Пусть в точке $\lambda = \lambda_0$, $\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$

$$\Delta_{N-k+1}(\lambda_0) = 0, \quad \Delta_{N-k} \neq 0.$$

Рассмотрим k -й столбец матрицы χ^+ . С учетом (38) в его асимптотике при $x \rightarrow +\infty$ присутствуют экспоненты $e^{i\lambda_0 a_i x}$, $i < k$. В асимптотике же при $x \rightarrow -\infty$ присутствуют экспоненты $e^{i\lambda_0 a_i x}$, $i \geq k$. Поэтому вектор $\chi_k e^{i\lambda_0 b x}$, где

$a_k < b < a_{k-1}$, является экспоненциально убывающим при $x \rightarrow \pm\infty$. Это рассуждение позволяет нам сформулировать понятие обобщенного собственного числа спектральной задачи (1) — точка λ_0 называется обобщенным собственным числом, а вектор ψ_i — обобщенной собственной функцией, если существует такое вещественное b , что

$$\psi_i e^{-i\lambda_0 b x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \quad (43)$$

Очевидно, что если число b существует, то $a_1 > b > a_N$; при этом оно может попасть в один из интервалов между числами a_k . Пусть $a_k < b < a_{k-1}$. Из анализа асимптотик компонент вектора ψ_i легко убедиться, что условие (43) выполняется для всех чисел внутри этого интервала. Поэтому можно классифицировать обобщенные собственные числа по интервалу между числами a_i , к которому принадлежит b . Таким образом, возникает $N - 1$ тип обобщенных собственных значений. Эти собственные значения могут лежать в любой полуплоскости. В верхней полуплоскости они совпадают с нулями нижних главных миноров, а в нижней — с нулями верхних главных миноров матрицы S . В рассматриваемом нами случае число обобщенных собственных значений в верхней и нижней полуплоскостях одинаково. Простому нулю задачи Римана в общем положении соответствует совпадение в точке $\lambda = \lambda_0$ обобщенных собственных значений всех типов.

Спектральная задача (1) обычно используется в предположении, что потенциал U удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Пусть $B = B^+ = B^{-1}$ — диагональная матрица, состоящая из чисел ± 1 , и пусть потенциал Q удовлетворяет соотношению

$$Q^* = -BQB. \quad (43')$$

(Здесь знак $*$ обозначает эрмитово сопряжение.) Очевидно,

$$U^* = BUB.$$

Из уравнения (1) легко получить следующее соотношение:

$$i \frac{\partial}{\partial x} B \varphi^* B = B \varphi^* B (J\lambda + U). \quad (44)$$

Сравнивая (44) с (4) и пользуясь совпадением асимптотик,

получим

$$\varphi^{-1} = B\varphi^*B, \quad \tilde{\varphi}^{\pm} = B\varphi^{\pm*}B, \quad (45)$$

откуда вытекает равенство

$$\tilde{S} = S^{-1} = BS^*B.$$

В частности, при $B = 1$ матрица S унитарна. Для трехугольных факторов имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}^+ &= S^{-*}B, & \tilde{S}^+ &= R^{-*}B, \\ \tilde{R}^- &= BS^{+*}, & \tilde{S}^- &= BR^{+*}. \end{aligned}$$

Отсюда для матрицы G имеем

$$G^* = BGB. \quad (46)$$

Основные аналитические функции $\psi^{\pm}$, $\tilde{\psi}^{\pm}$ подчиняются инволюциям

$$\tilde{\psi}^{\pm}(\lambda) = B\psi^{\mp}(\lambda)B. \quad (47)$$

Из (47) следует, что точки вырождения матриц, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях — нули задачи Римана — сопряжены друг другу:

$$\mu_n = \bar{\lambda}_n.$$

Из (47) также следует, что подпространства M_n и N_n ортогональны с метрикой, определяемой матрицей B :

$$(N_n, BM_n) = 0, \quad (48)$$

а проектор P является B -эрмитовым:

$$P^* = BPB. \quad (49)$$

Таким образом, при выполнении условия (43) достаточно задавать расположение нулей и вырождение матриц ψ^+ в верхней полуплоскости.

§ 4. Задача N волн

Спектральная задача (3.1) применяется для решения важной системы дифференциальных уравнений, имеющей приложение в нелинейной оптике. Рассмотрим наряду с (3.1) уравнение

$$-i\varphi_t = (I\lambda + V)\psi. \quad (1)$$

Здесь $I = \text{diag } b_i$ есть заданная диагональная вещественная матрица, причем $[J, I] = 0$. Дифференцируя (3.1) по t , (1) по x и приравнивая вторые производные тождественно по λ , получим систему уравнений

$$[J, V] = [I, U], \quad (2)$$

$$U_t - V_x + i[U, V] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (2) может быть разрешено относительно U, V : $V = [I, Q]$, $U = [J, Q]$. Тогда из (3) имеем

$$[J, Q_t] - [I, Q_x] + i[[J, Q], [I, Q]] = 0. \quad (4)$$

Система (4) и является упоминавшейся интегрируемой системой. Если матрицы J, I невырождены, она, как легко убедиться, допускает представление Лакса. Соответствующая $L - A$ -пара состоит из операторов

$$L = J^{-1} \left(i \frac{d}{dx} + U \right), \quad A = I^{-1} \left(i \frac{d}{dt} + V \right). \quad (5)$$

Система (4) имеет физический смысл, если предположить, что потенциал удовлетворяет соотношению (3.43'). Легко проверить, что это соотношение не противоречит уравнению (4). Наложение условия (3.43') вдвое уменьшает число неизвестных функций в уравнении (4). Такое уменьшение числа неизвестных функций путем наложения совместных с уравнением дополнительных условий мы будем называть редукциями. Проблема перечисления редукций, совместимых с данным уравнением, является одной из самых важных в теории интегрируемых систем.

Перейдем теперь к описанию систем, возникающих после редукции (3.43') в уравнении (4). В простейшем случае $B = 1$ в этой системе удобно ввести переменные для верхней половины матрицы Q :

$$Q_{ik} = \frac{w_{ik}}{\sqrt{a_i - a_k}}, \quad i < k. \quad (6)$$

В этих переменных система (4) окажется гамильтоновой системой

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} - v_{ik} \frac{\partial w_{ik}}{\partial x} - i \frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial \bar{w}_{ik}} = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$v_{ik} = \frac{b_i - b_k}{a_i - a_k}, \quad (8)$$

а H_{int} — гамильтониан взаимодействия

$$H_{\text{int}} = \sum_{i < k < j} \varepsilon_{ikj} (w_{ik} w_{kj} \bar{w}_{ij} + \bar{w}_{ik} \bar{w}_{kj} w_{ij}), \quad (9)$$

где

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{a_i b_k - a_k b_i + a_k b_j - a_j b_k + a_j b_i - a_i b_j}{[(a_i - a_k)(a_i - a_j)(a_k - a_j)]^{1/2}}.$$

Система (7) нетривиальна начиная с $N = 3$. В этом случае, вводя обозначения

$$u_1 = w_{12}, \quad u_2 = w_{23}, \quad u_3 = w_{13},$$

$$-v_1 = v_{12}, \quad -v_2 = v_{23}, \quad -v_3 = v_{13}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{123},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_2 u_3, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_1 u_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} &= i\varepsilon u_1 u_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для скоростей (8) имеем

$$\frac{v_2 - v_3}{v_1 - v_3} = -\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} < 0. \quad (11)$$

Из (10), (11) видно, что переменные u_1 , u_2 входят в уравнения симметрично, тогда как переменная u_3 выделена. Причина этого становится понятной после физической интерпретации системы (10). Эта система описывает взаимодействие трех волновых пакетов с комплексными огибающими u_1 , u_2 , u_3 в среде с квадратичной нелинейностью, при котором происходит распад волны u_3 («накачка») на волны u_1 и u_2 и обратный процесс их слияния

$$u_3 \leftrightarrow u_1 + u_2. \quad (12)$$

Величины v_i представляют собой групповые скорости волновых пакетов. Соотношение (11) показывает, что на них наложено некоторое ограничение — в системе

отсчета, где накачка постоит, скорости волн u_1 и u_2 противоположны по направлению.

При $N > 3$ система (7) описывает взаимодействие $N(N-1)/2$ волн различных типов. Гамильтониан взаимодействия (9) состоит из членов типа $(\bar{w}uv + \bar{v}w)$, соответствующих элементарным процессам $w \leftrightarrow u + v$, однако он содержит далеко не все такие процессы. Так, в случае $N = 4$ разрешены следующие процессы:

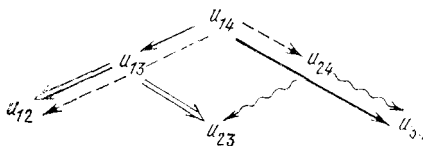
$$u_{14} \leftrightarrow u_{12} + u_{24},$$

$$u_{14} \leftrightarrow u_{13} + u_{34},$$

$$u_{24} \leftrightarrow u_{23} + u_{34},$$

$$u_{13} \leftrightarrow u_{12} + u_{23}.$$

Все эти процессы могут быть изображены на диаграмме



Видно, что все волны разбиваются на три типа: простые волны (u_{12}, u_{23}, u_{34}), составные из двух (u_{13} и u_{24}) и составная из трех (u_{14}). Составные из двух могут распадаться на две простые; составная из трех — на составную из двух и простую.

Аналогичная ситуация имеет место и в общем случае. В системе имеется $N-1$ типов простых волн с амплитудами $u_{k, k+1}$; $N-2$ типов составных из двух ($u_{k, k+2}$) и т. д. вплоть до единственной волны u_{1N} , составной из всех $N-1$ простых волн. Все процессы идут по схеме

$$u_{pq} \leftrightarrow u_{pr} + u_{rq}, \text{ где } p < r < q.$$

В случае $N = 3$ групповые скорости взаимодействующих волн находились в общем положении, подчиняясь только неравенству (11). Начиная с $N = 4$ на значение скоростей и константы взаимодействия ε_{ijk} накладываются алгебраические условия, число которых быстро растет с номером N .

Пусть теперь $B \neq 1$. Обозначим $B = \text{diag } r_i$, где $r_i = \pm 1$. В этом случае переменные w_{ik} уже не будут ка-

ноническими переменными, вместо них нужно ввести новые переменные

$$\varphi_{ik} = r_i r_k w_{ik} = \frac{r_i r_k Q_{ik}}{\sqrt{a_i - a_k}}. \quad (13)$$

Заметим, что и в исходных переменных $u_{ik} = (a_i - a_k)Q_{ik}$ система (4) формально гамильтонова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} - v_{ik} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x} &= i \frac{\delta H}{\delta u_{ki}}, \\ \frac{\partial u_{ki}}{\partial t} - v_{ik} \frac{\partial u_{ki}}{\partial x} &= -i \frac{\delta H}{\delta u_{ik}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$H = - \sum_{i < k < j} \varepsilon'_{ikj} (u_{ik} u_{ki} u_{ji} + u_{ki} u_{kj} u_{ij}), \quad (15)$$

хотя гамильтониан и является комплексным. Вещественный гамильтониан возникает при подстановке (13) в (15) и учете того обстоятельства, что

$$u_{ki} = r_i r_k \bar{u}_{ik}.$$

Рассмотрим различные варианты систем, возникающих в простейшем случае $N = 3$. Пусть $B = \text{diag}(-1, 1, 1)$. В этом случае система (4) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= i \varepsilon u_2 u_3, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= i \varepsilon u_1 \bar{u}_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} &= i \varepsilon u_1 \bar{u}_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$u_1 = \varphi_{12} = -w_{12}, \quad u_2 = \varphi_{23} = w_{23},$$

$$u_3 = \varphi_{13} = -w_{13};$$

$$v_1 = -v_{12}, \quad v_2 = -v_{23}, \quad v_3 = v_{13}.$$

Система (16) отличается от (10) только тем, что накачкой является волна u_1 . С учетом неравенства (11) это различие существенное: в системе отсчета, где накачка покоится, волны u_2 и u_3 движутся теперь в одном направлении.

Аналогичная система (с заменой $u_1 \leftrightarrow u_2$) возникает, если $B = \text{diag} (1, 1, -1)$.

Пусть теперь $B = \text{diag} (1, -1, 1)$. В этом случае возникает система

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_2 \bar{u}_3, & \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_1 \bar{u}_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + v \frac{\partial u_3}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_2 \bar{u}_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $u_1 = \varphi_{12} = -w_{12}$, $u_2 = \varphi_{23} = -w_{23}$, $u_3 = \varphi_{13} = -u_{13}$. Система (17) описывает «взрывную неустойчивость» — взаимодействие трех волн, при котором они взаимно усиливают друг друга. Все три волны в (17) равноправны. При $N > 3$ и возникают системы, являющиеся комбинациями систем всех описанных видов.

Большой интерес представляет вопрос о дальнейших редукциях системы (4). Естественной редукцией является переход к чисто вещественным уравнениям $\bar{Q} = iQ$. Полагая $u_i = iw_i$, получим из (10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \varepsilon w_2 w_3, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \varepsilon w_1 w_3, \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial x} &= -\varepsilon w_1 w_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (18) известны в нелинейной оптике как уравнения «точного резонанса» при параметрическом взаимодействии волновых пакетов. Дополнительная редукция накладывает новые ограничения на данные рассеяния. Совершая в уравнении (3.1) комплексное сопряжение, убеждаемся, что теперь

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \varphi(-\bar{\lambda}). \quad (19)$$

Отсюда следует, что нули задачи Римана расположены симметрично относительно мнимой оси и делятся на простые — лежащие на мнимой оси — и двойные (это явление уже встречалось в теории уравнения $\sin$ -Gordon (гл. I)). Для матрицы S получим также

$$\bar{S}(-\bar{\lambda}) = S_{\varepsilon}(\lambda). \quad (20)$$

Аналогичное соотношение имеет место для всех треугольных матриц и для матрицы G .

Другие нетривиальные редукции возможны, если на матрицы J и I наложены специальные ограничения. Пусть, например, $N = 3$ и $J = \text{diag}(a, 0, -a)$, $I = \text{diag}(b_1, b_2, -b_1)$ — две диагональные матрицы. Тогда $v_{12} = v_{23}$ и в предположении эрмитовости u оказывается возможна редукция системы (10), т. е. $u_1 = u_2$. При этом возникает система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_1 u_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} &= i\varepsilon u_1^2, \end{aligned} \quad (21)$$

известная в нелинейной оптике и описывающая генерацию второй гармоники в нелинейной среде.

Пусть теперь $N = 4$, $J = \text{diag}(a_1, a_2, -a_2, -a_1)$, $I = \text{diag}(b_1, b_2, -b_2, -b_1)$. Тогда возможна новая редукция

$$\bar{Q} = -CQ^{\text{tr}}C^{-1}, \quad (22)$$

где C — антидиагональная матрица одного из двух видов

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & -1 & \\ -1 & & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

Q^{tr} означает транспонированную матрицу. Если редукция (22) производится одновременно с редукцией (3.43'), то между ними должно выполняться условие согласования

$$CBC = \pm B.$$

Среди систем, возникающих в результате таких редукций, наиболее интересна система, получающаяся, если взять C из (24) и положить $B = 1$. При этом

$$w_{24} = w_{13}, \quad w_{34} = -w_{12}, \quad (25)$$

$$H_{\text{int}} = 2\varepsilon (w_{12}w_{23}\bar{w}_{13} + \bar{w}_{12}\bar{w}_{23}w_{13} + w_{12}w_{13}\bar{w}_{14} + \bar{w}_{12}\bar{w}_{13}\bar{w}_{14}),$$

а уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{14}}{\partial t} + v_{14} \frac{\partial w_{14}}{\partial x} &= 2i\varepsilon w_{12}w_{13}, \\ \frac{\partial w_{13}}{\partial t} + v_{13} \frac{\partial w_{13}}{\partial x} &= 2i\varepsilon (w_{12}w_{23} + \bar{w}_{12}w_{14}), \\ \frac{\partial w_{12}}{\partial t} + v_{12} \frac{\partial w_{12}}{\partial x} &= 2i\varepsilon (\bar{w}_{23}w_{13} + \bar{w}_{13}w_{14}), \\ \frac{\partial w_{23}}{\partial t} + v_{23} \frac{\partial w_{23}}{\partial x} &= 2i\varepsilon \bar{w}_{12}w_{13}. \end{aligned} \quad (26)$$

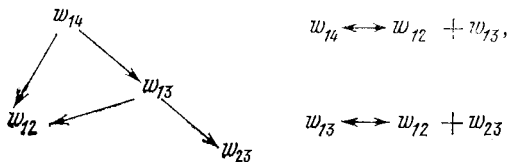
Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{123} = \varepsilon_{124} = -\varepsilon_{234} = -\varepsilon_{134}, \\ v_{12} = v_{34} &= \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \quad v_{13} = v_{24} = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}, \\ v_{23} &= b_2/a_2, \quad v_{14} = b_1/a_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует, что скорость v_{ik} не могут быть выбраны произвольными. Между ними имеется соотношение

$$(v_{12} - v_{14})(v_{13} - v_{23}) + (v_{13} - v_{14})(v_{12} - v_{13}) = 0.$$

Система (26) описывает взаимодействие в нелинейной среде четных волн по схеме



Такая ситуация может встретиться при «модифицированной распадной неустойчивости» — распаде волны w_{13} на волны w_{12} , w_{23} при наличии «холостой» антистоксовой волны w_{14} .

§ 5. Солитонные решения

Опишем теперь процедуру интегрирования системы (4.4). Заметим, что уравнение (3.1) и уравнение (4.1) играют в интегрировании этой системы совершенно равноправные роли. Поэтому должны иметь место формулы типа (3.35), (3.42), отличающиеся от них лишь заменами $x \rightarrow t$, $I \rightarrow J$. Таким образом, мы приходим к выводу,

что каждому решению системы (4.4) соответствует набор не зависящих от x и t «данных рассеяния» — матрицы $G(\lambda)$, нулей λ_n , μ_n и подпространств M_n , N_n . Для его построения необходимо решить при всех x и t задачу Римана

$$\tilde{\psi}^-(x, t, \lambda) \psi^+(x, t, \lambda) = e^{i(Jx+It)\lambda} G(\lambda) e^{-i(Jx+It)\lambda} \quad (1)$$

с фиксированными нулями λ_n , μ_n , в которых заданы подпространства

$$\begin{aligned} M_n &= e^{-i(Jx+It)\lambda_n} M_n^0, \\ N_n &= e^{i(Jx+It)\mu_n} N_n^0, \end{aligned} \quad (2)$$

и воспользоваться формулой (3.28). Если на системе (4.4) определены некоторые редукции, то данные рассеяния должны быть подчинены соответствующим ограничениям. Необходимо подчеркнуть, что из доказанной нами теоремы об аналитичности функций $\phi^\pm$, $\tilde{\psi}^\pm$ следует, что мы можем получить любое решение системы (4.4), для которого $\int |u| dx < \infty$. Способ определения данных рассеяния зависит от тех граничных условий, которые наложены на (4.4). Так, если для (4.4) задана задача Коши, то данные рассеяния извлекаются из изучения асимптотики функций $\phi^\pm(x, \lambda)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и из обобщенных собственных функций задачи (3.1) при $t = 0$. Аналогичным образом, если задана задача Коши по x , то данные рассеяния следует извлекать из спектральной задачи (4.1). Если задана более сложная краевая задача, то необходимо пользоваться обоими уравнениями (3.1) и (4.1).

В общем случае для построения U по данным рассеяния необходимо решать систему сингулярных интегральных уравнений. Замечательно, однако, что отдельные наборы точных решений системы (4.4) можно получить в явном виде, решая только алгебраические уравнения. Речь идет о случае, когда $S = G = 1$. Соответствующие решения мы будем называть солитонными решениями.

Мы ограничимся анализом простейшего класса солитонных решений, когда функции $\psi^\pm$, $\tilde{\psi}^\pm$ имеют по одному полюсу λ_0 , μ_0 . Будем предполагать, что выполнена одна из редукций (3.43'), поэтому $\mu_0 = \bar{\lambda}_0$. Из формул (2.16) имеем

$$\psi^+ = 1 - \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}{\lambda - \bar{\lambda}_0} P. \quad (3)$$

Для потенциала U получаем из (3.28)

$$U = (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)[J, P] = 2i\eta[J, P], \quad (4)$$

где $\lambda_0 = \xi + i\eta$. При наличии редукции (3.34') проектор P полностью определяется одним из своих подпространств M или N . Напомним, что

$$M = e^{-(Jx+It)\lambda_0} M_0 = \ker \psi^+|_{\lambda=\lambda_0} = \text{Im } P.$$

В § 3 мы видели, что в случае, если нуль задачи Римана является простым, — на обобщенном собственном числе спектральной задачи (3.4), — то подпространство M_0 имеет размерность единицу. Соответствующий проектор P легко построить. Пусть M натянуто на вектор с компонентами

$$m_i = e^{-i(\alpha_i x + b_i t)\lambda_0} \alpha_i, \quad (5)$$

где α_i — заданный постоянный комплексный вектор. Проектор P проектирует все пространство C^N в M , следовательно,

$$P_{ij} = m_i n_j, \quad (6)$$

где n_j — некоторый неизвестный вектор.

Из условия $P^2 = P$ имеем

$$\sum_i (m_i n_i) = 1. \quad (7)$$

Из условия $P^* = BPB$ ($B = \text{diag } r_i$) находим

$$n_i = \lambda r_i \bar{m}_i, \quad \bar{\lambda} = \lambda.$$

Окончательно имеем

$$P_{ij} = r_j \frac{m_i \bar{m}_j}{\sum_k r_k |m_k|^2}.$$

Для потенциала U теперь получаем

$$u_{ij} = r_j (a_i - a_j) \frac{m_i \bar{m}_j}{\sum_k r_k |m_k|^2}. \quad (8)$$

Формула (8) дает явный вид однополюсного солитонного решения с одномерным проектором. Для модуля этого

решения имеем

$$|u_{ij}(x, t)| = \frac{2\eta(a_i - a_j) |\alpha_i| |\alpha_j| \exp[(a_i + a_j)\eta x + (b_i + b_j)\eta t]}{\sum_k r_k |\alpha_k|^2 \exp[2(a_k x + b_k t)\eta]} \quad (9)$$

Формула (9) позволяет выяснить условие существования солитонных решений различных типов. Пусть $B = 1$, $r_k = 1$. Тогда знаменатель в (9) не может обращаться в нуль при конечных x , а при $x \rightarrow \pm \infty |u_{ij}|$ экспоненциально убывает. Поэтому солитонное решение существует при любом виде вектора α_k . Пусть вектор α_k содержит всего две ненулевые компоненты α_i и α_j , тогда потенциал имеет только два ненулевых элемента u_{ij} и $u_{ji} = \bar{u}_{ij}$. При этом

$$u_{ij} = \eta(a_i - a_j) \times \frac{\exp\{i\xi[(a_i + a_j)x\xi + (b_i + b_j)t\xi + \arg(\alpha_i - \alpha_j)]\}}{\operatorname{ch}\{\eta[(a_i - a_j)x + (b_i - b_j)t + x_0]\}}, \quad (10)$$

$$\text{где } x_0 = \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \right|.$$

Решение (10) будем называть солитоном волны u_{ij} . Пусть нуль $\lambda = \lambda_0$ есть обобщенное собственное значение типа k . Тогда вектор α_k содержит две ненулевые компоненты α_{k-1} , α_k . В потенциале U будут отличны от нуля лишь компоненты $u_{k-1, k}$, $u_{k, k-1}$, и мы приходим к следующему выводу: обобщенные собственные значения задачи (3.1) соответствуют солитонам простых нераспадающихся волн в системе (4.4). Чтобы получить солитон составной волны $u_{i, i+p}$, $p > 1$, необходимо обращение в нуль в точке $\lambda = \lambda_0$ подряд расположенных p главных миноров матрицы S . Матрица χ должна иметь при $\lambda = \lambda_0$ ранг $N - 1$, а ее нулевой собственный вектор α — две ненулевые компоненты α_i и α_{i+p} .

Пусть $N = 3$. Исследуем асимптотику решения (8) при $t \rightarrow \pm \infty$, если все компоненты вектора α отличны от нуля.

Легко проверить, что ненулевая асимптотика возникает только на характеристиках $x = v_{ik}t + c$, где v_{ik} — скорость одного из солитонов (солитона волны u_{ik}), и на этой характеристике при $t \rightarrow \pm \infty$ могут быть отличны

от нуля только элементы u_{ik} , u_{ki} , соответствующие этому солитону. Проследим за компонентой u_{13} , соответствующей составному солитону (солитону накачки). Обозначим

$$(a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)t = z.$$

Пусть выполнены соотношения

$$\frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} > \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}. \quad (11)$$

Тогда, как легко убедиться, при $t \rightarrow \infty$ элемент u_{13} стремится к нулю экспоненциальным образом, а при $t \rightarrow -\infty$ — к солитону накачки с положением центра

$$(x_0)_{13} = \frac{1}{r} \ln \left| \frac{a_1}{a_3} \right|. \quad (12)$$

Проследим теперь за компонентами u_{12} и u_{23} . При $t \rightarrow -\infty$ они экспоненциально стремятся к нулю. При $t \rightarrow +\infty$ они стремятся к соответствующим солитонам простых волн с положением центров

$$\begin{aligned} (x_0)_{12} &= \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{a_1}{a_2} \right|, \\ (x_0)_{23} &= \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{a_2}{a_3} \right|. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, решение (8) описывает распад составного солитона на два простых. Положение центров «продуктов распада» логарифмически зависит от величины α_2 . При $\alpha_2 \rightarrow 0$ продукты распада находятся в бесконечности, т. е. распад происходит за бесконечное время. Анализ солитонного решения с двумерным проектором, когда ранг матрицы $X|_{\lambda=0}$ равен двум и подпространство M характеризуется двумя векторами, показывает, что оно описывает обратный процесс слияния простых солитонов в солитон накачки. При выполнении неравенства, обратного неравенству (11), решение с одномерным проектором описывает слияние, а с двумерным — распад составного солитона.

При $N > 3$ ситуация значительно сложнее — солитонные значения с единственным полюсом $\lambda = \lambda_0$ описывают все возможные процессы распада и взаимопревращения простых и составных солитонов разной сложности, соответствующих разным элементам матрицы u_{ij} .

Все явления такого рода мы будем называть нетривиальным взаимодействием солитонов в отличие от тривиального взаимодействия — рассеяния. Нетривиальное взаимодействие возможно только для солитонов, значения спектрального параметра λ для которых совпадают. Двухполюсные решения задачи Римана описывают уже столкновения двух групп солитонов, нетривиально взаимодействующих внутри каждой группы.

Случай, когда $B \neq 1$, мы рассмотрим только на примере $N = 3$. Пусть $B = \text{diag}(-1, 1, 1)$. Очевидно, в этом случае решения (8), (9) не имеют особенности, только если $\alpha_1 = 0$. Таким образом, в этом случае может существовать только один вид солитонов — солитоны простой волны u_{23} . Солитоны другой простой волны u_{12} и составные солитоны u_{13} отсутствуют, и имеется только один тип обобщенных собственных значений. Аналогичная ситуация имеет место, если $B = \text{diag}(1, 1, -1)$. Итак, в системе (4.16) отсутствует нетривиальное взаимодействие солитонов.

Очень интересная ситуация имеет место, если $B = \text{diag}(1, -1, 1)$. В этом случае также может неопределенно долго существовать только один тип солитонов — u_{13} . Однако, в течение конечного времени может существовать и общее решение (8). Рассмотрим с точностью до множителя знаменатель выражения (9)

$$\Delta = 1 - |\beta_1|^2 e^{-\delta_1 x - \gamma_1 t} + |\beta_2|^2 e^{-\delta_2 x - \gamma_2 t}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a_1 - a_2, & \delta_2 &= a_1 - a_3, & \delta_2 > \delta_1 > 0, \\ \gamma_1 &= b_1 - b_2, & \gamma_2 &= b_1 - b_3. \end{aligned}$$

Выражение Δ не имеет нуля, если

$$\frac{1}{\delta_1} \left(\ln |\beta_1|^2 \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_1} - \gamma_1 t \right) < \frac{1}{\delta_2} \left(\ln |\beta_2|^2 \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2} - \gamma_2 t \right). \quad (15)$$

Неравенству (15) можно удовлетворить при любом t , положив β_1 достаточно малым. Однако, если $\gamma_1/\delta_1 \neq \gamma_2/\delta_2$, это неравенство нарушится при достаточно большом положительном или отрицательном $t = t_0$. Если неравенство нарушается при положительном t_0 , соответствующее решение описывает процесс взрывной неустойчивости с образованием в конечный момент времени особенности в

некоторой точке x_0 . Если $t_0 < 0$, то решение описывает обратный процесс «рассасывания» существовавшей в начальный момент времени особенности.

§ 6. Системы, интегрируемые при помощи задачи Римана

Как мы видели на примере задачи n волн, для построения частных солитонных решений нет необходимости производить полное исследование спектральной задачи и соответствующей задачи Римана. Такое исследование, по необходимости включающее доказательство теоремы о существовании аналитических решений, может оказаться достаточно трудной проблемой. Поэтому мы изложим прямой метод вычисления интегрируемых при помощи задач Римана систем и их солитонных решений. Ключевую роль в этом методе имеют формулы, обобщающие полученные нами для случая n волн формулы (5.1), (5.2). Рассмотренные ниже интегрируемые системы есть условия совместности уравнений типа (3.1), (4.1), в которых, однако, имеется более общая зависимость от спектрального параметра λ .

Рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\varphi_x = U\varphi, \quad \varphi_t = V\varphi. \quad (1)$$

Здесь U и V — комплексные $(N \times N)$ -матрицы, рациональным образом зависящие от комплексного параметра λ . Условие совместности этих уравнений имеет вид

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \quad (2)$$

Если число полюсов функции U (с учетом их кратности) равно N_1 , а функции V — равно N_2 , то функции U и V имеют $N_1 + N_2 + 2$ независимых матричных функциональных параметров. Условие (1) накладывает на них $N_1 + N_2 + 1$ уравнений. Эта система уравнений и является рассматриваемой нами интегрируемой системой. (Для случая КдФ $Q = V$, $U = \Lambda$, и обе матрицы являются полиномами от λ — см. (II.1.16), (II.1.21).) Если U и V имеют простые полюсы

$$U = U_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{U_n}{\lambda - a_n}, \quad V = V_0 + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{V_n}{\lambda - b_n}, \quad (3)$$

то получаем

$$U_{0t} - V_{0x} + [U_0, V_0] = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_{nt} + [U_n, R_n] &= 0, \\ V_{nx} + [V_n, T_n] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$R_n = V_0 + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{V_m}{a_n - b_m}, \quad T_n = U_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{U}{b_n - a_m}$$

В (3) — (5) $a_n = a_n(x)$ и $b_n = b_n(t)$ — заданные функции x и t .

Неопределенность системы (2) объясняется ее «калибровочной инвариантностью». Пусть U, V — некоторое ее решение, φ — соответствующее решение системы (1). Рассмотрим функции

$$\tilde{U} = gUg^{-1} + g_x g^{-1}; \quad \tilde{V} = gVg^{-1} + g_t g^{-1}, \quad (6)$$

где g — произвольная невырожденная матрица. Легко проверить, что $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ снова удовлетворяют уравнению (2). Соответствующее решение системы (1) есть $\tilde{\varphi} = g\varphi$. Преобразование $U, V \rightarrow \tilde{U}, \tilde{V}$ мы будем называть калибровочным. Применительно к системе (4), (5) имеем

$$U_0 = gU_0g^{-1} + g_x g^{-1}, \quad \tilde{V}_0 = gV_0g^{-1} + g_t g^{-1}, \quad (7)$$

$$\tilde{U}_n = gU_n g^{-1}, \quad \tilde{V}_n = gV_n g^{-1}. \quad (8)$$

Система (2) может быть доопределена наложением на U, V дополнительного условия. Например, можно положить $U_0 \equiv 0$, при этом с точностью до калибровки можно считать $V_0 = 0$. Решение уравнений, доопределенных при помощи любого другого условия, отличаются от этого случая лишь преобразованием с некоторой матрицей g . Все такие уравнения мы будем называть калибровочно-эквивалентными. Заметим еще, что уравнения имеют естественные тривиальные решения $U = A(x, \lambda)$, $V = B(t, \lambda)$, $[A(x, \lambda), B(t, \lambda)] = 0$. Соответствующее решение уравнения (1) обозначим через ω . В рассмотренном ранее случае уравнений $U = J\lambda + [J, Q]$, $V = I\lambda + [I, Q]$ решение есть $\omega = e^{i\lambda(Jx + It)}$.

Покажем теперь, как имея одно решение системы (1), (2), — например, A , B , ω , строить новые ее решения, зависящие от функционального параметра.

Пусть Γ — замкнутый или уходящий в бесконечность контур на плоскости комплексной переменной λ . Рассмотрим при всех x и t регулярную задачу Римана

$$\psi_1(x, t, \lambda)\psi_2(x, t, \lambda) = \varphi_0(x, t, \lambda)G(\lambda)\varphi_0^{-1}(x, t, \lambda). \quad (9)$$

Здесь φ_0 — некоторое решение системы (1) (для простоты можно считать $\varphi_0 = \omega$). Может оказаться, что контур Γ проходит через полюсы функций U , V . В этих полюсах мы должны положить $G = 1$. Это позволит нам дифференцировать (9) по x и t . После дифференцирования по x получим

$$\psi_{1x}\psi_2 + \psi_1\psi_{2x} = A\psi_1\psi_2 - \psi_1\psi_2A. \quad (10)$$

Определим матричную функцию U формулой

$$U = -\psi_1^{-1}(\psi_{1x} - A\psi_1) = (\psi_{2x} + \psi_2A)\psi_2^{-1}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что U продолжается с контура Γ на всю комплексную плоскость и является там рациональной функцией, полюсы которой совпадают с полюсами A . Из (11) следует

$$\psi_{1x} = A\psi_1 - \psi_1U, \quad \psi_{2x} = U\psi_2 - \psi_2A. \quad (12)$$

Аналогично, дифференцируя по t , определим функцию

$$V = -\psi_1^{-1}(\psi_{1t} - B\psi_1) = (\psi_{2t} + \psi_2B)\psi_2^{-1}. \quad (13)$$

Полюсы функции V совпадают с полюсами B . Полагая $\psi_1 = \omega\varphi_1^{-1}$, $\psi_2 = \varphi_2\omega^{-1}$, убеждаемся, что φ_1 , φ_2 удовлетворяют уравнениям (1). Таким образом, эти уравнения совместны, и функции U , V удовлетворяют системе (2). До сих пор нормировка задачи Римана была произвольной. Рассмотрим новое решение задачи Римана, отличающееся от прежнего нормировкой $\tilde{\psi}_1 = \psi_1g^{-1}$, $\tilde{\psi}_2 = g\psi_2$, где g — произвольная матричная функция x и t . Легко проверить, что функции U и V испытывают калибровочное преобразование (6). В связи с этим возникает естественный способ доопределения системы (2), состоящий в выборе определенной нормировки задачи Римана. Особую роль играет единичная нормировка в одном из полюсов функ-

ций U , V . Так, в задаче n волн матрицы U , V имели единственный полюс при $\lambda = \infty$, и задача Римана была нормирована в бесконечности на единичную матрицу. В примере (5) нормировка задачи Римана была той же: $\psi_1(\infty) = 1$, но в этом случае точка $\lambda = \infty$ не совпадала ни с одним из полюсов U и V .

Изложенную процедуру построения решений системы (2) можно называть «одеванием» «затравочных» решений A , B при помощи задачи Римана с контуром Γ и функцией $G(\lambda)$. Приведем на примере системы (4), (5), когда U и V имеют лишь простые полюсы, явные формулы, осуществляющие «одевание»:

$$\begin{aligned} U_0 &= -g_0^{-1} g_{0x}, \\ V_0 &= -g_0^{-1} g_{0t}, \\ U_n &= g_n A_n g_n^{-1}, \quad V_n = \tilde{g}_n B_n \tilde{g}_n^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $g_0 = \psi_1(\infty)$, а матрицы g_n и $\tilde{g}_n$ представляют собой значения в точках $\lambda = a_n$ и $\lambda = b_n$ функций ψ_1^{-1} или ψ_2 в зависимости от того, вне или внутри контура расположена данная точка. Напомним, что если a_n или b_n лежат на контуре, то в этой точке $G = 1$ и $\psi_1^{-1} = \psi_2$. Формулы (14) показывают, что при «одевании» инварианты матриц U_n и V_n сохраняются.

В (14) предполагалось, что $g_n \neq 1$, $\tilde{g}_n \neq 1$, т. е. что задача Римана не нормирована на единицу ни в одном из полюсов. Если $\psi_1|_{\lambda=a_n} = 1$, то $U_n = A_n$, но меняется формула для U_0 . Именно, пусть $\psi_1 \simeq 1 + (\lambda - a_n) Q$, тогда, очевидно, $U_0 = [A_n, Q]$ в полном соответствии с (3.2). Заметим еще, что вся изложенная процедура тривиальным образом переносится на случай, когда одна из переменных x , t или обе они являются комплексными. Очевидно, что изложенная выше процедура интегрирования является локальной по x и t — при подходящем выборе Γ и G можно добиться, чтобы решение $U(x, t)$, например, экспоненциально росло при $x \rightarrow \pm \infty$.

Для построения солитонных решений необходимо рассматривать задачу Римана с нулями. Как и прежде, мы задаем не зависящие от x и t наборы нулей λ_n и μ_n и в каждом из них подпространства.

$$N_n = \text{Im } \psi_1|_{\lambda=\lambda_n}, \quad M_n = \ker \psi_2|_{\lambda=\mu_n}. \quad (15)$$

При этом в формулах (11), (13), определяющих U и V , вообще говоря, появляются дополнительные полюсы в точках λ_n, μ_n . Необходимо потребовать, чтобы вычеты в этих полюсах были равны нулю. Определим дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} D_x^{(n)} &= \partial_x - A|_{\lambda=\lambda_n}, & \bar{D}_x^{(n)} &= \partial_x - A|_{\lambda=\mu_n}, \\ D_t^{(n)} &= \partial_t - B|_{\lambda=\lambda_n}, & \bar{D}_t^{(n)} &= \partial_t - B|_{\lambda=\mu_n}. \end{aligned}$$

Из (11), (13) следует

$$\begin{aligned} C_n D_x^{(n)} F_n &= 0, & C_n D_t^{(n)} F_n &= 0, \\ \tilde{C}_n \bar{D}_x^{(n)} \bar{F}_n &= 0, & \tilde{C}_n \bar{D}_t^{(n)} \bar{F}_n &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь C_n — вычеты ψ^{-1} , F_n — значения ψ_1 в точках $\lambda = \lambda_n$, $\tilde{C}_n$ — вычеты ψ_2^{-1} , $\bar{F}_n$ — значения ψ_2 в точках $\lambda = \mu_n$.

Из формул (16) следует, что подпространства M_n инвариантны относительно действия операторов $\bar{D}_x^{(n)}, \bar{D}_t^{(n)}$, а подпространства N_n инвариантны относительно действия $D_x^{(n)}, D_t^{(n)}$. Ясно, что подпространства

$$\begin{aligned} M_n(x, t) &= \omega(x, t, \mu_n) M_n^{(0)}, \\ N_n(x, t) &= \omega(x, t, \lambda_n) N_n^{(0)} \end{aligned} \quad (17)$$

обладают свойством инвариантности тогда и только тогда, когда $M_n^{(0)}$ и $N_n^{(0)}$ не зависят от x и t . Формулы (17) обобщают формулы (3.42).

Если $G \equiv 1$, можно строить солитонные решения общей системы (2) по той же схеме, что и для задачи n -волн.

Остановимся еще на проблеме редукций в системе (1). Разумеется, возможность той или иной редукции в сильной степени зависит от расположения полюсов U, V и от вида «затравочного» решения A, B . Тем не менее, можно сделать ряд общих замечаний. Ясно, например, что U и V в системе (1) можно сузить с алгебры всех комплексных матриц на любую ее подалгебру, допускающую умножение на комплексные числа. Если все полюсы матриц U и V лежат на вещественной оси, то можно считать U и V принадлежащими любой подалгебре, например — антиэрмитовыми матрицами. В общем случае

можно считать

$$U^* = CUC, \quad C^2 = 1, \quad C^+ = C, \\ [AC] = [BC] = 0.$$

Вытекающие из редукции следствия на задачу Римана устанавливаются так же, как это было сделано в § 3.

Заметим еще, что система (2) в качестве простого частного случая содержит все интегрируемые системы, допускающие представление Лакса в виде $L - A$ -пары. Именно, это системы, для которых функция U , входящая в первое из уравнений (1), имеет единственный простой полюс, а функция V — полюс произвольного порядка. Не ограничивая общности, можно считать, что этот полюс находится в точке $\lambda = \infty$, при этом V становится полиномом по λ .

Следующим по уровню сложности является случай, когда U имеет единственный простой полюс, а расположение полюсов V произвольно. В этом случае система (2) также допускает $L - A$ -пару, но оператор A является уже интегральным, и его вычисление нетривиально; что же касается оператора L , то он только калибровочным преобразованием отличается от оператора, возникающего из (3.1). Поскольку для применения метода достаточно построения теории прямой и обратной задач рассеяния для одного из операторов L и A , теория таких систем лишь несущественными деталями (другой временной динамикой и другой нормировкой задачи Римана) отличается от теории, изложенной в §§ 3 — 5, и легко может быть построена с той же полнотой.

§ 7. Релятивистски-инвариантные системы — киральные поля

Замечательно, что среди уравнений (6.2) имеются обширные классы уравнений, описывающих релятивистски-инвариантные двумерные модели классической теории поля. Простейшим примером таких моделей является разобранный в гл. I уравнение sin-Gordon. Рассмотрим вместо уравнений (6.1) уравнения

$$i\psi_\xi = U\psi, \quad i\psi_\eta = V\psi \quad (1)$$

и их условие совместности

$$U_\eta - V_\xi = i[U, V]. \quad (2)$$

Здесь $\xi = 1/2(t + x)$, $\eta = 1/2(t - x)$ — «конусные» переменные в пространстве-времени, а U, V , как и прежде, — рациональные функции λ с полюсами a_n, b_n .

Обсудим вопрос о релятивистской инвариантности рассматриваемых систем. Система (2) очевидным образом становится инвариантной относительно специальной группы Лоренца, если считать, что U, V преобразуются при преобразованиях Лоренца как компоненты вектора. Действительно, при преобразовании с параметром γ имеем $\xi \rightarrow \gamma\xi$, $\eta \rightarrow \gamma\eta$, и для инвариантности достаточно положить $U \rightarrow \gamma^{-1}U$, $V \rightarrow \gamma V$. При отражении координаты x происходит замена $\xi \leftrightarrow \eta$. Поэтому для инвариантности относительно полной группы Лоренца достаточно потребовать существования дискретной инволюции, включающей дробно-линейное преобразование плоскости λ , при котором происходит переход $U \rightarrow V$, $V \rightarrow U$.

Рассмотрим пример системы, инвариантной относительно полной группы Лоренца:

$$U = U_0 + \sum_{n=1}^N \frac{U_n}{\lambda - a_n}, \quad V = V_0 + \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{\lambda + a_n}. \quad (3)$$

Тогда

$$iV_n \xi = [\Phi_n, V_n], \quad iU_n \eta = [\Omega_n, U_n], \quad (4)$$

$$\Phi_n = \sum_k \frac{U_k}{a_n + a_k} - U_0, \quad \Omega_n = \sum_k \frac{V_k}{a_n + a_k} + V_0.$$

Причем $a_i + a_j \neq 0$ при любых i, j .

Не представляет труда выписать систему типа (4) и в том случае, когда полюсы могут быть кратными и допускаются нули знаменателей у Φ_n и Ω_n .

Заметим еще, что матрицу ψ в (1) можно считать элементом некоторой группы матриц G . Тогда U и V окажутся элементами соответствующей алгебры Ли; очевидно, что уравнение (2) не выводит за пределы этой алгебры. Мы будем изучать простейший случай системы (4), когда матрицы U и V имеют по одному простому полюсу, положение которого не зависит от x и t . Не ограничивая

общности, можно положить

$$U = U_0 + \frac{U_1}{\lambda + 1}, \quad V = V_0 + \frac{V_1}{\lambda - 1}. \quad (5)$$

Система уравнений (4) имеет вид

$$U_{0\eta} - V_{0\xi} - i[U_0, V_0] = 0, \quad (6)$$

$$U_{1\eta} - i\left[U_1, V_0 - \frac{1}{2}V_1\right] = 0, \quad (7a)$$

$$V_{1\xi} + i\left[-U_0 + \frac{1}{2}U_1, V_1\right] = 0. \quad (7b)$$

Представляют интерес различные калибровки системы (6), (7). Полагая $U_0 = V_0 = 0$, приходим к системе уравнений

$$A_\eta = \frac{i}{2}[A, B], \quad B_\xi = -\frac{i}{2}[A, B]. \quad (8)$$

Здесь $A = \tilde{U}_1$, $B = -\tilde{V}_1$.

Уравнения (8) — условия совместности системы уравнений

$$i\psi_\xi = \frac{A}{\lambda + 1}\psi, \quad i\psi_\eta = -\frac{B}{\lambda - 1}\psi. \quad (9)$$

Другая калибровка состоит в диагонализации матрицы U_1 . Положим в (5) $U_1 = A_0(\xi)$. Тогда уравнение (7a) может быть явно разрешено. Положим $U_0 = -A_0/2 + C$, $\Gamma = V_1 = 2(V_0 - S)$, $(\lambda - 1)/(\lambda + 1) = z$; здесь S — некоторая диагональная матрица.

Тогда система (1) примет вид

$$i\psi_\xi + C\psi + \frac{1}{2}zA_0\psi = 0,$$

$$i\psi_\eta + S\psi + \frac{1}{2z}\Gamma\psi = 0,$$

а уравнение (6)

$$i(C_\eta - C_\xi) = 1/4[A_0, \Gamma] - [S, C].$$

Полагая $C = C_\perp + C_\parallel$, где $C_\parallel$ — диагональная матрица, заметим, что

$$C_\parallel\eta - S_\xi = 0, \text{ т. е. } C_\parallel = R_\xi, \quad S = R_\eta.$$

Окончательно система (6) — (8) примет вид

$$iC_{\perp\eta} = \frac{1}{4}[A_0, \Gamma] - [R_\eta, C_{\perp}], \quad (10)$$

$$i\Gamma_\xi = -[C_{\perp} + R_\xi, \Gamma].$$

Система уравнений (10) ($U - V$ -система) в частном случае сводится к уравнению $\sin$ -Gordon.

Уравнения (8) связаны с одной из классических моделей теории поля, имеющей геометрический смысл, — главным киральным полем. Пусть в каждой точке плоскости (ξ, η) задан $g(\xi, \eta)$ — элемент группы Ли G и пусть G реализована как подгруппа группы комплексных матриц. Рассмотрим плотность лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial g^{-1}}{\partial \eta} \right) \quad (11)$$

Выражение (11) замечательно тем, что является двусторонне инвариантной формой на G . Действительно, произведем левый сдвиг при помощи постоянной матрицы $h \in G$ ($g \rightarrow hg$) и, совершая в (11) циклическую перестановку, убедимся в инвариантности L . Очевидна также инвариантность лагранжиана L относительно правых сдвигов $g \rightarrow gh$. Лагранжиану L соответствуют уравнения движения

$$g_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(g_\xi g^{-1} g_\eta + g_\eta g^{-1} g_\xi). \quad (12)$$

Уравнения (12) называются уравнениями главного кирального поля на группе G . Им можно придать другую форму. Введем поля A и B , принадлежащие алгебре Ли группы G :

$$A = ig_\xi g^{-1}, \quad B = ig_\eta g^{-1}. \quad (13)$$

Очевидно, имеет место соотношение

$$A_\eta - B_\xi = i[A, B]. \quad (14)$$

Из (12) следует также легко проверяемое соотношение

$$A_\eta + B_\xi = 0. \quad (15)$$

Система уравнений (14), (15) очевидным образом эквивалентна системе (8). Величины A и B можно интерпрети-

ровать как токи, порожденные симметрией лагранжиана относительно сдвигов на группе, а уравнение (15) — как закон сохранения этих токов.

В переменных (13) лагранжиан (11) имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \text{Sp } AB, \quad (16)$$

а уравнение (15) является соответствующим уравнением Лагранжа с учетом связи (14).

Разрешим явно уравнение (15). Получим

$$A = \Phi_{\xi}, \quad B = -\Phi_{\eta},$$

тогда уравнение (14) примет вид

$$\Phi_{\xi\eta} + \frac{i}{2} [\Phi_{\xi}, \Phi_{\eta}] = 0. \quad (17)$$

Оно может быть получено из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \text{Sp } \Phi_{\xi} \Phi_{\eta} + \frac{i}{3} \text{Sp } (\Phi [\Phi_{\xi}, \Phi_{\eta}]). \quad (18)$$

Уравнение (8) в эрмитовых матрицах второго порядка при дополнительных условиях

$$\text{Sp } A = \text{Sp } B = 0, \quad \text{Sp } A^2 = \text{Sp } B^2 = 1$$

описывает движение в четырехмерном пространстве-времени релятивистской струны, помещенной в однородное безмассовое скалярное поле.

Вообще из (8) следует

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \text{Sp } A^n = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \text{Sp } B^n = 0 \quad (19)$$

при произвольной степени n . Из (8) следует также, что нормальная жорданова форма A_0 матрицы A не зависит от η , а B_0 — нормальная форма матрицы B — не зависит от ξ . Таким образом, $A_0 = A_0(\xi)$, $B_0 = B_0(\eta)$. Представляя A и B в виде

$$A = f_1 A_0 f_1^{-1}, \quad B = f_2 B_0 f_2^{-1},$$

убеждаемся, что матрицы f_1, f_2 определены с точностью до умножения справа на произвольные матрицы f_1^0, f_2^0 , коммутирующие соответственно с A_0, B_0 .

Пусть $G = \text{SU}(N)$. Тогда матрицы A и B — эрмитовы, причем $\text{Sp } A = \text{Sp } B = 0$, при этом A_0 и B_0 — диагональные матрицы, а матрицы f_1 и f_2 могут быть выбраны элементами группы $\text{SU}(N)$. Если при этом собственные значения матриц A и B различны, то матрицы f_1, f_2 оказываются определенными с точностью до умножения на произвольную диагональную унитарную матрицу. Таким образом, матрицы f_1 и f_2 можно считать определенными на многообразии M , возникающем при факторизации группы $\text{SU}(N)$ по подгруппе H диагональных матриц, т. е. на «пространстве флагов» $\text{SU}(N)/H$. При фиксированных A_0, B_0 на этом же пространстве определены и матрицы A и B . Если среди собственных чисел A, B имеются совпадающие, соответствующее многообразие M — «вырожденное пространство флагов» — будет иметь меньшую размерность.

Перейдем в системе (17) от конусных переменных ξ, η к физическим переменным $x_0 \equiv t \equiv \eta + \xi, \quad x_1 \equiv x \equiv \eta - \xi$ и вычислим тензор энергии — импульса

$$T^{\mu\nu} = \text{Sp} \left(\Phi^\mu \frac{\partial L}{\partial \Phi_\nu} \right) - g^{\mu\nu} L;$$

в результате получим

$$\begin{aligned} T^{00} = T^{11} &= \frac{1}{2} \text{Sp} (\Phi_t^2 + \Phi_x^2) = \frac{1}{2} \text{Sp} (\Phi_\eta^2 + \Phi_\xi^2), \\ T^{01} = T^{10} &= \text{Sp} \Phi_t \Phi_x = \text{Sp} (\Phi_\eta^2 - \Phi_\xi^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда следует выражение для гамильтониана системы

$$\begin{aligned} H &= \int T^{00} dx = \frac{1}{2} \int \text{Sp} (\Phi_t^2 + \Phi_x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \text{Sp} (A_0^2(\xi) + B_0^2(\eta)) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) видно, что гамильтониан системы (17) — величина, не зависящая от вида A и B . При вычитании постоянной части гамильтониан обращается в нуль. Аналогичный результат — равенство нулю гамильтониана — можно получить и непосредственно для системы (12) и систем (14), (15).

Чтобы избежать трудностей, связанных с нулевым гамильтонианом, например, трудности с правильным определением энергии, нужно разрешить связи (19), фиксируя матрицы A и B и вводя координаты на многообразии M_0 . При этом возникает новая трудность — показать, что полученные уравнения являются лагранжевыми, т. е. следуют из некоторого принципа наименьшего действия. Покажем, как эта трудность преодолевается, если $G = SU_2$. Положим для простоты

$$\frac{1}{2} \text{Sp } A^2 = \frac{1}{2} \text{Sp } B^2 = 1 \quad (22)$$

и разложим A и B по матрицам Паули

$$A = \sigma A, \quad B = \sigma B.$$

Векторы A и B имеют единичную длину. Введем обозначение $\cos \alpha = AB$ и вычислим производные A_ξ и B_η

$$\begin{aligned} A_\xi &= [A, a_1 B + a_2 [A, B]], \\ B_\eta &= [B, b_1 A + b_2 [A, B]], \end{aligned} \quad (23)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — числовые функции. Вычисляя

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (AB), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (AB), \quad \text{найдем} \\ a_2 = \alpha_\xi / \sin \alpha, \quad b_2 = \alpha_\eta / \sin \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Введем еще

$$\begin{aligned} a_1 &= U / \sin \alpha, \quad b_1 = V / \sin \alpha, \\ U &= A_\xi B_\xi / \sin \alpha, \quad V = A_\eta B_\eta / \sin \alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

Дифференцируя α, U, V и используя (23) — (25), получим следующую систему уравнений:

$$\alpha_{\xi\eta} + \sin \alpha + UV / \sin \alpha = 0, \quad (26)$$

$$U_\eta = \alpha_\xi V / \sin \alpha, \quad (27)$$

$$V_\xi = \alpha_\eta U / \sin \alpha. \quad (28)$$

Из (27), (28) следует

$$\partial_\eta \left(U \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) + \partial_\xi \left(V \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = 0,$$

так что

$$\beta_{\xi} = U \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad \beta_{\eta} = -V \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Величины α , β удовлетворяют уравнениям

$$\beta_{\xi\eta} + \frac{1}{\sin \alpha} (\alpha_{\eta}\beta_{\xi} + \alpha_{\xi}\beta_{\eta}) = 0, \quad (29)$$

$$\alpha_{\xi\eta} + \sin \alpha - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^3 \frac{\alpha}{2}} \beta_{\xi}\beta_{\eta} = 0. \quad (30)$$

Уравнения (29), (30) являются уравнениями Лагранжа для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \alpha_{\xi}\alpha_{\eta} + \beta_{\xi}\beta_{\eta} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - \cos \alpha. \quad (31)$$

Компоненты тензора энергии — импульса имеют при этом вид

$$T^{00} = \frac{1}{2} \partial^{\mu}\alpha \partial^{\mu}\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \partial^{\mu}\beta \partial^{\mu}\beta + \cos \alpha - 1, \quad (32)$$

$$T^{01} = \partial_{\alpha}^0 \partial_{\alpha}^1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \partial^0 \beta \partial^1 \beta. \quad (33)$$

Вектор энергии — импульса для полей α и β может быть выражен и в терминах исходных полей A и B :

$$E = \int dx \left\{ \frac{(\mathbf{AB})_{\eta}^2 + (\mathbf{AB})_{\xi}^2 + (A_{\eta}B_{\eta})^2 + (A_{\xi}B_{\xi})^2}{4 [1 - (\mathbf{AB})^2]} + 1 - (\mathbf{AB}) \right\}, \quad (34)$$

$$P = \int dx \frac{(\mathbf{AB})_{\eta}^2 - (\mathbf{AB})_{\xi}^2 + (A_{\eta}B_{\eta})^2 - (A_{\xi}B_{\xi})^2}{4 [1 - (\mathbf{AB})^2]}. \quad (35)$$

В рассмотренном нами случае

$$A_0 = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В более общем случае $A_0 = a(\xi)\sigma_3$, $B_0 = b(\eta)\sigma_3$. Однако, полагая

$$\begin{aligned} A(\eta, \xi) &= a(\xi)\tilde{A}(\bar{\eta}, \bar{\xi}), \\ B(\eta, \xi) &= b(\eta)\tilde{B}(\bar{\eta}, \bar{\xi}), \end{aligned} \quad (36)$$

где $\bar{\eta} = \int b(\eta) d\eta$, $\bar{\xi} = \int a(\xi) d\xi$, придем в переменных $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ к рассмотренному выше случаю. Заметим, что замена переменных (36) является взаимно-однозначной, только если функции $a(\xi)$ и $b(\eta)$ не имеют нулей.

Покажем, что предложенная выше процедура разрешения связей обобщается на случай группы $SU(N)$ и является в сущности переходом от исходной системы (8) к системе (10). Действительно, при выводе системы (10) уже проделано частичное интегрирование — введение произвольной диагональной матрицы R . Сведем систему (10) к одному уравнению второго порядка. Для этого заметим, что матрица Γ может быть представлена в виде

$$\Gamma = \varphi B_0 \varphi^*, \quad \varphi = f_1 f_2^*.$$

Матрица φ унитарна и принадлежит «пространству флагов» $SU(N)/H$. Из уравнений (10) следует

$$[i\varphi^+ \varphi_{\xi} + \varphi^+ C_{\perp} \varphi, B_0] = 0$$

или

$$R_{\xi} + C_{\perp} = -i\varphi_{\xi} \varphi^* + \varphi W \varphi^*,$$

где W — некоторая коммутирующая с B диагональная матрица, элементы которой $W_{ik} = \delta_{ik} W_i$.

Величины W_i могут быть найдены из условия равенства нулю диагональных элементов матрицы $C_{\perp}$.

Заметим, что матрица φ определена с точностью до умножения на диагональную матрицу e^{iL} ($L_{ik} = l_i \delta_{ik}$). При таком преобразовании происходит замена

$$W \rightarrow W + L_{\xi}. \quad (37)$$

Полагая в случае группы $SU(2)$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} e^{-i\omega} \\ -\sin \frac{\alpha}{2} e^{i\omega} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}, \quad R_{\eta} = R_{\xi} = 0, \quad (38)$$

придем для α и β к системе (29), (30).

В общем случае, полагая $L_{\xi} = -W$, $R = 0$, можно добиться

$$W = 0. \quad (39)$$

Соответствующая система

$$\partial_{\eta}(\varphi_{\xi}\varphi^{*}) + \frac{1}{4} [\varphi B_0 \varphi^{*}, A_0] = 0 \quad (40)$$

при $B_0 = A_0$ для случая группы $SU(3)$ может быть приведена к лагранжеву виду. Заметим еще, что система (40) хотя и задана на группе ортогональных матриц, отнюдь не совпадает с главным киральным полем на ортогональной группе. Действительно, вещественное пространство флагов группы $SU(N)$ состоит из всей группы ортогональных матриц, тогда как пространство флагов ортогональной группы имеет очевидным образом меньшую размерность. В частности уравнение (40) на группе $SO(2)$ есть уравнение $\sin$ -Gordon, тогда как главное киральное поле на группе $SO(2)$ в силу ее коммутативности описывается линейными уравнениями.

Построенные нами системы представляют уравнения для очень большого числа взаимодействующих полей. Общая система (4) в случае n полюсов на $SU(N)$ содержит $nN(N-1)/2$ комплексных полей и лишь при нескольких первых значениях этого числа можно надеяться, что она будет применима в теории поля. Поэтому очень большую роль приобретает проблема уменьшения числа взаимодействующих полей — проблема редукции. Редукции для главных киральных полей замечательны тем, что имеют ясный геометрический смысл. Рассмотрим главное киральное поле на группе G (в дальнейшем будем предполагать $G = SU(N)$ или $SO(N)$) и допустим, что оно удовлетворяет дополнительному условию

$$g^2 = 1. \quad (41)$$

Покажем, что это условие совместимо с уравнениями главного кирального поля, которые имеют вид

$$g_{\xi\eta} = \frac{1}{2} (g_{\xi} g g_{\eta} + g_{\eta} g g_{\xi}). \quad (42)$$

Продифференцируем (41) по ξ и η . Получим

$$g_{\xi\eta} g + g g_{\xi\eta} + g_{\xi} g_{\eta} + g_{\eta} g_{\xi} = 0. \quad (43)$$

Подставим (42) в (43) и воспользуемся следующими из (41) соотношениями $g_{\xi} g = -g g_{\xi}$, $g_{\eta} g = -g g_{\eta}$. При этом мы убедимся в тождественном выполнении (41), что и до-

казывает совместимость уравнения (42) и условия (41). Замечательно, что условие (41) имеет геометрический смысл. Представим g в виде

$$g = 1 - 2P, \quad (44)$$

тогда из (41) следует $P^2 = P$, т. е. P является оператором проектирования, действующим в пространстве присоединенного представления группы G . Условие (31) выделяет в группе G как в римановом пространстве некоторое подпространство $\tilde{G}$. Подпространство $\tilde{G}$ не является связным. Каждый проекционный оператор P_k характеризуется размерностью k своего образа — пространства, в которое он проектирует. Очевидно, что в процессе эволюции число k не может меняться, поэтому можно считать $g = 1 - 2P_k$.

Пусть размерность пространства присоединенного представления группы g есть N . Элемент g группы G представим также в виде $g = -1 + 2P$, где $P' = 1 - P$ — дополнительный к P проектор. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $k \leq [N/2]$. Таким образом, уравнение (43) представляет собой набор уравнений

$$[P_{k\xi\eta}, P_k] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, [N/2] \quad (45)$$

(знак $[a]$ обозначает целую часть числа a). Соответствующие выражения для действия имеют вид

$$S_k = \frac{1}{2} \int \text{Sp}(P_{k\eta}, P_{k\xi}) d\eta d\xi. \quad (46)$$

Каждое из уравнений (45) представляет собой киральное поле, заданное на пространстве проекторов размерности k . Это пространство в вещественном случае называется вещественным грассмановым многообразием $\Gamma_{N,k}^R$, в комплексном случае — комплексным грассмановым многообразием $\Gamma_{N,k}^C$. Грассмановы многообразия являются однородными пространствами групп $SO(N)$ и $SU(N)$ и представляют собой результат факторизации этих групп по подгруппам меньшей размерности:

$$\Gamma_{N,k}^R = \frac{SO(N)}{O(k)SO(N-k)}; \quad \Gamma_{N,k}^C = \frac{SU(N)}{U(k)SU(N-k)}. \quad (47)$$

Грассмановы многообразия представляют собой множества плоскостей данной размерности k в вещественном или

комплексном пространстве размерности N , группы $SO(N)$ или $SU(N)$ действуют на них как группы поворотов. В частном случае $k = 1$ грассмановы многообразия называются проективными (вещественными или комплексными) пространствами размерности N и обозначаются RP^N и CP^N . В этом случае проектор P_1 может быть записан в виде

$$(P_1)_{ik} = n_i \bar{n}_k, \quad \sum_{i=1}^N \bar{n}_i n_i = (n n) = 1. \quad (48)$$

Подставляя (48) в действие (46), получим

$$S_1 = \int [(n_\xi n_\eta) + (n_\eta n_\xi) + 2 (nn_\xi)(nn_\eta)] d\xi d\eta. \quad (49)$$

Соответствующее уравнение движения в вещественном случае есть

$$n_{\xi\eta} + (n_\xi n_\eta)n = 0, \quad (50)$$

в комплексном случае —

$$n_{\xi\eta} + \frac{1}{2} [(n_\xi n_\eta) + (n_\eta n_\xi) + (n_{\xi\eta}n) - (nn_{\xi\eta})] n - \\ - (nn_\xi)n_\eta - (nn_\eta)n_\xi + 2 (nn_\eta)(nn_\xi)n = 0. \quad (51)$$

В соотношениях (48) в вещественном случае вектор n определен с точностью до знака, т. е. киральному полю на вещественном проективном пространстве соответствуют только те решения уравнения (50), при которых вектор n совершает движение лишь в одной полусфере S^{N-1} . Уравнение (50) имеет смысл и при снятии этого ограничения. В этом случае оно есть уравнение n -поля на сфере S^{N-1} . Локальное совпадение уравнений кирального поля на RP^{N-1} и на сфере S^{N-1} объясняется тем, что проективное пространство RP^{N-1} есть результат факторизации сферы по дискретной группе Z_2 .

Вещественная и комплексная сферы также являются однородными пространствами групп $SO(N)$ и $SU(N)$ и представляют собой результат факторизации этих групп по подгруппам $SO(N-1)$ и $SU(N-1)$. Сферы являются примером более общих однородных подпространств — многообразий Штифеля $\sigma_{N,k}^R$ и $\sigma_{N,k}^C$. Эти многообразия представляют собой множества ортонормированных реперов из k векторов в вещественном или комплексном прост-

ранстве

$$\sigma_{N,k}^R = \frac{SO(N)}{SO(N-k)}, \quad \sigma_{N,k}^C = \frac{SU(N)}{SU(N-k)}.$$

На многообразиях Штифеля естественно возникают киральные поля, которые можно интерпретировать как системы из k ортогональных n -полей. Действия и уравнения этих полей имеют вид

$$S = \frac{1}{2} \int \sum_{\alpha=1}^k [(n_{\eta}^{\alpha} n_{\xi}^{\alpha}) + (n_{\xi}^{\alpha} n_{\eta}^{\alpha})] d\xi d\eta,$$

$$n_{\xi\eta}^{\beta} + \sum_{\alpha=1}^k [(n_{\eta}^{\alpha} n_{\xi}^{\beta}) + (n_{\xi}^{\alpha} n_{\eta}^{\beta})] n^{\alpha} = 0,$$

$$(n^{\alpha} n^{\beta}) = \delta^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что в комплексном случае даже при $k = 1$ (комплексное n -поле) мы получаем уравнение, отличное от (51). Это объясняется тем обстоятельством, что CP^N отличается от комплексной $(2N+1)$ -мерной сферы факторизацией по непрерывной группе $U(1)$.

Киральные поля как на грассмановых, так и на штифелевых многообразиях являются естественными моделями теории поля, имеющими геометрический смысл. Выше мы показали, что уравнения для киральных полей на грассмановых многообразиях являются редукцией главных киральных полей. Ниже, пользуясь этим фактом, мы покажем интегрируемость полей на грассмановых многообразиях. Для киральных полей на многообразиях Штифеля кроме сводящегося к грассманову случаю вещественной сферы факт редукции и интегрируемость пока не доказаны. Тем не менее, можно высказать гипотезу, что редукция и интегрируемость имеют место. Эту гипотезу можно высказать в более общем виде. Представляется вероятным, что интегрируемы киральные поля на всех однородных пространствах групп $SO(N)$ и $SU(N)$ и что все соответствующие уравнения могут быть получены в результате редукции уравнений для главных киральных полей. Представляется вероятным также, что таким образом исчерпываются все редукции уравнений главных киральных полей.

Метод обратной задачи к главному киральному полю проведем по схеме, изложенной в § 6. При этом следует иметь в виду, что поскольку уравнения главного кирального поля допускают интегральную $L - A$ -пару (матрицы U и V имеют по одному простому полюсу), теория главного кирального поля вполне аналогична теории задачи n волн. Опишем кратко солитонные решения главных киральных полей на группе $SU(N)$.

Солитонное решение с одним полюсом по λ в точке $\lambda = \lambda_0$ имеет в терминах матрицы g вид

$$g = \left(1 + \frac{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0} p \right) \psi_0 |_{\lambda=0}, \quad (52)$$

где $\psi_0(\lambda, \xi, \eta)$ — решение «затравочных» уравнений (1) при $U = A_0$, $V = B_0$:

$$\psi_0(\lambda, \xi, \eta) = \exp \left\{ \frac{i}{\lambda + 1} \int_{-\infty}^{\xi} A_0(\xi') d\xi' - \frac{i}{\lambda - 1} \int_{-\infty}^{\eta} B_0(\eta') d\eta' \right\}. \quad (53)$$

Проекционный оператор P строится по подпространствам

$$M = \psi_0 |_{\lambda=\lambda_0} M_0, \quad N = \psi_0 |_{\lambda=\bar{\lambda}_0} N_0,$$

$$M = \text{Im } P, \quad N = \ker P$$

и является эрмитовым ($P^* = P$), так что пространства M и N , а также M_0 и N_0 являются ортогональными дополнениями друг к другу. Поэтому достаточно задавать одно из подпространств — например M_0 . Пусть это подпространство натянуто на векторы $\alpha_i^{(p)}$ ($p = 1, \dots, r$); r — размерность пространства M_0 . Пусть $A_0 = \text{diag } a_i(\xi)$, $B_0 = \text{diag } b_i(\eta)$. Тогда для векторов m_j^p , составляющих базис в M , имеем

$$m_j^p = a_j^p \exp \left\{ \frac{i}{\lambda_0 + 1} \int_{-\infty}^{\xi} a_j(\xi') d\xi' - \frac{i}{\lambda_0 - 1} \int_{-\infty}^{\eta} b_j(\eta') d\eta' \right\}. \quad (54)$$

В наиболее простом случае, когда $\eta = 1$,

$$P_{\alpha\beta} = \frac{m_{\alpha} \bar{m}_{\beta}}{\sum |m_{\gamma}|^2}.$$

В случае группы $SU(2)$ солитонное решение зависит от двух комплексных параметров ($\lambda_0 = \lambda'_0 + i\lambda''_0$, c_2/c_1) и представляет собой солитон в собственном смысле, т. е. уединенную волну, при постоянных A_0 , B_0 имеющую постоянную скорость

$$v = \frac{(b_1 - b_2) |1 + \lambda_0|^2 - (a_1 - a_2) |1 - \lambda_0|^2}{(b_1 - b_2) |1 + \lambda_0|^2 + (a_1 - a_2) |1 - \lambda_0|^2}.$$

По формулам (34), (35) можно вычислить энергию и импульс солитона и получить выражение для его массы:

$$M^2 = \frac{4\lambda''_0 (a_1 - a_2) (b_1 - b_2)}{|1 - \lambda_0^2|^2}. \quad (55)$$

Матрица P_{ij} для солитона имеет вид

$$P = \frac{\lambda}{2 \operatorname{ch} y} \begin{bmatrix} e^y & e^{-iS} \\ e^{iS} & e^{-y} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

где

$$y = \lambda''_0 \alpha_0 (x - vt - x_0), \quad \bar{\lambda}_0 = -\frac{1}{\lambda''_0 \alpha_0} \ln \left| \frac{c_1}{c_2} \right|,$$

$$S = (\lambda'_0 \alpha_1 + \alpha_0) t - (\lambda'_0 \alpha_0 + \alpha_1) x + \arg \frac{c_1}{c_2}; \quad (57)$$

$$\alpha_0 = \frac{a_1 - a_2}{|\lambda_0 + 1|^2} + \frac{b_1 - b_2}{|\lambda_0 - 1|^2}, \quad \alpha_1 = \frac{a_1 - a_2}{|\lambda_0 + 1|^2} - \frac{b_1 - b_2}{|\lambda_0 - 1|^2}.$$

При $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0$ солитон является обычной частицей, при $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) < 0$ — тахионом. В случае группы $SU(N)$, если $N > 2$, имеется нетривиальное взаимодействие солитонов. Пусть $N = 3$, тогда, как и в задаче о трех волнах, солитонное решение характеризуется, кроме числа λ_0 , целым вектором (c_1, c_2, c_3) . Если одна из компонент этого вектора равна нулю, мы получаем простое солитонное решение — в этом случае есть, очевидно, три типа солитонов. Два из этих солитонов при $c_1 = 0$ и $c_3 = 0$ являются простыми солитонами, третий при $c_2 = 0$ — составным.

Как следует из формулы для массы (55), в случае нормальных солитонов квадрат массы составного солитона больше суммы квадратов масс простых солитонов:

$(a_1 - a_3)(b_1 - b_3) > (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3)$ при $a_1 > a_2 > a_3$, $b_1 > b_2 > b_3$. Таким образом, возможен распад составного солитона на два простых. Солитонное решение в случае общего положения (все $c_i \neq 0$) действительно описывает такой распад. Из анализа общего решения (5.8), (5.9) легко можно получить, что при $t \rightarrow -\infty$

$$P_{12} \rightarrow 0, \quad P_{23} \rightarrow 0,$$

$$|P_{13}| \rightarrow \frac{1}{2 \operatorname{ch} \left(\lambda_0'' \alpha_0^{13} x - \lambda_0'' \alpha_1^{13} t + \ln \left| \frac{c_1}{c_3} \right| \right)},$$

при $t \rightarrow +\infty$

$$P_{13} \rightarrow 0,$$

$$|P_{12}| \rightarrow \frac{1}{2 \operatorname{ch} \left(\lambda_0'' \alpha_0^{12} x - \lambda_0'' \alpha_1^{12} t + \ln \left| \frac{c_1}{c_2} \right| \right)},$$

$$|P_{13}| \rightarrow \frac{1}{2 \operatorname{ch} \left(\lambda_0'' \alpha_0^{23} x - \lambda_0'' \alpha_1^{23} t + \ln \left| \frac{c_2}{c_3} \right| \right)}.$$

(Величины $a_{0,1}^{ij}$ вычислены по формуле (57) путем замены индексов 1, 2 на i и j .) Таким образом, числа c_2/c_1 и c_3/c_1 характеризуют конечные координаты продуктов распада. Уравнения (2) обратимы относительно изменения знака времени, поэтому существует обратный процесс слияния простых солитонов в составной. Эти процессы находятся в солитонном решении, в котором образ дополнительного проектора $1 - P$ есть одномерное подпространство.

Рассмотрим теперь процедуру интегрирования полей, возникающих в результате редукции. Мы ограничимся рассмотренным в § 3 случае редукции $g^2 = 1$ в главном киральном поле на группе $SU(N)$, приводящим к киральным полям на комплексных грассмановых многообразиях. Для проведения интегрирования необходимо выяснить, как отражается редукция на данной задаче Римана, т. е. какие ограничения на матрицы A_0 , B_0 , $G(\lambda)$, на расположение нулей функций ψ_1 , ψ_2 и на структуру подпространств N_i , M_i из нее следуют. Заметим прежде всего, что из формул (13) и условия $g^2 = 1$ следуют соотношения

$$Ag + gA = 0, \quad Bg + gB = 0, \quad (58)$$

а также, с учетом $g = 1 - 2P$, соотношения

$$A = -2i [P, P_\xi], \quad B = -2i [P, P_\eta]. \quad (59)$$

Из соотношений (5.8) и основных формул (1) следует, что можно выбрать фундаментальную матрицу решений φ , удовлетворяющую условиям

$$\varphi(1/\lambda) = g\varphi(\lambda), \quad g = \varphi(0). \quad (60)$$

Иначе говоря, нули функций φ_1 расположены симметрично в смысле инверсии от единичной окружности и делятся на простые нули (при $|\lambda| = 1$) и двойные. В теории уравнения sin-Gordon этот факт давно известен (см. гл. I). Соответственно возникнут простые и двойные солитонные решения. Поскольку формула

$$\varphi_0(1/\lambda) = g_0\varphi_0(\lambda), \quad (61)$$

где $g_0 = \psi(0)$, имеет место и для заданного исходного решения системы (1) (решений задачи Римана), для функций ψ_1, ψ_2 выполняются инволюции

$$\begin{aligned} \psi_1(1/\lambda) &= g\psi_1(\lambda)g_0, \\ \psi_2(1/\lambda) &= g_0\psi_2(\lambda)g, \end{aligned} \quad (62)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} G(1/\lambda) &= g_0G(\lambda)g_0, \\ G_0(1/\lambda) &= G_0(\lambda). \end{aligned} \quad (63)$$

Вторая формула (63) представляет собой условие на «одевающую» матрицу $G_0(\lambda)$.

Из формул (57) следуют соотношения

$$\begin{aligned} PA + AP &= A, & P_0A_0 + A_0P_0 &= A_0, \\ PB + BP &= B, & P_0B_0 + B_0P_0 &= B_0 \end{aligned} \quad (64)$$

(здесь P_0 — «затравочный» проектор $g_1 = 1 - 2P_0$), а из (62) следуют формулы для «одевания» затравочного проектора P_0

$$P = f_1P_0f_1^{-1}, \quad f_1 = \psi_1|_{\lambda=1}.$$

Поэтому для полного решения задачи необходимо установить вид P_0 и A_0 . Из формул (64), вспоминая, что A_0, B_0 диагональны, имеем

$$\begin{aligned} P_{0ik}(a_i + a_k) &= \delta_{ik}a_k, \\ P_{0ik}(b_i + b_k) &= \delta_{ik}b_k. \end{aligned} \quad (65)$$

Расположим квадраты чисел a_i в порядке убывания. Диагональ матрицы A^2 разобьется на отрезки с равными квадратами собственных чисел. Расположим внутри каждого из этих отрезков отрицательные собственные числа за положительными. Из (65) следует, что матрица P_0 имеет блочно-диагональный вид, причем в каждом блоке матрица P_0 сводится к матрице P_0^k вида

$$P_0^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & R_k \\ R_k^+ & I \end{bmatrix}, \quad R_k R_k^+ = R_k^+ R_k = I, \quad (66)$$

где R_k — унитарная матрица.

Из формул (64) легко установить, что матрица B_0 , коммутирующая с A_0 , должна при описанном выше упорядочении чисел a_i также распадаться на согласованные со структурой A_0 диагональные матрицы. Окончательно k -й блок матриц A_0 и B_0 характеризуется функциями $a_k(\xi)$, $b_k(\eta)$. Подставляя (66) в (57), получим выражение для матриц R_k

$$R_k = R_k^0 \exp \left(i \int_{-\infty}^{\xi} a_k d\xi' + i \int_{-\infty}^{\eta} b_k(\eta) d\eta' \right). \quad (67)$$

Здесь R_k^0 — произвольная постоянная унитарная матрица. Общая размерность образа проектора P_0 определяется суммарным рангом матриц R_k^0 .

Формулы (66), (67) решают вопрос о структуре асимптотических состояний киральных полей на грассмановых многообразиях. Дальнейшая схема построения решений этих полей не отличается от изложенной в §§ 4, 6. Заметим еще, что в простейшем случае кирального поля на комплексном проективном пространстве матрицы A_0 и B_0 могут содержать всего один нетривиальный блок, так что асимптотические состояния здесь характеризуются одной парой функций a, b . Из результатов § 6 следует, что в этом случае нетривиальное взаимодействие солитонов отсутствует. Всю изложенную теорию можно перенести и на киральные поля на вещественных грассмановых многообразиях и на n -поля на вещественных сферах. Заметим еще, что из всего предыдущего с очевидностью следует отсутствие нетривиального взаимодействия солитонов в n -полях на сферах при любой их размерности.

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ПРИ БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

Развитый в предыдущих главах формализм обратной задачи позволил нам описать обширные классы точных решений интегрируемых уравнений. В быстроубывающем случае это были N -солитонные решения, распадающиеся при больших временах в суперпозицию односолитонных решений. Целью настоящей главы является описание асимптотического поведения решений при $t \rightarrow \infty$, отвечающих в достаточной степени произвольным начальным условиям. Использование метода обратной задачи позволит нам исследовать временные асимптотики решений с той же степенью подробности, что и в линейных системах, т. е. позволит получить явные формулы для асимптотики в терминах начальных данных, относящихся к моменту времени $t = 0$. Едва ли будет преувеличением сказать, что именно асимптотические формулы наиболее ярко демонстрируют эффективность метода обратной задачи.

Обсудим прежде всего, что нам хотелось бы получить в качестве конечного результата. Для этого рассмотрим ситуацию, имеющуюся в линейных задачах. В подходящих переменных решение всякого консервативного линейного уравнения представляется интегралом Фурье

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-i\omega(k)t + ikx} dk,$$

где $\omega(k)$ — закон дисперсии волны, а $g(k)$ — фурье-образ начального условия

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) e^{-ikx} dx.$$

Если рассматриваемая система диспергирующая, т. е. для почти всех k $\omega''(k) \neq 0$, то решение $f(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ сосредоточено в области $x/t = v = O(1)$. Действительно, полагая $x = vt$ и вычисляя интеграл по методу стационарной фазы, получаем

$$f(x, t) = \text{const} \cdot t^{-1/2} g(k(v)) \exp \{i[k(v) - \omega(k(v))]t\},$$

где $k(v)$ — корень уравнения $\omega'(k) = v$ (для простоты считаем, что этот корень единственный). Эта формула вместе с выражением для $g(k)$ через начальные данные полностью (и явно) решает задачу об асимптотике. К формулам такого типа мы и будем стремиться.

Следует отметить, что структура асимптотических решений нелинейных диспергирующих систем определяется и без привлечения метода обратной задачи. Имей мы дело с одномерными уравнениями, мы ожидали бы, что асимптотика при $t \rightarrow \infty$ будет иметь чисто линейный характер (разумеется, если в асимптотике нет солитонов). В одномерных задачах вид асимптотики несколько усложняется из-за медленного убывания амплитуды решения. Действительно, если амплитуда решения убывает как $t^{-1/2}$ (как во всякой линейной задаче), то нелинейный сдвиг частоты волны, как правило, квадратичен по амплитуде и пропорционален t^{-1} ; это должно приводить к появлению добавки к фазе, пропорциональной $\ln t$. Поэтому, например, для нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} \pm 2|\psi|^2\psi = 0$$

асимптотика должна иметь вид

$$\psi(x, t) = t^{-1/2} f\left(\frac{x}{t}\right) \exp \left[i \frac{x^2}{4t} \pm 2 \left| f\left(\frac{x}{t}\right) \right|^2 \ln t \right] + o(t^{-1/2})$$

(справедливость этого предположения проверяется прямой подстановкой). Наша задача состоит, следовательно, в определении связи комплекснозначной функции $f(\xi)$ с начальным условием $\psi(x, t)|_{t=0}$. Несколько неожиданным обстоятельством оказывается, что определение модуля и аргумента этой функции — задачи разного уровня сложности. Первая из них решается в § 1 этой главы; решению второй посвящен § 2. Полученные в § 1 результаты применяются к задаче о дифракции Фраунгофера в не-

линейной среде. На протяжении этих параграфов мы работаем, в основном, в бессолитонном секторе фазового пространства. Учет солитонов в асимптотике не представляет особой сложности, и мы не останавливаемся специально на этой задаче.

§ 1. Интегральные соотношения.

Нелинейная дифракция Фраунгофера

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0. \quad (1)$$

В бессолитонной ситуации уравнения обратной задачи (I.9.11) упрощаются до вида

$$\begin{aligned} -\bar{\psi}_2(x, \lambda) e^{i\lambda x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda') \psi_1(x, \lambda') e^{i\lambda' x}}{\lambda' - \lambda - i0} d\lambda', \\ \bar{\psi}_1(x, \lambda) e^{i\lambda x} &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda') \psi_2(x, \lambda') e^{i\lambda' x}}{\lambda' - \lambda - i0} d\lambda'. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом $r(\lambda, t) = r(\lambda, 0)e^{4i\lambda^2 t}$. Рассмотрим решение уравнений (2) при $t \rightarrow \infty$. Функции $\psi_{1,2}$ являются решениями задачи на собственные значения (I.9.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= i\lambda \psi_1 + i\bar{r}(x, t) \psi_2, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} &= -i\lambda \psi_2 + ir(x, t) \psi_1 \end{aligned} \quad (3)$$

с асимптотикой $\psi_1 = e^{i\lambda x}$, $\psi_2 = 0$ при $x \rightarrow \infty$. При больших t мы ожидаем, что $r(x, t)$ будет всюду близко к нулю. По этой причине ψ_1, ψ_2 должны мало отличаться от экспонент. Поэтому будем искать решение системы (2) в виде

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A(\lambda, x, t) e^{i\lambda x}, \\ \psi_2 &= \bar{B}(\lambda, x, t) e^{-i\lambda x - 4i\lambda^2 t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где A и B — медленно меняющиеся по сравнению с показателями экспонент функции x, t . Подставляя (1) в (2),

получаем

$$B e^{2i\lambda x + 4i\lambda^2 t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda') A(\lambda') e^{2i\lambda' x + 4i\lambda'^2 t}}{\lambda' - \lambda + i0} d\lambda', \quad (5)$$

$$\bar{A} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\lambda') \bar{B}(\lambda')}{\lambda' - \lambda + i0} d\lambda'.$$

Положив теперь $x = vt$ и воспользовавшись известным соотношением теории обобщенных функций

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{i\Phi(\lambda')t}}{\lambda' - \lambda + i0} = \begin{cases} -2\pi i e^{i\Phi(\lambda)t} \delta(\lambda' - \lambda), & \Phi'(\lambda) < 0, \\ 0, & \Phi'(\lambda) > 0, \end{cases}$$

находим из первого уравнения (5)

$$B(\lambda) = r(\lambda) A(\lambda) \theta(-v/4 - \lambda), \quad (6)$$

где

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Обозначим, далее, $r(\lambda) \theta(-v/4 - \lambda) = R(\lambda, v)$. С учетом (6) второе из уравнений (5) переписывается в виде

$$\bar{A}(\lambda, v) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|R(\lambda', v)|^2 \bar{A}(\lambda', v)}{\lambda' - \lambda + i0} d\lambda'. \quad (7)$$

Заметим теперь, что решение этого уравнения на самом деле нам хорошо известно. Действительно, при $v = -\infty$ функция $R(\lambda, v) = r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, а $A(\lambda, v) = a(\lambda)$; учитывая аналитичность $a(\lambda)$ в верхней полуплоскости и соотношение $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1$, мы очевидным образом удовлетворяем (7). Следовательно, решением (7) является аналитическая в верхней полуплоскости функция $A(\lambda)$, не имеющая там нулей (напомним, что мы рассматриваем бессолитонный случай) и стремящаяся к единице на бесконечности; модуль $A(\lambda)$ при вещественных λ есть, очевидно,

$$|A(\lambda)| = \begin{cases} |a(\lambda)|, & \lambda < -v/4, \\ 1, & \lambda > -v/4. \end{cases} \quad (8)$$

Такая структура $|A(\lambda)|$ позволяет переписать подынтегральное выражение в формуле (7) в следующем виде:

$[A^{-1}(\lambda') - \bar{A}(\lambda')](\lambda' - \lambda + i0)^{-1}$. Перечисленные свойства функции $A(\lambda)$ позволяют немедленно восстановить ее: $|A(\lambda)|$ нам известен, а аргумент дается дисперсионным соотношением

$$\arg A(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-v/4} \frac{\ln |a(\lambda')|}{\lambda' - \lambda} d\lambda'. \quad (9)$$

Формулы (4), (6), (8) и (9) определяют $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$. Найденное решение справедливо при всех $v = x/t$, за исключением узкой ($\sim t^{-1/2}$) области вблизи $v = -4\lambda$. Вторая из формул (I.9.13) (первой по понятной причине мы не имеем права пользоваться) дает нам интеграл

$$\int_{vt}^{\infty} |r(x, t)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |R(\lambda)|^2 \bar{A}(\lambda) d\lambda.$$

Интеграл в правой части этого равенства определяется вычетом функции $A(\lambda)$ на бесконечности; окончательно имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{vt}^{\infty} |r(x, t)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-v/4} \ln \frac{1}{|a(\lambda)|^2} d\lambda. \quad (10)$$

Формула (10) дает нам физическую интерпретацию введенных в § 10 гл. I переменных действие — угол для нелинейного уравнения Шредингера. Именно, переменные типа действия $n(\lambda)$ (см. (I.10.25)) для непрерывного спектра представляют собой «числа заполнения» асимптотических состояний. Кроме того, (10) означает, что при больших t

$$|r(x, t)|^2 = \frac{1}{4\pi t} \ln \frac{1}{|a(-x/4t)|^2}. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) имеют любопытное физическое приложение. Уравнение (1), приведенное к виду

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 \frac{\delta n_{\text{нл}}}{n_0} |E|^2 E, \quad (12)$$

описывает поведение стационарной электромагнитной волны в нелинейной среде. Предполагается, что показатель

преломления в зависимости от поля ведет себя как $n = n_0 + \delta n_{\text{нл}} |E|^2$ (кубическая нелинейность). Величина E в (12) имеет смысл комплексной огибающей электрического поля, волновой вектор k направлен вдоль оси z , а второй член в левой части (12) учитывает дифракционную расходимость волны. Рассмотрим теперь задачу о дифракции Фраунгофера в нелинейной среде, т. е. задачу о дифракции волны на экране со щелями, за которым расположена нелинейная среда. Пусть экран расположен в плоскости $z = 0$; поле волны в плоскости экрана будем считать заданным и постоянным, и пусть, для простоты, в экране имеется всего одна щель ширины l . Начальное условие для уравнения (12) имеет в таком случае вид

$$E(x)|_{z=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, x > l, \\ E_0, & 0 < x < l. \end{cases} \quad (13)$$

Полагая $r = k \sqrt{\delta n_{\text{нл}}/2n_0} E$, $t = z/2k$ имеем уравнение (1) для $r(x, t)$. Данные рассеяния $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ для начального условия вида (13) легко вычисляются; так,

$$\frac{1}{|a(\lambda)|^2} = \frac{\lambda^2 + |r_0|^2}{\lambda^2 + |r_0|^2 \cos^2 \chi l},$$

где

$$\chi(\lambda) = (\lambda^2 + |r_0|^2)^{1/2}, \quad |r_0|^2 = \frac{k^2 \delta n_{\text{нл}}}{2n_0} |E_0|^2.$$

Так как $t = z/2k$, то (10) дает нам, по сути дела, интегральную интенсивность дифрагированного излучения на углы, большие чем $\arctg(v/2k)$. Поскольку, далее, уравнение (12) применимо только для рассмотрения дифракции на малые углы, то, полагая $\theta \ll 1$, получаем простое выражение для интенсивности излучения, дифрагированного в интервале углов от θ до $\theta + d\theta$:

$$dI(\theta) = \frac{k}{\pi \kappa} \ln \frac{1}{|a(-k\theta/2)|^2} d\theta,$$

где $\kappa = k^2 \delta n_{\text{нл}}/n_0$. Таким образом, при дифракции на щели

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{k}{\pi \kappa} \ln \frac{k^2 6^{2/4} + |r_0|^2}{k^2 \theta^2/4 + |r_0| \cos^2 [l(k^2 \theta^2/4 + |r_0|^2)^{1/2}]}. \quad (14)$$

Эта формула справедлива, пока в начальном условии (13) не содержится солитонов, т. е. до тех пор, пока $a(\lambda)$ не

имеет нулей в верхней полуплоскости. Первый нуль у $a(\lambda)$ появляется, когда интегральная интенсивность волны, падающей на щель, $I = |E_0|^2 l$ становится равной $I_{\text{кр}} = \frac{\pi^2}{2l} \frac{n_0}{\delta n_{\text{нл}} k^2}$; таким образом, формула (14) справедлива при $I < I_{\text{кр}}$.

Явные выражения для распределения интенсивности по направлениям могут быть получены и для задачи о дифракции на экране с произвольной системой параллельных щелей, поскольку матрица рассеяния на потенциале, являющемся суперпозицией финитных потенциалов с неперекрывающимися носителями, равна произведению матриц рассеяния на каждом из потенциалов по отдельности.

§ 2. Явные формулы для асимптотик (нелинейное уравнение Шредингера)

В предыдущем параграфе нам удалось получить явное выражение для амплитуды $r(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ в терминах начальных данных, не делая фактически никаких предположений о виде решения. Мы выяснили, что $r(x, t)$ на любой прямой $x = vt$ убывает как $t^{-1/2}$, отсюда следует, что асимптотика $r(x, t)$ имеет описанный во введении осцилляторный характер. В этом параграфе мы сначала предположим, что $r(x, t)$ имеет именно такую структуру, затем мы вычислим матрицу рассеяния на потенциалах такого типа в явном виде; обращение полученных таким образом выражений позволит нам найти потенциал, отвечающий быстроосциллирующему по λ коэффициенту отражения (поскольку $r(\lambda, t) = r(\lambda, 0)e^{i\lambda^2 t}$, то при больших t функция $r(\lambda)$ действительно быстро осциллирует). В конечном итоге мы сможем предъявить явную формулу для асимптотики $r(x, t)$ и оправдать тем самым исходное предположение.

Перепишем систему уравнений (1.3) в виде

$$i \frac{\partial v_1}{\partial x} + A e^{-i\tilde{\Phi}} v_2 = 0, \quad i \frac{\partial v_2}{\partial x} + A e^{i\tilde{\Phi}} v_1 = 0, \quad (1)$$

где мы ввели обозначения

$$r = A e^{i\Phi} \quad (\text{Im } A = 0, A \geq 0), \quad \tilde{\Phi} = \Phi + 2\lambda x, \\ v_1 = \psi_1 e^{-i\lambda x}, \quad v_2 = \psi_2 e^{i\lambda x}.$$

Предположим, что модуль и аргумент $r(x, t)$ удовлетво-

ряют следующим условиям:

$$\Phi_{xx} > 0, \quad \left| \frac{d}{dx} \ln A \right|^2 \ll \Phi_{xx}, \quad \left| \frac{d}{dx} \ln \Phi_{xx} \right|^2 \ll \Phi_{xx}, \quad (2)$$

и интеграл $\int \frac{A^2}{\Phi_x} dx$ сходится в окрестности обеих бесконечностей. Условия (2) означают, что на основе системы (1.3) функция $r(x, t)$ может быть в окрестности любой точки представлена как экспонента с постоянной амплитудой и линейно меняющейся частотой. При каждом λ выделим резонансную область — окрестность точки $x_0(\lambda)$, определенной условием

$$\tilde{\Phi}_x(x_0) = \Phi_x(x_0) + 2\lambda = 0.$$

Поскольку $\Phi_{xx} > 0$, это уравнение при каждом λ имеет не более одного решения. В резонансной области система (1) упрощается до вида

$$\begin{cases} i \frac{\partial v_1}{\partial y} + A(x_0) \exp \left[-i \left(\tilde{\Phi}_0 + \frac{f_0 y^2}{2} \right) \right] v_2 = 0, \\ i \frac{\partial v_2}{\partial y} + A(x_0) \exp \left[i \left(\tilde{\Phi}_0 + \frac{f_0 y^2}{2} \right) \right] v_1 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}(x_0)$, $f_0 = \Phi_{xx}(x_0)$, $y = x - x_0$.

Вдали от точки x_0 система (1) также существенно упрощается. Именно, в области, где

$$\tilde{\Phi}_x^2 \gg \Phi_{xx}, \quad (4)$$

для v_1 и v_2 получаем

$$\rightarrow \quad \begin{cases} i \tilde{\Phi}_x \frac{\partial v_1}{\partial x} + A^2 v_1 = 0, & -i \tilde{\Phi}_x \frac{\partial v_2}{\partial x} + A^2 v_2 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Область, в которой выполнено условие (4), будем называть асимптотической. В этой области v_1 и v_2 легко находятся из (5). Общий вид решения в резонансной области также нетрудно указать. Для этого введем переменную $z = y \Phi_{xx}^{1/2}(x_0)$ и исключим из системы (3) величину v_1 . Для v_2 получим

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - iz \frac{\partial v_2}{\partial z} + \alpha^2 v_2 = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha^2(\lambda) = \frac{A^2(x_0)}{\Phi_{xx}(x_0)}, \quad x_0 = x_0(\lambda). \quad (7)$$

Общее решение уравнения (6) выражается через функции параболического цилиндра (см. [26], т. 2):

$$v_2 = e^{i \frac{z^2}{4}} \left[c_1 D_{-1+i\alpha^2} \left(\frac{z}{\sqrt{i}} \right) + c_2 D_{-1+i\alpha^2} \left(-\frac{z}{\sqrt{i}} \right) \right]. \quad (8)$$

Функция $v_1(y)$ находится при этом из второго уравнения (3). Таким образом, решение в резонансной области определяется двумя произвольными константами c_1 и c_2 .

При выполнении условий (2) резонансная и асимптотическая области перекрываются. В области перекрытия решения уравнений (5) и (6) должны быть сшиты, после чего мы получаем решение задачи (4) на всей оси x . В частности, для решения

$$\xi(x, \lambda) \stackrel{\text{опр}}{=} \tilde{\psi}(x, \lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow +\infty$$

получаем, учитывая граничные условия на $-\infty$ по x :

$$\xi_1(x, \lambda) = 0, \quad \xi_2(x, \lambda) = \exp \left(i \int_x^\infty \frac{A^2}{\tilde{\Phi}_x} dx \right). \quad (9)$$

В области перекрытия формулы (9) дают

$$\xi_1 = 0,$$

$$\xi_2 = [(x - x_0) \Phi_{xx}(x_0)]^{-i\alpha^2} \exp \left(-i \int_{x_0}^\infty \ln \tilde{\Phi}_x \frac{d}{dx} \frac{A^2}{\Phi_{xx}} dx \right). \quad (10)$$

Асимптотики же интересующих нас функций параболического цилиндра имеют вид ($z \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} D_{-1+i\alpha^2} \left(\frac{z}{\sqrt{i}} \right) &= e^{i \frac{z^2}{4}} e^{\frac{\pi\alpha^2}{4}} z^{i\alpha^2-1} + O(z^{-2}), \\ D_{-1+i\alpha^2} \left(-\frac{z}{\sqrt{i}} \right) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1-i\alpha^2)} e^{-\frac{\pi\alpha^2}{4}} z^{-i\alpha^2} e^{-i \frac{z^2}{4}} + \\ &+ e^{-\frac{3}{4}\pi i} e^{-\frac{3}{4}\pi\alpha^2} z^{-1+i\alpha^2} e^{\frac{iz^2}{4}} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя эти формулы в v_1 и v_2 и сшивая полученные

выражения с (10), находим

$$c_2 = \frac{\Gamma(1 - i\alpha^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi\alpha^2}{4}} [\Phi_{xx}(x_0)]^{-i\frac{\alpha^2}{2}} \times \\ \times \exp\left(-i \int_{x_0}^{\infty} \ln \tilde{\Phi}_x \frac{d}{dx} \frac{A^2}{\Phi_{xx}} dx\right), \\ c_1 = c_2 e^{-\pi\alpha^2}.$$

Таким образом, мы нашли $\xi(x, \lambda)$ в резонансной области. Сшивая далее аналогичным образом решение уравнений (5) в области перекрытия $x < x_0$ с уже найденным решением, мы определяем решение в асимптотической области слева от резонансной точки. Устремляя затем x к $-\infty$ и учитывая, что

$$\bar{a}(\lambda) = \xi_2(x, \lambda) e^{i\lambda x}, \\ b(\lambda) = -\xi_1(x, \lambda) e^{-i\lambda x}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

получим матрицу рассеяния

$$\bar{a}(\lambda) = \exp\left[-\pi\alpha^2 + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2(x)}{\tilde{\Phi}_x} dx\right], \quad (12)$$

$$b(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi i}}{\alpha \Gamma(i\alpha^2)} e^{-\frac{\pi\alpha^2}{2}} \exp\{-i[\tilde{\Phi}_0 + L_1 - L_2 + \alpha^2 \ln \Phi_{xx}(x_0)]\}, \quad (13)$$

где

$$L_1 = \int_x^{\infty} \ln \tilde{\Phi}_x \frac{d}{dx} \frac{A^2}{\Phi_{xx}} dx, \quad L_2 = \int_{-\infty}^x \ln |\tilde{\Phi}_x| \frac{d}{dx} \frac{A^2}{\Phi_{xx}} dx. \quad (14)$$

В формулах (12)–(14) следует положить $x_0 = x_0(\lambda)$, найденное из уравнения $\Phi_x(x_0) = -2\lambda$. Итак, мы явно решили прямую задачу рассеяния для класса потенциалов, удовлетворяющих условиям (2).

Нетрудно проверить, что полученная матрица рассеяния обладает необходимыми свойствами. Во-первых, воспользовавшись формулой

$$|\Gamma(i\alpha^2)|^2 = \frac{\pi}{\alpha^2 \operatorname{sh} \pi\alpha^2},$$

убеждаемся, что $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1$. Заметим, во-вторых, что показатель экспоненты в формуле (12) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi \alpha^2(\xi)}{\xi - \lambda + i0} d\xi,$$

означающем, что $\ln \bar{a}(\bar{\lambda})$ аналитически продолжается с вещественной оси в нижнюю полуплоскость $\bar{\lambda}$; это в свою очередь значит, что $a(\lambda)$ аналитична в области $\text{Im } \lambda > 0$ и не имеет там нулей. Как мы знаем, эти утверждения относительно матрицы рассеяния справедливы в общем случае; здесь же мы установили их для потенциалов, удовлетворяющих условиям (2), прямым вычислением $a(\lambda)$, $b(\lambda)$.

С той же точностью, имея в распоряжении формулы (12)–(14), мы можем решить и обратную задачу рассеяния — восстановить $A(x)$, $\Phi(x)$ по заданным $a(\lambda)$, $b(\lambda)$. Для этого заметим, что

$$\alpha^2(\lambda) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|a(\lambda)|^2}$$

есть заданная функция спектрального параметра λ . Обозначим $\arg b(\lambda) = \theta(\lambda)$ и заметим, что интегралы L_1 и L_2 выражаются только через $\alpha(\lambda)$:

$$L_1 - L_2 = \int_{\lambda}^{\infty} \ln |\xi - \lambda| \frac{d}{d\xi} \alpha^2(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\lambda} \ln |\lambda - \xi| \frac{d}{d\xi} \alpha^2(\xi) d\xi$$

Положим

$$\tilde{\theta}(\lambda) = \theta(\lambda) + L_1(\lambda) - L_2(\lambda) + \pi/4 + \arg \Gamma(i\alpha^2).$$

Из (13) следует соотношение

$$\tilde{\theta}(\lambda) = -2\lambda x - \Phi(x) - \alpha^2 \ln \Phi_{xx}, \quad \Phi_x = -2\lambda. \quad (15)$$

Рассмотрим сначала случай, когда членом $\alpha^2 \ln \Phi_{xx}$ в (15) можно пренебречь. Тогда $\Phi(x)$ находится преобразованием Лежандра

$$x = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \lambda}, \quad \Phi(x) = -2\lambda x - \tilde{\theta}(\lambda).$$

Вычисляя $\alpha^2 \ln \Phi_{xx}$ как поправку, заметим, что

$$\Phi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^{-1} = 4\tilde{\theta}_{\lambda\lambda}^{-1},$$

поэтому (15) можно переписать в виде

$$\Phi(x) = -2\lambda x - \tilde{\theta}(\lambda) + \alpha^2 \ln \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}, \quad x = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \lambda}. \quad (16)$$

В силу свойств преобразования Лежандра условие $\Phi_{xx} > 0$ влечет за собой $\tilde{\theta}_{\lambda\lambda} > 0$ и наоборот; условия (2) могут быть переписаны в виде

$$\left| \frac{d}{dx} \ln \alpha^2(\lambda) \right|^2 \ll \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}, \quad \frac{d}{d\lambda} (|\tilde{\theta}_{\lambda\lambda}|)^{1/2} \ll \frac{d}{d\lambda} \tilde{\theta}_{\lambda}. \quad (17)$$

Интегрируя (17), находим, что за исключением окрестности нуля член $\alpha^2(\lambda) \ln \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}$ мал по сравнению с $\tilde{\theta}$, что и оправдывает предыдущее рассмотрение. Теперь вспомним, что $r(\lambda, t) = r(\lambda, 0) \exp(4i\lambda^2 t)$, т. е. $\tilde{\theta}(\lambda, t) = \tilde{\theta}_0(\lambda) + 4\lambda^2 t$. Очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ условия (17) оказываются выполненными независимо от вида $a(\lambda)$, $\tilde{\theta}_0(\lambda)$. Это обстоятельство и позволяет найти асимптотику начальной задачи для нелинейного уравнения Шредингера.

Имеем при $t \rightarrow \infty$

$$x = -4\lambda t + x_1(\lambda), \quad x_1(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\theta}_0}{\partial \lambda}, \quad \lambda = -\frac{x}{4t},$$

т. е. $\Phi_{xx} = 1/2t$, $\alpha^2(\lambda) = \alpha^2(-x/4t)$. Таким образом, имеем окончательно

$$A^2(x, t) = \Phi_{xx} \alpha^2 \left(-\frac{x}{4t} \right) = \frac{1}{2\pi t} \ln \frac{1}{\left| a \left(-\frac{x}{4t} \right) \right|}, \quad (18)$$

$$\Phi(x, t) = \frac{x^2}{4t} + \alpha^2 \left(-\frac{x}{4t} \right) \ln 2t - \tilde{\theta}_0 \left(-\frac{x}{4t} \right). \quad (19)$$

Формулы (18), (19) полностью определяют главный член асимптотики $r(x, t) = Ae^{i\Phi}$. (Формула (18) уже была нами получена в предыдущем параграфе.)

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о характере использованного приближения. Условие (2) $A_{xx} \ll A\Phi_x^2$ эквивалентно для уравнения (1.1) переходу к приближению «нелинейной геометрической оптики».

или к уравнениям одномерной газовой динамики с отрицательным давлением. Условие отсутствия солитонов в этой терминологии означает выбор начальных условий, при которых эффекты отрицательного давления принципиально не сказываются. Величина A^2 соответствует плотности газа, Φ — гидродинамическому потенциалу, Φ_x — скорости. Условие $\Phi_{xx} > 0$ означает, что имеет место разлет газа с монотонным профилем скорости, асимптотическому режиму соответствует автомоделный режим разлета.

§ 3. Явные формулы для асимптотик (уравнение Кортевега — де Фриза)

Займемся теперь исследованием асимптотического поведения решений уравнения КдФ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Как было установлено в гл. I, решение уравнения

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x, t)\psi = k^2\psi \quad (1)$$

с асимптотикой $\psi = e^{ikx}$, $x \rightarrow \infty$ имеет на $-\infty$ по x асимптотику

$$\psi = a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-8ik^2t}e^{-ikx}. \quad (2)$$

При этом $\psi(k)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{\psi}(k)e^{ikx} = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}(k')}{a(k')} \frac{e^{8ik'st+ik'x}\psi(k')}{k' - k + i0} dk', \quad (3)$$

представляющему собой уравнение обратной задачи рассеяния.

При достаточно больших t и $u(x, t)$ всюду мало (мы снова рассматриваем бессолитонную ситуацию) и решение уравнения (1) локально будет мало отличаться от суммы экспонент. Будем поэтому, как и в § 1, искать $\psi(k, x, t)$ — решение уравнения (3) в виде

$$\psi(k, x, t) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx-8ik^2t}, \quad (4)$$

где A и B — медленные по сравнению с показателями

экспонент функции x, t . Подставим теперь (4) в (3):

$$\begin{aligned} \bar{A} + \bar{B} \exp(2ikx + 8ik^3t) = \\ = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}(k')}{a(k')} \frac{B(k') dk'}{k' - k + i0} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}(k')}{a(k')} \frac{A(k') \exp(2ik'x + 8ik'^3t)}{k' - k + i0} dk'. \end{aligned} \quad (5)$$

Устремим теперь b к ∞ , полагая $x = vt$, $v < 0$ и используя описанный в § 1 прием. Получим из (4) два соотношения:

$$\bar{B}(k) = \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} A(k) \theta(\xi^2 - k^2), \quad (6)$$

$$\bar{A}(k) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}(k')}{a(k')} \frac{B(k')}{k' - k + i0} dk', \quad (7)$$

где введено обозначение

$$v = -12\xi^2, \text{ т. е. } x = -12\xi^2 t. \quad (8)$$

Так же, как и в § 1, находим решение уравнений (6), (7):

$$A(\xi, k) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\infty}^{\infty} \frac{\theta(\xi^2 - k'^2) \ln |a(k')|}{k' - k - i0} dk' \right\}, \quad (9)$$

$$B(\xi, k) =$$

$$= \theta(\xi^2 - k^2) b(k) \exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(k'^2 - \xi^2) \ln |a(k')|}{k' - k + i0} dk' \right\}. \quad (10)$$

Решение (9), (10) справедливо при ξ^2 , не слишком близких к k^2 , т. е. в области, которая выше была названа асимптотической.

Обсудим поведение A, B в окрестности $k \sim \xi$. Положим

$$\xi - k = \lambda, \quad \lambda \ll k, \quad k > 0. \quad (11)$$

Из (9), (10) получаем

$$A(\xi, k) = \begin{cases} |a(k)| \lambda^{\frac{1}{\pi i} \ln |a(k)|} e^{i\Phi(k)}, & \lambda > 0, \\ |\lambda|^{\frac{1}{\pi i} \ln |a(k)|} e^{i\Phi(k)}, & \lambda < 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$B(\xi, k) = \theta(\lambda) b(k) \lambda^{-\frac{1}{\pi i} \ln |a(k)|} e^{i \arg a(k) - i\Phi(k)}, \quad (13)$$

где введено обозначение

$$\Phi(k) = \frac{1}{\pi} \ln |2k| \ln |a(k)| + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-k}^k \ln |k' - k| \frac{d}{dk'} \ln |a(k')| dk'. \quad (14)$$

Итак, как и в § 1, мы определили решение задачи (1) почти всюду, фактически не делая никаких предположений о поведении потенциала $u(x, t)$. Для определения же $\psi(k)$ в резонансной области необходимо такие предположения сделать. Используя мотивировку, изложенную во Введении, будем искать асимптотическое решение уравнения КдФ в «квазилинейном» виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} (\varphi(\xi) e^{-i16\xi^3 t} t^{i\alpha(\xi)} + \text{к. с.}), \quad (15)$$

где $\xi^2 = -x/12t$ (см. (8)). Единственное отличие (15) от асимптотического решения «линейного уравнения КдФ» $u_t + u_{xxx} = 0$ заключается в появлении в (15) множителя $t^{i\alpha(\xi)} = e^{i\alpha(\xi) \ln t}$, связанного, как мы знаем, с медленным убыванием нелинейной поправки к частоте.

Подставим потенциал $u(x, t)$ в форму (15) в уравнение (1) и перейдем в последнем от переменной x к ξ , связанной с x посредством (6). В переменных ξ (1) переписывается в виде

$$\frac{1}{(24t)^2} \frac{1}{\xi^2} \left(\psi_{\xi\xi\xi} - \frac{1}{\xi} \psi_{\xi\xi} \right) + k^2 \psi + \\ + \frac{1}{2\sqrt{t}} (\varphi(\xi) t^{i\alpha} e^{-16i\xi^3 t} + \text{к. с.}) \psi = 0. \quad (16)$$

Решение (16) в асимптотической области мы уже знаем, так что нас интересует поведение ψ лишь в непосредственной окрестности $\xi \sim k$, т. е., по терминологии предыду-

щего параграфа, в резонансной области. Подставляя (4) в (16) и предполагая, что в интересующей нас области A и B являются функциями $(\xi - k)t^{1/2}$, получим, отбрасывая малые члены и обозначая $\lambda = \xi - k$, систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{i}{6\sqrt{t}} \frac{dA}{d\lambda} + \varphi(k) t^{i\alpha(k)} e^{-2ik t \lambda^2} B &= 0, \\ \frac{i}{6\sqrt{t}} \frac{dB}{d\lambda} + \bar{\varphi}(k) t^{-i\alpha(k)} e^{2ik t \lambda^2} A &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Вводя обозначения

$$y = (48kt)^{1/2} \lambda, \quad \theta(k) = \sqrt{\frac{3}{4k}} \varphi(k) t^{i\alpha(k)}, \quad (18)$$

перепишем (17) в виде

$$\begin{aligned} -i \frac{dA}{dy} + \theta(k) e^{-i \frac{y^2}{2}} B &= 0, \\ i \frac{dB}{dy} + \bar{\theta}(k) e^{i \frac{y^2}{2}} A &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Решения системы (19), как мы уже знаем, выражаются через функции параболического цилиндра. Исключая из (19) B , получаем уравнение для A

$$\frac{d^2 A}{dy^2} + iy \frac{dA}{dy} - \nu A = 0, \quad (20)$$

а исключая A , находим уравнение для B

$$\frac{d^2 B}{dy^2} - iy \frac{dB}{dy} - \nu B = 0. \quad (21)$$

Здесь $\nu = |\theta(k)|^2$.

Решения уравнений (20), (21) имеют вид

$$\begin{aligned} A &= e^{-i \frac{y^2}{4}} [c_1 D_{i\nu-1}(\sqrt{i}y) + c_2 D_{i\nu-1}(-\sqrt{i}y)], \\ B &= e^{i \frac{y^2}{4}} \left[d_1 D_{-i\nu-1}\left(\frac{y}{\sqrt{i}}\right) + d_2 D_{-i\nu-1}\left(-\frac{y}{\sqrt{i}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Константы $c_{1,2}$ и $d_{1,2}$ однозначно определяются из сшивки

(22) с выражениями (12), (13):

$$c_1 = \frac{\Gamma(1 - i\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi\nu}{4}} (48kt)^{i\frac{\nu}{2}} e^{i\Phi(k)},$$

$$c_2 = \frac{\Gamma(1 - i\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi\nu}{4}} (48kt)^{i\frac{\nu}{2}} e^{i\Phi(k)} |a(k)|,$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{\Gamma(1 + i\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi\nu}{4}} (48kt)^{-i\frac{\nu}{2}} b(k) \times \\ \times \exp[i \arg a(k) - i\Phi(k)].$$

Сшивка определяет и значение $\nu(k) = |\theta(k)|^2$:

$$\nu(k) = \frac{1}{\pi} \ln |a(k)|. \quad (23)$$

Итак, мы нашли $\psi(x, t, k)$ в резонансной области. Фаза $\theta(k)$, определяющая как $\alpha(k)$, так и фазу $\varphi(k)$, находится из подстановки A и B (22) в любое из уравнений (19). Это дает

$$\bar{\theta}(k) = -\frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\Gamma(1 + i\nu)}{\sqrt{2\pi}} (48kt)^{-i\nu} \frac{b(k)}{|a(k)|^{1/2}} \times \\ \times \exp[i \arg a(k) - 2i\Phi(k)].$$

Легко проверить, что это выражение удовлетворяет (23).

Итак, в формуле (15), определяющей асимптотику $u(x, t)$, следует положить

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\pi} \ln |a(\xi)|,$$

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{\frac{2\xi}{3\pi}} \frac{\bar{b}(\xi)}{|a(\xi)|^{1/2}} \Gamma(1 - i\nu(\xi)) (48\xi)^{i\nu(\xi)} \times \\ \times \exp[-i \arg a(\xi) + 2i\Phi(\xi) + \pi i/4],$$

где $\nu(\xi)$ определено выражением (23), а $\Phi(\xi)$ дается (14). Тем самым полностью определен главный член асимптотики $u(x, t)$.

§ 4. Метод усреднения Уитема

До сих пор мы рассматривали решения уравнения Кортевега — де Фриза, соответствующие задачам, в которых возмущение в начальный момент времени достаточ-

но быстро убывает с увеличением x :

$$u \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Мы определили, в частности, число и амплитуды солитонов, на которые в пределе $t \rightarrow \infty$ распадается такое «локальное» начальное возмущение.

Существуют, однако, и задачи другого типа. Весьма интересным, например, является вопрос о том, что соответствует в бесстолкновительном случае ударной волне обычной гидродинамики. Как было показано Сагдеевым [13а], такая бесстолкновительная ударная волна имеет осциллирующий характер. Решенные до сих пор задачи не могут, однако, дать количественный ответ на этот вопрос. Действительно, заранее ясно, что асимптотически при $t \rightarrow \infty$ всякое локальное возмущение разойдется в стороны подобно тому, как оно затухло бы в обычной гидродинамике из-за вязкости. Среднее по периоду колебаний значение u в локальном возмущении с течением времени стремится к нулю. Для того чтобы исследовать структуру «ударного фронта» с помощью КдФ, необходимо рассмотреть задачи, в которых возмущение при всех t поддерживается соответствующими граничными условиями при $|x| \rightarrow \infty$. Иными словами, такие задачи, в которых в обычной гидродинамике существует ударная волна не убывающей с течением времени интенсивности.

Мы изложим здесь решение двух из этих проблем [5]. Во-первых, рассмотрим задачу, в которой в начальный момент величина u испытывает в точке $x = 0$ конечный скачок. В гидродинамике в этом случае образовалась бы ударная волна постоянной интенсивности. Во-вторых, мы рассмотрим ситуацию вблизи точки «опрокидывания» профиля простой волны. (Точная постановка этой задачи будет сформулирована ниже.) В гидродинамике за этой точкой образуется ударная волна, интенсивность которой возрастает с течением времени.

Качественно картина решения имеет одинаковый характер в обоих случаях. При любом $t \gg 1$ имеется конечная область в пространстве, занимаемая колебаниями. Справа и слева от нее решение является гладким. Ударного фронта определенной ширины не образуется. Возникающая область колебаний автомодельно расширяется со временем. Она ограничена слабыми разрывами, причем

слабый разрыв на переднем фронте такой бесстолкновительной ударной волны носит сингулярный характер *).

Мы будем строить решение при больших t , когда длина осциллирующей области много больше характерной длины волны осцилляций. В этом случае естественно воспользоваться весьма эффективным квазиклассическим методом Уитема [15]. В пределе $t \rightarrow \infty$ полученное таким образом решение будет асимптотически точным.

В целях упрощения формул в этом параграфе мы несколько изменим обозначения, использовавшиеся в предыдущих разделах. Уравнение Кортевега — де Фриза мы будем теперь записывать как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

т. е. устраним множитель 6, что всегда можно сделать тривиальным масштабным преобразованием.

Стационарное бегущее решение уравнения (1) мы будем выражать теперь не через эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp$, а через связанную с ней эллиптическую функцию Якоби $dn(y, s)$. Это решение будет иметь тогда вид

$$u(x, t) = \frac{2a}{s^2} dn^2 \left[\left(\frac{a}{6s^2} \right)^{1/2} (x - Vt), s \right] + \gamma, \quad (2)$$

где s — модуль функции Якоби, $0 \leq s \leq 1$. Параметры a , s и γ являются произвольными постоянными, причем a определяет амплитуду колебаний:

$$2a = u_{\max} - u_{\min}.$$

Скорость V волны равна

$$V = 2a \frac{2 - s^2}{3s^2} + \gamma. \quad (3)$$

Согласно свойствам эллиптических функций, волновой вектор волны, связанный с длиной волны λ обычным соотношением $k = 2\pi/\lambda$, есть

$$k = \frac{\pi}{K(s)} \left(\frac{a}{6s^2} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Среднее же по периоду значение колеблющейся величини

*) Надо иметь в виду, что наличие сингулярности есть следствие используемого здесь приближенного метода: в точном решении КдФ сингулярностей нет.

ны u , как легко проверить, есть

$$\bar{u} = \gamma + \frac{2aE(s)}{s^2K(s)}, \quad (5)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Рассмотрим теперь слегка нестационарные (квазистационарные) волны. Они описываются по-прежнему формулой (2). Параметры a , s и γ (а следовательно, и V , k и u), однако, являются теперь медленно меняющимися функциями x и t . Подставляя (2) в (1) и усредняя по периоду колебаний, можно получить уравнения для усредненных величин. Такие уравнения были выведены Уитемом [15]. Их удобно записать, введя три новых функции, связанные с a , s и γ соотношениями

$$a = r_2 - r_1, \quad s^2 = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}, \quad \gamma = r_2 + r_1 - r_3. \quad (6)$$

При этом

$$r_3 \geq r_2 \geq r_1. \quad (7)$$

Уравнения для r_α имеют вид

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial x} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (8)$$

(В этой формуле и везде ниже отсутствует суммирование по α !)

Три «групповые скорости» v_α равны

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - \frac{2}{3}(r_2 - r_1) \frac{K(s)}{K(s) - E(s)}, \\ v_2 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - \frac{2}{3}(r_2 - r_1) \frac{(1 - s^2)K(s)}{E(s) - (1 - s^2)K(s)}, \\ v_3 &= \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} + \frac{2}{3}(r_3 - r_1) \frac{(1 - s^2)K(s)}{E(s)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$v_1 \geq v_2 \geq v_3.$$

Заметим также, что скорость V , а также максимальное и минимальное значения величины u волны выражаются через r_α следующим образом:

$$V = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3),$$

$$u_{\max} = r_3 + r_2 - r_1, \quad u_{\min} = r_3 + r_1 - r_2.$$

Уравнение Кортевега — де Фриза (1) инвариантно относительно преобразований

$$u = Cu, \quad x \rightarrow \frac{x}{C^{1/2}}, \quad t \rightarrow \frac{t}{C^{3/2}}, \quad (10)$$

где C — произвольная постоянная и

$$x \rightarrow x + Ct, \quad u \rightarrow u + C. \quad (11)$$

Усредненные же уравнения (8) инвариантны еще и относительно преобразования

$$x \rightarrow Cx, \quad t \rightarrow Ct. \quad (12)$$

Отметим, что такой инвариантностью обладают и уравнения обычной гидродинамики невязкой жидкости.

Выпишем для справок приближенные формулы для функций $K(s)$ и $E(s)$ при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow 1$:

$$K(s) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{s^2}{4} + \frac{9}{64} s^4 + \dots \right),$$

$$E(s) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{s^2}{4} - \frac{3}{64} s^4 + \dots \right), \quad s \ll 1;$$

(13)

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-s^2},$$

$$E(s) \approx 1 + \frac{1}{4} (1-s^2) \left(\ln \frac{16}{1-s^2} - 1 \right), \quad (1-s^2) \ll 1.$$

Как отмечалось выше, параметр r_2 может меняться от r_1 до r_3 . Поэтому естественно считать, что область, занятая осцилляциями, ограничена с одной стороны точкой $x^-(t)$, в которой $r_2 = r_1$. В этой точке обращаются в нуль амплитуда a и параметр s . С другой стороны область осцилляций ограничена точкой $x^+(t)$, в которой $r_2 = r_3$, так что $s = 1$ и согласно (4) волновой вектор k обращается в нуль. В обеих рассмотренных нами задачах $x^+ > x^-$, поэтому мы будем называть точку с $a = 0, s = 0$ задним фронтом, а с $s = 1$ — передним. Это соответствует обычной картине, когда солитоны большей амплитуды движутся с большей скоростью *).

*) В работе [156] предполагалось существование сильных разрывов в решении усредненных уравнений (8), аналогичных ударным волнам в обычной гидродинамике. Наш анализ показывает, что в действительности таких разрывов не возникает — по крайней мере в задачах рассматриваемого типа.

Распад начального разрыва. При распаде малого разрыва в гидродинамике образуются две волны — волна сжатия и волна разрежения, — движущиеся в противоположных направлениях со скоростями, близкими к скорости звука (рис. 15). Эти волны расходятся очень быстро.



Рис. 15. Образование волны сжатия и волны разрежения при распаде начального разрыва.

Поэтому их дальнейшую эволюцию можно рассматривать по отдельности с помощью КдФ. При этом можно считать, что в начальный момент величина u испытывает конечный скачок:

$$u = \begin{cases} u^-, & x < 0, \\ u^+, & x > 0, \end{cases} \quad t = 0.$$

Для волны сжатия $u^- > u^+$; для волны разрежения, напротив, $u^- < u^+$.

Рассмотрим вначале волну сжатия. Заметим, что в обычной вязкой гидродинамике такая волна описывается уравнением Бюргерса. Она представляет собой слабую ударную волну со стационарным фронтом. Таким образом, рассматриваемая здесь волна сжатия в дисперсионной гидродинамике соответствует ударной волне в обычной вязкой гидродинамике.

Заметим, что с помощью преобразований (11), (12) начальные условия для волны сжатия всегда можно привести к виду

$$u = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad t = 0. \quad (14)$$

При небольших значениях t нелинейный член в уравнении (1) несуществен и им можно пренебречь. Решение

линеаризованного $K_{дФ}$ имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_1) G(x - x_1, t) dt,$$

$$G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(3t)^{1/3}} \Phi\left(\frac{\xi}{(3t)^{1/3}}\right), \quad (15)$$

где $\Phi(z)$ — функция Эйри:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} + kz\right) dk.$$

Подставляя сюда начальное распределение $u_0(x)$ в виде (14), находим

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(3t)^{1/3}}^{\infty} \Phi(z) dz. \quad (16)$$

Эта функция представлена на рис. 16. Первый максимум расположен в точке $z = x/(3t)^{1/3} = -2,45$, его высота $u_{\max}^{(1)} = 1,28$; первый минимум — в точке $z = -4,19$; $u_{\min}^{(1)} = 0,81$; второй максимум и минимум $u_{\max}^{(2)} = 1,16$, $u_{\min}^{(2)} = 0,86$ в точках $z = -5,58$ и $-6,89$. Асимптотический скири больших отрицательных значениях $x/(3t)^{1/3}$

$n(x, t) =$

$$= 1 - \frac{1}{z^{3/4}} \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Видно, что вблизи разрыва возникают осцилляции. Их амплитуда растет при приближении к разрыву. Область, занятая осцилляциями, автономно растягивается со временем. При этом роль дисперсионных эффектов ослабляется и все более существенной становится роль нелинейности. Сопоставляя дисперсионный и нелинейный члены в уравнении (1), находим условие применимости линейного решения (16) в виде

$$t \ll 1.$$

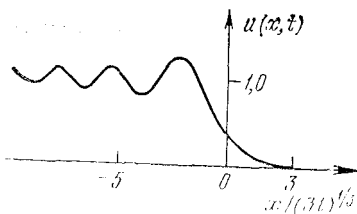


Рис. 16. Линейная стадия распада начального разрыва.

Отсюда ясно, что при больших $t \gg 1$ определяющее влияние на структуру волны всегда оказывает нелинейность.

При больших $t \gg 1$ будем искать асимптотическое решение уравнения (1) в виде квазистационарной волны (2), (6). Тогда для усредненных уравнений (9) начальное условие (14) нужно наложить на $\bar{u}$, а амплитуду a следует считать нулем при $t = 0$. Важно, что в силу инвариантности (12) решение уравнений (9) при начальных условиях (14) должно носить автомодельный характер, т. е. зависеть только от отношения

$$\tau = x/t. \quad (17)$$

Таким образом, можно считать, что

$$r_\alpha = r_\alpha(\tau). \quad (18)$$

Граничные условия в переменных τ , согласно описанной выше общей картине, должны иметь следующий вид. На «переднем фронте» области колебаний при некотором $\tau = \tau^+$ должно выполняться равенство

$$s(\tau^+) = 1,$$

т. е.

$$r_3(\tau^+) = r_2(\tau^+) \equiv r^+. \quad (19)$$

В силу же непрерывности величины $\bar{u}(\tau)$ должно быть

$$\bar{u}(\tau^+) = 0. \quad (20)$$

Далее, при $\tau > \tau^+$ просто $r_\alpha = 0$. На заднем фронте при некотором $\tau = \tau^-$ амплитуда $a = 0$, так что

$$\begin{aligned} r_2(\tau^-) &= r_1(\tau^-) = r^-, \\ \bar{u}(\tau^-) &= 1. \end{aligned} \quad (21)$$

При $\tau < \tau^-$ $a = 0$, $\bar{u} = 1$.

Подставляя (18) в (8), получаем

$$\frac{dr_\alpha}{d\tau}(v_\alpha - \tau) = 0. \quad (22)$$

Легко сообразить, что осмысленное решение получится, лишь если приравнять нулю выражение в круглых скобках в одном из уравнений (22), а в двух других считать $r_\alpha = \text{const}$. Очевидно, что граничные условия (19) и (20) можно выполнить, только если r_2 зависит от τ . Поэтому

интересующее нас решение имеет вид

$$v_2(\tau) = \tau, \quad (23)$$

$$r_3 = \text{const}, \quad r_1 = \text{const}.$$

Заметим прежде всего, что при $a \rightarrow 0$, учитывая, что $a/s^2 = r_3 - r_1$, из (5) получим

$$\bar{u} = r_3. \quad (24)$$

Тогда согласно (21)

$$r_3 = 1.$$

На переднем же фронте при $s \rightarrow 1$ имеем

$$\bar{u} = r_1, \quad (25)$$

так что

$$r_1 = 0, \quad s^2 = r_2.$$

В результате

$$a = s^2, \quad V = (1 + s^2)/3, \quad \gamma = -(1 - s^2), \quad (26)$$

а формула (23) переписывается в виде

$$\frac{1 + s^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{s^2(1 - s^2) K(s)}{E(s) - (1 - s^2) K(s)} = \frac{x}{t}. \quad (27)$$

Формулы (26), (27) вместе с (2) полностью решают поставленную задачу. Подчеркнем, что сама величина $u(x, t)$ определяется формулой (2) и зависит, разумеется, не только от отношения x/t (только от x/t зависят медленные величины r_α).

Исследуем специально поведение решения вблизи переднего и заднего фронтов.

На заднем фронте, при $a \rightarrow 0$, используя формулы (13), легко находим

$$-1 + \frac{3}{2} s^2 = \tau$$

или

$$\tau^- = -1, \quad a = s^2 \approx \frac{2}{3} \tau' \quad (28)$$

$$(\tau = \tau^- + \tau' = -1 + \tau'),$$

так что амплитуда обращается в нуль по линейному закону при стремлении τ к τ^- .

На переднем фронте, при $s \rightarrow 1$, вместо (28) получаем

$$\frac{2}{3} - \frac{1 - s^2}{3} \ln \frac{16}{1 - s^2} \approx \tau.$$

Отсюда находим

$$\tau^+ = 2/3.$$

Закон обращения $1 - s^2$ в нуль имеет вид

$$(1 - s^2) \ln \frac{16}{1 - s^2} = 3 |\tau''|, \quad (29)$$

где $\tau = \tau^+ + \tau''$, $\tau'' < 0$, или с логарифмической точностью

$$1 - s^2 \approx \frac{3 |\tau''|}{\ln (1/|\tau''|)}.$$

Из (4) видно, что при $s \rightarrow 1$ волновой вектор k обращается в нуль по закону

$$k \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \frac{1}{\ln (1/|\tau''|)}. \quad (30)$$

Наконец, среднее значение $\bar{u}$ ведет себя при $s \rightarrow 1$ как

$$\bar{u} = \frac{4}{\ln (1/|\tau''|)}. \quad (31)$$

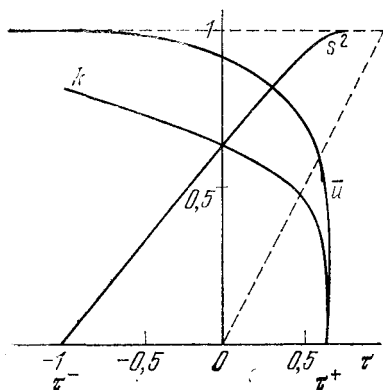


Рис. 17. Зависимость от $\tau = x/t$ усредненных величин при распаде начального разрыва.

Функция $\bar{u}(\tau)$ имеет при $\tau = \tau^+$ бесконечную производную и испытывает в этой точке слабый разрыв — разрыв производной $d\bar{u}/d\tau$. Важно, что этот разрыв движется со сверхзвуковой скоростью (так как $\tau^+ = 2/3$, а скорости звука соответствует $\tau = 0$). Мы будем называть его сингулярным разрывом *).

На рис. 17 построены графики величин $\bar{u}$, $a = s^2$ и волнового вектора k согласно формулам (26), (27).

На рис. 18 представлены значения неусредненной величины $u(x, t)$ при $t = 50, 100$. Видно, что область занятия осцилляциями быстро увеличивается со временем. На переднем фронте волны постепенно выделяются солитоны,

*) См. сноску на стр. 263.

расстояние между ними логарифмически растет со временем (см. (30)). Это видно из рис. 19, где показан передний фронт волны при $t = 100, 1000$ и $10\,000$ *).

В заключение заметим, что переход от единичного скачка (14) к скачку с произвольным u^- согласно (10)

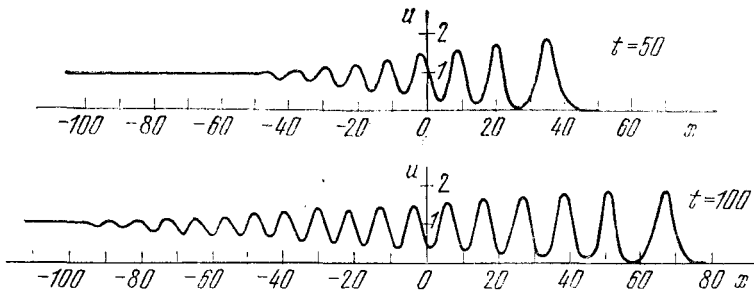


Рис. 18. Бесстолкновительная ударная волна при распаде начального разрыва.

достигается умножением в полученном решении значений u на u^- и одновременным делением значений x на $u^{1/2}_-$ и значений t на $u^{3/2}_-$. Значения τ при этом умножаются на u^- . Например, для скачка с $u^- = 2$ графики на рис. 18 соответствуют теперь $t = 17,7$ и $35,4$.

Остановимся теперь кратко на эволюции волны разрежения, т. е. разрыва другого знака, с $u^- < u^+$ (не умаляя общности, можно положить $u^- = -1/2$, $u^+ = 1/2$). Ясно, что решением вида (27) описать такой скачок нельзя, так как $r_2 > r_1$ и из (24), (25) сразу следует, что $u^- > u^+$. Уравнения (8) имеют тогда, однако, тривиальное решение

) При вычислении по формулам (2) и (27) на переднем фронте, т. е. при $\tau = \tau^$, $u = 2$, однако форма первого горба искажена, его передняя половина «срезана». Более детальное исследование показывает, что на переднем фронте колебания имеют форму солитонов. Поэтому на графиках передний горб построен как солитон с амплитудой $2a = 2$. Отмеченное обстоятельство связано с недостаточной точностью формулы (27): асимптотический характер теории не позволяет установить точную фазу волны при не слишком больших значениях t . Поэтому вся картина, представленная на рис. 18 и 19, может сдвинуться на расстояние порядка ширины солитона. (То же относится и к рис. 26, см. стр. 284.)

без осцилляций:

$$u = \bar{u} = \begin{cases} -1/2, & \tau < -1/2, \\ \tau, & -1/2 < \tau < 1/2, \\ 1/2, & \tau > 1/2. \end{cases} \quad (32)$$

Это решение имеет два слабых разрыва при $\tau = -1/2$ и $\tau = 1/2$ и соответствует пренебрежению дисперсией, т. е. членом с

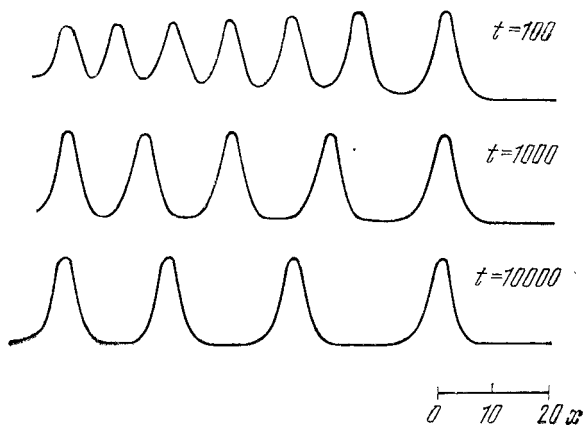


Рис. 19. Образование солитонов на фронте бесстолкновительной ударной волны при распаде начального разрыва.

третьей производной в (1). С учетом дисперсии эти слабые разрывы размываются, вообще говоря, осциллирующим образом (рис. 20). При больших t можно рассматривать разрывы по отдельности. Для нахождения структуры левого разрыва, который мы будем называть «разрывом типа А», требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u \rightarrow -1/2 \text{ при } x \rightarrow -\infty \text{ и } u \rightarrow x/t \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Правый разрыв — «разрыв типа В» описывается граничными условиями $u \rightarrow x/t$ при $x \rightarrow -\infty$ и $u \rightarrow 1/2$ при $x \rightarrow \infty$. Этим граничным условиям соответствуют автомодельные решения вида

$$u = \frac{1}{(3t)^{2/3}} \psi(z) - \frac{1}{2}, \quad z = \frac{x + t/2}{(3t)^{1/3}},$$

для разрыва типа A , причем $\psi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ и $\psi \rightarrow 3z$ при $z \rightarrow \infty$. Для разрыва типа B

$$u = \frac{1}{(3t)^{2/3}} \psi(z) + \frac{1}{2}, \quad z = \frac{x - t/2}{(3t)^{1/3}},$$

причем $\psi \rightarrow 3z$ при $z \rightarrow -\infty$ и $\psi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Функция $\psi(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению *)

$$\psi''(z) + (\psi - z)\psi' - 2\psi = 0. \quad (33)$$

Отметим то нетривиальное обстоятельство, что, несмотря

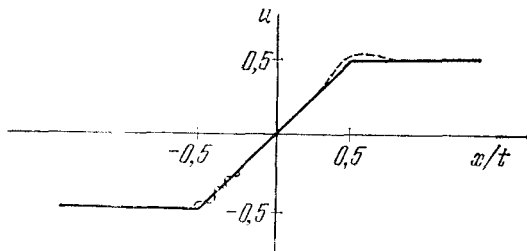


Рис. 20. Структура волны разрежения.

на слабость разрыва, для его структуры существенны и нелинейные члены в уравнениях (1) или (33).

Решение уравнения (33) при выписанных граничных условиях производилось численно. Структура разрыва типа A показана на рис. 21, а; типа B — на рис. 21, б. Отметим, что в первом случае она носит осциллирующий, а во втором — монотонный характер. Осциллирующий член в разрыве типа A при больших z убывает по закону

$$\frac{1}{z^{1/2}} \cos [(2z)^{2/3}/3].$$

(Асимптотическое значение $\psi = 3z$ показано на рис. 21 штриховой линией.) Заметим, что ширина разрыва оказывается порядка $t^{1/3}$. Поскольку, однако, вся картина «волны разрежения» расширяется согласно (32) пропор-

*) Автомодельные решения уравнения (1) используемого здесь вида рассматривались и ранее, однако, без связи с задачей о слабом разрыве, а потому при других граничных условиях.

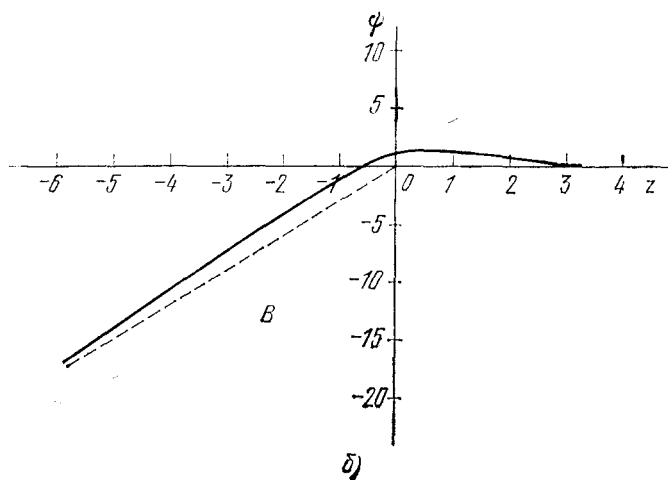
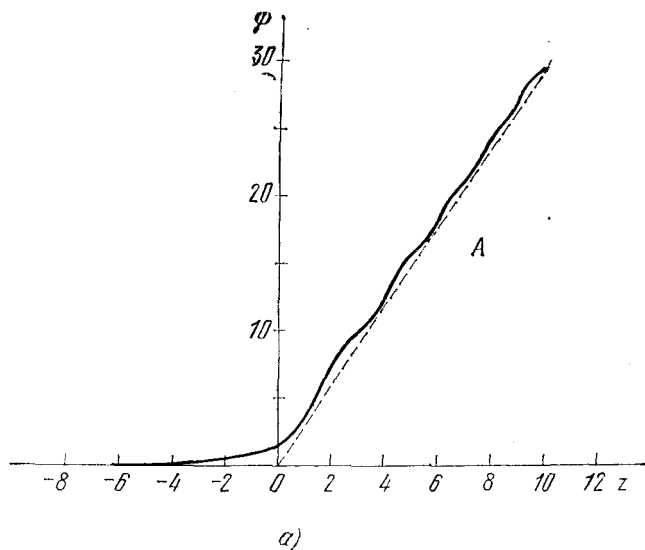


Рис. 21. Слабый разрыв типа A (a) и типа B (б).

ционально t , относительная ширина разрыва уменьшается с течением времени.

Укажем, что в обычной — диссипативной — гидродинамике структуру слабого разрыва в вязкой жидкости можно найти аналитически. В этом случае задача сводится к построению некоторого решения уравнения Бюргерса определенного автомодельного вида.

Таким образом, в случае волны разрежения картина решения в дисперсионной гидродинамике, в общем, подобна решению в обычной гидродинамике. С другой стороны, в случае волны сжатия дисперсионная гидродинамика приводит к существенно новым явлениям. Вместо сильного разрыва со стационарным фронтом здесь возникает автомодельно расплывающаяся область осцилляций. Иначе говоря, благодаря генерации колебаний фронт бездиссипативной ударной волны быстро расплывается.

Возникновение осцилляций вблизи точки опрокидывания фронта. Рассмотрев возникновение бесстолкновительной ударной волны в сравнительно простом случае начального разрыва плотности, мы перейдем теперь к решению более трудной задачи — исследованию явлений вблизи точки «опрокидывания фронта».

Как известно, в гидродинамике идеальной жидкости нелинейные эффекты приводят к укручению фронта распространяющихся в среде возмущений. Это приводит к тому, что в некоторый момент времени возникает точка, в которой производная, скажем, от плотности по координате обращается в бесконечность — фронт «опрокидывается».

В обычной гидродинамике после опрокидывания возникает ударная волна. В дисперсионной гидродинамике вблизи точки опрокидывания становится существенной дисперсия, а после опрокидывания возникает область, заполненная колебаниями. Если рассматривать достаточно большое время, прошедшее с момента опрокидывания, так что число колебаний уже велико, то для описания процесса можно воспользоваться усредненными уравнениями (8). Эти уравнения справедливы внутри области, заполненной колебаниями. Возникает поэтому вопрос о граничных условиях, которым должны удовлетворять функции r_α на границах этой области. Мы уже говорили, что на переднем фронте области колебаний должно выполняться равенство $r_2 = r_3$, а на заднем $r_2 = r_1$. Такие точки, однако, как мы

увидим, являются особыми для решений системы (8) и для эффективного использования этих граничных условий необходимо выяснить вид решения вблизи этих точек.

Рассмотрим сначала передний фронт. Пусть $r_2 = r_3 \equiv r^+(t)$ в некоторой точке $x = x^+(t)$. Используя выражения (9), легко проверить, что при $r_2 = r_3$ совпадают также скорости v_2 и v_3 : $v_2^+ = v_3^+ \equiv v^+ = (r_1^+ + 2r^+)/3$. Из уравнений (8) следует тогда, что

$$dx^+/dt = v^+ = (r_1^+ + 2r^+)/2. \quad (34)$$

Положим

$$r_2 = r^+ + \delta r_2, \quad r_3 = r^+ + \delta r_3, \quad x = x^+ + x'',$$

где δr_2 , δr_3 и x'' — малые вблизи переднего фронта величины. Легко проверить перебором всех возможных случаев, что вблизи фронта

$$|\delta r_2 - \delta r_3| \gg |\delta r_2 + \delta r_3|, \quad |r_1 - r_1^+| (r_1^+ = r_1(x^+, t)),$$

так что наиболее быстро меняющейся величиной является параметр s . Уравнение для δr_2 имеет вид

$$(v^+ - v_2) \left(\frac{\partial \delta r_2}{\partial x'} \right)_t = \left(\frac{\partial r^+}{\partial t} \right)_{x=x^+}$$

и аналогично для δr_3 . Используя разложение эллиптических интегралов при $s \rightarrow 1$, находим для групповых скоростей

$$v_{2,3} \approx v^+ \mp (r^+ - r_1^+) \frac{\frac{s'^2}{2} L}{1 \mp \frac{s'^2}{4} L},$$

где $s'^2 = 1 - s^2$ и $L = \ln[16/(1 - s^2)]$.

Вычитая теперь уравнение для δr_2 из уравнения для δr_3 , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x''} (1 - s^2) = - \frac{3}{r_3^+ - r_1^+} \left(\frac{\partial r_3^+}{\partial t} \right)_{x=x^+} \frac{1}{(1 - s^2) \ln \frac{16}{1 - s^2}}.$$

Решение этого уравнения определяет закон обращения s в единицу и, следовательно, длины волны колебаний в бесконечность вблизи переднего фронта области осцилля-

ций

$$(1 - s^2)^2 \left(\ln \frac{16}{1 - s^2} + \frac{1}{2} \right) = - \frac{6}{(r_3^+ - r_1^+)^2} \left(\frac{\partial r_3^+}{\partial t} \right)_{x''=0} x''. \quad (35)$$

Из (35) следует, что при $x'' \rightarrow 0$ волновой вектор k обращается в нуль пропорционально $(\ln |x''|)^{-1}$, как и в рассмотренном выше особом случае распада начального разрыва. Легко проверить, что среднее значение $\bar{u}$ стремится при $x'' \rightarrow 0$ к своему предельному значению также по закону $(\ln |x'|)^{-1}$. Поэтому на переднем фронте $\bar{u}(x)$ и в общем случае имеет особенность с бесконечной производной.

Вполне аналогичные вычисления можно произвести для заднего фронта. И здесь, отмечая значения всех величин на заднем фронте при $x = x^-$ знаком «—», имеем

$$r_1^- = r_2^- \equiv r^-, \quad v_1^- = v_2^- \equiv v^- = 2r_1^- - r_3^-, \quad \frac{dx^-}{dt} = v^-. \quad (36)$$

Параметр s снова является наиболее быстро меняющейся величиной и закон его обращения в нуль определяется формулой

$$s^2 = \frac{2}{r_3^- - r_2^-} \left| \left(\frac{\partial r_2^-}{\partial t} \right)_{x'=0} x' \right|^{1/2}, \quad x' = x - x^-. \quad (37)$$

Из этой формулы видно, в частности, что амплитуда колебаний a обращается в общем случае в нуль по корневому закону $a \propto \sqrt{|x'|}$. (В этом пункте имеется отличие от специального случая распада начального разрыва. Напомним, что там амплитуда обращалась в нуль линейно.) Среднее же значение $\bar{u}$ стремится к предельному значению линейно.

Выражения (34) и (36) должны использоваться в качестве естественных граничных условий к уравнениям (8) в задачах, где колебания занимают ограниченную область пространства.

Мы можем вернуться теперь к исследованию осцилляционной структуры, возникающей в дисперсионной гидродинамике после «опрокидывания фронта» некоторого возмущения.

Рассмотрим некоторое возмущение, начальный размер которого очень велик, $R_0 \gg 1$. Тогда вначале в уравнении (1) можно пренебречь дисперсией. Нелинейные эффекты с течением времени приведут к увеличению крутизны фронта возмущения, так что в некоторый момент времени $t = 0$ производная $\partial u / \partial x$ обратится в бесконечность

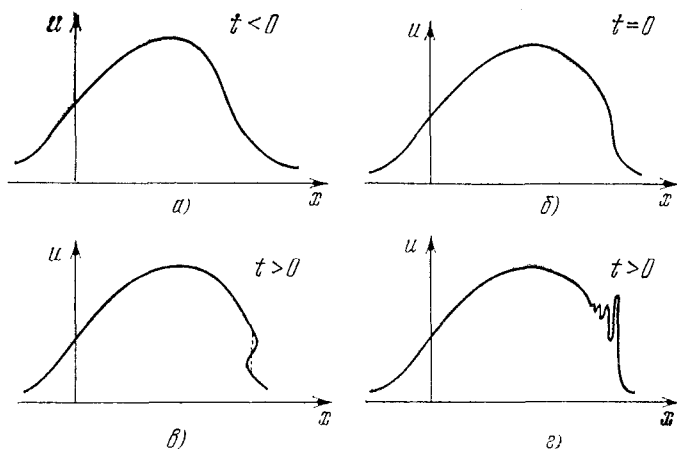


Рис. 22. Опрокидывание фронта при эволюции начального возмущения.

(рис. 22, а, б). В этот момент, как говорят, происходит «опрокидывание фронта»; при дальнейшем увеличении t решение, полученное при пренебрежении дисперсией, формально делается трехзначным (рис. 22, в). В уравнении же (1) вблизи точки опрокидывания становится существенной дисперсия и после опрокидывания образуется расширяющаяся область, заполненная колебаниями (рис. 22, г).

Для описания явлений вблизи точки опрокидывания заметим прежде всего, что после пренебрежения дисперсией, т. е. членом с третьей производной, уравнение (1) можно записать как

$$\frac{\partial u / \partial t}{\partial u / \partial x} = - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_u = -u,$$

так что общее решение имеет вид

$$x = ut + P(u),$$

где $P(u)$ — произвольная функция. В момент опрокидывания, когда точка, в которой

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_t = 0, \quad (38)$$

впервые появляется, в этой точке должно быть еще

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_t = 0, \quad (39)$$

причем выбором начала отсчета t , x и u всегда можно до-

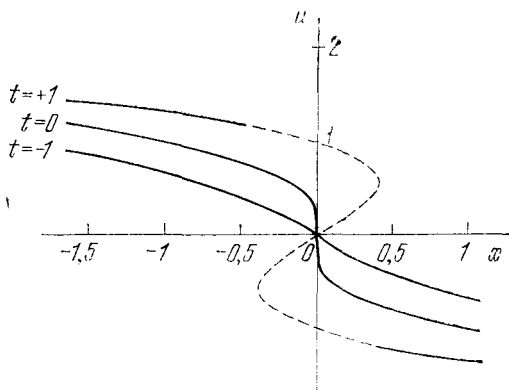


Рис. 23. Начальная автомоделная стадия опрокидывания фронта.

биться того, что в этой точке $t = x = u = 0$. Разлагая $P(u)$ по u и учитывая (38), (39), находим, что

$$P(u) \approx -\mu u^3,$$

причем с помощью преобразования (10) всегда можно сделать μ равным единице *).

Окончательно решение вблизи точки опрокидывания (и незадолго до момента опрокидывания) описывается формулой

$$x = ut - u^3. \quad (40)$$

Оно показано на рис. 23. При $t > 0$ решение делается неоднозначным (штриховая кривая). В действительности при

*) Чтобы вернуться к случаю $\mu \neq 1$, достаточно в окончательном результате умножить значения u на $\mu^{-2/3}$, значения x на $\mu^{1/3}$ и значения t на $\mu^{3/3}$. Значения z при этом умножаются на $\mu^{-1/2}$.

$t > 0$ возникают колебания. Мы опять предположим, что они занимают конечную область пространства. В этой области решение описывается уравнениями (8). Вне этой области по-прежнему справедливо (40), так что u имеет там вид

$$u = t^{1/2} \theta(z), \quad z = x/t^{3/2}, \quad (41)$$

где θ определяется уравнением

$$z = \theta - \theta^3. \quad (42)$$

Чтобы сшить решения (8) и (42) на границе области колебаний, нужно положить *)

$$r_\alpha = t^{1/2} l_\alpha(x/t^{3/2}) = t^{1/2} l_\alpha(z). \quad (43)$$

Таким образом, в этом случае область, занимаемая колебаниями, расширяется $\propto t^{3/2}$, а амплитуда колебаний возрастает при заданном z как $t^{1/2}$. Подставляя (43) в (8), получаем для l_α систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dl_\alpha}{dz} = \frac{l_\alpha}{3z - w_\alpha}, \quad (44)$$

где $w_\alpha = v_\alpha/t^{1/2}$, так что w_α выражаются через l_α теми же формулами (9), которыми выражаются v_α через r_α . Систему уравнений (44), разумеется, нельзя решить в квадратурах. Используя полученные выше формулы (34) и (35), легко, однако, выяснить поведение решения вблизи переднего и заднего фронтов.

Пусть, например, переднему фронту соответствует значение $z = z^+$. Из условия $dx^+/dt = v^+$ следует тогда, что

$$z^+ = \frac{4}{9} l_3^+ + \frac{2}{9} l_1^+. \quad (45)$$

С другой стороны, при $z = z^+$ условие непрерывности с учетом формулы (25) дает

$$z^+ = l_1^+ [1 - (l_1^+)^2]. \quad (46)$$

При этом надлежит выбирать значения $l_1^+ < 0$, так как решение должно сшиваться с той ветвью функции $\theta(z)$,

*) В общем случае уравнения (8) имеют автомодельные решения вида $r_\alpha = t^\gamma l_\alpha(x/t^{1+\gamma})$ с произвольным показателем γ .

которая уходит на $z = +\infty$ (рис. 24). При $z = z^+$ имеем

$$\left(\frac{\partial r_3^+}{\partial t}\right)_{x''=0} = \left(\frac{\partial r_3}{\partial t}\right)_{z=z^+} = \frac{1}{2} \frac{r_3^+}{t},$$

так что из формулы (34) прямо следует поведение решения вблизи переднего фронта:

$$(1-s^2)^2 \left(\ln \frac{16}{1-s^2} + \frac{1}{2} \right) \approx - \frac{6l_3^+ z''}{(l_3^+ - l_1^+)^2},$$

$$z'' = z - z^+ < 0, \quad l_3^+ > 0. \quad (47)$$

Разумеется, свойства переднего фронта в рассматриваемом

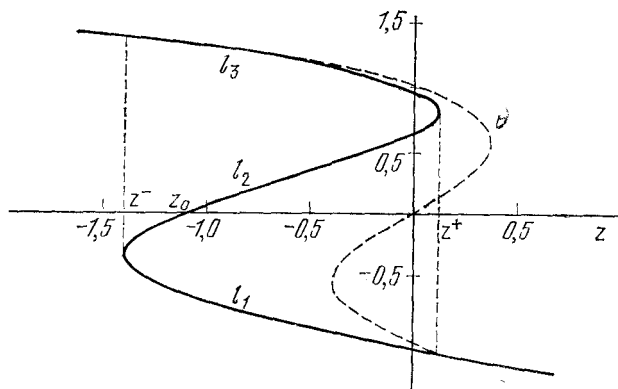


Рис. 24. Зависимость от $z = x/t^{3/2}$ параметров Уитема при опрокидывании фронта.

частном случае оказываются теми же, что и в общем случае, о чем было сказано выше.

Аналогично, вблизи заднего фронта имеем из условия движения фронта со скоростью $v_1^- = v_1^+ = v^-$:

$$z^- = \frac{4}{3} l_1^- - \frac{2}{3} l_3^-. \quad (48)$$

Из условия непрерывности решения следует, что

$$z^- = l_3^- [1 - (l_3^-)^2], \quad l_3^- < 0. \quad (49)$$

Наконец, вид решения вблизи заднего фронта следует сразу из (36)

$$s^2 = \frac{2 |l_1^- z'|^{1/2}}{l_3^- - l_1^-}, \quad z' = z - z^- > 0. \quad (50)$$

Решение уравнений (44) для определения значений l_α во всей области колебаний производилось численно. Результаты представлены на рис. 24. Мы видим, что при всех значениях z параметры $l_3 > 0$, $l_1 < 0$. Параметр же l_2 меняет знак в некоторой точке z_0 . Эта точка является особой. Действительно, из уравнения для l_2 видно, что эта величина может обращаться в нуль только там, где обращается в нуль знаменатель $3z - 2w_2$. Легко показать, однако, что особенность в точке z_0 относительно слабая. В ней непрерывны не только величины l_α , но и их первые производные. Тем не менее, наличие такой особенности существенно: только благодаря ей оказывается возможным удовлетворить граничным условиям. Дело в том, что на решение наложены четыре граничных условия (45), (46) и (48), (49). Между тем общее решение системы (44) содержит только три произвольные постоянные. Недостающая постоянная добавляется благодаря наличию особой точки z_0 . Чтобы понять, как это происходит, будем строить решение с двух сторон — из неизвестных заранее точек z^- и z^+ . После удовлетворения условий (45), (46) и (48), (49) в нашем распоряжении останутся две произвольные постоянные, в качестве которых можно выбрать, например, значения l_3^- и l_1^+ . Распорядимся одной из них так, чтобы обращение l_2 в нуль с двух сторон происходило в одной и той же точке z_0 . Вторую же постоянную подберем так, чтобы при $z = z_0$ была непрерывна величина l_3 . Тогда непрерывность l_1 будет обеспечена автоматически благодаря тому, что

$$3z_0 = 2w_2 \text{ при } z = z_0.$$

Решение фактически строилось именно таким способом.

Следует отметить любопытное сходство между графиком $l_\alpha(z)$ и формальным трехзначным решением уравнения (42). (График трехзначной функции $\theta(z)$ показан на рис. 24 штриховой линией.) Таким образом, существование реше-

ний с колебаниями тесно связано с наличием области неоднозначности в решении уравнения без дисперсии.

Графики рис. 24 вместе с формулами (2), (6) и (41) решают поставленную задачу определения $u(x, t)$ при опрокидывании фронта.

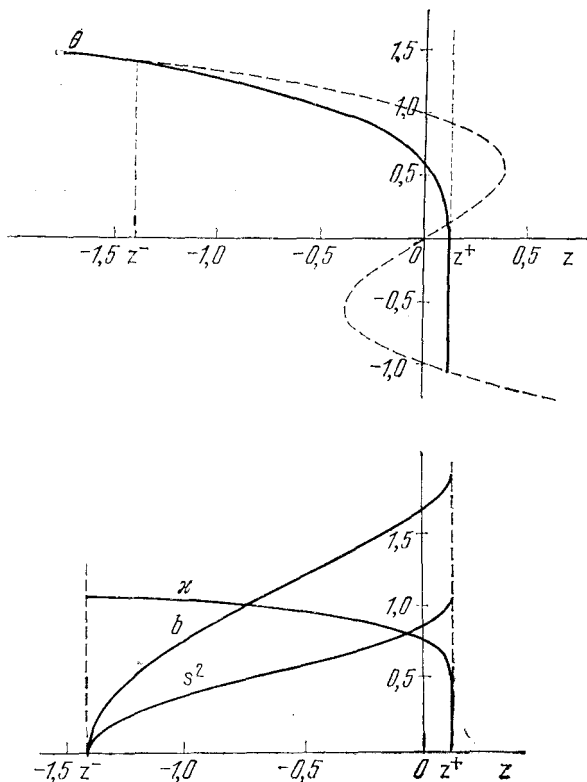


Рис. 25. Зависимость от z усредненных величин при опрокидывании фронта.

Вычисления дают следующие значения для координат особых точек решения:

$$z^- = -1.41, \quad z^+ = 0.117, \quad z_0 = -1.11.$$

Амплитуда переднего солитона равна

$$2a^+ = 2(l_2^+ - l_1^+) t^{1/2} = 3.69 t^{1/2}. \quad (51)$$

Из соотношений автомодельности (43) видно, что среднее значение u , амплитуду a и волновой вектор k можно представить в виде

$$\bar{u} = t^{1/2} \theta(z), \quad a = t^{1/2} b(z), \quad k = t^{1/4} \kappa(z). \quad (52)$$

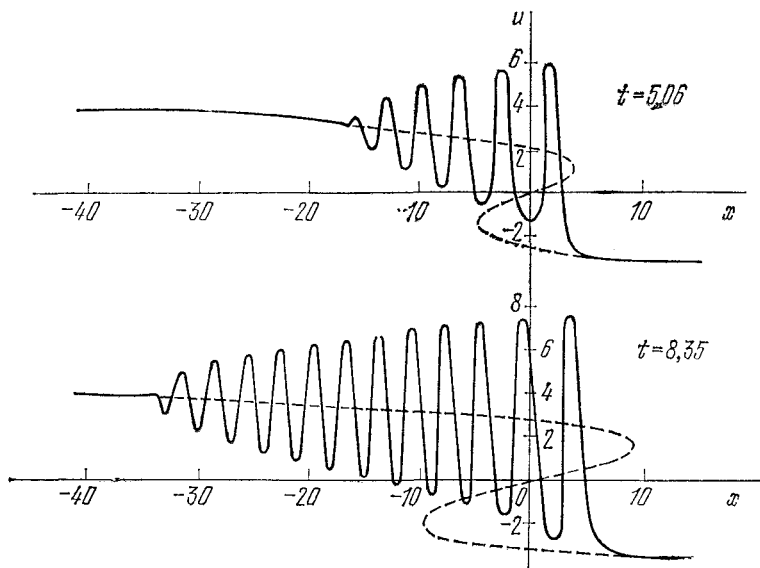


Рис. 26. Бесстолкновительная ударная волна при опрокидывании фронта.

Графики функций $\theta(z)$, $b(z)$, $\kappa(z)$ и $s^2(z)$ построены на рис. 25. (Подчеркнем, что функция $\kappa(z)$ непрерывно стремится к нулю при $z \rightarrow z^+$.)

На рис. 26 для $t = 5,06$ и $8,35$ показана зависимость u от x . Видно, что с течением времени происходит быстрое расширение области колебаний, увеличение их амплитуды и уменьшение длины волны.

П р и л о ж е н и е

ТЕОРИЯ УРАВНЕНИЯ

КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ

(ДВУМЕРНОГО КдФ).

НЕКОТОРЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Некоторые интегрируемые двумерные системы

Предыдущая теория касалась интегрирования уравнений, содержащих неизвестные функции двух переменных. Исследования последних лет показали, что техника обратной задачи рассеяния может быть перенесена иногда и на случай большего числа переменных.

До сих пор в представлении Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A] \quad (1)$$

фигурировали дифференциальные операторы L , A от единственной переменной x . При этом по заданному оператору L удавалось в любом порядке по $\partial/\partial x$ найти соответствующий класс операторов A , порождающий интегрируемую систему уравнений. Ситуация резко меняется, если оператор L содержит производные по нескольким переменным; правильное обобщение теории на этот случай нетривиально и обсуждается в работах [1—3]. Пусть например

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + u.$$

Прямым вычислением легко проверить, что уравнение (1) порождает теперь уравнение на u , только если оператор A есть оператор первого порядка с постоянными коэффициентами; при этом уравнение на u является тривиальным. Настоящая ситуация типична, если L содержит производ-

ные по двум или более переменным. Однако, из нее есть исключения. Пусть

$$L = \alpha \frac{\partial}{\partial y} - M, \quad (2)$$

где M — обыкновенный, дифференциальный по x оператор. Тогда соотношение (1) переписывается в симметричном виде

$$\left[\alpha \frac{\partial}{\partial y} - M, \frac{\partial}{\partial t} - A \right] = 0 \quad (3)$$

и становится соотношением на обычные дифференциальные операторы.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть

$$M = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x, y, t), \quad (4)$$

$$A = -4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial}{\partial x} - 3u_x + 3\alpha w;$$

тогда условие (3) приводит к системе (см. [4, 5])

$$w_x = u_y, \quad (5)$$

$$u_t - 6uu_x - u_{xxx} - 3\alpha^2 w_y = 0,$$

эквивалентной уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_t - 6uu_x - u_{xxx}) = 3\alpha^2 u_{yy}. \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой обобщение уравнения КдФ на двумерный случай и известно как уравнение КП (Кадамцева — Петвиашвили или двумерное КдФ). Оно имеет ту же степень универсальности, что и уравнение КдФ.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим закон дисперсии для среды со слабой зависимостью скорости звука от волнового числа

$$\omega^2 = k^2 + \epsilon k^4, \quad \epsilon k^2 \ll 1. \quad (7)$$

Пусть среда двумерна $k = (k_x, k_y)$; причем $k_y \ll k_x$. Тогда можно положить

$$\omega^2 - k_x^2 = (\omega - k_x)(\omega + k_x) = \epsilon k_x^4 + k_y^2.$$

Переходя в движущуюся систему отсчета (полагая $\omega =$

$= k_x + \Omega$, $\Omega \ll k_x$), получим приближенно

$$2k_x\Omega \cong \varepsilon k_x^4 + k_y^2,$$

т. е. соотношение, с точностью до простой замены переменных совпадающее с фурье-преобразованием линейной части уравнения (6), где $\varepsilon = -(\beta\alpha^2)^{-1}$.

Свойства решений уравнения КП существенно зависят от знака α^2 . Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha^2 = \pm 1$. При $\alpha = 1$ (мы будем называть этот случай устойчивым), L -оператором является оператор теплопроводности

$$L = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u. \quad (8)$$

В неустойчивом случае — при $\alpha = i$ — L -оператором является нестационарный оператор Шредингера

$$L = i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u. \quad (9)$$

2. Пусть M и A — матричные операторы первого порядка [6, 7]:

$$\begin{aligned} M &= a \frac{\partial}{\partial x} + V, \\ A &= b \frac{\partial}{\partial x} + W. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь a, b, V, W — квадратные матрицы третьего порядка. Пусть матрицы a и b вещественны и диагональны:

$$a = \text{diag}(a_1 a_2 a_3), \quad b = \text{diag}(b_1 b_2 b_3),$$

$$a_1 > a_2 > a_3,$$

а матрицы V и W подчиняются соотношению

$$[a, W] = [b, V]. \quad (11)$$

Положим $v_{ij} = i u_{ij} \sqrt{|a_i - a_j|}$, $w_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j} v_{ij}$, где u_{ij} — эрмитова матрица с нулевой диагональю, имеющая вид

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & u_3 & u_1 \\ \bar{u}_3 & 0 & u_2 \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условия (3) приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{1t} + v_1^x u_{1x} + v_1^y u_{1y} &= iqu_2 u_3, \\ u_{2t} + v_2^x u_{2x} + v_2^y u_{2y} &= iqu_1 \bar{u}_3, \\ u_{3t} + v_3^x u_{3x} + v_3^y u_{3y} &= iqu_1 \bar{u}_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_1 - a_1 b_3 + a_2 b_3 - a_3 b_2}{V(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ v_1^x &= \frac{b_1 a_3 - b_3 a_1}{a_1 - a_3}, \quad v_1^y = -\alpha \frac{b_1 - b_3}{a_1 - a_3}, \\ v_2^x &= \frac{b_2 a_3 - b_3 a_2}{a_2 - a_3}, \quad v_2^y = -\alpha \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3}, \\ v_3^x &= \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_1 - a_2}, \quad v_3^y = -\alpha \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}. \end{aligned}$$

Система уравнений (12) является обобщением на случай двух пространственных переменных рассмотренной в гл. III системы трех волн (см. § 4 гл. III.).

3. Пусть

$$M = - \begin{bmatrix} l+1 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$A = i \begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ \pm \bar{\psi} & 0 \end{bmatrix} \right) + \\ + i \begin{bmatrix} r_1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha \psi_y + (l - 2a - 1) \psi_x, \\ \varphi_2 &= \mp (\alpha \bar{\psi}_y + (l - 2a) \bar{\psi}_x). \end{aligned}$$

Условия (3) дают теперь систему уравнений

$$\begin{aligned} i\psi_t + D_1 \psi + u\psi &= 0, \quad u = r_1 - r_2, \\ D_2 u &= \mp 2 D_1 |\psi|^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где D_1, D_2 — дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} D_1 &= \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2(l-a)\alpha \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (l^2 - 2la - a) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ D_2 &= \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(2l+1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + l(l+1) \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Квадратичные формы коэффициентов операторов D_1 , D_2 всегда имеют различную сигнатуру. В частности, при $l = a = -1/2$

$$D_1 = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_2 = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Удобно ввести обозначение $u = \mp 2 |\psi|^2 + v$; при этом система (14) приобретает вид

$$\begin{aligned} i\psi_t + \frac{1}{4} \psi_{xx} + \alpha^2 \psi_{yy} \mp 2 |\psi|^2 \psi + v\psi &= 0, \\ \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v &= \mp \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\psi|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

При $\alpha = i$ система (15) описывает квазимонохроматические волновые пакеты на поверхности жидкости небольшой глубины (система Дэви — Стюардсона [8]).

Другим замечательным случаем является случай вырождения квадратичной формы оператора D_1 . Пусть $a = 0$, тогда система сводится к виду

$$\begin{aligned} i\psi_t + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + u\psi &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \mp 2 \frac{\partial}{\partial \xi} |\psi|^2, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} + (l+1) \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &= \alpha \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) может иметь приложения в физике плазмы.

Очевидно, системы (12), (14) являются двумерным обобщением нелинейного уравнения Шредингера и сводятся к нему, если $\partial/\partial y = c \partial/\partial x$.

§ 2. Законы сохранения

Спектральная задача для оператора (1.2) заменой

$\psi \rightarrow e^{\frac{\lambda}{2} y} \psi$ приводится к решению уравнения

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} = M \psi. \quad (1)$$

В силу представления Лакса (1.3) с ним совместно уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi. \quad (2)$$

Непосредственно из системы (1), (2) можно построить бесконечную серию законов сохранения соответствующего нелинейного уравнения. Поясним это на примере уравнения Кадомцева — Петвиашвили. В этом случае линейные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha \psi_y + \psi_{xx} + u\psi &= 0, \\ \psi_t + 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3(u_x + \alpha w)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде

$$\psi = \exp\left(ikx + \frac{k^2}{\alpha}y + 4ik^3t + X\right).$$

Тогда на функцию X возникают два уравнения

$$X_x = \frac{1}{z}(X_{xx} + X_x^2 + u) + \frac{1}{z}\alpha X_y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{z}\left(u + 2X_{xx} + \frac{1}{2}X_x^2\right) - \\ &- \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{3}X_t + \frac{4}{3}(X_{xxx} + 3X_xX_{xx} + X_x^3) + 2uX_x + \right. \\ &\quad \left. + u_x + \alpha w\right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$z = -2ik.$$

Устремим z к ∞ и разложим X в асимптотический ряд по степеням z^{-1} :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{z^{n+1}}, \quad X_{0x} = u.$$

Члены асимптотического ряда могут быть вычислены независимым образом из каждого из уравнений (5). Сравнение этих рядов для X_1 , X_2 дает, как легко проверить, уравнения (1.5). Непосредственным их интегрированием

получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} w \, dx. \quad (7)$$

Пусть $u \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Интегрируя соотношение (7), получим формально

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint u \, dx \, dy = 0. \quad (8)$$

Однако, как легко видеть из (6), интеграл в (8) конечен, только если

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx = 0. \quad (9)$$

В этом случае (8) выражает собой факт существования первого интеграла уравнений (1.5). Последующие интегралы возникают из сравнения выражений для X_n при четных n . Полагая $n = 2, 4$, получим интегралы

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint u^2 \, dx \, dy = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \left[\frac{u_x^2}{2} - u^3 - \frac{3a^2}{2} w^2 \right] \, dx \, dy = 0.$$

Интегралы (10) имеют смысл импульса и энергии среды, описываемой уравнением Кадомцева — Петвиашвили. Второй из них — интеграл энергии. При $w = 0$ эти интегралы движения перейдут в обычные интегралы уравнения КдФ (см. § 5 гл. I).

§ 3. Метод одевания

Решение задачи Коши для уравнений типа (1.3) требует постановки и решения прямой и обратной задач рассеяния для оператора $L = \alpha \partial/\partial y - M$ (в случае уравнения КП — для уравнения Шредингера). Однако, для построения широких классов частных решений можно использовать метод, который мы назовем «методом одевания» [5]. Рассмотрим на прямой $-\infty < x < \infty$ интегральный оператор

$\hat{F}$, зависящий от t, y :

$$\hat{F}\Psi(x) = \int F(x, z, t, y) \Psi(z) dz, \quad (1)$$

и предположим, что он допускает треугольную факторизацию, т. е. представление в виде

$$1 + \hat{F} = (1 + \hat{K}^+)^{-1} (1 + \hat{K}^-). \quad (2)$$

Здесь $\hat{K}^+, \hat{K}^-$ — вольтерровы операторы

$$\pm \hat{K}^\pm \Psi = \int_x^{\pm\infty} K^\pm(x, z, t, y) \Psi(z) dz. \quad (3)$$

Пусть, далее, задан дифференциальный оператор $L_0 = \alpha \partial/\partial y - M_0$, где

$$M_0 = m_0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + m_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \dots + m_1.$$

Коэффициенты m_i оператора M_0 — функции, вообще говоря, x, y, t .

Пусть оператор $\hat{F}$ коммутирует с L_0 :

$$\hat{F}L_0 - L_0\hat{F} = 0. \quad (4)$$

Применяя соотношение (4) к произвольной функции $\Psi(x)$ и интегрируя n раз по частям, убедимся, что ядро оператора $\hat{F}$ удовлетворяет соотношению

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial y} = M_0 F - F M_0^+. \quad (5)$$

В соотношении (5) M_0^+ — оператор, сопряженный к M , причем

$$\begin{aligned} M_0 F &= \left(m_0 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + \dots + m_n \right) F(x, z, y, t), \\ F M_0^+ &= (-1)^n \frac{\partial}{\partial z^n} F m_0 + \dots + F m_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (4) следует, что преобразование пространства функции $\Psi(x)$ при помощи оператора $1 + \hat{F}$ оставляет оператор L_0 инвариантным:

$$(1 + \hat{F})^{-1} L_0 (1 + \hat{F}) = L_0.$$

Рассмотрим преобразование L_0 при помощи операторов $1 + \hat{K}^+$ и $1 + \hat{K}^-$, где $\hat{K}^+$, $\hat{K}^-$ — «треугольные факторы» оператора $\hat{F}$, задаваемые формулой (2),

$$L_0 \rightarrow L = (1 + \hat{K}^+) L_0 (1 + \hat{K}^+)^{-1} = (1 + \hat{K}^-) L_0 (1 + \hat{K}^-)^{-1}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что L — дифференциальный оператор (ибо он вольтерров одновременно в обе стороны) и имеет вид

$$L = \alpha \frac{\partial}{\partial y} - M.$$

Здесь

$$M = m_0 \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}} + u_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \dots + u_n,$$

где $u_1, \dots, u_n$ — функции от x, t, y , выражающиеся через ядро оператора $\hat{K}^+$ (или $\hat{K}^-$). Формулы для них могут быть получены из уравнения

$$L (1 + \hat{K}^-) = (1 + \hat{K}^-) L_0, \quad (8)$$

следующего из (7). Приведем, в предположении постоянства m_0, m_1 , формулы для u_1, u_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &= [m_0, \xi_0] + m_1, \\ u_2 &= (n-1) m_0 \frac{d\xi_0}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{d\xi_0}{dx}, m_0 \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} [m_0, \xi_1] + u_1 \xi_0 + [m_1, \xi_0]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\xi_i(x, y, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \right)^i K(x, z, y, t) |_{x=z}. \quad (10)$$

Оператор $\hat{L}$ можно назвать «одеванием» оператора $\hat{L}_0$ при помощи интегрального оператора $\hat{F}$. Пусть оператор $\hat{F}$ коммутирует еще с оператором $\partial/\partial t - A_0$, где A_0 — дифференциальный по x оператор. Тогда

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - A_0 \hat{F} + \hat{F} A_0 = 0 \quad (11)$$

и операторы $1 + \hat{K}^\pm$ осуществляют одевание оператора

$\partial/\partial t - A_0$, приводя его к оператору $\partial/\partial t - A$, где дифференциальный по x оператор A связан с A_0 формулами типа (6). Пусть операторы $L_0 = \alpha \partial/\partial y - M_0$ и $\partial/\partial t - A_0$ связаны соотношением Лакса (1.3). Тогда существует класс функций Ψ_0 , для которого совместна система уравнений

$$\begin{aligned} L_0 \Psi_0 &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - A_0 \right) \Psi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя к Ψ_0 соотношение (8) и соответствующее соотношение для оператора $\partial/\partial t - A$, получим

$$\begin{aligned} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial y} - M \right) \Psi &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - A \right) \Psi = 0, \\ \Psi &= (1 + \hat{K}^-) \Psi_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что операторы M и A удовлетворяют соотношению Лакса (1.3), а их коэффициенты — рассматриваемой нелинейной системе уравнений, которой, конечно, удовлетворяют и коэффициенты операторов M_0, A_0 . Таким образом, метод одевания позволяет «размножить» решения, строя по известным решениям обширные классы новых.

Для конкретного проведения одевания нужно знать ядро оператора $\hat{K}^+$. Умножая (2) слева на $1 + \hat{K}^+$ и полагая $z < x$, придем к интегральному уравнению, обобщающему уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко:

$$K^+ + F + \int_x^\infty K^+(x, s, y, t) F(s, z, y, t) ds = 0. \quad (14)$$

§ 4. Солитоноподобные решения уравнения КП

Использование метода одевания позволяет решить ряд задач, прежде всего — задачу о солитонных решениях, впервые численно найденных в [9], и их устойчивости. Мы ограничимся рассмотрением уравнения КП.

Будем производить одевание следующего тривиального решения, следуя работе [10]:

$$u_0 = 0, \quad w_0 = 0.$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 1$. Тогда ядро F подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + 4 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Выбирая решение этих уравнений в виде

$$F = \sum_1^N c_n(y, t) \exp(p_n x + q_n z),$$

где

$$c_n(y, t) = c_n(0) \exp[(q_n^2 - p_n^2)y - 4(p_n^3 + q_n^3)t]$$

и $p_n, q_n, c_n(0) > 0$, и решая уравнение для ядра $K^- (= K)$

$$K + F + \int_{-\infty}^x K(x, z', y, t) F(z', z, y, t) dz' = 0, \quad (2)$$

мы найдем решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили по формуле

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, y, t). \quad (3)$$

Поскольку ядро уравнения (2) является вырожденным, его решение находится без труда и имеет вид (ср. § 3 гл. I)

$$K(x, z, y, t)|_{z=x} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \det A,$$

где матрица A представляет собой квадратную матрицу $N \times N$ с элементами

$$A_{nm} = \delta_{nm} + c_n(y, t) \frac{\exp[(p_n + q_m)x]}{p_n + q_m}. \quad (4)$$

Таким образом, решение $u(x, y, t)$ есть

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A. \quad (5)$$

Формулы (4), (5) описывают взаимодействие N одномерных солитонов. В частности, полагая $N = 1$, имеем

СОЛИТОН

$$u = \frac{(p+q)^2}{2} \operatorname{ch}^{-2} \frac{(p+q)x + (q^2 - p^2)y - 4(p^3 + q^3)t + \ln \frac{c(0)}{p+q}}{2}, \quad (6)$$

превращающийся при $p = q$ в хорошо знакомый солитон уравнения КдФ. При $p \neq q$ солитон движется под некоторым углом к оси x . Ясно, что в общем случае решение (4), (5) описывает пересечение таких «косых» солитонов и не убывает в направлениях $x/y = p_n - q_n$, $n = 1, \dots, N$, при $x, y \rightarrow \infty$. Представляет интерес вопрос о существовании солитонов, убывающих во всех направлениях и динамика их взаимодействия. Оказывается, что такие солитоны уравнения КП существуют только при $\alpha^2 < 0$. Мы получим явные выражения для них путем специального вырождения решения (4), (5), предварительно заметив, что изменение знака α в уравнении КП эквивалентно продолжению решений с вещественных y на чисто мнимые, т. е. замене в формулах $\alpha^2 \rightarrow -\alpha^2$, $y \rightarrow iy$.

Переходя к вырождению решения (4), (5), удобно обозначить $p_n + q_n = \kappa_n$, $p_n - q_n = \nu_n$, $c_n(0) = -a_n \kappa_n$. Перепишем, далее, матрицу A (4) в виде

$$A_{nm} = \exp \left(-\frac{\kappa_n - \kappa_m}{2} x + \frac{\nu_n - \nu_m}{2} y \right) B_{nm}, \quad (7)$$

где

$$B_{nm} = \delta_{nm} - \frac{2a_n \kappa_n}{\nu_n - \nu_m + \kappa_n + \kappa_m} \times \\ \times \exp \{ \kappa_n [x - \nu_n y - (3\nu_n^2 + \kappa_n^2 t)] \}. \quad (8)$$

Поскольку преобразование (7) от A к B является преобразованием подобия, получим $\det A = \det B$ и вместо (5)

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det B.$$

Теперь перейдем к пределу $\kappa_n \rightarrow 0$, полагая

$$a_n = 1 - \xi_n \kappa_n + O(\kappa^2).$$

В результате получим для определителя B :

$$\det B = \prod_n (-\kappa_n) \det \tilde{B} + O(\kappa^{N+1}),$$

где матрица $\tilde{B}$ имеет вид (после замены $y \rightarrow iy$)

$$\tilde{B}_{nm} = \delta_{nm} (x - iv_n y - \xi_n - 3v_n^2 t) + (1 - \delta_{nm}) \frac{2}{v_n - v_m}. \quad (9)$$

(Последний член в правой части следует считать равным нулю при $n = m$.) Очевидно, что

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \tilde{B} + O(\kappa).$$

Полагая теперь $\kappa = 0$, получим

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \tilde{B}. \quad (10)$$

При некотором выборе v и ξ можно добиться как вещественности, так и регулярности при вещественных значениях аргументов. Так, при $N = 2$ и при $v_2 = -\bar{v}_1$, $\xi_2 = \bar{\xi}_1$ получим из (9)

$$\det \tilde{B} = 4 (v_1 + \bar{v}_1)^{-2} + |x - iv_1 y - \xi_1 - 3v_1^2 t|^2. \quad (11)$$

Это выражение строго положительно, т. е. определяемая формулой (10) функция $u(x, y, t)$ вещественна и ограничена. При $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ решение $u \propto (x^2 + y^2)^{-1}$, т. е. убывает по всем направлениям в плоскости x, y . Это решение представляет собой двумерный солитон, движущийся со скоростью $v = (v_x, v_y)$:

$$\sigma_x = 3 |v_1|^2, \quad \sigma_y = -6 \operatorname{Im} v_1.$$

В общем случае решение (9), (10) вещественно и не-сингулярно, если $N = 2K$, а константы v_n и ξ_n удовлетворяют соотношениям

$$v_{K+n} = -\bar{v}_n, \quad \xi_{K+n} = \bar{\xi}_n, \quad n = 1, \dots, K, \quad (12)$$

причем среди набора комплексных чисел $v_1, \dots, v_K$ нет совпадающих. Эти условия гарантируют положительную определенность матрицы $\tilde{B}$. Доказательство этого вполне элементарного алгебраического факта мы опускаем.

Построенное решение (9), (10), (12) описывает столкновение K двумерных солитонов, т. е. при $t \rightarrow \pm \infty$ решение есть сумма решений (10), (11). Рассматривая асимптотику

решения при $t \rightarrow \pm \infty$ как функцию x_0, y_0 , где

$$x = x_0 + v_x^{(m)} t, \quad y = y_0 + v_y^{(n)} t,$$

легко видеть, что соответствующие величины $\xi_n^\pm$ совпадают: $\xi_n^+ = \xi_n^- = \xi_n$. Фазовые сдвиги солитонов, всегда имеющиеся и хорошо известные в одномерных задачах, при столкновении двумерных солитонов тождественно равны нулю [10]. Замечательный факт состоит в том, что динамика полюсов рациональных решений уравнения КП описывается известной системой Мозера — Калоджеро (см. ниже § 7).

§ 5. Точные решения, зависящие от функциональных параметров

Применение метода одевания к двумерным уравнениям позволяет получить, кроме солитонных решений, набор точных решений, содержащих произвольные функции одной переменной [5]. В качестве примера рассмотрим уравнение КП с $\alpha^2 < 0$ и перепишем систему (4.1), заменив $\partial/\partial y$ на $i \partial/\partial y$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + 4 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Выберем решение этой системы в виде

$$F(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t) \bar{\varphi}(z, y, t) \quad (2)$$

с функцией φ , удовлетворяющей уравнениям

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0. \quad (3)$$

Тем самым функция $\varphi(x, y, t)$ определяется произвольным начальным условием $\varphi(x, 0, 0)$. Мы получаем из φ решение уравнения (4.2) (ядро $F(2)$ снова вырождено):

$$K(x, z, y, t) = - \frac{\varphi(x, y, t) \bar{\varphi}(z, y, t)}{1 + \int_{-\infty}^x |\varphi(z, y, t)|^2 dz}. \quad (4)$$

При этом единственным ограничением на выбор решения

системы (3) является, как видно из (4), достаточно быстрое убывание $\varphi(x, y, t)$ при $x \rightarrow -\infty$ (именно, $\varphi \in \mathcal{L}_2(-\infty, s)$ для любого $s < \infty$). Этому условию удовлетворяет, например, любая функция вида

$$\varphi = \iint_D c(k_1, k_2) e^{ikx - ik^2y + 4ik^3t} dk_1 dk_2 \quad (k = k_1 + ik_2) \quad (5)$$

с произвольной интегрируемой функцией двух переменных $c(k_1, k_2)$, если область интегрирования D целиком лежит в нижней полуплоскости k ; функция $c(k_1, k_2)$ определяется через φ неоднозначно. Соответствующее решение уравнения КП дается, согласно (4.3), формулой

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(1 + \int_{-\infty}^x |\varphi(z, y, t)|^2 dz \right). \quad (6)$$

Решение (5), (6) можно рассматривать как обобщение односолитонного решения (4.6). Односолитонному решению соответствует выбор $c(k_1, k_2)$ в виде двумерной δ -функции:

$$c(k_1, k_2) = c \delta(k_1 - a_1) \delta(k_2 + a_2), \quad a_2 > 0.$$

Нетрудно обобщить также N -солитонное решение (4.4), (4.5). Для этого достаточно выбрать ядро F в форме

$$F = \sum_1^N \varphi_i(x, y, t) \bar{\varphi}_i(z, y, t), \quad (7)$$

где φ_i — функции вида (5) с соответствующими $c_1(k_1, k_2)$. Решение уравнения КП есть

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A, \quad (8)$$

$$A_{nm} = \delta_{nm} + \int_{-\infty}^x \varphi_n(z, y, t) \bar{\varphi}_m(z, y, t) dz. \quad (9)$$

Вещественность $u(x, y, t)$ обеспечивается самосопряженностью матрицы A (9).

Полагая

$$\varphi = c e^{kx + ik^2y - 4k^3t} + \int_0^k a(\xi) e^{2\xi x + i2\xi^2y - 4\xi^3t} d\xi, \quad (10)$$

нетрудно видеть, что $u(x, y, t)$, даваемое формулой (6)

при $t \rightarrow -\infty$, представляет собой обычный солитон. Однако, внимательный анализ выражений (10), (6) показывает, что в асимптотике $t \rightarrow +\infty$ солитон отсутствует (если $a(\xi)$ не имеет δ -образных сингулярностей). Таким образом, решение, соответствующее (10), описывает аннигиляцию солитона. Это решение служит прекрасной иллюстрацией известного факта неустойчивости плоских солитонов уравнения КП при $\alpha^2 < 0$ (см. [11]). Ниже будет обсужден еще один класс решений, зависящих от произвольных функций (см. ниже § 8), полученный другим методом.

§ 6. Метод римановых поверхностей.

Конечнозонные решения ранга 1

Довольно широкий класс решений уравнения КП получается как обобщение теории конечнозонных периодических и квазипериодических потенциалов уравнения Шредингера и решений КдФ, развитой в гл. II. Мы начнем с понятия «скалярной функции Бейкера — Ахиезера» ψ по алгебраической римановой поверхности Γ рода $g \geq 1$, на которой отмечена точка P_0 (часто называемая «бесконечностью»). Зададим локальную координату $z = k^{-1}$ около точки P_0 , где $z = 0$. Рассмотрим функцию $\psi(x, y, t, P)$, зависящую от точки P поверхности Γ и параметров x, y, t , с такими свойствами: функция ψ мероморфна при $P \neq P_0$; ψ имеет g полюсов первого порядка $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ на Γ , положение которых зависит от x, y, t ; ψ имеет асимптотику при $k \rightarrow \infty$ (или $P \rightarrow P_0$) вида

$$\psi = \exp \{ kx + \alpha_n(k)y + \beta_n(k)t \} \left(1 + \sum_{i \geq 1} \xi_i(x, y, t) k^{-i} \right), \quad (1)$$

где $\alpha_n(k), \beta_m(k)$ — многочлены степеней n, m . Такая функция ψ , по аналогии с блоховской функцией ψ из § 6 гл. II, единственна и может быть с использованием классической теории θ -функций записана точной формулой (см. обзор [12], Приложение 3 и работу [13]). Использование функции ψ для нахождения решений уравнений вида (1.3) основывается на следующем факте [14]. При указанных аналитических свойствах функция ψ аннулируется двумя

скалярными линейными операторами, не зависящими от P :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - M\right)\psi = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi = 0, \quad (2)$$

где M и A — дифференциальные операторы по x порядков n и m соответственно с коэффициентами, зависящими только от x, y, t и не зависящими от P .

Из (2) для всех P следует, что выполнены (1.3)

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - M, \quad \frac{\partial}{\partial t} - A\right] = 0. \quad (3)$$

При $n = 2, m = 3$ мы приходим, согласно (1.4) — (1.6), к уравнению КП (1.5), где связь ψ с потенциалом $u(x, y, t)$ имеет вид, такой же, как и в § 6 гл. II:

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \xi_1(x, y, t), \quad (4)$$

где $\xi_1(x, y, t)$ — коэффициент разложения в формуле (1). Для $u(x, y, t)$ имеет место формула, обобщающая формулу (II.9.13) (коэффициенты выбраны согласно (8.10)):

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(Ux + Vy + Wt + U_0) + \text{const}. \quad (5)$$

Для рода $g = 1$ эти решения вырождаются. При $g = 2$ решение (5) является «кноидальной волной» вида $u(x - at, y - bt)$. Если Γ — гиперэллиптическая риманова поверхность любого рода $g \geq 1$ и $P_0 = \infty$ — точка ветвления, то $V = 0$. Мы получаем решения КДФ, описанные в гл. II. Если риманова поверхность Γ имеет вид

$$w^3 + \varphi_1(E)w + \varphi_2(E) = 0 \quad (6)$$

и точка $P_0 = \infty$, то $W = aU + bV$. Преобразование

$$u' = u + 2\beta, \quad w' = w - 2\alpha u + \text{const},$$

$$x' = x + 2\alpha y + 3(\alpha^2 + \beta)t,$$

$$y' = y + 3\alpha t, \quad t' = t$$

сохраняет уравнения КП при нормировке (8.10) ниже и сводит кноидальные волны КП к решениям КП, не зависящим от t . На решениях (5) это преобразование эквивалентно замене локальной координаты $z = k^{-1}$. Предельным переходом из решений (5) можно получить решения, являющиеся рациональными функциями

$u(x, y, t)$. Этот класс решений уже обсуждался выше в § 4; он представляет особый интерес, и мы обсудим его в следующем параграфе. Рациональные решения получают-ся вырождением из решений в эллиптических функциях вида

$$u(x, y, t) = 2 \sum_{i=1}^n \wp(x - x_i(y, t)), \quad (7)$$

обобщающих решение (II.10.13) при $n = 3$ и кноидальную волну при $n = 1$. Детальные вычисления в этом случае не проводились.

Возвращаясь к функции Бейкера — Ахиезера ψ , можно отметить одно обстоятельство. Рассмотрим случай, когда многочлен $\alpha_n(k)$ в формуле (1) является главной частью $[f]$ разложения по $k = z^{-1}$ некоторой алгебраической функции $f(P)$ на поверхности Γ с единственным полюсом в точке P_0 ($z = 0$). Тогда функция ψ может быть найдена в виде

$$\psi(x, y, t, P) = \exp\{f(P)y\} \psi_0(x, t, P). \quad (8)$$

Уравнение (2) по y приобретает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = f(P) \psi = M \psi. \quad (9)$$

Вследствие этого коэффициенты операторов M, A не будут зависеть от переменной y , так как они выразятся через ψ_0 . Тем самым уравнение (3) сведется к уравнению Лакса.

Если, кроме того, полином $\beta_m(k)$ также является главной частью аналогичной алгебраической функции $g(P)$, то оба уравнения (2) будут иметь вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = M \psi = f \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = g \psi = A \psi \quad (10)$$

или

$$[M, A] = 0. \quad (11)$$

Мы получаем вывод: риманова поверхность Γ с отмеченной точкой P_0 и парой алгебраических функций f, g , имеющих единственный полюс в точке P_0 порядков m, n , порождает пару коммутирующих операторов M, A . Коэффициенты этих операторов M, A могут быть выражены через θ -функцию (см. [13]). Сама по себе задача классификации коммутирующих пар M, A была поставлена и отчасти решена еще в 20-х годах, хотя и недостаточно эф-

фективно (см. [15—17]). Перефразируя на современный язык эти старые результаты, их можно представить так: а) указанная конструкция всегда дает кольца коммутирующих операторов, базис которых M, A зависит от конечного числа параметров; б) обратно: если порядки m и n операторов M, A взаимно просты, то коммутирующие операторы M, A получаются приведенной выше конструкцией. В работах [13, 14] найдены явные формулы для коэффициентов и установлено, что так построенные операторы M, A «общего положения» являются периодическими и квазипериодическими функциями от x . При этом уравнения коммутативности оказываются вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами по x на коэффициенты (см. обзор [18]). Описанным способом можно построить, конечно, много примеров коммутирующих операторов M, A также и не взаимно простого порядка, где оба числа m и n делятся на l . Однако, еще в 20-х годах отмечалось, что эта конструкция не может дать полной классификации. Коммутирующие операторы M, A имеют всегда общую собственную функцию:

$$M\psi = \lambda\psi, \quad A\psi = \mu\psi. \quad (12)$$

При этом λ и μ связаны уравнением, определяющим некоторую риманову поверхность:

$$F(\lambda, \mu) = 0 \leftrightarrow F(M, A) = 0. \quad (13)$$

Если собственная функция $\psi = \psi(x, \lambda, \mu)$ является однократной в каждой точке римановой поверхности, то она совпадает с функцией Бейкера — Ахиезера, построенной выше, при

$$\psi(x, \lambda, \mu) = \psi(x, 0, 0, P), \quad (14)$$

где P — точка поверхности Γ .

Важным специфическим свойством данной конструкции является то, что общая собственная функция ψ однократна. Вообще говоря, она может оказаться l -кратной для всех точек P поверхности Γ . Число l называется «рангом» коммутирующей пары M, A . Можно показать, что число l обязано быть делителем обоих порядков m, n .

Если m и n взаимно просты, то обязательно $l = 1$. Если m и n не взаимно просты, то возможно $l > 1$. Для случая $l > 1$ исследование существенно более сложно (см. [19—21]). Результат зависит от функциональных

параметров и не сводится к θ -функциям. Техника построения коммутирующих операторов ранга l имеет приложения к задаче о построении решений уравнения КдП, которые будут называться «конечнозонными ранга l ». В качестве примера укажем простейшую невырожденную пару коммутирующих операторов ранга $l = 2$. Эти операторы имеют порядки 4 и 6:

$$M = L_4 = L_2^2 + c_x (\wp(c+a) + \wp(c+b)) \frac{\partial}{\partial x} + \wp(c+a) - \wp(c+b), \quad (15)$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $2A = L_2^2 + D$, $L_2 = \partial^2/\partial x^2 + u(x)$, D — оператор третьего порядка, который мы не выписываем. Произвольная функция $c(x)$ связана с $u(x)$ формулами (8.21), где $y = t = 0$ (см. ниже). Операторы $L_4 = M$ и $L_6 = A$ связаны алгебраическим соотношением рода $g = 1$

$$A^2 = 4M^3 + g_2 M + g_3, \quad (16)$$

откуда без труда находится оператор D .

Коммутирующие операторы ранга 2, указанные формулой (15), заимствованы из работы [21].

Напомним, что простейшие нетривиальные известные еще в 20-х годах коммутирующие пары ранга 1 имели порядки 2, 3. Они указаны в связи с классической «кноидальной волной» для КдФ в § 1 гл. II, где $L_2 = \partial^2/\partial x^2 + 2\wp(x)$ — оператор Ламе.

§ 7. Рациональные решения уравнения КП.

Дискретные системы частиц на прямой

Как уже говорилось выше, уравнение КП обладает рациональными «слабо локализованными» решениями $u(x, y, t)$, не имеющими особенностей при всех вещественных x, y, t и убывающими как $(x^2 + y^2)^{-1}$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ (см. § 4). Простейшим решением такого вида является «двумерный солитон» (4.11), обнаруженный впервые лишь в 1976 г. в результате численного счета [9].

Более общие рациональные решения даются формулой (4.10). Оказывается, общее рациональное решение уравнения КП, убывающее при $|x| \rightarrow \infty$, — возможно, с полюсами при вещественных x, y, t , также описывается фор-

мулой (4.10). Другая форма записи решений (4.10) такова:

$$u(x, y, t) = -2 \left[\sum_{j=1}^n [x - x_j(y, t)]^{-2} \right], \quad (1)$$

где положения полюсов x_j являются функциями от y, t . Не предполагая этого заранее, можно показать, что решения вида (1) будут рациональны по всем переменным x, y, t . Решения (1) обладают некоторыми замечательными свойствами.

Рассмотрим систему частиц на прямой с координатами p_i, x_i и гамильтонианом взаимодействия

$$H(x, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i < j} \frac{2}{(x_i - x_j)^2} \quad (2)$$

(«система Мозера»). Напомним результаты работы [22]. Время обозначим через τ . Определим две матрицы

$$L = (l_{ij}), \quad A = (a_{ij}); \quad l_{ij} = p_j \delta_{ij} + \frac{2(1 - \delta_{ij})}{x_i - x_j}, \quad (3)$$

$$a_{ij} = \frac{2(1 - \delta_{ij})}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{s \neq j} \frac{2\delta_{js}}{(x_j - x_s)^3}, \quad a_{ii} = 0.$$

Гамильтонова система (2) представляется в виде

$$L\tau = [L, A]. \quad (4)$$

В частности, мы имеем

$$\text{Sp } L = 0, \quad \text{Sp } L^2 = H = F_2, \quad \text{Sp } L^i = F_i(x, p). \quad (5)$$

Интегралы $F(x, p)$ инволютивны, и система (2) вполне интегрируема. В силу инволютивности интегралов $H = F_2$ и F_3 , соответствующие гамильтоновы системы коммутируют как группы преобразований фазового пространства (x, p) . Интересную связь с уравнением КП открыл Кричевер [23]. Мы будем рассматривать двухпараметрические траектории потоков с гамильтонианами $H = F_2$ и F_3 на фазовом пространстве $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial F_2}{\partial p_i}, & \frac{\partial p_i}{\partial \tau_1} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial F_3}{\partial p_i}, & \frac{\partial p_i}{\partial \tau_2} &= -\frac{\partial F_3}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тем самым определены функции $x_i(\tau_1, \tau_2)$, $p_i(\tau_1, \tau_2)$. Произведем сопоставления

$$\tau_1 \rightarrow y, \quad \tau_2 \rightarrow t. \quad (7)$$

Важное утверждение (теорема Кричевера). Решения

КП вида (4.10) получаются как $u = -2 \sum_{i=1}^n [x - x_i(y, t)]^{-2}$, где полюсы x_i двигаются по $y = \tau_1$ в силу системы (2) с гамильтонианом $H = F_2$ и по $t = \tau_1$ в силу системы с гамильтонианом F_3 . Это — все рациональные по x решения, убывающие при $|x| \rightarrow \infty$. Сформулированное утверждение является итогом целой серии исследований. Еще в 1974 г. были найдены простейшие невырожденные двухзонные решения КдФ, сводящиеся к эллиптическим функциям и имеющие вид суммы трех кноидальных волн с нелинейно связанными фазами [24]

$$u(x, t) = 2\wp(x - a(t)) + 2\wp(x - b(t)) + 2\wp(x - c(t)).$$

Вид a, b, c дан в § 10 гл. II (см. формулы II.10.13)). Эти решения могут быть вырождены в рациональные по x , так как функция Вейерштрасса $\wp(x)$ вырождается в x^{-2} . Далее, в [25] была открыта глубокая связь рациональных решений КдФ с системой частиц на прямой (2) и найдены все рациональные решения, убывающие при $|x| \rightarrow \infty$. Все эти решения являются вырождением конечнозонных и имеют вид

$$u(x, t) = - \sum_{j=1}^n 2[x - x_j(t)]^{-2}, \quad n = \frac{d(d+1)}{2}. \quad (8)$$

Связь с системой частиц такова: функция $u(x, t)$ вида (8) тогда и только тогда удовлетворяет КдФ, когда а) $2n = d(d+1)$; б) набор $[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), p_1(t_0), \dots, p_n(t_0)]$ является фазовой точкой (x, p) , стационарной для гамильтониана (2), т. е. $\text{grad } H = 0$; в) по переменной t величины $x_j(t)$ являются решением гамильтоновой системы с гамильтонианом $F_3(x, p)$.

Несколько позднее такие же результаты были получены в [26], где связь дискретных динамических систем с движением полюсов решений $u(x, t)$ была перенесена на уравнение Бюргерса — Хопфа и сам вопрос о такой связи обсуждался в более общем аспекте. Наконец, в обзоре [18]

(см. Заключительные замечания) сформулирована упомянутая выше теорема о решениях КП вида (1), дающая естественное завершение начинаний работ [25, 26].

Действительно, если решение $u(x, y; t)$ уравнения КП вида (1) не зависит от y , то оно сводится к решению КдФ. В силу теоремы Кривевера это равносильно тому, что фазовая точка (x, p) должна быть стационарной для гамильтониана (2). Однако это бывает лишь при выполнении равенства $2n = d(d+1)$. Таким образом, для решений, не зависящих от y , теорема Кривевера сводится к результатам работ [25, 26]. Построение рациональных решений (8) является естественным вырождением излагавшейся выше процедуры построения решений уравнения КП с помощью функции Бейкера—Ахиезера. Риманова поверхность Γ является в данном случае рациональной (сферой Римана) с координатой k , точка $P_0 = \infty$. Функция Бейкера—Ахиезера ищется в виде

$$\psi(x, y; t, k) = \left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j(y, t, k)}{x - x_j(y, t)} \right] e^{kx + k^2 y + k^3 t}, \quad (9)$$

где a_j рациональны по k . В этом случае функция $u(x, y, t)$, найденная по функции ψ в соответствии с общими формулами (6.4), имеет вид (8). Эта функция удовлетворяет уравнению КП, если ψ аннулируется скалярными линейными операторами (6.2). Вычисление показывает, что функция ψ аннулируется оператором $\partial/\partial y - M$ тогда и только тогда, когда матрицы (3) удовлетворяют уравнению (4). Тем самым набор полюсов x_j зависит от y в силу (2). Функция ψ аннулируется оператором $\partial/\partial t - A$ тогда и только тогда, когда полюсы x_j по t двигаются в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом F_3 (5).

§ 8. Метод голоморфных векторных расслоений над римановыми поверхностями.

Функциональные параметры в точных решениях

Уравнение КП обладает широким классом точных решений, зависящих от некоторого количества произвольных функций одной переменной x . Один такой класс, полученный из «метода одевания», описан в § 5. Мы опишем здесь

еще один метод получения точных решений, содержащих произвольные функции одной переменной x , который является дальнейшим развитием описанного в § 6 метода римановых поверхностей.

Рассмотрим риманову поверхность Γ рода $g \geq 1$ с отмеченной точкой P_0 и локальной координатой $z = k^{-1}$ около P_0 , как и в § 6 (см. выше). Нашей целью является построение векторного аналога ψ -функции Бейкера — Ахиезера $\psi = \psi^q(x, y, t, P)$, $q = 1, \dots, l$, описанной в § 6. Зададим $(l \times l)$ -матрицу $\psi_0(x, y, t, k)$ с такими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{а) } A_i &= \frac{\partial \psi_0}{\partial x_i} \psi_0^{-1} = A_i(x, y, t, k) \text{ — полиномы по } k, \\ \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} &= [A_i, A_j], \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = t, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{б) } \psi_0(x_0, y_0, t_0, k) \equiv 1.$$

Зададим набор точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$ поверхности Γ и набор $(l-1)$ -векторов

$$\alpha_1 = (\alpha_{1,q}), \quad \alpha_2 = (\alpha_{2,q}), \dots, \alpha_{lg} = (\alpha_{lg,q}).$$

Будем строить вектор-функцию $\psi(x, y, t, P)$, имеющую полюсы первого порядка в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$, не зависящие от x, y, t . Обозначим через $\varphi_j^q(x, y, t)$ вычеты компоненты $\psi^q(x, y, t, P)$ в полюсе γ_j . Потребуем, чтобы при данном j все l вычетов $\varphi_j^q(x, y, t)$ были пропорциональны одному из них — вычету φ_j^l с постоянным коэффициентом α_{jq} , не зависящим от x, y, t :

$$\varphi_j^q(x, y, t) = \alpha_{jq} \varphi_j^l(x, y, t). \quad (2)$$

При $P \rightarrow P_0$ (или $k \rightarrow \infty$) потребуем, чтобы вектор $\psi(x, y, t, P)$ имел асимптотику

$$\psi(x, y, t, P) = \left(\xi_0 + \sum_{j \geq 1} \xi_j(x, y, t) k^{-j} \right) \psi_0, \quad (3)$$

где $\xi_0 = (1, 0, 0, \dots)$ и $\xi_j(x, y, t)$ — векторы. Такая вектор-функция $\psi(x, y, t, P)$ определяется однозначно указанными аналитическими свойствами. Ее построение сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (см. [19, 20]). Следуя [20], для построения решений уравнения КП матрицы $A_i = \psi_{0x_i} \psi_0^{-1}$ подбираются так:

С л у ч а й $l = 1$. Этот случай рассматривался выше, где полагалось

$$A_1 = k, \quad A_2 = k^2, \quad A_3 = k^3. \quad (4)$$

Более общим является вид

$$A_1 = k, \quad A_2 = k^2 + p(t), \quad A_3 = k^3 + \frac{3}{2}kp(t) + y \frac{dp}{dt}.$$

С л у ч а й $l = 2$. При $l = 2$ зададим матрицы A_i :

$$A_1 = \psi_{0x} \psi_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k + u_0 & 0 \end{pmatrix} = \kappa + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \psi_{0y} \psi_0^{-1} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \kappa^2, \quad A_3 = \psi_{0t} \psi_0^{-1} = \kappa^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix} k + q, \quad (5)$$

где q — матрица, не зависящая от k . Из условий совместности мы найдем, что $u_0 = u_0(x, t)$ не зависит от y и удовлетворяет уравнению КдФ (при некоторых соотношениях на p и q):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{4} \left(-6u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right); \quad (6)$$

$$p = \frac{u_0}{2}, \quad q = \begin{pmatrix} \frac{u_{0xx}}{4}, & -\frac{u_0}{2} \\ \frac{u_{0xxx}}{4} - \frac{u_0^2}{2}, & -\frac{u_{0xx}}{4} \end{pmatrix}.$$

Это дает возможность построить ψ_0 для $l = 2$.

С л у ч а й $l \geq 3$. Зададим матрицу A_1 вида

$$A_1 = \kappa + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{l-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$A_2 = \kappa^2 + p, \quad A_3 = \kappa^3 + q, \quad \kappa^l = k \cdot 1,$$

где p и q — матрицы, не зависящие от k .

Положим $q = 0$ при $l = 3$. Из условия (1) мы найдем $u_0, \dots, u_{l-2}$. При $l = 3$ эти условия сведутся к тому, что обе функции u_0, u_1 не зависят от t , а пара u_0, u_1 удовлетворяет уравнению Буссинеска (т. е. КП, не завися-

щего от t) по x, y при некоторых соотношениях на p и q :

$$q = 0, \quad p = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u_1 & 0 & 0 \\ u_0 - \frac{2}{3}u_1 & \frac{u_1}{3} & 0 \\ +u_{0x} - \frac{2}{3}u_{1xx} & u_0 - \frac{u_{1x}}{3} & \frac{u_1}{3} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Отсюда извлекается вид матриц ψ_0 для $l = 3$. В простейших примерах (которые отнюдь не будут тривиальными) можно положить для всех $l \geq 2$:

$$A_1 = \kappa, \quad A_2 = \kappa^2, \quad A_3 = \kappa^3. \quad (9)$$

Если матрицы A_1, A_2, A_3 выбраны в виде (4) — (7), то вся вектор-функция $\psi(x, y, t, P)$ аннулируется скалярными линейными операторами, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} - M\right)\psi &= 0, \quad -M = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi &= 0, \quad -A = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{4}\left(u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}u\right) + \frac{3}{4}w. \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому в силу (10) пара (u, w) удовлетворяет уравнению КП, масштабным преобразованием сводящемуся к (1.4).

Таким образом, мы получаем способ построения точных решений КП, определяемых следующими наборами:

а) поверхностью Γ с отмеченной точкой $P_0 = \infty$ и локальным параметром $z = k^{-1}$ около P_0 ;

б) набором точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$ поверхности Γ и набором $(l-1)$ -векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{lg}$;

в) матрицами A_1, A_2, A_3 , определяемыми некоторым числом произвольных функций от x , зависимость которых от y, t определяется уравнениями совместности (1).

Рассмотрим снова случай $l = 1$. Все решения КП, полученные из вида (4) матриц A_i , сведутся к тем, которые уже рассматривались при постоянных $A_i = k^i$, с помощью преобразования

$$\begin{aligned} u' &= \mu(t) + u\left(x - \frac{3}{2}v(t), y, t\right), \\ w' &= w + \frac{4}{3}y \frac{d\mu}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \mu(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразование (11) обладает тем свойством, что оно переводит решение КП в решение КП для любых функций u, w . Отсюда вытекает, в частности, что для осмысленной (математически корректной) постановки задачи Коши необходимо, чтобы функции u, w были ограничены при всех y .

Более интересен случай $l = 2$. При $l = 2$ набор A_i определяется одним решением $u_0(x, t)$ уравнения КдФ (6).

При $l = 3$ набор A_i определяется одним решением $v(x, y)$ уравнения Буссинеска — т. е. уравнения КП, не зависящего от t , — по переменным $x, y, u_1 = v_x, 2u_0 - u_{1x} = v_y$.

Если даже все функции u_j тождественно равны нулю, то получаемые решения уравнения КП будут существенно зависеть от всех трех переменных x, y, t .

Рассмотрим первоначально вырожденный случай, где Γ имеет особенности типа «двойных точек», $A_1 = \kappa, A_2 = \kappa^2, A_3 = \kappa^3, u_0 \equiv 0$. Вектор $\psi(x, y, t, k)$ имеет вид

$$\psi = \left(\xi_0 + \sum_{j=1}^{N=lg} \frac{a_j(x, y, t)}{k - \gamma_j} \right) \psi_0,$$

$$\psi_{0x} \psi_0^{-1} = A_1,$$

$$\psi_{0y} \psi_0^{-1} = A_2, \quad \psi_{0t} \psi_0^{-1} = A_3;$$
(12)

здесь $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$ и $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jl})$ — векторы. Задан также набор $(l-1)$ -векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{lg}$. Для решений $u(x, y, t)$ из (10) следует формула

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{s=1}^N a_{sl} \right). \quad (13)$$

В «двойных» точках $\kappa_{r1} \sim \kappa_{r2}$ мы требуем выполнения равенства

$$\psi(x, y, t, \kappa_{r1}) = \psi(x, y, t, \kappa_{r2}), \quad r = 1, 2, \dots, g. \quad (14)$$

Условия на вычеты приобретут вид

$$\sum_{i=1}^l a_{si} \psi_0^{ij} = a_{sj} \sum_{i=1}^l (a_{si} \psi_0^{il}). \quad (15)$$

Линейные уравнения (14), (15) однозначно определяют ψ , если матрица $\psi_0(x, y, t, k)$ задана. В простейшем случае $l = 2$ ($A_i = \kappa^i$) можно взять ψ_0 в виде

$$\psi_0 = e^{-ky} \begin{pmatrix} \cos \theta, & k^{-1/2} \sin \theta \\ -k^{1/2} \sin \theta, & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $\theta = k^{1/2}(x + kt)$.

В случае $g = 1$, $l = 2$ можно подобрать параметры κ_{rj} , γ , α так, что возникнут периодические по x, y, t решения $u(x, y, t)$, не имеющие особенностей в полуплоскостях $|y| > y_0$ при всех значениях x, t . По-видимому, при $g = 1$, $l = 2$ все построения решения имеют особенности при вещественных x, t . Подробный анализ для $g > 1$ не проводился. Этот анализ может привести к определенным трудностям вычислительного характера, но вся задача решается в элементарных функциях.

Гораздо трудней случай, когда риманова поверхность Γ не имеет особенностей. Вычисление векторного аналога функции Бейкера — Ахиезера сводится по схеме работы [19] к системам сингулярных интегральных уравнений на окружности и не может, по-видимому, быть упрощено. В связи с этим в работе [20] был предложен другой метод вычисления решения $u(x, y, t)$ уравнения КП, обобщающий уравнения, полученные в §§ 4, 5 гл. II для полюсов $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ блоховской функции ψ . Обратим внимание на то, что в определение векторного аналога функции Бейкера — Ахиезера ψ выше, как и для блоховской собственной функции оператора Шредингера ψ в §§ 4, 5 гл. II, входила «точка нормировки» (x_0, y_0, t_0) , варьируя которую можно получить зависимость величин $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$ и $(l-1)$ -векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{lg}$ от параметров x_0, y_0, t_0 . Эта зависимость определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями, где в правые части входят γ, α , а также сама величина $u(x, y, t)$. В простейшем нетривиальном случае $g = 1$, $l = 2$ эти уравнения имеют вид (локальный параметр z — простейший)

$$\begin{aligned} \gamma_{ix} &= (-1)^i (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}, & \gamma_{iy} &= 1, \\ \gamma_{it} &= (-1)^{i+1} \left(\frac{u}{2} + \alpha_1 \alpha_2 \right) (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1}, \\ \alpha_{ix} &= \alpha_i^2 + u(x, y, t) + (-1)^i \Phi(\gamma_1, \gamma_2), \\ \alpha_{iy} &= v(x, y, t). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $i = 1, 2$, $\alpha_1 = \alpha_{11}$, $\alpha_2 = \alpha_{21}$, величины x_0, y_0, t_0

заменены на $x, y, t, 2v_x = u_y$,

$$\Phi = \xi(\gamma_2 - \gamma_1) + \xi(-\gamma_2) - \xi(-\gamma_1), \quad (18)$$

где $-\xi'(z) = \wp(z)$, $(\wp')^2 = 4\wp^3 + g_2\wp + g_3$, $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса (см. [27]). Можно полностью забыть «происхождение» системы (17): функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению КП в силу системы (17). Введем обозначение, используя (17):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= y + c(x, t), \quad \gamma_2 = y - c(x, t) + c_0, \\ w(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2, \quad z(x, t) = \alpha_1 - \alpha_2, \\ u(x, y, t) &= -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \varphi(x, t). \end{aligned} \quad (19)$$

В новых обозначениях получим

$$\begin{aligned} c_x &= z^{-1}, \quad z_x = wz - 2\Phi(y, c), \\ w_x &= -\frac{w^2}{2} - \frac{z^2}{2} + 2\varphi(x, t), \quad c_t = \frac{1}{2z}(z^2 - \varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Заметим, что величина $Q = \Phi_c + \Phi^2$ не зависит от y в силу теорем сложения [27]. Из этих уравнений, подставляя в уравнение для w_x выражение w через z_x , получим

$$4\varphi(x, t) = (1 + 3c_{xx}^2)c_x^{-2} + 4Q - 2c_{xxx}c_x^{-1},$$

$$\begin{aligned} 8u(x, y, t) &= (c_{xx}^2 - 1)c_x^{-2} + 8\Phi c_{xx} + \\ &+ 4c_x^2(\Phi_c - \Phi^2) - 2c_{xxx}c_x^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$8c_t = 3c_x^{-1}(1 - c_{xx}^2) - 4Qc_x + 2c_{xxx}.$$

Величина $Q(c, c_0) = \Phi_c + \Phi^2$ не зависит от y . Любое решение (21) порождает решение уравнения КП $u(x, y, t)$. Периодическая по x гладкая функция $c(x, t)$ порождает периодическое по y , квазипериодическое по x решение $u(x, y, t)$, не имеющее особенностей, если $z \neq 0$ и $c_x = z^{-1} \neq 0$. Решения (21) вида $c(x + at)$ порождают «солитоны» вида $u(x + at, y)$. Для нахождения этих «солитонов» мы должны решить уравнение $c_t = ac_x$. Уравнения (21) в этом случае можно исследовать. Возьмем c за независимую переменную вместо x и сделаем подстановку $z = h^{-2}(c)$. Из уравнений (21) получим

$$h'' = h_{cc} = -\frac{\partial W(h, c)}{\partial h}, \quad (22)$$

$$W = -\frac{Qh^2}{2} + ah^{-2} - \frac{1}{8}h^{-6} = -\frac{Qh^2}{2} + W_0,$$

причем $Q(c)$ — периодическая функция. График $W_0(h)$ имеет вид представленный на рис. 27 для $a \leq 0$ и рис. 28 для $a > 0$.

Качественным анализом можно получить следующие выводы а) начиная с некоторого «порога» $a \geq a_0 > 0$ урав-

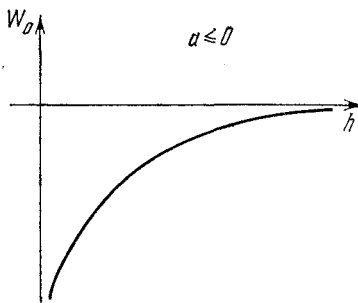


Рис. 27. Нелинейная часть потенциала W для скоростей $a \leq 0$.

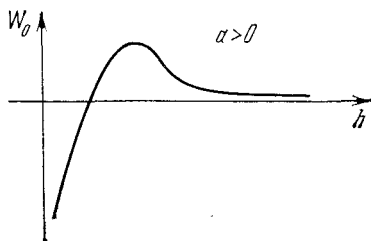


Рис. 28. Нелинейная часть потенциала W для скоростей $a > 0$.

нение (22) всегда имеет всюду ненулевое периодическое решение; поэтому возникает «солитон» или «кноидальная волна» $u(x + at, y)$, неособая и периодическая по x, y, t ; б) для $a \leq 0$ уравнение (22) имеет всюду ненулевое периодическое решение, если (и только если) точка $\lambda = 0$ лежит ниже первой точки спектра периодического потенциала Q , т. е. уравнение $h'' = Qh$ имеет всюду ненулевое решение. Именно в этом случае возникает решение $u(x + at, y)$ уравнения КП без особенностей.

Решение КП получаем из (22), находя $c(x)$, где $c_x = h^2(c)$, и затем пользуясь формулой (21). Преобразованием, указанным на стр. 301 (внизу), мы получим решение $u(x + a_1 t, y + bt)$ с любым направлением. Любопытно отметить, что возникшая в процессе решения уравнений (17) величина $c(x, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению (21) типа КдФ. Мы знаем, что это уравнение должно быть «скрыто изоморфно» обычному КдФ: функциональный параметр $u_0(x, t)$, входивший в первоначальную конструкцию решений (в матрицу ψ_0), удовлетворял обычному уравнению КдФ, как отмечалось выше. Однако, этот изоморфизм пока не удастся проследить.

§ 9. Некоторые замечания о периодической цепочке Toda

Цепочка Toda, изучавшаяся в § 7 гл. I, представляет собой набор частиц одинаковой массы $m = 1$, которые расположены на прямой в точках с координатами $n + x_n$ (n — целое число). Гамильтониан цепочки Toda имеет вид

$$H(x, p) = \sum_n \frac{1}{2} p_n^2 + \sum_n \exp(x_n - x_{n-1}). \quad (1)$$

Цепочка Toda допускает представление типа Лакса (см. [28, 29]), где L — разностный аналог оператора Шредингера. Спектральная задача для оператора L имеет вид

$$L\psi(n, E) = E\psi(n, E) = v_n\psi(n, E) + \\ + c_n^{1/2}\psi(n-1, E) + c_{n+1}^{1/2}\psi(n+1, E). \quad (2)$$

В периодическом случае мы имеем

$$\dot{x}_n = v_n = v_{n+N}, \quad c_{n+N} = c_n = \exp(x_n - x_{n-1}); \quad (3)$$

зоны спектра определяются так же, как в § 1 гл. II. Многими авторами указывалось, что периодическая цепочка Toda исследуется полностью аналогично теории конечно-зонных решений уравнения КдФ (см., например, обзор [6]). Это утверждение относится также ко многим другим системам — нелинейному уравнению Шредингера, sin-Gordon и др. Вместе с тем полезно обратить внимание на одно обстоятельство, отличающее дискретную систему типа цепочки Toda от непрерывных систем типа КдФ, нелинейного уравнения Шредингера, sin-Gordon и др. Как неоднократно отмечалось в гл. II, одним из интересных свойств теории конечнозонных решений уравнения КдФ является практическая невозможность выделить эффективно периодические по x решения с заданным периодом T среди квазипериодических. Набор границ зон $E_0, \dots, E_{2n}$ n -зонного оператора Шредингера L формирует гиперэллиптическую риманову поверхность

$$y^2 = \prod_{\alpha=0}^{2n} (E - E_\alpha).$$

Для разностного оператора L выделение периодического случая с целым периодом N производится абсолют-

но эффективно. Класс римановых поверхностей, отвечающий цепочке Тода,— с целым периодом N таков:

$$\mu + \mu^{-1} = 2P_N(E), \quad (4)$$

где $P_N(E)$ — полином степени N . Такую риманову поверхность можно задать через края зон E_α оператора L :

$$w^2 = \prod_{\alpha=1}^{2N} (E - E_\alpha) = [P_N(E) + 1][P_N(E) - 1]; \quad (5)$$

здесь $2P_N(E)$ — след матрицы монодромии (сопоставьте формулы (4) и (5) с формулами (2.1.10), где $P_N \rightarrow a_R$). Учитывая некоторую неаккуратность формул для цепочки Тода в обзоре [6] (см. § 1 гл. III), укажем формулы, следуя [30]:

$$v_{n-1}(t) = \frac{d}{dt} [\ln \theta(nU + tV + W^+) - \ln \theta((n-1)U + tV + W^+)], \quad (7)$$

$$\ln c_n(t) = \ln [\theta(nU + tV + W^-)/\theta(nU + tV + W^+)] - \ln \theta([(n-1)U + tV + W^-]/\theta((n-1)U + tV + W^+)],$$

где U, V, W — некоторые векторы, которые легко вычисляются точно так же, как и в теории КдФ.

Это утверждение относится также и к общим разностным операторам на прямой (см. [30, 31]). Конечно, в полной аналогии с непрерывным случаем можно рассматривать также и общий квазипериодический случай.

З а м е ч а н и е. Для справок укажем также красивый результат работы *Flaschka H., McLaughlin D. W.* — *Progr. Theor. Phys.*, 1976, v. 53, относящийся как к конечнозонной теории КдФ, так и к периодической цепочке Тода: переменные «действия», сопряженные к «углам» на торах, меняющимся от 0 до 2π , имеют вид площадей под графиком функций $|a_R| - 1$ в пределах запрещенных зон.

ЛИТЕРАТУРА

К главам I—IV

1. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики.— М.: ВИНТИ, 1964.
2. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика.— М.: Мир, 1966.
3. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*— *Phys. Rev. Lett.*, 1967, v. 19, p. 1095.
4. *Gardner C. S., Morikawa G. K.*— *Courant Inst. of Math. Sc. Rep.*, 1960, N 40, p. 9082.
5. *Гуревич А. В., Потаевский Л. П.*— *ЖЭТФ*, 1973, т. 65, с. 590.
6. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.*— *УМН*, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55.
- ✓ 7. *Захаров В. Е.*— В кн.: *Куник И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975. стр. 330.
8. *Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.*— *УФН*, 1971, т. 103, с. 193.
9. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
10. *Кричевер И. М.*— *УМН*, 1977, т. 32, вып. 6, с. 183.
11. *Miura R. M.* (editor) *Lecture Notes in Mathem.*— Springer, 1976, v. 515.
12. *Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W.*— *Proc. IEEE*, 1973, v. 61, p. 1443.
- 13а. *Сагдеев Р. З.* В сб.: *Вопросы теории плазмы.*— М.: Атомиздат, 1964, вып. 5.
- 13б. *Сагдеев Р. З.* В сб. *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций.*— М.: Изд-во АН СССР, 1958, т. 4, с. 384.
14. *Стокер Дж.* Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.
- 15а. *Withem G. B.*— *Proc. Roy. Soc.*, 1965, v. A 283, p. 238.
- 15б. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
16. *Ферми Э.* Научные труды, ч. II.— М.: Наука, 1972.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика.— М.: Наука, 1963.
18. *Займан Дж.* Принципы теории твердого тела.— М.: Мир, 1974.
19. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков: Гостехиздат Украины, 1939.
20. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
21. *Зверович Э. И.*— *УМН*, 1971, т. 26, вып. 1, с. 113.
22. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1953.

23. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.
24. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М.: Гос-техиздат, 1948.
25. *Calogero F.* (editor). Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform (Collection of papers).— London: Pitman, 1978.
26. *Бейтман Э. Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М., Наука, 1967, т. 2, 3.
27. *Фаддеев Л. Д.*— УМН, 1959, т. 14, с. 57.
28. *Kay I., Moses H. E.*— Nuovo Cimento, 1955, v. 2, p. 917;
Kay I., Moses H. E.— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, p. 66.
29. *Gardner C., et al.*— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
30. *Lax P. D.*— Commun. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467.
31. *Захаров В. Е.*— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 993 (3).
32. *Gardner C.*— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 1548.
33. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.*— Функц. анализ, 1971, т. 5, вып. 4, с. 18.
34. *Flaschka H.*— Phys. Rev., 1974, v. B9, p. 1924.
Flaschka H.— Progr. Theor. Phys., 1974, v. 51, p. 703.
35. *Манаков С. В.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 543.
36. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.*— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 118.
37. *Ablowitz M., et al.*— Phys. Rev. Lett., 1973, p. 1262.
38. *Тахтаджян Л. А.*— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 476.
39. *Захаров В. Е., Манаков С. В.*— ТМФ, 1974, т. 19, с. 332.
40. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1974, т. 21, с. 160.
41. *Новиков С. П.*— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 3, с. 54.
42. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 12, с. 2131.
43. *Марченко В. А., Островский И. В.*— Матем. сборник, 1974, т. 95, вып. 3, с. 331.
44. *Lax P. D.*— Lect. in Appl. Math., 1974, v. 15, p. 85.
45. *Дубровин Б. А.*— Функц. анализ, 9, вып. 3, с. 41, 1975.
46. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.*— ТМФ, 1975, т. 23, вып. 1, с. 51.
47. *Lax P. D.*— Comm. Pure and Appl. Math., 1975, v. 38, № 1, p. 141.
48. *McKean H., Van Moerbeke P.*— Inventiones Mathem., 1975, v. 30, p. 217.
49. *Гельфанд И. М., Дикий П. А.*— УМН, 1975, т. 30, вып. 5.
50. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.*— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 1, с. 1095.
51. *Дубровин Б. А.* и др.— УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55.
52. *Захаров В. Е., Манаков С. В.*— Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 413.
53. *Захаров В. Е., Манаков С. В.*— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1654.
54. *Каур D.*— Studies Appl. Math., 1976, v. 55, p. 9.
55. *Шабат А. Б.*— Функц. анализ, т. 9, вып. 3, с. 75, 1975.
56. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.*— Функц. анализ, 1979 (в печати).
57. *Захаров В. Е., Михайлов А. В.*— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 47.
58. *Захаров В. Е., Михайлов А. В.*— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1953.
59. *Будагов А. С., Тахтаджян Л. А.*— ДАН СССР, 1977, т. 235, с. 805.

60. Манаков С. В.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1392.
61. Захаров В. Е., Манаков С. В.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 203.
62. Гуревич А. В., Питаевский Л. П.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 590.
63. Pohlmeier K.— Com. Math. Phys., 1976, v. 46, p. 207.

К приложению

1. Манаков С. В.— УМН, 1976, т. 31, вып. 5, с. 245.
2. Дубровин Б. А., Кригевер И. М., Новиков С. П.— ДАН АН СССР, 1976, т. 229, вып. 1, с. 15.
3. Захаров В. Е., Шабат А. Б.— Функц. анализ, 1979.
4. Дрюма В. С.— Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 19, вып. 12, с. 219.
5. Захаров В. Е., Шабат А. Б.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 3, с. 43.
6. Захаров В. Е., Манаков С. В.— Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 413.
7. Захаров В. Е.— ДАН СССР, 1976, т. 229, с. 1314.
8. Davey A., Stewartson K.— Proc. R. Soc. Lond., 1974, v. A338, p. 101.
9. Петвиашвили В. И.— Физика плазмы, 1976, т. 2, вып. 3 с. 650.
10. Bordag L. A., Its A. R., Matveev V. B., Manakov S. V., Zakharov V. E.— Phys. Lett., 1979, v. 63A, № 3, p. 205.
11. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.— ДАН СССР, 1970, т. 192, вып. 4, с. 753.
12. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.— УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55.
13. Кригевер И. М.— Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 2, с. 15.
14. Кригевер И. М.— ДАН СССР, 1976, т. 227, вып. 2, с. 291.
15. Burchnall J. L., Chaundy T. W.— Proc. Royal Soc. London, 1922, v. 21, p. 420.
16. Burchnall J. L., Chaundy T. W.— Proc. Royal Soc. London, 1928, Ser. A, v. 118, p. 557.
17. Baker H. E.— Proc. Royal Soc. London, 1928, Ser. A, v. 118, p. 573.
18. Кригевер И. М.— УМН, 1977, т. 32, вып. 6, с. 183.
19. Кригевер И. М.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 3, с. 20.
20. Кригевер И. М., Новиков С. П.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 4, с. 41.
21. Кригевер И. М., Новиков С. П.— ДАН СССР, 1979, т. 247, с. 33.
22. Moser J.— Adv. Math., 1975, v. 16, p. 354.
23. Кригевер И. М.— Функц. анализ, 1978, т. 12, вып. 1, с. 76.
24. Дубровин Б. А., Новиков С. П.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 12, с. 2131.
25. Airault H., McKean H. P., Moser J.— Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, № 1, p. 95.
26. Choodnovsky D. V., Choodnovsky G. V.— Nuovo Cimento, 1977, v. 40B, p. 39.
27. Бейтман Э. Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1967, т. 3.
28. Flaschka H.— Progr. Theor. Phys., 1974, v. 51, p. 703.
29. Манаков С. В.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, вып. 2, с. 543.
30. Кригевер И. М.— УМН, 1978, т. 33, вып. 4.
31. Mumford D., Van Moerbeke P.— Acta Mathem., 1979, v. 61, p. 225.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
В в е д е н и е. Слабая нелинейность и дисперсия	9
Г л а в а I. Метод обратной задачи рассеяния	20
§ 1. Сведения из теории рассеяния. Обратная задача квантовой теории рассеяния	21
§ 2. Схема интегрирования уравнения КдФ методом обратной задачи рассеяния	33
§ 3. Безотражательные потенциалы и N -солитонные решения	37
§ 4. Уравнение КдФ как гамильтонова система	44
§ 5. Полиномиальные интегралы движения	48
§ 6. Полная интегрируемость уравнения КдФ. Высшие уравнения КдФ	51
§ 7. Дифференциально-разностные системы	60
§ 8. Нелинейное уравнение Шредингера и уравнение sin-Gordon	74
§ 9. Обратная задача рассеяния для системы двух дифференциальных уравнений	78
§ 10. Нелинейное уравнение Шредингера	85
§ 11. Уравнение sin-Gordon	98
Г л а в а II. Периодические решения уравнения КдФ	112
§ 1. Уравнение Шредингера с периодическим потенциалом. Периодический аналог уравнений Гарднера — Грина — Крускала — Миуры	112
§ 2. Стационарная задача для высших КдФ. Метод отыскания точных решений КдФ	120
§ 3. Стационарные решения высших КдФ и потенциалы уравнения Шредингера с конечным числом зон. Римановы поверхности	127
§ 4. Аналитические свойства блоховской собственной функции конечнозонного потенциала на римановой поверхности	132
§ 5. Некоторые приложения	138
§ 6. Сведения из теории римановых поверхностей. Циклы на римановой поверхности	147
§ 7. Дифференциалы на римановых поверхностях. Абелевы (голоморфные) дифференциалы и дифференциалы с полюсами	158

§ 8. Блоховская собственная функция и квазиимпульс. Связанные с ними дифференциалы на римановой поверхности, их временная динамика	168
§ 9. Точные формулы для конечнозонных потенциалов и решений КдФ	178
§ 10. Некоторые частные решения КдФ	181
Глава III. Дальнейшее развитие методов построения интегрируемых систем и их решений	187
§ 1. Регулярная задача Римана	187
§ 2. Задача Римана с нулями	190
§ 3. Обратная задача рассеяния для матричной системы первого порядка	197
§ 4. Задача n -волн	209
§ 5. Солитонные решения	216
§ 6. Системы, интегрируемые при помощи задачи Римана	222
§ 7. Релятивистски-инвариантные системы — киральные поля	227
Глава IV. Асимптотики решений при больших временах	245
§ 1. Интегральные соотношения. Нелинейная дифракция Фраунгофера	247
§ 2. Явные формулы для асимптотик (нелинейное уравнение Шредингера)	251
§ 3. Явные формулы для асимптотик (уравнение Кортевега — де Фриза)	257
§ 4. Метод усреднения Уитема	261
Приложение. Теория уравнения Кадомцева — Петвиашвили (двумерного КдФ). Некоторые дискретные системы	285
§ 1. Некоторые интегрируемые двумерные системы	285
§ 2. Законы сохранения	289
§ 3. Метод одевания	291
§ 4. Солитоноподобные решения уравнения КП	294
§ 5. Точные решения, зависящие от функциональных параметров	298
§ 6. Метод римановых поверхностей. Конечнозонные решения ранга 1	300
§ 7. Рациональные решения уравнения КП. Дискретные системы частиц на прямой	304
§ 8. Метод голоморфных векторных расслоений над римановыми поверхностями. Функциональные параметры в точных решениях.	307
§ 9. Некоторые замечания о периодической цепочке Toda	315
Литература	317