

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

М.: Мир, 1986. — 360 с.

Книга крупного американского математика, отражающая современный взгляд на классическое вариационное исчисление. Она выгодно отличается от имеющейся литературы тщательным отбором материала, использованием современного математического аппарата, большим количеством разобранных примеров.

Автор известен нашему читателю по переводу двухтомника «Принципы алгебраической геометрии», написанного в соавторстве с Дж. Харрисом (М.: Мир, 1982).

Для математиков разных специальностей, специалистов по вариационному исчислению и геометрии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Введение	7
0. Предварительные сведения.	20
a. Обозначения из теории многообразий	20
b. Язык многообразий струй	22
c. Многообразия реперов	25
d. Дифференциальные идеалы	27
e. Внешние дифференциальные системы	31
I. Уравнения Эйлера — Лагранжа для дифференциальных систем с одной независимой переменной	35
a. Постановка задачи. Классические примеры	35
b. Уравнения в вариациях для интегральных многообразий дифференциальных систем	41
c. Дифференциальные системы в хорошей форме. Производный флаг и характеристики Коши	48
d. Вывод уравнений Эйлера — Лагранжа. Примеры.	63
e. Дифференциальная система Эйлера — Лагранжа. Невырожденные вариационные задачи. Примеры	81
II. Первые интегралы системы Эйлера — Лагранжа. Теорема Нетер и примеры	104
a. Первые интегралы и теорема Нётер. Некоторые классические примеры	104
b. Исследование системы Эйлера — Лагранжа для некоторых вариационных задач дифференциальной геометрии	136
1. Функционал $\int \kappa^2 ds$ для плоских кривых	136
2. Аффинная длина дуги	140
3. Функционал $\int \kappa^2 ds$ для пространственных кривых	145
4. Задача Делоне	151

III. Уравнения Эйлера для вариационных задач в однородных пространствах	155
а. Вывод этих уравнений	155
1. Мотивировки и идеи	155
2. Краткий обзор классического случая	157
3. Общие уравнения Эйлера	167
б. Исследование уравнений Эйлера для некоторых примеров из дифференциальной геометрии	172
1. Уравнения Эйлера, ассоциированные с функционалом $\int (\kappa^2 / 2) ds$ для кривых в E^n	172
2. Некоторые задачи п. 1, но для кривых в S^n	179
3. Уравнения Эйлера, ассоциированные с невырожденными линейчатыми поверхностями	184
IV. Граничные условия. Уравнения Якоби и вторая вариация. Уравнение Гамильтона — Якоби	191
а. Граничные условия	191
б. Якобиевы векторные поля и сопряженные точки. Примеры	209
с. Геометрия приведенного пространства импульсов. Вторая вариация, форма индекса и достаточные условия локального минимума	226
1. Геометрия пространства импульсов и приведенного пространства импульсов	229
2. Перенесение задачи о второй вариации на пространство импульсов	232
3. Уравнение Якоби и вторая вариация	234
д. Поля и уравнения Гамильтона — Якоби. Новые достаточные условия локального минимума	241
е. Смешанные граничные условия и классическая задача Лагранжа	268
1. Хорошо поставленные смешанные вариационные задачи	268
2. Задача Лагранжа	273
3. Классический подход к задаче Лагранжа	281
4. Некоторые смежные примеры	288
<i>Приложение. Различные замечания и примеры</i>	296
а. Задачи с интегральными ограничениями. Примеры	296
б. Некоторые классические задачи, рассмотренные методом подвижных реперов	307
1. Движение по Ньютону	307
2. Брахистохрона	311
3. Минимальная поверхность вращения	313
Литература	315
<i>Добавление. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович. Неголономные задачи и геометрия распределений</i>	318
§ 1. Введение	318
§ 2. Распределения, дифференциальные системы и кораспределения	321

1. Определения. Теорема Фробениуса	321
2. Вектор роста, распределение общего положения и вопросы классификации	325
3. Двойственные формулировки. Пфафова система и кораспределение	326
§ 3. Условная вариационная задача с неголономными связями и неголономная риманова геометрия	327
1. Теорема Рашевского — Чжоу и постановка задачи.	32/
2. Уравнения Эйлера— Лагранжа и неголономная метрика.	328
3. Задачи Коши	329
4. Неголономное экспоненциальное отображение.	330
5. Теорема о параллелепипеде	331
6. Геометрия неголономной ε -сферы и ее особенности	332
§ 4. Задачи неголономной механики. Усеченная связность	339
1. Механика со связями	339
2. Проектирование и усеченная связность	341
3. Сравнение механической и вариационной задач	342
§ 5. Алгебраические инварианты. Нормальные формы струй наборов векторных полей	343
1. Свободные алгебры Ли и целочисленные инварианты наборов векторных полей	343
2. Теоремы о росте и общность положения	345
3. Открытая и всюду плотная орбита в пространстве наборов струй векторных полей	346
4. Универсальный пример набора векторных полей максимального роста	347
Литература	348
Именной указатель	350
Предметный указатель	351
Список обозначений	356

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Александров А. Д.	319	Гриффите Дж. Ф. (Jeanett Field Griffiths)	7
Арнольд В. И.	6, 157, 348	Гриффите Ф. (P. Griffiths)	318—323, 327, 328
Бляшке (W. BlaSchke)	15	Д'Арканджело (Renate D'Arcangelo)	19
Брайент (R. Bryant)	19, 118, 119	Дирак (P. Dirac)	319
Вагнер В. В.	327, 348	Каратеодори (C. Caratheodory)	38, 319, 327
Вейнстейн (Weinstein)	159	Картам (E. Cartan)	5, 318, 319, 326
Вершик А. М.	6, 318, 320, 341	Кириллов А. А.	9, 161, 166
Вессьо (Vessio)	326	Козлов В. В.	348
Витт (E. Witt)	343	Костант (B. Kostant)	9, 16
Вранчану (G. Vranceanu)	348	Кэлера (E. Kahler)	49
Галуа (E. Galois)	5		
Герц (H. Hertz)	348		
Гершкович В. Я.	6, 318, 320		
Глакк (H. Gluck)	80		

Лагранж (J. Lagrange) 7
 Ли П. (P. Li) 127
 Ли С. (S. Lie) 161
 Майер (A. Mayer) 368
 Марсден (J. Marsden) 159
 Миrolло (R. Mirollo) 19
 Мнёв Н. Е. 336
 Мозер (J. Moser) 110
 Нейштадт А. И. 348
 Нётер (E. Noether) 14
 Радон (J. Radon) 15
 Рашевский П. К. 319, 327
 Синг (J. L. Synge) 348
 Стернберг (S. Sternberg) 322
 Сурьо (J.-M. Souriau) 9, 16
 Схоутен (J. Schouten) 348
 Уиллмор (T. J. Willmore) 127, 128
 Фаддеев Л. Д. 320, 341
 Филиппов А. Ф. 328
 Херманн (R. Hermann) 326
 Хёрмандер (L. Hormander) 319
 Холл (M. Hall) 343
 Черн (=Чжэнь) (S. S. Chern) 14
 Чжоу (W. L. Chow) 54, 327
 Эйлер (L. Euler) 280
 Яу (S. T. Yau) 127

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

При повторении слова иногда заменяются на тире, даже если они имеют другие окончания. На возможность изменения окончания указывает курсивный шрифт (например, алгебраическая).

алгебраическая вариационная задача
 115
 — идеал, порождённый набором
 форм 27
 — интегрируемость в квадратурах
 115
 — первый интеграл 115
 ассоциированная система 55
 аффинная геодезическая 40
 — длина Дуги 40, 141
 — кривизна 141
 — нормаль 142
 — репер 25
 — — *Френе* 141
 бинормаль 145
 брахистохрона 274, 311
 вариационная задача 11
 — алгебраическая 115
 — — классическая 36
 — — — k -го порядка 39
 — — невырожденная 13, 88
 — — положительная 18
 — — с ограничениями 38
 — — сильно невырожденная 14, 98
 — — смешанная хорошо
 поставленная 272
 — — хорошо поставленная 193
 вариация 41
 — допустимая 194
 — инфинитезимальная 42
Вейерштрасса E -функция 266
 — — для вариационной задачи
 второго порядка 267
 вектор роста 325, 344
 вертикальный касательный вектор 22
 взаимно достижимые точки 54—55
 внешняя дифференциальная система
 31
 — — — на многообразии 1-струй
 каноническая 32 волновой фронт 250,
 332
 вполне интегрируемая гамильтонова
 система 120
 — — пфаффов дифференциальный
 идеал 28
 вторая вариация 232
 — квадратичная форма 126
Гамильтона уравнения 90
 — функция см. гамильтониан
Гамильтона — *Якоби*
 уравнение 244, 250
 гамильтониан 108, 111
 гамильтонова система вполне
 интегрируемая 120

- форма уравнений *Эйлера* —
 - Лагранжа* 119
- гауссова кривизна 74
- Гейзенберга* группа 333
- геодезическая 38
- аффинная 40
- кривизна кривой 73
- на римановом многообразии 38
- — поверхности 75
- поле 242
- Гессе* матрица 103
- Гильберта* инвариантный интеграл 242
- гиперэллиптическая кривая 117
- главные моменты инерции 164
- оси инерции 164
- голономный 274, 348
- ограничения 50, 273
- горизонтальная дифференциальная форма 22
- граничное подрасслоение 230
- условия на допустимые вариации 194
- — сопряжённые 211
- грассманово многообразие 28
- расслоение 28
- группа *Гейзенберга* 333
- ортогональная 338
- Дарбу* репер 129
- теорема 30, 56
- действия функционал 37
- функция 247
- Делоне* задача 15, 151
- дифференциал $\delta\Phi$ 65
- дифференциальной идеал 27
- — порожденный набором форм 27
- ограничение 289
- система 31, 322
- — алгебраическая 115
- — вполне неголономная 323
- — индуцированная 51
- — каноническая 32
- — *Эйлера* — *Лагранжа* 13, 87
- форма горизонтальная 22
- длина дуги аффинная 141
- допустимая вариация 194
- замена корепера 95
- кривая 318
- достижимые взаимно точки 54—55
- задача *Делоне* 15, 151
- изопериметрическая 297
- *Лагранжа* 10, 11, 273
- о брахистохроне 274, 311
- — — в сопротивляющейся среде 276
- *Панна* 297
- закон *Ньютона* 70
- сохранения полной энергии 110
- идеал семейства *Холла* 344
- изопериметрическая задача *Панна* 297
- изотропное граничное расслоение 230
- плоскость (для внешней 2-формы) 243
- импульсов пространство 13, 87
- — приведённое 17, 194
- инвариантный интеграл *Гильберта* 242
- инволюция (функции в инволюции) 120
- индекс поворота кривой 81
- индекса форма 18, 235
- индикатриса 251
- индуцированная дифференциальная система 51
- инерции момент 164
- эллипсоид 164
- интегральное многообразие внешней дифференциальной системы 31
- — дифференциального идеала 27
- ограничения 296
- элемент внешней дифференциальной системы 31
- — дифференциального идеала 28
- интегрируемость в квадратурах

- алгебраическая 115
- инфинитезимальная вариация 42
- — — многообразия, удовлетворяющая смешанным граничным условиям 269
- симметрия вариационной задачи 106
- каноническая — — — внешняя дифференциальная система на многообразии 1-струй 32
- 1-форма 21
- поднятие иммерсии 60
- Картана А.* формула 21
- Картана Э.* лемма 98
- — метод многоугольника 143
- — система (ассоциированная с 2-формой) 30, 56
- — структурное уравнение для формы кривизны 215
- — число 52
- касательное пространство к $\mathcal{V}(I, \omega)$ 41, 47
- расслоение проективизированное 82
- квадратичная — — — форма, ассоциированная с вариационной задачей 98
- квазиинтегрируемость в квадратурах 77, 117
- квазиоднородность 335
- кеплерово движение 311
- кинетическая энергия 37
- классическая вариационная задача 36
- — — невырожденная 13, 88
- — — с ограничениями 38
- — — — — k -го порядка 40
- — — k -го порядка 39
- уравнения *Якоби* в гамильтоновой форме 223
- Клеро* теорема 115
- ковариантная производная на римановом многообразии 213
- конфигурационное пространство 162
- коприсоединённое представление 160
- корепера допустимая замена 95
- Костанта* — *Сурьо* теорема 157, 161
- Коши* характеристическая система 56
- кривая постоянного типа 156, 168
- рациональная нормальная 141
- согласованная с распределением 318
- кривизна аффинная 141
- гауссова 74
- геодезическая 73
- средняя 127
- кривизны кривой 173
- кривизный оператор 216
- Кристоффеля* символы 70
- кручение 145
- Лагранжа* множители 281, 328
- лагранжево подпространство 244
- лагранжиан 36, 328
- второго порядка 39
- однородный 113
- Лежандра* преобразование 93
- Ли* производная 21
- линейчатая поверхность 186
- локально вложимая пфафхова система 52
- локальный минимум 228
- — сильный 228
- — слабый 228
- матрица связности 213
- Маурера* — *Картана* уравнение 22
- — форма 22
- метод характеристик 257
- механическая система 37
- минимум локальный 228
- сильный 228
- слабый 228
- многообразие риманово 38
- струй 22
- *Штифеля* 200, 240
- множители *Лагранжа* 281, 328
- модифицированная скобка *Пуассона* 105

момент инерции 164
Мопертюи принцип 114
 наименьшего действия принцип 37
 невырожденная вариационная задача
 13, 88
 — — — классическая 90, 93, 118
 — — — со смешанными граничными
 условиями 270
 — кривая в грассманиане 186
 — функционал Φ 90, 93
 неголономный 274, 348
 — геодезическая 329
 — — поток 330
 — метрика 329
 — ограничения 38, 273
 — сфера 322
 — экспоненциальное отображение
 331
 независимости условие 32
 — форма 32
 независимых переменных число 31
Нетер теорема 107
 нормаль аффинная 142
 нормальное расслоение 20
 — форма *Пфаффа* — *Дарбу* 31
Ньютона закон 70
 ньютоново движение 307
 ограничения 38, 50, 273
 — голономные 38, 273
 — интегральные 296
 — неголономные 39, 273
 однородный лагранжиан 113
 омбилика 188
 оператор кривизны 216
 орбита (точки) коприсоединенного
 представления 160
 ортогональная группа 338
Паппа изопериметрическая задача
 297
 первыш интеграл вариационной
 задачи 104
 — алгебраический 115
 — продолжение внешней

дифференциальной системы 60
 — — многообразия 83
 — производная система 50 плоскость
 изотропная 243
 плюккерovy координаты 184
 поднятие иммерсии каноническое 60
 — *Френе* 168
 поле (геодезическое) 242
 — реперов 212
 полныш интеграл уравнения
 Гамильтона — *Якоби* 254
 — энергия 93
 постоянного типа кривая 156, 168
 потенциальная энергия 37
 правило множителей *Лагранжа* 281
 преобразование *Лежандра* 93
 приведённое пространство
 импульсов 17, 194
 принцип *Мопертюи* 114
 — наименьшего действия 37
 присоединённое представление 160
 приспособленный к подрасслоению
 базис 53
 продолжение многообразия первое
 60
 — первое 60
 — универсальное 59
 проективизированное касательное
 расслоение 82
 производная *Ли* 21
 — отображение, ассоциированное с
 пфаффовой системой 50
 — система 54
 — — первая 50
 — флаг 54
 пространственная форма 77
 пространство импульсов 13, 87
 — — приведённое 17, 194
 — конфигурационное 162
Пуассона скобка 120
 — — модифицированная 105
 пучок 321
Пфаффа — *Дарбу* теорема 31

пфаффов дифференциальный идеал
 27
 — — — вполне интегрируемый 28
 — система 10, 29
 — — в хорошей форме 49
 — — локально вложимая 52
 ранг 2-формы 29
 распределение 29, 318, 322
 — голономное 318
 — инволютивное 29, 323
 — интегрируемое 318
 — неголономное 318
 — неинтегрируемое 318
 расслоение единичных сфер 212
 рафинированные структурные
 уравнения 53
 рациональная нормальная кривая 141
 регулярный росток распределения
 325
 репер 25
 — аффинный 25
 — *Дарбу* 129
 — *Френе* 9, 145
 — — аффинный 141
 решение дифференциальной системы
 Эйлера — Лагранжа со
 смешанными граничными
 условиями 272
 — уравнения *Гамильтона — Якоби*
 244
 риманова метрика 37
 — многообразие 38
 связи 273
 — голономные 273
 — конечные 273
 связности матрица 213
 сдвиг по времени 109
 семейство *Холла* 343
 сильно невырожденная вариационная
 задача 14, 98
 сильный локальный минимум 228
 символы *Кристоффеля* 70
 симплектическая структура 119

— форма стандартная 21
 система ассоциированная 55
 — *Картана* 30, 56
 — механическая 37
 — производная 50, 54
 — характеристическая *Коши* 56
 скобка *Пуассона* 120
 — — модифицированная 105
 слабый локальный минимум 228
 слой 29
 смешанные граничные условия 269
 — пучок 330
 сопряжённые граничные условия 211
 сохраняемые величины 104
 средняя кривизна 127
 стабилизация 322
 стандартные локальные координаты
 на многообразии 1-струй 23
 — симплектическая форма на
 касательном расслоении 21
 степень неголономности 323
 струй многообразие 22
 структурное уравнение *Картана* 215
 — — поверхности 74
 — — подвижного репера 26
 — — рафинированные 53
 твёрдое тело 162
 теорема *Дарбу* 30, 56
 — *Картана — Кэлера* 12, 58
 — *Клеро* 115
 — *Костанта — Сурьо* 157, 161
 — *Нетер* 107
 — о всюду плотной орбите 346
 — о квазитреугольной форме 346
 — о параллелепипеде 332
 — *Пфаффа — Дарбу* 40
 — *Фробениуса* 38, 323
 — *Холла — Витта* 343
 — *Чжоу* 70
 — *Якоби* 243
 тришкин кафтан 239
 универсальное продолжение 59
 уравнения в вариациях для

интегрального многообразия 47
 — — — — функционала 36
 — *Гамильтона* — *Якоби* 244
 — — — для классической
 вариационной задачи 250
 — *Маурера* — *Картана* 22
 — *Ньютона* 308
 — *Пфаффа* 60
 — *Френе* — *Серре* 145, 173
 — *Эйлера*, ассоциированные с
 вариационной задачей 169
 — — для левоинвариантного
 лагранжиана на группе *Ли* 159
 — *Эйлера* — *Лагранжа* 11, 12, 36, 68,
 69
 — — — для хорошо поставленной
 смешанной вариационной
 задачи 272
 — *Якоби*, ассоциированные с
 нормальным векторным полем
 вдоль геодезической 216
 — — классические в гамильтоновой
 форме 223
 усечённая связность 341
 условие независимости 32
 флаг производный 69
 форма индекса 18, 235
 — *Маурера* — *Картана* 22
 — независимости 32
 — пространственная 77
 — связности 213
 формула *А. Картана* 29
 — *Римана* — *Гурвица* 154
Френе поднятие 168
 — репер 9, 145
 — — аффинный 141
Френе — *Серре* уравнения 145, 173
Фробениуса теорема 29
 функционал Φ 36
 — действия 37
 функция *Гамильтона* см.
 гамильтониан
 — действия 247

— *Лагранжа* 328
 — эллиптическая 78
 характеристик метод 257
 характеристическое векторное поле
 258
 — направление, ассоциированное с
 2-формой 29
 — система *Коши* 56
 хорошая форма пфафовой системы
 49
 хорошо поставленная вариационная
 задача 193
 — — смешанная вариационная
 задача 272
 циклическая координата 110, 112
Чжоу теорема 55
 число *Картана* 52
 — независимых переменных в
 дифференциальной системе 31
Штифеля многообразие 200, 240
Эйлера тождество для однородных
 функций 113
 — уравнения 16
 — — ассоциированные с
 вариационной задачей 169
 — — для левоинвариантного
 лагранжиана на группе *Ли* 159
Эйлера — *Лагранжа*
 дифференциальная система 13,
 87
 — — уравнения 11, 12, 36, 68, 69
 — — — для хорошо поставленной
 смешанной вариационной
 задачи 272 экспоненциальное
 отображение 331
 экстремаль 11, 36
 эллипсоид инерции 164
 эллиптическая функция 78
 энергия кинетическая 37
 — полная 93
 — потенциальная 37
Якоби уравнения, ассоциированные с
 нормальным векторным полем *А*

вдоль геодезической 216
— — классические в гамильтоновой
форме 223
якобиевы векторные поля 211
Янга — Миллса внешний функционал
127
 C^∞ -топология *Уитни* 345

E -функция *Вейерштрасса* 266
— — для вариационной задачи
второго порядка 267
 k -струя 22
 Q -рост 344
— максимальный 345

Вариационное исчисление занимает в математике особое место. С одной стороны, законы природы по какой-то не вполне понятой причине (не то естественнонаучного, не то психологического происхождения) часто формулируют в виде вариационных принципов. Отсюда — большой интерес к вариационному исчислению со стороны самых различных приложений, от небесной механики и теоретической физики до математической экономики и теории управления. С другой стороны, попытки решения разнообразных вариационных задач стимулировали развитие многих отделов математики (теория уравнений с частными производными первого порядка, симплектическая и контактная геометрия, теория Морса и т. д.).

Богатый материал, накопленный в этих исследованиях (главным образом в течение 18-го и 19-го веков) славится своей труднодоступностью и отсутствием современных изложений, особенно в вопросах, связанных с неголономными ограничениями.

Предлагаемая книга является одной из первых попыток привести весь этот материал в порядок. Автор, известный советскому читателю по замечательному учебнику алгебраической геометрии, изложил теорию неголономных вариационных задач с геометрической, инвариантной точки зрения. Тяжелый труд по наведению порядка оказался здесь неблагодарным в том отношении, что развиваемые автором общие методы мало что добавляют к решениям классических задач (см., например, трехстраничное доказательство того, что прямая — кратчайший путь между двумя точками на плоскости, в п. (IV. e. 51)).

Но автор, видимо следуя призыву Галуа из тюрьмы Сен-Пелажи («когда эгоизм перестанет царить в науках, когда для того, чтобы исследовать, будут объединяться, ...тогда будут стараться печатать малейшие замечания, как мало они ни были бы новы, и прибавлять «остального я не знаю»»), честно доводит до конца все вычисления, позволяя читателю легко освоить необходимый технический аппарат теории Картана.

По-видимому, во многих случаях сложность общего подхода автора объясняется выбранным им уровнем общности задач. В классической постановке, как правило, рассматривают лишь невырожденные ситуации, когда все необходимые определители отличны от нуля или все ранги постоянны. Автор, следуя обычаям алгебраической геометрии, предпочитает не накладывать никаких

или почти никаких ограничений типа постоянства ранга. Понятно, что это сразу же приводит к громоздко формулируемым ответам.

Дополнительную информацию о вариационных задачах с неголономными связями читатель найдет в добавлении «Неголономные задачи и геометрия распределений», написанном А. М. Вершиком и В. Я. Гершковичем. Например, здесь до конца просчитаны неголономные геодезические трехмерной группы Гейзенберга и определена форма соответствующей геодезической сферы — она оказывается удивительной поверхностью с бесконечным числом конических точек, накапливающихся к центру сферы.

Легко предвидеть, что в недалеком будущем вариационные задачи с неголономными ограничениями будут проанализированы с точки зрения теории особенностей. Вероятно, особенности, неустранимо встречающиеся в типичных системах, не так уж сложны, и по меньшей мере в простейших и важнейших из них удастся разобраться до конца.

Можно надеяться, что в дальнейшем геометрическом анализе этих и других проблем вариационного исчисления, где много остается еще сделать, примут участие и читатели настоящей книги.

В. Арнольд

ВВЕДЕНИЕ

Эта монография — пересмотренный и расширенный вариант записок лекций, прочитанных в 1981—1982 учебном году в Гарвардском университете, Нанкайском университете и Высшей школе при Китайской академии. Главная цель книги — изложить формализм вариационного исчисления для функционалов, областью определения которых служат интегральные многообразия некоторой внешней дифференциальной системы, сопроводив это изложение большим числом иллюстративных примеров. В качестве частного случая сюда включается задача Лагранжа об анализе классических функционалов с произвольными (как голономными, так и неголономными) связями. Побочная цель состоит в том, чтобы продемонстрировать «в работе» некоторые аспекты теории внешних дифференциальных систем. В самом деле, хотя вариационное исчисление — предмет весьма древний и почтенный, о котором трудно сказать что-нибудь новое¹⁾, нам кажется, что использование техники внешних дифференциальных систем, в том числе характеристик Коши, производного флага и продолжения, позволяет дать систематическое изложение предмета с большей, чем обычно, степенью общности и проливает новый свет даже на классическую задачу Лагранжа.

Книга разделена на четыре главы, причем большая часть общей теории представлена в первой и последней. Мы порываем с принятой традицией, уделяя необычно много места примерам. Возможно, еще большим отходом от традиций (или это возврат к прошлому?) является особый упор на явное интегрирование уравнений Эйлера—Лагранжа, уравнений Якоби, уравнений

¹⁾ Основными источниками по классической теории были для нас прекрасные книги [13], [29] и (в отношении изложения, использующего дифференциальные формы) [16]. Кроме того, укажем превосходные руководства [1], [2], [66], где можно найти обсуждение плодотворных связей между классической механикой и вариационным исчислением. Что касается современного инвариантного подхода к классической теории, основанного на использовании дифференциальных форм, очень полезными были для нас работы [31], [38] и [43] (а также [23] и [26]). Мы не пытались дать полную библиографию, а просто перечислили важнейшие наши источники, а также некоторые работы, которые дополняют (часто — примерами) материал этой книги.

Гамильтона—Якоби и т. д. в этих примерах; одним словом, мы хотим получать *формулы*. Значительная часть двух средних глав посвящена методам, позволяющим это делать; и здесь тоже теория внешних дифференциальных систем доставляет эффективный вычислительный аппарат ¹⁾.

За недостатком места и, что важнее, по той причине, что теория для случая нескольких переменных неполна в ряде решающих моментов, обсуждение ограничено случаем одной независимой переменной, т. е. мы рассматриваем функционалы, определенные на интегральных *кривых* внешней дифференциальной системы.

Теперь мы хотим привести пример, помогающий понять, зачем нужно развивать теорию в такой степени общности. Пусть $\gamma \subset \subset \mathbb{E}^n$ — гладкая кривая, заданная параметрически своим радиус-вектором $x(s) \in \mathbb{E}^n$, рассматриваемым как функция длины дуги. Хорошо известно, что, вообще говоря, у кривой γ есть кривизны $\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$, являющиеся эвклидовыми инвариантами и однозначно определяющие γ с точностью до эвклидова движения (при $n = 3$ это обычные кривизна и кручение). Рассмотрим функционал

$$\Phi(\gamma) = \int_{\gamma} L(\kappa_1(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)) ds \quad (1)$$

и поставим стандартные задачи типа: i) найти уравнения Эйлера—Лагранжа и проинтегрировать их явно, если это возможно; ii) найти уравнения Якоби и получить информацию о сопряженных точках; iii) показать, что если функция $L = L(\kappa_1, \dots, \kappa_r)$ зависит лишь от первых r кривизн и матрица $\|\partial^2 L / \partial \kappa_i \partial \kappa_j\|_{1 \leq i, j \leq r}$ положительно-определенна, то решение уравнений Эйлера—Лагранжа, не имеющее сопряженных точек, дает локальный минимум для функционала (1). Ясно, что эти задачи можно сформулировать в координатах как классические вариационные задачи высшего порядка, и столь же ясно, что в такой формулировке соответствующие вычисления будут весьма длинными. С другой стороны, мы можем рассмотреть репер Френе, ассоциированный с кривой γ , как кривую N в группе $E(n)$ эвклидовых движений. Тогда N является интегральным многообразием некоторой левоинвариантной внешней дифференциальной системы (I, ω) на $E(n)$, а функционал (1) можно рассматривать как инвариантный функционал, определенный на *произвольном* интегральном много-

¹⁾ Главным образом мы используем подвижные реперы для анализа уравнений Эйлера—Лагранжа в различных примерах, особенно в ситуациях, где действует группа симметрий. Основными источниками по теории подвижных реперов послужили нам [18], [34], [35] и [44]. Кроме того, мы привлекли много примеров из дифференциальной геометрии, особенно из римановой геометрии и теории поверхностей. По этому поводу рекомендуем [6], [15], [22], [28], [53], [63] и [64]. Снова подчеркнем, что это лишь одна из возможных выборов; дальнейшую литературу можно найти в упомянутых работах.

образии системы (I, ω) . Так как общий формализм вариационного исчисления применим и к функционалам, определенным лишь на интегральных многообразиях дифференциальных систем, можно надеяться, что в подобных примерах наша теория доставит эффективный вычислительный аппарат. Например, известно, что классическая теория движений твердого тела распространяется на лагранжианы, определенные с помощью левоинвариантных метрик на произвольной группе Ли (теория Кириллова—Костанта—Сурьо; см. [50] и [61]), и имеет смысл попытаться распространить эту теорию дальше на инвариантные функционалы, определенные лишь на интегральных многообразиях инвариантных внешних дифференциальных систем, и применить эти результаты к изучению функционала (1). Это будет сделано в гл. III¹⁾.

Опишем теперь подробнее содержание монографии; за объяснением обозначений и неопределенных понятий мы отсылаем к тексту (в конце книги есть указатель).

Глава 0 является подготовительной и предназначена исключительно для ссылок. (Предполагается, что читатель начинает с гл. I.) Прежде всего, в ней собраны некоторые термины и обозначения стандартной теории многообразий. Затем очень кратко описан язык многообразий струй и подвижных реперов; первый из них обеспечивает полезный формализм, позволяющий принимать производные за новые переменные (см. [31], [38], [43] и [62]). Второй также весьма полезен, поскольку общая кривая во многих однородных пространствах G/H имеет «репер Френе», т. е. каноническое поднятие в группу G (см. [34], [44]), а потому можно ожидать, что упомянутый выше анализ функционала (1) отражает достаточно общие явления. И наконец, в гл. 0 приведены некоторые из определений и элементарных фактов теории внешних дифференциальных систем. И вновь это делается, только чтобы зафиксировать язык; более существенные результаты теории появляются в тексте по мере надобности²⁾.

¹⁾ В связи с этим стоит отметить, что прекрасную мотивировку необходимости изучения инвариантных задач Лагранжа на однородных пространствах дает теория управления. В ней много общего с содержанием гл. III; сохлещем на [7], [9], [10] и [43] (где можно найти ссылки и на другие работы).

²⁾ Основные классические руководства здесь — это [17] и [47]. Внешние дифференциальные системы обсуждаются в [11], [12], [23], [32], [33], [42], [52], [60], [62]. Наши обозначения и терминология взяты из сборника [11] и (долженствующего в скором времени появиться) его «преемника» [12]. На самом деле, если оставить в стороне ряд относительно простых тем, таких как теорема о характеристиках Коши ([11], § 2) и теорема Пфаффа—Дарбу ([11], § 3), которые обе объясняются ниже, эта книга не опирается на изложенную в [11] теорию внешних дифференциальных систем.

В случае вариационного исчисления для нескольких независимых переменных требуются и более глубокие разделы теории внешних дифференциальных систем, такие как продолжение и инволюция и теория характеристических многообразий.

В гл. I объясняется общая обстановка и выводятся основные уравнения теории — уравнения Эйлера—Лагранжа. Предположим, что нам задана внешняя дифференциальная система (I, ω) на многообразии X . Обозначим через $\mathcal{V}^0(I, \omega)$ множество интегральных многообразий $N \subset X$ системы (I, ω) . В дополнение к упомянутым выше поднятиям Френе рассмотрим в качестве еще одного примера задачу Лагранжа ¹⁾. Обозначим через $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ пространство 1-струй отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^m$. На пространстве $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ имеются естественная система координат $(x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m)$ и канонический дифференциальный идеал I_0 , порожденный формами Пфаффа

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx, \quad \alpha = 1, \dots, m^2).$$

Если положить $\omega = dx$, то множество $\mathcal{V}^0(I_0, \omega)$ состоит из 1-струй $x \mapsto (x, y(x), dy(x)/dx)$ параметризованных кривых в $\mathbb{R}^m$. Пусть $X \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ — подмногообразие и (I, ω) — ограничение системы (I_0, ω) на X . Можно считать, что X определено уравнениями

$$g^0(x, y, \dot{y}) = 0 \quad (2)$$

и что $\mathcal{V}^0(I, \omega)$ состоит из 1-струй параметризованных кривых, удовлетворяющих ограничениям

$$g^0\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) = 0.$$

В частном случае ограничения (2) имеют вид

$$g_\alpha^0(y) \dot{y}^\alpha = 0.$$

Тогда они соответствуют подрасслоению $W^* = \text{span} \{g_\alpha^0(y) dy^\alpha\}$ кокасательного расслоения над $\mathbb{R}^m$ (или, двойственным образом, некоторому подрасслоению касательного расслоения, т. е. некоторому распределению). [З а м е ч а н и е. В общем случае дифференциальный идеал на многообразии M , порожденный сечениями некоторого подрасслоения $W^* \subset T^*(M)$, будем называть *пфафовой дифференциальной системой*. По существу все дифференциальные идеалы в этой книге имеют такой вид. Однако зачастую они будут определены на многообразиях, лежащих над интересующими нас многообразиями.]

¹⁾ По поводу классической теории задачи Лагранжа см. [13, гл. 18], а изложение более современных результатов и соответствующие ссылки на литературу можно найти в [43].

²⁾ Здесь мы можем заменить $\mathbb{R}^m$ произвольным многообразием M .

Другой частный случай ограничений (2) определяется каноническими вложениями

$$J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^l) \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{k(l)})$$

многообразий высших струй в 1-струй¹⁾.

Возвращаясь к общей ситуации, предположим, что на X задана дифференциальная форма φ , и рассмотрим функционал

$$\Phi(N) = \int_N \varphi, \quad N \in \mathcal{V}(I, \omega). \quad (3)$$

В конечном счете мы ограничим функционал Φ на такие N , которые удовлетворяют подходящим граничным условиям или условиям в концевых точках, но это довольно тонкий предмет, включающий в себя структурную теорию системы (I, ω) . В частности, на первый взгляд представляется, что тут надо ввести производный флаг идеала I , который, грубо говоря, показывает, сколько производных включено в I . Граничные условия будут обсуждены в гл. IV; в гл. I мы просто уклоняемся от этого вопроса и рассуждаем формально.

Под *вариационной задачей* $(I, \omega; \varphi)$ будет пониматься анализ функционала (3). Если мы примем

$$\varphi = L(x, y, \dot{y}) dx,$$

то для подмногообразия $X \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, задаваемого приведенными выше уравнениями (2), задача $(I, \omega; \varphi)$ есть классическая вариационная задача с ограничениями (задача Лагранжа). Другой пример дается функционалом (1). В общем случае ясно, что понимание вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$ включает в себя знание по крайней мере части структуры системы (I, ω) и того, как связана 2-форма $d\varphi$ с этой структурой.

Первый пункт «повестки дня» — вывод *уравнений Эйлера—Лагранжа*, выражающих условие, что многообразие $N \in \mathcal{V}(I, \omega)$ является *экстремалью* задачи $(I, \omega; \varphi)$; это означает, что «дифференциал» функционала Φ должен вырождаться в точке N :

$$\delta\Phi(N) = 0. \quad (4)$$

Для задачи Лагранжа этот пункт до некоторой степени выполнен в классическом трактате [13] и обсуждается во многих других руководствах (например, в [5] и [40]). При традиционном под-

¹⁾ Это просто представление системы обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка в виде (намного более обширной) системы первого порядка путем замены промежуточных производных независимыми переменными. Одна из традиционных трудностей исследования задачи Лагранжа в полной общности — как распознать, «замаскированной версией» задачи какого порядка может быть данная задача первого порядка. Мы обнаружим, что этот вопрос можно весьма естественно сформулировать в общей постановке в терминах внешних дифференциальных систем.

ходе используются множители Лагранжа. В общем случае очевидная трудность при выводе уравнений Эйлера—Лагранжа состоит в том, что не все, а лишь некоторые нормальные к подмногообразию $N \subset X$ векторные поля представляют инфинитезимальные вариации многообразия N как *интегрального многообразия системы* (I, ω) (см., например, [13, с. 344]). В частности, у многообразия $N \in \mathcal{V}(I, \omega)$ может совсем не существовать таких инфинитезимальных вариаций с компактным носителем, и потому на первый взгляд кажется, что уже на этом этапе мы должны заботиться о граничных условиях, втягиваясь тем самым в структурную теорию системы (I, ω) и основательно рискуя завязнуть в самом начале.

Этой трудности можно избежать, действуя в обход. Стоит только предположить существование *в полной общности* уравнений Эйлера—Лагранжа, обладающих определенными функториальными свойствами, как эвристические рассуждения приводят к единственной и замечательно симметричной системе уравнений, которые «должны» быть уравнениями (4)¹⁾. Вместо того чтобы обосновывать эти эвристические рассуждения, мы просто назовем получающиеся уравнения уравнениями Эйлера—Лагранжа, ассоциированными с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$, и перейдем к изучению этих уравнений самих по себе.

Несколько подробнее: поставив в разд. а гл. I вариационную задачу, мы определяем в разд. b «касательное пространство» $T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$ как ядро некоторого линейного дифференциального оператора на нормальных векторных полях (см. (I.b.16); здесь нам была полезна работа [38]). Чтобы достичь лучшего понимания пространства $T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$, мы обращаемся в разд. c к структурной теории пфаффовых дифференциальных систем. В частности, обсуждаются *характеристики Коши, производный флаг*, важные понятия *пфаффовой системы в хорошей форме* и ее основного инварианта — *числа Картана* s_1 и, наконец, *продолжение* внешней дифференциальной системы. При этом мы устанавливаем справедливость «инфинитезимальной теоремы Картана—Кэлера», утверждающей, что общее поле $v \in T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$ зависит от s_1 произвольных функций одной переменной (и некоторого числа постоянных).

В разд. d определяются уравнения Эйлера—Лагранжа (см. (I.d.14)) и просчитывается ряд примеров с целью показать, что в классических случаях это определение дает правильный

¹⁾ Занятым побочным продуктом является инвариантная интерпретация «подлежащих определению функций λ_α »: если I — дифференциальный идеал, порожденный подрасслоением $W^* \subset T^*(X)$, то решающую роль в теории играет ограничение на W^* стандартной канонической 1-формы на $T^*(X)$; эта 1-форма и есть λ .

ответ. Мы также анализируем уравнения Эйлера—Лагранжа, отвечающие функционалу

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2 ds, \quad (5)$$

где γ — кривая на некоторой поверхности S , а κ — ее геодезическая кривизна. Оказывается, что в случае, когда S имеет постоянную гауссову кривизну, эти уравнения можно явно проинтегрировать в эллиптических функциях, модуль которых зависит от кривизны поверхности S и «уровня энергии».

В разд. е делается основной шаг при таком изложении теории: уравнения Эйлера—Лагранжа представляются в виде пфафовой дифференциальной системы (J, ω) на ассоциированном многообразии Y , которое мы называем *пространством импульсов* (см. теорему (I.e.9)). [З а м е ч а н и е. Хотя мы даем явную конструкцию системы (J, ω) на Y , ее очень просто объяснить с точки зрения общей теории внешних дифференциальных систем. А именно, уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) содержат таинственные «подлежащие определению функции λ_α ». Мы присоединяем эти функции λ_α в качестве новых переменных, записываем окончательные уравнения в виде дифференциальной системы, и система (J, ω) — не что иное, как инволютивное продолжение этой системы.] Для невырожденных классических вариационных задач без ограничений многообразие Y совпадает с обычным пространством импульсов $\mathbb{R} \times T^*(M)$, где $X = \mathbb{R} \times T(M)$, но в общем случае даже его размерность зависит от числовых инвариантов задачи $(I, \omega; \varphi)$, в частности от числа Картана. Мы называем систему (J, ω) *системой Эйлера—Лагранжа*. Обратим внимание на тот замечательный факт, что несмотря на очевидную общность вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$ система (J, ω) является очень простой стандартной пфафовой системой: на Y существует канонически заданная 1-форма ψ_Y с внешним дифференциалом $\Psi_Y = d\psi_Y$, и идеал J — это характеристическая система Коши (т. е. $\Psi_Y^\perp$) для 2-формы Ψ_Y . В частности, *невырожденную вариационную задачу* $(I, \omega; \varphi)$ естественно определить как задачу, для которой $\dim Y = 2m + 1$ (при некотором натуральном числе m) и

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^m \neq 0. \quad (6)$$

Все «естественные» примеры оказывались до сих пор невырожденными в этом смысле. По теореме Пфаффа—Дарбу система Эйлера—Лагранжа невырожденной вариационной задачи имеет стандартную локальную нормальную форму; зачастую эта нормальная форма является и глобальной.

Затем в том же разд. е мы связываем с каждой вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$, удовлетворяющей некоторому слабому условию

на внутреннюю структуру (которое выполняется почти во всех наших примерах и которому удовлетворяет также любое продолжение нашей системы), некую квадратичную форму Q . Если I — пфаффов дифференциальный идеал, порожденный подрасслоением $W^* \subset T^*(X)$, и подрасслоение $W_1^* \subset W^*$ порождает первую производную систему, то форма Q является по существу квадратичной формой на расслоении $(W^*/W_1^*)^*$, имеющем ранг s_1 . Вариационная задача называется *сильно невырожденной*, если форма Q невырожденна в каждой точке, и мы доказываем, что

сильная невырожденность $\Rightarrow$ невырожденность.

Оказывается, что сильно невырожденные задачи обладают тем важным свойством, что на их основные структурные свойства влияет не весь производный флаг, а лишь первая производная система.

Прежде чем продолжать это введение, мы хотели бы подчеркнуть, что, по нашему мнению, многочисленные разбросанные по тексту примеры столь же важны, как и общая теория (а может быть, и еще важнее). Далее, эти примеры, равно как и общая теория, показывают, что внешние дифференциальные системы дают эффективную с вычислительной и естественную с теоретической точки зрения постановку вариационного исчисления. Эта мысль никоим образом не оригинальна ¹⁾, и в связи с этим мы хотели бы отметить как особенно полезные для нас работы [16], [31] и [38]. Хотя они и посвящены по большей части задачам без ограничений (см., однако, [40]), в них содержатся инвариантные формулировки классической теории с использованием расслоений струй и дифференциальных форм, и мы много почерпнули из них.

Как уже упоминалось, одно из центральных мест в этой монографии занимают вариационные задачи $(I, \omega; \varphi)$, для которых дифференциальные системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) разрешимы в явном виде в старомодном смысле «подходящей» интегрируемости в квадратурах. Наиболее полезным инструментом здесь служит теорема Эмми Нётер [55] (надлежащим образом обобщенная), которая связывает с каждой инфинитезимальной симметрией задачи $(I, \omega; \varphi)$ первый интеграл системы (J, ω) . В разд. b гл. II, используя теорему Нётер в сочетании с общим формализмом, мы показываем, что некоторые естественные дифференциально-геометрические вариационные задачи квазиинтегрируемы в квадратурах. Один из примеров доставляет появляющийся в физических рассматриваниях функционал

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2 ds \quad (\kappa \text{ — кривизна}), \quad (7)$$

¹⁾ Например, Черн как-то упомянул в беседе, что одно время он изучал классические уравнения Эйлера—Лагранжа в такой постановке.

определенный на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^3$. Частичный результат, касающийся этого функционала, принадлежит Радону [57] и обсуждается в книге Бляшке [3]. При использовании введенного к настоящему моменту формализма по существу *априори* известно, что уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (7), квазиинтегрируемы в квадратурах, и отсюда легко вывести их интегрируемость. То же самое верно и для ассоциированной с функционалом (7) вариационной задачи с интегральным ограничением

$$\int_{\gamma} ds = l = \text{const}$$

(оказывается, что на поверхности постоянной кривизны эта задача эквивалентна задаче без ограничений для функционала (7)) и для задачи Делоне

$$\Phi(\gamma) = \int_{\gamma} ds \text{ с ограничением } \kappa = \text{const}, \quad (8)$$

которая широко обсуждалась в классических работах (изложение соответствующих результатов можно найти в [14]). «Фазовые портреты» уравнений Эйлера—Лагранжа, связанных с функционалами (7) и (8), задают соответственно соответственно эллиптическими и рациональными алгебраическими кривыми.

Из этих примеров начинает вырисовываться тот общий факт, что если положить в основу конструкцию

$$(I, \omega; \varphi) \text{ на } X \rightarrow (J, \omega) \text{ на } Y,$$

то вычисление первых интегралов, а позднее уравнений Якоби носит алгоритмический характер. При практическом осуществлении этого алгоритма решающим шагом является вычисление структурных уравнений дифференциальной системы (I, ω) и соотнесение 2-формы $d\varphi$ этим уравнениям. Если это проделано, то определение системы (J, ω) , первых интегралов, уравнений Якоби и т. д. сводится к формальным алгебраическим действиям, которые представляются весьма единообразными.

Как уже говорилось, мы ограничились в этой книге случаем одной независимой переменной. В более высоких размерностях, по-видимому, возникают еще более интересные задачи, и в связи с этим мы хотели бы привлечь внимание к функционалу ¹⁾

$$\Phi(M) = \frac{1}{k} \int_M \|II\|^k dA, \quad (9)$$

¹⁾ Здесь нам хотелось бы заметить, что экстремали функционала (7) появляются в физической задаче об определении формы, принимаемой куском гибкой проволоки или тонким ножовочным полотном (см. [25]). Подобным образом экстремали функционала, тесно связанного с функционалом (9), появляются при изучении движения вибрирующей пластинки см. [29]).

определенному на подмногообразиях $M^n \subset \mathbb{E}^{n+r}$, где $\|II\|$ — длина второй квадратичной формы¹⁾. В случае $n = 1$, $k = 2$ получаем функционал (7). В общем случае можно представлять себе, что функционал (9) находится в таком же отношении к функционалу (7), как функционал

$$V(M) = \int_M dA, \quad (10)$$

задающий минимальные поверхности, к функционалу, задающему геодезические. Чтобы свести задачи в высших размерностях к случаю одной независимой переменной, естественно обратиться к поверхностям вращения. В случае задачи о минимальной поверхности хорошо известно, что уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (10), интегрируемы в квадратурах (цепная линия). Используя теорему Нётер, мы можем почти (но не вполне) проинтегрировать очень интересные уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (9), для случая поверхностей вращения ($n = k = 2$, см. конец разд. а гл. II).

Как указывалось в начале введения, одна из целей этой книги состоит в исследовании вариационных задач для функционалов (3), где I — инвариантная внешняя дифференциальная система, а φ — инвариантная форма на группе Ли. Главной мотивировкой такого исследования является, конечно, тот уже упоминавшийся выше факт, что кривые общего положения γ во многих однородных пространствах G/H допускают канонические поднятия в интегральные многообразия некоторой инвариантной дифференциальной системы I на группе G . Далее, имеет место хорошо известное и красивое утверждение, согласно которому с любой левоинвариантной положительно-определенной квадратичной лагранжевой системой на произвольной группе Ли G связаны уравнения Эйлера, которые описывают движение вектора импульса λ вдоль интегральных кривых уравнений Эйлера—Лагранжа в двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . В частности, точка λ движется по орбитам коприсоединенного представления (Костант—Сурьо; см. указанные выше работы и приложение к [2]). В разд. а гл. III мы обобщаем эти результаты на случай инвариантной вариационной задачи (I , ω ; φ), а затем, используя полученные уравнения Эйлера и описание орбит коприсоединенного представления, интегрируем некоторые задачи, в том числе уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (7), определенным на кривых в римановом многообразии постоянной кривизны²⁾.

¹⁾ Определение длины второй квадратичной формы см. в работе Simons J., *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. — *Ann. Math.* (2), 1968, 88, 62—105. — *Прим. перев.*

²⁾ В частности, в [57] есть вычисления, в свое время казавшиеся нам несколько загадочными — непонятно было, на чем они основаны. Теперь они объясняются теоремой (III.a.25).

В связи с задачей Лагранжа на группах Ли мы хотели бы обратить внимание на статьи [8], [9], связанные с содержанием разд. а гл. III.

Вплоть до гл. IV уравнения Эйлера—Лагранжа остаются объектом, введенным только из эвристических соображений; в частности, еще не показано, что они дают критические значения функционала (3). На самом деле без указания граничных условий этому утверждению нельзя даже придать смысл. Исследование различных частных случаев приводит в разд. а гл. IV к естественному классу вариационных задач $(I, \omega; \varphi)$, называемых *хорошо поставленными*, граничные условия для которых задаются слоями канонического слоения на пространстве импульсов Y . Эта ситуация выражается диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \varpi \swarrow & & \searrow \pi \\ Q & & X \end{array} \quad (11)$$

где Q — факторпространство по граничному слоению (предполагается, что это факторпространство существует). Мы называем Q *приведенным пространством импульсов*, и понимание геометрии основной диаграммы (11) оказывается ключом к более глубоким аспектам теории ¹⁾.

В том же разд. а показывается, что для хорошо поставленных вариационных задач решения уравнений Эйлера—Лагранжа действительно дают критические точки ограничения функционала (3) на подмножества $\mathcal{V}(I, \omega; [A, B]) \subset \mathcal{V}(I, \omega)$, состоящие из интегральных многообразий, удовлетворяющих граничным условиям. Затем дается интерпретация граничных условий для ряда примеров ²⁾ и доказывается, что всякая сильно невырожденная вариационная задача хорошо поставлена.

В разд. б гл. IV для хорошо поставленных вариационных задач вводятся важные понятия *якобиевых векторных полей* и *сопряженных точек*. (Фактически определение уравнений Якоби имеет смысл и в общем случае.) Суть дела здесь в том, что мы «работаем» в пространстве импульсов Y , а не в X . Такое «поднятое» определение не только естественно с теоретической точки зрения, но и, как показывают примеры, позволяет проводить в некоторых ситуациях эффективные вычисления ³⁾.

¹⁾ Для классических вариационных задач первого порядка $Q = X$ и диаграмма (11) сводится к расслоению $T^*(X) \rightarrow X$. В общем случае мы обнаружим, что у этого расслоения, так сказать, две ипостаси, одна из которых реализуется отображением π , а другая — отображением $\tilde{\omega}$.

²⁾ Во всех случаях мы получаем корректные граничные условия.

³⁾ В трактате [13] уравнения Якоби приведены в канонических координатах; это эквивалентно «работе с поднятием».

В классическом вариационном исчислении существует тесная и очень красивая связь между уравнениями Якоби и второй вариацией. В общем случае попытки вычислить вторую вариацию «внизу на X » наталкиваются на значительные трудности, но при поднятии на Y ситуация становится весьма простой и изящной. Вновь, как и в классической задаче без ограничений, можно определить *форму индекса* как квадратичную форму на пространстве якобиевых векторных полей и установить простую связь между индексом и второй вариацией. Затем в разд. с доказывається, что если $(I, \omega; \Phi)$ — сильно невырожденная вариационная задача, для которой квадратичная форма Q положительно-определенна, то при всех достаточно близких граничных условиях решение уравнений Эйлера—Лагранжа доставляет локальный минимум для функционала (3). Этот результат является обобщением стандартного классического результата, но отнюдь не непосредственным обобщением, ибо суть дела, оказывается, в том, чтобы доказать, что в диаграмме (11) существует (единственная) внешняя дифференциальная система (G, ω) на приведенном пространстве импульсов Q , такая что

$$\tilde{\omega}^*G = \pi^*I_1,$$

где $I_1 \subset I$ — первая производная система (напомним, что Q — это квадратичная форма на $(W^*/W_1^*)^*$). Однако если последовательно развивать вариационное исчисление в общем контексте внешних дифференциальных систем и вводить лишь внутренние присущие этой теории понятия, то полученный результат станет весьма естественным, а доказательства будут не сложнее, чем в классическом случае.

Далее, в разд. d определяются аналоги классических понятий *поля* (иногда называемого геодезическим полем) и *уравнения Гамильтона—Якоби*. Просчитываются некоторые примеры, а затем, как и в классическом случае, с привлечением этих понятий показывается, что всякое решение уравнений Эйлера—Лагранжа положительно-определенной сильно невырожденной вариационной задачи, не содержащее пар сопряженных точек, доставляет локальный минимум функционалу (3). Снова существенным моментом в неклассическом случае является связь между первой производной системой и диаграммой (11).

В общем представляется, что понятие *положительной сильно невырожденной вариационной задачи* — добротное и полезное понятие; оно включает в себя классические случаи, а также задачу Лагранжа в достаточной общности и в то же время позволяет обобщить основные результаты классической теории.

Наконец, в разд. e мы специально обсуждаем классическую задачу Лагранжа. Показывается, что при незначительной модификации граничных условий эта задача укладывается в общую

теорию. Интересно, что наша теория *не сводится* к классическому методу множителей Лагранжа. Обсуждаются связь между ними и некоторые примеры.

В конце книги помещено приложение, посвященное некоторым интересным вопросам, не имеющим прямого отношения к основному содержанию книги. Во-первых, обсуждается, как определить и вывести уравнения Эйлера—Лагранжа для вариационных задач с интегральными ограничениями. Снова в результате записи уравнений Эйлера—Лагранжа в виде дифференциальной системы на вспомогательном многообразии вся процедура приобретает алгоритмический характер. Это иллюстрируется парой примеров.

Наконец, поскольку эта монография посвящена вариационному исчислению, было бы серьезным упущением ничего не сказать о классических задачах из этого предмета (задачи о брахистохроне, о минимальной поверхности вращения и т. д.). Конечно, трудно улучшить какое-нибудь из замечательных классических изложений; вместо этого мы проиллюстрировали наш общий подход инвариантной постановкой этих классических задач. Фактически мы рассматриваем их с помощью структурных уравнений подвижного репера.

Предполагается, что читатель знаком с основами общей теории многообразий и элементами теории групп Ли (в объеме, например, [6] или [64]). Кроме того, полезно, конечно, хотя формально и не необходимо, знакомство с классическим вариационным исчислением (см., например, [29]). В общем, как и почти всегда, самое важное, чтобы у читателя был некоторый опыт занятий математикой абстрактного толка (так называемая математическая зрелость).

Мне приятно поблагодарить многочисленных учеников и коллег, с которыми я обсуждал материал книги. Предварительный вариант текста был размножен Нанкайским университетом, и высказанные нанкайскими математиками замечания были для меня очень полезными. Весьма ценными были беседы с Робертом Брайентом как об общей теории внешних дифференциальных форм, так и о вариационном исчислении. Мне хотелось бы также поблагодарить Ренни Миролло за исключительно тщательную и полезную работу по чтению корректур. Особая моя признательность Ренате Д'Арканджело, изумительно напечатавшей невероятно неряшливую рукопись. Наконец, я благодарен фонду Гуггенхайма за финансовую поддержку во время написания книги.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

а. Обозначения из теории многообразий

(см. [6], [38], [64])

Многообразия мы будем обозначать буквами $M, N, X, Y, \dots$. Через $(x^1, \dots, x^n)$ обозначаются типичные локальные координаты на M ; иногда мы пишем просто (x^i) . Далее, $T_p(M)$ обозначает касательное пространство к M в точке p , а $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ — касательное расслоение. Точки из $T(M)$ мы иногда записываем в виде (p, v) , где $p \in M$ и $v \in T_p(M)$. Локальная система координат (x^i) на M индуцирует локальную систему координат $(x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = (p, v)$ на $T(M)$, где точка p имеет координаты $(x^1, \dots, x^n)$, а $v = \dot{x}^i \partial / \partial x^i$. Здесь и везде далее мы используем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Кокасательное пространство и кокасательное расслоение обозначаются через $T_p^*(M)$ и $T^*(M) = \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$. Точки многообразия $T^*(M)$ будут обозначаться (p, ω) , где $p \in M$ и $\omega \in T_p^*(M)$. Локальная система координат (x^i) на M индуцирует локальную систему координат $(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n) = (p, \omega)$ на $T^*(M)$, где p имеет координаты (x^i) , а $\omega = \xi_i dx^i$. С кокасательным расслоением связаны его внешние степени $\bigwedge^q T^*(M) = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^q T_p^*(M)$.

Дифференциал (производная) гладкого отображения $f: M \rightarrow X$ в точке $p \in M$ обозначается через $f_*: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(X)$, а двойственное отображение — через $f^*: T_{f(p)}^*(X) \rightarrow T_p^*(M)$.

Если $E \rightarrow M$ — векторное расслоение, то символ $C^\infty(M, E)$ обозначает пространство его гладких сечений. Например, $C^\infty(X, T(X))$ состоит из векторных полей на X . Для всякого подмногообразия $M \subset X$ через $C^\infty(M, T(X))$ обозначается пространство касательных векторов к X , определенных вдоль M (рис. 1).

Нормальное расслоение к M в X — это расслоение $E = \bigcup_{p \in M} E_p$, где $E_p = T_p(X) / T_p(M)$. Если $v \in C^\infty(M, T(X))$, то через $[v]$ обозначается соответствующее нормальное векторное поле.

Исключением служит обозначение $A^q(X)$. Так (а не через $C^\infty(X, \wedge^q T^*(X))$) мы обозначаем q -формы класса C^∞ на X . Отображение $f: M \rightarrow X$ обычным образом индуцирует отображение форм $f^*: A^q(X) \rightarrow A^q(M)$. Для подмногообразия $M \subset X$ мы иногда обозначаем через ω_M ограничение на M формы ω на X . Впрочем, когда это не вызывает путаницы, мы опускали в записи отображение ограничения.

Хорошо известно, что для всякого многообразия M существует каноническая 1-форма θ на кокасательном расслоении $T^*(M)$, определяемая в $T^*_{(p, \omega)}(T^*(M))$ равенством

$$\langle \theta, v \rangle = \langle \omega, \pi_* v \rangle,$$

где $\pi: T^*(M) \rightarrow M$ — проекция. В указанных выше локальных координатах $\theta = \xi_i dx^i$. Внешний дифференциал (внешняя производная) $d\theta = d\xi_i \wedge dx^i$ называется *стандартной симплектической формой на $T^*(M)$* .

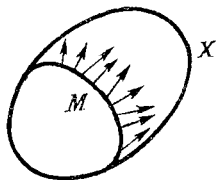


Рис. 1.

Для векторного поля $v \in C^\infty(M, T(M))$ через

$$\exp(tv): M \rightarrow M$$

обозначается локальная однопараметрическая группа, порожденная сдвигами вдоль интегральных кривых поля v . Производная Ли

$$\mathcal{L}_v: A^q(M) \rightarrow A^q(M)$$

определяется, как обычно, равенством

$$\mathcal{L}_v(\varphi) = \frac{d}{dt} (\exp(tv)^* \varphi)_{t=0}.$$

Подстановка векторного поля v в дифференциальную форму φ обозначается через

$$v \lrcorner \varphi.$$

В бесчисленном количестве случаев мы будем использовать формулу А. Кармана

$$(0.a.1) \quad \mathcal{L}_v(\varphi) = v \lrcorner d\varphi + d(v \lrcorner \varphi).$$

Скобка векторных полей v, w , как обычно, обозначается через $[v, w]$. Мы будем пользоваться также соотношением

$$(0.a.2) \quad \mathcal{L}_{[v, w]} = [\mathcal{L}_v, \mathcal{L}_w],$$

где справа стоит коммутатор.

Если G — группа Ли, то ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из левинвариантных векторных полей. Элементы двойственного пространства $\mathfrak{g}^*$ левинвариантных 1-форм иногда будут называться

формами Маурера—Картана. Если $\{\omega^i\}$ — базис в $\mathfrak{g}^*$, то справедливо уравнение *Маурера—Картана*

$$(0.a.3) \quad d\omega^i = -\frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad c_{jk}^i + c_{kj}^i = 0.$$

Знак минус выбран по той причине, что для двойственного базиса $\{v_i\}$ в $\mathfrak{g}$

$$[v_i, v_j] = c_{ij}^k v_k,$$

т. е. c_{jk}^i — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если $\pi : M \rightarrow N$ — сюръективное C^∞ -отображение многообразий, дифференциал которого π_* всюду имеет максимальный ранг (т. е. π является субмерсией), то ядро отображения π_* определяет подрасслоение *вертикальных касательных векторов* $V_\pi(M) \subset T(M)$. Дифференциальная форма $\varphi \in A^k(M)$ называется *горизонтальной*, если

$$v \lrcorner \varphi = 0$$

для всех $v \in C^\infty(M, V_\pi(M))$. Это эквивалентно условию

$$\varphi(p) \in \text{im} \{\pi^* : \Lambda^k T_{\pi(p)}^*(N) \rightarrow \Lambda^k T_p^*(M)\}$$

для каждой точки $p \in M$. Хорошо известно и без труда доказывается, что в случае, когда слои отображения π связны, условие

$$\varphi = \pi^* \eta$$

для (с необходимостью единственной) формы $\eta \in A^k(N)$ эквивалентно тому, что и φ , и $d\varphi$ горизонтальны.

б. Язык многообразий струй

(см. [31], [38], [62], а также указанные там работы)

Нам будет удобно использовать формализм многообразий струй $J^k(\mathbb{R}, M)$. Напомним, что два отображения

$$f, \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow M$$

имеют одинаковую k -струю в точке $x \in \mathbb{R}$, если $f(x) = \tilde{f}(x)$ и если в какой-нибудь, а следовательно в любой, системе локальных координат в окрестности точки $f(x)$ разложения в ряд Тэйлора функций f и $\tilde{f}$ совпадают до порядка k *включительно*. Соответствующий класс эквивалентности, определяемый отображением f , будет обозначаться через $(j^k f)(x)$. Совокупность всех k -струй образует *многообразие струй* $J^k(\mathbb{R}, M)$, и, как мы сейчас покажем, координата x на $\mathbb{R}$ и произвольная локальная система координат $(y^1, \dots, y^m) = (y^\alpha)$ на M определяют некоторую систему координат на $J^k(\mathbb{R}, M)$.

1-струя состоит из точки $x \in \mathbb{R}$ и точки $(p, v) \in T(M)$. Мы можем рассматривать ее как линейное отображение

$$T_x(\mathbb{R}) \rightarrow T_p(M),$$

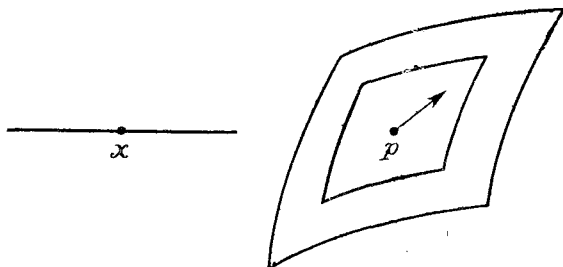


Рис. 2.

переводящее вектор d/dx в вектор v (рис. 2). Таким образом, (0.b.1) $J^1(\mathbb{R}, M) \cong \mathbb{R} \times T(M)$.

Локальные координаты (y^α) на M определяют то, что мы будем называть *стандартными локальными координатами*

$$(x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m) = (x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$$

на $J^1(\mathbb{R}, M)$, где

$$p = (y^1, \dots, y^m) \in M,$$

$$v = \dot{y}^\alpha \partial / \partial y^\alpha \in T_p(M).$$

2-струя состоит из точек $x \in \mathbb{R}$, $p \in M$ и элемента второго порядка некоторой дуги, проходящей через точку p (рис. 3).



Рис. 3. Справа — элемент второго порядка дуги, проходящей через точку p .

На $J^2(\mathbb{R}, M)$ локальные координаты имеют вид

$$(x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m; \ddot{y}^1, \dots, \ddot{y}^m) = (x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha),$$

где α -я компонента отрезка ряда Тэйлора до 2-го порядка включительно задается разложением

$$y^\alpha + (t - x) \dot{y}^\alpha + \frac{1}{2} (t - x)^2 \ddot{y}^\alpha.$$

Ясно, как обобщить все это на $J^k(\mathbb{R}, M)$.

С каждым таким многообразием струй ассоциировано каноническое подрасслоение

$$(0.b.2) \quad W^* \subset T^*(J^k(\mathbb{R}, M)).$$

Опишем его сначала для $k = 1$. Для этого рассмотрим проекцию

$$\pi: J^1(\mathbb{R}, M) \rightarrow \mathbb{R} \times M,$$

$$\pi(x, p, v) = (x, p).$$

Существует канонический касательный вектор (см. (0.b.1))

$$\frac{d}{dx} + v \in T_{(x, p)}(\mathbb{R}, M) \quad (\cong \mathbb{R}^{m+1});$$

его аннулятор

$$\left(\frac{d}{dx} + v\right)^\perp \subset T_{(x, p)}^*(\mathbb{R} \times M)$$

является гиперплоскостью ($\cong \mathbb{R}^m$). Мы полагаем

$$W_{(x, p, v)}^* = \pi^* \left(\left(\frac{d}{dx} + v\right)^\perp \right).$$

В указанной выше локальной системе координат

$$W^* = \text{span} \{ \theta^1, \dots, \theta^m \},$$

где

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx.$$

Для $k = 2$ мы зададим подрасслоение $W^* \subset T^*(J^2(\mathbb{R}, M))$ локально равенствами

$$W^* = \text{span} \{ \theta^1, \dots, \theta^m; \dot{\theta}^1, \dots, \dot{\theta}^m \} = \text{span} \{ \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha \},$$

где

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx,$$

$$\dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx.$$

Как и в предыдущем случае, W^* можно определить независимо от выбора координат. Один из удобных путей состоит в том, чтобы задать вложение

$$(0.b.3) \quad J^2(\mathbb{R}, M) \subset J^1(\mathbb{R}, J^1(\mathbb{R}, M)).$$

Тогда подрасслоение $W^* \subset T^*(J^2(\mathbb{R}, M))$ будет индуцировано из канонического подрасслоения в $T^*(J^1(\mathbb{R}, J^1(\mathbb{R}, M)))$. Чтобы задать вложение (0.b.3), заметим, что дифференциал отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ определяет отображение $f_*: \mathbb{R} \rightarrow T(M)$, где по определению $f_*(x) = f_*(d/dx)$, и если $(j^k f)(x) = (j^k \tilde{f})(x)$, то $(j^{k-1} f_*)(x) = (j^{k-1} \tilde{f}_*)(x)$. С использованием отождествления (0.b.1) это отображение

$$(j^2 f)(x) \mapsto (j^1 f_*)(x)$$

определяет включение (0.b.3). Локальные координаты (y^α) на M индуцируют локальные координаты $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ на $J^1(\mathbb{R}, M)$, а эти последние индуцируют локальные координаты

$$(t; (x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha); (\dot{x}; \dot{y}^\alpha; (\ddot{y}^\alpha)))$$

на $J^1(\mathbb{R}, J^1(\mathbb{R}, M))$. Включение (0.b.3) задается в локальных координатах формулой

$$(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha) \mapsto (x; (x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha); (1; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)).$$

Ясно, что подобные рассуждения применимы ко всем $J^k(\mathbb{R}, M)$. Мы будем часто использовать просто многообразие $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, чтобы иметь возможность пользоваться глобальными координатами. Однако все конструкции будут носить инвариантный характер, и поэтому их можно перенести на любое многообразие M .

с. Многообразие реперов

(см. [34], [35], [44])

Через $\mathbb{E}^N$ будет обозначаться N -мерное евклидово пространство. Это — аффинное пространство (без выделенного начала координат), снабженное инвариантным относительно сдвигов скалярным произведением. Под *репером* $(x; e_1, \dots, e_N)$ мы понимаем радиус-вектор $x \in \mathbb{E}^N$ и ортонормированный базис $e_1, \dots, e_N \in T_x(\mathbb{E}^N)$. Множество всех реперов образует многообразие $\mathcal{F}(\mathbb{E}^N)$, которое после выбора базисного репера (т. е. изоморфизма $\mathbb{E}^N \cong \mathbb{R}^N$) можно отождествить с группой $E(N)$ евклидовых движений: радиус-вектор x задает сдвиг, а вращение таково, что оно переводит координатный репер в $\mathbb{R}^N$ в репер $e_1, \dots, e_N$.

Если зафиксировано какое-нибудь начало координат $0 \in \mathbb{E}^N$, то множество всех реперов в $T_0(\mathbb{E}^N)$ будет обозначаться через $\mathcal{F}_0(\mathbb{E}^N)$. Ясно, что выбор базисного репера позволяет отождествить множество $\mathcal{F}_0(\mathbb{E}^N)$ с ортогональной группой $O(N)$.

Через $\mathbb{A}^N$ обозначается аффинное N -мерное пространство, снабженное инвариантной относительно сдвигов формой объема Ω . Под *аффинным репером* мы будем понимать набор $(x; e_1, \dots, e_N)$, где $x \in \mathbb{A}^N$, а векторы $e_1, \dots, e_N \in T_x(\mathbb{A}^N)$ задают базис, для которого $\Omega(e_1, \dots, e_N) = 1$. Часто мы будем записывать это равенство просто в виде $e_1 \wedge \dots \wedge e_N = 1$. После выбора базисного репера мы можем отождествить многообразие аффинных реперов $\mathcal{F}(\mathbb{A}^N)$ с группой $A(N)$ аффинных преобразований $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, задаваемых формулой $T(x) = Ax + b$, где $b \in \mathbb{R}^N$, а $A \in SL_N = \{N \times N\text{-матрицы } A \text{ с } \det A = 1\}$.

Пусть символ $\mathcal{F}$ обозначает одно из многообразий реперов $\mathcal{F}(\mathbb{E}^N)$ или $\mathcal{F}(\mathbb{A}^N)$. Радиус-вектор определяет отображение

$$x: \mathcal{F} \rightarrow V,$$

где V изоморфно $\mathbb{E}^N$ или $\mathbb{A}^N$. В точке $(x; e_1, \dots, e_N) = (x; e_i)$ дифференциал этого отображения имеет вид

$$dx : T_{(x; e_i)}(\mathcal{F}) \rightarrow T_x(V)$$

(мы пишем dx вместо x_*). В терминах базиса e_i в $T_x(V)$ имеем

$$(0.c.1) \quad dx = \omega^i e_i,$$

где $\omega^i \in T_{(x; e_i)}^*(\mathcal{F})$. Используя однозначное с точностью до сдвига отождествление $T_x(V) \cong V$, мы точно так же имеем отображение

$$e_i : \mathcal{F} \rightarrow V$$

с дифференциалом

$$de_i : T_{(x; e_i)}(\mathcal{F}) \rightarrow T_x(V)$$

и записываем, как и ранее,

$$(0.c.2) \quad de_i = \omega_i^j e_j,$$

где $\omega_i^j \in T_{(x; e_i)}^*(\mathcal{F})$. [З а м е ч а н и е. Здесь может оказаться удобным выбрать какой-либо изоморфизм $V \cong \mathbb{R}^N$ и рассматривать x и e_i как $\mathbb{R}^N$ -значные функции на $\mathcal{F}$. Тогда их дифференциалы будут $\mathbb{R}^N$ -значными 1-формами на $\mathcal{F}$ и, как таковые, могут быть выражены в терминах базиса e_i . Коэффициенты 1-форм ω^i , ω_i^j при этом *не зависят* от способа отождествления $V \cong \mathbb{R}^N$.]

Внешнее дифференцирование равенств (0.c.1) и (0.c.2) дает соответственно

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Соберем все равенства вместе в *структурные уравнения подвижного репера*

$$(i) \quad dx = \omega^i e_i,$$

$$(ii) \quad de_i = \omega_i^j e_j,$$

$$(0.c.3) \quad (iii) \quad d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$(iv) \quad d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Для $\mathcal{F}(\mathbb{E}^N)$ выполняется дополнительное соотношение

$$(v) \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0,$$

а для $\mathcal{F}(\mathbb{A}^N)$ мы имеем (напомним, что постоянно используется соглашение о суммировании)

$$(vi) \quad \omega_i^i = 0.$$

Если выбрать какой-либо базисный репер и отождествить $\mathcal{F}$ с $E(N)$ или $A(N)$, то величины ω^i и ω_i^j задают левоинвариантные 1-формы на соответствующей группе. На самом деле они определяют базисы, ввиду соотношений (v) и (vi) (например, ω_i^j для $i < j$ образуют базис в $\mathcal{F}(\mathbb{E}^N)$). Уравнения (iii), (iv) — это просто уравнения Маурера—Картана (0.a.3).

Для $\mathcal{F}_0(\mathbb{E}^N)$ структурные уравнения (0.c.3) сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} de_i &= \omega_i^j e_j, \\ (0.c.4) \quad \omega_i^j + \omega_j^i &= 0, \\ d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{aligned}$$

d. Дифференциальные идеалы

(см. [11], [12], [17], [23], [38], [47], [60])

Под дифференциальным идеалом мы будем понимать градуированный идеал $I = \bigoplus_{q \geq 0} I^q$ во внешней алгебре $A^*(X) = \bigoplus_{q \geq 0} A^q(X)$ форм класса C^∞ на многообразии X , обладающий свойством $dI \subset I$. Таким образом, если

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^1 + \dots + \varphi^n \in I \quad (\varphi^k \in A^k(X)),$$

то для всех $\eta \in A^*(X)$

$$\varphi^k \in I,$$

$$\varphi \wedge \eta \in I,$$

$$d\varphi \in I.$$

Для всякого подмножества $\Sigma \subset A^*(X)$ мы обозначаем через $\{\Sigma\}$ алгебраический идеал, порожденный множеством Σ . На практике Σ часто будет конечным множеством форм $\theta^1, \dots, \theta^s$, и мы записываем это в виде

$$\{\Sigma\} = \{\theta^\alpha\}.$$

Если $d\Sigma$ обозначает множество форм $d\varphi$ для $\varphi \in \Sigma$, то дифференциальный идеал, порожденный Σ , — это $\{\Sigma, d\Sigma\}$. Если Σ — конечное множество $\theta^1, \dots, \theta^s$, то этот идеал обозначается через $\{\theta^\alpha, d\theta^\alpha\}$. В случае когда θ^α являются 1-формами, мы говорим, что идеал $I = \{\theta^\alpha, d\theta^\alpha\}$ является *пфаффовым дифференциальным идеалом*.

Под интегральным многообразием дифференциального идеала I на многообразии X понимается многообразие N вместе с отображением максимального ранга

$$(0.d.1) \quad f: N \rightarrow X,$$

таким что $f^*(I) = (0)$, т. е.

$$(0.d.2) \quad f^*\varphi = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in I.$$

В дальнейшем мы будем для простоты опускать f и рассматривать интегральные многообразия как подмногообразия $N \subset X$, удовлетворяющие условию

$$\varphi_N = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in I.$$

Если $I = \{\Sigma, d\Sigma\}$, то, поскольку

$$f^*(\varphi \wedge \eta) = f^*\varphi \wedge f^*\eta,$$

$$f^*(d\varphi) = df^*(\varphi),$$

условие (0.d.2) эквивалентно тому, что

$$(0.d.3) \quad \begin{aligned} f^*\varphi &= 0, \\ f^*d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

для всех $\varphi \in \Sigma$. Под n -мерным интегральным элементом дифференциального идеала мы будем подразумевать пару (p, E) , состоящую из точки $p \in X$ и n -мерной плоскости $E \subset T_p(X)$, такой что

$$\varphi(p) \mid E = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in I.$$

Если $G_n(X) \rightarrow X$ обозначает грассманово расслоение, слоем которого в точке $p \in X$ служит многообразие

$$\begin{aligned} G_n(X)_p &= G_n(T_p(X)) \\ &= \{\text{грассманово многообразие } n\text{-мерных} \\ &\quad \text{плоскостей } E \subset T_p(X)\}, \end{aligned}$$

то множество всех n -мерных интегральных элементов идеала I , очевидно, образует подмножество

$$V_n(I) \subset G_n(X).$$

Интегральное многообразие задается отображением максимального ранга (0.d.1), таким что

$$f^*(T_p(N)) \in V_n(I)$$

для всех $p \in N$ (где $\dim N = n$).

Пуффов дифференциальный идеал $\{\theta^\alpha, d\theta^\alpha\}$ называется вполне интегрируемым, если

$$d\theta^\alpha \in \{\theta^\alpha\}.$$

Мы часто будем записывать это в виде

$$d\theta^\alpha \equiv 0 \bmod \{\theta^\alpha\}.$$

Предположим, что $I = \{\theta^\alpha, d\theta^\alpha\}$ — пфаффов дифференциальный идеал, такой что для всякой точки $p \in X$ подпространства

$$W_p^* = \text{span} \{\theta^1(p), \dots, \theta^s(p)\} \subset T_p^*(X)$$

имеют постоянную размерность s . Тогда многообразие $W^* = \bigcup_{p \in X} W_p^*$ определяет подрасслоение, которое полностью определяет идеал I . Иногда мы, допуская вольность, пишем W^* вместо I ; для подрасслоения $W^* \subset T^*(X)$ пфаффова система W^* — это дифференциальный идеал, порожденный сечениями $C^\infty(X, W^*)$. Аннулятор $W^{*\perp} = S \subset T(X)$ для подрасслоения $W^* \subset T^*(X)$ есть распределение, или подрасслоение в касательном расслоении. Хорошо известно, что пфаффова система W^* вполне интегрируема тогда и только тогда, когда S является инволютивным распределением в том смысле, что

$$v, w \in C^\infty(X, S) \Rightarrow [v, w] \in C^\infty(X, S).$$

Теорема Фробениуса утверждает, что в этом случае существуют такие локальные координаты $(u^1, \dots, u^s; v^1, \dots, v^{n-s})$ на X , что

$$W^* = \text{span} \{du^1, \dots, du^s\},$$

$$S = \text{span} \{\partial/\partial v^1, \dots, \partial/\partial v^{n-s}\}.$$

Как обычно, множества уровня $u^\alpha = \text{const}$ называются *слоями расслоения*, определяемого подрасслоением W^* . Мы то и дело будем использовать теорему Фробениуса.

Теперь хотим привести один важный пример, но прежде нам понадобится совершить краткий экскурс в симплектическую линейную алгебру (см. [2]). Пусть V — векторное пространство, а $\Omega \in \Lambda^2 V^*$ — кососимметрическая билинейная форма на V . Определим ранг ρ формы Ω условиями

$$\Omega^\rho \neq 0, \quad \Omega^{\rho+1} = 0,$$

где $\Omega^k = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ (k раз). Если векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ образуют базис и мы положим

$$\Omega_{ij} = \Omega(v_i, v_j) = -\Omega_{ji},$$

то антисимметричная (кососимметрическая) матрица $\|\Omega_{ij}\|$ имеет ранг 2ρ . Как хорошо известно, базис $v_1, \dots, v_n$ можно выбрать таким образом, чтобы для двойственного базиса $\omega^1, \dots, \omega^n \in V^*$

$$(0.d.4) \quad \Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 + \dots + \omega^{2\rho-1} \wedge \omega^{2\rho}.$$

Положим

$$\mathcal{C}(\Omega) = \{v \lrcorner \Omega : v \in V\} \subset V^*,$$

$$\Omega^\perp = \{v : v \lrcorner \Omega = 0\} \subset V.$$

Тогда, используя нормальную форму (0.d.4), получим

$$(0.d.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}(\Omega) &= \text{span} \{\omega^1, \dots, \omega^{2\rho}\}, \\ \Omega^\perp &= \text{span} \{v_{2\rho+1}, \dots, v_n\}. \end{aligned}$$

В том частном случае, когда $\dim V = 2\rho + 1$, прямая $\Omega^\perp \subset V$ называется *характеристическим направлением*, ассоциированным с формой Ω .

Теперь обсудим обещанный пример.

(0.d.6.) ПРИМЕР. Пусть на X задана 2-форма Ψ . Определим систему Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ как пфаффов дифференциальный идеал, порожденный набором 1-форм

$$\{v \lrcorner \Psi, \text{ где } v \in C^\infty(X, T(X))\} \subset A^1(X).$$

Если предположить, что 2-формы $\Psi(p) \in \Lambda^2 T_p^*(X)$ имеют постоянный ранг ρ , то система $\mathcal{C}(\Psi)$ задается некоторым подрасслоением $W^* \subset T^*(X)$ ранга 2ρ , а распределение $W^{*\perp} = S \subset T(X)$ является подрасслоением ранга $n - 2\rho$. Так как

$$\langle v \lrcorner \Psi, w \rangle = \langle \Psi, v \wedge w \rangle = \langle w \lrcorner \Psi, v \rangle,$$

то для пространства сечений расслоения S имеем

$$C^\infty(X, S) = \{v \in C^\infty(X, T(X)) : v \lrcorner \Psi = 0\}.$$

Хорошо известно, что

(0.d.7) Если $d\Psi = 0$, то система $\mathcal{C}(\Psi)$ вполне интегрируема.

На самом деле справедливо гораздо более сильное утверждение (см. [2], [64]):

(0.d.8) ТЕОРЕМА (Дарбу). Если Ψ — замкнутая 2-форма постоянного ранга ρ , то локально существуют функции $u_1, \dots, u_\rho, v^1, \dots, v^\rho$, такие что

$$\Psi = du_1 \wedge dv^1 + \dots + du_\rho \wedge dv^\rho.$$

Очевидно, что в этом случае система Картана

$$\mathcal{C}(\Psi) = \{du_1, \dots, du_\rho; dv^1, \dots, dv^\rho\}$$

вполне интегрируема.

Рассмотрим, наконец, 1-форму ψ с внешним дифференциалом $d\psi = \Psi$. Предположим, что в каждом кокасательном пространстве

$$\begin{aligned} \psi(p) \wedge \Psi(p)^\rho &\neq 0, \\ \psi(p) \wedge \Psi(p)^{\rho+1} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая

(0.d.9) ТЕОРЕМА (Пфаффа—Дарбу [11], [17]). *Локально существуют функции $x, u_1, \dots, u_p, v^1, \dots, v^p$, такие что*

$$\psi = -H(x, u, v) dx + u_1 dv^1 + \dots + u_p dv^p.$$

Можно показать, что из теоремы Пфаффа следует теорема Дарбу. В этой книге мы будем существенно использовать оба результата.

Несколько неожиданным образом наша главная конструкция — дифференциальная система Эйлера—Лагранжа (I, ω) (определяемая в разд. е гл. I) окажется системой Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ некоторой 2-формы $\Psi = d\psi$, где ранг формы Ψ существенно не постоянен. Чтобы разобраться в общей ситуации, сначала следует, конечно, хорошо освоиться со случаем постоянного ранга.

е. Внешние дифференциальные системы

(см. [11], [12], [17], [38], [47], [60])

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) *Внешняя дифференциальная система*²⁾ (I, ω) на многообразии X задается дифференциальным идеалом $I \subset A^*(X)$ и n -формой ω . Мы называем n числом независимых переменных в (I, ω) .

ii) *Интегральный элемент* системы (I, ω) задается парой (p, E) , состоящей из точки $p \in X$ и n -мерной плоскости $E \subset T_p(X)$, удовлетворяющей двум условиям:

$$\varphi|E = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in I,$$

$$\omega|E \neq 0.$$

Множество всех интегральных элементов системы (I, ω) обозначим через $V(I, \omega) \subset G_n(X)$.

iii) *Интегральное многообразие* системы (I, ω) задается гладким отображением

$$f: N \rightarrow X,$$

где N — связное многообразие размерности n и $f_*(T_p(N)) \in V(I, \omega)$ для всех $p \in N$.

¹⁾ Мы не стали формулировать этот результат в его обычной сильной форме, так как в гл. IV нам понадобится следующий его вариант: *Предположим, что на подмногообразии $U \subset \mathbb{R}^{2p+1}$ заданы: i) 1-форма ψ , для которой $\psi \wedge (d\psi)^p \neq 0$; ii) вполне интегрируемая пфафхова система I , листы которой имеют размерность p , удовлетворяющая условию $\psi \in I$. Тогда $d\psi$ приводится к локальной нормальной форме (0.d.9), причем $I = \{dx, dv^1, \dots, dv^p\}$.*

²⁾ В дальнейшем слово «внешняя» обычно опускается. Об использовании термина «дифференциальная система» см. также добавление. — *Прим. перев.*

Мы часто будем опускать f и рассматривать интегральное многообразие как подмногообразие $N \subset X$, удовлетворяющее двум условиям:

$$\varphi_N = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in I,$$

$$\omega_N \neq 0.$$

Второе из них называется *условием независимости*. Множество всех интегральных многообразий системы (I, ω) обозначается через $\mathcal{Y}(I, \omega)$.

В этой книге мы будем заниматься почти исключительно случаем, когда I является *пфафовой дифференциальной системой*, порожденной некоторым подрасслоением $W^* \subset T^*(X)$, а число независимых переменных $n = 1$. Так как форма независимости ω хорошо определена лишь по модулю идеала I , интересующими нас данными будут векторные расслоения

$$(0.e.1) \quad W^* \subset L^* \subset T^*(X),$$

где

- i) расслоение W^* порождает пфафovu систему I ;
- ii) факторрасслоение L^*/W^* одномерно, а 1-форма $\omega \in C^\infty(X, L^*)$ индуцирует в нем ненулевое сечение.

Нам потребуются привлечь несколько понятий общей теории внешних дифференциальных систем, среди них следующие: i) ассоциированная система и характеристики Коши, ii) производный флаг, iii) продолжение, iv) число Картана, v) инволюция (последняя играет гораздо большую роль в случае нескольких независимых переменных). На самом деле именно изучение вариационного исчисления в общей постановке предоставляет хорошую возможность увидеть, как естественно возникают эти понятия и как они полезны. Мы не станем объяснять их здесь, а будем вводить по мере необходимости (см., в частности, разд. с гл. I).

Пока мы просто приведем универсальный пример и несколько его частных случаев.

(0.e.2) ПРИМЕР. Пусть на многообразии $X = J^1(\mathbb{R}, M)$ пфафова система I задается введенным выше подрасслоением (0.b.2). Положим $L^* = \pi^*(T(\mathbb{R} \times M))$. Тем самым определены данные (0.e.1), и мы будем называть эту систему *канонической внешней дифференциальной системой* (I, ω) .

При использовании стандартных локальных координат $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ на X (см. разд. b гл. 0) 1-формы $\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx$ ($\alpha = 1, \dots, m$) задают локальный базис в W^* , а 1-форма $\omega = dx$ — локальный базис в L^*/W^* . Поэтому систему (I, ω) локально

можно записать в виде

$$(0.e.3) \quad \begin{aligned} (i) \quad \theta^\alpha &= dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0, \\ (ii) \quad \omega &= dx \neq 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют следующий смысл:

- (i) есть набор дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять решения или интегральные многообразия;
- (ii) есть условие трансверсальности, налагаемое на решения.

Интегральное многообразие системы (0.e.3) задается гладким отображением

$$f: N \rightarrow X,$$

где $N = \{a \leq x \leq b\}$ (мы всегда будем включать концы в рассматриваемый интервал) и выполнены условия

$$f^* \theta^\alpha = 0, \quad f^* \omega \neq 0.$$

Используя второе условие, можно выбрать x в качестве локальной координаты на многообразии N и локально задать отображение f параметрически формулой

$$(0.e.4) \quad x \mapsto (x; y^\alpha(x); \dot{y}^\alpha(x)).$$

Тогда условие $f^* \theta^\alpha = 0$ дает

$$dy^\alpha(x) - \dot{y}^\alpha(x) dx = 0,$$

т. е.

$$\dot{y}^\alpha(x) = \frac{dy^\alpha(x)}{dx}.$$

Таким образом, формула (0.e.4) принимает вид

$$x \mapsto \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\alpha(x)}{dx} \right).$$

Отсюда следует, что интегральные многообразия этой дифференциальной системы задаются *1-струями параметризованных иммерсированных кривых* в M (рис. 4).

Обычно мы не будем столь скрупулезны и будем просто говорить, что интегралами системы (I, ω) являются *1-струи кривых* в M .



Рис. 4.

Если задана дифференциальная система (I', ω') на многообразии X' , то, ограничив все на какое-либо подмногообразие $X \subset X'$, мы можем получить другую дифференциальную систему (I, ω) . Это можно понимать как «наложение ограничений» на исходную систему.

(0.e.5) ПРИМЕР. Пусть $X \subset J^1(\mathbb{R}, M)$ — подмногообразие. Обозначим через (I, ω) ограничение на X канонической системы (0.e.3) на $J^1(\mathbb{R}, M)$. Локально X задается уравнениями

$$g^0(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha) = 0,$$

и поэтому интегральными многообразиями $N \subset X$ системы (I, ω) являются 1-струи кривых $x \mapsto y^\alpha(x)$ в M , удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$g^0\left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\alpha(x)}{dx}\right) = 0.$$

Предположим, например, что многообразие $X = J^2(\mathbb{R}, M)$ вложено в $J^1(\mathbb{R}, J^1(\mathbb{R}, M))$, как в разд. б. Тогда система (I, ω) на $J^2(\mathbb{R}, M)$ локально задается формулами

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$(0.e.6) \quad \dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0.$$

Интегральные многообразия этой дифференциальной системы локально задаются 2-струями

$$x \mapsto \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\alpha(x)}{dx}; \frac{d^2y^\alpha(x)}{dx^2}\right)$$

кривых в M .

По ходу изложения мы приведем много примеров дифференциальных систем других видов, возникающих как в теории подвижных реперов, так и при физических рассмотрениях. Все они, однако, попадают в класс систем, называемых пфаффовыми системами в хорошей форме, определенный в разд. с гл. I для случая одной независимой переменной и в [12] (а также, неявно, в [47]) для общего случая.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

а. Постановка задачи. Классические примеры

Мы рассматриваем пфаффову дифференциальную систему (I, ω) на многообразии X , для которой условием независимости является 1-форма ω . Локально система (I, ω) задается уравнениями Пфаффа

$$(I.a.1) \quad \theta^1 = \dots = \theta^s = 0, \quad \omega \neq 0.$$

Напомним (см. (0.e.1)), что эта запись имеет следующий смысл. В кокасательном расслоении над X задана двухступенчатая фильтрация подрасслоениями

$$W^* \subset L^* \subset T^*(X), \quad \text{rank } L^*/W^* = 1,$$

и $\theta^1, \dots, \theta^s, \omega$ — заданные локально 1-формы, такие что

$$W^* = \text{span} \{ \theta^1, \dots, \theta^s \},$$

$$L^* = \text{span} \{ \theta^1, \dots, \theta^s, \omega \}.$$

Будем пока задавать интегральные многообразия системы (I, ω) с помощью отображений

$$(I.a.2) \quad f: N \rightarrow X,$$

где N — связное одномерное многообразие, f — гладкое отображение. Тогда уравнения (I.a.1) означают, что

$$(I.a.3) \quad f^*\theta^1 = \dots = f^*\theta^s = 0, \quad f^*\omega \neq 0.$$

Позднее мы будем опускать указание на f и просто говорить о подмногообразиях $N \subset X$, таких что $\theta_N^1 = \dots = \theta_N^s = 0, \omega_N \neq 0$. Напомним, что ограничение формы φ на N обозначается через φ_N , а множество интегральных многообразий системы (I, ω) — через $\mathcal{I}^0(I, \omega)$.

Предположим теперь, что нам задана некоторая 1-форма φ на X . Для каждого интегрального многообразия (I.a.2) системы (I, ω) положим

$$(I.a.4) \quad \Phi(N, f) = \int_N f^*\varphi.$$

Конечно, подразумевается, что мы рассматриваем только такие интегральные многообразия, для которых этот интеграл существует, так что N может быть и некомпактным, но несобственный интеграл (I.a.4) должен сходиться. Мы можем рассматривать отображение

$$(N, f) \mapsto \int_N f^* \varphi$$

как функционал (возможно, не всюду определенный)

$$\Phi : \mathcal{V}(I, \omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Поставим следующую задачу:

ЗАДАЧА. Определить уравнения в вариациях¹⁾ для функционала Φ .

Конечно, в том виде, как она есть, эта постановка очень расплывчата, ибо мы должны еще позаботиться о таких предметах, как гладкость и граничные условия, но ясно, какова должна быть наша цель — определить на некотором многообразии Y пфаффову систему (J, ω) , интегральные многообразия которой находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями системы (I, ω) , удовлетворяющими уравнениям Эйлера — Лагранжа для функционала (I.a.4).

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Вариационную задачу, ассоциированную с функционалом (I.a.4), мы будем обозначать через $(I, \omega; \varphi)$.

(I.a.5) ПРИМЕР. Пусть M — некоторое многообразие, $X = J^1(\mathbb{R}, M)$ — ассоциированное с ним многообразие 1-струй и L — заданная функция на $J^1(\mathbb{R}, M)$ (мы будем иногда называть функцию L лагранжианом). Введя на $\mathbb{R}$ координату x , положим

$$\varphi = Ldx$$

и выберем в качестве (I, ω) каноническую пфаффову систему из примера (0.e.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор $(I, \omega; \varphi)$ будем называть классической вариационной задачей.

¹⁾ Этот термин означает следующее (позднее мы обсудим это подробнее). Обозначим через $T_{(N, f)}(\mathcal{V}(I, \omega))$ касательное пространство к $\mathcal{V}(I, \omega)$ в точке $f : N \rightarrow X$ и рассмотрим дифференциал функционала (I.a.4) как отображение

$$(\delta\Phi)(N, f) : T_{(N, f)}(\mathcal{V}(I, \omega)) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Уравнения в вариациях, или уравнения Эйлера—Лагранжа, — это условие того, что

$$(\delta\Phi)(N, f) = 0$$

в точке $f : N \rightarrow X$. Интегральные многообразия (N, f) , удовлетворяющие этому условию, иногда называют экстремалими функционала Φ .

Система координат $y = (y^1, \dots, y^m)$ на M индуцирует систему координат $(x, y, \dot{y}) = (x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m)$ на $J^1(\mathbb{R}, M)$, и (I, ω) представляется в виде (I.a.1), если положить

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0, \quad \omega = dx \neq 0.$$

Интегральные многообразия $N \subset J^1(\mathbb{R}, M)$ системы (I, ω) локально являются 1-струями

$$x \mapsto \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right)$$

кривых $y: \mathbb{R} \rightarrow M$; мы опускаем здесь f (см. (I.a.2)). Если $L = L(x, y, \dot{y})$, то рассматриваемый функционал имеет вид

$$(I.a.6) \quad \Phi(N) = \int L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx.$$

Конечно же, мы должны определить тут как данные на концах, так и класс допустимых кривых, т. е. уточнить, являются они C^∞ -, C^1 - или кусочно-гладкими и т. д. В данном случае имеются очевидные естественные варианты выбора класса, и эта ситуация детально обсуждается в классических руководствах, таких как [29]. В общем случае эти вопросы становятся более тонкими, и мы отложим их до гл. IV.

(I.a.7) Частный случай примера (I.a.5). отождествим $J^1(\mathbb{R}, M)$ с $\mathbb{R} \times T(M)$ и предположим, что на $T(M)$ задана функция T , индуцирующая положительно-определенную квадратичную форму на каждом слое $T_y(M) \subset T(M)$. В указанных выше локальных координатах мы имеем $T = T(y, \dot{y})$, где

$$(I.a.8) \quad T(y, \dot{y}) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(y) \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta$$

(мы повсюду используем соглашение о суммировании). Здесь $g(y) = \|g_{\alpha\beta}(y)\|$ — положительно-определенная симметричная C^∞ -матрица. Ясно, что T — это просто половина квадрата функции длины, ассоциированной с *римановой метрикой*

$$(I.a.9) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta$$

на M . Пусть $U = U(y)$ — некоторая функция на M . Говорят, что лагранжиан вида

$$L = T - U$$

задает на многообразии M *механическую систему с кинетической энергией T и потенциальной энергией U* . Если интегральное многообразие порождено путем $\gamma \subset M$, то (I.a.6) называется *функционалом действия*, ассоциированным с γ . Утверждение о том, что механическая система движется так, что этот интеграл минимизируется, называют *принципом наименьшего действия* ([1], [2], [29]). Исторически главным толчком для развития вариационного

исчисления послужило его применение к изучению механических систем ¹⁾.

(I.a.10). Еще один частный случай примера (I.a.5). Риманово многообразие (M, ds^2) — это многообразие M с заданной на нем римановой метрикой (I.a.9). Положим

$L = \sqrt{2T}$ (арифметический квадратный корень);
в локальных координатах

$$L(y, \dot{y}) = \sqrt{g_{\alpha\beta}(y) \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta} = \|\dot{y}\|,$$

где $\|\dot{y}\|$ — длина касательного вектора $\dot{y} = \dot{y}^\alpha \partial/\partial y^\alpha \in T_y(M)$.
Для кривой $\gamma \subset M$ функционал (I.a.6) имеет вид

$$l(\gamma) = \int \left\| \frac{dy(x)}{dx} \right\| dx = \text{длина } \gamma.$$

Как обычно, кривые, локально минимизирующие длину, называются *геодезическими* (см., в частности, [49], [53]).

(I.a.11) ПРИМЕР (продолжение примера (I.a.5)). Пусть $X \subset J^1(\mathbb{R}, M)$ — такое подмногообразие, что $dx \neq 0$ на $T(X)$; обозначим опять через (I, ω) ограничение на X канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, M)$. Мы можем считать, что в стандартных локальных координатах $(x, y, \dot{y})$ на $J^1(\mathbb{R}, M)$ подмногообразие X задается уравнениями

$$(I.a.12) \quad g^1(x, y, \dot{y}) = \dots = g^r(x, y, \dot{y}) = 0.$$

Пусть L — функция на X (на практике L будет ограничением некоторой функции, определенной на $J^1(\mathbb{R}, M)$); положим

$$\varphi = L\omega.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задачу $(I, \omega; \varphi)$ будем называть *классической вариационной задачей с ограничениями*.

Это означает просто, что область определения функционала (I.a.4) состоит из кривых

$$x \mapsto \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right),$$

где

$$g^\rho \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right) = 0 \quad \rho = 1, \dots, r.$$

Когда ограничения эквивалентны ограничениям вида $h^\rho(x, y) = c^\rho = \text{const}$, они называются *голономными*. Еще более частный случай имеет место, когда $h^\rho = h^\rho(y)$ являются функ-

¹⁾ Согласно Каратеодори [11, с. vii], «вариационное исчисление должно быть слугой механики».

циями на M , т. е. $\mathcal{V}(I, \omega)$ состоит из 1-струй кривых, лежащих в подмногообразии $\{h^1 = c^1, \dots, h^r = c^r\}$ многообразия M .

Ограничения (I.a.2) общего вида называются *неголономными*. Описание интегральных многообразий системы (I, ω) сложнее; здесь приходится привлекать структурную теорию дифференциального идеала I . Классический пример неголономных ограничений будет приведен в п. (II.a.40), а обсуждение общего случая будет дано в разд. е гл. IV.

(I.a.13) ПРИМЕР. Пусть M — многообразие, $J^2(\mathbb{R}, M)$ — ассоциированное с ним расслоение 2-струй и L — функция на $J^2(\mathbb{R}, M)$ (иногда мы будем называть L *лагранжианом второго порядка*). Вводя на $\mathbb{R}$ координату x , положим

$$\varphi = Ldx$$

и в качестве (I, ω) выберем каноническую пфаффову систему, приведенную в примере (0.e.5) (см. (0.e.6)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задачу $(I, \omega; \varphi)$ будем называть *классической вариационной задачей второго порядка*.

Система координат $y = (y^1, \dots, y^m)$ на M индуцирует на $J^2(\mathbb{R}, M)$ систему координат $(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = (x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m; \ddot{y}^1, \dots, \ddot{y}^m)$, и каноническая пфаффова система (I, ω) задается локально в виде (I.a.1) условиями

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$(I.a.14) \quad \dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0.$$

Интегральные многообразия $N \subset J^2(\mathbb{R}, M)$ системы (I, ω) локально являются 2-струями

$$x \mapsto \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2} \right)$$

кривых $y: \mathbb{R} \rightarrow M$. Рассматриваемый функционал имеет вид

$$\Phi(N) = \int L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) dx.$$

З а м е ч а н и я. i) Существует естественное вложение

$$J^2(\mathbb{R}, M) \subset J^1(\mathbb{R}, J^1(\mathbb{R}, M)),$$

обсуждавшееся в разд. б гл. 0. При использовании этого включения классическую вариационную задачу второго порядка можно рассматривать как классическую вариационную задачу с ограничениями.

ii) Пример (I.a.3) распространяется, конечно, на расслоения струй $J^k(\mathbb{R}, M)$ произвольного порядка k ; эту задачу мы будем называть *классической вариационной задачей k -го порядка*.

iii) Наконец, рассматривая подмногообразия $X \subset J^k(\mathbb{R}, M)$, как это делалось в примере (І.а.11) при $k = 1$, мы приходим к классическим вариационным задачам k -го порядка с ограничениями.

(І.а.15) Частный случай примера (І.а.13). Выберем в качестве подмногообразия $X \subset J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ открытое множество, задаваемое условием

$$X = \{(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) : \dot{y} \wedge \ddot{y} \neq 0\},$$

и положим на X

$$L = L(\dot{y}, \ddot{y}) = |\dot{y} \wedge \ddot{y}|,$$

$$\varphi = Ldx.$$

Интегральные многообразия $N \subset X$ канонической системы (І.а.14) в 2-струях задаются кривыми $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющими условию

$$\frac{dy(x)}{dx} \wedge \frac{d^2y(x)}{dx^2} \neq 0.$$

Функционал

$$(І.а.16) \quad \Phi(N) = \int L\left(\frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) dx$$

является *аффинной длиной дуги* соответствующей кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ¹⁾.

Вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ инвариантна относительно действия специальной аффинной группы $A(2)$, состоящей из сохраняющих площадь аффинных преобразований T пространства $\mathbb{R}^2$:

$$T(y) = Ay + b,$$

$$\det A = \pm 1.$$

Кривые, локально минимизирующие функционал (І.а.6), называются *аффинными геодезическими*.

Ясно, что этот пример обобщается на $\mathbb{R}^m$, причем функционал Φ имеет вид

$$\Phi(N) = \int \left| \frac{dy(x)}{dx} \wedge \dots \wedge \frac{d^m y(x)}{dx^m} \right| dx.$$

З а м е ч а н и е. При обсуждении геодезических удобно допускать кусочно-гладкие кривые. Аналог аффинных геодезических

¹⁾ Требование $dy(x)/dx \wedge d^2y(x)/dx^2 \neq 0$ аналогично требованию $dy(x)/dx \neq 0$ в обычной евклидовой геометрии. Конечно, может оказаться и так, что нам понадобится расширить область определения функционала (І.а.16); например, можно было бы рассматривать такие кривые класса C^2 , для которых $dy(x)/dx \wedge d^2y(x)/dx^2 = 0$ в конечном числе точек. Что более существенно, можно допускать и некоторые кривые класса C^1 , как это описано в приводимом ниже замечании.

в $\mathbb{R}^m$ будет при этом задаваться отображениями $y_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^m$, такими что

$$y_i(b_i) = y_{i+1}(a_{i+1}), \quad \frac{dy_i}{dx}(b_i) = -\frac{dy_{i+1}}{dx}(a_{i+1}), \dots,$$

$$\frac{d^{m-1}y_i}{dx^{m-1}}(b_i) = (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}y_{i+1}}{dx^{m-1}}(a_{i+1}).$$

При обсуждении граничных условий в гл. IV окажется естественным расширить функционал Φ с $\mathcal{Y}^0(I, \omega)$ на больший класс ломаных или кусочно-гладких интегральных многообразий, точное определение которого будет зависеть, конечно, от структуры задачи $(I, \omega; \varphi)$.

Очевидно, что разнообразие классических вариационных задач высшего порядка с ограничениями бесконечно. Одна из характерных черт постановки этих вариационных задач в терминах внешних дифференциальных систем состоит в том, что при этом выделяются и собираются воедино существенные особенности всех примеров.

б. Уравнения в вариациях для интегральных многообразий дифференциальных систем¹⁾

Рассмотрим на многообразии X пфаффову систему (I, ω) , заданную локально условиями (I.a.1). Мы выведем уравнения в вариациях для интегрального многообразия (I.a.2) системы (I, ω) , т. е., грубо говоря, вычислим следующий объект (который будет строго определен в разд. с гл. I):

$T_{N,f}(\mathcal{Y}(I, \omega))$ — касательное пространство к $\mathcal{Y}(I, \omega)$
в точке (N, f) .

Для этого докажем важный общий результат вычислительного характера — предложение (I.b.5) (см. [31], [38]).

Пусть N и X — многообразия, и

$$(I.b.1) \quad f : N \rightarrow X$$

— гладкое отображение. *Вариация* отображения (I.b.1) задается гладким отображением

$$(I.b.2) \quad F : N \times [0, \varepsilon] \rightarrow X$$

$[0, \varepsilon] = \{t : 0 \leq t \leq \varepsilon\}$, таким что если обозначить через

$$f_t : N \rightarrow X, \quad t \in [0, \varepsilon],$$

¹⁾ Результаты этого раздела справедливы при любом числе n независимых переменных.

ограничение F на $N \times \{t\} \cong N$, то $f_0 = f$. Ассоциированная инфинитезимальная вариация

$$v \in C^\infty(N, f^*T(X))$$

определяется равенством

$$(I.b.3) \quad v(x) = F_*(\partial/\partial t),$$

где

$$F_* : T_{(x,0)}(N \times [0, \varepsilon]) \rightarrow T_{f(x)}(N)$$

— дифференциал отображения F в точке $(x, 0)$ (рис. 5).

З а м е ч а н и е. Во всех интересующих нас случаях f будет иммерсией и v индуцирует сечение

$$[v] \in C^\infty(N, E)$$

нормального расслоения

$$E = f^*(T(X)/f_*T(N))$$

к $f(N)$ в X . Грубо говоря, для двух вариаций $F, \tilde{F}$ отображения (I.b.1), ассоциированные инфинитезимальные вариации которых

$v, \tilde{v}$ удовлетворяют равенству $[v] = [\tilde{v}]$, выполняется свойство

$$(I.b.4) \quad \dot{f}_t = \tilde{f}_t \circ g_t \bmod t^2,$$

где g_t — диффеоморфизмы многообразия N (фактически $v - \tilde{v} = \omega$ — векторное поле на N , и в первом приближении $g_t =$

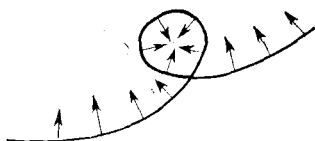


Рис. 5.

$= \exp t\omega$). Так как нас интересуют прежде всего образы $\dot{f}_t(N) \subset X$ и свойство (I.b.4) означает, что $\dot{f}_t(N) = \tilde{\dot{f}}_t(N)$ с точностью до второго порядка, то следует ожидать, что наши уравнения в вариациях будут зависеть только от нормального векторного поля $[v]$, ассоциированного с инфинитезимальной вариацией v .

(I.b.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Предположим, что отображение (I.b.1) является иммерсией, и пусть θ — дифференциальная форма на X . Тогда

$$(\mathcal{L}_{\partial/\partial t}(F^*\theta))_N = f^*(v \lrcorner d\theta + d(v \lrcorner \theta))$$

как дифференциальные формы на $N = N \times \{0\}$.

З а м е ч а н и е. В случае когда f является вложением, правая часть этого равенства интерпретируется следующим образом. Пусть $V \in C^\infty(X, T(X))$ — произвольное векторное поле, которое при ограничении дает инфинитезимальную вариацию

$v \in C^\infty(N, f^*(T(X)))$. Тогда $V \lrcorner d\theta + d(V \lrcorner \theta)$ есть форма на X , и мы полагаем

$$f^*(v \lrcorner d\theta + d(v \lrcorner \theta)) = f^*(V \lrcorner d\theta + d(V \lrcorner \theta)).$$

Суть в том, что правая часть равенства не зависит от продолжения V поля v . Так как эта формула должна выполняться локально в окрестности точки многообразия N , то достаточно исследовать лишь случай вложения.

Доказательство ¹⁾. Предполагая, что f — вложение, выберем в качестве V любое векторное поле на X , такое что

$$V(F(x, t)) = F_*(\partial/\partial t) \in T_{F(x, t)}(X).$$

Ключевой момент доказательства состоит в следующем вычислении: формула А. Картана (0.а.1) дает на $N \times [0, \varepsilon]$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\partial/\partial t}(F^*\theta) &= d(\partial/\partial t \lrcorner F^*\theta) + \partial/\partial t \lrcorner dF^*\theta \\ &= dF^*(V \lrcorner \theta) + F^*(V \lrcorner d\theta) \\ &= F^*(d(V \lrcorner \theta) + V \lrcorner d\theta). \end{aligned}$$

¹⁾ В случае когда N одномерно, мы можем рассматривать вариацию как отображение

$$F: [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow X,$$

задаваемое правилом

$$(s, t) \mapsto F(s, t) \in X.$$

Полагая

$$F^*\theta = p(s, t) ds + q(s, t) dt,$$

имеем

$$(\mathcal{L}_t(F^*\theta))_N = \frac{\partial p}{\partial t}(s, 0) ds.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner F^* d\theta &= \frac{d}{dt} \lrcorner d(F^*\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \right) dt \wedge ds = \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \right) ds, \\ d \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner F^*\theta \right) &= dq = \frac{\partial q}{\partial s} ds + \frac{\partial q}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner (F^* d\theta) + d \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner F^*\theta \right) = \frac{\partial p}{\partial t} ds + \frac{\partial q}{\partial t} dt,$$

и ограничение этой формы на $N \times \{0\}$ равно просто $(\partial p/\partial t)(s, 0) ds$. Это вычисление лежит в основе предложения (I.b.5).

Обе части этого равенства являются дифференциальными формами на $N \times [0, \varepsilon]$, и утверждение предложения следует отсюда, если рассмотреть ограничения обеих частей на $T(N) = T(N \times \{0\}) \subset \subset T(N \times [0, \varepsilon])$ и заметить, что (как и выше) правая часть зависит только от v . $\square$

(1.b.6) Обсуждение. (Это обсуждение понадобится нам лишь в дальнейшем, сейчас его можно опустить.) Интересный пример использования предложения (1.b.5) возникает, когда $X = G$ есть группа Ли, $\{\omega^i\}$ — базис левоинвариантных форм Маурера — Картана и структурные уравнения имеют вид (см. (0.a.3))

$$d\omega^i + \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Напомним следующие хорошо известные факты (доказательство см. в [35]):

(1.b.7) Если многообразие N связно, то гладкое отображение

$$f: N \rightarrow G$$

однозначно с точностью до левых сдвигов определяется 1-формами

$$(1.b.8) \quad \psi^i = f^* \omega^i.$$

(1.b.9) Отображение

$$f: U \rightarrow G,$$

определенное в некоторой окрестности U произвольной точки $x \in N$ и удовлетворяющее условию (1.b.8) для заданного набора 1-форм ω^i на N , существует тогда и только тогда, когда выполняются уравнения Маурера — Картана в прообразе

$$(1.b.10) \quad d\psi^i + \frac{1}{2} c_{jk}^i \psi^j \wedge \psi^k = 0.$$

Предположим теперь, что многообразие N одномерно, $N = \{a \leq s \leq b\}$. Тогда условия (1.b.10) тривиально выполняются и задание отображения $f: N \rightarrow G$ с точностью до левых сдвигов эквивалентно заданию 1-форм

$$\psi^i = f^i(s) ds,$$

где $f^i(s)$ — произвольные функции. Предположим, что мы задали вариацию

$$f_t: N \rightarrow G, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

требованием

$$f_t^* \omega^i = f^i(s, t) ds,$$

где $f^i(s, t)$ — функции, удовлетворяющие условию $f^i(s, 0) = f^i(s)$. Тогда вариация

$$F : N \times [0, \varepsilon] \rightarrow G$$

определена равенством $F(s, t) = f_t(s)$. Из (I.b.7) следует, что если записать

$$F^* \omega^i = f^i(s, t) ds + g^i(s, t) dt,$$

то функции $g^i(s, t)$ однозначно определяются по функциям $f^i(s, t)$ и $g^i(0, t)$. Чтобы убедиться в этом, отождествим все касательные пространства к G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ с помощью левых сдвигов, и пусть $e_i \in \mathfrak{g}$ — векторные поля, двойственные к формам $\omega^i \in \mathfrak{g}^*$. Тогда вариационное векторное поле, отвечающее вариации F , имеет вид

$$v = g^i(s, 0) e_i.$$

Далее, с одной стороны (полагаем $f_t^i = \partial f^i / \partial t$ и т. д.),

$$\mathcal{L}_{\partial/\partial t}(F^* \omega^i) \big|_N = f_t^i(s, 0) ds,$$

а с другой —

$$f^*(v \lrcorner d\omega^i + d(v \lrcorner \omega^i)) = (-c_{jk}^i g^j(s, 0) f^k(s, 0) + g_s^i(s, 0)) ds.$$

Теперь предложение (I.b.5) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(I.b.11) \quad g_s^i = f_t^i + c_{jk}^i g^j f^k.$$

В частности, отсюда видно, что функции $g^i(s, 0)$ однозначно определены функциями $f^i(s, 0)$, $f_t^i(s, 0)$ и $g^i(a, 0)$ (и то же верно для всех $g^i(s, \cdot)$).

Конечно, систему (I.b.11) было бы гораздо легче вывести из уравнений (I.b.10), но мы хотели показать, как применяется предложение (I.b.5).

Выведем теперь уравнения в вариациях для интегральных многообразий пфафовой системы (I, ω) с одной независимой переменной, задаваемой локально условиями (I.a.1). Предположим, что

$$N = \{a \leq s \leq b\},$$

и пусть отображение

$$(I.b.12) \quad f_t : N \rightarrow X, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

задает вариацию некоторого интегрального многообразия (I.a.2) системы (I, ω) (так что $f = f_0$). Предположим, что отображение

(I.b.12) определяет интегральное многообразие системы (I, ω) , так что, согласно (I.a.3),

$$(I.b.13) \quad f_t^* \theta^\alpha = 0^1).$$

Если принять, что семейство f_t задает отображение (I.b.2), где

$$F(s, t) = f_t(s) \in X,$$

то условие (I.b.13) эквивалентно условию

$$F^* \theta^\alpha = g^\alpha(s, t) dt.$$

Таким образом,

$$(\mathcal{L}_{\partial/\partial t}(F^* \theta^\alpha))_N = (g_t^\alpha(s, 0) dt)_N = 0.$$

В силу (I.b.5) это дает

$$(I.b.14) \quad f^*(v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha)) = 0,$$

где v — инфинитезимальная вариация, ассоциированная с f_t .

Можно считать, что уравнения (I.b.14) дают первое приближение к $T_{(N, f)}(\mathcal{V}(I, \omega))$. Чтобы представить их в более «съедобном» виде, опустим f и будем рассматривать интегральные многообразия системы (I, ω) как подмногообразия

$$N \subset X.$$

В этом случае инфинитезимальная вариация подмногообразия N в X задается касательными векторами $v(s) \in T_s(X)$ ($s \in N$). Если такое поле v задано, то продолжим его до векторного поля на X , обозначив продолжение по-прежнему через v ²). Тогда $v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha)$ — это 1-форма на X , и равенство (I.b.14) эквивалентно условию

$$(v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha))_N = 0.$$

Если для некоторой 1-формы σ на X ограничение $\sigma_N = 0$, то мы будем писать

$$\sigma \equiv 0 \bmod N.$$

Тогда равенство (I.b.14) принимает вид

$$(I.b.15) \quad v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha) \equiv 0 \bmod N, \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

З а м е ч а н и я. i) Как отмечалось в доказательстве предложения (I.b.5), эти уравнения зависят лишь от инфинитезимальной вариации $v \in C^\infty(N, T(X))$, а не от ее продолжения до векторного поля на всем X .

¹) На самом деле важно лишь, чтобы это равенство выполнялось с точностью до t^2 .

²) С этого момента удобно отбросить неуклюжий педантизм и не обозначать больше продолжение поля v на всё многообразие X через V .

ii) Ввиду замечания, содержащего формулу (I.b.4), ясно, что условие (I.b.15) должно зависеть только от *нормального* векторного поля $[v] \in C^\infty(N, T(X)/T(N))$, индуцированного полем v . Действительно, предположим, что поле $v(s) \in T_s(N)$ касается подмногообразия N . Обозначая опять через $v \in C^\infty(X, T(X))$ его произвольное продолжение, для функции $v \lrcorner \theta^\alpha$ на X имеем

$$v \lrcorner \theta^\alpha = 0 \text{ на } N \Rightarrow d(v \lrcorner \theta^\alpha) \equiv 0 \bmod N,$$

тогда как, очевидно,

$$v \lrcorner d\theta^\alpha \equiv 0 \bmod N,$$

ибо $\langle v \lrcorner d\theta^\alpha, v \rangle = \langle d\theta^\alpha, v \wedge v \rangle = 0$.

iii) Ясно также, что уравнения (I.b.15) не должны зависеть от выбора базиса $\theta^1, \dots, \theta^s$ в W^* . Положим

$$\theta = \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

где λ_α — функции на X . Тогда

$$\begin{aligned} v \lrcorner d\theta + d(v \lrcorner \theta) &= v \lrcorner (d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha) + \lambda_\alpha (v \lrcorner d\theta^\alpha) + \\ &+ d\lambda_\alpha (v \lrcorner \theta^\alpha) + \lambda_\alpha d(v \lrcorner \theta^\alpha) \equiv -d\lambda_\alpha (v \lrcorner \theta^\alpha) + d\lambda_\alpha (v \lrcorner \theta^\alpha) \bmod N \\ &\equiv 0 \bmod N; \end{aligned}$$

на среднем шаге используются соотношения (I.b.15) и $\theta^\alpha \equiv 0 \bmod N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $E = T(X)/T(N)$ — нормальное векторное расслоение к N в X и $\omega_\alpha \in C^\infty(X, W)$ — базис, двойственный к $\theta^\alpha \in C^\infty(X, W^*)$. Определим линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$(I.b.16) \quad L : C^\infty(N, E) \rightarrow C^\infty(N, W \otimes T^*(N))$$

равенством

$$L([v]) = \omega_\alpha \otimes L^\alpha(v),$$

где

$$L^\alpha(v) = (v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha))_N.$$

Будем говорить, что

$$L([v]) = 0$$

— это *уравнения в вариациях для N как интегрального многообразия системы (I, ω)* .

Мы также будем иногда говорить о «касательном пространстве» $T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$, состоящем из решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения $L([v]) = 0$. Эта терминология будет объяснена в разд. с гл. I, а в разд. а гл. IV мы обсудим «граничные условия» A, B и определим соответствующее подпространство $T_N(\mathcal{Y}(I, \omega); [A, B]) \subset T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$.

с. Дифференциальные системы в хорошей форме. Производный флаг и характеристики Коши

Сохраняя обозначения предыдущих разделов, исследуем уравнения в вариациях (I.b.15) для одного важного класса дифференциальных систем. Приведем сначала следующий

(I.c.1) ПРИМЕР. Рассмотрим на многообразии $X = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m)$ каноническую пфаффову систему, задаваемую условиями

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0.$$

Ее структурные уравнения имеют вид

$$(I.c.2) \quad d\theta^\alpha = -d\dot{y}^\alpha \wedge dx.$$

Удобно использовать на X корепер $\{\omega; \theta^1, \dots, \theta^m; d\dot{y}^1, \dots, d\dot{y}^m\}$; двойственный касательный репер обозначим через $\{\partial/\partial\omega; \partial/\partial\theta^1, \dots, \partial/\partial\theta^m; \partial/\partial\dot{y}^1, \dots, \partial/\partial\dot{y}^m\}$. Для векторного поля

$$v = A \partial/\partial\omega + B^\alpha \partial/\partial\theta^\alpha + C^\alpha \partial/\partial\dot{y}^\alpha$$

на X в силу (I.c.2) имеем

$$(I.c.3) \quad (v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha) = dB^\alpha + A d\dot{y}^\alpha - C^\alpha dx.$$

Пусть $x \mapsto (x, y(x), dy(x)/dx)$ — интегральное многообразие канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Тогда с учетом равенств

(I.c.3) уравнения в вариациях (I.b.15) принимают вид

$$(I.c.4) \quad \frac{dB^\alpha(x)}{dx} = C^\alpha(x) - \frac{d^2 y^\alpha(x)}{dx^2} A(x),$$

где теперь

$$v(x) = A(x) \partial/\partial\omega + B^\alpha(x) \partial/\partial\theta^\alpha + C^\alpha(x) \partial/\partial\dot{y}^\alpha \in C^\infty(NT(X))$$

— касательный вектор к X , определенный вдоль подмногообразия $N \subset X$. Прибавив к полю v касательное к N векторное поле, можно добиться того, чтобы $A(x) = 0$. Тогда, используя (I.c.4), получаем, что

$$(I.c.5) \quad v(x) = B^\alpha(x) \partial/\partial\theta^\alpha + \left(\frac{dB^\alpha(x)}{dx} \right) \partial/\partial\dot{y}^\alpha.$$

В частности, можно сказать, что общее поле $[v] \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$ «зависит от m произвольных функций $B^\alpha(x)$ одной переменной»¹⁾.

¹⁾ Стоит сопоставить (I.c.5) со следующим рассуждением. Кривая интегральных многообразий канонической пфаффовой системы на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ задается

Конечно, в этом примере можно заменить $\mathbb{R}^m$ произвольным многообразием M .

Приведенный пример, как фактически и все рассматриваемые в данной книге пфаффовы дифференциальные системы, принадлежит замечательному специальному классу пфаффовых систем, который мы определим сейчас для случая одной независимой переменной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть (I, ω) — внешняя дифференциальная система на многообразии X , задаваемая локально уравнениями Пфаффа (см. (I.a.1))

$$\theta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s,$$

$$\omega \neq 0.$$

Обозначим через $\{\theta^\alpha\} \subset A^*(X)$ алгебраический идеал, порожденный формами θ^α . Система (I, ω) называется пфаффовой системой в хорошей форме, если существуют такие 1-формы π^α , что

$$(I.c.6) \quad d\theta^\alpha \equiv -\pi^\alpha \wedge \omega \bmod \{\theta^\alpha\}.$$

З а м е ч а н и я. Некоторые доводы в пользу такой терминологии можно найти в [11] и [12]. Это понятие было явно выделено в книге Кэлера [47]. Один из доводов в пользу того, что пфаффовы системы в хорошей форме образуют естественный и с теоретической точки зрения достаточно просторный класс, приведен при обсуждении понятия продолжения в конце этого раздела.

Чтобы придать определению инвариантную форму, будем считать, что пфаффова система задается подрасслоением $W^* \subset T^*(X)$, и обозначим через

$$W^* \wedge T^*(X) \subset \Lambda^2 T^*(X)$$

отображением

$$(x, t) \mapsto \left(x; y^\alpha(x, t); dy^\alpha \frac{(x, t)}{dx} \right).$$

Касательный вектор v к этой кривой при $t = 0$ имеет вид

$$v(x) = \left(\frac{\partial y^\alpha(x, 0)}{\partial t} \right) \partial / \partial y^\alpha + \left(\frac{\partial^2 y^\alpha(x, 0)}{\partial x \partial t} \right) \partial / \partial y^\alpha.$$

Тогда в обозначениях примера (I.c.1)

$$B^\alpha(x) = \langle \theta^\alpha, v(x) \rangle = \frac{\partial y^\alpha(x, 0)}{\partial t},$$

$$C^\alpha(x) = \langle dy^\alpha, v(x) \rangle = \frac{\partial^2 y^\alpha(x, 0)}{\partial x \partial t},$$

$$A(x) = \langle dx, v(x) \rangle = 0,$$

и равенство (I.c.4) становится очевидным. Заметим, что исключение члена A соответствует присваиванию всем 1-струям общего параметра x .

образ тензорного произведения $W^* \otimes T^*(X)$ при альтернировании. Тогда внешний дифференциал

$$d : C^\infty(X, W^*) \rightarrow C^\infty(X, \Lambda^2 T^*(X))$$

индуцирует отображение

$$(I.c.7) \quad \delta : W^* \rightarrow \Lambda^2 T^*(X)/W^* \wedge T^*(X),$$

которое линейно над кольцом функций и потому является алгебраическим отображением.¹⁾

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) δ называется *производным отображением*, ассоциированным с пфафовой системой W^* .

ii) Если ядро $\ker \delta = W_1^* \subset W^*$ является подрасслоением постоянного ранга в W^* , то оно определяет пфафovu систему, называемую *первой производной системой* для W^* .²⁾

Напомним что $L^* = \text{span} \{ \theta^1, \dots, \theta^s, \omega \}$. Поэтому структурные уравнения (I.c.6) показывают, что условие того, что система (I, ω) имеет хорошую форму, записывается в виде

$$(I.c.8) \quad \delta(W^*) \subset L^* \wedge T^*(X)/W^* \wedge T^*(X).$$

Приведем теперь несколько примеров.

(I.c.9) ПРИМЕР. Из (I.c.2) следует, что каноническая система на $J^1(R, M)$ имеет хорошую форму.

Вообще, если пфафова система (I, ω) на многообразии X имеет хорошую форму и Y — такое подмногообразие в X , что

¹⁾ Переход к факторпространству $\Lambda^2 T^*(X)/W^* \wedge T^*(X)$ означает, что мы «работаем» по модулю элементов второй степени идеала $\{ \theta^\alpha \}$. Для сечения $\theta = \lambda_\alpha \theta^\alpha \in C^\infty(X, W^*)$ можно написать

$$\delta(\theta) = d\theta \bmod \{ \theta^\alpha \}.$$

Тогда для функции f на X

$$\delta(f\theta) = d(f\theta) \bmod \{ \theta^\alpha \} = f d\theta \bmod \{ \theta^\alpha \} = f \delta\theta.$$

В интересующем нас случае, когда $W^* \wedge T^*(X)$ является подрасслоением в $\Lambda^2 T^*(X)$, эта линейность над $C^\infty(X)$ означает, что δ является *расслоенным отображением*.

²⁾ Понятия производного отображения и первой производной системы, как и понятие всего производного флага, которое будет обсуждаться ниже, имеют смысл для *произвольной* пфафовой системы (т. е. в них не используется условие независимости).

Если обозначить через $W^{\perp} = S \subset T(X)$ распределение, соответствующее подрасслоению W^* , а через $[S, S]$ — подпространство векторных полей, порожденное всеми коммутаторами $[v, w]$, где $v, w \in C^\infty(X, S)$, то в предположении, что $W_1^* \subset W^*$ образует подрасслоение, легко видеть, что

$$W_1^{\perp} = [S, S].$$

В частности, условие полной интегрируемости системы W^* состоит просто в том, что $W_1^* = W^*$.

$\omega_Y \neq 0$, то ограничение системы (I, ω) на Y тоже будет пфаффовой системой в хорошей форме.

Применяя это утверждение к подмногообразию $X \subset J^2(\mathbb{R}, M)$, мы видим, что каноническая система с ограничениями является пфаффовой системой в хорошей форме.

З а м е ч а н и е. Возникает естественный вопрос, намного ли класс пфаффовых систем в хорошей форме шире, чем класс канонических систем с ограничениями. Несколько изменяя обозначения, предположим, что $\tilde{X} \subset J^1(\mathbb{R}, M)$ — подмногообразие, и обозначим через $(\tilde{I}, \tilde{\omega})$ ограничение на $\tilde{X}$ канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, M)$. Пусть

$$\tilde{W}^* \subset \tilde{L}^* \subset T^*(\tilde{X})$$

— соответствующие подрасслоения. Так как в стандартных локальных координатах $x; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m$ на $J^1(\mathbb{R}, M)$ мы имеем $\tilde{\omega} = dx \mid \tilde{X}$, то ясно, что для канонических систем с ограничениями пфаффова система $\tilde{L}^*$ вполне интегрируема. И обратно, можно показать (см. [12]), что справедлив следующий результат:

(I.c.10) Пусть (I, ω) — пфаффова система в хорошей форме на многообразии X с соответствующими подрасслоениями $W^* \subset L^* \subset T^*(X)$. Тогда для существования локально определенных отображений f , индуцирующих систему (I, ω) из канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, необходимо и достаточно, чтобы система L^* была вполне интегрируема.

П о я с н е н и я. Выражение «локально определенные отображения» означает, что у каждой точки $p \in X$ существует окрестность U , на которой f можно определить, т. е.

$$\begin{array}{c} X \\ \cup \\ U \xrightarrow{f} J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m). \end{array}$$

Используя стандартные координаты $(x, y, \dot{y})$ на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, положим $\tilde{\theta}^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx$, $\tilde{\omega} = dx$ и

$$\begin{aligned} \tilde{W}^* &= \text{span} \{ \tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^m \}, \\ L^* &= \text{span} \{ \tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^m, \omega \}. \end{aligned}$$

Выражение «отображение f индуцирует систему (I, ω) из канонической системы» означает, что дифференциал f_* имеет максимальный ранг и

$$\begin{aligned} f^*(\tilde{W}^*) &= W^*, \\ f^*(\tilde{L}^*) &= L^*. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пфафхова система в хорошей форме, для которой система L^* вполне интегрируема, называется *локально вложимой*.¹⁾

(I.c.11) ПРИМЕР. Каноническая система на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ задается условиями

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0.$$

Структурные уравнения имеют вид

$$(I.c.12) \quad \begin{aligned} d\theta^\alpha &= -\dot{\theta}^\alpha \wedge \omega, \\ d\dot{\theta}^\alpha &= -d\dot{y}^\alpha \wedge \omega. \end{aligned}$$

Таким образом, эта система — система в хорошей форме. Так как $\text{span} \{\omega; \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha\} = \text{span} \{dx; dy^\alpha; d\dot{y}^\alpha\}$, то каноническая система на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ локально вложима. Фактически каноническое включение

$$J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset J^1(\mathbb{R}, J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m))$$

(см. разд. b гл. 0) задает глобальное вложение.

И ясно здесь, что $\mathbb{R}^m$ можно заменить на произвольное многообразие M . Далее, рассматривая ограничения канонической системы на подмногообразия $X \subset J^2(\mathbb{R}, M)$, мы видим, что любая классическая система второго порядка с ограничениями является вложимой пфафховой системой в хорошей форме. Наконец, ясно также, что все эти рассуждения переносятся на классические системы k -го порядка с ограничениями, задаваемые подмногообразиями $X \subset J^k(\mathbb{R}, M)$.

Возвращаясь к общему обсуждению, предположим, что нам задана пфафхова дифференциальная система (I, ω) в хорошей форме с производной системой, задаваемой подрасслоением $W_1^* \subset W^*$. Основным инвариантом системы (I, ω) дается следующим определением:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числом Картана $s_1 = s_1(I, \omega)$ называется ранг расслоения W^*/W_1^* .

¹⁾ За малыми исключениями, все рассматриваемые нами примеры будут локально вложимыми. Однако до сих пор это, кажется, не играло особой роли при изучении вариационных задач. Причина, возможно, в том, что допустимые замены корепера для системы (I, ω) (см. разд. e гл. I) не соответствуют, вообще говоря, диффеоморфизмам многообразия $J^1(\mathbb{R}, M)$, индуцированным диффеоморфизмами базы M . Аналогично обстоит дело в теоретической механике и в теории интегральных операторов Фурье: следует забыть, что мы работаем на $T^*(M)$, и допустить произвольные контактные преобразования (возможно, удовлетворяющие подходящему условию трансверсальности).

Эквивалентно, s_1 есть число независимых 1-форм $\pi^\alpha \in C^\infty(X, T^*(X)/L^*)$, фигурирующих в структурном уравнении (I.c.6).¹⁾ Будем говорить, что базис $\{\theta^\alpha\}$ для W^* приспособлен к подрасслоению $W_1^* \subset W^*$, если

$$W_1^* = \text{span} \{\theta^1, \dots, \theta^{s-s_1}\},$$

$$W^* = \text{span} \{\theta^1, \dots, \theta^s\}.$$

Если использовать дополнительный набор индексов

$$1 \leq \rho, \quad \sigma \leq s - s_1,$$

$$s - s_1 + 1 \leq \mu, \nu \leq s,$$

то уравнения (I.c.6) переходят в уравнения

$$d\theta^\sigma \equiv 0 \bmod \{\theta^\alpha\},$$

$$(I.c.13) \quad d\theta^\mu \equiv -\pi^\mu \wedge \omega \bmod \{\theta^\alpha\},$$

π^μ линейно-независимы по модулю L^* ,

которые мы будем называть *рафинированными структурными уравнениями* для пфаффовых систем в хорошей форме.

(I.c.14) ПРИМЕР. Предположим, что подмногообразие $X \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ определено ограничениями

$$g^\rho(x, y, \dot{y}) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq s - s_1,$$

где

$$\text{rank} \|\partial g^\rho(x, y, \dot{y}) / \partial \dot{y}^\alpha\| = s - s_1.$$

Поскольку мы имеем на X

$$0 = dg^\rho \equiv \frac{\partial g^\rho}{\partial \dot{y}^\alpha} d\dot{y}^\alpha \bmod \text{span} \{\theta^\alpha, \omega\},$$

то число Картана ограничения на X канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ равно s_1 . Этим определяется постановка задачи Лагранжа в разд. е гл. IV.

(I.c.15) ПРИМЕР. Из равенств (I.c.12) следует, что для канонической системы на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$

$$W_1^* = \text{span} \{\theta^\alpha\},$$

$$s_1 = m.$$

¹⁾ Мы можем также сказать, что число s_1 измеряет отклонение системы W^* от полной интегрируемости. Заметим в связи с этим, что для канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^s)$ число Картана $s_1 = s$. И наоборот, если (I, ω) — система в хорошей форме, $d\omega \equiv 0 \bmod \{I, \omega\}$ и $\dim X = 2s + 1$, то из равенства $s_1 = s$ следует, что система (I, ω) локально изоморфна канонической системе на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^s)$ (это вытекает из предложения (I.c.10)). Таким образом, два крайних случая $s_1 = 0$ и $s_1 = s$ имеют локальные нормальные формы.

Если подмногообразие $X \subset J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ определено ограничениями

$$g^\rho(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq m - s_1,$$

где

$$\text{rank} \|\partial g^\rho / \partial \ddot{y}^\alpha\| = m - s_1,$$

то число Картана ограничения на X канонической системы на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ равно s_1 .

Эти примеры непосредственно обобщаются на подмногообразие $X \subset J^k(\mathbb{R}, M)$ для любого многообразия M .

Цель этого раздела — вывести вариационные уравнения (I.b.15) для пфафовой системы в хорошей форме и тем самым получить точный вариант следующего эвристического утверждения (ср. с утверждением, приведенным сразу после (I.c.5)):

(I.c.16) *Общее векторное поле $[v] \in T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$ зависит от s_1 функций одной переменной.*

Прежде чем заняться этим, удобно несколько отклониться в сторону и обсудить две вполне интегрируемые пфаффовы системы, каноническим образом ассоциированные с произвольной пфаффовой системой I (без условия независимости).

(I.c.17) **Обсуждение.** Пусть $W^* \subset T^*(X)$ — подрасслоение, определяющее дифференциальный идеал $I \subset A^*(X)$. Рассмотрим первое производное отображение (I.c.7). Предполагая, что $W_1^* = \ker \delta$ является подрасслоением, рассмотрим второе производное отображение

$$\delta_1: W_1^* \rightarrow \Lambda^2 T^*(X) / W_1^* \wedge T^*(X).$$

Положив $W_2^* = \ker \delta_1$ и продолжая предполагать постоянство ранга на каждом шаге, мы получаем так называемый *производный флаг* $W^* \supset W_1^* \supset W_2^* \supset W_3^* \supset \dots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расслоение $W_\infty^* \equiv \bigcap_k W_k^*$ называется *производной системой*, ассоциированной с пфаффовой системой W^* . Конечно, для достаточно больших k_0

$$W_{k_0}^* = W_{k_0+1}^* = \dots = W_\infty^*.$$

Производная система W_∞^* вполне интегрируема, и легко видеть, что W_∞^* — *наибольшая вполне интегрируемая подсистема системы W^* .*

Приведем один интересный результат относительно производной системы, принадлежащий Чжоу [24] (этот результат обсуждается в [7], [43] и [46]). Пусть дана пфаффова система $W^* \subset T^*(X)$. Будем говорить, что две точки $p, q \in X$ *взаимно до-*

стижимы, если существуют последовательность связных интегральных многообразий N_i , $i = 1, \dots, m$, системы W^* и точки $p_i \in N_i \cap N_{i+1}$, такие что $p \in N_1$ и $q \in N_m$ (рис. 6).

(I.c.18) ТЕОРЕМА (Чжоу). Две точки $p, q \in X$ взаимно достижимы тогда и только тогда, когда они лежат на одном и том же связном листе слоения, определенного производной системой W_∞^* .

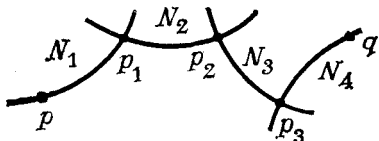


Рис. 6.

Ясно, что эта теорема эквивалентна утверждению о том, что всякая точка, достаточно близкая к p , лежит на некоторой интегральной кривой системы I , проходящей через p .

(I.c.19) ПРИМЕР. Для канонической системы на $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ производный флаг выглядит так:

$$\begin{array}{ccccc} \text{span} \{ \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha \} & \supset & \text{span} \{ \theta^\alpha \} & \supset & (0) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ W^* & \supset & W_1^* & \supset & W_\infty^* \end{array}$$

Для $J^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ производный флаг (в очевидных обозначениях) имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \text{span} \{ \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha; \ddot{\theta}^\alpha \} & \supset & \text{span} \{ \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha \} & \supset & \text{span} \{ \theta^\alpha \} & \supset & (0) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ W^* & \supset & W_1^* & \supset & W_2^* & \supset & W_\infty^* \end{array}$$

В общем случае производный флаг, грубо говоря, прослеживает, каков порядок пфафовой системы, рассматриваемой как система дифференциальных уравнений.

Перейдем теперь к другой вполне интегрируемой системе, ассоциированной с системой W^* .

(I.c.20) О б с у ж д е н и е. По данному подрасслоению $W^* \subset T^*(X)$, порождающему дифференциальный идеал $I \subset A^*(X)$, определим *ассоциированную систему* $\mathcal{A}(I) \subset C^\infty(X, T(X))$ как набор векторных полей v , удовлетворяющих условию

(I.c.21) $v \perp I \subset I$.

Легко проверить, что из дифференциальной замкнутости идеала I следует, что

(I.c.22) $v, w \in \mathcal{A}(I) \Rightarrow [v, w] \in \mathcal{A}(I)$.

Предположим, что значения $v(x) \in T_x(X)$, $v \in \mathcal{A}(I)$, порождают подрасслоение; обозначим его через $A(I) \subset T(X)$. Таким обра-

зом, $\mathcal{A}(I) = C^\infty(X, A(I))$. Ясно, что

$$A(I) \subset (W^*)^\perp,$$

и мы положим

$$\mathcal{C}(I) = A(I)^\perp \subset T^*(X).$$

Заметим, что согласно условию (І.с.22) пфафова система $\mathcal{C}(I)$ вполне интегрируема и $W^* \subset \mathcal{C}(I)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система $\mathcal{C}(I)$ называется *характеристической системой Коши*, ассоциированной с системой I .

Важность этого понятия объясняется следующим результатом (см. [11], [17]):

(І.с.23) ТЕОРЕМА. *Локально можно выбрать на многообразии X координаты $(u, v) = (u^1, \dots, u^k; v^1, \dots, v^l)$, такие что система $\mathcal{C}(I)$ порождается формами $du^1, \dots, du^k$. Далее, система I порождается 1-формами*

$$\theta^\alpha = f_1^\alpha(u) du^1 + \dots + f_k^\alpha(u) du^k.$$

Другими словами, характеристическая система Коши локально «выделяет минимальный набор переменных, необходимых для представления системы I ». Одномерные интегральные многообразия системы I локально имеют вид

$$x \mapsto (u(x), v(x)),$$

где $x \rightarrow u(x)$ — интегральная кривая пфафовой системы, порожденной выписанными выше 1-формами $\theta^\alpha = \theta^\alpha(u, du)$, а $v(x)$ — произвольная функция от x .

(І.с.24) ПРИМЕР (см. разд. d гл. 0). Пусть Ψ — замкнутая 2-форма на X . Тогда $\Psi(x) \in \Lambda^2 T_x^*(X)$ — антисимметричная билинейная форма в каждом касательном пространстве $T_x(X)$. Определим ранг $\rho(x)$ условиями

$$\Psi(x)^{\rho(x)} \neq 0,$$

$$\Psi(x)^{\rho(x)+1} = 0$$

(символ $\Psi(x)^r$ обозначает форму $\Psi(x) \wedge \dots \wedge \Psi(x)$ (r раз)).

(І.с.25) ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. пример (0.d.6)). Системой Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ называется пфафова система, порожденная всеми 1-формами

$$v \lrcorner \Psi,$$

где v — векторное поле на X .

Простейшей является ситуация, когда ранг $\rho(x)$ постоянен, скажем равен ρ . В этом случае хорошо известная *теорема Дарбу*

(см. (0.d.8), [2], [9]) утверждает, что существует локальная нормальная форма

$$\Psi = du_1 \wedge dv^1 + \dots + du_p \wedge dv^p,$$

где функции $u_1, \dots, u_p, v^1, \dots, v^p$ представляют собой часть системы координат на X . Система Картана и характеристическая система Коши совпадают и задаются равенством

$$\mathcal{C}(\Psi) = \text{span}\{du_1, \dots, du_p, dv^1, \dots, dv^p\}.$$

Позднее (см. разд. е) мы будем специально заниматься системами Картана в случае, когда ранг $\rho(x)$ не постоянен.

Возвратимся теперь к обсуждению общей ситуации. Мы хотим вывести уравнения в вариациях для общей пфафовой системы в хорошей форме и, используя их, обосновать утверждение (I.c.16). Для упрощения обозначений удобно предположить, что характеристики Коши отсутствуют (общий случай рассматривается таким же образом). Из рафинированных структурных уравнений (I.c.13) следует, что

(I.c.26) 1-формы $\{\omega; \theta^\alpha; \pi^\mu\}$ задают корепер на X .

Действительно, эти формы линейно-независимы и потому порождают некоторое подрасслоение $K^* \subset T^*(X)$. Из определения и структурных уравнений (I.c.13) непосредственно следует, что $A(I) = K^*{}^\perp$. Таким образом, наше предположение об отсутствии характеристик Коши эквивалентно тому, что $K^* = T^*(X)$.

Обозначим через $\{\partial/\partial\omega; \partial/\partial\theta^\alpha; \partial/\partial\pi^\mu\}$ двойственный репер векторных полей.

Чтобы вычислить число решений уравнений в вариациях (I.b.15), вспомним наше обозначение $L^* = \text{span}\{\omega, \theta^1, \dots, \theta^s\}$ и обозначим через $L^* \wedge L^* \subset A^2(X)$ пространство 2-форм, порожденное над кольцом $C^\infty(X)$ формами вида $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ и $\theta^\alpha \wedge \omega$. Сначала мы проведем вычисление в предположении, что уравнения (I.c.13) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{(I.c.27)} \quad d\theta^0 &\equiv 0 \bmod L^* \wedge L^*, \\ d\theta^\mu &\equiv -\pi^\mu \wedge \omega \bmod L^* \wedge L^*, \end{aligned}$$

а затем объясним, почему достаточно рассмотреть лишь этот случай.

Обозначим через $W^* \wedge W^* \subset A^2(X)$ пространство 2-форм, порожденное над кольцом $C^\infty(X)$ формами $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$. Заменяя, если необходимо, π^μ членом $\pi^\mu + F_\alpha^\mu \theta^\alpha$, мы можем переписать уравнения (I.c.27) в виде

$$\begin{aligned} \text{(I.c.28)} \quad d\theta^0 &\equiv -E_\alpha^0 \theta^\alpha \wedge \omega \bmod W^* \wedge W^*, \\ d\theta^\mu &\equiv -\pi^\mu \wedge \omega \bmod W^* \wedge W^*. \end{aligned}$$

Типичное векторное поле на X записывается так:

$$v = A\partial/\partial\omega + B^\rho\partial/\partial\theta^\rho + B^\mu\partial/\partial\theta^\mu + C^\mu\partial/\partial\pi^\mu.$$

Прибавляя к полю v касательный к подмногообразию N вектор, можно добиться того, чтобы $A = 0$. Используя уравнения (I.c.28) и тот факт, что $\theta^\alpha \equiv 0 \bmod N$ (так что $v \lrcorner (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \equiv 0 \bmod N$), мы можем переписать уравнения (I.b.15)

$$d(v \lrcorner \theta^\alpha) + v \lrcorner d\theta^\alpha \equiv 0 \bmod N$$

в виде

$$dB^\rho - E_\alpha^\rho B^\alpha \omega \equiv 0 \bmod N,$$

$$dB^\mu - C^\mu \omega \equiv 0 \bmod N.$$

Если на отрезке $N = \{a \leq x \leq b\}$ введена координата x и $v \in C^\infty(N, T(X))$, то эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dB^\rho(x)}{dx} + E_\alpha^\rho(x) B^\alpha(x) D(x) &= 0, \\ \frac{dB^\mu(x)}{dx} + C^\mu(x) D(x) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.c.29})$$

где $D(x) = \langle \omega, \partial/\partial x \rangle \neq 0$. Решение этой системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $a \leq x \leq b$ однозначно определяется заданием произвольных функций $C^\mu(x)$ и начальных значений $B^\alpha(a)$. Таким образом, «размеры» пространства $T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$ можно описать следующим образом:

Общий элемент $[v] \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$ определяется заданием s_1 произвольных функций одной переменной и некоторого количества постоянных ¹⁾.

З а м е ч а н и е. Теорема Картана — Кэлера для пфаффовых систем в хорошей форме утверждает, что, грубо говоря, «интегральные многообразия $N \in \mathcal{Y}(I, \omega)$ зависят от s_1 функций одной переменной (и некоторого количества постоянных)» (см. [11], [17], [47] и [62]). Обычно это утверждение формулируется при дополнительных предположениях *инволютивности* и *вещественной аналитичности*, но в случае одной независимой переменной ни то, ни другое не нужно. На самом деле, хотя нам это и не понадобится, кажется почти несомненным, что элемент $[v]$, получаемый при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I.c.29), всегда является инфинитезимальной вариацией настоящей кривой $\{N_t\} \subset \mathcal{Y}(I, \omega)$. Это объясняет, почему мы

¹⁾ Грубо говоря, число Картана измеряет «число» интегральных многообразий системы (I, ω) (см. подстрочное примечание к определению перед примечанием (I.c.11)).

называем $T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$ «касательным пространством» к многообразию $\mathcal{V}(I, \omega)$ в точке N . Почему мы можем предполагать, что равенства (I.c.13) имеют вид (I.c.27), лучше всего объяснит специальное обсуждение понятия продолжения внешней дифференциальной системы, интересное и само по себе.

(I.c.30) О б с у ж д е н и е. Пусть X — многообразие, n — натуральное число. Обозначим через

$$\pi : G_n(X) \rightarrow X$$

грассманово расслоение, слоями которого

$$\pi^{-1}(p) = G_n(T_p(X))$$

служат грасмановы многообразия n -мерных плоскостей в касательных пространствах $T_p(X)$. Опишем каноническую пфаффову дифференциальную систему (H, ω) на $G_n(X)$. Чтобы сделать это, надо задать фильтрацию

$$(I.c.31) \quad W^* \subset L^* \subset T^*(G_n(X)),$$

где число независимых переменных равно n , т. е.

$$\text{rank}(L^*/W^*) = n.$$

Точки расслоения $G_n(X)$ мы обозначаем (p, E) , где $p \in X$, а $E \subset T_p(X)$ является n -мерной плоскостью. Положим (ниже π^* — кодифференциал проекции π)

$$(I.c.32) \quad \begin{aligned} W_{(p, E)}^* &= \pi^*(E^\perp), \\ \bigcap \\ L_{(p, E)}^* &= \pi^*(T_p^*(X)). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пфаффова система (H, ω) , определенная условиями (I.c.31), (I.c.32), называется *универсальным продолжением*, отвечающим многообразию X и числу n .

Посмотрим, как выглядит система (H, ω) в локальных координатах. Если $(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^m) = (x^i, y^\alpha)$ ($1 \leq i, j \leq n$; $1 \leq \alpha, \beta \leq m$) — локальная система координат на X , то открытое множество $U \subset G_n(X)$ задается n -мерными плоскостями E , такими что

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|E \neq 0.$$

В любой плоскости $E \in U$ можно единственным образом выбрать базис вида

$$e_i = \partial/\partial x^i + l_i^\alpha \partial/\partial y^\alpha,$$

и функции $(x^i; y^\alpha; l_i^\alpha)$ задают локальную систему координат на $U \subset G_n(X)$. Из (I.c.32) видно, что система $(H, \omega)|U$ порождается

уравнениями Пфаффа

$$(I.c.33) \quad \begin{aligned} \theta_i^\alpha &= dy^\alpha - l_i^\alpha dx^i = 0, \\ \omega &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \neq 0. \end{aligned}$$

Интегральное многообразие

$$f: N \rightarrow G_n(X)$$

системы (H, ω) локально задается отображением

$$(x^i) \mapsto (x^i; y^\alpha(x); l_i^\alpha(x)),$$

и из равенств (I.c.33) следует, что

$$l_i^\alpha(x) = \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i}.$$

Другими словами, для заданной иммерсии

$$(I.c.34) \quad f: N \rightarrow X$$

существует каноническое поднятие

$$\begin{array}{ccc} & & G_n(X) \\ & \nearrow f_* & \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

где по определению

$$f^*(p) = (f(p), f_*T_p(N)).$$

Подытожим наши рассуждения:

(I.c.35) Интегральные многообразия системы (H, ω) являются каноническими поднятиями отображений (I.c.34).

Предположим теперь, что (I, ω) — внешняя дифференциальная система на X и $\deg \omega = n$. Мы не предполагаем, что система I пфафхова. Интегральные элементы системы (I, ω) образуют некое подмножество $V(I, \omega) \subset G_n(X)$, которое на практике обычно бывает аналитическим подмногообразием. Предполагая, что это так, обозначим через $X^{(1)} \subset V(I, \omega)$ открытое плотное множество всех гладких точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Первое продолжение $(I^{(1)}, \omega)$ системы (I, ω) задается ограничением на подмногообразие $X^{(1)} \subset G_n(X)$ канонической дифференциальной системы (H, ω) .

Из (I.c.35) и определений немедленно следует такое утверждение:

(I.c.36) *Интегральные многообразия систем (I, ω) и $(I^{(1)}, \omega)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии.*

Определить процесс продолжения дифференциальной системы легко, а вот понять его — дело довольно тонкое, особенно при $n > 1$. Эти вопросы обсуждаются, например, в [12], [17], [60] и [62].

Из (I.c.33) видно, что при $n = 1$ система (H, ω) локально изоморфна канонической системе на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. В частности, отсюда следует, что $(I^{(1)}, \omega)$ является пфафовой системой в хорошей форме. В действительности мы можем утверждать больше. Предположим, что система (I, ω) имеет хорошую форму со структурными уравнениями (I.c.13). Интегральные элементы $V(I, \omega) \subset \subset G_1(X)$ представляют собой прямые в касательных пространствах к многообразию X , определенные линейными уравнениями

$$(I.c.37) \quad \begin{aligned} \theta^\alpha &= 0, \\ \pi^\mu - l^\mu \omega &= 0. \end{aligned}$$

Действительно, это в точности уравнения прямой в $T(X)$, на которой $\theta^\alpha = 0$, $\omega \neq 0$. Отсюда вытекает, что локально

$$X^{(1)} \cong X \times \mathbb{R}^{s_1},$$

где координаты в $\mathbb{R}^{s_1}$ имеют вид $l = (l^1, \dots, l^{s_1}) = (l^\mu)$. Наше первое продолжение $(I^{(1)}, \omega)$ является пфафовой системой на $X^{(1)}$

$$(I.c.38) \quad \begin{aligned} \theta^\alpha &= 0, \\ \Theta^\mu &= \pi^\mu - l^\mu \omega = 0, \\ \omega &\neq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(I.c.39) \quad \pi^\mu \equiv 0 \bmod L^{(1)*},$$

где

$$L^{(1)*} = \text{span} \{ \omega; \theta^\alpha; \Theta^\mu \}.$$

Обозначим через $T^*(X) \wedge T^*(X)$ подпространство в $A^2(X^{(1)})$, порожденное над кольцом $C^\infty(X^{(1)})$ поднятиями 2-форм на X . Из равенства (I.c.39) следует, что

$$T^*(X) \wedge T^*(X) \subset L^{(1)*} \wedge L^{(1)*}.$$

С другой стороны, ясно, что

$$\begin{aligned} d\theta^\alpha &\equiv 0 \bmod T^*(X) \wedge T^*(X), \\ d\Theta^\mu &\equiv -dl^\mu \wedge \omega \bmod T^*(X) \wedge T^*(X). \end{aligned}$$

Полагая $\Pi^\mu = dl^\mu$, заключаем, что структурные уравнения системы $(I^{(1)}, \omega)$ имеют вид

$$(I.c.40) \quad \begin{aligned} d\theta^\alpha &\equiv 0 \bmod L^{(1)} * \wedge L^{(1)} *, \\ d\Theta^\mu &\equiv -\Pi^\mu \wedge \omega \bmod L^{(1)} * \wedge L^{(1)} *. \end{aligned}$$

Сопоставив (I.c.38), (I.c.40) с (I.c.27), получим следующее утверждение:

(I.c.41) Число Картана для первого продолжения $(T^{(1)}, \omega)$ системы (I, ω) совпадает с числом Картана для системы (I, ω) . Далее, структурные уравнения (I.c.27) справедливы и для системы $(I^{(1)}, \omega)$.

На основе утверждения (I.c.36) и проведенного выше обсуждения мы приходим к выводу, что для любой пфафовой системы в хорошей форме общее векторное поле $[v] \in T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$ зависит от s_1 функций одной переменной и некоторого количества постоянных. На самом деле это утверждение можно установить и непосредственно, показав, что биекция

$$\mathcal{V}(I, \omega) \rightarrow \mathcal{V}(I^{(1)}, \omega),$$

задаваемая правилом

$$\{f: N \rightarrow X\} \mapsto \{f_*: N \rightarrow G_1(X)\},$$

индуцирует изоморфизм

$$T_N(\mathcal{V}(I, \omega)) \simeq T_N(\mathcal{V}(I^{(1)}, \omega)),$$

но мы не будем здесь этим заниматься.

Процесс продолжения внешней дифференциальной системы (I, ω) на многообразии X с одной независимой переменной ($\deg \omega = 1$) тесно связан со следующей конструкцией, частный случай которой будет играть важную роль в разд. е гл. 1.

(I.c.42) КОНСТРУКЦИЯ. Обозначим через $X_1 \subset X$ образ естественной проекции

$$\pi: V(I, \omega) \rightarrow X.$$

Конечно, любое интегральное многообразие системы (I, ω) должно лежать в X_1 , но, поскольку интегральные элементы в $V(I, \omega)$

могут и не быть касательными к X_1 ¹⁾ (см. рис. 7, где (p, ξ) — типичный элемент пространства $V(I, \omega)$), мы не можем утверж-

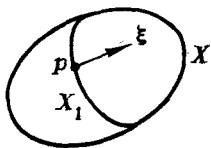


Рис. 7.

¹⁾ В этой конструкции мы можем предполагать, что система (I, ω) пфафова и порождена уравнениями Пфаффа

$$\theta^1 = \dots = \theta^t = 0, \quad \omega \neq 0.$$

дать существование интегрального многообразия системы (I, ω) , проходящего через общую точку подмногообразия X_1 . Положим поэтому $I_1 = I|_{X_1}$, $\omega = \omega|_{X_1}$ и повторим построение для системы (I_1, ω) на X_1 . Мы получим таким образом «убывающую последовательность» внешних дифференциальных систем (I_k, ω) на X_k . При этом либо $X_k = \emptyset$ для некоторого k , и у системы (I, ω) нет интегральных многообразий, либо конструкция стабилизируется при некотором непустом X_k , для которого отображение

$$V(I_k, \omega) \rightarrow X_k$$

сюръективно. В таком случае для каждой точки многообразия X_k существует проходящее через нее интегральное многообразие системы (I, ω) , причем эти интегральные многообразия совпадают с интегральными многообразиями системы (I_k, ω) .

d. Вывод уравнений Эйлера—Лагранжа. Примеры

Вернемся к задаче определения уравнений в вариациях для функционала (I.a.4), только теперь будем опускать указание на отображение f и писать просто

$$(I.d.1) \quad \Phi(N) = \int_N \varphi.$$

Мы хотим вычислить для однопараметрического семейства $N_t \subset X$ интегральных многообразий системы (I, ω) производную функционала $\Phi(N_t)$ при $t = 0$. Другими словами, мы хотим вычислить

$$(I.d.2) \quad \left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} = ?$$

Мы *не* предполагаем, что формы $\theta^i(x) \in T_x^*(X)$ линейно-независимы или что ранг системы линейных уравнений

$$\theta^i(x) = 0, \quad x \in X, \quad (*)$$

постоянен. Хотя на первый взгляд такая ситуация может показаться неприятной, в примерах она вполне поддается обработке, и, кроме того, ее рассмотрение диктуется приложениями. При этом в общей точке $x \in X$ мы имеем для $v \in T_x(X)$

$$\langle \theta^i(x), v \rangle = 0 \text{ для всех } i \Rightarrow \langle \omega(x), v \rangle = 0.$$

Таким образом, интегральных элементов системы (I, ω) над такой общей точкой *нет*. Однако на подмногообразии X_1 , *вдоль которого ранг системы (*) должен падать*, для любой точки $x \in X_1$ будут существовать векторы $v \in T_x(X)$, такие что

$$\langle \theta^i(x), v \rangle = 0 \text{ для всех } i \text{ и } \langle \omega(x), v \rangle \neq 0.$$

Но вектор v может и не касаться подмногообразия X_1 , и это естественным образом приводит к описываемой конструкции.

для кривой $\{N_t\} \subset \mathcal{Y}(I, \omega)$. Конечно, эта задача не имеет смысла, если не уточнить «граничные условия». На самом деле, система (I, ω) может иметь весьма сложную природу, и потому неясно даже, какими должны быть эти граничные условия. Далее, поскольку инфинитезимальные вариации подмногообразия $N \subset X$ задаются нормальными векторными полями, удовлетворяющими системе обыкновенных дифференциальных уравнений (I.b.15), то стандартный вывод уравнений Эйлера—Лагранжа (см. [29]), использующий произвольные «пробные» вариации, здесь неприменим. Поэтому может показаться, что принятие обычного формализма уравнений Эйлера—Лагранжа требует углубления в структурную теорию системы (I, ω) и, в частности, в структуру производного флага (так как она более или менее говорит о том, «сколько используется производных»).

Мы пойдем другим путем, а именно займемся эвристическим поиском набора уравнений на N , из которых вытекает обращение в нуль производной (I.d.2) при вариациях с компактным носителем. Конечно, из условий (I.c.27) следует, что в общем случае векторные поля $[v] \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$ с компактным носителем отсутствуют, но мы просто *игнорируем* этот факт и будем *формально* выводить набор уравнений, которые должны выполняться, если производная (I.d.2) обращается в нуль. Эта система оказывается очень интересной сама по себе, и мы будем изучать ее в оставшейся части данной главы и в гл. II и III. Затем в гл. IV мы обсудим граничные условия и обоснуем правомочность именования этих уравнений уравнениями Эйлера—Лагранжа, ассоциированными с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$.

Пусть $N \subset X$ — интегральное многообразие системы (I, ω) и $v \in C^\infty(N, T(X))$ — инфинитезимальная вариация кривой N в X , удовлетворяющая условиям (I.b.15) (таким образом, $[v] \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$). Предположим, что $N = \{a \leq x \leq b\}$ и, что самое существенное,

$$(I.d.3) \quad v|_{\partial N} = 0,$$

т. е. $v(a) = v(b) = 0$. Пусть однопараметрическое семейство кривых $N_t \subset X$ имеет инфинитезимальную вариацию v . Основное вычисление (I.b.5) дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} &= \int_N (v \rfloor d\varphi + dv \rfloor \varphi) \\ &= \int_N v \rfloor d\varphi + \int_{\partial N} v \rfloor \varphi = \int_N v \rfloor d\varphi, \end{aligned}$$

в силу теоремы Стокса и наших предположений (I.d.3). Рассмотрим формально отображение $\Phi : \mathcal{Y}(I, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ как функцию на

«бесконечномерном многообразии» и определим ее дифференциал $\delta\Phi(N)$ в точке $N \in \mathcal{V}(I, \omega)$ как линейную функцию

$$\delta\Phi(N) : T_N(\mathcal{V}(I, \omega)) \rightarrow \mathbb{R},$$

задаваемую равенством

$$\delta\Phi(N)[v] = \left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0}.$$

Тогда для векторного поля $v \in C^\infty(N, T(X))$, удовлетворяющего условиям (I.b.15) и (I.d.3), имеем

$$(I.d.4) \quad \delta\Phi(N)(v) = \int_N v \lrcorner d\varphi.$$

Сделаем три важных замечания относительно этого равенства.

i) Если положить

$$(I.d.5) \quad \varphi_1 = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

где λ^α — функции на X , то, поскольку $\theta_N^\alpha = 0$, функционал $\Phi(N)$ не должен измениться. Таким образом, нам надо убедиться, что

$$(I.d.6) \quad \int_N v \lrcorner d\varphi = \int_N v \lrcorner d\varphi_1.$$

Доказательство равенства (I.d.6). Согласно замечанию ii) после равенства (I.b.15), для 1-формы $\theta = \lambda_\alpha \theta^\alpha$ выполняется соотношение

$$v \lrcorner d\theta + d(v \lrcorner \theta) \equiv 0 \bmod N.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_N v \lrcorner d(\varphi - \varphi_1) &= \int_N v \lrcorner d\theta \\ &= - \int_N d(v \lrcorner \theta) = - \int_{dN} v \lrcorner \theta = 0, \end{aligned}$$

ввиду (I.d.3), чем равенство (I.d.6) и доказано.

ii) Определение дифференциала $\delta\Phi(N)[v]$ имеет смысл, т. е. величина

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0}$$

обладает следующими двумя свойствами: а) она зависит лишь от самого поля $v \in C^\infty(N, T(X))$, а не от его продолжения до векторного поля на всем многообразии X ; б) она обращается в нуль, если поле v касается многообразия N (и удовлетворяет

условию (I.d.3)), и, значит, зависит лишь от определяемого полем v сечения $[v]$ нормального расслоения.

Это доказывается точно так же, как и замечания i), ii) после равенства (I.b.15).

iii) Если положить

$$(I.d.7) \quad \varphi_2(v) = \varphi + d\eta(v),$$

где 0-форма η зависит от v , то ввиду равенства $d^2 = 0$

$$\int_N v \lrcorner d\varphi = \int_N v \lrcorner d\varphi_2(v).$$

Так как

$$\int_N \varphi_2(v) = \int_N \varphi + \int_{\partial N} \eta(v),$$

то нам понадобится рассматривать только такие подстановки (I.d.7), для которых $\eta(v)(p) = 0$, если $v(p) = 0$. Это означает, что 0-форма $\eta(v)$ *линейно зависит от v над кольцом $C^\infty(N)$* , т. е.

$$\eta \in C^\infty(N, \text{Hom}(T(X), \mathbb{R})).$$

Для такой формы η имеем

$$(I.d.8) \quad \eta_{\partial N} = 0,$$

если выполняется условие (I.d.3) (напомним, что в соответствии с принятой нами системой обозначений символ $\eta_{\partial N}$ обозначает ограничение 0-формы η на ∂N).

Из этих замечаний следует такой вывод:

Чем бы ни оказались уравнения

$$(I.d.9) \quad \delta\Phi(N)[v] = 0,$$

они должны быть инвариантны относительно подстановок (I.d.5) и (I.d.7).

Инвариантность относительно подстановок (I.d.7) означает в сущности, что уравнения (I.d.9) должны записываться в терминах формы $d\varphi$. Комбинируя это утверждение с инвариантностью относительно подстановок (I.d.5), приходим к важному заключению:

Уравнения (I.d.9) должны записываться в терминах формы $d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha)$, где λ_α — функции, подлежащие определению.

Руководствуясь этими двумя наблюдениями, перейдем к нашему эвристическому выводу уравнений Эйлера—Лагранжа. Вспомнив уравнения $L^\alpha(v) = 0$, определяющие пространство $T_N(\mathcal{V}(I,$

ω)) (см. (I.b.15)), переформулируем условие того, что выполняется равенство (I.d.9):

$$(I.d.10) \quad L^\alpha(v) = 0 \text{ и } (I.d.3) \Rightarrow \int_N v \lrcorner d\varphi = 0.$$

По теореме Стокса обращение в нуль интеграла $\int_N v \lrcorner d\varphi$ для достаточно большого количества полей v означало бы, что $v \lrcorner d\varphi \equiv d\eta \pmod{N}$, где $\eta|_{\partial N} = 0$ (вот одно из мест, где проявляется «эвристичность»). Поскольку мы предполагаем также, что 0-форма η линейно зависит от поля v , должно выполняться соотношение

$$v \lrcorner d\varphi \equiv d\eta(v) \pmod{N},$$

где $\eta(v)$ линейно зависит от v над кольцом $C^\infty(N)$ и, значит, удовлетворяет условию (I.d.8), если v удовлетворяет условию

(I.d.3). С учетом сказанного и при опущенном указании на граничные условия импликация (I.d.10) принимает такой вид:

$$(I.d.11) \quad L^\alpha(v) = 0 \text{ для всех } \alpha \Rightarrow v \lrcorner d\varphi \equiv d\eta(v) \pmod{N}.$$

Интуитивно это означает, что для любого поля $v \in C^\infty(N, T(X))$ 1-форма $v \lrcorner d\varphi$ должна быть (по модулю N) линейной комбинацией форм $L^\alpha(v)$ и $d\eta(v)$ (еще одно место, где проявляется «эвристичность»).¹⁾ В частности, если справедлива импликация

$$(I.d.12) \quad v \in C^\infty(N, T(X)) \Rightarrow v \lrcorner d\varphi \equiv \lambda_\alpha L^\alpha(v) + d\eta(v) \pmod{N},$$

то будет выполнено требуемое равенство (I.d.9) (подразумевается, что должно быть удовлетворено условие (I.d.8)).

Определим теперь, какой должна быть 0-форма $\eta(v)$ для того, чтобы ни одна из производных поля v не появилась в правой части равенства (I.d.12). Напомним, что

$$L^\alpha(v) = v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha),$$

и положим

$$\eta(v) = -\lambda_\alpha(v \lrcorner \theta^\alpha).$$

Тогда условие (I.d.8) удовлетворено и

$$(I.d.13) \quad \lambda_\alpha L^\alpha(v) + d\eta(v) \equiv v \lrcorner d(\lambda_\alpha \theta^\alpha) \pmod{N}.$$

¹⁾ Используемый здесь интуитивный принцип состоит в следующем: если на векторном пространстве $\mathcal{V}$ заданы линейные функции $L^1, \dots, L^s$ и δ со свойством

$$L^1(v) = \dots = L^s(v) = 0 \Rightarrow \delta(v) = 0,$$

то δ является линейной комбинацией функций $L^1, \dots, L^s$. В конечномерном случае это очевидно.

При таком выборе $\eta(v)$, заменяя λ_α на $-\lambda_\alpha$, получаем из (I.d.12)

$$(I.d.14) \quad v \rfloor d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha) \equiv 0 \bmod N \text{ для всех } v \in C^\infty(N, T(X)).$$

Так как ни одна из производных поля v здесь не фигурирует, то эти уравнения должны выполняться *поточечно* вдоль подмногообразия $N \subset X$. Далее, они удовлетворяют условиям инвариантности относительно подстановок (I.d.5) и (I.d.7). На самом деле, *это простейшие уравнения с такими свойствами*. Дадим поэтому следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнения (I.d.14), рассматриваемые вдоль интегрального многообразия N системы (I, ω) , называются *уравнениями Эйлера—Лагранжа*, ассоциированными с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$.

Несколько загадочная роль «подлежащих определению функций λ_α » прояснится в следующем разделе (заметим, что, во всяком случае, нам нужно определить функции λ_α лишь на подмногообразии N).

Разберем некоторые примеры.

(I.d.15) ПРИМЕР. Рассмотрим классическую вариационную задачу (I.a.5). Так как уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) не зависят от выбора системы координат, можно ограничиться случаем, когда $M = \mathbb{R}^m$ с координатами $y = (y^1, \dots, y^m)$. Ввиду равенств

$$\varphi = L(x; y; \dot{y}) dx,$$

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx,$$

имеем

$$\begin{aligned} d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha) &= (L_{y^\alpha} - \lambda_\alpha) d\dot{y}^\alpha \wedge dx + \\ &+ (d\lambda_\alpha - L_{y^\alpha} dx) \wedge \theta^\alpha. \end{aligned}$$

При выводе уравнений (I.d.14) мы можем использовать *произвольное* поле $v \in C^\infty(N, T(X))$. Конечно, достаточно рассмотреть набор векторов v , порождающий касательное пространство $T_x(X)$ в каждой точке $x \in N$. Важно, что можно взять «на один вектор меньше», как показывает следующая

(I.d.16) ЛЕММА. Пусть T — векторное пространство и $\Psi \in \Lambda^2 T^*$ — антисимметричная билинейная форма на T . Предположим, что векторы $v_1, \dots, v_m \in T$ порождают гиперплоскость H , а $w \in T$ — вектор, не лежащий в H . Тогда если

$$\langle v_i \rfloor \Psi, w \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

то

$$\langle v \rfloor \Psi, w \rangle = 0 \quad \text{для всех } v \in T.$$

Доказательство. Любой вектор $v \in T$ представим в виде

$$v = \alpha^i v_i + \beta w.$$

Поэтому

$$\langle v \rfloor \Psi, w \rangle = \alpha^i \langle v_i \rfloor \Psi, w \rangle + \beta \langle w \rfloor \Psi, w \rangle = 0,$$

в силу сделанных предположений и того факта, что $\langle w \rfloor \Psi, w \rangle = \langle \Psi, w \wedge w \rangle = 0$. $\square$

Эта лемма будет использоваться, зачастую без всяких комментариев, при просчете примеров по всей книге.

Другая полезная лемма состоит в том, что при выводе уравнений Эйлера—Лагранжа всегда можно работать по модулю линейных комбинаций членов $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ (строгая формулировка дана в (II.b.4)). Применение этих двух лемм значительно облегчает просчет примеров.

Вернемся к примеру (I.d.15). Используя лемму, мы можем вывести уравнения Эйлера—Лагранжа, положив соответственно

$$v = \partial/\partial \dot{y}^\alpha, \quad v = \partial/\partial \theta^\alpha$$

(вектору w из леммы соответствует поле $\partial/\partial x$). Тогда уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) примут вид

$$(L_{\dot{y}^\alpha} - \lambda_\alpha) dx \equiv 0 \bmod N,$$

$$d\lambda_\alpha - L_{y^\alpha} dx \equiv 0 \bmod N.$$

Так как $dx \neq 0$ на N , то первое уравнение дает

$$L_{\dot{y}^\alpha} = \lambda_\alpha,$$

и второе приобретает вид

$$dL_{\dot{y}^\alpha} - L_{y^\alpha} dx \equiv 0 \bmod N.$$

Рассматривая кривую N как 1-струю $x \mapsto (x, y(x), dy(x)/dx)$ с независимой переменной x , получаем обычные уравнения Эйлера—Лагранжа

$$(I.d.17) \quad \frac{d}{dx} (L_{\dot{y}^\alpha}) = L_{y^\alpha},$$

которые можно найти в любом руководстве (например, в [29]). При расписывании эти уравнения оказываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка в координатах $y^\alpha(x)$.

(1.d.18) **Частный случай примера (1.d.15).** Рассмотрим механическую систему (1.a.7). В локальных координатах

$$L(y, \dot{y}) = T(y, \dot{y}) - U(y),$$

где функция T задается равенством (1.a.8). Уравнения Эйлера—Лагранжа (1.d.17) принимают вид

$$(1.d.19) \quad \frac{d}{dx} \left(g_{\alpha\beta}(y(x)) \frac{dy^\beta(x)}{dx} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}(y(x))}{\partial y^\alpha} \frac{dy^\beta(x)}{dx} \frac{dy^\gamma(x)}{dx} \right) - \frac{\partial U(y(x))}{\partial y^\alpha}.$$

Обозначая через $\|g^{\alpha\beta}(y)\|$ матрицу, обратную к матрице $\|g_{\alpha\beta}(y)\|$, и вводя обычные символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial y^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial y^\delta} \right),$$

перепишем уравнения (1.d.19) в виде

$$(1.d.20) \quad \frac{d^2 y^\alpha(x)}{dx^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(y(x)) \frac{dy^\beta(x)}{dx} \frac{dy^\gamma(x)}{dx} = -U^\alpha(y(x)),$$

где $U^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial U / \partial y^\beta$. Перейдем к более привычным обозначениям римановой геометрии (см. [6], [53], [64]). Пусть γ — кривая $x \mapsto y(x)$ на M и

$$v(x) = \frac{dy^\alpha(x)}{dx} \partial / \partial y^\alpha \text{ — касательный вектор к } \gamma;$$

$$\frac{Dv(x)}{dx} = \left(\frac{d^2 y^\alpha(x)}{dx^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(y(x)) \frac{dy^\beta(x)}{dx} \frac{dy^\gamma(x)}{dx} \right) \partial / \partial y^\alpha$$

— вектор ускорения для кривой γ (здесь D — ковариантный дифференциал, отвечающий римановой связности);

$$\nabla U(y) = g^{\alpha\beta}(y) \frac{\partial U(y)}{\partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \text{ — градиент потенциала } U.$$

Уравнения (1.d.20) превращаются при этом в закон Ньютона

$$(1.d.21) \quad \frac{Dv(x)}{dx} + \nabla U(y(x)) = 0$$

для движения, определяемого консервативным силовым полем $F = -\nabla U$.

В пространстве $\mathbb{R}^m$ с плоской метрикой эти уравнения принимают знакомый всем вид

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \nabla U(y(x)) = 0.$$

д. Вывод уравнений Эйлера—Лагранжа

На цилиндре $M \subset \mathbb{R}^3$, задаваемом уравнениями

$$z = u, \quad x = v \cos \varphi, \quad y = v \sin \varphi,$$

индуцированная метрика задается формулой

$$ds^2 = du^2 + v^2 d\varphi^2,$$

и при $U = 0$ имеем

$$L = \frac{1}{2} (\dot{u}^2 + v^2 \dot{\varphi}^2),$$

$$\lambda_1 = L_{\dot{u}} = \dot{u},$$

$$\lambda_2 = L_{\dot{v}} = v^2 \dot{\varphi}.$$

Как хорошо известно, решениями уравнений (I.d.17) служат винтовые линии

$$u = c_1 x, \quad \varphi = c_2 x.$$

Многочисленные примеры классических механических систем читатель найдет в [1] и [2]. В разд. а гл. III мы довольно подробно обсудим механическую систему, соответствующую движению твердого тела.

(I.d.22) ПРИМЕР. Рассмотрим классическую вариационную задачу второго порядка (I.a.13). Снова достаточно исследовать случай $M = \mathbb{R}^m$. При этом

$$\varphi = L(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) dx,$$

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx,$$

$$\dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx$$

и

$$d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \dot{\theta}^\alpha) = (L_{\dot{y}^\alpha} - \dot{\lambda}_\alpha) d\dot{y}^\alpha \wedge dx$$

$$+ (d\dot{\lambda}_\alpha + \lambda_\alpha dx - L_{y^\alpha} dx) \wedge \dot{\theta}^\alpha + (L_{y^\alpha} dx + d\lambda_\alpha) \wedge \theta^\alpha.$$

Если положить последовательно (см. лемму (I.d.16))

$$v = \partial/\partial \dot{y}^\alpha, \quad v = \partial/\partial \dot{\theta}^\alpha, \quad v = \partial/\partial \theta^\alpha,$$

то уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) примут вид

$$(L_{\dot{y}^\alpha} - \dot{\lambda}_\alpha) dx \equiv 0 \bmod N,$$

$$d\dot{\lambda}_\alpha + (\lambda_\alpha - L_{y^\alpha}) dx \equiv 0 \bmod N,$$

$$d\lambda_\alpha + L_{y^\alpha} dx \equiv 0 \bmod N.$$

Так как $dx \neq 0$ на N , то первое уравнение дает

$$L_{\dot{y}^\alpha} = \dot{\lambda}_\alpha.$$

после чего остальные можно переписать в виде

$$dL_{y\alpha} + (\lambda_\alpha - L_{y\alpha}) dx \equiv 0 \pmod{N},$$

$$d\lambda_\alpha + L_{y\alpha} dx \equiv 0 \pmod{N}.^{1)}$$

Рассматривая N как 2-струю $x \mapsto (x, y(x), dy(x)/dx, d^2y(x)/dx^2)$, сведем эти уравнения к уравнениям

$$(I.d.23) \quad \frac{d^2}{dx^2} (L_{y\alpha}) - \frac{d}{dx} (L_{y\alpha}) + L_{y\alpha} = 0$$

(см. [29]). При расписывании они дают обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка в координатах $y^\alpha(x)$.

В качестве тривиального частного случая можно взять $m = 1$ (т. е. $X = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) и

$$L = \frac{1}{2} (\ddot{y})^2.$$

Уравнения (I.d.3) принимают тогда вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right) = 0,$$

а их общим решением служит

$$y(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Один более интересный пример высшего порядка будет обсуждаться в конце разд. а гл. II. (см. (II.a.50)).

(I.d.24) З а м е ч а н и е. Ясно, что естественные граничные условия в примере (I.d.15) имеют вид

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

а в примере (I.d.22) —

$$y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

$$\frac{dy}{dx}(a) = \dot{A}, \quad \frac{dy}{dx}(b) = \dot{B}.$$

Заметим, что отвечающие им условия на инфинитезимальную вариацию $v \in T_N(\mathcal{Y}^2(I, \omega))$ выглядят соответственно так:

$$(I.d.25) \quad (v \rfloor \omega)(x) = (v \rfloor \theta^\alpha)(x) = 0 \text{ для } x = a \text{ и } x = b,$$

$$(I.d.26) \quad (v \rfloor \omega)(x) = (v \rfloor \theta^\alpha)(x) = (v \rfloor \dot{\theta}^\alpha)(x) = 0$$

для $x = a$ и $x = b$.

¹⁾ Число «неопределенных» функций λ_α , которые можно исключить, часто омазывается связанным с числом Картана s_1 .

Однако это может ввести в заблуждение, поскольку в общем случае правильные граничные условия могут и *не* иметь вида

$$(\nu \rfloor \psi)(x) = 0 \text{ для } x = a, b \text{ и для всех } \psi \in L^*,$$

как в (I.d.25), (I.d.26).

(I.d.27) ПРИМЕР. Пусть (S, ds^2) — двумерное риманово многообразие. Кривые $\gamma \subset S$ будем задавать параметрически как отображения

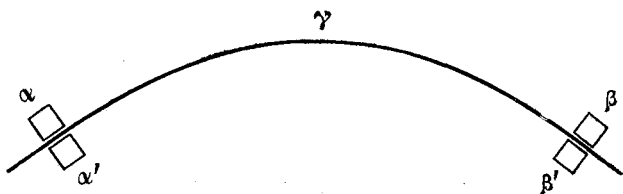


Рис. 8.

с $s \mapsto p(s) \in S$, где s — длина дуги кривой, а через $\kappa(s)$ обозначим *геодезическую кривизну* кривой γ (см. [22], [28] и [56]). Исследуем уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала

$$(I.d.28) \quad \Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2(s) ds.$$

В случае когда $S = \mathbb{E}^2$ с плоской метрикой, экстремали этого функционала допускают следующую физическую интерпретацию (см. [25]). Представим себе на плоскости конфигурацию из двух пар деревянных блоков α, α' и β, β' и тонкой проволоки или ножовочного полотна γ ; блоки закреплены неподвижно (рис. 8). Важно, чтобы между блоками каждой пары был маленький зазор, так чтобы длина проволоки γ могла меняться; лишь ее *направление* между блоками α, α' и β, β' фиксировано. Тогда проволока γ принимает положение, при котором минимизируется интеграл (I.d.28). Если же мы теперь *зажмем* проволоку γ , убрав зазор между α, α' и β, β' , то положение, принимаемое γ (рис. 9), будет минимизировать интеграл (I.d.28), подчиненный ограничениям (см. разд. а приложения)

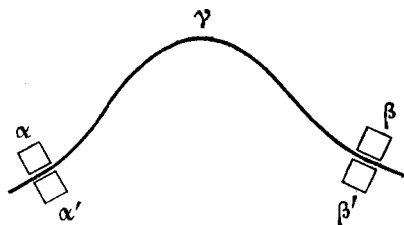


Рис. 9.

(I.d.29) $\int_{\gamma} ds = l = \text{const.}$

Та же физическая интерпретация остается справедливой для произвольной поверхности S , когда ограничение состоит в том, что кривая γ должна лежать на S .

Так как геодезическая кривизна является инвариантом второго порядка, то ясно, что этот пример представляет собой частный случай примера (I.d.22). Уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.23) при этом оказываются парой уравнений четвертого порядка в любой локальной системе координат на S . Полезно (но не обязательно) выписать их, чтобы увидеть, какое «месиво» при этом получается.

Применим к этой задаче инвариантный подход, использующий реперы. Предположим нашим рассмотрениям следующее краткое

НАПОМИНАНИЕ (см. [15], [22], [56] или [63]). Через $\mathcal{F}(S)$ обозначается расслоение ортонормированных реперов $(p; e_1, e_2)$ над S . Здесь $p \in S$, а векторы $e_1, e_2 \in T_p(S)$ образуют ортонормированный базис. Ясно, что $\dim \mathcal{F}(S) = 3$ и в каждой точке многообразия $\mathcal{F}(S)$ задан корепер $\{\omega^1, \omega^2, \omega_1^2\}$, определяемый однозначно условиями:

i) 1-формы ω^1, ω^2 горизонтальны относительно проекции $\mathcal{F}(S) \xrightarrow{\pi} S$ и удовлетворяют равенствам

$$\langle \omega^i, v \rangle = (e_i, \pi_* v), \quad v \in T(\mathcal{F}(S));$$

ii) выполняются *структурные уравнения*

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -\omega^2 \wedge \omega_1^2, \\ \text{(I.d.30)} \quad d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2, \\ d\omega_1^2 &= -R\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Здесь R — поднятие на $\mathcal{F}(S)$ *гауссовой кривизны* на S .

Продолжая наше обсуждение функционала (I.d.28), положим

$$X = \mathcal{F}(S) \times \mathbb{R},$$

где в $\mathbb{R}$ задана координата κ , а на X мы рассматриваем дифференциальную систему (I, ω) , представляемую в виде (I.a.1) с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \omega^2 = 0, \\ \text{(I.d.31)} \quad \theta^2 &= \omega_1^2 - \kappa \omega = 0, \\ \omega &= \omega^1 \neq 0. \end{aligned}$$

Всякая кривая $\gamma \subset S$ определяет поднятие $N \subset X$, задаваемое правилом

$$s \mapsto (p(s), e_1(s), e_2(s), \kappa(s)),$$

где отображение $s \mapsto p(s)$ задает кривую γ , $e_1(s)$ — касательный к γ вектор единичной длины, а $\kappa(s)$ — геодезическая кривизна кривой γ (нормаль $e_2(s)$ определена здесь лишь с точностью до коэффициента ± 1 , и мы выбираем ее так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{De_1}{ds} = \kappa(s) e_2(s),$$

где D — ковариантный дифференциал). Ясно, что N является интегральным многообразием системы (I, ω) на X и что, обратно, любое интегральное многообразие системы (I, ω) получается таким же образом из некоторой кривой $\gamma \subset S$. Действительно, последнее утверждение означает просто, что

$$(\omega^1)_\gamma = ds,$$

$$(\omega^2)_\gamma = 0,$$

$$(\omega^2_1)_\gamma = \kappa(s) ds$$

— факт, хорошо известный в теории поверхностей (см. указанные выше работы).

В порядке подготовки к исследованию уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом (I.d.28), обсудим более простой функционал длины дуги

$$(I.d.32) \quad \Theta(N) = \int_N \omega,$$

определенный на интегральных многообразиях $N \subset X$ системы (I.d.31). Ясно, что $\Theta(N) = \int_\gamma ds$ и что функционал длины дуги определяет вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где $\varphi = \omega$. Ввиду структурных уравнений (I.d.30),

$$(I.d.33) \quad d(\varphi + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2) \equiv (d\lambda_1 + (\kappa - \lambda_2(R + \kappa^2))\omega) \wedge \theta^1 + (d\lambda_2 + \lambda_1 \omega) \wedge \theta^2 - \lambda_2 d\kappa \wedge \omega \bmod \theta^1 \wedge \theta^2.$$

После подстановки соответственно векторных полей

$$v = \partial/\partial\kappa, \quad v = \partial/\partial^2, \quad v = \partial/\partial\theta^1$$

(см. лемму (I.d.16)) уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_2 \omega &\equiv 0 \bmod N, \\ d\lambda_2 + \lambda_1 \omega &\equiv 0 \bmod N, \\ d\lambda_1 + (\kappa - \lambda_2(R + \kappa^2))\omega &\equiv 0 \bmod N. \end{aligned}$$

Так как $\omega \neq 0$ на N , то эти уравнения дают соответственно

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \kappa = 0.$$

Это — привычное описание *геодезических* как кривых, геодезическая кривизна которых равна нулю.

Рассмотрим теперь общую вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где

$$\varphi = L(\kappa) \omega$$

для некоторой функции $L(\kappa)$ одной переменной. Функционал (I.d.28) соответствует функции $L(\kappa) = \kappa^2/2$. Используя уравнения (I.d.30) и (I.d.31), находим

$$\begin{aligned} d(\varphi + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2) &\equiv (L'(\kappa) - \lambda_2) d\kappa \wedge \omega \\ &+ (d\lambda_1 + (\kappa L(\kappa) - \lambda_2 (R + \kappa^2)) \omega) \wedge \theta^1 + (d\lambda_2 + \lambda_1 \omega) \wedge \theta^2 \bmod \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

(при $L = 1$ это равенство сводится к равенству (I.d.33)). Подставляя в эту 2-форму те же поля $v = \partial/\partial\kappa$, $v = \partial/\partial\theta^1$, $v = \partial/\partial\theta^2$, получаем уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) в виде

$$(L'(\kappa) - \lambda_2) \omega \equiv 0 \bmod N,$$

$$(I.d.34) \quad d\lambda_2 + \lambda_1 \omega \equiv 0 \bmod N,$$

$$d\lambda_1 + (\kappa L(\kappa) - \lambda_2 (R + \kappa^2)) \omega \equiv 0 \bmod N.$$

Первое уравнение дает

$$\lambda_2 = L'(\kappa),$$

а второе и третье приводят к дифференциальным уравнениям

$$\lambda_1 = -L''(\kappa) \frac{d\kappa}{ds},$$

$$(I.d.35) \quad \frac{d}{ds} \left(L''(\kappa) \frac{d\kappa}{ds} \right) - (\kappa L(\kappa) - L'(\kappa) (R - \kappa^2)) = 0. \quad 1)$$

¹⁾ Случай $L''(\kappa) \equiv 0$ требует особого обсуждения. При этом $L(\kappa) = \alpha + \beta\kappa$ и

$$\varphi = (\alpha + \beta\kappa) \omega \equiv \alpha\omega + \beta\omega_1^2 \bmod \{\theta^\alpha\}.$$

Мы уже исследовали случай, когда $\varphi = \omega$. Если $\varphi = \omega_1^2$, то уравнения (I.d.34) принимают вид

$$(1 - \lambda_2) \omega \equiv 0 \bmod N,$$

$$d\lambda_2 + \lambda_1 \omega \equiv 0 \bmod N,$$

$$d\lambda_1 + (\kappa^2 + \lambda_2 (R - \kappa^2)) \omega \equiv 0 \bmod N.$$

Это дает $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$ и $R = 0$ соответственно. Вообще говоря, уравнения Эйлера—Лагранжа при этом **не** имеют решений, за исключением случая $S = \mathbb{F}^2$.

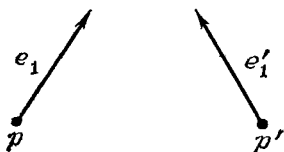


Рис. 10.

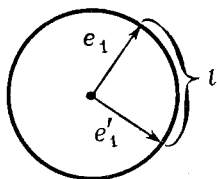


Рис. 11.

Во всякой локальной системе координат (u, v) на поверхности S уравнение (I.d.35) является уравнением четвертого порядка относительно координат $u(x), v(x)$ кривой γ . При $L = \kappa^2/2$ оно имеет вид

$$(I.d.36) \quad \frac{d^2\kappa}{ds^2} + \left(\frac{\kappa^3}{2} + \kappa R \right) = 0.$$

Когда кривизна R постоянна, можно сказать больше. А именно из равенства (I.d.36) следует, что

$$\frac{d}{ds} \left(\left(\frac{d\kappa}{ds} \right)^2 + \left(\frac{\kappa^4}{4} + \kappa^2 R \right) \right) = 0$$

вдоль любой кривой γ , являющейся решением уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом (I.d.28). Значит, вдоль каждой такой кривой

$$(I.d.37) \quad \kappa'^2 + \left(\frac{\kappa^4}{4} + \kappa^2 R \right) = c,$$

где $\kappa' = d\kappa/ds$.

Напомним, что полная односвязная поверхность S постоянной кривизны R называется *пространственной формой* (размерности два). Известно, что всякая такая поверхность является либо сферой радиуса $1/R$ в $\mathbb{E}^3$ ($R > 0$), либо эвклидовой плоскостью $\mathbb{E}^2$ ($R = 0$), либо гиперболической плоскостью ($R < 0$). В каждом из случаев S допускает транзитивную простую группу Ли изометрий, и из утверждения (I.b.7) вытекает (обсуждение общего случая см. в разд. б. гл. III), что кривая $\gamma \subset S$ однозначно с точностью до эвклидова движения определяется своей геодезической кривизной как функцией длины дуги. Ввиду выполнения равенства (I.d.37) говорят, что уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (I.d.28), *квазиинтегрируемы* в квадратурах (в разд. а гл. II дано общее обсуждение этого понятия). Покажем, что это означает в настоящем случае.

Сначала рассмотрим вопрос аналитически. Разделение переменных в уравнении (I.d.37) дает

$$\sqrt{\frac{d\kappa}{c - \kappa^2 R - \frac{\kappa^4}{4}}} = ds.$$

В случае $S = \mathbb{E}^2$ мы имеем $d\omega_1^2 = 0$, и потому *любая кривая является решением уравнений Эйлера—Лагранжа*. Этот факт интерпретируется следующим образом. Если нам заданы два линейных элемента (p, e_1) и (p', e'_1) (рис. 10) и *любая кривая* γ , их соединяющая, то интеграл от кривизны равен

$$\int_p^{p'} \kappa(s) ds = l,$$

где l — длина дуги $\widehat{e_1 e'_1}$ на единичной окружности. Поэтому по причинам в сущности топологического характера функционал Φ в некотором смысле постоянен.

Определим теперь функцию $\kappa(s)$ равенством

$$\int_{\kappa_0}^{\kappa(s)} \frac{d\xi}{\sqrt{c - \xi^2 R - \frac{\xi^4}{4}}} = s + c_1$$

(подобно тому, как функцию $\sin x$ можно определить равенством $\int_0^{\sin x} d\xi / \sqrt{1 - \xi^2} = x$). Легко показать, что функция $\kappa(s)$ явля-

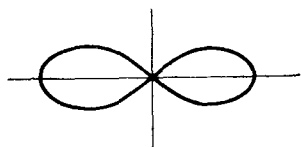


Рис. 12.

ется ограничением на некоторый интервал в $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ дважды периодической мероморфной функции, определенной на всей комплексной s -плоскости (такие функции называются *эллиптическими*; см. [27]). Таким образом, можно сказать, что мы «ре-

шили» уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (I.d.28). На самом деле, с учетом того, как много известно об эллиптических функциях, это не так далеко от истины.

Переходя к алгебро-геометрической точке зрения, рассмотрим алгебраическую кривую C , определенную в $\mathbb{C}^2$ с координатами (x, y) уравнением

$$y^2 + \frac{x^4}{4} + Rx^2 - c = 0.$$

(Вообще-то следовало бы, как это обычно делается, рассматривать компактифицированную кривую на комплексной проективной плоскости, получаемую добавлением точек на бесконечности. Но для наших настоящих целей достаточно аффинной кривой C .) Кривая C является гладкой кривой рода 1 (эллиптической кривой), за исключением следующих двух случаев:

i) $c = 0$. При этом точка $(0, 0)$ является обычной двойной точкой (рис. 12).

ii) $c = -R^2$. В этом случае у кривой C две двойные точки, а именно $(0, \pm\sqrt{-2R})$ (рис. 13). Действительно, C распадается на пару мнимых парабол, у которых точки $\pm(0, \sqrt{-2R})$ — единственные вещественные точки ($R < 0$).

В остальных случаях C является эллиптической кривой, параметрически задаваемой отображением

$$s \mapsto (\kappa(s), \kappa'(s)),$$

где $\kappa(s)$ — эллиптическая функция, модуль которой зависит от R и c (см. [36] и [59]). В исключительных случаях каждая компо-

нента кривой C рациональна и задается параметрически отображением

$$s \mapsto (\kappa(s), \kappa'(s)),$$

где $d\kappa(s)/ds$ — рациональная функция от s . Таким образом, в указанных исключительных случаях уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (I.d.28) могут быть проинтегрированы в элементарных функциях.

Поучительно также исследовать уравнение (I.d.36) методом фазовых портретов. Мы сделаем это здесь для случая $R = 0$; по поводу случая $R \neq 0$ см. разд. а приложения.

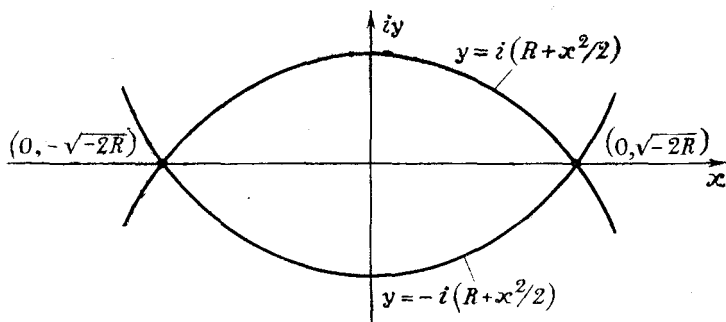


Рис. 13.

Прежде всего заметим, что уравнение (I.d.36) можно рассматривать как ньютоново уравнение движения

$$(I.d.38) \quad \ddot{x} = -x^3/2$$

для одномерной механической системы с временной координатой s и потенциальной энергией

$$U(x) = x^4/8.$$

Уравнение (I.d.38) можно трактовать как уравнение «пружины высшего порядка». На фазовой плоскости (x, y) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -x^3/2,$$

задаваемую векторным полем

$$v = y\partial/\partial x - (x^3/2)\partial/\partial y$$

(рис. 14). У этого векторного поля есть единственная критическая точка (положение равновесия), расположенная в начале координат

и соответствующая экстремали функционала (I.d.28), определяемой прямыми. Интегральные кривые поля v являются линиями уровня функции полной энергии

$$H = y^2/2 + x^4/8 = c > 0$$

(рис. 15). На самом деле эти линии уровня суть просто множества вещественных точек рассмотренных выше алгебраических кривых $y^2 + x^4/4 = 2c$.

Ввиду отсутствия на оси x критических точек поля v , отличных от точки $(0, 0)$, мы заключаем, что *окружности не являются экстремалими* функционала (I.d.28) (см. однако, (A.a.10)).

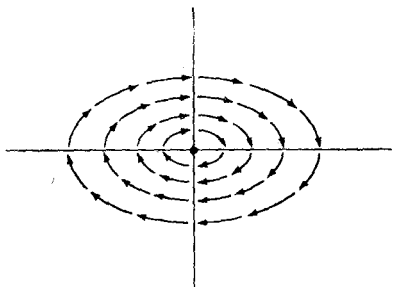


Рис. 14.

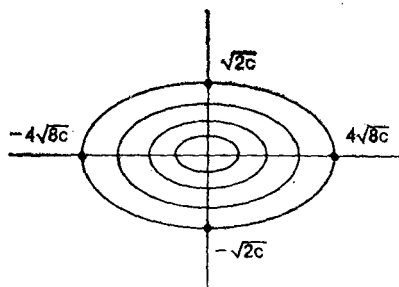


Рис. 15.

У эллиптической функции $\kappa(s)$ имеется вещественный период

$$l = \int_{-4\sqrt{8c}}^{+4\sqrt{8c}} \frac{dx}{\sqrt{2c - x^4/4}}.$$

Заметим, однако, что произвольная периодическая функция кривизны $\kappa(s)$ не определяет, вообще говоря, замкнутой кривой в $\mathbb{E}^2$ (см. Глакк [30]). Действительно, предположим, что уравнения Френе кривой $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ имеют вид

$$\frac{dx(s)}{ds} = e_1(s), \quad x(s) \in \mathbb{E}^2,$$

$$\frac{de_1(s)}{ds} = \kappa(s) e_2(s),$$

$$\frac{de_2(s)}{ds} = -\kappa(s) e_1(s)$$

и что

$$\kappa(s + l) = \kappa(s).$$

Если $e_1(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, то

$$\theta'(s) = \kappa(s).$$

Таким образом, условие

$$(I.d.39) \quad \int_0^l \kappa(s) ds = 2\pi\omega,$$

где $\omega \in \mathbb{Z}$ — индекс поворота кривой γ^1), является необходимым для того, чтобы γ была замкнутой кривой периода l (т. е. $x(s+l) = x(s)$). Предполагая условие (I.d.39) выполненным, имеем

$$\theta(s+l) = \theta(s) + 2\pi\omega,$$

$$e_1(s+l) = e_1(s).$$

Поэтому из первого уравнения Френе следует, что разность

$$x(s+l) - x(s) = C$$

постоянна. Условие $C = 0$ эквивалентно тому, что

$$\int_0^l e_1(s) ds = 0,$$

т. е. должны выполняться равенства

$$(I.d.40) \quad \int_0^l \cos \theta(s) ds = 0 = \int_0^l \sin \theta(s) ds.$$

Поскольку функции $\cos \theta(s)$, $\sin \theta(s)$ периодичны по s (так что их можно рассматривать как функции на $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$), то равенства (I.d.40) дают еще два условия на функцию $\kappa(s)$.

Решение $\kappa(s)$ уравнения (I.d.36) содержит две постоянные интегрирования. Однако, чтобы функция $\kappa(s)$ давала замкнутую кривую γ , на нее надо наложить три условия. Можно показать, что если зафиксировать длину кривой γ , то единственными замкнутыми экстремальными функционала (I.d.28) данной длины будут окружности.

е. Дифференциальная система Эйлера—Лагранжа.

Невырожденные вариационные задачи. Примеры

Пусть задана вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ на многообразии X . Мы хотим записать соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) как дифференциальную систему (J, ω) на некотором ассоциированном многообразии Y . Наша конструкция будет функториальной и, возможно, поможет прояснить роль

¹⁾ См. подстрочное примечание к (I.d.35).

«подлежащих определению функций λ_α » в (I.d.14). (В классических случаях эти функции *не* сводятся к множителям Лагранжа; см. разд. е гл. IV.)

Начнем со следующей общей конструкции:

(I.e.1) КОНСТРУКЦИЯ ¹⁾. Предположим, что на некотором многообразии Z заданы такие данные: i) замкнутая 2-форма Ψ с ассоциированной системой Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ (см. (I.c.25)), порожденной набором 1-форм

$$\{v \rfloor \Psi : v \in C^\infty(Z, T(Z))\};$$

ii) 1-форма ω .

ЗАМЕЧАНИЯ. i) Таким образом, система $\mathcal{C}(\Psi)$ является дифференциальным идеалом, порожденным набором 1-форм $\varphi = v \rfloor \Psi$, где v — гладкое векторное поле на X .

ii) Мы *не* предполагаем, что ранг формы Ψ постоянен (см. подстрочное примечание к (I.c.42) и замечание после утверждения (I.e.5)); фактически в интересующих нас случаях это условие, вообще говоря, не будет выполняться. С другой стороны, все объекты в наших примерах будут вещественно-аналитическими, поэтому множества точек, в которых ранг формы Ψ постоянен, будут аналитическими подмногообразиями.

Рассмотрим пфаффову дифференциальную систему $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$ на Z . Если обозначить через $PT(Z) = G_1(Z)$ *проективизированное касательное расслоение*, состоящее из касательных прямых к Z , то множество интегральных элементов (см. разд. е гл. 0)

$$V(\mathcal{C}(\Psi), \omega) \subset PT(Z)$$

образовано парами (p, ξ) , где $p \in Z$, а $\xi \subset T_p(Z)$ — прямая, порожденная вектором v , удовлетворяющим условию

$$(I.e.2) \quad v \rfloor (\Psi(p)) = 0, \quad v \rfloor (\omega(p)) \neq 0.^2)$$

Обозначим через $Z_1 \subset Z$ образ естественной проекции

$$V(\mathcal{C}(\Psi), \omega) \xrightarrow{\pi} Z$$

и предположим, что Z_1 является многообразием (это требование не строго обязательно; в вещественно-аналитическом случае Z_1 будет аналитическим подмногообразием, и мы можем ограничиться рассмотрением открытого плотного множества всех его гладких точек).

¹⁾ Это частный случай конструкции (I.c.42).

²⁾ Эта запись означает, что мы рассматриваем $\Psi(p)$ как элемент $\Lambda^2 T_p^*(Z)$, $\omega(p)$ как элемент $T_p^*(Z)$, и тогда $\rfloor$ есть оператор подстановки

$$\rfloor : T_p(Z) \otimes \Lambda^k T_p^*(Z) \rightarrow \Lambda^{k-1} T_p^*(Z).$$

Для произвольного подмногообразия $N \subset Z$ определим его *первое продолжение* как подмножество расслоения $G_n(Z)$ ($n = \dim N$), задаваемое равенство

$$\rho_1(N) = \{(p, T_p(N)) : p \in N\}.$$

Условие того, что (одномерное) подмногообразие N является интегральным многообразием системы $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$, можно записать в виде

$$\rho_1(N) \subset V(\mathcal{C}(\Psi), \omega).$$

Отсюда следует, в частности, что $N \subset Z_1$.

Положим

$$\mathcal{C}_1(\Psi) = \mathcal{C}(\Psi)_{Z_1} = \{\varphi_{Z_1} : \varphi \in \mathcal{C}(\Psi)\} \subset A^*(Z_1),$$

$$\omega = \omega_{Z_1} \in A^1(Z_1),$$

$$\Psi_1 = \Psi_{Z_1} \in A^2(Z_1).$$

Таким образом, система $(\mathcal{C}_1(\Psi), \omega)$ является ограничением на Z_1 системы $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$. Заметим, что

$$\mathcal{C}(\Psi_1) \subset \mathcal{C}_1(\Psi);$$

заменить знак включения на знак равенства нельзя (этот довольно тонкий момент связан с *положением* подпространства $T_p(Z_1)$ в $T_p(Z)$ по отношению к 2-форме $\Psi(p)$ в точках $p \in Z_1$). Из сказанного выше следует, что *интегральные многообразия систем $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$ и $(\mathcal{C}_1(\Psi), \omega)$ совпадают*. Рассмотрим теперь подмногожество

$$V(\mathcal{C}_1(\Psi), \omega) \subset PT(Z_1)$$

и обозначим через $Z_2 \subset Z_1$ образ проекции

$$V(\mathcal{C}_1(\Psi), \omega) \xrightarrow{\pi} Z_1.$$

Еще один достаточно тонкий момент состоит в том, что

$$V(\mathcal{C}_1(\Psi), \omega) \subset V(\mathcal{C}(\Psi), \omega),$$

но опять равенства может и не быть, так как вектор v , удовлетворяющий условию (1.е.2), может не касаться многообразия Z_1 (см. рис. 7).

Предположим, что множество Z_2 является многообразием. Повторив тогда всю конструкцию, получим пфаффову систему $(\mathcal{C}_2(\Psi), \omega)$ на Z_2 , где

$$\mathcal{C}_2(\Psi) = \mathcal{C}(\Psi)_{Z_2} = \{\varphi_{Z_2} : \varphi \in \mathcal{C}_1(\Psi)\} \subset A^*(Z_2),$$

$$\omega = \omega_{Z_2} \in A^1(Z_2),$$

$$\Psi_2 = (\Psi_1)_{Z_2} = \Psi_{Z_2} \in A^2(Z_2).$$

Снова выполняются включения

$$\mathcal{C}(\Psi_2) \subset \mathcal{C}_2(\Psi),$$

$$V(\mathcal{C}_2(\Psi)) \subset V(\mathcal{C}_1(\Psi)),$$

но в обоих случаях равенство может не достигаться. Однако, как и раньше, интегральные многообразия системы $(\mathcal{C}_1(\Psi), \omega)$ и $(\mathcal{C}_2(\Psi), \omega)$ совпадают.

Повторив индуктивно это построение, мы получим последовательность пфаффовых систем $(\mathcal{C}_k(\Psi), \omega)$ на многообразиях Z_k , где $Z_k \supset Z_{k+1}$. Следовательно, для некоторого k_0 мы должны иметь $Z_{k_0} = Z_{k_0+1}$ (мы исключаем ситуацию, когда число компонент многообразия Z_k становится бесконечным), а отсюда следует, что $Z_{k_0+1} = Z_{k_0+2} = \dots$. Положим

$$Y = \bigcap_k Z_k = Z_{k_0} \subset Z,$$

$$(I.e.3) \quad J = \mathcal{C}_{k_0}(\Psi) \subset A^*(Y),$$

$$\omega = \omega_Y \in A^1(Y).$$

Заметим, что $\mathcal{C}(\Psi_Y) \subset J$, но равенство, вообще говоря, не имеет места.

По построению пфаффа дифференциальная система (J, ω) обладает следующими двумя свойствами (которые ее однозначно определяют):

(I.e.4) Проекция $V(J, \omega) \rightarrow Y$ сюръективна.

(I.e.5) Интегральные многообразия системы $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$ на Z совпадают с интегральными многообразиями системы (J, ω) на V .

З а м е ч а н и е. На практике построение многообразия Y производится следующим образом: Для точки $p \in Z$ определим подпространство $\Psi^\perp(p) \subset T_p(Z)$ равенством

$$\Psi^\perp(p) = \{v \in T_p(Z) : v \lrcorner \Psi(p) = 0 \text{ в } T_p^*(Z)\}$$

и подпространство $\omega^\perp(p) \subset T_p(Z)$ равенством

$$\omega^\perp(p) = \{v \in T_p(Z) : v \lrcorner \omega(p) = 0\}.$$

Тогда в общей точке многообразия Z будем иметь

$$(I.e.6) \quad \Psi^\perp(p) \subset \omega^\perp(p).$$

Однако вдоль подмногообразия $Z_1 \subset Z$ (на котором ранг 2-формы Ψ падает) подпространства $\Psi^\perp(p)$ и $\omega^\perp(p)$ должны пересекаться трансверсально, т. е. условие (I.e.6) не выполняется. Таким образом, в точке $p \in Z_1$ существуют векторы $v \in T_p(Z)$, удовлетворяющие условию (I.e.2), но в общей точке многообразия Z_1 ни один такой вектор v не лежит в подпространстве $T_p(Z_1) \subset T_p(Z)$.

Тогда подмногообразие $Z_2 \subset Z_1$ определяется тем условием, что существуют векторы $v \in T_p(Z_1)$, удовлетворяющие условию (I.e.2), и т. д.

Чтобы обосновать это построение, рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$ на многообразии X . Напомним, что $I \subset A^*(X)$ — дифференциальный идеал, порожденный сечениями подрасслоения $W^* \subset T^*(X)$, а набор 1-форм $\theta^1, \dots, \theta^s$ локально задает репер в W^* . Мы используем в $\mathbb{R}^s$ координаты $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ и полагаем

$$\begin{aligned} Z &= X \times \mathbb{R}^s, \\ \text{(I.e.7)} \quad \psi &= \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha, \\ \omega &= \omega. \end{aligned}$$

(I.e.8) З а м е ч а н и е (более важное, чем большинство замечаний). С инвариантной точки зрения $Z = W^*$, где

$$\begin{array}{ccc} W^* \subset T^*(X) & & \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & = & X \end{array}$$

На $T^*(X)$ существует каноническая 1-форма θ (см. разд. а гл. 0), и

$$\theta = \lambda_\alpha \pi^* \theta^\alpha$$

есть просто ограничение этой канонической 1-формы на W^* . Далее, в равенстве (I.e.7)

$$\psi = \pi^* \varphi + \theta, \quad \omega = \pi^* \omega.$$

Установив эти инвариантные отождествления, мы в дальнейшем будем предпочитать работать в координатах и отбросим отображения π^* ¹⁾.

Главным результатом здесь является следующее наблюдение:

(I.e.9) ТЕОРЕМА. Решения уравнений Эйлера—Лагранжа (I.d.14) находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями $N \subset Y$ системы $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$, где $\Psi = d\varphi$.

Доказательство. Пусть $N \subset X$ — интегральное многообразие системы (I, ω) , удовлетворяющее уравнениям Эйлера—Лагранжа

(I.d.14), и s — координата на N . Тогда можно определить такие функции $\lambda_\alpha(s)$, что для всех касательных векторов v к объемлю-

¹⁾ Однако, хотя мы и используем координаты, мы требуем, чтобы все построения носили инвариантный характер и были функториальны. Несоблюдением этих требований объясняются многие трудности в систематическом изложении даже классической задачи Лагранжа.

щему многообразию X в точках кривой N

$$(I.e.10) \quad v \lrcorner (d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha))_N = 0.$$

[З а м е ч а н и е. Строго говоря, надо сначала продолжить функции $\lambda_\alpha(s)$ с подмногообразия N на всё X , а уже затем вычислить $d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha)$. Суть дела в том, что поскольку $\theta_N^\alpha = 0$, то величина $v \lrcorner (d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha))_N$ не зависит от выбора продолжения функций λ_α .]

С подмногообразием $N \subset X$ и функциями $\lambda_\alpha(s)$ очевидным образом связана некоторая кривая $\tilde{N} \subset X \times \mathbb{R}^s$, и мы утверждаем, что эта кривая является интегральным многообразием системы $(\mathcal{E}(\Psi), \omega)$, где

$$(I.e.11) \quad \Psi = d\varphi = d\varphi + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha d\theta^\alpha.$$

С учетом изоморфизма

$$T(Z) \cong T(X) \oplus T(\mathbb{R}^s)$$

(вытекающего из отождествления $Z = X \times \mathbb{R}^s$) и условия (I.e.10) достаточно показать, что

$$(I.e.12) \quad \partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi_{\tilde{N}} = 0.$$

Но ясно, что

$$(I.e.13) \quad \partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha,$$

поэтому равенство (I.e.12) следует из условия $\theta_N^\alpha = 0$. (Точнее говоря, равенство (I.e.13) следует записывать в виде $\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \pi^* \theta^\alpha$, и тогда

$$\tilde{v} \lrcorner \pi^* \theta^\alpha = \pi_* \tilde{v} \lrcorner \theta^\alpha = 0$$

для $\tilde{v} \in T(Z)|_{\tilde{N}}$.)

Обратно, пусть $\tilde{N} \subset Z$ — интегральное многообразие системы $(\mathcal{E}(\Psi), \omega)$ с проекцией $\pi(\tilde{N}) = N \subset X$. Из (I.e.13) следует, что тогда N является интегральным многообразием системы (I, ω) . Далее, условия

$$(v \lrcorner \Psi_{\tilde{N}} = 0 \text{ для } v \in T(X) \subset T(Z))$$

являются просто уравнениями Эйлера—Лагранжа (I.d.14) для подмногообразия N . $\square$

Опираясь на утверждения (I.e.4) и (I.e.5), из которых вытекает, что через каждую точку многообразия Y проходит интегральное многообразие системы (I, ω) , и на теорему (I.e.9), дадим следующие

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) Систему (J, ω) на многообразии Y назовем *дифференциальной системой Эйлера—Лагранжа*, ассоциированной с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$ на многообразии X .

ii) Многообразие Y назовем *пространством импульсов*, ассоциированным с задачей $(I, \omega; \varphi)$.

Последний термин будет объяснен ниже. Заметим, что $Y \subset W^* \subset T^*(X)$, поэтому на первый взгляд Y находится на «подходящем месте» для пространства импульсов. Однако в случае классической вариационной задачи, поставленной на многообразии M , мы имеем $X = J^1(M) \cong \mathbb{R} \times T(M)$, и поэтому

$$T^*(X) \cong T^*(\mathbb{R}) \times T^*(T(M)),$$

тогда как обычное пространство импульсов совпадает с $T^*(M)$ (или $\mathbb{R} \times T^*(M)$ для зависящих от времени лагранжианов). При подходящих предположениях о невырожденности лагранжиана многообразие Y сводится к обычному пространству импульсов, но описанная выше конструкция этого многообразия годится в самой общей ситуации.

В п.1 разд. в гл. II мы приведем пример, когда построение пространства Y при помощи последовательности промежуточных многообразий $\{Z_k\}$ требует *пяти* шагов. Грубо говоря, число этих шагов соответствует производному флагу системы I и равно числу последовательных определений дополнительных функций λ_α . На первый взгляд этот процесс может показаться сложным, но на самом деле последовательное определение подмногообразий Z_k алгоритмизировано и на практике не представляет никаких трудностей, если уже выведены структурные уравнения исходной пфаффовой дифференциальной системы I .

Будем использовать наши стандартные обозначения

$$\psi_Y = \psi|Y, \quad \Psi_Y = \Psi|Y, \quad \text{где } \Psi = d\psi.$$

В соответствии с замечанием (I.e.8) имеет место естественное включение

$$Y \subset T^*(X)$$

и

$$\Psi_Y = \pi^*\Phi + \Omega_Y,$$

где $\Phi = d\varphi$, $\pi : Y \rightarrow X$ — проекция, а Ω — каноническая симплектическая форма на $T^*(X)$. В общем случае уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с произвольным функционалом, определенным на интегральных многообразиях системы (I, ω) , будут зависеть от положения подрасслоения $W^* \subset T^*(X)$ относительно 2-формы Ψ .

Можно построить примеры, в которых уравнения Эйлера—Лагранжа не имеют решений (это означает, что $Y = \emptyset$), и легко привести примеры, в которых таких решений слишком много; см. подстрочное примечание к уравнению (I.d.35). Довольно удивительным представляется существование весьма большого класса вариационных задач, для которых система Эйлера—Лагранжа (J, ω) приводится к стандартной локальной форме. Этот класс выделяется следующим определением:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ называется *невыврожденной*, если

$$\dim Y = 2m + 1,$$

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^m \neq 0^1).$$

З а м е ч а н и е. Часто, но не всегда оказывается, что даже для весьма общих вариационных задач невырожденность означает, что при нахождении неопределенных функций λ_α можно исключить максимальное число s_1 (число Картана) локальных координат на X . Далее, пфафова система Эйлера—Лагранжа почти всегда оказывается проще, если в качестве части корепера на Y использовать максимальное возможное число форм $d\lambda_\alpha$ (действительно, это ясно из равенства (I.e.11)). В этом смысле излагаемый подход *противоположен* традиционному методу множителей Лагранжа.

Для невырожденных вариационных задач ранг формы Ψ_Y всюду равен максимально возможному значению m . Более того, в то время как в общем случае имеет место лишь включение $\mathcal{C}(\Psi_Y) \subset J$, для невырожденных вариационных задач

$$(I.e.14) \quad \mathcal{C}(\Psi_Y) = J.$$

¹⁾ На несколько более изощренном языке обозначим через $\mathcal{Y}(J, \omega)$ множество связных интегральных кривых систем (J, ω) и определим предсимплектическую структуру Ω на $\mathcal{Y}(J, \omega)$, положив

$$\Omega(v, w) = \langle \Psi(p), v(p) \wedge w(p) \rangle,$$

где $N \in \mathcal{Y}(J, \omega)$, v и $w \in T_n(\mathcal{Y}(J, \omega))$ и $p \in N$ — произвольная точка. Можно показать, что форма $(*)$ определена корректно и что задача $(I, \omega; \varphi)$ невырожденна, если Ω индуцирует настоящую симплектическую структуру на $\mathcal{Y}(J, \omega)$.

Доказательство. По определению над каждой точкой $y \in Y$ существуют интегральные элементы системы (J, ω) . При этом всегда имеет место включение $V(J, \omega) \subset V(\mathcal{C}(\Psi_Y), \omega)$. С другой стороны, так как ранг формы Ψ_Y максимален, то

$$\dim \{v \in T_y(Y) : v \lrcorner (\Psi(y)) = 0\} = 1.$$

Поэтому должно выполняться равенство

$$V(\mathcal{C}(\Psi_Y), \omega) = V(J, \omega),$$

ибо множества в обеих его частях состоят из прямых в $T_y(Y)$, лежащих над каждой точкой $y \in Y$. $\square$ ¹⁾

Если задача $(I, \omega; \varphi)$ невырожденна, то по теореме Пфаффа—Дарбу (см. (0.d.9)) можно выбрать на многообразии Y локальные координаты $(x; u_1, \dots, u_m; v^1, \dots, v^m)$, такие что

$$(I.e.15) \quad \Psi_Y = -H(x, u, v) dx + u_i dv^i,$$

где H — не обращающаяся в нуль функция. Во многих примерах мы сможем даже выбрать глобальные координаты (возможно, многозначные, как в случае полярных координат), в которых имеет место (I.e.15).

Внешнее дифференцирование равенства (I.e.15) дает

$$\Psi_Y = -H_{u_i} du_i \wedge dx - H_{v^i} dv^i \wedge dx + du_i \wedge dv^i.$$

Подставляя сюда поля $\partial/\partial u_i$ и $\partial/\partial v^i$ соответственно (см. лемму (I.d.16)), мы обнаруживаем, что система (J, ω) локально является пфаффовой системой

$$(I.e.16) \quad \begin{aligned} dv^i - H_{u_i} dx &= 0, \\ du_i + H_{v^i} dx &= 0, \\ \omega &\equiv F dx \bmod \{du_i, dv^i\}, \quad F \neq 0. \end{aligned}$$

Выбирая на интегральных многообразиях системы (I.e.16) координату x , видим, что кривые, являющиеся решениями уравнения Эйлера—Лагранжа для невырожденной вариационной задачи

¹⁾ Если на $(2m+1)$ -мерном многообразии Y задана 2-форма Ψ_Y и $(\Psi_Y)^m \neq 0$, то в каждой точке многообразия Y однозначно определено *характеристическое направление* (см. разд. d гл. 0, в частности (0.d.5)). Эти характеристические направления определяют линейное подрасслоение $\Psi_Y^\perp \subset T(Y)$, а причина, по которой выполняется равенство (I.e.14), состоит в том, что всегда

$$\Psi_Y^\perp \supset J^\perp,$$

а потому, ввиду линейности расслоения $\Psi_Y^\perp$, должно соблюдаться равенство.

на X , локально имеют на Y привычный гамильтонов вид

$$\frac{dv^i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial u_i},$$

$$\frac{du_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial v^i}.$$

Замечательно, что гамильтонов формализм проявляется хотя бы локально (а во многих случаях и глобально!) в такой общности (см. различные примеры ниже).

В общем случае несколько затруднительно предсказывать размерность пространства импульсов, ассоциированного с задачей $(I, \omega; \varphi)$. Несколько позднее мы приведем общую теорему по этому поводу (см. (I.e.34)), а сейчас дадим критерий того, что $Z_k = Y$ в конструкции (I.e.1).

(I.e.17) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Предположим, что для некоторого k

- (i) $\mathcal{C}_k(\Psi) = \mathcal{C}(\Psi_{Z_k})$
- (ii) $\dim Z_k = 2m + 1$,
- (iii) $\Psi_{Z_k} \wedge (\Psi_{Z_k})^m \neq 0$,
- (iv) $\Psi \neq 0$ на $\Psi_{Z_k}^\perp \subset T(Z_k)$

(и (iii), и (iv) должны выполняться в каждой точке многообразия Z_k). Тогда $Y = Z_k$ и вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ невырождена.

Доказательство. В условии (iv) $\Psi_{Z_k}^\perp$ обозначает линейное под-расслоение расслоения $T(Z_k)$, слой которого над точкой $p \in Z_k$ имеет вид $\{v \in T_p(Z_k) : v \lrcorner \Psi_{Z_k}(p) = 0\}$. Из (i) — (iv) следует, что отображение $V(\mathcal{C}_k(\Psi), \omega) \rightarrow Z_k$ сюръективно, т. е. $Y = Z_k$. Поэтому утверждаемая невырожденность вытекает из (ii) и (iii). $\square$

(I.e.18) ПРИМЕР. Продолжая пример (I.d.15), рассмотрим функционал

$$(I.e.19) \quad \Phi = \int L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx, \quad y = (y^1, \dots, y^m),$$

соответствующий классической вариационной задаче. Будем говорить, что функционал (I.e.19) невырожден, если

$$\det \|L_{y^\alpha y^\beta}\| \neq 0$$

(точнее говоря, нам следовало бы выбрать открытое множество, на котором предполагается выполненным это условие, но мы не

будем делать этого). Если записать уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (I.e.19) в виде (см. (I.d.17))

$$L_{y^\alpha y^\beta} \frac{d^2 y^\beta}{dx^2} = g_\alpha \left(x, y(e), \frac{dy(x)}{dx} \right),$$

то невырожденность означает, что это уравнение разрешимо относительно $d^2 y^\beta / dx^2$. Поэтому неудивительно, что справедливо следующее утверждение:

(I.e.20) Если функционал (I.e.19) невырожден, то вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ невырожденна. При этом

$$\dim Y = 2m + 1.$$

Доказательство. Используем это доказательство как возможность продемонстрировать, как выписать уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.17) в виде пфафовой системы (J, ω) . Многообразие Z — это $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \lambda_\alpha)$, а формы ψ и Ψ на Z имеют вид (см. (I.e.7), (I.e.11))

$$\psi = L(x, y, \dot{y}) dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

$$\Psi = (L_{y^\alpha} - \lambda_\alpha) d\dot{y}^\alpha \wedge dx + (d\lambda_\alpha - L_{y^\alpha} dx) \wedge \theta^\alpha.$$

Возьмем на Z корепер $\{dx; \theta^\alpha; d\dot{y}^\alpha; d\lambda_\alpha\}$ и вычислим систему Картана, подставляя соответственно поля $\partial/\partial\lambda_\alpha$, $\partial/\partial\dot{y}^\alpha$, $\partial/\partial\theta^\alpha$. Порождающий набор пфаффовых уравнений для системы $\mathcal{C}(\Psi)$ имеет вид (см. (I.d.16))

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$(I.e.21) \quad \partial/\partial\dot{y}^\alpha \lrcorner \Psi = (L_{y^\alpha} - \lambda_\alpha) dx = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^\alpha \lrcorner \Psi = L_{y^\alpha} dx - d\lambda_\alpha = 0.$$

Нам нужны интегральные многообразия системы $\mathcal{C}(\Psi)$, на которых $dx \neq 0$; в соответствии с алгоритмом конструкции (I.e.1) из второго уравнения (I.e.21) следует, что подмногообразие $Z_1 \subset Z$ определено уравнениями $L_{y^\alpha} = \lambda_\alpha$. Действительно, в точке $p \in Z_1$ мы имеем $T_p(Z) \cong \mathbb{R}^{3m+1}$, а система Картана задается приравниванием к нулю $2m$ линейных форм $\theta^\alpha(p)$, $(d\lambda_\alpha - L_{y^\alpha} dx)(p)$. Поэтому заведомо существуют интегральные элементы системы $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$, лежащие над точкой p .

Так как $\text{span}\{dy^\alpha, dx\} = \text{span}\{\theta^\alpha, dx\}$, то на Z_1

$$d\lambda_\alpha \equiv L_{y^\alpha y^\beta} d\dot{y}^\beta \bmod \text{span}\{\theta^\alpha, dx\}$$

(все формы здесь ограничены на Z_1). Поскольку $\det \|L_{y^\alpha y^\beta}\| \neq 0$, то 1-формы $\{dx; \theta^\alpha; d\lambda_\alpha\}$ образуют корепер на Z_1 . При этом

$$\psi_{Z_1} = L dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

$$\Psi_{Z_1} = (d\lambda_\alpha - L_{y^\alpha} dx) \wedge \theta^\alpha.$$

Отсюда и из равенств (I.e.21) ясно, что $\mathcal{C}(\Psi_{Z_1}) = \mathcal{C}_1(\Psi)$ и

$$\Psi_{Z_1} \wedge (\Psi_{Z_1})^m = m! L dx \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge d\lambda_m \wedge \theta^m \neq 0.$$

Из предположения (I.e.17) вытекает, что $Y = Z_1$ и что вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ невырождена.

(I.e.22) ЗАМЕЧАНИЕ. Справедливо равенство

$$\psi_Y = (L - \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha) dx + \lambda_\alpha dy^\alpha.$$

Таким образом, форма ψ_Y глобально имеет вид (I.e.15), где

$$H = \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha - L.$$

Мы рассматриваем здесь H как функцию локальных координат $(x; y^\alpha; \lambda_\alpha)$ на Y .

В качестве локальных координат на Y можно взять также $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$. При этом H запишется в виде

$$H = \dot{y}^\alpha I_{y^\alpha} - L,$$

в котором читатель может опознать гамильтониан (гамильтонианы будут формально (и с некоторым запозданием) введены в разд. а гл. II).

В проведенном рассуждении можно заменить $\mathbb{R}^m$ произвольным многообразием M с локальными координатами y^α . Тогда

$$X = J^1(\mathbb{R}, M) \cong \mathbb{R} \times T(M),$$

и с инвариантной точки зрения (см. замечание (I.e.8))

$$Z = W^* \subset T^*(X).$$

Фактически записывая формулы в локальных координатах, легко усмотреть, что

$$Z \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \{dx\} \times \pi^* T^*(M) \subset T^*(X),$$

где мы произвели отождествление

$$T^*(X) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \{dx\} \times T^*(T(M)),$$

а отображение

$$\pi : T(M) \rightarrow M$$

является проекцией. Так как $Y \subset Z$, то существует отображение

$$\mathcal{L} : Y \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(M),$$

задаваемое в локальных координатах формулой

$$\mathcal{L}(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha) = (x; y^\alpha; L_{y^\alpha}).$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае функции λ_α задают координаты на слоях расслоения $T^*(M)$, соответству-

ющие базису $\{dy^\alpha\}$, и предыдущее отображение часто записывают в виде

$$\lambda_\alpha = L_{y^\alpha}.$$

Мы узнаём в этой записи *преобразование Лежандра* (см. [29]), которое в нашем описании определяется инвариантно как *отображение* многообразия Y . В классическом случае обычно предполагается, что функция $L(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ *выпукла* по $\dot{y}^\alpha$. Тогда обе проекции $Y \rightarrow \mathbb{R} \times T(M)$ и $\mathcal{L} : Y \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(M)$ взаимно-однозначны и мы можем (снова инвариантно) рассматривать преобразование Лежандра как отображение

$$\mathcal{L} : \mathbb{R} \times T(M) \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(M),$$

задаваемое той же формулой $\lambda_\alpha = L_{y^\alpha}$.

Поскольку во всех случаях, даже когда $\det \|L_{y^\alpha y^\beta}\| = 0$, существует отображение

$$\mathcal{L} : Y \rightarrow \mathbb{R} \times T^*(M),$$

мы и стали называть Y пространством импульсов, ассоциированным с рассматриваемой вариационной задачей.

В случае не зависящей от времени механической системы (см. (I.a.7)), лагранжиан которой имеет вид

$$L = T(y, \dot{y}) - U(y),$$

ассоциированная с кинетической энергией риманова метрика определяет изоморфизм

$$T(M) \xrightarrow{\sim} T^*(M),$$

который и является преобразованием Лежандра для этого случая (отображение $\mathcal{L}$ является тождественным на сомножителе $\mathbb{R}$).

Заметим, что функция

$$\begin{aligned} H &= \dot{y}^\alpha g_{\alpha\beta}(y) \dot{y}^\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(y) \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta + U(y) \\ &= T(y, \dot{y}) + U(y) \end{aligned}$$

— это *полная энергия* нашей механической системы. Хотя мы и будем говорить об этом еще, советуем читателю заглянуть в [1], [2].

(I.e.23) ПРИМЕР. Продолжая пример (I.d.22), рассмотрим функционал

$$(I.e.24) \quad \Phi = \int L\left(y, x(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) dx, \quad y = (y^1, \dots, y^m),$$

соответствующий классической вариационной задаче второго порядка. Будем говорить, что функционал (I.e.24) *невыврожден*,

если

$$\det \| L_{y^\alpha y^\beta} \| \neq 0.$$

Аналогично предыдущему примеру уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.23) имеют вид

$$L_{y^\alpha y^\beta} \frac{d^4 y^\beta(x)}{dx^4} = g_\alpha(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2 y(x)}{dx^2}, \frac{d^3 y(x)}{dx^3}),$$

а невырожденность означает, что они разрешимы относительно $d^4 y^\beta(x)/dx^4$. Приведем аналог утверждения (I.e.20):

(I.e.25) Если функционал (I.e.24) невырожден, то вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ невырожденна. При этом $\dim Y = 4m + 1$.

Доказательство. Вновь используем доказательство, чтобы продемонстрировать, как выписываются уравнения Эйлера—Лагранжа в виде пфафовой системы. На многообразии $Z = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^{2m}$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha; \lambda_\alpha; \dot{\lambda}_\alpha)$ имеем

$$\begin{aligned} \psi &= L dx + \lambda_\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \dot{\theta}^\alpha, \\ \text{(I.e.26)} \quad \Psi &= (L_{y^\alpha} - \dot{\lambda}_\alpha d\dot{y}^\alpha \wedge dx + (d\dot{\lambda}_\alpha + (\lambda_\alpha - L_{y^\alpha}) dx) \wedge \dot{\theta}^\alpha \\ &\quad + (L_{y^\alpha} dx + d\lambda_\alpha) \wedge \theta^\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя поля $\partial/\partial \dot{y}^\alpha$, $\partial/\partial \dot{\lambda}_\alpha$, $\partial/\partial \lambda_\alpha$, $\partial/\partial \dot{\theta}^\alpha$, $\partial/\partial \theta^\alpha$, получаем, что система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается пфафowymi уравнениями (см. (I.d.16))

$$\begin{aligned} \partial/\partial \dot{y}^\alpha \lrcorner \Psi &= (L_{y^\alpha} - \dot{\lambda}_\alpha) dx = 0, \\ \partial/\partial \dot{\lambda}_\alpha \lrcorner \Psi &= \dot{\theta}^\alpha = 0, \\ \partial/\partial \lambda_\alpha \lrcorner \Psi &= \theta^\alpha = 0, \\ \partial/\partial \dot{\theta}^\alpha \lrcorner \Psi &= -d\dot{\lambda}_\alpha - (\lambda_\alpha - L_{y^\alpha}) dx = 0, \\ \partial/\partial \theta^\alpha \lrcorner \Psi &= -d\lambda_\alpha - L_{y^\alpha} dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, подмногообразие $Z_1 \subset Z$ определяется уравнением $L_{y^\alpha} = \dot{\lambda}_\alpha$, а так как на Z

$$L_{y^\alpha y^\beta} d\dot{y}^\beta \equiv d\dot{\lambda}_\alpha \bmod \{dx; \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha\},$$

то 1-формы $\{dx; \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha; d\lambda_\alpha; d\dot{\lambda}_\alpha\}$ задают корепер на Z_1 . Поэтому ясно, что существуют интегральные элементы системы $\mathcal{C}(\Psi)$, ω , касательные к Z_1 . Использование равенств (I.e.26) дает

$$\begin{aligned} \psi_{Z_1} &= L dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \dot{\theta}^\alpha, \\ \Psi_{Z_1} &= (d\dot{\lambda}_\alpha + (\lambda_\alpha - L_{y^\alpha}) dx) \wedge \dot{\theta}^\alpha + (d\lambda_\alpha + L_{y^\alpha} dx) \wedge \theta^\alpha, \\ \Psi_{Z_1} \wedge (\Psi_{Z_1})^{2m} &= (2m)! L dx \wedge d\dot{\lambda}_1 \wedge \dot{\theta}^1 \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge d\dot{\lambda}_m \wedge \dot{\theta}^m \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge d\lambda_m \wedge \theta^m, \end{aligned}$$

и применение предложения (I.e.17) завершает доказательство. $\square$

З а м е ч а н и е. Так как

$$\Psi_Y = (L - \dot{y}^\alpha \lambda_\alpha - \ddot{y}^\alpha \dot{\lambda}_\alpha) dx + \lambda_\alpha dy^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha d\dot{y}^\alpha,$$

то форма Ψ_Y глобально имеет вид (I.e.15) с гамильтонианом второго порядка

$$H = -L + \ddot{y}^\alpha \dot{\lambda}_\alpha + \dot{y}^\alpha \lambda_\alpha.$$

Заметим, что в отличие от предыдущего примера гамильтониан H определен не на всём X , а только на Y . Более полные сведения о гамильтонианах мы сообщим в гл. II.

Приведем теперь общий результат, содержащий оба предыдущих примера в качестве частных случаев. Чтобы пояснить суть дела, предположим, что (I, ω) — пфафова система в хорошей форме (см. (I.e.6)). Тогда выполняются рафинированные структурные уравнения (I.e.13). Очевидно, полезно разрешить замены корепера на X , сохраняющие эти структурные уравнения. В соответствии с этим дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимые замены корепера в системе (I, ω) задаются обратимыми линейными преобразованиями вида

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^\rho &= A_\theta^\rho \theta^\sigma, \\ \tilde{\theta}^\mu &= A_\theta^\mu \theta^\nu + A_\rho^\mu \theta^\rho, \\ \tilde{\omega} &= A\omega + B_\alpha \theta^\alpha, \\ \tilde{\pi}^\mu &= (A^{-1})_\nu^\mu \pi^\nu + B_\alpha^\mu \theta^\alpha + C^\mu \omega. \end{aligned} \quad (\text{I.e.27})$$

Такие замены репера полезно разрешать даже в классических задачах. Предположим, например, что механическая система на многообразии M задана функцией кинетической энергии T на TM (потенциальную энергию примем для простоты равной нулю). В стандартных локальных координатах $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ на $J^1(\mathbb{R}, M)$

$$T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(y) \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta,$$

и каноническая пфафова система порождается уравнениями Пфаффа

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0, \\ \omega &= dx \neq 0. \end{aligned}$$

Если рассмотреть риманову метрику

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta,$$

ассоциированную с функцией T , то в римановой геометрии зачастую полезно использовать при вычислениях ортонормирован-

ный корепер

$$\omega^\alpha = A_\beta^\alpha(y) dy^\beta$$

на M , в котором

$$ds^2 = \sum_\alpha (\omega^\alpha)^2.$$

Если отождествить $J^1(\mathbb{R}, M)$ с $\mathbb{R} \times T(M)$ и ввести новые координаты $(x; y^\alpha; p^\alpha)$, где для $v = \dot{y}^\alpha \partial/\partial y^\alpha \in T(M)$

$$\langle \omega^\alpha, v \rangle = p^\alpha,$$

то каноническая пфафхова система порождается также уравнениями Пфаффа

$$\tilde{\theta}^\alpha = \omega^\alpha - p^\alpha dx = 0,$$

$$\tilde{\omega} = dx \neq 0.$$

Записывая два набора структурных уравнений соответственно в виде

$$d\theta^\alpha = -\pi^\alpha \wedge \omega \quad (\pi^\alpha = d\dot{y}^\alpha)$$

и

$$d\tilde{\theta}^\alpha \equiv -\tilde{\pi}^\alpha \wedge \tilde{\omega} \bmod \text{span}\{\tilde{\omega}; \tilde{\theta}^\alpha\},$$

можно непосредственно проверить, что корепер $\{\tilde{\omega}; \tilde{\theta}^\alpha; \tilde{\pi}^\alpha\}$ получается из корепера $\{\omega; \theta^\alpha; \pi^\alpha\}$ допустимой заменой (I.e.27). В новом корепере

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2} \sum (p^\alpha)^2 dx.$$

Эта специальная замена корепера окажется полезной в разд. а гл. III.

Возвращаясь к обсуждению общего случая, сделаем одно предположение относительно внутренней структуры дифференциальной системы (I, ω) и 1-формы φ в нашей вариационной задаче $(I, \omega; \varphi)$. Оно позволит нам ввести некий основной инвариант, определяемый квадратичной формой на векторном расслоении $(W^*/W_1^*)^*$. Можно было бы обойтись и более слабым предположением, но у нас нет четкой уверенности в том, какие именно требования следует наложить. Во всяком случае, это предположение выполняется почти во всех наших примерах и в силу рассуждений, приведенных в конце разд. с гл. I (см. (I.c.30)), оно автоматически выполняется на любом продолжении (в связи с этим см. (I.c.40)).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (относительно задачи $(I, \omega; \varphi)$). Предположим, что расслоение $L^* = \text{span}\{\omega; \theta^1, \dots, \theta^s\}$ вполне интегрируемо, т. е. система (I, ω) локально вложима (см. (I.c.10)), и что (I, ω) — пфафхова система в хорошей форме. Предположим,

далее, что существует допустимый корепер $\{\omega; \theta^0; \theta^\mu; \pi^\mu\}$, для которого выполняются соотношения

$$(i) \quad d\theta^0 \equiv 0 \bmod L^* \wedge L^*,$$

$$(I.e.28) \quad (ii) \quad d\theta^\mu \equiv -\pi^\mu \wedge \omega \bmod L^* \wedge L^*,$$

$$(iii) \quad d\omega \equiv 0 \bmod L^* \wedge L^*,$$

где $L^* \wedge L^*$ — образ отображения $L^* \otimes L^* \rightarrow \Lambda^2 T^*(X)$. Наконец, в отношении формы φ предположим, что в этом допустимом корепере

$$(I.e.29) \quad d\varphi \equiv A_\mu \pi^\mu \wedge \omega \bmod L^* \wedge L^*.$$

На практике мы всегда будем иметь

$$(I.e.30) \quad \varphi = f\omega$$

для некоторой функции f на X ; в этом случае (I.e.29) следует из (I.e.28), (iii).

З а м е ч а н и е. На самом деле здесь достаточно, чтобы для любой точки $x \in X$ существовал допустимый корепер, *зависящий от x* , такой, что равенства (I.e.28) и (I.e.29) выполняются *с точностью до первого порядка по x* (это немного похоже на выбор в римановой геометрии таких координат, что $g_{\alpha\beta}(y) = \delta_\alpha^\beta + O(y^2)$).

Свяжем теперь инвариантным образом с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$, удовлетворяющей условиям (I.e.28), (I.e.29), квадратичную форму $\|A_{\mu\nu}(x)\|$, зависящую от точки $x \in X$. В нескольких вольных, но, надеемся, понятных обозначениях

$$L^* \wedge L^* = \text{подпространство над } C^\infty(X), \text{ натянутое на } \{\omega \wedge \theta^\alpha, \theta^\alpha \wedge \theta^\beta\}.$$

Внешнее дифференцирование соотношения (I.e.28), (ii) дает

$$0 \equiv d(\pi^\mu \wedge \omega) \bmod d(L^* \wedge L^*).$$

Используя условия (I.e.28), заключаем, что

$$(I.e.31) \quad d(\pi^\mu \wedge \omega) \equiv 0 \bmod T^*(X) \wedge L^* \wedge L^*,$$

где $T^*(X) \wedge L^* \wedge L^*$ — пространство, порожденное над $A^1(X)$ пространством $L^* \wedge L^*$. Внешнее дифференцирование соотношения (I.e.29) дает

$$0 \equiv dA_\mu \wedge \pi^\mu \wedge \omega + A_\mu d(\pi^\mu \wedge \omega) \bmod d(L^* \wedge L^*).$$

Учитывая (I.e.28) и (I.e.31), получаем

$$(I.e.32) \quad dA_\mu \wedge \pi^\mu \wedge \omega \equiv 0 \bmod T^*(X) \wedge L^* \wedge L^*.$$

Из замечательного результата линейной алгебры, известного под именем леммы Картана, следует теперь, что

$$(1.e.33) \quad dA_\mu \equiv A_{\mu\nu}\pi^\nu \bmod L^*, \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

Доказательство. Пусть $\{\omega; \theta^\alpha; \pi^\mu; \eta^i\}$ — корепер на X . Тогда

$$dA_\mu \equiv A_{\mu j}\eta^j + A_{\mu\nu}\pi^\nu \bmod L^*$$

(на самом деле, если предположить отсутствие характеристик Коши, то нет необходимости вводить формы η^j , так как набор $\{\omega; \theta^\alpha; \pi^\mu\}$ уже задает корепер). Поэтому равенство (1.e.32) дает

$$A_{\mu j}\eta^j \wedge \pi^\mu \wedge \omega + A_{\mu\nu}\pi^\mu \wedge \pi^\nu \wedge \omega \equiv 0 \bmod T^*(X) \wedge L^* \wedge L^*.$$

Подставляя сюда поля $\partial/\partial\eta^i$, получаем

$$A_{\mu j}\pi^\mu \wedge \omega \equiv 0 \bmod L^* \wedge L^*,$$

откуда $A_{\mu j} = 0$. Подстановка $\partial/\partial\pi^\mu \wedge \partial/\partial\pi^\nu$ дает

$$(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})\omega = 0$$

(ибо $(\partial/\partial\pi^\mu \wedge \partial/\partial\pi^\nu) \lrcorner T^*(X) \wedge L^* \wedge L^* = 0$).

Эти два соотношения в совокупности обеспечивают выполнение (1.e.33). $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) Будем называть матрицу $\|A_{\mu\nu}\|$ *квадратичной формой, ассоциированной с вариационной задачей* $(I, \omega; \varphi)^1$.

ii) Будем говорить, что задача $(I, \omega; \varphi)$ *сильно невырождена*, если $\det \|A_{\mu\nu}\| \neq 0$.

Так, в примере (1.e.18) сильная невырожденность эквивалентна тому, что $\det \|L_{\bar{y}\alpha\bar{y}\beta}\| \neq 0$, а в примере (1.e.23) — тому, что $\det \|L_{\bar{y}\alpha\bar{y}\beta}\| \neq 0$. В общем случае сильная невырожденность означает, что нам достаточно рассматривать лишь первую производную систему, а не весь производный флаг.

(1.e.34) ТЕОРЕМА. Если задача $(I, \omega; \varphi)$ сильно невырождена, то она невырождена и

$$\dim Y = 2s + 1.$$

Доказательство. В обозначениях конструкции (1.e.1) имеем

$$\psi = \varphi + \lambda_p \theta^p + \lambda_\mu \theta^\mu,$$

$$\Psi = d\varphi + d\lambda_p \wedge \theta^p + d\lambda_\mu \wedge \theta^\mu + \lambda_p d\theta^p + \lambda_\mu d\theta^\mu.$$

¹⁾ Как отмечалось во введении, матрица $\|A_{\mu\nu}\|$ инвариантно задается симметричной билинейной формой

$$Q : (W^*/W_1^*)^* \otimes (W^*/W_1^*)^* \rightarrow \mathbb{R},$$

где $W_1^* = \text{span}\{\theta^p\}$ — первая производная система для W^* .

Используя равенства (I.e.28) и (I.e.29), получаем

$$(I.e.35) \quad \Psi \equiv (A_\mu - \lambda_\mu) \pi^\mu \wedge \omega + (d\lambda_\alpha + l_\alpha \omega) \wedge \theta^\alpha \bmod S,$$

где l_α — функции на Z и

$$S = W^* \wedge W^* \subset \Lambda^2 T^*(X).$$

Так как форма $\pi^\mu \wedge \omega$ отлична от нуля в $\Lambda^2 T(X)/S$, то подмногообразии

$$Z_1 \subset Z$$

определяется уравнениями

$$A_\mu = \lambda_\mu. {}^1)$$

Тогда на Z_1 (I.e.33) соотношения дают

$$d\lambda_\mu \equiv A_{\mu\nu} \pi^\nu \bmod L^*.$$

Ввиду предположения о сильной невырожденности можно выбрать в качестве локального корепера на Z_1 набор 1-форм $\{\omega; \theta^\alpha; d\lambda_\alpha\}$. Поэтому из (I.e.35) вытекает, что

$$\Psi_{Z_1} \equiv (d\lambda_\alpha + l_\alpha \omega) \wedge \theta^\alpha \bmod S,$$

$$\psi_{Z_1} = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha.$$

Поскольку $\dim Z_1 = 2s + 1$, то форма $\psi_{Z_1} \wedge (\Psi_{Z_1})^s$ является кратным ненулевой формы объема на Z_1 :

$$\Theta = \varphi \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge d\lambda_s \wedge \theta^s. {}^2)$$

Так как ни ψ_{Z_1} , ни S не содержат ни одного члена с $d\lambda_\alpha$, то при вычислении формы $\psi_{Z_1} \wedge (\Psi_{Z_1})^s$ можно пренебречь подпространством S , откуда ясно, что эта форма равна $s! \Theta$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно, в силу предположения (I.e.17), показать, что

$$\mathcal{C}(\Psi_{Z_1}) = \mathcal{C}_1(\Psi).$$

Имеем

$$\Psi \equiv (d\lambda_\alpha + l_\alpha \omega) \wedge \theta^\alpha \bmod S,$$

$$\Psi_{Z_1} \equiv ((d\lambda_\alpha + l_\alpha \omega) \wedge \theta^\alpha)_{Z_1} \bmod (S_{Z_1}).$$

Поскольку набор $\{\omega; \theta^\alpha; d\lambda_\alpha\}$ задает корепер на Z_1 , то включение

$$\mathcal{C}(\Psi_{Z_1}) \subset \mathcal{C}_1(\Psi)$$

¹⁾ Мы можем сказать так: для сильно невырожденной вариационной задачи в точности s_1 (число Картана) функций λ_α определены на всём X , а оставшиеся (соответствующие первой производной системе для W^*) определены лишь на Y .

²⁾ Здесь надо предполагать, что набор $\{\varphi; \theta^\alpha; \pi^\mu\}$ образует корепер на X ; это условие выполняется, если имеет место (I.e.30).

может оказаться равенством только благодаря 1-формам

$$(v \rfloor \eta)_{z_1}, \quad \eta \in S, \quad v \in C^\infty(N, T(X)).$$

Но ввиду того, что $\eta \in W^* \wedge W^*$,

$$v \rfloor \eta \in W^*.$$

С другой стороны, ясно, что $W^* \subset \mathcal{C}(\Psi_{z_1})$, откуда и следует требуемый результат. $\square$

(I.e.36) ПРИМЕРЫ. Классические примеры (I.e.20) и (I.e.25) входят в доказанную теорему как частные случаи. Интереснее обратиться к примеру (I.d.27) и рассмотреть функционал

$$(I.e.37) \quad \Phi(\gamma) = \int_{\gamma} L(\kappa) ds,$$

где γ — кривая с элементом длины дуги ds на римановой поверхности S , а $L(\kappa)$ — гладкая функция геодезической кривизны. В обозначениях этого примера имеем

$$d\theta^1 = -\theta^2 \wedge \omega,$$

$$d\theta^2 = -\pi \wedge \omega,$$

$$d\omega = -\kappa\theta^2 \wedge \omega - \theta^1 \wedge \theta^2,$$

где

$$\pi = d\kappa - (R^2 + \kappa^2) \theta^2.$$

Производный флаг (см. разд. с гл. I) выглядит так:

$$\begin{array}{ccccc} W_2^* & \subset & W_1^* & \subset & W^* \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ (0) & & \text{span } \{\theta^1\} & & \text{span } \{\theta^1, \theta^2\} \end{array}$$

а число Картана s_1 равно 1. Далее, для формы $\varphi = L(\kappa) \omega$ выполняется соотношение

$$d\varphi \equiv L'(\kappa) \pi \wedge \omega \bmod \text{span } \{\theta^1 \wedge \theta^2, \theta^1 \wedge \omega, \theta^2 \wedge \omega\}.$$

Следовательно, условия (I.e.28) и (I.e.29) оба удовлетворены (есть одна форма $\theta^0 = \theta^1$ и одна форма $\theta^\mu = \theta^2$), и поскольку

$$dL'(\kappa) \equiv L''(\kappa) \pi \bmod \text{span } \{\omega; \theta^1, \theta^2\},$$

то условие сильной невырожденности эквивалентно тому, что

$$(I.e.38) \quad L''(\kappa) \neq 0.$$

За обсуждением случая $L'' \equiv 0$ мы отсылаем к подстрочному примечанию к уравнению (I.d.35)

(I.e.39). Пример. Исследуем понятия квадратичной формы и сильной невырожденности для случая задачи Лагранжа ¹⁾ (см.

¹⁾ Для задачи Лагранжа структурные соотношения (I.e.28) выполняются не всегда. Здесь мы предполагаем, что они выполнены; видоизменения, необходимые при исследовании общего случая, легко провести, используя проводимое ниже в разд. е гл. IV обсуждение общей задачи Лагранжа.

пример (I.c.14); один частный случай невырожденной задачи Лагранжа разобран ниже в примере (II.a.40)). Мы будем работать в окрестности, в которой подмногообразие $X \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ задается уравнениями

$$(I.e.40) \quad g^\rho(x, y, \dot{y}) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq r.$$

Предположим, что в этой окрестности

$$(I.e.41) \quad \text{rank} \left\| \frac{\partial g^\rho}{\partial \dot{y}^\sigma}(x, y, \dot{y}) \right\| = r, \quad 1 \leq \rho, \sigma \leq r.$$

Выберем в качестве системы (I, ω) ограничение на X канонической дифференциальной системы

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0$$

на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, а в качестве формы φ возьмем

$$\varphi = L(x, y, \dot{y}) dx.$$

Чтобы избежать путаницы в обозначениях, в этом примере — и только в нем — мы примем

$$K^* = \text{span} \{ \theta^1, \dots, \theta^n, \omega \} = \text{span} \{ dy^1, \dots, dy^n, dx \};$$

здесь предполагается, что все формы ограничены на X . Если выбрать корепер таким образом, чтобы выполнялись рафинированные структурные уравнения (I.c.13), то мы получим

$$d\dot{y}^\alpha \equiv l_\mu^\alpha \pi^\mu \text{ mod } K^*.$$

Дифференцирование уравнений (I.e.40) дает

$$g_{\dot{y}}^\rho d\dot{y}^\beta \equiv 0 \text{ mod } K^*,$$

откуда следует, что на X

$$(I.e.42) \quad g_{\dot{y}^\beta}^\rho l_\mu^\alpha = 0.$$

Напомним, что величины A_μ были определены условиями (см. (I.e.29))

$$d\varphi \equiv A_\mu \pi_\mu \wedge \omega \text{ mod } K^* \wedge K^*.$$

Так как

$$d\varphi \equiv L_{\dot{y}^\alpha} d\dot{y}^\alpha \wedge dx \text{ mod } K^* \wedge K^*$$

$$\equiv L_{\dot{y}^\alpha} l_\mu^\alpha \pi^\mu \wedge \omega \text{ mod } K^* \wedge K^*,$$

то

$$(I.e.43) \quad A_\mu = L_{\dot{y}^\alpha} l_\mu^\alpha.$$

Другими словами, если положить $p = (x, y)$ и

$$X_p = X \cap \pi^{-1}(p),$$

где $\pi : J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ — проекция, то форма $A_\mu \pi^\mu$ является ограничением формы dL на подрасслоение $T(X_p) \subset T(X)|_{X_p}$.

Далее, величины $A_{\mu\nu}$ определялись условиями

$$dA_\mu \equiv A_{\mu\nu} \pi^\nu \bmod K^*.$$

В силу (I.e.43)

$$(I.e.44) \quad dA_\mu \equiv L_{y^\alpha y^\beta} l_\mu^\alpha l_\nu^\beta \pi^\nu + L_{y^\alpha} l_{\mu\beta}^\alpha l_\nu^\beta \pi^\nu.$$

Чтобы интерпретировать это уравнение, зафиксируем точку $p = (x, y)$ и рассмотрим X_p как подмногообразие в $\mathbb{R}^m$. Замена координат $y^\alpha = y^\alpha(z)$ индуцирует *линейный* автоморфизм пространства $\mathbb{R}^m$, поэтому инвариантна только *геометрия многообразия* X_p в $\mathbb{R}^m$. Мы можем изменить коэффициенты l_ν^μ с помощью произвольной подстановки

$$(I.e.45) \quad l_\mu^\alpha \rightarrow l_\mu^\alpha B_\nu^\mu, \det \|B_\nu^\mu\| \neq 0.$$

Это эквивалентно просто замене корепера $\{\pi_{X_p}^\mu\}$. Из условий (I.e.41) следует, что

$$\det \|l_\nu^\mu\| \neq 0,$$

поэтому линейный подстановкой (I.e.45) можно добиться того, чтобы $l_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$. Тогда (I.e.42) принимает вид

$$(I.e.46) \quad g_{y^\sigma}^\rho l_\mu^\sigma + g_{y^\mu}^\rho = 0.$$

Далее,

$$(I.e.47) \quad 0 = dl_\nu^\mu = (l_{y^\rho y^\lambda}^\mu + l_{y^\lambda y^\rho}^\mu) \pi^\lambda.$$

Дальнейшие вычисления проведем в точке многообразия X_p , в которой

$$g_{y^\sigma}^\rho = \delta_\sigma^\rho,$$

$$(I.e.48) \quad l_\mu^\rho = 0.$$

Тогда (I.e.47) принимает вид

$$(I.e.49) \quad l_{y^\lambda y^\rho}^\mu = 0.$$

Если мы продифференцируем равенство (I.e.46), а затем вычислим *результат* в точке, в которой выполнены условия (I.e.48), то получим

$$(I.e.50) \quad l_{\mu y^\nu}^\rho + g_{y^\mu y^\nu}^\sigma = 0.$$

Таким образом, во всякой точке многообразия X_p , в которой выполняются нормировочные условия (I.e.48), коэффициенты при π^v во втором члене равенства (I.e.44) принимают вид

$$L_{\dot{y}^\alpha} l_{\mu \dot{y}^v}^\alpha = L_{\dot{y}^\rho} l_{\mu \dot{y}^v}^\rho + L_{\dot{y}^\lambda} l_{\mu \dot{y}^v}^\lambda = -L_{\dot{y}^\rho} g_{\dot{y}^\mu \dot{y}^v}^\rho,$$

в силу (I.e.49) и (I.e.50). Следовательно, в этой точке квадратичная форма $\|A_{\mu v}\|$ задается равенствами

$$(I.e.51) \quad A_{\mu v} = L_{\dot{y}^\mu \dot{y}^v} - L_{\dot{y}^\rho} g_{\dot{y}^\mu \dot{y}^v}^\rho.$$

Первый член — это матрица Гессе $\|L_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\|$, ограниченная на касательное пространство к X_p . Второй член равен значению второй квадратичной формы многообразия X_p , вычисленному на dL и взятому с противоположным знаком (в аффинном случае это имеет смысл). Мы приходим к следующему заключению:

В задаче Лагранжа в условие сильной невырожденности входят матрица Гессе $\|L_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\|$ и вторая квадратичная форма слоев отображения $X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Например, условие

$$\|A_{\mu v}\| > 0$$

означает, что в некотором смысле в направлениях подпространства $T(X_p)$ функция L должна быть более выпукла (как функция от $\dot{y}^\alpha$), чем X_p .

Отметим частный случай, когда ограничения линейны по $\dot{y}^\alpha$. Тогда мы имеем распределение $S \subset T(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$, и второй член в равенстве (I.e.51) пропадает.

З а м е ч а н и е. Существует обширная классическая литература (и известная путаница) относительно: i) условий невырожденности задачи Лагранжа (по этому вопросу полезно почитать [5] и [13]); ii) свойства приводимости задачи Лагранжа к гамильтонову виду (здесь могут принести пользу [13] и [40]) и, самое важное, iii) точного утверждения о том, когда классический метод множителей Лагранжа дает локальный минимум функционала с ограничениями (и, далее, каковы должны быть точные граничные условия на сравниваемые кривые). Здесь, на наш взгляд, весьма полезны [4], [5], [13] и [40] (конечно, есть и другие заслуживающие внимания руководства). В разд. е гл. IV мы обсудим кратко эти вопросы. Сеем думать, что, несколько модифицировав методы, развитые в разд. а — d гл. IV, можно внести ясность в указанные выше пункты i) — iii).

II

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА — ЛАГРАНЖА. ТЕОРЕМА НЁТЕР И ПРИМЕРЫ

а. Первые интегралы и теорема Нётер. Некоторые классические примеры

Рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \Phi)$, определяемую функционалом

$$(II.a.1) \quad \Phi(N) = \int_N \Phi,$$

где $N \in \mathcal{Y}(I, \omega)$ — интегральное многообразие дифференциальной системы (I, ω) на многообразии X . С функционалом (II.a.1) ассоциирована система Эйлера—Лагранжа (J, ω) , являющаяся пфафовой системой на пространстве импульсов Y (см. построение системы (J, ω) в разд. е гл. I).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Первый интеграл* вариационной задачи $(I, \omega; \Phi)$ задается функцией V , определенной на пространстве импульсов Y и постоянной на интегральных многообразиях системы (J, ω) .

З а м е ч а н и я. Условие постоянства функции V на интегральных кривых системы (J, ω) эквивалентно тому, что

$$(II.a.2) \quad dV \equiv 0 \bmod J.$$

На практике V будет ограничением на многообразии Y функции (обозначаемой также через V), определенной на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^s$, и условие (II.a.2) можно проверить, показав, что

$$(II.a.3) \quad dV \equiv 0 \bmod \mathcal{C}(\Psi)$$

на Z .

В классической теории первые интегралы появились как *сохраняемые* при движении механических систем *величины*; соответственно основную роль играет пример (I.d.15), в котором лагранжиан

$$L = L(y, \dot{y})$$

не зависит от x (если придерживаться традиционных обозначений, то x следовало бы заменить временным параметром t). Как вытекает из уравнений (I.d.17) (и будет проверено ниже, см. пример (II.a.12)), гамильтониан

$$H = \dot{y}^\alpha L_{y^\alpha} - L$$

является первым интегралом. Этот и ряд других примеров мы обсудим позднее. Пока же дадим еще одно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(I, \omega; \Phi)$ — невырожденная вариационная задача с пространством импульсов Y , размерность которого равна $2m + 1$. Модифицированная скобка Пуассона $[U, V]$ двух функций U, V , определенных на многообразии Y , — это функция на Y , задаваемая равенством

$$(II.a.4) \quad [U, V]_{\Psi_Y} \wedge (\Psi_Y)^m = m dU \wedge dV \wedge \Psi_Y \wedge (\Psi_Y)^{m-1}.$$

З а м е ч а н и е. Мы говорим «модифицированная», чтобы отличить эту операцию от обычной скобки Пуассона $\{U, V\}$, которая будет обсуждаться ниже. В классическом случае эти две операции тесно связаны между собой ¹⁾.

Следующее наблюдение объясняет важность понятия модифицированной скобки Пуассона:

(II.a.5) Если функции U, V суть первые интегралы задачи $(I, \omega; \Phi)$, то и их модифицированная скобка Пуассона $[U, V]$ является первым интегралом.

Доказательство. Пусть v — единственное векторное поле на Y , удовлетворяющее условиям

$$(II.a.6) \quad v \lrcorner \Psi_Y = 0, \\ v \lrcorner \psi_Y = 1.$$

Интегральные многообразия системы (J, ω) локально являются просто интегральными кривыми поля v , и функция U тогда и только тогда представляет собой первый интеграл, когда

$$(II.a.7) \quad \mathcal{L}_v(U) = 0.$$

Из (II.a.6) и формулы А. Картана (0.a.1) следует, что

$$(II.a.8) \quad \mathcal{L}_v(\Psi_Y) = 0, \\ \mathcal{L}_v(\psi_Y) = 0.$$

¹⁾ Согласно подстрочному примечанию к определению невырожденной вариационной задачи (перед равенством (I.e.14)), мы можем рассматривать первые интегралы как функции на $\mathcal{Y}(J, \omega)$. Если задача $(I, \omega; \Phi)$ невырожденна, то, как было отмечено, $\mathcal{Y}(J, \omega)$ является симплектическим многообразием. В этом случае определена обычная скобка Пуассона функций на $\mathcal{Y}(J, \omega)$ (см. ниже), и она совпадает с нашей модифицированной скобкой Пуассона.

Так как $\mathcal{L}_v(dU) = d\mathcal{L}_v(U)$, то если U и V — первые интегралы, то, в силу (II.a.4), (II.a.7) и (II.a.8),

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_v([U, V] \psi_Y \wedge (\Psi_Y)^m) \\ &= (\mathcal{L}_v[U, V]) \psi_Y \wedge (\Psi_Y)^m, \end{aligned}$$

откуда $\mathcal{L}_v[U, V] = 0$. $\square$

Главным источником первых интегралов служат группы симметрий вариационных задач. Чтобы объяснить это, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Инфинитезимальная симметрия* вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$ задается векторным полем v на многообразии X , удовлетворяющим условиям

$$\begin{aligned} \text{(II.a.9)} \quad \mathcal{L}_v(I) &\subset I, \\ \mathcal{L}_v(\varphi) &\equiv 0 \bmod I. \end{aligned}$$

Эти условия эквивалентны тому, что

$$\begin{aligned} \exp(tv)^* I &= I, \\ \exp(tv)^* \varphi &\equiv \varphi \bmod I. \end{aligned}$$

Так как условие независимости — это условие трансверсальности, оно не появляется в определении инфинитезимальной симметрии.

Теперь опишем, как поле v индуцирует векторное поле, которое мы временно обозначим через $\tilde{v}$, на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^s$. Тонкость состоит в том, что $\tilde{v}$ — это вовсе не векторное поле, индуцированное структурой прямого произведения. Чтобы стало понятным, каким должно быть поле $\tilde{v}$, напомним, что с *инвариантной точки зрения* (см. замечание (I.e.8))

$$Z = W^* \subset T^*(X)$$

и что

$$\psi = \pi^* \varphi + \theta,$$

где θ — каноническая 1-форма на $T^*(X)$, а $\pi : W^* \rightarrow X$ — проекция. Группа $\exp(tv)^*$ действует на $T^*(X)$ как однопараметрическая группа *сохраняющих слои преобразований*, и каноническая 1-форма на $T^*(X)$, очевидно, инвариантна относительно этого действия. Далее, благодаря первому из условий (II.a.9), относительно действия группы $\exp(tv)^*$ инвариантно также подрасслоение $W^* \subset T^*(X)$. Полагая $Z = W^*$, получаем, что однопараметрическая группа

$$\exp(tv)^* : Z \rightarrow Z$$

индуцирует требуемое векторное поле $\tilde{v}$. Основным результатом теории является

(II.a.10) **Теорема Нётер** [55]. Для всякой инфинитезимальной симметрии v задачи $(I, \omega; \varphi)$ функция

$$V = \tilde{v} \lrcorner \psi$$

является первым интегралом этой вариационной задачи.

Доказательство. Так как $\exp(t\tilde{v})^*\theta = \theta$ и $\exp(tv)^*\varphi \equiv \varphi \bmod I$, то из того, что $\exp(t\tilde{v})^*$ есть однопараметрическая группа сохраняющих слои преобразований, накрывающая однопараметрическую группу $\exp(-tv)$ на X , следует, что

$$\exp(t\tilde{v})^*\psi \equiv \psi \bmod \pi^*I,$$

где $\pi: Z \rightarrow X$ — проекция. Таким образом,

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}(\psi) \in \pi^*I.$$

По формуле А. Картана (0.a.1)

$$dV = d(\tilde{v} \lrcorner \psi) = \mathcal{L}_{\tilde{v}}(\psi) - \tilde{v} \lrcorner \Psi,$$

где $\Psi = d\psi$. По самому определению системы Картана

$$\tilde{v} \lrcorner \Psi \in \mathcal{C}(\Psi).$$

С другой стороны, поскольку

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \pi^*\theta^\alpha$$

(см. доказательство теоремы (I.e.9), то

$$\pi^*I \subset \mathcal{C}(\Psi).$$

Объединяя эти результаты, получаем

$$dV \in \mathcal{C}(\Psi),$$

что совпадает с условием (II.a.3). $\square$

З а м е ч а н и е. В координатной записи, если

$$\mathcal{L}_v\theta^\alpha = A_\beta^\alpha\theta^\beta,$$

то в прямом произведении $Z = X \times \mathbb{R}^s$

$$\mathcal{L}_{\tilde{v}}\lambda_\alpha = A_\alpha^\beta\lambda_\beta.$$

Так как $\psi = \varphi + \lambda_\alpha\theta^\alpha$, то

$$\tilde{v} \lrcorner \psi = -v \lrcorner \psi,$$

где справа стоит векторное поле v на $X \times \mathbb{R}^s$, индуцированное полем v на X в структуре прямого произведения. Поэтому, хотя это и не совсем корректно, при проведении вычислений мы будем записывать первый интеграл, о котором идет речь в теореме Нётер, просто в виде

$$(II.a.11) \quad V = v \lrcorner \psi.$$

Ввиду важности этого результата дадим еще одно его доказательство «внизу на X ». Оно не так изящно, но, возможно, более прозрачно, чем приведенное выше (по существу, конечно, оба доказательства одинаковы).

Второе доказательство. Полагая $\theta = \lambda_\alpha \theta^\alpha$, по формуле А. Картана имеем

$$d(v \lrcorner (\varphi + \theta)) + (v \lrcorner d(\varphi + \theta)) = \mathcal{L}_v(\varphi + \theta).$$

Ввиду условий (II.a.9)

$$\mathcal{L}_v(\varphi + \theta) \equiv 0 \bmod I.$$

С другой стороны, из уравнений Эйлера—Лагранжа (I.d.14) вытекает, что

$$v \lrcorner d(\varphi + \theta) \equiv 0 \bmod N.$$

Сопоставляя последние два соотношения с формулой А. Картана, получаем

$$dV = -v \lrcorner d(\varphi + \theta) + \mathcal{L}_v(\varphi + \theta) \equiv 0 \bmod N$$

для любого интегрального многообразия N системы (I, ω) , удовлетворяющего уравнениям Эйлера—Лагранжа. $\square$

(II.a.12) ПРИМЕР. Рассмотрим классическую вариационную задачу (I.d.15) (см. пример I.d.15)), заданную на пространстве $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ условиями

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0,$$

$$\varphi = L(x, y, \dot{y}) dx.$$

В соответствии с конструкцией разд. е гл. I рассмотрим на многообразии $Z = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ 1-форму

$$\psi = L dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha.$$

Чтобы привести форму ψ к нормальной форме Пфаффа—Дарбу (0.d.9), перепишем ее в виде

$$\psi = -H dx + \lambda_\alpha dy^\alpha,$$

где

$$H = -L + \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha.$$

Это подводит нас к знаменитому (но в нашем изложении весьма запоздалому) понятию:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Гамильтонианом*, ассоциированным с классической вариационной задачей, называется ограничение на про-

пространство импульсов $Y \subset Z$ функции

$$H = -L + \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha.$$

З а м е ч а н и е. Если вариационная задача невырождена, то многообразие $Y = Z_1$ определяется соотношениями

$$\lambda_\alpha = L_{\dot{y}^\alpha}.$$

В общем случае Y содержится в этом множестве, поэтому гамильтониан иногда записывают в виде

$$H = -L + \dot{y}^\alpha L_{\dot{y}^\alpha}.$$

Тонкость здесь состоит в том, что гамильтониан определен всегда, даже если вариационная задача вырождена (в том смысле, что $\det \|L_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\| \equiv 0$). С этой тонкостью связано и то, что в нашей формулировке не фигурирует требование глобальной взаимной однозначности преобразования Лежандра $\lambda_\alpha = L_{\dot{y}^\alpha}$. Это требование, похоже, просто создает излишние удобства в классическом случае.

Предположим теперь, что

$$v = A \partial/\partial x + B^\alpha \partial/\partial \dot{y}^\alpha + C^\alpha \partial/\partial \dot{\theta}^\alpha$$

— инфинитезимальная симметрия указанной выше вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$. Тогда теорема Нётер дает первый интеграл (см. (II.a.11))

$$\begin{aligned} V &= v \rfloor (L dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha) \\ &= A (L - \dot{y}^\alpha \lambda_\alpha) + B^\alpha \lambda_\alpha \\ &= -AH + B^\alpha L_{\dot{y}^\alpha}, \end{aligned}$$

где H — гамильтониан.

Допустим, к примеру, что лагранжиан $L(y, \dot{y})$ не зависит от x . Тогда векторное поле

$$v = \partial/\partial x$$

определяет инфинитезимальную симметрию задачи $(I, \omega; \varphi)$ (это утверждение обычно формулируют так: вариационная задача допускает *сдвиг по времени*). Действительно, непосредственно проверяется, что

$$\mathcal{L}_v(\theta^\alpha) = 0, \quad \mathcal{L}_v(\varphi) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Если, как это обычно делается, рассматривать в $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ корепер $\{\omega = dx; \theta^\alpha; d\dot{y}^\alpha\}$, то сдвиг по времени задается векторным полем $v = \partial/\partial \omega - \dot{y}^\alpha \partial/\partial \theta^\alpha$.] По теореме Нётер,

гамильтониан H является первым интегралом (заметим, что H также не зависит от x).

Легко видеть, что для механических систем (I.a.7) гамильтониан имеет вид

$$H = T(y, \dot{y}) + U(y),$$

и теорема Нётер сводится к закону сохранения полной энергии (см. замечание i) в пункте (I.e.22)).

Многочисленные примеры первых интегралов для классических механических систем читатель может найти в целом ряде превосходных руководств, скажем в [1], [2], [29]. Нам остается добавить к этому разве лишь то, что в некоторых задачах [специальные интегралы кеплерова движения, ньютоново движение с двумя центральными силами, каждая из которых обратно пропорциональна квадрату расстояния, системы Ковалевской, геодезические на трехосном эллипсоиде и др.; см. [2], [66] и (добавлено при корректуре) статью Ю. Мозера в сборнике *Dynamical Systems, Progress in Math.*, по 8, Birkhauser, 1980] существуют первые интегралы, которые нельзя отнести на счет симметрий, по крайней мере очевидным образом.

Завершая обсуждение частных случаев, мы хотели бы указать еще один простой источник первых интегралов; мы воспользуемся им в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что лагранжиан в классической вариационной задаче не зависит от переменной y^α (т. е. $L_{y^\alpha} = 0$). Тогда мы называем y^α *циклической координатой*.

В этом случае векторное поле

$$v = \partial/\partial y^\alpha$$

задает инфинитезимальную симметрию соответствующей классической вариационной задачи с первым интегралом

$$L_{y^\alpha} = \lambda_\alpha.$$

На самом деле здесь можно обойтись и без теоремы Нётер — это ясно из классического вида уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\frac{d}{dx}(L_{\dot{y}^\alpha}) = L_{y^\alpha}.$$

(II.a.13) ПРИМЕР. В $\mathbb{R}^3$ с цилиндрическими координатами (r, φ, z) длина дуги на поверхности вращения, определяемой уравнением

$$z = f(r),$$

задается формулой

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + f'(r)^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\ &= F(r) dr^2 + r^2 d\varphi^2, \end{aligned}$$

где $F(r)$ определяется из второго уравнения (здесь мы предполагаем для простоты, что эта поверхность не является частью цилиндра). Лагранжиан соответствующей механической системы с потенциальной энергией $U = 0$ равен

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} (F(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

и φ является циклической координатой. Таким образом, функция (II.a.14) $\lambda_2 = L_\varphi = r^2 \dot{\varphi}$

определяет первый интеграл, соответствующий моменту количества движения относительно вертикальной оси (см. [2], [29]).

(II.a.15) ПРИМЕР. Рассмотрим классическую вариационную задачу второго порядка (см. пример (I.a.13)), где на многообразии $X = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ заданы координаты $(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$ и один из следующих лагранжианов¹⁾:

$$(II.a.16) \quad L = \frac{1}{2} (\ddot{y}^2 - \dot{y}^2),$$

$$(II.a.17) \quad L = \frac{1}{2} (\ddot{y}^2 - y^2).$$

Оба они задают невырожденные вариационные задачи на пяти-мерном пространстве импульсов (см. (I.e.25)).

З а м е ч а н и я. i) В общем случае если $L = L(x, y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)$ — лагранжиан второго порядка, не зависящий от x , то, полагая $v = \partial/\partial x$, мы находим первый интеграл

$$(II.a.18) \quad H = \ddot{y}^\alpha \dot{\lambda}_\alpha + \dot{y}^\alpha \lambda_\alpha - L.$$

Заметим, что здесь функция H определена на пространстве момен-сов Y , а не на многообразии X (и даже не на каком-либо импульт-образии той же размерности, что и X).

¹⁾ Оба они — довольно искусственные примеры лагранжианов высших порядков. Мы включили их только затем, чтобы проиллюстрировать некоторые явления, наблюдаемые для классических вариационных задач произвольного порядка. А именно, здесь всегда в нашем распоряжении функция Гамильтона (II.a.18) (определенная «наверху») и понятие циклической координаты. Кроме того, на этих примерах выявляется, что наше определение первого интеграла, пожалуй, слишком ограничительно.

Гораздо более важный и естественный пример вариационной задачи второго порядка приведен в примере (II.a.50).

ii) В общем случае если одна из переменных y^α , скажем y^1 , не появляется в $L(x; y^\alpha, \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)$ (как и в случае задачи первого порядка, мы говорим тогда, что координата y^1 *циклическая*), поле $\partial/\partial y^1$ по-прежнему определяет инфинитезимальную симметрию соответствующей вариационной задачи с первым интегралом

$$(II.a.19) \quad V = \lambda_1.$$

Если лагранжиан L не зависит от переменной x или y^1 , то это справедливо и для функции H , задаваемой равенством (II.a.18). Отсюда легко вывести, что модифицированная скобка Пуассона $[H, V]$, где функция V задается равенством (II.a.19), равна нулю:

$$(II.a.20) \quad [H, V] = 0.$$

Доказательство. На пространстве импульсов

$$\psi_Y = -H dx + \lambda_\alpha dy^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha d\dot{y}^\alpha,$$

$$\Psi_Y = -dH \wedge dx + d\lambda_\alpha \wedge dy^\alpha + d\dot{\lambda}_\alpha \wedge d\dot{y}^\alpha.$$

Если положить

$$\Theta = -(2m-1)! d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge d\lambda_m \wedge dy^m \wedge \\ \wedge d\dot{\lambda}_1 \wedge d\dot{y}^1 \wedge \dots \wedge d\dot{\lambda}_m \wedge d\dot{y}^m,$$

то в силу свойств внешнего умножения

$$dH \wedge d\lambda_1 \wedge \psi_Y \wedge (\Psi_Y)^{m-1} = dH \wedge \psi_Y \wedge \Theta \\ = (H_x dx + H_{y^1} dy^1) \wedge \psi_Y \wedge \Theta = 0,$$

откуда и следует (II.a.20). $\square$

Вернемся к лагранжиану (II.a.16). Дифференциальная система Эйлера—Лагранжа имеет для него следующий вид (см. вычисления сразу после (I.e.26)):

$$d\dot{\lambda} + (\lambda + \dot{y}) dx = 0,$$

$$d\lambda = 0 \text{ (так как } L_y = 0),$$

$$dy - \dot{y} dx = 0,$$

$$d\dot{y} - \dot{\lambda} dx = 0$$

на пространстве переменных $(x, y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$. Предыдущие замечания дают два первых интеграла

$$(II.a.21) \quad H = \frac{1}{2}(\dot{\lambda}^2 + \dot{y}^2) + \dot{y}\lambda,$$

$$\lambda$$

(мы воспользовались тем, что $\ddot{y} = \dot{\lambda}$ на Y). Конечно, здесь, как и в любой задаче «с постоянными коэффициентами», уравнения Эйлера—Лагранжа можно явно проинтегрировать; общее решение имеет вид

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x.$$

Таким образом, в дополнение к интегралам (II.a.21) мы получаем величины вроде

$$(II.a.22) \quad \ddot{y}^2 + \dot{\lambda}^2 \quad (\dot{\lambda} = \ddot{y}),$$

которые не являются функциями на Y , но сохраняются при движении и потому являются первыми интегралами в некотором более широком смысле.

Что касается функционала (II.a.17), то для него дифференциальная система Эйлера—Лагранжа имеет вид (см. систему, следующую за равенствами (I.e.26))

$$d\dot{\lambda} + \lambda dx = 0,$$

$$d\lambda - y dx = 0,$$

$$dy - \dot{y} dx = 0,$$

$$d\dot{y} - \dot{\lambda} dx = 0$$

(в пространстве переменных $(x, y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$). Она эквивалентна обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4 \lambda}{dx^4} + \lambda = 0.$$

(II.a.23) ПРИМЕР. Предположим, что классическая система первого порядка задана лагранжианом L , однородным порядка μ по «скоростным» переменным и не зависящим от x . В локальных координатах $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ на многообразии $J^1(\mathbb{R}, M)$

$$L = L(y^\alpha; \dot{y}^\alpha),$$

$$L(y^\alpha; \eta \dot{y}^\alpha) = \eta^\mu L(y^\alpha; \dot{y}^\alpha).$$

Поэтому, в силу примера (II.a.12) и тождества Эйлера для однородных функций¹⁾, функция

$$H = \dot{y}^\alpha L_{\dot{y}^\alpha} - L = (\mu - 1) L$$

¹⁾ Напомним тождество Эйлера:

$$\dot{y}^\alpha L_{\dot{y}^\alpha} = \mu L.$$

Для доказательства надо продифференцировать равенство $L(y^\alpha, \eta \dot{y}^\alpha) = \eta^\mu L(y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ по η , а затем положить η равным 1.

является первым интегралом. Следовательно, если $\mu \neq 1$, то лагранжиан L постоянен на кривых, являющихся решениями уравнений Эйлера—Лагранжа для L .

В частности, предположим, что квадратичный лагранжиан (для удобства вычислений мы опускаем стандартный множитель $1/2$)

$$(II.a.24) \quad L = g_{\alpha\beta}(y) \dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta$$

задает риманову метрику ds^2 на многообразии M . Положим

$$\tilde{L} = \sqrt{L},$$

так что равенство

$$\tilde{\Phi}(\gamma) = \int_{\gamma} \tilde{L} ds$$

определяет функционал длины. Вдоль кривой, являющейся решением уравнений Эйлера—Лагранжа для лагранжиана L , имеем (см. (I.d.17))

$$\frac{d}{dx} (L_{\dot{y}^\alpha}) = L_{y^\alpha},$$

$$\frac{d}{dx} (L) = 0.$$

Поэтому вдоль таких кривых

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\tilde{L}_{\dot{y}^\alpha}) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (L^{-1/2} L_{\dot{y}^\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} L^{-1/2} \frac{d}{dx} (L_{\dot{y}^\alpha}) = \frac{1}{2} L^{-1/2} (L_{y^\alpha}) = \tilde{L}_{y^\alpha}, \end{aligned}$$

а это просто уравнения Эйлера—Лагранжа для лагранжиана $\tilde{L}$. Итак:

Решения уравнений Эйлера—Лагранжа для лагранжиана (II.a.24) определяют геодезические соответствующей римановой метрики ¹⁾.

Применяя этот результат к примеру (II.a.13), получаем в качестве частного случая следующую теорему:

¹⁾ Это не что иное, как частный случай знаменитого принципа Мопертью, который прекрасно объяснен в [13, с. 257—259].

Теорема Клеро. Для угла α , образуемого геодезической и меридианом на поверхности вращения, выполняется равенство

$$r \sin \alpha = \text{const.}$$

Доказательство. Имеем $r\dot{\phi} = \|v\| \sin \alpha$, где v — касательный вектор к геодезической γ . При параметризации кривой γ длиной дуги первый интеграл (II.a.14) дает

$$r^2\dot{\phi} = r \sin \alpha = \text{const}$$

вдоль γ . $\square$

З а м е ч а н и е. Превосходное обсуждение этого примера содержится в [2, с. 74—75].

Мы хотим теперь привести в разумной степени точную формулировку классического понятия «алгебраической интегрируемости в квадратурах» обыкновенного дифференциального уравнения (или динамической системы) ¹⁾. Прежде всего, скажем, что *вариационная задача* $(I, \omega; \varphi)$ является алгебраической, если X — гладкое (вещественное) алгебраическое многообразие, а I , ω и φ задаются гладкими рациональными формами ²⁾. Это как раз тот случай, с которым мы встречались во всех примерах. Из конструкции дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа (I, ω) на пространстве импульсов Y ясно (см. разд. е гл. I), что если вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ — алгебраическая, то Y является алгебраическим многообразием, а система (J, ω) — алгебраической дифференциальной системой ³⁾. Под *алгебраическим первым интегралом* мы будем понимать первый интеграл V , представляющий собой алгебраическую функцию на Y (это означает, что функция V должна лежать в конечном алгебраическом расширении поля рациональных функций на Y , как, например, функция $\sqrt{1+t^2}$ на $\mathbb{R}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с алгебраической вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$, алгебраически интегрируемы в квадратурах, если суще-

¹⁾ Мы не считаем эту формулировку вполне адекватной, так как она не охватывает, например, «первый интеграл» (II.a.22) из примера (II.a.16). Адекватная формулировка должна, по-видимому, использовать дифференциальную алгебру (см. [48]).

²⁾ Мы будем использовать некоторые элементарные понятия (классической) алгебраической геометрии. Так, нам понадобятся термины: *вещественное алгебраическое многообразие*; *рациональная функция*; *рациональная дифференциальная форма*; *алгебраическая функция*; *открытое по Зарисскому множество*. За их определениями отсылаем к [59].

³⁾ Это означает, что система (J, ω) задается рациональными регулярными (т. е. без полюсов или неопределенностей) данными.

ствуют алгебраические первые интегралы V_j , такие что для общего набора постоянных C_j уравнения

$$V_j = C_j$$

определяют интегральную кривую системы (J, ω) .

(II.a.25) ПРИМЕР. Очевидным классическим примером служит консервативная механическая система с одной степенью свободы; эта система определена на открытом по Зарисскому подмножестве $X \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ уравнениями Эйлера—Лагранжа, ассоциированными с лагранжианом

$$(II.a.26) \quad L = \frac{\dot{y}^2}{2} - U(y),$$

где $U(y)$ — рациональная функция от y . [З а м е ч а н и е. Мы допускаем в качестве X открытое по Зарисскому подмножество, чтобы охватить такие интересные потенциальные функции, как $U(y) = k/y$.] Гамильтониан

$$(II.a.27) \quad H = \frac{\lambda^2}{2} + U(y) \quad (\lambda = \dot{y})$$

является алгебраическим первым интегралом на пространстве импульсов. Каждое решение $y(x)$ уравнений Эйлера—Лагранжа

$$(II.a.28) \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + U'(y(x)) = 0,$$

ассоциированных с лагранжианом (II.a.26), выделяет в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$ с координатами $(y, \dot{y})$ кривую $(y(x), dy(x)/dx)$, и эти фазовые кривые являются просто линиями уровня

$$H(y, \dot{y}) = C,$$

где H задается равенством (II.a.27).¹⁾

З а м е ч а н и я. i) Любое обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$(II.a.29) \quad \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + u(y(x)) = 0$$

можно получить как уравнение Эйлера—Лагранжа, ассоциированное с лагранжианом (II.a.26), где

$$U(y) = \int_{y_0}^y u(t) dt.$$

¹⁾ Мы уже сталкивались с одним интересным примером такого рода; см. (I.d.37).

Таким образом, если функция $U(y)$ рациональна, то уравнение (II.a.29) алгебраически интегрируемо в квадратурах.

ii) Мы также можем взять в качестве L лагранжиан

$$L = \frac{g(y) \dot{y}^2}{2} - U(y),$$

где $g(y)$ — рациональная функция, положительная в общей точке $y \in \mathbb{R}$. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{g(y) \lambda^2}{2} + U(y),$$

и уравнения Эйлера—Лагранжа вновь алгебраически интегрируемы в квадратурах.

Все получаемые таким образом алгебраические кривые имеют вид

$$(II.a.30) \quad \dot{y}^2 = R(y),$$

где $R(y)$ — рациональная функция переменной y , т. е. они всегда являются *гиперэллиптическими кривыми* (см. [36], [59]).

По ясным из наших примеров причинам мы хотим ввести другое понятие интегрируемости в квадратурах. Пусть G — группа Ли, $\omega^i \in \mathfrak{g}^*$ — базис форм Маурера—Картана. Тогда в силу утверждений (I.b.7) и (I.b.9) всякая кривая

$$f: N \rightarrow G, \quad N = \{t: a \leq t \leq b\},$$

однозначно с точностью до левых сдвигов задается функциями $q^i(t)$, такими что (см. (I.b.8))

$$f^* \omega^i = q^i(t) dt.$$

Далее, функции $q^i(t)$ можно выбирать произвольно. В инвариантных терминах, отображение $q(t) = \{q^i(t)\}$ задает кривую в $\mathfrak{g}$; поэтому мы можем говорить, что кривая f *однозначно определяется кривой $q(t)$, если задать набор постоянных $f(0) \in G$ в количестве $\dim G$ штук.*

Пусть теперь вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ может быть поставлена на группе G с помощью левоинвариантных 1-форм. Кривые, задающие решения соответствующих уравнений Эйлера—Лагранжа, будут при этом кривыми в G , однозначно определяемыми соответствующей кривой $q(t)$ в $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что задача $(I, \omega; \varphi)$ *квазиинтегрируема в квадратурах*, если существуют функции $H^p(q)$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, такие что для общего набора постоянных c^p уравнения

$$H^p(q) = c^p$$

определяют кривую в g , причем эти кривые суть в точности кривые, соответствующие решениям уравнений Эйлера—Лагранжа для задачи $(I, \omega; \varphi)$.¹⁾

(II.a.31) ПРИМЕР. Пусть M — односвязное n -мерное полное риманово многообразие постоянной кривизны R (т. е. M представляет собой евклидово пространство E^n , если $R = 0$, сферу $S^n(1/R)$ радиуса $1/R$, если $R > 0$, или гиперболическое пространство $H^n(1/R)$, если $R < 0$). Всякой кривой $\gamma \subset M$, параметризованной длиной дуги, с функцией кривизны $\kappa(s)$ сопоставим значение функционала

$$(II.a.32) \quad \Phi = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2 ds.$$

Как мы увидим позднее, с этим функционалом можно естественным образом связать инвариантную вариационную задачу на группе Ли $\text{Aut}(M)$ изометрий многообразия M . Мы докажем в этой книге следующую теорему:

(II.a.33) ТЕОРЕМА. Уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с функционалом (II.a.32), квазиинтегрируемы в квадратурах.

¹⁾ Используя приведенную ниже теорему (III.a.25), можно объяснить эту терминологию следующим образом. Пусть кривая

$$g: [a, b] \rightarrow G, \quad t \mapsto g(t) \in G$$

задает решение уравнений Эйлера—Лагранжа. Положим

$$g^* \omega^i = q^i(t),$$

где $q(t) = \{q^i(t)\}$ — кривая в алгебре Ли. Определим кривую $\lambda(t) = \{\lambda_i(t)\}$ в двойственной алгебре Ли равенствами

$$\lambda_i(t) = L_{q^i}(q(t)),$$

где форма $\varphi = L(q) dt$ определяет инвариантный функционал на G . Тогда, как выяснилось в процессе обсуждения этого вопроса с Робертом Брайентом, третье уравнение (III.a.26) означает, что

$$\text{Ad}^* g(t) \lambda(t) = \lambda_0$$

— постоянный вектор в g^* . Пусть $H_{\lambda_0} \subset G$ — стабилизатор вектора λ_0 при присоединенном представлении. Тогда уравнение (*) означает, что кривая $\lambda(t)$ однозначно определяет $g(t)$ с точностью до кривой в H_{λ_0} .

Во многих важных случаях G оказывается компактной редуктивной группой, а λ_0 — регулярным элементом. Тогда H_{λ_0} является компактным тором $\mathbb{R}^{m-1}/\mathbb{Z}^{m-1}$, и если уравнения Эйлера—Лагранжа квазиинтегрируемы в квадратурах, то $\lambda(t)$ пробегает замкнутую кривую в g^* . Отсюда следует, что кривая $g(t)$ лежит на многообразии, диффеоморфном тору $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$, и, кроме того, похоже на то, что кривая $\{g(t)\}$ в $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ является проекцией прямой (во многих примерах). Это и объясняет нашу терминологию.

На самом деле выяснится гораздо больше, в частности мы получим полный «фазовый портрет» в g^* кривых $\{\lambda(t)\}$, соответствующих экстремалиям функционала (II.a.32). Из наших бесед с Робертом Брайентом выяснилось, что это движение в группе $\text{Aut}(M)$ задается *линейным* потоком на цилиндре $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ или на двумерном торе $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; такие кривые хорошо поняты и дают особенно красивую картину в случае тора (см. [2]). Полное доказательство теоремы (II.a.33) мы приведем лишь для случая $R \geq 0$, так как случай $R < 0$ формально не отличается от случая $R > 0$.

Чтобы увязать нашу терминологию со стандартной, обсудим еще одно понятие интегрируемости дифференциальных систем Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$. Для этого примем следующие

(II.a.34) ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. Вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ невырожденна, и нормальная форма Пфаффа—Дарбу (I.e.15) определена глобально на Y .

Точнее говоря, существуют диффеоморфизм

$$Y \cong \mathbb{R} \times P, \quad \dim P = 2m$$

(на $\mathbb{R}$ задана координата x) и 1-форма η на многообразии P , такие что 2-форма

$$d\eta = \Omega$$

имеет максимальный ранг на P и

$$\psi_Y = -H dx + \eta$$

для некоторой функции H на $\mathbb{R} \times P$. В частности, пара (P, Ω) определяет *симплектическую структуру*¹⁾ на P . У всякой точки многообразия P существует такая окрестность с координатами (u_i, v^i) , что

$$(II.a.35) \quad \begin{aligned} \eta &= u_i dv^i, \\ \Omega &= du_i \wedge dv^i \end{aligned}$$

(доказательство см. в [11], [64]). Этим условиям удовлетворяет, например, классическая вариационная задача произвольного порядка, невырожденная в смысле примеров (I.e.18) и (I.e.23).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с задачей $(I, \omega; \varphi)$, имеют (глобально) *гамильтонову форму*, если выполняются предположения (II.a.34) и функция $\dot{H} = H(u, v)$ не зависит от x .

¹⁾ Симплектическая структура на многообразии P задается замкнутой 2-формой Ω , такой что форма объема Ω^m нигде на P^m не обращается в нуль. Симплектические структуры обсуждаются, например, в [1] и [2].

Для функций U, V на симплектическом многообразии (P, Ω) (обычная) скобка Пуассона $\{U, V\}$ определяется равенством

$$(II.a.36) \quad \{U, V\} \Omega^m = m dU \wedge dV \wedge \Omega^{m-1}.$$

В локальных координатах, в которых выполняются равенства (II.a.35), скобка Пуассона задается формулой

$$(II.a.37) \quad \{U, V\} = \frac{\partial U}{\partial u_i} \frac{\partial V}{\partial v^i} - \frac{\partial U}{\partial v^i} \frac{\partial V}{\partial u_i}.$$

Говорят, что функции U, V находятся в *инволюции*, если $\{U, V\} = 0$.

З а м е ч а н и е. Мы можем рассматривать функции U, V и как функции на многообразии $Y = \mathbb{R} \times P$, и тогда их модифицированная скобка Пуассона определяется равенством (II.a.4). Каковы связи между скобками $[U, V]$ и $\{U, V\}$ (помимо свойства, что если U и V — первые интегралы, то первым интегралом будет и каждая из этих скобок), непосредственно не ясно. См., однако, подстрочное примечание к замечанию после формулы (II.a.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $(I, \omega; \varphi)$ — вариационная задача, дифференциальная система Эйлера—Лагранжа которой имеет гамильтонову форму. Эта система называется *вполне интегрируемой*, если существуют функции $H = V_1, V_2, \dots, V_m$ на многообразии P , такие что $dV_1 \wedge \dots \wedge dV_m \neq 0$ и все V_i, V_j находятся в инволюции, т. е. при всех i, j

$$\{V_i, V_j\} = 0.$$

Вполне интегрируемые гамильтоновы системы обсуждаются во многих руководствах, например в [2]. Недавно обнаружилось много интересных конечно- и бесконечномерных примеров вполне интегрируемых гамильтоновых систем (см. приложения к [2]).

Хорошо известно, что в классических вариационных задачах первого порядка наличие циклической координаты можно использовать для перехода от $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ к $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m-1})$. Кроме того, если $m = 2$ и лагранжиан $L = L(y, \dot{y})$ не зависит от x , то наличие циклической координаты влечет полную интегрируемость уравнений Эйлера—Лагранжа (см. [2, с. 60]).

(II.a.38) ПРИМЕР. Рассмотрим вновь поверхность вращения в $\mathbb{R}^3$; лагранжиан задается индуцированной метрикой (с коэффициентом $1/2$). В обозначениях примера (II.a.13)

$$(II.a.39) \quad L = \frac{1}{2} (F(r) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2).$$

Два первых интеграла имеют вид

$$V_1 = H (=L \text{ в данном случае}),$$

$$V_2 = r^2 \dot{\phi},$$

и из формул (II.а.37) следует, что они находятся в инволюции.

Доказательство. В пространстве импульсов $Y = \mathbb{R} \times P$ есть координаты $(x, r, \lambda_1, \phi, \lambda_2)$, для которых

$$\lambda_1 = L_{\dot{r}} = F(r) \dot{r},$$

$$\lambda_2 = L_{\dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi}.$$

Отсюда следует, что на P можно ввести координаты $(r, \lambda_1, \phi, \lambda_2)$ и симплектическую форму

$$\Omega = dr \wedge d\lambda_1 + d\phi \wedge d\lambda_2,$$

и в этих координатах на P

$$\dot{r} = \lambda_1 / F(r), \quad \dot{\phi} = \lambda_2 / r^2,$$

$$V_1 = 1/2 (\lambda_1^2 / F(r) + \lambda_2^2 / r^2),$$

$$V_2 = \lambda_2.$$

Поэтому инволютивность интегралов V_1 и V_2 следует из формул (II.а.37) и того, что $\partial V_1 / \partial \phi = 0$. $\square$

(II.а.40) ПРИМЕР. Классический и выявляющий существо дела пример вполне интегрируемой системы доставляет колесо единич-

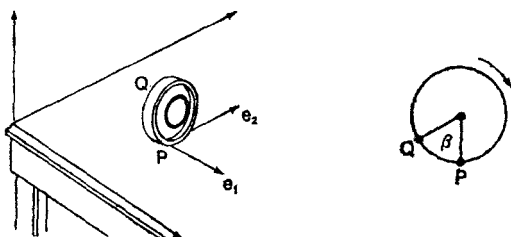


Рис. 16.

ного радиуса, катящееся без проскальзывания по плоскости (рис. 16). Это также классический пример механической системы с неголономными ограничениями.

Чтобы поставить задачу, возьмем в качестве конфигурационного многообразия точки Q многообразие

$$M = \mathcal{F}(\mathbb{E}^2) \times S^1.$$

Такое представление имеет следующий смысл: каждому положению точки Q мы ставим в соответствие репер (P, e_1, e_2) , где P — точка касания колеса с плоскостью (чтобы избежать путаницы

в обозначениях, мы будем в этом примере обозначать радиус-вектор через P , а не через x), e_1 — единичный вектор в направлении качения колеса, $e_1 \wedge e_2 = 1$ и, наконец, β — указанный на рисунке угол. Утверждение о том, что колесо катится без проскальзывания, означает, что траектории $Q(t)$ являются интегральными кривыми пфафовой дифференциальной системы

$$(II.a.41) \quad \begin{aligned} \varphi^1 &= \omega^1 - d\beta = 0, \\ \varphi^2 &= \omega^2 = 0. \end{aligned}$$

Обозначим эту систему через K . Структурные уравнения (0.c.3) подвижного репера дают

$$\begin{aligned} d\varphi^1 &= -\varphi^2 \wedge \omega_1^2, \\ d\varphi^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2. \end{aligned}$$

Таким образом, первая производная система K_1 порождается формой φ^1 , а вторая производная система $K_2 = (0)$. По теореме Чжоу

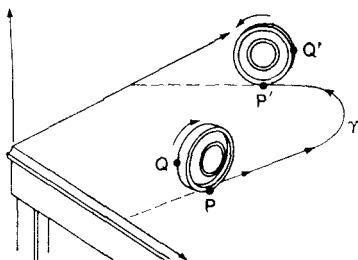


Рис. 17.

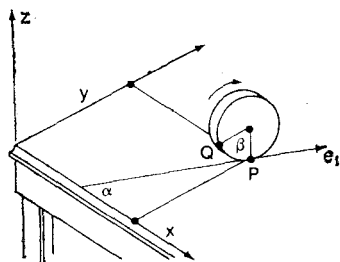


Рис. 18.

(I.c.18) мы можем найти интегральную кривую системы (II.a.41), соединяющую точку Q с точкой Q' (рис. 17). Это можно сделать, выбирая путь γ таким образом, чтобы его длина равнялась $2\pi k + \widehat{QQ'}$ ($k \in \mathbb{Z}$), а изображенные пунктиром прямые касались пути γ в его концах.

Чтобы исследовать уравнения движения точки Q , будем использовать на конфигурационном многообразии M координаты (x, y, α, β) , указанные на рис. 18. Таким образом,

$$\begin{aligned} P &= (x, y, 0), \\ Q &= (x - \sin \beta \cos \alpha, y - \sin \beta \sin \alpha, 1 - \cos \beta). \end{aligned}$$

Движение $Q(t)$ подчинено связи (II.a.41), что выражается условиями

$$(II.a.42) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \cos \alpha \frac{d\beta}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \sin \alpha \frac{d\beta}{dt}. \end{aligned}$$

В наших обычных обозначениях рассмотрим многообразие

$$J^1(\mathbb{R}, M) \cong R \times T(M)$$

с координатами

$$(t; x, y, \alpha, \beta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}).$$

Тогда многообразие связи $X \subset J^1 *(\mathbb{R}, M)$ задается уравнениями

$$(II.a.43) \quad \begin{aligned} \dot{x} - \dot{\beta} \cos \alpha &= 0, \\ \dot{y} - \dot{\beta} \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Движение точки Q описывается некоторыми из кривых, дающих решение уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$, где (I, ω) — каноническая пфафова дифференциальная система

$$\begin{aligned} \theta^1 &= dx - \dot{x} dt = dx - \dot{\beta} \cos \alpha dt = 0, \\ \theta^2 &= dy - \dot{y} dt = dy - \dot{\beta} \sin \alpha dt = 0, \\ \theta^3 &= d\alpha - \dot{\alpha} dt = 0, \\ \theta^4 &= d\beta - \dot{\beta} dt = 0, \\ \omega &= dt \neq 0 \end{aligned}$$

на многообразии X , а

$$\varphi = L dt,$$

где

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}, \dot{Q})$$

— кинетическая энергия точки Q .

З а м е ч а н и е. Почему движение точки Q не описывается произвольной кривой, дающей решение уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с задачей $(I, \omega; \varphi)$, — это довольно тонкий вопрос, связанный с граничными условиями; он будет подробно разобран в разд. а гл. IV (см. пример (IV.a.26)).

Возвратимся к обсуждению общей ситуации. Использование равенств (II.a.43) дает для ограничения $\dot{Q}$ на X формулу

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= (\dot{x} - \dot{\beta} \cos \beta \cos \alpha + \dot{\alpha} \sin \beta \sin \alpha, \\ &\quad \dot{y} - \dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha - \dot{\alpha} \sin \beta \cos \alpha, \dot{\beta} \sin \beta) \\ &= (\dot{\beta} \cos \alpha (1 - \cos \beta) + \dot{\alpha} \sin \beta \sin \alpha, \\ &\quad \dot{\beta} \sin \alpha (1 - \cos \beta) - \dot{\alpha} \sin \beta \cos \alpha, \dot{\beta} \sin \beta). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ограничение функции L на X имеет вид

$$(II.a.44) \quad L = (1 - \cos \beta) \dot{\beta}^2 + \frac{\sin^2 \beta}{2} \dot{\alpha}^2.$$

Это означает, что на пространстве $\tilde{X}$ с координатами $(t, \alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$ мы рассматриваем классическую вариационную задачу $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$, где система $(\tilde{I}, \omega)$ — это пфафова дифференциальная система

$$\tilde{\theta}^1 = d\alpha - \dot{\alpha} dt = 0,$$

$$\tilde{\theta}^2 = d\beta - \dot{\beta} dt = 0,$$

$$\omega = dt \neq 0$$

и

$$\tilde{\varphi} = \left((1 - \cos \beta) \dot{\beta}^2 + \frac{\sin^2 \beta}{2} \dot{\alpha}^2 \right) dt.$$

Докажем теперь, что справедливо следующее утверждение:

(II.a.45) Кривые на многообразии X , полученные из кривых — решений задачи $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ интегрированием уравнений (II.a.42), дают решения задачи $(I, \omega; \varphi)$. Эти кривые в X описывают движение рассматриваемого колеса.

Доказательство. Система Эйлера—Лагранжа для задачи $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ порождается уравнениями Пфаффа (см. (I.d.16))

$$(II.a.46) \quad dL_{\dot{\alpha}} - L_{\alpha} dt = 0,$$

$$dL_{\dot{\beta}} - L_{\beta} dt = 0.$$

Мы получаем пару уравнений второго порядка относительно функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$, которые однозначно разрешимы для малых t при произвольных начальных значениях

$$(II.a.47) \quad \alpha(0), \beta(0), \alpha'(0), \beta'(0).$$

Используя ограничения (II.a.42), можно затем определить функции $x(t)$, $y(t)$ с заданными значениями

$$(II.a.48) \quad x(0), y(0).$$

Заметим, что произвольно задавать значения $x'(0)$ и $y'(0)$ нельзя. Физически задание начальных значений (II.a.47) и (II.a.48) равносильно заданию начального положения колеса и начального импульса.

Выведем теперь уравнения Эйлера—Лагранжа для задачи $(I, \omega; \varphi)$. Полагая

$$\psi = \varphi + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2 + \lambda_3 \theta^3 + \lambda_4 \theta^4,$$

имеем для формы $\Psi = d\psi$

$$\begin{aligned} \Psi = & (L_{\dot{\alpha}} - \lambda_3) d\dot{\alpha} \wedge dt + \\ & + (L_{\dot{\beta}} - \lambda_4 - \lambda_1 \cos \alpha - \lambda_2 \sin \alpha) d\dot{\beta} \wedge dt \\ & + (d\lambda_3 - (L_{\alpha} + \dot{\beta}(\lambda_2 \cos \alpha - \lambda_1 \sin \alpha)) dt) \wedge \theta^3 \\ & + (d\lambda_4 - L_{\beta} dt) \wedge \theta^4 + \sum_{i=1,2} d\lambda_i \wedge \theta^i. \end{aligned}$$

Система Эйлера—Лагранжа порождается уравнениями Пфаффа

$$(i) \quad \partial/\partial \dot{\alpha} \rfloor \Psi = (L_{\dot{\alpha}} - \lambda_3) dt = 0,$$

$$(ii) \quad \partial/\partial \dot{\beta} \rfloor \Psi = (L_{\dot{\beta}} - \lambda_4 - \lambda_1 \cos \alpha - \lambda_2 \sin \alpha) dt = 0, \\ \partial/\partial \lambda_i \rfloor \Psi = \theta^i = 0,$$

$$(iii) \quad \partial/\partial \theta^3 \rfloor \Psi = -d\lambda_3 + (L_{\alpha} + \dot{\beta}(\lambda_2 \cos \alpha - \lambda_1 \sin \alpha)) dt = 0,$$

$$(iv) \quad \partial/\partial \theta^4 \rfloor \Psi = -d\lambda_4 + L_{\beta} dt = 0,$$

$$(v) \quad \partial/\partial \theta^1 \rfloor \Psi = -d\lambda_1 = 0,$$

$$(vi) \quad \partial/\partial \theta^2 \rfloor \Psi = -d\lambda_2 = 0.$$

Уравнения (i), (ii), (V), (vi) дают

$$L_{\dot{\alpha}} = \lambda_3,$$

$$L_{\dot{\beta}} = \lambda_4 + \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \sin \alpha,$$

$$\lambda_1 = \text{const},$$

$$\lambda_2 = \text{const}.$$

Подставляя эти равенства в (iii), (iv), получаем

$$(II.a.49) \quad dL_{\dot{\alpha}} - (L_{\alpha} + \dot{\beta}(\lambda_2 \cos \alpha - \lambda_1 \sin \alpha)) dt = 0, \\ dL_{\dot{\beta}} + (\lambda_1 \dot{\alpha} \sin \alpha - \lambda_2 \dot{\alpha} \cos \alpha - L_{\beta}) dt = 0.$$

По произвольному данному решению $\tilde{N}$ системы (II.a.46) построим кривую N в X , получаемую из $\tilde{N}$ интегрированием уравнений (II.a.42). Полагая вдоль этой кривой

$$\lambda_3 = L_{\dot{\alpha}}, \quad \lambda_4 = L_{\dot{\beta}}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

и сравнивая (II.a.46) с (II.a.49), заключаем, что кривая N является решением системы Эйлера—Лагранжа, ассоциированной с задачей $(I, \omega; \varphi)$. Это доказывает первую часть утверждения.

Вторая следует из принципа наименьшего действия и наших предыдущих замечаний о начальных значениях. $\square$

З а м е ч а н и е. Несколько таинственная связь между вариационными задачами $(I, \omega; \varphi)$ на X и $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ на $\tilde{X}$ будет прояснена в разд. а гл. IV (см. пример (IV.a.26)).

Осталось обсудить вариационную задачу $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$. Благодаря наличию циклической координаты α уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с задачей $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$, определяют вполне интегрируемую гамильтонову систему (см. [2, с. 60, следствие 3]). Укажем кратко, каким образом может быть проведено интегрирование.

Используя лагранжиан (II.a.44) и опираясь на наличие циклической координаты α и закон сохранения полной энергии, мы по-

лучаем два первых интеграла

$$(i) L_\alpha = (\sin^2 \beta) \dot{\alpha},$$

$$(ii) L = (1 - \cos \beta) \dot{\beta}^2 + \frac{c_1^2}{2 \sin^2 \beta} = c_2.$$

Полагая $u = 1 - \cos \beta$, имеем

$$\cos \beta = 1 - u,$$

$$\sin \beta = \sqrt{u(2-u)},$$

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{u(2-u)}}.$$

Поэтому (ii) принимает вид

$$\frac{\dot{u}^2}{2-u} + \frac{c_1^2}{2u(2-u)} = c_2.$$

После переобозначения констант и разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{au^2 + bu + c}{u}}} = dt.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение можно проинтегрировать в эллиптических функциях (см. замечание относительно поверхностей вращения с постоянной гауссовой кривизной в примере (II.a.50)). Равенство (i) дает

$$d\alpha = \frac{c_1 dt}{2u(2-u)} = \frac{c_1 du}{2\dot{u}u(2-u)},$$

т. е.

$$d\alpha = \frac{c_1}{2(2-u)} \frac{du}{\sqrt{u(au^2 + bu + c)}}.$$

Это уравнение также может быть проинтегрировано в эллиптических функциях.

Отметим частное решение

$$\alpha = \text{const},$$

$$\beta = \arccos(ct^2 - 1).$$

Оно описывает качение колеса по прямой.

(II.a.50) ПРИМЕР. Основным инвариантом ориентированного многообразия $M^n \subset \mathbb{E}^{n+r}$ является его *вторая квадратичная форма II*, которая сопоставляет каждой точке $p \in M$ квадратичную форму $\Pi(p)$ со значениями в нормальном расслоении к M

в точке p (см. [6], [63]). Естественно рассмотреть функционал

$$(II.a.51) \quad \Phi(M) = \frac{1}{k} \int_M \|\Pi(p)\|^k dA(p),$$

где dA — форма объема для индуцированной римановой метрики на M , а $\|\Pi(p)\|$ — длина второй квадратичной формы в точке p . При $n = 1$ и $k = 2$ этот функционал совпадает с функционалом (II.a.32). Если $n = k = 2$, $r = 1$, а $M \subset \mathbb{E}^3$ — компактная ориентируемая поверхность, то в силу теоремы Гаусса—Бонне этот функционал имеет вид

$$(II.a.52) \quad \frac{1}{2} \int_M (H^2 - 2K) dA = \frac{1}{2} \int_M H^2 dA - \frac{1}{2\pi} \chi(M),$$

где H — средняя кривизна (след формы (II)) и $\chi(M)$ — эйлерова характеристика многообразия M . Величина

$$\int_M H^2 dA$$

была введена Уиллмором [67] и изучена Ли и Яу [51]. Функционал

$$(II.a.53) \quad \frac{1}{2} \int_M \|\Pi\|^2 dA$$

на многообразиях произвольной размерности можно рассматривать как разновидность «внешнего функционала Янга—Миллса», но по соображениям размерности более естественным выглядит функционал

$$\frac{1}{n} \int_M \|\Pi\|^n dA.$$

Например, он является конформным инвариантом (этот факт использовали Ли и Яу в [51]). При $n = 2$ эти два функционала совпадают.

Теперь исследуем уравнения Эйлера—Лагранжа функционала (II.a.53) для поверхности вращения $S \subset \mathbb{R}^3$. Прежде всего приведем их к гамильтонову виду

$$\frac{dy}{dx} = H_\lambda,$$

$$\frac{d\dot{y}}{dx} = H_\lambda,$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = -H_y,$$

$$\frac{d\dot{\lambda}}{dx} = -H_y,$$

где $H = H(y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$ — функция на пространстве с координатами $(x, y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$. Так как $H_x = 0$, то мы немедленно получаем первый интеграл, в котором отражена симметрия поверхности S относительно оси вращения. Ниже будет показано, что конформное векторное поле

$$v = x^i \partial / \partial x^i$$

в $\mathbb{R}^3$ дает по теореме Нётер первый интеграл

$$V = -xH + \lambda y.$$

Заметим, что $V_x = -H \neq 0$. Вычисление, в ходе которого почти всё чудесным образом взаимно сокращается, показывает, что модифицированная скобка Пуассона равна

$$(II.a.54) \quad [H, V] = cH$$

$$(c = \text{const}).$$

Таким образом, алгебра первых интегралов, порожденная функциями $H, V, [H, V], [H, [H, V]], [V, [H, V]]$ и т. д., совпадает с алгеброй, порожденной функциями H и V . В сущности из-за этого мы не можем ответить на следующий

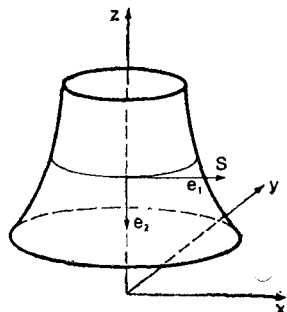


Рис. 19.

ВОПРОС. Есть ли у уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом (II.a.53), другие первые интегралы? Или, что то же самое, являются ли эти уравнения алгебраически интегрируемыми в квадратурах? ¹⁾

Прежде чем выводить уравнения Эйлера—Лагранжа, нам надо выписать основные структурные уравнения для поверхности вращения $S \subset \mathbb{R}^3$, задаваемой в цилиндрических координатах (z, r, φ) уравнениями

$$z = f(r),$$

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

где (x, y, z) — обычные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ (рис. 19). Положим

$$F(r) = \sqrt{1 + f'(r)^2}.$$

¹⁾ (Добавление при корректуре.) Используя инвариантность подынтегрального выражения в интеграле Уиллмора при инверсиях относительно сфер, можно установить полную интегрируемость функционала (II.a.53).

Тогда

$$\partial/\partial\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0), \quad \|\partial/\partial\varphi\| = r;$$

$$\partial/\partial r = (\cos \varphi, \sin \varphi, f'(r)), \quad \|\partial/\partial r\| = F(r).$$

Поэтому в качестве поля реперов мы выбираем

$$e_1 = \frac{1}{r} \partial/\partial\varphi,$$

$$e_2 = \frac{1}{F(r)} \partial/\partial r.$$

Единичная нормаль e_3 задается равенством

$$e_3 = e_1 \times e_2,$$

т. е.

$$e_3 = \frac{1}{F} (f' \cos \varphi, f' \sin \varphi, -1).$$

В результате получается поле реперов Дарбу

$$(r, \varphi) \mapsto (e_1(r, \varphi), e_2(r, \varphi), e_3(r, \varphi));$$

поднятия базисных 1-форм ω^i , ω_i^j на $\mathcal{F}(\mathbb{E}^3)$ с помощью этого отображения (см. разд. с гл. 0) имеют вид

$$\omega^1 = r d\varphi,$$

$$\omega^2 = F dr,$$

$$\omega^3 = 0,$$

$$(II.a.55) \quad \omega_1^2 = -\frac{d\varphi}{F} \quad (= (de_1, e_2)),$$

$$\omega_1^3 = -\frac{f'}{F} d\varphi \quad (= (de_1, e_3)),$$

$$\omega_2^3 = -\frac{f''}{F^2} dr \quad (= (de_2, e_3)).$$

Поэтому вторая квадратичная форма выглядит так:

$$(II.a.56) \quad II = \left(\frac{-f'}{rF} \right) (\omega^1)^2 + \left(\frac{-f''}{F^3} \right) (\omega^2)^2$$

(в общем случае квадратичная дифференциальная форма равна

$$\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3$$

(см. [15], [22])).

З а м е ч а н и е. Произведем проверку этих формул. По формуле Гаусса для гауссовой кривизны

$$K = \det II = \frac{f'f''}{rF^4}$$

(чтобы убедиться в правильности знака, рассмотрите случай единичной сферы $z = \sqrt{1 - r^2}$). С другой стороны, в силу структурных уравнений теории поверхностей (см. указанные выше руководства),

$$d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$d\omega_1^2 = \frac{F'}{rF^3} dr \wedge d\varphi \quad (\text{ввиду (II.a.55)})$$

$$= -\frac{F'}{rF^3} \omega^1 \wedge \omega^2,$$

что тоже дает

$$K = \frac{F'}{rF^3} = \frac{f'f''}{rF^4},$$

поскольку $F' = f'f''/F$.

З а м е ч а н и е. Из этих формул вытекает следующее хорошо известное интересное утверждение: *поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны описываются эллиптическими функциями.*

Доказательство. Возьмем для простоты случай $K = 1$. Тогда интегрирование уравнения

$$\frac{F'}{F^4} = r$$

дает

$$\frac{1}{F^3} = c - r^2.$$

Или, что то же самое,

$$f'(r) = \sqrt{\frac{r^2 - c_1}{c - r^2}}, \quad c_1 = c - 1,$$

откуда

$$f(r) = \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{\frac{c - x^2}{x^2 - c_1}}} + c_2.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, рассмотрим алгебраическую кривую C , задаваемую уравнением

$$y^2 = \frac{c - x^2}{x^2 - c_1}.$$

В однородных координатах оно принимает вид

$$y^2x^2 - c_1z^2y^2 + z^2x^2 - cz^4 = 0.$$

Это плоская кватрика с ровно двумя особенностями — в точках $[0, 1, 0]$ и $[0, 0, 1]$, являющихся обыкновенными двойными точками. По формуле для рода ([36], [59]) разрешение особенностей дает кривую рода 1. На этой кривой форма $\omega = dx/y$ определяет абелев интеграл (на самом деле она является голоморфным дифференциалом). Таким образом, функция $f = \int \omega$ — обратная к некоторой эллиптической функции (см. указанные выше работы).

Проведем теперь еще одну проверку. Средняя кривизна равна

$$\begin{aligned} H = \operatorname{tr} \Pi &= -\frac{1}{F} \left(\frac{f'}{r} + \frac{f''}{F^2} \right) \\ &= -\frac{1}{rF^3} ((1 + f'^2) f' + rf''). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что уравнение минимальной поверхности имеет вид

$$H = 0 = ((1 + f'^2) f' + rf'').$$

С другой стороны, как хорошо известно (см. (IV.b.4)), уравнение минимальной поверхности — это уравнение Эйлера — Лагранжа для классической вариационной задачи на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с координатами (r, f, f') и лагранжианом $L = 2\pi r \sqrt{1 + f'^2}$. Уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dr} (L_{f'}) = L_f = 0$$

расписывается так:

$$0 = \frac{d}{dr} \left(\frac{rf'}{\sqrt{1 + f'^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2}} (f' (1 + f'^2) + rf''),$$

что согласуется с предыдущим условием $H = 0$.

Вернемся к уравнениям Эйлера — Лагранжа для функционала (II.a.53). Из вида второй квадратичной формы (II.a.56) вытекает, что

$$\frac{1}{2} \|\Pi\|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{f'^2}{r^2 F^2} + \frac{f''^2}{F^6} \right) = \frac{1}{2F^2} \left(\left(\frac{f'}{r} \right)^2 + \left(\frac{f''}{F^2} \right)^2 \right).$$

Следовательно, если учесть, что

$$dA = \omega^1 \wedge \omega^2 = rF df \wedge dr,$$

и пренебречь множителем 2π , то функционал (II.a.53) запишется так:

$$\Phi = \int L(r, f(r), f'(r), f''(r)) dr,$$

где

$$L = \frac{r}{2F} \left(\left(\frac{f'}{r} \right)^2 + \left(\frac{f''}{F^2} \right)^2 \right), \quad F = \sqrt{1 + f'^2}.$$

Заметим, что координата f — циклическая ¹⁾.

Ввиду гамильтоновой симметрии предпочтительно иметь лагранжиан, не зависящий от времени. Это подсказывает мысль взять за независимую переменную $f = x$, а переменную $r = y$ считать зависимой. Таким образом, мы должны положить

$$r = y,$$

$$f = x,$$

$$f' = \frac{1}{\dot{y}},$$

$$f'' = \frac{\ddot{y}}{y^3},$$

$$dr = \dot{y} dx.$$

В этих координатах лагранжиан принимает вид

$$(II.a.57) \quad L(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) = \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{y} + \frac{y\ddot{y}^2}{G^4} \right), \quad G = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

Заметим, что теперь L не зависит от x . В канонических координатах $(x, y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$, где

$$\dot{\lambda} = L_{\dot{y}} = \frac{y\dot{y}}{G^5},$$

так что

$$\ddot{y} = \frac{\dot{\lambda} G^5}{y},$$

гамильтониан записывается в виде

$$H = -L + \lambda \dot{y} + \dot{\lambda} \ddot{y},$$

или

$$(II.a.58) \quad H = \frac{1}{2y} \left(\dot{\lambda}^2 G^5 - \frac{1}{G} \right) + \lambda \dot{y},$$

Обсуждение. Геометрически выбор $y = r$ в качестве зависимой переменной означает, что мы «по-новому смотрим на нашу поверхность вращения» (см. рис. 20, где ось x — это наша прежняя ось z). Приятно проверить равенство (II.a.54). Поверхность задается теперь отображением

$$(x, y) \mapsto (x, y(x) \cos \varphi, y(x) \sin \varphi) = X(x, \varphi).$$

¹⁾ Это та самая циклическая координата, о которой мы упоминали ранее.

При этом

$$\partial/\partial x \mapsto (1, \dot{y} \cos \varphi, \dot{y} \sin \varphi),$$

$$\partial/\partial \varphi \mapsto (0, -y \sin \varphi, y \cos \varphi).$$

Возьмем поле ортонормированных реперов

$$e_1 = \frac{1}{G} (1, \dot{y} \cos \varphi, \dot{y} \sin \varphi),$$

$$e_2 = \frac{1}{y} (0, -y \sin \varphi, y \cos \varphi),$$

где

$$G = \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

Тогда вектор единичной нормали имеет вид

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \frac{1}{G} (\dot{y}, -\cos \varphi, -\sin \varphi)$$

и

$$\omega_1^3 = (de_1, e_3) = \frac{-\ddot{y}}{G^2} dx,$$

$$\omega_2^3 = (de_2, e_3) = \frac{d\varphi}{G}.$$

Из равенства

$$dX(x, \varphi) = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$$

следует, что

$$\omega^1 = G dx,$$

$$\omega^2 = y d\varphi,$$

$$dA = y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \wedge d\varphi$$

(ясно, что последнее равенство дает правильное выражение для dA). И наконец,

$$\Pi = \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3$$

$$= \frac{-\ddot{y}}{G} dx^2 + \frac{y}{G} d\varphi^2$$

$$= \frac{-\ddot{y}}{G^3} (\omega^1)^2 + \frac{1}{Gy} (\omega^2)^2,$$

$$\frac{1}{2} \|\Pi\|^2 = \frac{1}{2G^2} \left(\frac{\ddot{y}^2}{G^4} + \frac{1}{y^2} \right),$$

$$\frac{1}{2} \|\Pi\|^2 dA = \frac{1}{2G} \left(\frac{\ddot{y}^2 y}{G^4} + \frac{1}{y} \right) dx \wedge d\varphi.$$

Таким образом, функционал (II.a.53) равен взятому с коэффициентом 2π функционалу

$$\int \frac{1}{2G} \left(\frac{y\ddot{y}^2}{G^4} + \frac{1}{y} \right) dx,$$

что согласуется с (II.a.57).

Вернемся к обсуждению общего случая. Очевидные выкладки, использующие равенства (II.a.58) и $G_{\dot{y}} = \dot{y}/G$, показывают, что уравнения Эйлера — Лагранжа в гамильтоновой форме записываются так:

$$(II.a.59) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= H_{\lambda} = \dot{y}, \\ \frac{d\dot{y}}{dx} &= H_{\dot{\lambda}} = \frac{\dot{\lambda} G^5}{y}, \\ \frac{d\lambda}{dx} &= -H_y = \frac{1}{2y^2} \left(\dot{\lambda}^2 G^5 - \frac{1}{G} \right), \\ \frac{d\dot{\lambda}}{dx} &= -H_{\dot{y}} = -\lambda - \frac{\dot{y}}{2y} \left(5\dot{\lambda}^2 G^3 + \frac{1}{G^3} \right). \end{aligned}$$

Векторное поле растяжений в $\mathbb{R}^3$ определяет инфинитезимальную симметрию

$$(II.a.60) \quad v = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}}$$

вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$, задаваемой в $(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$ -пространстве следующими данными:

$$\begin{aligned} \theta &= dy - \dot{y} dx, \\ \dot{\theta} &= d\dot{y} - \ddot{y} dx, \\ \omega &= dx \neq 0, \\ \varphi &= Ldx, \end{aligned}$$

где лагранжиан L задан формулой (II.a.57). Проверим, что это так. Однопараметрическая группа, порожденная полем v , имеет вид

$$\begin{aligned} x &\mapsto \mu x, \\ y &\mapsto \mu y, \\ \dot{y} &\mapsto \dot{y}, \\ \ddot{y} &\mapsto \mu^{-1} \ddot{y}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \theta &= \theta, \\ \mathcal{L}_v \dot{\theta} &= 0, \\ \mathcal{L}_v \varphi &= 0 \end{aligned}$$

(это можно проверить также с помощью формулы А. Картана (0.a.1)). Индуцированное векторное поле $\tilde{v}$ на пространстве Z переменных $(x, y, \dot{y}, \ddot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$ задается формулой

$$\tilde{v} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

Теорема Нётер дает первый интеграл

$$V = v \int (\varphi + \lambda \theta + \dot{\lambda} \dot{\theta})$$

(см. (II.a.11)). Так как $\varphi + \lambda \theta + \dot{\lambda} \dot{\theta} = -Hdx + \lambda dy + \dot{\lambda} d\dot{y}$,
то

$$(II.a.61) \quad V = -xH + y\lambda.$$

На любой интегральной кривой поля (II.a.59) и V , и H постоянны.

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2}{dx^2} (y\lambda) = 0$$

на интегральных кривых, — соотношение, которое не видно сразу из уравнений (II.a.59).

Чтобы вычислить модифицированную скобку Пуассона $[H, V]$, надо выписать внешнее произведение

$$(II.a.62) \quad dH \wedge dV \wedge \psi_Y \wedge \Psi_Y.$$

Полагая

$$\Omega = d\lambda \wedge dy + d\dot{\lambda} \wedge d\dot{y},$$

получаем

$$\psi_Y = -Hdx + \lambda dy + \dot{\lambda} d\dot{y},$$

$$\Psi_Y = -dH \wedge dx + \Omega,$$

$$dV \equiv -Hdx + yd\lambda + \lambda dy \bmod dH.$$

Так как $dH \wedge dH = 0$, то внешнее произведение (II.a.62) равно

$$dH \wedge (-Hdx + yd\lambda + \lambda dy) \wedge (-Hdx + \lambda dy + \dot{\lambda} d\dot{y}) \wedge \Omega.$$

Перепишем его в виде

$$dH \wedge (-Hdx + \eta) \wedge (-Hdx + \xi) \wedge \Omega,$$

где $\eta = yd\lambda + \lambda dy$, $\xi = \dot{\lambda} d\dot{y} + \lambda dy$. Так как $H_x = 0$, то единственный член, содержащий dx , происходит из члена $-Hdx$. Таким образом, выражение (II.a.62) имеет вид

$$\begin{aligned} & Hdx \wedge dH \wedge (\xi - \eta) \wedge \Omega \\ &= Hdx \wedge dH \wedge (\dot{\lambda} d\dot{y} - yd\lambda) \wedge \Omega \\ &= Hdx \wedge dH \wedge (\dot{\lambda} d\lambda \wedge dy \wedge d\dot{y} - yd\lambda \wedge d\dot{\lambda} \wedge d\dot{y}) \\ &= H (\dot{\lambda} H_{\dot{\lambda}} + yH_y) dx \wedge d\lambda \wedge dy \wedge d\dot{\lambda} \wedge d\dot{y}. \end{aligned}$$

Аналогичные выкладки показывают, что

$$\psi_Y \wedge \Psi_Y = 2(\lambda H_{\lambda} + \dot{\lambda} H_{\dot{\lambda}} - H) dx \wedge d\lambda \wedge dy \wedge d\dot{\lambda} \wedge d\dot{y}.$$

Применение равенств (II.a.58), (II.a.59) приводит к удивительным взаимным сокращениям. А именно,

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}H_{\lambda} + yH_y &= \frac{\dot{\lambda}^2 G^5}{2y} + \frac{1}{2Gy}, \\ \lambda H_{\lambda} + \dot{\lambda}H_{\lambda} - H &= \lambda \dot{y} + \frac{\dot{\lambda}^2 G^5}{y} - \left(\lambda \dot{y} + \frac{\dot{\lambda}^2 G^5}{2y} - \frac{1}{2yG} \right) \\ &= \frac{\dot{\lambda}^2 G^5}{2y} + \frac{1}{2Gy}.\end{aligned}$$

Поэтому из определения модифицированной скобки Пуассона (разд. а гл. II) следует, что функция $[H, V]$ равна произведению H на некоторый постоянный множитель, чем (II.a.54) и доказано.

б. Исследование системы Эйлера—Лагранжа для некоторых вариационных задач дифференциальной геометрии

1. Функционал $\int \kappa^2 ds$ для плоских кривых

Обсудим функционал

$$(II.b.1) \quad \Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2 ds,$$

определенный на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^n$. Начнем с простейшего случая $n = 2$. Положим $X = \mathcal{F}(\mathbb{E}^2) \times \mathbb{R}$, где κ — координата на $\mathbb{R}$, и рассмотрим на многообразии X вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, определяемую следующими данными (где $L(\kappa)$ пока — произвольная гладкая функция одной переменной κ с производными L' , L'' и т. д.):

$$(II.b.2) \quad \begin{aligned}\omega &= \omega^1, \\ \theta^1 &= \omega^2, \\ \theta^2 &= \omega_1^2 - \kappa \omega, \\ \varphi &= L(\kappa) \omega.\end{aligned}$$

Интегральные многообразия системы (I, ω) задаются кривыми

$$s \mapsto (x(s), e_1(s), e_2(s), \kappa(s)) \in \mathcal{F}(\mathbb{E}^2) \times \mathbb{R},$$

где отображение $s \mapsto x(s)$ описывает кривую $\gamma \subset \mathbb{E}^2$, вдоль которой

$$\begin{aligned}\omega &= ds \quad \text{— длина дуги на } \gamma, \\ e_1(s) &= x'(s) \quad \text{— единичный касательный вектор к } \gamma, \\ \kappa(s) &= e'_1(s) \quad \text{— кривизна } \gamma.\end{aligned}$$

Справедлив следующий результат:

(II.b.3) *Данные (II.b.2) определяют невырожденную вариационную задачу, если $L''(\kappa) \neq 0$ ¹⁾. В этом случае размерность пространства моментов равна пяти. Если $L(\kappa) = \kappa^2/2$, то уравнения Эйлера — Лагранжа, ассоциированные с задачей $(I, \omega; \varphi)$, квазиинтегрируемы в квадратурах.*

Доказательство. Будем следовать алгоритму построения системы (J, ω) , описанному в разд. е гл. I. Рассмотрим на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^2$ (с координатами λ_1, λ_2 на $\mathbb{R}^2$) 1-форму

$$\psi = L(\kappa) \omega + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2,$$

внешний дифференциал которой равен

$$\begin{aligned}\Psi &= d(L(\kappa) \omega) + \lambda_1 d\theta^1 + \lambda_2 d\theta^2 + d\lambda_1 \wedge \theta^1 + \\ &+ d\lambda_2 \wedge \theta^2.\end{aligned}$$

Нам надо определить: i) систему Картана $\mathcal{C}(\Psi)$; ii) пространство моментов Y с системой Эйлера — Лагранжа (J, ω) на нем и iii) в предположении, что $\dim Y = 2m + 1$, дифференциальную форму старшей степени

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^m$$

на Y . При выводе системы Картана оказывается полезным следующее заслуживающее специального выделения наблюдение:

(II.b.4) ЛЕММА. *Будем для пары 2-форм $\Psi, \tilde{\Psi}$ на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^s$ писать*

$$\Psi \equiv \tilde{\Psi},$$

если

$$(I.b.5) \quad \Psi - \tilde{\Psi} \equiv 0 \bmod \operatorname{span} \{\theta^\alpha \wedge \theta^\beta\}.$$

При выполнении этого условия

$$\mathcal{C}(\Psi) = \mathcal{C}(\tilde{\Psi}).$$

¹⁾ См. в связи с этим подстрочное примечание к уравнению (I.d.35).

Доказательство. Имеем

$$\psi = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

$$\Psi = d\psi = d\varphi + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha \wedge d\theta^\alpha$$

и потому

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} \lrcorner \Psi = \theta^\alpha \in \mathcal{C}(\Psi).$$

Тогда ясно, что

$$\mathcal{C}(\Psi) = \mathcal{C}(\Psi + h_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta)$$

для любой функции $h_{\alpha\beta}$ на Z . $\square$

Из структурных уравнений подвижного репера (i) — (v) пункта (0.c.3) вытекает, что

$$d\theta^1 = -\theta^2 \wedge \omega \quad \equiv -\theta^2 \wedge \omega,$$

$$d\theta^2 = -\pi \wedge \omega + \kappa \theta^1 \wedge \theta^2 \equiv -\pi \wedge \omega \quad (\pi = d\kappa - \kappa^2 \theta^1),$$

$$d\varphi = L'\pi \wedge \omega + (L'\kappa^2 - L\kappa) \theta^1 \wedge \omega - L\theta^1 \wedge \theta^2$$

$$\equiv L'\pi \wedge \omega + (L'\kappa^2 - L\kappa) \theta^1 \wedge \omega,$$

откуда в координатах относительно корепера $\{\omega; \theta^1, \theta^2, \pi, d\lambda_1, d\lambda_2\}$ на Z

$$\begin{aligned} \Psi \equiv & (L' - \lambda_2) \pi \wedge \omega + (d\lambda_1 - (L'\kappa^2 - L\kappa) \omega) \wedge \theta^1 + \\ & + (d\lambda_2 + \lambda_1 \omega) \wedge \theta^2. \end{aligned}$$

Обозначая через $\equiv$ эквивалентность по модулю подрасслоения $\text{span}\{\theta^\alpha\}$ и учитывая, что в силу леммы (II.b.4)

$$\Psi \equiv \tilde{\Psi} \Rightarrow v \lrcorner \Psi \equiv v \lrcorner \tilde{\Psi},$$

мы видим, что система Картана порождается уравнениями Пфаффа

$$\partial/\partial \lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$(II.b.6) \quad \partial/\partial \pi \lrcorner \Psi \equiv (L' - \lambda_2) \omega = 0,$$

$$\partial/\partial \theta^2 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_2 - \lambda_1 \omega = 0,$$

$$\partial/\partial \theta^1 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_1 + (L'\kappa^2 - L\kappa) \omega = 0.$$

Отсюда следует, что подмногообразие $Z_1 \subset Z$ задается уравнением

$$L'(\kappa) = \lambda_2.$$

Доказательство. В точке $p \in Z_1$ система Картана задается четырьмя линейными уравнениями на касательном пространстве

$$\begin{aligned}\theta^1 &= \theta^2 = 0, \\ d\lambda_2 + \lambda_1 \omega &= 0, \\ d\lambda_1 - (L' \kappa - L \kappa) \omega &= 0.\end{aligned}$$

Ясно, что у них всегда есть решение $v \in T_p(Z)$, для которого $\langle \omega, v \rangle \neq 0$. $\square$

З а м е ч а н и е. Не очевидно, а на самом деле и не всегда верно, что у этих уравнений есть решение $v \in T_p(Z_1)$, для которого $\langle \omega, v \rangle \neq 0$ (см. подстрочное примечание к уравнению (I.d.35)).

На подмногообразии $Z_1 \subset Z$ мы имеем (ниже все дифференциальные формы рассматриваются как полилинейные функции, ограниченные на подмногообразии $T(Z_1) \subset T(Z)$)

$$d\lambda_2 = L''(\kappa) d\kappa \equiv L''(\kappa) \pi \bmod \text{span} \{ \theta^1, \theta^2 \}.$$

Если $L'' \neq 0$, то можно разрешить это уравнение относительно π и взять формы $\{ \omega, \theta^1, \theta^2, d\lambda_1, d\lambda_2 \}$ в качестве корепера на Z_1 . Так и сделаем. Мы видим, что для каждой точки $p \in Z_1$ четыре линейных уравнения, порождающие систему $\mathcal{G}_1(\Psi)$, обладают решением $v \in T_p(Z_1)$, для которого $\langle \omega, v \rangle \neq 0$. Таким образом, в каждой точке подмногообразия Z_1 существует интегральный элемент системы $\mathcal{G}_1(\Psi)$, касательный к Z_1 , и поэтому $Z_1 = Y$. Заметим, что $\dim Y = 5$.

Проверяя условие независимости

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^2 \neq 0,$$

нельзя, вообще говоря, работать по модулю членов $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ (хороший пример приведен ниже в п. 2 этого раздела). В настоящем примере мы имеем

$$\begin{aligned}\psi_Y &= L\omega + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2, \\ \Psi_Y &= (d\lambda_1 - (L' \kappa^2 - L \kappa) \omega) \wedge \theta^1 \\ &+ (d\lambda_2 + \lambda_1 \omega) \wedge \theta^2 + (\lambda_2 \kappa - L) \theta^1 \wedge \theta^2.\end{aligned}$$

Ясно, что в качестве корепера на Y можно взять также формы

$$\{ \psi_Y, \theta^1, \theta^2, \eta_1 = d\lambda_1 - (L' \kappa^2 - L \kappa) \omega, \eta_2 = d\lambda_2 + \lambda_1 \omega \},$$

и тогда

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^2 = 2\psi_Y \wedge \eta_1 \wedge \theta^1 \wedge \eta_2 \wedge \theta^2 \neq 0.$$

Следовательно, применимо предложение (I.e.17), и наша вариационная задача невырожденна и имеет пятимерное пространство импульсов.

Чтобы определить интегральную кривую дифференциальной системы Эйлера — Лагранжа на многообразии Y , надо задать *четыре* постоянных. Поскольку $\dim E(2) = 3$, то теорема Нётер дает *три* первых интеграла V_1, V_2, V_3 , которые нам неохота выписывать явно. В случае лагранжиана $L(x) = x^2/2$ мы определим еще один первый интеграл V_4 , и этого будет достаточно, чтобы установить справедливость утверждения (II.b.3). Отметим без доказательства, что множества уровня $V_\rho = c_\rho$ определяют *поверхности* в Y , являющиеся цилиндрами $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, а кривые, доставляющие решения уравнений Эйлера — Лагранжа, представляют собой проекции прямых.

С учетом того что $\lambda_2 = x$ на Y , последние два уравнения системы (II.b.6) принимают в рассматриваемом случае вид

$$d\lambda_1 - \frac{\lambda_2^3}{2} \omega = 0,$$

$$d\lambda_2 + \lambda_1 \omega = 0.$$

Перепишем их так:

$$\frac{2d\lambda_1}{\lambda_2^3} = \omega = -\frac{d\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Разделяя переменные, получаем

$$d\left(\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2^4}{4}\right) = 2\lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2^3 d\lambda_2 = 0$$

вдоль решений системы (J, ω) . Таким образом, функция

$$V_4 = \lambda_1^2 + \frac{\lambda_2^4}{4}$$

есть обещанный первый интеграл. Тем самым доказательство утверждения (II.b.3) завершено.

Фазовый портрет этой системы уже обсуждался в примере (I.d.27). Напомним, в частности, что уравнения Эйлера — Лагранжа могут быть проинтегрированы в эллиптических функциях.

2. Аффинная длина дуги

Для нашего следующего примера обозначим через $d\sigma$ элемент аффинной длины дуги (см. пример (I.a.15)), определенный на кривых $\gamma \subset \mathbb{A}^2$, и рассмотрим функционал

$$(II.b.7) \quad \Phi(\gamma) = \int_{\gamma} d\sigma.$$

Мы хотим доказать, что

(II.b.8) Решения уравнений Эйлера — Лагранжа, ассоциированных с функционалом (II.b.7), являются плоскими кониками ¹⁾.

При проведении выкладок удобно использовать аффинные реперы Френе (см. [34], [44]). Зададим кривую $\gamma \subset A^2$ отображением

$$\sigma \mapsto x(\sigma),$$

где параметр σ — аффинная длина дуги; таким образом,

$$|x'(\sigma) \wedge x''(\sigma)| = 1.$$

Положим

$$\omega = d\sigma,$$

$$(II.b.9) \quad dx = e_1 \omega,$$

$$de_1 = e_2 \omega.$$

Ввиду структурных уравнений (0.c.3) для аффинных реперов на кривой $\sigma \mapsto (x(\sigma), e_1(\sigma), e_2(\sigma))$ в $\mathcal{F}(A^2)$ имеем

$$(II.b.10) \quad \begin{aligned} \omega^1 &= \omega, \quad \omega^2 = 0, \\ \omega_1^1 &= 0, \quad \omega_1^2 = \omega. \end{aligned}$$

Так как $\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0$, отсюда следует также, что $\omega_2^2 = 0$, и мы определим аффинную кривизну $\kappa(\sigma)$ равенством

$$(II.b.11) \quad \omega_2^1 = \kappa(\sigma) \omega.$$

Поскольку $\omega_2 = 0$, это эквивалентно равенству

$$(II.b.12) \quad de_2 = \kappa(\sigma) e_1 \omega.$$

Мы называем набор $(x(\sigma), e_1(\sigma), e_2(\sigma))$ аффинным репером Френе. Заметим, что в силу утверждения (I.b.7) кривая $\gamma \subset A^2$ однозначно с точностью до аффинного движения определяется своей функцией аффинной кривизны $\kappa(\sigma)$.

З а м е ч а н и е. Вектор аффинной нормали допускает следующую геометрическую интерпретацию, которая будет нам полезна в разд. а гл. IV. Заметим прежде всего, что действие аффинной группы $A(2)$ не мешает нам i) измерять площадь (и, значит, определять центр тяжести плоской области) и ii) говорить, когда две прямые параллельны (т. е. не пересекаются). Задав

¹⁾ В общем случае аффинные геодезические в A^n являются рациональными нормальными кривыми, которые задаются параметрическими отображениями $t \mapsto (t, t^2, \dots, t^n)$ (здесь параметр t пропорционален аффинной длине дуги).

шись точкой $p \in \gamma$ с касательной T_p в этой точке (рис. 21), рассмотрим прямые $T_p(\varepsilon)$, параллельные прямой T_p и проходящие на расстоянии ε от нее (для измерения этого расстояния можно использовать любое отождествление $A^2 \cong \mathbb{R}^2$ — мы собираемся устремить ε к нулю, и окончательный результат не будет зависеть от способа отождествления). Пусть q_ε — центр тяжести области, ограниченной кривой γ и прямой $T_p(\varepsilon)$; проведем прямую $pq_\varepsilon = N_p(\varepsilon)$. Предел $N_p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_p(\varepsilon)$ называется *аффинной нормалью*, а *единичный вектор аффинной нормали* e_2 определяется условиями

$$e_2 \in N_p, \quad e_1 \wedge e_2 = 1,$$

где $e_1 = dx(\sigma)/d\sigma$.

Рассмотрим, в частности, кривые, для которых $\kappa(\sigma) \equiv 0$. Ввиду структурных уравнений (II.b.9), (II.b.11) это условие эквивалентно тому, что

$$x'''(\sigma) = 0.$$

Следовательно, функция $x(\sigma)$ является квадратичным многочленом от σ и описывает некоторую конику в A^2 . Наше утверждение (II.b.8) вытекает теперь из следующего утверждения:

(II.b.13) *Аффинная кривизна решений уравнений Эйлера — Лагранжа, ассоциированных с функционалом (II.b.7), равна нулю.*

Рассмотрим на многообразии $X = \mathcal{F}(A^2) \times \mathbb{R}$ с координатой κ на $\mathbb{R}$ пфаффову дифференциальную систему (I, ω) , порожденную уравнениями

$$\theta^1 = \omega^2 = 0,$$

$$\theta^2 = \omega_1^2 - \omega = 0,$$

$$(II.b.14) \quad \theta^3 = \omega_1^1 = 0,$$

$$\theta^4 = \omega_2^1 - \kappa \omega = 0,$$

$$\omega = \omega^1 \neq 0.$$

Ввиду равенств (II.b.10) и (II.b.11) интегральные многообразия систем (I, ω) задаются отображениями $\sigma \mapsto (x(\sigma), e_1(\sigma), e_2(\sigma), \kappa(\sigma))$, где $(x(\sigma), e_1(\sigma), e_2(\sigma))$ — аффинный репер Френе кривой

$\gamma = \{x(\sigma)\} \subset A^2$, а $\kappa(\sigma)$ — аффинная кривизна. Обозначая символом $\equiv$ эквивалентность по модулю членов $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ (см. (II.b.4)), из уравнений (i)—(iv) и (vi) системы (0.c.3) получаем структурные уравнения

$$\begin{aligned}
 d\omega &= \kappa\theta^1 \wedge \omega - \theta^3 \wedge \omega + \theta^1 \wedge \theta^4 \equiv \\
 &\equiv \kappa\theta^1 \wedge \omega - \theta^3 \wedge \omega, \\
 d\theta^1 &= -\theta^2 \wedge \omega - \theta^1 \wedge \theta^3 \equiv -\theta^2 \wedge \omega, \\
 d\theta^2 &= 3\theta^3 \wedge \omega - \kappa\theta^1 \wedge \omega + 2\theta^3 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^4 \equiv \\
 &\equiv 3\theta^3 \wedge \omega - \kappa\theta^1 \wedge \omega, \\
 d\theta^3 &= \kappa\theta^2 \wedge \omega - \theta^4 \wedge \omega + \theta^2 \wedge \theta^4 \equiv \\
 &\equiv \kappa\theta^2 \wedge \omega - \theta^4 \wedge \omega, \\
 d\theta^4 &= -d\kappa \wedge \omega + 3\kappa\theta^3 \wedge \omega - \kappa^2\theta^1 \wedge \omega + \kappa\theta^1 \wedge \theta^4 + 2\theta^3 \wedge \theta \\
 &\equiv -d\kappa \wedge \omega + 3\kappa\theta^3 \wedge \omega - \kappa^2\theta^1 \wedge \omega.
 \end{aligned}
 \tag{II.b.15}$$

З а м е ч а н и е. Пусть, как обычно, символ W_k^* обозначает k -ю производную систему (см. (I.c.17)). Выпишем производный флаг пфафовой дифференциальной системы I :

$$\begin{array}{ccccccc}
 W^* & & \supset W_1^* & & \supset W_2^* & & \supset W_3^* \supset W_4^* \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \text{span}\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\} & \supset & \text{span}\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\} & \supset & \text{span}\{\theta^1, \theta^2\} & \supset & \text{span}\{\theta^1\} \quad (0)
 \end{array}$$

Это связано с тем фактом, что аффинная кривизна является инвариантом третьего порядка (см. в [34] *метод многоугольника Картана* для вычисления необходимого в общем случае порядка касания при определении репера Френе).

Рассмотрим на многообразии X вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где

$$\varphi = \omega \text{ (аффинная длина дуги).}$$

Этой задаче соответствует функционал (II.b.7) на пространстве $\mathcal{V}(I, \omega)$. Для вывода системы Эйлера — Лагранжа $(J, -\omega)$ мы следуем алгоритму разд. е гл. I и используем лемму (II.b.4). Таким образом, мы рассматриваем на многообразии $X \times \mathbb{R}^4$ формы

$$\psi = \omega + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

$$\Psi = (\kappa\theta^1 - \theta^3) \wedge \omega + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha d\theta^\alpha,$$

где формы $d\theta^\alpha$ задаются равенствами (II.b.15), причем, согласно лемме (II.b.4), при вычислении $\mathcal{V}(\Psi)$ достаточно знать их по мо-

дулю отношения эквивалентности $\equiv$. Производя подстановку векторных полей, образующих базис касательных векторов к Z , и используя символ $\equiv$ для обозначения эквивалентности по модулю пространства $\text{span}\{\theta^\alpha\}$, найдем уравнения Пфаффа, порождающие систему Картана $\mathcal{C}(\Psi)$:

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

$$\partial/\partial\kappa \lrcorner \Psi \equiv \lambda_4\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^4 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_4 - \lambda_3\omega = 0,$$

$$(II.b.16) \quad \partial/\partial\theta^3 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_3 + (3\kappa\lambda_4 + 3\lambda_2 - 1)\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^2 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_2 + (\kappa\lambda_3 - \lambda_1)\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^1 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_1 + (-\kappa^2\lambda_4 - \kappa\lambda_2 + \kappa)\omega = 0.$$

Из уравнения (i) вытекает, что подмногообразие $Z_1 \subset Z$ задается уравнением $\lambda_4 = 0$. Тогда из уравнения (ii) видно, что подмногообразие $Z_2 \subset Z_1$ задается уравнениями $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Поэтому из уравнения (iii) следует, что подмногообразие $Z_3 \subset Z_2$ задается просто уравнением

$$\lambda_2 = 1/3.$$

Далее, поскольку $d\lambda_2 = 0$, то на основании уравнения (iv) мы заключаем, что подмногообразие $Z_4 \subset Z_3$ задается уравнением $\lambda_1 = 0$. И наконец, из уравнения (v) следует, что подмногообразие $Z_5 = Y$ задается (ввиду того что $\lambda_2 = 1/3$) уравнением $2/3\kappa = 0$, т. е.

$$\kappa = 0.$$

Другими словами, $Y \cong \mathcal{F}(A^2)$, и система Эйлера — Лагранжа (J, ω) имеет вид

$$\omega^2 = \omega_1^1 = \omega_2^1 = 0,$$

$$\omega = \omega^1 = \omega_2^1 \neq 0.$$

Как отмечалось выше, интегральные многообразия этой системы являются аффинными реперами Френе с нулевой аффинной кривизной, чем и доказано утверждение (II.b.13).

З а м е ч а н и е. Из (II.b.15) и проведенных выше выкладок вытекает, что

$$\psi_Y = \omega + \frac{1}{3}\theta^2,$$

$$\Psi_Y = \frac{2}{3}(\theta^2 \wedge \theta^3 + \theta^1 \wedge \theta^4),$$

откуда

$$\mathcal{C}(\Psi_Y) = \text{span} \{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\},$$

$$\Psi_Y \wedge (\Psi_Y)^2 \neq 0.$$

Таким образом, наша вариационная задача невырождена в смысле разд. е гл. I.

3. Функционал $\int \kappa^2 ds$ для пространственных кривых

Изучим теперь кривые $\gamma \subset \mathbb{E}^3$. Если задать γ параметрически отображением $s \mapsto x(s) \in \mathbb{E}^3$, где s — длина дуги, то в окрестности точки, в которой $\kappa(s) \neq 0$, мы можем определить *репер Френе* $s \mapsto (x(s), e_1(s), e_2(s), e_3(s)) \in \mathcal{F}(\mathbb{E}^3)$, такой что выполняются *уравнения Френе — Серре*

$$\frac{dx}{ds} = e_1,$$

$$\frac{de_1}{ds} = \kappa(s) e_2,$$

$$(II.b.17) \quad \frac{de_2}{ds} = -\kappa(s) e_1 + \tau(s) e_3,$$

$$\frac{de_3}{ds} = -\tau(s) e_2.$$

Здесь нормаль e_2 , бинормаль e_3 , кривизна $\kappa(s)$ и *кручение* $\tau(s)$ определены с точностью до знака; знак фиксируется выбором векторов e_2, e_3 на одном из концов кривой γ . Далее, в силу утверждения (I.b.7) функции $\kappa(s), \tau(s)$ определяют кривую γ однозначно с точностью до эвклидова движения. Это наводит на мысль взять многообразие $X = \mathcal{F}(\mathbb{E}^3) \times \mathbb{R}^2$ с координатами (κ, τ) на $\mathbb{R}^2$ и рассмотреть на X пфаффову дифференциальную систему (I, ω) , задаваемую уравнениями

$$\theta^1 = \omega^2 = 0,$$

$$\theta^2 = \omega^3 = 0,$$

$$\theta^3 = \omega_1^3 = 0,$$

(II.b.18)

$$\theta^4 = \omega_1^2 - \kappa \omega = 0,$$

$$\theta^5 = \omega_2^3 - \tau \omega = 0,$$

$$\omega = \omega^1 \neq 0.$$

Поднятие Френе кривой $\gamma \subset \mathbb{E}^3$ с кривизной $\kappa \neq 0$ будет интегральным многообразием системы (I, ω) .

С другой стороны, может случиться так, что $\kappa = 0$ на некотором подмножестве интегрального многообразия системы (I, ω) . На самом деле можно показать, что любая кусочно- C^4 -гладкая кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^3$ является проекцией некоторого кусочно- C^1 -гладкого интегрального многообразия $N \subset X$ системы (I, ω) (если $\kappa = 0$ на некотором подмножестве, то многообразие N определяется кривой γ неоднозначно). Мы не станем здесь этого доказывать, а будем просто рассматривать функционалы, определенные на множестве $\mathcal{V}(I, \omega)$ ¹⁾.

Рассмотрим теперь функционал

$$(II.b.19) \quad \Phi(N) = \frac{1}{2} \int_N \kappa^2 ds,$$

определенный на интегральных многообразиях N системы (I, ω) . Мы докажем, что

*Уравнения Эйлера — Лагранжа, ассоциированные с функционалом (II.b.19), квазиинтегрируемы в квадратурах*²⁾.

На самом деле, как мы увидим, это утверждение почти очевидным образом следует из общей теории и теоремы Нётер.

Для того чтобы изучить систему Эйлера — Лагранжа, ассоциированную с функционалом (II.b.19), надо выписать структурные уравнения системы (I, ω) . Используя структурные уравнения (0.c.3) (i) — (v) и обозначения (II.b.5), получаем

$$(i) \quad d\omega = -\kappa\theta^1 \wedge \omega - \theta^1 \wedge \theta^4 - \theta^2 \wedge \theta^5 \equiv -\kappa\theta^1 \wedge \omega,$$

$$(ii) \quad d\theta^1 = -(\tau\theta^2 + \theta^4) \wedge \omega - \theta^2 \wedge \theta^5 \equiv -(\tau\theta^2 + \theta^4) \wedge \omega,$$

$$(iii) \quad d\theta^2 = (\tau\theta^1 - \theta^3) \wedge \omega + \theta^1 \wedge \theta^5 \equiv (\tau\theta^1 - \theta^3) \wedge \omega,$$

¹⁾ Суть того, что мы здесь (несколько сумбурно) изложили, заключается в следующем. Всякое интегральное многообразие $N \subset X$ проектируется в некоторую кривую $\gamma \subset \mathbb{E}^3$; при этом N может и не быть поднятием Френе этой кривой γ (например, γ может оказаться прямой). По существу, условие того, что N является поднятием Френе кривой γ , означает, что функция κ обращается на N в нуль лишь в изолированных точках. Однако для наших целей это не играет роли — мы просто считаем, что функционал *определен на* $\mathcal{V}(I, \omega)$. Чтобы увязать этот подход с вариационными задачами, определенными на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^3$, заметим (без доказательства), что любая достаточно гладкая кривая в $\mathbb{E}^3$ локально является проекцией (возможно, менее гладкого) интегрального многообразия из $\mathcal{V}(I, \omega)$.

²⁾ И здесь снова окажется, что обе функции τ и κ могут быть выражены через эллиптические функции, если многообразие N является решением уравнений Эйлера—Лагранжа.

$$(iv) \quad d\theta^3 = (\tau\theta^4 - \kappa\theta^5) \wedge \omega + \theta^4 \wedge \theta^4 \equiv (\tau\theta^4 - \kappa\theta^4) \wedge \omega,$$

$$(II.b.20) \quad (v) \quad d\theta^4 = -\pi^4 \wedge \omega + \kappa(\theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3) - \theta^3 \wedge \theta^5 \\ \equiv -\pi^4 \wedge \omega,$$

$$(vi) \quad d\theta^5 = -\pi^5 \wedge \omega + \tau(\theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3) + \theta^3 \wedge \theta^4 \\ \equiv -\pi^5 \wedge \omega,$$

$$d\varphi = L'\pi^4 \wedge \omega + ((L'\kappa^2 - L\kappa)\theta^1 - L'\tau\theta^3) \wedge \omega - \\ - (\theta^1 \wedge \theta^4 + \theta^2 \wedge \theta^3),$$

где

$$\varphi = L(\kappa)\omega, \\ \pi^4 = d\kappa + \tau\theta^3 - \kappa^2\theta^1, \\ \pi^5 = d\tau - \kappa\theta^1 - \kappa\theta^3{}^1).$$

З а м е ч а н и я. Отметим, что система (J, ω) является пфафовой системой в хорошей форме (разд. с гл. I) и ее производный флаг (там же) имеет следующий вид ²⁾:

$$\begin{array}{ccccccc} W^* & & \supset W_1^* & & \supset W_2^* & & \supset W_3^* \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \text{span}\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5\} & \supset & \text{span}\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\} & \supset & \text{span}\{\theta^2\} & \supset & \{0\} \end{array}$$

Далее, выполняются уравнения (I.e.28), (I.e.29).

Построение системы Эйлера — Лагранжа (J, ω) довольно интересно. Следуя алгоритму разд. е гл. I, рассмотрим дифференциальные формы

$$\psi = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

$$\Psi = d\varphi + \lambda d_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha d\theta^\alpha$$

на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^5$. Обозначая символом $\equiv$ эквивалентность по модулю подрасслоения $\text{span}\{\theta^\alpha\}$, получаем, что система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 5,$$

$$(i) \quad \partial/\partial\pi^5 \lrcorner \Psi \equiv -\lambda_5 \omega = 0,$$

$$(ii) \quad \partial/\partial\pi^4 \lrcorner \Psi \equiv (L' - \lambda_4) \omega = 0,$$

¹⁾ Пока нам удобнее рассматривать вариационную задачу, ассоциированную с функционалом

$$\Phi(N) = \int_N L(\kappa) \omega,$$

где $L(\kappa)$ — произвольная гладкая функция переменной κ .

²⁾ В котором отражается тот факт, что, вообще говоря, кривая в $\mathbb{E}^3$ определяется своими инвариантами третьего порядка, а именно кривизной (второй порядок) и кручением (третий порядок).

$$\begin{aligned}
 \text{(II.b.21)} \quad & \text{(iii)} \quad \partial/\partial\theta^5 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_5 - \lambda_3 \kappa \omega = 0, \\
 & \text{(iv)} \quad \partial/\partial\theta^4 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_4 - (\lambda_1 + \lambda_3 \tau) \omega = 0, \\
 & \text{(v)} \quad \partial/\partial\theta^3 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_3 - (\lambda_2 + L' \tau) \omega = 0, \\
 & \text{(vi)} \quad \partial/\partial\theta^2 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_2 - \tau \lambda_1 \omega = 0, \\
 & \text{(vii)} \quad \partial/\partial\theta^1 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_1 + (\tau \lambda_2 + L' \kappa^2 - L \kappa) \omega = 0.
 \end{aligned}$$

При выводе этих уравнений используются уравнения (II.b.20) и замечание (II.b.4). Из равенств (i), (ii) находим, что подмногообразии $Z_1 \subset Z$ задается уравнениями (см. рассуждения, проведенные в п. 1 настоящего раздела)

$$Z_1 = \{\lambda_5 = 0, \lambda_4 = L'\}.$$

Заметим, что $\dim Z = 13$ и $\dim Z_1 = 11$. Однако в общей точке $p \in Z_1$ нет интегральных элементов системы $(\mathcal{G}(\Psi), \omega)$, касающихся подмногообразия Z_1 , ибо любой такой интегральный элемент должен быть порожден вектором $v \in T_p(Z)$, удовлетворяющим двум условиям:

$$\langle d\lambda_5, v \rangle = 0, \quad \langle \omega, v \rangle \neq 0.$$

Из первого условия и уравнения следует, что $\lambda_3 \kappa = 0$; полагая в общей точке $\kappa \neq 0$, получаем отсюда $\lambda_3 = 0$. Таким образом, подмногообразие $Z_2 \subset Z_1$ задается уравнениями

$$\lambda_5 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = L'.$$

Непосредственное вычисление показывает, что опять в общей точке многообразия Z_2 отсутствуют интегральные элементы системы $(\mathcal{G}_1(\Psi), \omega)$, касающиеся Z_2 , ибо ввиду уравнения (v) мы должны иметь $\lambda_2 + L' \tau = 0$. Таким образом, подмногообразие $Z_3 \subset Z_2$ задается уравнениями

$$\text{(II.b.22)} \quad \lambda_5 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = L', \quad \lambda_2 = -L' \tau.$$

Покажем, что

(II.b.23) Если $L'' \neq 0$, то $Z_3 = Y$ и система Эйлера—Лагранжа (J, ω) является невырожденной системой на 9-мерном пространстве импульсов, определяемом уравнениями (II.b.22).

Доказательство. На многообразии Z_3 имеем

$$\begin{aligned}
 d\lambda_4 &\equiv L'' \pi^4 \bmod \{\theta^\alpha, \omega\}, \\
 d\lambda_2 &\equiv -L' \pi^5 \bmod \{\pi^4, \theta^\alpha, \omega\}.
 \end{aligned}$$

Так как $L'' \neq 0$, то и $L' \neq 0$, и мы можем разрешить эти уравнения относительно π^4, π^5 , выбрав на Z_3 корепер $\{\omega, \theta^1, \dots, \theta^5,$

$d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_4\}$. Система Картана $(\mathcal{C}_3(\Psi), \omega)$ на многообразии Z_3 задается уравнениями

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= 0, \quad \alpha = 1, \dots, 5, \\ -d\lambda_4 - \lambda_1 \omega &= 0, \\ -d\lambda_2 - \tau \lambda_1 \omega &= 0, \\ -d\lambda_1 + (\tau \lambda_2 + L' \kappa^2 - L \kappa) \omega &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.b.24})$$

Ясно, что отображение $V(\mathcal{C}_3(\Psi), \omega) \rightarrow Z$ сюръективно, и, значит, $Z_3 = Y$. Из равенств

$$\begin{aligned} \Psi_Y &= \varphi + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2 + \lambda_4 \theta^4, \\ \Psi_Y &= d\varphi + d\lambda_1 \wedge \theta^1 + d\lambda_2 \wedge \theta^2 + d\lambda_4 \wedge \theta^4 + \lambda_\alpha d\theta^\alpha, \end{aligned}$$

используя структурные уравнения (II.b.20), находим

$$\begin{aligned} \Psi_Y \wedge (\Psi_Y)^4 &= -6! L \lambda_4 \omega \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge d\lambda_2 \wedge \theta^2 \\ &\quad \wedge d\lambda_5 \wedge \theta^4 \wedge \theta^3 \wedge \theta^5 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что наша вариационная задача невырождена. $\square$

(II.b.25) З а м е ч а н и е. Вариационная задача, задаваемая функционалом $\int L(\kappa) \omega$, $L'' \neq 0$, не является сильно невырожденной в смысле разд. е гл. I. С другой стороны, легко показать, что вариационная задача, ассоциированная с функционалом

$$(\text{II.b.26}) \quad \Phi = \int L(\kappa, \tau) \omega, \det \begin{vmatrix} L_{\kappa\kappa} & L_{\kappa\tau} \\ L_{\tau\kappa} & L_{\tau\tau} \end{vmatrix} \neq 0,$$

сильно невырождена. Действительно, для этой задачи справедливы равенства (I.e.28), (I.e.30) (а потому и (I.e.29)). Ввиду условия $L_{\kappa\kappa} L_{\tau\tau} - L_{\kappa\tau}^2 \neq 0$ ассоциированная квадратичная форма $\|A_{\lambda\mu}\|$ (см. разд. е гл. II) неособа, и значит, по определению, вариационная задача, ассоциированная с функционалом (II.b.26), сильно невырождена, так что применима теорема (I.a.34).

Поскольку $\dim Y = 9$, то для определения интегральной кривой системы Эйлера — Лагранжа, ассоциированной с функционалом (II.b.19), надо задать 8 констант. Теорема Нётер доставляет $\dim E(3) = 6$ констант, а предположительный глобальный гамильтонов характер системы $(J, \omega)^1$ — седьмую. Далее, так как 1-форма $\varphi = L(\kappa) \omega$ не зависит от τ , можно ожидать наличия еще чего-то одного, похожего на циклическую координату.

¹⁾ На самом деле, мы подозреваем, что во *всех* рассматриваемых в этой монографии невырожденных примерах приведение к гамильтонову виду может быть осуществлено глобально, но этого проверить не удастся ввиду отсутствия глобальной теоремы Пфаффа—Дарбу.

В случае $L(x) = x^2/2$ мы с помощью простых выкладок найдем два первых интеграла V_1, V_2 системы (II.b.24), кроме тех, которые дает теорема Нётер. Этим теорема (II.a.33) будет доказана для случая $n = 3, R = 0$.

Воспользовавшись утверждением (II.b.22), запишем систему Эйлера — Лагранжа (II.b.24) в виде

$$\theta^\alpha = 0,$$

$$(i) \quad d\lambda_4 + \lambda_1 \omega = 0,$$

$$(II.b.27) \quad (ii) \quad \lambda_4 d\lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 \omega = 0,$$

$$(iii) \quad d\lambda_1 - \left(\frac{\lambda_4^3}{2} - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_4} \right) \omega = 0.$$

Умножая уравнение (i) на λ_2 и прибавляя его к уравнению (ii), получаем

$$d(\lambda_2 \lambda_4) = 0.$$

Следовательно, ввиду (II.b.22),

$$d(x^2 \tau) = 0,$$

что дает алгебраический первый интеграл

$$(II.b.28) \quad V_1 = \lambda_2 \lambda_4 = -x^2 \tau = c_1$$

на решениях системы (J, ω) . Подставляя $\lambda_2 = c_1/\lambda_4$ в уравнение (iii) и используя уравнение (i), получаем

$$\lambda_4'' + \left(\frac{\lambda_4^3}{2} - \frac{c_1}{\lambda_4^3} \right) = 0$$

на решениях системы (J, ω) . У этого уравнения есть алгебраический первый интеграл

$$V_2 = (\lambda_4')^2 + \frac{(\lambda_4)^4}{4} + \frac{c_1}{(\lambda_4)^2},$$

т. е.

$$(II.b.29) \quad V_2 = \lambda_1^2 + \frac{(\lambda_4)^4}{4} + \frac{c_1}{(\lambda_4)^2} = c_2.$$

Последнее равенство эквивалентно равенству

$$x'^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{c_1}{x^2} = c_2$$

на интегральных кривых системы (J, ω) .

Для общего набора постоянных c_1, c_2 алгебраическая кривая

$$y^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{c_1}{x^2} = c_2$$

есть особая плоская кривая шестой степени, и после разрешения особенностей мы получаем кривую рода 1 (это объясняется тем, что функция $y = \sqrt{c_2 - x^4/4 - c_1/x^2}$ однозначна в окрестности точки $x = \infty$). Таким образом, фазовый портрет уравнений Эйлера — Лагранжа, ассоциированных с функционалом (II.b.19), можно описать в пространстве (τ, κ, κ') двухпараметрическим семейством эллиптических кривых

$$(II.b.30) \quad \tau \kappa^2 = c_1,$$

$$\kappa'^2 + \frac{\kappa^4}{4} - \tau = c_2.$$

4. Задача Делоне

Изучим теперь функционал несколько иного типа, определенный на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^3$ равенством

$$\Phi = \int_{\gamma} ds$$

(II.b.31)

с ограничением $\kappa \equiv 1$.

В литературе эта задача называется *задачей Делоне*. Мы покажем, что

(II.b.32) *Уравнения Эйлера — Лагранжа, ассоциированные с задачей Делоне (II.b.31), квазиинтегрируемы в квадратурах, а их фазовый портрет образован рациональными алгебраическими кривыми.*

З а м е ч а н и я. Исходная постановка задачи (см. [13, с. 373]) состояла в следующем:

Среди всех пространственных кривых заданной постоянной кривизны найти кратчайшую и длиннейшую кривые, соединяющие два линейных элемента в пространстве.

Этому вопросу посвящена обширная классическая литература (см. указанную выше работу).

Прежде чем заняться функционалом (II.b.31), исследуем уравнения Эйлера — Лагранжа, ассоциированные с обычным функционалом длины дуги

$$(II.b.33) \quad \Theta = \int_{\gamma} ds.$$

Соответствующая вариационная задача имеет вид $(I, \omega; \varphi)$, где система (I, ω) на X такова же, как и в подразделе iii), а $\varphi = \omega$

(в обозначениях (II.b.18)). Форма $d\varphi$ задается первым уравнением (II.b.20), и, следуя алгоритму разд. е гл. I в том же духе, как и в подразделах (i)—(iii), получаем для формы Ψ выражение (ср. с (I.d.16))

$$\Psi \equiv -\kappa \theta^1 \wedge \omega + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha d\theta^\alpha,$$

где формы $d\theta^\alpha$ даются равенствами (II.b.20). Система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \rfloor \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$(i) \partial/\partial\pi^5 \rfloor \Psi \equiv \lambda_5 \omega = 0,$$

$$(ii) \partial/\partial\pi^4 \rfloor \Psi \equiv \lambda_4 \omega = 0,$$

$$(iii) \partial/\partial\theta^5 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_5 - \lambda_3 \kappa \omega = 0,$$

$$(II.b.34) \quad (iv) \partial/\partial\theta^4 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_4 + \lambda_3 \tau \omega - \lambda_1 \omega = 0,$$

$$(v) \partial/\partial\theta^3 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_3 - \lambda_2 \omega = 0,$$

$$(vi) \partial/\partial\theta^2 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_2 - \lambda_1 \tau \omega = 0,$$

$$(vii) \partial/\partial\theta^1 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_1 - \kappa \omega + \lambda_2 \tau \omega = 0,$$

где $\equiv$ обозначает эквивалентность по модулю подрасслоения $\text{span}\{\theta^\alpha\}$. Ввиду уравнений (i) и (ii) подмногообразие $Z_1 \subset Z$ задается равенствами $\lambda_5 = \lambda_4 = 0$. Тогда $Z_2 \subset Z_1$ имеет вид $\{\lambda_5 = \lambda_4 = \lambda_3 \kappa = \lambda_3 \tau - \lambda_1 = 0\}$. Если $\kappa \neq 0$, то $\lambda_3 = 0$ и $Z_3 \subset Z_2$ задается равенствами $\lambda_5 = \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = \kappa = 0$ (последнее равенство следует из (vii)). Мы доказали, что

Если кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^3$ является решением уравнений Эйлера — Лагранжа, ассоциированных с функционалом (II.b.33), то $\kappa \equiv 0$ на γ .

Конечно, это не самый эффективный способ доказательства того, что геодезические в $\mathbb{E}^3$ являются прямыми, но по существу такие же выкладки используются и в приводимом ниже доказательстве утверждения (II.b.32).

Доказательство утверждения (II.b.32). Вариационную задачу (II.b.31) можно сформулировать как обычную вариационную задачу $(I_0, \omega; \varphi_0)$ на подмногообразии $X_0 \subset X$, определяемом уравнением $\kappa = 1$, где $I_0 = I|X_0$, $\varphi_0 = ds|X_0$ ¹⁾. Структур-

¹⁾ В этом состоит одно из преимуществ формулировки вариационного исчисления при помощи функционалов, определенных на интегральных многообразиях внешних дифференциальных систем. Наложение ограничений достигается просто ограничением задачи на подмногообразие. Это справедливо также и для интегральных ограничений, которые обсуждаются в разд. а приложения.

ные уравнения (i)—(iv) и (vi) из (II.b.20) по-прежнему справедливы, а уравнение (v) принимает вид

$$d\theta^4 \equiv (\kappa^2\theta^1 - \tau\theta^3) \wedge \omega.$$

Положим $\pi = \pi^5$, так что 1-формы $\{\omega, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \pi\}$ образуют корепер на X_0 . Для форм

$$\varphi_0 = \omega,$$

$$\psi = \varphi_0 + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

$$\Psi = d\psi$$

система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается следующими уравнениями Пфаффа (ср. с (II.b.34)):

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$(i) \partial/\partial\pi \lrcorner \Psi \equiv \lambda_5 \omega = 0,$$

$$(ii) \partial/\partial\theta^5 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_5 - \lambda_3 \omega = 0,$$

$$(iii) \partial/\partial\theta^4 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_4 - (\lambda_1 - \lambda_3\tau) \omega = 0,$$

$$(iv) \partial/\partial\theta^3 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_3 - (\lambda_2 + \lambda_4\tau) \omega = 0,$$

$$(v) \partial/\partial\theta^2 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_2 - \lambda_1\tau\omega = 0,$$

$$(vi) \partial/\partial\theta^1 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_1 - (1 - \lambda_2\tau - \lambda_4) \omega = 0$$

(появление 1 в (vi) объясняется тем, что $\kappa = 1$). Следуя уже привычным путем, из уравнений (i), (ii) и (iv) выводим

$$\lambda_5 = \lambda_3 = 0,$$

(II.b.35)

$$\lambda_2 + \lambda_4\tau = 0.$$

Тогда уравнения (i)—(vi) сводятся к системе

$$d\lambda_1 + (1 + \lambda_4\tau^2 - \lambda_4) \omega = 0,$$

(II.b.36)

$$d\lambda_2 + \lambda_1\tau\omega = 0,$$

$$d\lambda_4 + \lambda_1\omega = 0.$$

Второе уравнение (II.b.35) вместе со вторым и третьим уравнениями (II.b.36) дает

$$\frac{2d\lambda_4}{\lambda_4} + \frac{d\tau}{\tau} \equiv 0.$$

Применяя (II.b.35), получаем первый интеграл

$$(II.b.37) \quad V_1 = -\lambda_2\lambda_4 = c_1 (= \lambda_4^2\tau)$$

на решениях системы Эйлера — Лагранжа (J, ω) . Положим

$$\lambda = \lambda_4,$$

II. Первые интегралы системы Эйлера—Лагранжа

так что кривая $\gamma \subset \mathbb{E}^3$ однозначно с точностью до эвклидова движения определяется заданием постоянной c_1 и функции $\lambda(s)$ (ввиду того что $\kappa(s) \equiv 1$ и $\tau(s) = c_1/\lambda(s^2)$). Выбирая в качестве параметра вдоль кривых, являющихся решениями системы (J, ω) , длину дуги, мы получаем из уравнений (II.b.36), (i), (iii) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\lambda'' + \left(\lambda - \frac{c_1^2}{\lambda^3} - 1 \right) = 0.$$

У этого уравнения есть первый интеграл

$$(II.b.38) \quad V_2 = \lambda'^2 + \left(\lambda^2 + \frac{c_1^2}{2\lambda^4} - 2\lambda \right) = c_2$$

(заметим, что и $V_1 = -\lambda_2\lambda_4$, и $V_2 = \lambda_1^2 + (\lambda_4^2 + c_1^2/2\lambda_4^4 - 2\lambda_4)$ являются рациональными функциями на многообразии Z).

Итак, фазовый портрет решений системы Эйлера — Лагранжа, ассоциированной с функционалом (II.b.31), дается на плоскости (λ, λ') двухпараметрическим семейством алгебраических кривых

$$(II.b.39) \quad \lambda'^2 + \frac{c_1^2}{2\lambda^4} + \lambda^2 - 2\lambda = c^2.$$

Для общего набора значений постоянных c_1, c_2 рациональная функция

$$r(\lambda) = c^2 + 2\lambda - \lambda^2 - \frac{c_1^2}{2\lambda^4}$$

имеет степень 6; у нее 4-кратный нуль в точке $\lambda = \infty$ и еще два других различных нуля. Таким образом, кривая $\lambda'^2 = r(\lambda)$ является двулиственным накрытием над λ -сферой с $2 = 6 - 4$ точками ветвления и потому по формуле Римана — Гурвица ([36], [59]) является рациональной кривой. Этим завершено доказательство утверждения (II.b.32).

З а м е ч а н и е. В этой задаче пространство моментов $Y \subset X_0 \times \mathbb{R}^5$ задается уравнениями (II.b.35), и поэтому корепер в нем можно задать формулами $\{\omega, \theta^1, \dots, \theta^5, d\lambda_1, d\lambda_2, d\lambda_4\}$. В частности, $\dim Y = 9$. Шесть алгебраических первых интегралов системы (J, ω) даются группой $E(3)$ по теореме Нётер, а еще два — формулами (II.b.37) и (II.b.38). Очень похоже, что их можно получить, используя гамильтонов формализм и тот факт, что форма φ_0 не зависит от τ («циклическая координата»), но мы не знаем, как провести строгое рассуждение. Мы подозреваем, что из полного набора *восьми* первых интегралов лишь *семь* независимы и что движение линейно на цилиндре $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/Z$.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

а. Вывод этих уравнений

1. Мотивировки и идеи

Хорошо известно, что у «общей» кривой $\gamma \subset \mathbb{E}^n$ есть репер Френе. Этот факт можно выразить следующим образом: если N — отрезок, $N = \{a \leq s \leq b\}$, и кривая γ задается отображением $x : N \rightarrow \mathbb{E}^n$, где s — длина дуги, то определено (по существу каноническое) поднятие

$$(III.a.1) \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{F}(\mathbb{E}^n) & \\ \nearrow f & \downarrow & \\ N & \xrightarrow{x} & \mathbb{E}^n \end{array}$$

отображения x до отображения в многообразие $\mathcal{F}(\mathbb{E}^n)$ реперов $(x; e, \dots, e_n)$ на $\mathbb{E}^n$. По определению,

$$f(s) = (x(s); e_1(s), \dots, e_n(s)),$$

где для $1 \leq k \leq n$

$$(III.a.2) \quad \text{span} \{e_1(s), \dots, e_k(s)\} = \text{span} \{x'(s), \dots, x^{(k)}(s)\} \subset T_{x(s)}(\mathbb{E}^n).$$

«Общая» означает здесь, что пространство в правой части равенства (III.a.2) при всех s имеет размерность k . Поднятие является «по существу каноническим» в том смысле, что векторы $e_2(s), \dots, e_n(s)$ определены с точностью до умножения на ± 1 ; в частности, если они как-то выбраны при $s = a$, то далее они определены однозначно.

Далее, посредством выбора координатного репера мы можем отождествить $\mathcal{F}(\mathbb{E}^n)$ с группой эвклидовых движений $E(n)$. В общем случае если заданы группа Ли G и ее замкнутая подгруппа H , то можно рассматривать кривые γ в однородном много-

образии G/H . Если такая кривая γ задана отображением $g: N \rightarrow G/H$, то опять в общем случае определено (по существу единственное) поднятие

$$(III.a.3) \quad \begin{array}{ccc} & G & \\ \nearrow f & \downarrow \pi & \\ N & \xrightarrow{g} & G/H \end{array}$$

Точнее говоря, отображение f существует всегда, если кривая γ имеет *постоянный тип* (определения и доказательства см. в [34] и [44]). При этом «образы Френе» $f(N)$ являются интегральными многообразиями некоторой пфафовой дифференциальной системы I на группе G , порожденной левоинвариантными 1-формами (формами Маурера — Картана). Наконец, при очень слабых предположениях о гладкости всякая кривая $\gamma \subset G/H$ имеет вид $\pi(f(N))$, где $f: N \rightarrow G$ — некоторое интегральное многообразие системы I ; важно, что, как и в случае кривой $\gamma \subset \mathbb{E}^k \subset \mathbb{E}^n$, поднятие Френе может быть существенно не единственным. Это рассуждение подсказывает идею — свести изучение вариационных задач для кривых в однородных пространствах к изучению вариационных задач, определенных для интегральных многообразий инвариантных пфафовых систем на группах Ли.

Как хорошо известно (см. [1], [2]), поведение твердого тела в $\mathbb{R}^3$, вращающегося относительно своего центра тяжести в отсутствие внешних сил, описывается уравнениями Эйлера — Лагранжа, ассоциированными с левоинвариантной кинетической энергией T , определенной на касательном расслоении к группе $SO(3)$. Соответствующая этой энергии T левоинвариантная метрика на $SO(3)$ зависит от трех главных моментов инерции тела (см. указанные выше работы). Если представить расслоение $T(SO(3))$ в виде

$$T(SO(3)) \cong SO(3) \times \mathfrak{so}(3),$$

где $\mathfrak{so}(3)$ — алгебра Ли группы $SO(3)$, то проекции кривых, доставляющих решения уравнений Эйлера — Лагранжа, на алгебру Ли $\mathfrak{so}(3)$ сами являются решениями определенных уравнений, называемых уравнениями Эйлера. Из этих уравнений Эйлера можно извлечь важные качественные свойства движения твердого тела (устойчивые и неустойчивые положения равновесия, периодические движения и т. д.).

Эта теория движения твердого тела была обобщена на случай движений, ассоциированных с левоинвариантными кинетическими энергиями на произвольных группах Ли G (см. [1], [2], [50], [61] и указанную там литературу).

Используя изоморфизмы

$$T(G) \cong G \times \mathfrak{g},$$

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*,$$

второй из которых задается метрикой на $\mathfrak{g}$, можно опять спроектировать решения уравнений Эйлера — Лагранжа на кривые $p(t) \in \mathfrak{g}^*$, являющиеся решениями обобщенных уравнений Эйлера. Теорема Костанта — Сурьо¹⁾ дает основное свойство этих уравнений: *их решения лежат в орбитах коприсоединенного представления.*

В настоящем разделе мы обобщим существенные стороны этой теории на случай дифференциальной системы Эйлера — Лагранжа, ассоциированной с произвольной левоинвариантной вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$ на группе Ли, а затем применим эти результаты к некоторым примерам поднятий Френе.

2. Краткий обзор классического случая

Изложим коротко классическую теорию. Пусть G — связная группа Ли, в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ которой задан базис $\{e_i\}$ со структурными соотношениями

$$(III.a.4) \quad [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0,$$

и пусть $\{\omega^i\}$ — двойственный базис в пространстве $\mathfrak{g}^*$ левоинвариантных 1-форм. Для него выполнено уравнение Маурера — Картана

$$(III.a.5) \quad d\omega^i + \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Точки в пространстве $X = T(G) \times \mathbb{R}$ будем обозначать (v, t) , где $v \in T(G)$ ²⁾. Положим

$$\omega^i(v) = p^i.$$

Тогда

$$X \cong G \times \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$$

и функции (p^i, t) задают координаты на $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$.

Заметим теперь, что $X \cong J^1(\mathbb{R}, G)$, и рассмотрим на X стандартную пфаффову систему (0.e.2). Используя выбранный нами

¹⁾ По-видимому, это теорема Эйлера из работы В. И. Арнольда в С. R. Acad. Sci. Paris, 1965, 260, Groupe I, 5668—5671. — *Прим. перев.*

²⁾ Обычно мы обозначаем точки касательного расслоения $T(G)$ через (g, v) , где $g \in G$, а $v \in T_g(G)$. В этой главе мы не будем указывать g и, используя изоморфизмы $(L_g)_* : T_e(G) \rightarrow T_g(G)$, отождествим $T(G)$ с $G \times \mathfrak{g}$. Наконец, для обозначения независимой переменной (времени) будем использовать символ t , а не x .

корепер (он, вообще говоря, не совпадает с координатным репером, но это не играет роли, поскольку все инвариантно), представим систему (I, ω) в виде (I.a.1):

$$\theta^i = \omega^i - p^i dt = 0,$$

(III.a.6)

$$\omega = dt \neq 0.$$

Интегральными многообразиями этой системы служат 1-струны кривых $t \mapsto g(t) \in G$.

Рассмотрим лагранжиан, задаваемый левоинвариантной метрикой на группе G , относительно которой ковекторы $\{\omega^i\}$ образуют ортонормированный базис. Таким образом, лагранжиан как функция на $J^1(\mathbb{R}, G) \cong \mathbb{R} \times T(G)$ представляется в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum (p^i)^2.$$

В соответствующей стандартной вариационной задаче (пример (I.a.5)) $\varphi = \dot{L}dt$. Тогда

$$(III.a.7) \quad d\varphi = \sum p^i dp_i \wedge dt.$$

Чтобы вывести систему Эйлера — Лагранжа, будем следовать нашему алгоритму, приведенному в разд. е гл. I. Итак, положим $Z = X \times \mathbb{R}^n$, где в $\mathbb{R}^n$ заданы координаты $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($n = \dim G$), и рассмотрим на многообразии Z дифференциальные формы

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + \lambda_i \theta^i, \\ \Psi &= d\psi. \end{aligned}$$

Используя равенства (III.a.5) и (III.a.7), получаем

$$(III.a.8) \quad \Psi = \sum (p^i - \lambda_i) dp^i \wedge dt + d\lambda_i \wedge \theta^i - \frac{1}{2} \lambda_i c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k.$$

Соответственно система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$\partial/\partial p^i \lrcorner \Psi = (p^i - \lambda_i) dt = 0,$$

$$(III.a.9) \quad \partial/\partial \lambda_i \lrcorner \Psi = \theta^i = 0,$$

$$\partial/\partial \omega^i \lrcorner \Psi = -d\lambda_i - \lambda_j c_{ik}^j \omega^k = 0.$$

Определим подмногообразие $Z_1 \subset Z$ равенствами $p^i = \lambda_i$ и выберем в качестве корепера на Z_1 систему ковекторов $\{\omega; \omega^i; d\lambda_i\}$. Согласно примеру (I.e.18) вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ невырождена, $Y = Z_1$, а согласно примеру (II.a.23) решения системы Эйлера — Лагранжа (J, ω) проектируются в геодезические соответствующей левоинвариантной метрики на G .

Теперь выведем и поясним уравнения Эйлера. Для этого рассмотрим пространство g^* как абстрактное векторное пространство с базисом $\{e_i^*\}$, двойственным к базису $\{e_i\}$ алгебры Ли g (теперь мы не считаем e_i^* 1-формами на G). Метрика на пространстве g^* определяет естественное отождествление

$$\eta : \mathbb{R}^n \simeq g^*,$$

где

$$\eta(\lambda) = \lambda_i e_i^*.$$

Пространство импульсов удовлетворяет соотношению

$$Y \subset Z^1(\mathbb{R}, G) \times \mathbb{R}^n \cong Z^1(\mathbb{R}, G) \times g^*.$$

Рассмотрим проекцию на g^* решения N системы Эйлера — Лагранжа (J, ω) на многообразии Y . Ввиду последнего уравнения системы (III.a.9) движение этой проекции $\lambda \in g^*$ удовлетворяет уравнению

$$(III.a.10) \quad d\lambda_i + \lambda_j p^k c_{ik}^j = 0.$$

П о я с н е н и е. Принимая t за параметр, можно задать кривую N отображением

$$t \mapsto \underbrace{(t; g(t); p^i(t), \lambda_i(t))}_{\parallel} \in J^1(\mathbb{R}, G) \times \mathbb{R}^n, \\ j^1(g)(t)$$

и тогда равенство (III.a.10) означает, что

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} + \lambda_j(t) p^k(t) c_{ik}^j = 0.$$

В соответствии с традицией принято, используя задаваемый метрикой изоморфизм $g \cong g^*$, переписывать равенство (III.a.10) в виде

$$(III.a.11) \quad dp^i + \sum_{j,k} p^j p^k c_{ik}^j = 0.$$

Это уравнения Эйлера; их $n = \dim G = \frac{1}{2} \dim T(G)$ штук ¹⁾.

(III. а. 12) З а м е ч а н и е. В качестве предвестника будущих событий рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где

$$\varphi = L(p) dt,$$

$$\det \|L_{p^i p^j}\| \neq 0.$$

¹⁾ Левое действие группы G на вариационной задаче дает по теореме Нётер $\dim G = n$ первых интегралов. В принципе это позволяет сократить число уравнений Эйлера—Лагранжа с $2n$ до n штук, фиксируя n постоянных. На практике это сведение и выполняется, в некотором смысле, уравнениями Эйлера; чтобы полностью понять механизм сведения, следует ознакомиться с методом редукции Марсдена—Вейнштейна (см. [1]).

Это общий невырожденный левоинвариантный лагранжиан. Заметим, что все предыдущее обсуждение вплоть до равенства (III.a.10) остается для него в силе; при этом

$$\lambda_i = L_{p_i}.$$

В частности, справедливо равенство

$$(III.a.13) \quad L(p) = \frac{1}{2} \left(\sum \mu_i (p^i)^2 \right), \quad \mu_i > 0.$$

Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим *присоединенное представление*

$$(III.a.14) \quad \text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Напомним, что по определению

$$\text{Ad}(g)(v) = (L_g)_* (R_{g^{-1}})_* (v),$$

где $g \in G$ и $v \in \mathfrak{g} = T_e(G)$. (Так как левый и правый сдвиги коммутируют, мы можем переписать правую часть в виде $(R_{g^{-1}})_* (L_g)_* (v)$.) Как хорошо известно, дифференциал

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \quad (\text{ad} = \text{Ad}_*)$$

отображения (III.a.14) задается формулой

$$\text{ad}(e_i)(e_j) = [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k.$$

Коприсоединенное представление — это, по определению, представление, двойственное к (III.a.14). Его дифференциал

$$\text{ad}^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*)$$

задается соотношением

$$\langle \text{ad}^*(e_i) e_k^*, e_j \rangle = - \langle e_k^*, \text{ad}(e_i) e_j \rangle = - c_{ij}^k.$$

Следовательно, для $\lambda = \lambda_i e_i^* \in \mathfrak{g}^*$

$$(III.a.15) \quad \text{ad}^*(e_i) \lambda = - \lambda_k c_{ij}^k e_j^*.$$

Напомним, что *орбита точки λ коприсоединенного представления $\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda) \subset \mathfrak{g}^*$* является образом отображения

$$G \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

$$g \mapsto \text{Ad}^*(g) \lambda.$$

Согласно равенству (III.a.15) касательное пространство

$$T_\lambda(\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda)) \subset \mathfrak{g}^*$$

является образом отображения

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*,$$

$$(III.a.16)$$

$$e_i \mapsto - \lambda_k c_{ij}^k e_j^*,$$

т. е.

$$(III.a.17) \quad T_{\lambda}(\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)) = \{p^i \lambda_k c_{ij}^k e_j^*, \text{ где } (p^1, \dots, p^n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Сравнивая (III.a.10) и (III.a.17), приходим к следующему результату:

Теорема Костанта—Сурьо (точнее, ее часть). *Решения $\lambda(t) \in \mathfrak{g}^*$ уравнений Эйлера лежат в орбитах коприсоединенного представления.*

На самом деле известно гораздо больше (см. [2] и указанные там работы). А именно, на орбитах коприсоединенного представления существует естественная симплектическая структура (Кириллов)¹⁾ и уравнения Эйлера имеют гамильтонов вид по отношению к этой симплектической структуре. Опишем ее вкратце. Ядро сюръективного отображения

$$\pi_{\lambda} : \mathfrak{g} \rightarrow T_{\lambda}(\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)),$$

определяемого отображением (III.a.16), задается формулой

$$(III.a.18) \quad \ker \pi_{\lambda} = \{p \in \mathfrak{g} : [p, e_i] \in \lambda^{\perp} \text{ для всех } e_i\},$$

где $\lambda^{\perp} \subset \mathfrak{g}$ — аннулятор элемента λ . Для векторов $p_1, p_2 \in \mathfrak{g}$ положим

$$(III.a.19) \quad \Omega(p_1, p_2) = \langle \lambda, [p_1, p_2] \rangle.$$

Из (III.a.18) следует, что форма Ω индуцирует невырожденную антисимметричную билинейную форму

$$\Omega : \mathfrak{g}/\ker \pi_{\lambda} \times \mathfrak{g}/\ker \pi_{\lambda} \rightarrow \mathbb{R},$$

и так как

$$T_{\lambda}(\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)) \cong \mathfrak{g}/\ker \pi_{\lambda},$$

то последняя индуцирует каноническую невырожденную 2-форму на $\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)$, инвариантную относительно действия группы G . Из уравнений Маурера—Картана (III.a.5) и определения (III.a.19) следует, что Ω при действии сюръективного отображения $G \rightarrow \mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)$ поднимается в $-d\lambda$ (при этом λ рассматривается как 1-форма на G). Следовательно, $d\Omega = 0$. Форма Ω и представляет собой симплектическую структуру Кириллова на орбитах коприсоединенного представления.

Наконец, можно непосредственно проверить, что для функции $H(\lambda) = \frac{1}{2}(\sum \lambda_i^2)$ на $\mathfrak{g}^*$ интегральные кривые векторного поля на $\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)$, соответствующего 1-форме $dH|_{\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)}$ при симплектическом изоморфизме $\Omega : T(\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda)) \xrightarrow{\sim} T^*(\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda))$, задаются уравнениями Эйлера (III.a.11).

¹⁾ О ее существовании знал уже Софус Ли. — Прим. перев.

(III.a.20) ПРИМЕР. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ *твердое тело* B , вращающееся вокруг неподвижной точки $0 \in B$ (рис. 22)¹⁾. Для наших целей можно считать тело B совокупностью большого числа частиц с радиус-векторами $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$ и массами m_i . Тогда условие «твердости» записывается так:

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \text{const}$$

(точки тела находятся на постоянных расстояниях друг от друга). Ясно, что *конфигурационное пространство* тела B , т. е. простран-

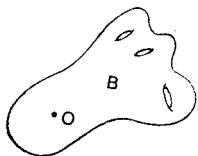


Рис. 22.

ство всех возможных положений тела, совпадает с группой $G = SO(3)$ собственных эвклидовых движений, оставляющих неподвижной точку 0 (предполагается, что не все векторы $\mathbf{x}_i$ лежат в одной плоскости). Сейчас мы осуществим *естественное* отождествление конфигура-

ционного пространства с многообразием реперов $\mathcal{F}_0(\mathbb{E}^3) \cong G$ (см. разд. с гл. 0; условимся иметь дело здесь лишь с ориентированными реперами).

Рассмотрим движение тела B по законам Ньютона в отсутствие внешних сил. Это движение задается решениями уравнений Эйлера — Лагранжа, ассоциированных с механической системой на многообразии G , у которой потенциальная энергия равна нулю (см. (I.d.18)). Или, что то же самое, лагранжиан на многообразии $J^1(\mathbb{R}, G)$ задается функцией кинетической энергии. Произведем отождествление

$$J^1(\mathbb{R}, G) \cong \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g},$$

где тривиализация

$$T(G) \cong G \times \mathfrak{g}$$

задается изоморфизмами

$$\begin{aligned} (L_g)_* : T_e(G) &\simeq T_g(G). \\ &\parallel \\ &\mathfrak{g} \end{aligned}$$

Ясно, что функция T не зависит от точки $t \in \mathbb{R}$ и элемента $g \in G$. Последнее свойство — это просто математическое выражение условия сохранения кинетической энергии при заданном жестком движении пространства $\mathbb{R}^3$. Таким образом, функция T определяет левоинвариантную метрику на группе G , и мы хотим сначала интерпретировать эту метрику в терминах геометрии тела.

¹⁾ На некоторое время векторы из $\mathbb{R}^3$ обозначаются жирными прямыми буквами. — *Прим. перев.*

а. Вывод этих уравнений

Используем для этого одну особенность пространства $\mathbb{R}^3$. А именно, существует изоморфизм

$$\eta : \mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{g},$$

где, по определению,

$\eta(\mathbf{v})$ — касательный вектор к вращению тела B вокруг вектора $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ с угловой скоростью $\|\mathbf{v}\|$

(рис. 23). Например,

$$\eta(1, 0, 0) = x^2 \partial / \partial x^3 - x^3 \partial / \partial x^2;$$

в правой части равенства $\mathfrak{g}$ интерпретируется как алгебра Ли векторных полей на пространстве $\mathbb{R}^3$ (см. замечание (III.a.29) ниже). При этом изоморфизме

$$\eta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = [\eta(\mathbf{v}), \eta(\mathbf{w})],$$

где $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ обозначает векторное произведение векторов $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

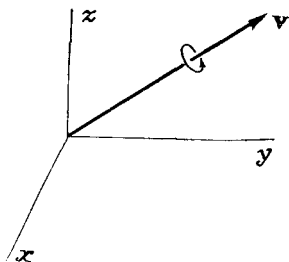


Рис. 23.

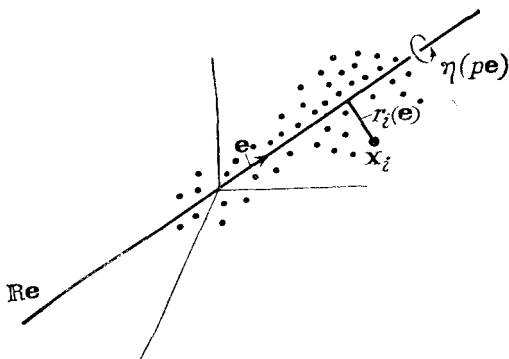


Рис. 24.

Предположим, что $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ — единичный вектор и $\eta(pe)$ — касательный вектор к вращению вокруг оси $\mathbb{R}e$ с угловой скоростью p . По определению кинетической энергии

$$T(\eta(pe)) = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i v_i^2 \right),$$

где v_i — скорость вектора $\mathbf{x}_i$. Но по определению угловой скорости

$$v_i = r_i(e) \cdot p,$$

где $r_i(e)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}_i$ до прямой $\mathbb{R}e$. Таким образом,

$$T(\eta(pe)) = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i(e)^2 \right) p^2$$

(см. рис. 24).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для заданного вектора $e \in \mathbb{R}^3$ единичной длины число

$$I_e(B) = \sum_i m_i r_i(e)^2$$

называется *моментом инерции* тела B относительно оси $\mathbb{R}e$.

Таким образом,

$$(III.a.21) \quad T(\eta(pe)) = \frac{p^2}{2} I_e(B).$$

Используя описанный изоморфизм η , рассмотрим кинетическую энергию T как квадратичную форму на $\mathbb{R}^3$. Согласно хорошо известному результату линейной алгебры, в $\mathbb{R}^3$ существует ортонормированный базис $e_1(B)$, $e_2(B)$, $e_3(B)$, в котором квадратичная форма T диагонализуется.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) Векторы $e_1(B)$, $e_2(B)$, $e_3(B)$ называются *главными осями инерции* тела B . ii) Числа $I_i = I_{e_i(B)}(B)$ называются его *главными моментами инерции*.

iii) Эллипсоид в $\mathbb{R}^3$ с главными осями вдоль векторов $e_i(B)$, заданный уравнением

$$(y^1)^2 I_1 + (y^2)^2 I_2 + (y^3)^2 I_3 = 1$$

в системе координат с базисом $e_1(B)$, $e_2(B)$, $e_3(B)$, называется *эллипсоидом инерции* $E(B)$, связанным с телом B .

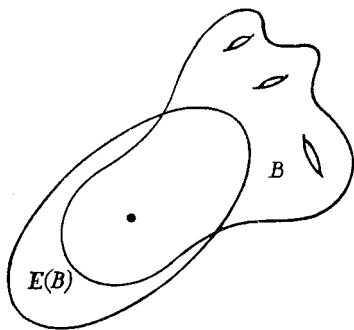


Рис. 25.

Интуитивно ясно, что эллипсоид $E(B)$ более всех других эллипсоидов похож на тело B (рис. 25). Как мы увидим ниже,

движение тела B совпадает с движением его эллипсоида инерции, поэтому при изучении движения твердого тела можно ограничиться случаем эллипсоида.

Будем теперь описывать движение тела B положением репера, определяемого главными осями инерции. При этом будем использовать обозначения теории подвижного репера из разд. с гл. 0. Из приведенного выше обсуждения ясно, что значение кинетической энергии на векторе $v \in \mathfrak{g}$ равно

$$T(v) = \frac{1}{2} (I_1 \langle \omega_2^3, v \rangle^2 + I_2 \langle \omega_1^3, v \rangle^2 + I_3 \langle \omega_1^2, v \rangle^2).$$

Например, если вектор v определяет инфинитезимальный поворот вокруг оси $e_1(B)$ с угловой скоростью p^1 , то

$$T(v) = I_1(p^1)^2 = I_1\langle\omega_2^3, v\rangle^2,$$

поскольку равенство

$$de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3$$

показывает, что за инфинитезимальный поворот вокруг оси e_1 «отвечает» коэффициент ω_2^3 . Таким образом, T есть кинетическая энергия, соответствующая левоинвариантной метрике

$$ds^2 = I_1(\omega_2^3)^2 + I_2(\omega_1^2)^2 + I_3(\omega_1^3)^2$$

на группе $O(3)$. Полагая ¹⁾

$$\tilde{\omega}^1 = \omega_2^3,$$

$$\tilde{\omega}^2 = \omega_1^3,$$

$$\tilde{\omega}^3 = \omega_1^2$$

и подставляя $\tilde{\omega}^i$ вместо ω^i в описанной выше общей ситуации, получим следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2}(I_1(p^1)^2 + I_2(p^2)^2 + I_3(p^3)^2).$$

З а м е ч а н и е. При $I_1 = I_2 = I_3$ мы имеем дело с «шаровидным» телом; в этом случае ds^2 — биинвариантная метрика на $O(3)$. Случай $I_1 = I_2 \neq I_3$ соответствует телу, симметричному относительно некоторой оси; при этом форма ds^2 инвариантна относительно правого действия некоторой однопараметрической подгруппы.

¹⁾ Выше мы использовали изоморфизм

$$\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{g}.$$

С другой стороны, биинвариантная метрика (форма Картана—Киллинга) определяет изоморфизм

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*.$$

Сквозной изоморфизм

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$$

дает

$$(1, 0, 0) \mapsto \tilde{\omega}^1,$$

$$(0, 1, 0) \mapsto \tilde{\omega}^2,$$

$$(0, 0, 1) \mapsto \tilde{\omega}^3.$$

Структурные уравнения

$$d\tilde{\omega}^1 = \tilde{\omega}^2 \wedge \tilde{\omega}^3,$$

$$d\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^3,$$

$$d\tilde{\omega}^3 = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2$$

(см. (0.с.4)) дают

$$c_{23}^1 = 1, \quad c_{13}^2 = -1, \quad c_{12}^3 = 1,$$

а все остальные c_{jk}^i равны 0 ($j < k$). С учетом замечания (III.а.12) получаем из уравнений Эйлера (III.а.10) привычные уравнения

$$d\lambda_1 + \frac{(I_3 - I_2)}{I_2 I_3} \lambda_2 \lambda_3 = 0,$$

$$d\lambda_2 + \frac{(I_1 - I_3)}{I_1 I_3} \lambda_1 \lambda_3 = 0,$$

$$d\lambda_3 + \frac{(I_2 - I_1)}{I_1 I_2} \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

которые можно найти в любой книге по механике. Орбитами коприсоединенного представления являются сферы

$$V = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = c$$

(это равенство выписано в пространстве $\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$; в пространстве $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^3$ орбиты коприсоединенного представления имеют вид эллипсоидов, так как изоморфизм $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$, определяемый метрикой, не совпадает с обычным, если только все моменты инерции не равны 1 (см. подстрочное примечание на стр. 165)). Симплектическая форма Кириллова равна

$$\Omega = \lambda_3 d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 - \lambda_2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 + \lambda_1 d\lambda_2 \wedge d\lambda_3,$$

а гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (I_1 (p^1)^2 + I_2 (p^2)^2 + I_3 (p^3)^2) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{I_1} + \frac{\lambda_2^2}{I_2} + \frac{\lambda_3^2}{I_3} \right), \end{aligned}$$

так как $\lambda_i = L_{p^i}$. Движение точки $\lambda(t) \in \mathfrak{g}^*$ описывается кривыми пересечения поверхностей уровня

$$V = c,$$

$$H = c^1$$

(см. рис. 26).

Задача определения движения точки $\lambda(t) \in \mathfrak{g}^*$ эквивалентна задаче определения оси инфинитезимального поворота

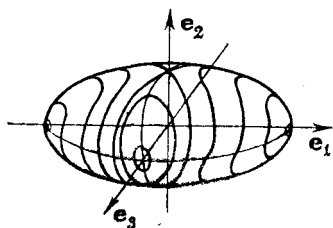


Рис. 26.

тела в пространстве (как было отмечено выше, эта ось пробегает замкнутую кривую на некотором эллипсоиде в $\mathbb{R}^3$). Оставшийся шаг — определение того, как тело поворачивается вокруг этой движущейся оси, — пожалуй, наиболее удобно выполнить, используя метод Пуансо, излагаемый в книгах по механике (см., например, [2, с. 125]).

3. Общие уравнения Эйлера

Мы сохраняем предыдущие обозначения. Предположим, что нам задано подпространство $W^* \subset \mathfrak{g}^*$. Условившись, что индексы меняются в пределах

$$1 \leq i, \quad j \leq n = \dim G; \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq s = \dim W^*;$$

$$s + 1 \leq \mu, \quad v \leq n,$$

выберем базис $\{\omega^i\}$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$ таким образом, чтобы векторы $\{\omega^\alpha\}$ образовывали базис подпространства W^* . Уравнения

$$\omega^\alpha = 0$$

порождают левоинвариантную пфаффову дифференциальную систему на группе G . Чтобы представить эту систему в нашей обычной форме, положим

$$V = (W^*)^\perp \subset \mathfrak{g},$$

$$X = G \times V \times \mathbb{R} \subset T(G) \times \mathbb{R}.$$

Заметим, что векторы $\{\omega^\mu\}$ задают базис в V^* , и обозначим через $(p^\mu; t)$ соответствующие координаты в $V \times \mathbb{R}$. Определим теперь пфаффову систему (I, ω) на многообразии X условиями ¹⁾

$$\theta^\alpha = \omega^\alpha = 0,$$

$$(III.a.22) \quad \theta^\mu = \omega^\mu - p^\mu dt = 0,$$

$$\omega = dt \neq 0.$$

Интегральные многообразия системы (I, ω) — это просто кривые в G , снабженные параметром t и всюду касающиеся левоинвариантного распределения $V \subset \mathfrak{g}$.

(III.a.23) ПРИМЕР. Пусть $H \subset G$ — замкнутая подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Рассмотрим кривую $\gamma \subset G/H$ с параметром t , задаваемую отображением

$$\gamma : N \rightarrow G/H, \quad N = [a, b],$$

¹⁾ Используемые ниже обозначения несколько отличаются от обозначений предыдущих глав. Теперь пфафхова система определяется условиями

$$\theta^i = 0, \quad \omega \neq 0$$

на многообразии $G \times V \times \mathbb{R}$. Ее интегральные многообразия соответствуют кривым в G , касательные к которым лежат в подрасслоении $\omega^\alpha = 0$ расслоения $T(G)$.

и через $(j^k \gamma)(t) \in J^k(\mathbb{R}, G/H)$ обозначим k -струю кривой γ в точке t . Тогда группа G действует на многообразии $J^k(\mathbb{R}, G/H)$. Пусть

$G_\gamma^k(t)$ — стационарная группа элемента $(j^k \gamma)(t)$.

Будем говорить, что γ — кривая *постоянного типа*, если все подгруппы $G_\gamma^k(t) \subset G$ попарно сопряжены (см. [34], [44]). Например, если группа G компактна, то общая кривая будет постоянного типа. Для кривых постоянного типа, удовлетворяющих (также выполняющемуся для общей кривой) условию $\dim G_\gamma^k(t) = 0$ при $k \gg 0$, определено (по существу единственное) поднятие Френе

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow f & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\gamma} & G/H \end{array}$$

Далее, отображением $f: N \rightarrow G$ определяется интегральное многообразие системы (I, ω) для некоторого подходящего подпространства $W^* \subset \mathfrak{g}^*$. В указанных выше работах можно найти множество примеров этой конструкции.

Возвращаясь к обсуждению общего случая, рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где

$$\varphi = L(p) dt.$$

С этой вариационной задачей ассоциирована дифференциальная система Эйлера—Лагранжа (J, ω) на многообразии $Y \subset X \times \mathfrak{g}^*$, и интегральные многообразия системы (J, ω) проектируются в кривые $\lambda(t) \in \mathfrak{g}^*$. Кроме того, касательное пространство к орбите $\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda)$ коприсоединенного представления в пространстве $\mathfrak{g}^*$ является образом отображения

$$\pi_\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow T_\lambda(\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda)) \subset \mathfrak{g}^*,$$

порождаемого отображением (III.a.16). Положим

$$(III.a.24) \quad V(\lambda) = \pi_\lambda(V) \subset T_\lambda(\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda)),$$

так что подпространства $V(\lambda)$ задают распределение на орбите $\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda)$ коприсоединенного представления.

(III.a.25) ТЕОРЕМА. Решения системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) на многообразии Y дают в проекции на $\mathfrak{g}^*$ кривые, лежащие в орбитах коприсоединенного представления $\mathcal{O}_{\text{Ad}^*}(\lambda)$. Эти кривые являются интегральными кривыми распределения $V(\lambda)$.

Доказательство. Следуя рецептуре разд. е гл. I, рассмотрим многообразие $Z = X \times \mathbb{R}^n$, где координаты в $\mathbb{R}^n$ обозначены

через $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. С внутренней точки зрения $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}^*$; этот изоморфизм задается равенством $\lambda = \lambda_i e_i^*$, где $\{e_i\} \subset \mathfrak{g}$ — базис, двойственный к базису $\{\omega^i\}$. Рассмотрим на многообразии Z дифференциальные формы

$$\psi = \varphi + \lambda_i \theta^i,$$

$$\Psi = d\psi.$$

Из (III.a.5) ясно, что

$$\Psi = (L_{p^\mu} - \lambda_\mu) dp^\mu \wedge dt + d\lambda_i \wedge \theta^i - \frac{1}{2} \lambda_i c_{ik}^j \omega \wedge \omega^k,$$

и поэтому система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$\partial/\partial p^\mu \lrcorner \Psi = (L_{p^\mu} - \lambda_\mu) dt = 0,$$

$$(III.a.26) \quad \partial/\partial \lambda_i \lrcorner \Psi = \theta^i = 0,$$

$$\partial/\partial \omega^i \lrcorner \Psi \equiv d\lambda_i + \frac{1}{2} \lambda_j p^\mu c_{i\mu}^j dt \bmod \{\theta^i\}.$$

Последнее равенство с учетом равенства (III.a.17) доказывает теорему. $\square$

З а м е ч а н и е. Последних n уравнений (III.a.26) недостаточно — по крайней мере на первый взгляд — для однозначного определения $\lambda(t)$ по заданным начальным условиям. Дело в том, что при помощи первых уравнений $L_{p^\mu} = \lambda_\mu$ нельзя, быть может, однозначно выразить $p^\mu(t)$ через $\lambda_\mu(t)$. Однако если вариационная задача невырождена (см. разд. е гл. I), то по крайней мере локально уравнения

$$(III.a.27) \quad d\lambda_i + \frac{1}{2} c_{i\mu}^j \lambda_j p^\mu dt = 0$$

можно переписать в терминах функций от переменных λ_i и поэтому мы будем называть уравнения (III.a.27) *уравнениями Эйлера, ассоциированными с задачей* $(I, \omega; \varphi)$.

(III.a.28) ПРИМЕР. Рассмотрим опять функционал

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_\gamma \kappa^2 ds, \quad \gamma \subset \mathbb{E}^2$$

(см. (II.b.1)), и выведем утверждение (II.b.3) *без вычислений*. В данном случае репер Френе определяет поднятие кривой γ в группу евклидовых движений $E(2)$ как интегральную кривую пфафовой системы $\omega^2 = 0$. Прежде чем идти дальше, сделаем одно замечание общего характера.

(III.a.29) З а м е ч а н и е. Алгебра Ли группы евклидовых движений $E(n)$, действующей на пространстве $\mathbb{R}^n$, порождается

векторными полями

$$e_i = \partial/\partial x^i,$$

$$e_i^j = x^j \partial/\partial x^i - x^i \partial/\partial x^j = -e_j^i$$

с коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = 0,$$

$$(III.a.30) \quad [e_i, e_j^k] = \delta_i^k e_j - \delta_j^k e_i,$$

$$[e_i^j, e_k^l] = \delta_i^l e_k^j - \delta_j^k e_i^l. \quad ^1)$$

Таким образом, орбиты коприсоединенного представления имеют вид

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda) \\ \cap \\ 0 \rightarrow \mathfrak{so}(n)^* \rightarrow e(n)^* \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow 0, \end{array}$$

где $\pi(\mathcal{O}_{Ad^*}(\lambda))$ — сфера в пространстве $\mathbb{R}^{n^*} \cong \mathbb{R}^n$.

При $n = 2$ правая часть последнего уравнения системы (III.a.30) обращается в нуль, и орбиты коприсоединенного представления представляют собой поверхности в пространстве $e(2)^*$, проектирующиеся на окружности в $\mathbb{R}^2$; этого наблюдения достаточно для вывода утверждения (II.b.3).

Поучительно, однако, явно проинтегрировать уравнения Эйлера для этого случая. На многообразии $X = E(2) \times \mathbb{R}^3$ (в $\mathbb{R}^3$ заданы координаты (t, q, r)) рассмотрим дифференциальную систему (I, ω) , задаваемую формами ²⁾

$$\theta^1 = \omega^1 - q dt = 0,$$

$$\theta^2 = \omega^2 = 0,$$

$$(III.a.31) \quad \theta^3 = \omega_1^2 - r dt = 0,$$

$$\omega = dt \neq 0.$$

Каждое интегральное многообразие системы (III.a.31) задает, если принять t за параметр, на многообразии X кривую, проектирующуюся в кривую $t \mapsto x(t) \in \mathbb{E}^2$, вдоль которой

$$(III.a.32) \quad \begin{array}{l} ds = q(t) dt, \\ \kappa(s) = r(t)/q(t). \end{array}$$

¹⁾ Эти равенства можно проверить непосредственно; они также следуют из уравнений (0.c.3), (iii), (iv) и уравнения Маурера—Картана.

²⁾ По-видимому, полезно сравнить эту постановку задачи с той, которая была рассмотрена в п. 1 разд. b гл. II. Вообще говоря, не существует однозначного способа представить вариационную задачу в виде $(I, \omega; \varphi)$. В рассматриваемой ситуации попытка получить уравнения Эйлера при $\omega^\alpha = 0$, $\omega \neq 0$, не вводя новой переменной t и не выписывая условия независимости в виде $\omega - qdt = 0$, где $q \neq 0$, привела бы к большой путанице.

Таким образом, функционал (II.b.1) соответствует вариационной задаче $(I, \omega; \varphi)$, где

$$\varphi = \frac{r^2}{2q} dt.$$

Используя структурные уравнения (0.c.3), получаем для уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\psi = \frac{r^2}{2q} dt + \lambda_1(\omega^1 - q dt) + \lambda_2\omega^2 + \lambda_3(\omega_1^2 - r dt),$$

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{r}{q} dr \wedge dt - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{q} \right)^2 dq \wedge dt + d\lambda_1 \wedge (\omega^1 - q dt) + d\lambda_2 \wedge \omega^2 \\ + d\lambda_3 \wedge (\omega_1^2 - r dt) - \lambda_1(\omega^2 \wedge \omega_1^2 + dq \wedge dt) + \lambda_2\omega^1 \wedge \omega_1^2 - \\ - \lambda_3 dr \wedge dt. \end{aligned}$$

Следовательно, система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается 1-формами

$$\partial/\partial r \lrcorner \Psi = \left(\frac{r}{q} - \lambda_3 \right) dt = 0,$$

$$\partial/\partial q \lrcorner \Psi = \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{q} \right)^2 - \lambda_1 \right) dt = 0,$$

$$\partial/\partial \lambda_i \lrcorner \Psi = \theta^i = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \partial/\partial \omega^1 \lrcorner \Psi &\equiv -d\lambda_1 + \lambda_2 r dt \bmod \{\theta^i\}, \\ \text{(III.a.33) (ii)} \quad \partial/\partial \omega^2 \lrcorner \Psi &\equiv -d\lambda_2 + \lambda_1 r dt \bmod \{\theta^i\}, \\ \text{(iii)} \quad \partial/\partial \omega_1^2 \lrcorner \Psi &\equiv -d\lambda_3 - \lambda_2 q dt \bmod \{\theta^i\}. \end{aligned}$$

Первые два уравнения дают

$$\begin{aligned} \text{(III.a.34)} \quad \lambda_3 &= r/q \quad (= \kappa), \\ \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{q} \right)^2 \quad \left(= -\frac{\kappa^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Уравнения (i) — (iii) системы (III.a.33) — это уравнения Эйлера. Линейная зависимость

$$-\lambda_1 \text{ (i)} + \lambda_2 \text{ (ii)} = 0$$

дает первый интеграл

$$\text{(III.a.35)} \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c.$$

Уравнение (iii) и первое равенство (III.a.34) дают

$$\lambda_2 = -\kappa',$$

где, согласно (III.a.32), производная берется по длине дуги. Поэтому из (III.a.34) и (III.a.35) вытекает, что

$$\kappa'^2 + \frac{\kappa^4}{4} = c,$$

а это не что иное, как первый интеграл $V_4 = c$ из п. 1 разд. в гл. II. Решениями уравнений Эйлера в этом случае служат замкнутые кривые

$$\lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_3^2 = 0,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c,$$

которые можно представить себе следующим образом. Орбитами коприсоединенного представления являются поверхности E_c в пространстве переменных $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \cong e(2)^*$. При обсуждавшейся выше проекции $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2)$ поверхность E_c проектируется на окружность $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c$. В данном случае распределение $V(\lambda) \subset T(E_c)$ при $c \neq 0$ совпадает с касательным расслоением, и потому условие «кривая является интегральной кривой распределения $V(\lambda)$ » не налагает ограничений. (Ситуация коренным образом изменяется, если рассматривать функционал $\frac{1}{2} \int \kappa^2 ds$ для кривых в $\mathbb{E}^n$, $n \geq 3$.) Тем не менее указанные выше замкнутые кривые на поверхности E_c и будут решениями уравнений Эйлера.

в. Исследование уравнений Эйлера для некоторых примеров из дифференциальной геометрии

1. Уравнения Эйлера, ассоциированные

с функционалом $\int (\kappa^2/2) ds$ для кривых в $\mathbb{E}^n$

В этом пункте мы применим теорему (III.a.25) к изучению вариационных задач для кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^n$ и попутно завершим доказательство теоремы (II.a.32) в случае $R = 0$.

Сначала установим обозначения. Чтобы подчеркнуть теоретико-групповой характер происходящего, отождествим многообразие реперов $\mathcal{F}(\mathbb{E}^n)$ с группой эвклидовых движений $E(n)$ и положим $X = E(n) \times \mathbb{R}^{n+1}$, где в $\mathbb{R}^{n+1}$ введены координаты $(t, q, r_1, \dots, r_{n-1}) = (t, q; r_j)$. Рассмотрим на многообразии X дифференциальную систему (I, ω) , порожденную уравнениями Пфаффа

$$\theta^1 = \omega^1 - q dt = 0,$$

$$\theta^\rho = \omega^\rho = 0, \quad 2 \leq \rho \leq n,$$

$$(III.b.1) \quad \theta_j^{i+1} = \omega_j^{i+1} - r_j dt = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\theta_j^k = \omega_j^k = 0, \quad k \geq j+2,$$

$$\omega = dt \neq 0.$$

Интегральные кривые системы (I, ω) параметризованы переменной t и проектируются в кривые $t \mapsto x(t) \in \mathbb{E}^n$ (обозначаемые через γ), вдоль которых векторы $e_i(t)$ удовлетворяют общим формулам Френе—Серре

$$(III.b.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= q(t) e_1(t), \\ \frac{de_j}{dt} &= r_j(t) e_{j+1}(t) - r_{j-1}(t) e_{j-1}(t) \end{aligned}$$

(мы полагаем $r_0(t) = r_n(t) = 0$). Кривизны кривой γ задаются равенствами

$$(III.b.3) \quad \kappa_1(s) = \frac{r_1(t)}{q(t)}, \dots, \kappa_{n-1}(s) = \frac{r_{n-1}(t)}{q(t)},$$

где $s(t)$ — длина дуги (таким образом, $ds(t)/dt = q(t)$). В случае невырожденной кривой, когда $\kappa_1 \dots \kappa_{n-1} \neq 0$, кривизны $\kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$ определяются кривой γ однозначно с точностью до коэффициента ± 1 и в соответствии с утверждением (I.b.7) однозначно определяют кривую с точностью до эвклидова движения. Однако на интегральных многообразиях системы (I, ω) некоторые из величин κ_j могут обращаться в нуль в изолированных точках или даже тождественно равняться нулю; например, условие того, что кривая γ лежит в некотором подпространстве $\mathbb{E}^l \subset \mathbb{E}^n$, записывается в виде

$$(III.b.4) \quad \kappa_l(s) \equiv 0. \quad ^1$$

Рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где

$$\varphi = \int l(q, r_1, \dots, r_{n-1}) dt.$$

Так как

$$\begin{aligned} ds &= q dt, \\ \kappa_j &= r_j/q, \end{aligned}$$

то мы получаем очевидное условие на функцию $L(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$:

$$(III.b.5) \quad \int l(q, r_1, \dots, r_{n-1}) dt = \int L(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) ds.$$

Будем рассматривать лишь такие вариационные задачи, для которых выполняется равенство (III.b.5). Интегральные многообразия $N \subset X$ системы (I, ω) определяют кривые $\gamma \subset \mathbb{E}^n$, и мы будем записывать наш функционал в виде

$$(III.b.6.) \quad \Phi(\gamma) = \int_{\gamma} L(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) ds.$$

¹⁾ Условие $\kappa_{l+1} \equiv \dots \equiv \kappa_{n-1} \equiv 0$ не является необходимым. Оно не выполняется, например, для интегрального многообразия системы (III.b.1), задаваемого прямой в $\mathbb{E}^3$, вдоль которой нормальный репер может вращаться произвольным образом.

(III.b.7) Замечание. Следует отметить два технических момента. Во-первых, в силу утверждения (I.b.9) существуют интегральные многообразия N системы (I, ω) , на которых $\kappa_1 \equiv \dots \equiv \kappa_j \equiv 0$, но $\kappa_{j+1} \neq 0$. Тогда многообразие N проектируется в прямую γ в $\mathbb{E}^n$ и потому является «странным» репером Френе для кривой γ ; в частности, функционал (III.b.6) *не* является интегралом от какой-либо функции кривизны кривой γ . Во-вторых, хотя область определения функционала Φ содержит все кривые $\gamma \subset \mathbb{E}^n$, для которых $\kappa_1 \dots \kappa_{n-1} \neq 0$, неясно, содержит ли она все C^∞ -кривые. Иными словами, задача минимизации функционала (III.b.6) в классе интегральных многообразий N системы (I, ω) может не совпадать с задачей минимизации этого функционала в классе всех гладких кривых в $\mathbb{E}^n$. Для рассматриваемых нами конкретных лагранжианов $L(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ совпадение этих задач будет следовать из специального вида уравнений Эйлера—Лагранжа.

Как было указано в замечании (III.a.29), существует естественное $\text{Ad}O(n)$ -инвариантное разложение $e(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{so}(n)$ алгебры Ли группы $E(n)$; запишем $\text{Ad}^*O(n)$ -инвариантное разложение пространства $e(n)^*$ (см. (III.a.30)):

$$(III.b.8) \quad e(n)^* = \text{span}\{e_i^*\} \oplus \text{span}\{e_i^{i*}\}.$$

В связи с этим разложением удобно записывать элемент $\lambda \in e(n)^*$ в виде

$$(III.b.9) \quad \begin{aligned} \lambda &= \mu \oplus \zeta, \\ \mu &= (\mu_i) \in \mathbb{R}^{n*}, \\ \zeta &= \|\zeta_i^j\| \in \mathfrak{so}(n)^*, \quad \zeta_i^i + \zeta_j^j = 0. \end{aligned}$$

Из теоремы (III.a.25) вытекает

(III.b.10) ТЕОРЕМА. Проекция $\mu(t)$ произвольного решения уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом (III.b.6), на $\mathbb{R}^{n*}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \|\mu(t)\| &= \text{const}, \\ \frac{d\mu}{ds} &= \kappa \cdot \mu, \end{aligned}$$

где

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & & & \\ -\kappa_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \kappa_{n-1} \\ & & & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Это немедленно следует из теоремы (III.a.25) и соотношений (III.a.30). Однако для последующего использования при доказательстве теоремы (II.a.33) стоит провести явные вычисления. Будем употреблять обозначение (III.b.9), а при выводе дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа будем следовать рецептуре разд. е гл. I. Таким образом, в нашем случае 1-форма $\psi = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha$ имеет вид

$$\psi = l(q; r_j) dt + \mu_i \omega^i + \frac{1}{2} \xi_j^i \omega_i^j - \mu_i q dt - \xi_{j+1}^i r_j dt,$$

где $r_n = 0$ и суммирование ведется по всем индексам, а не только по тем, для которых $i < j$ (отсюда коэффициент $1/2$). Для формы $\Psi = d\psi$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi = l_q dq \wedge dt + l_{r_j} dr_j \wedge dt - \mu_i dq \wedge dt - \xi_{j+1}^i dr_j \wedge dt \\ + \text{члены, не содержащие } dq, dr_j. \end{aligned}$$

Система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ содержит исходную дифференциальную систему (III.b.1), а также следующие пфаффовы уравнения:

$$\partial/\partial q \lrcorner \Psi = (l_q - \mu_i) dt = 0,$$

$$\partial/\partial r_j \lrcorner \Psi = (l_{r_j} - \xi_{j+1}^i) dt = 0.$$

Поэтому подмногообразие $Z_1 \subset Z$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} (III.b.11) \quad l_q &= \mu_j, \\ l_{r_j} &= \xi_{j+1}^i. \end{aligned}$$

Используя структурные уравнения (0.c.3), мы заключаем, что форма Ψ как билинейная форма на касательных пространствах $T_p(Z)$ в точках $p \in Z_1$ равна

$$\begin{aligned} (III.b.12) \quad \Psi = d\mu_i \wedge \omega^i - d\mu_i \wedge q dt + \frac{1}{2} d\xi_j^i \wedge \omega_i^j - d\xi_{j+1}^i \wedge r_j dt \\ + \mu_j \omega^i \wedge \omega_i^j + \frac{1}{2} \xi_j^i \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду равенств (III.b.1)

$$\begin{aligned} (III.b.13) \quad \partial/\partial \omega^i \lrcorner \Psi &= -d\mu_i + \mu_j \omega_i^j \\ &\equiv -d\mu_i + (\mu_{i+1} r_i - \mu_{i-1}) dt \bmod \{\theta^i\}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения $ds = qdt$ и $\kappa_j = r_j/q$, для части уравнений Эйлера, соответствующей $\mathbb{R}^{n*}$, получаем

$$\frac{d\mu_i}{ds} = \mu_{i+1} \kappa_i - \mu_{i-1} \kappa_{i-1},$$

откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Полученные до сих пор результаты справедливы для произвольного функционала (III.b.6). Далее, мы использовали только «легкую» часть уравнений Эйлера, соответствующую $\mathbb{R}^{n*}$. Чтобы двигаться дальше, нам понадобятся все уравнения Эйлера; для этого перепишем сначала (III.b.13) в виде

$$(III.b.14) \quad d\mu \equiv R\mu dt,$$

где

$$(III.b.15) \quad R = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & & & \\ -r_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & r_{n-1} \\ & & & -r_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

и знак « $\equiv$ » обозначает сравнение по модулю идеала $\{\theta^i\}$. Определим теперь антисимметричную матрицу $\mu \wedge \delta$ равенством

$$(\mu \wedge \delta)_j^i = \mu_j \delta_1^i - \mu_1 \delta_j^i,$$

где δ_j^i — стандартный символ Кронекера. Подстановка $\partial/\partial\omega_j^i \rfloor \Psi$ в равенство (III.b.12) дает

$$(III.b.16) \quad d\zeta \equiv ([\zeta, R] + \mu \wedge \delta) dt,$$

где $[\zeta, R]$ — обычный матричный коммутатор. Это уравнение представляет собой $\mathfrak{so}(n)^*$ -часть теоремы (III.a.25); специальный вид (III.b.15) матрицы R соответствует « $V(\lambda)$ -части» этой теоремы. Используя равенства (III.b.14) и (III.b.16), получаем следующее утверждение:

(III.b.17) ТЕОРЕМА. При $n \geq 4$ для вариационной задачи (III.b.6) с лагранжианом $L = L(\kappa_1)$, зависящим только от первой кривизны, на любом решении уравнений Эйлера мы имеем

$$r_3 \equiv \dots \equiv r_{n-1} \equiv 0.$$

Доказательство. Мы установим здесь справедливость этого результата лишь при дополнительном предположении:

$$\text{если некоторая кривизна } \kappa_j \equiv 0,$$

$$\text{то } \kappa_{j+1} \equiv \dots \equiv \kappa_{n-1} \equiv 0.$$

Этого будет достаточно для доказательства теоремы (III.a.33), и в то же время нам удастся избежать рассмотрения странных ин-

тегральных многообразий системы $(I, \omega)^1$. Стоит отметить, что если $r_{j+1} \equiv \dots \equiv r_{n-1} \equiv 0$, то уравнения (III.b.14) и (III.b.16) сводятся к таким же уравнениям в пространстве $\mathbb{E}^j$. Таким образом, мы можем предположить, что $r_{n-1} \not\equiv 0$, $r_{n-2} \not\equiv 0$, ..., $r_1 \not\equiv 0$; покажем, что при $n \geq 4$ это предположение ведет к противоречию. Ограничив функции r_i на соответствующую окрестность, можно считать, что

$$(III.b.18) \quad r_{n-2} \dots r_1 \neq 0.$$

В силу равенств (III.b.11),

$$(III.b.19) \quad \zeta_1^2 \neq 0, \quad \zeta_2^3 = \dots = \zeta_{n-1}^n = 0.$$

Этот аналог наличия «циклической координаты» в классическом вариационном исчислении — первопричина теоремы (III.b.17). Расписывая соотношения (III.b.16) и замечая, что $(\mu \wedge \delta)_j^i = 0$, если $i \neq 1$ и $j \neq 1$, получаем для $2 \leq j \leq i$

$$(III.b.20) \quad d\zeta_j^i \equiv (\zeta_{j+1}^i r_j - \zeta_{j-1}^i r_{j-1} - \zeta_j^{i-1} r_{i-1} + \zeta_j^{i+1} r_i) dt.$$

Если $n \geq 3$, то ввиду соотношения (III.b.19)

$$0 = d\zeta_{n-1}^n \equiv -\zeta_{n-2}^n r_{n-2} dt,$$

и так как $r_{n-2} \neq 0$, то

$$(III.b.21) \quad \zeta_{n-2}^n = 0.$$

Если $n \geq 4$, то равенства (III.b.19)—(III.b.21) дают

$$0 = d\zeta_{n-2}^{n-1} \equiv -\zeta_{n-3}^{n-1} r_{n-3} dt,$$

$$0 = d\zeta_{n-2}^n \equiv -\zeta_{n-3}^n r_{n-3} dt,$$

откуда следует, что

$$(III.b.22) \quad \zeta_{n-3}^{n-1} = \zeta_{n-3}^n = 0.$$

Если $n \geq 5$, то равенства (III.b.19)—(III.b.22) дают

$$0 = d\zeta_{n-3}^{n-2} \equiv -\zeta_{n-4}^{n-2} r_{n-4} dt,$$

$$0 = d\zeta_{n-3}^{n-1} \equiv -\zeta_{n-4}^{n-1} r_{n-4} dt,$$

$$0 = d\zeta_{n-3}^n \equiv -\zeta_{n-4}^n r_{n-4} dt.$$

Продолжая действовать таким же образом, заключаем, что для

$$(III.b.32) \quad \zeta_j^i = 0, \text{ за единственным исключением: } \zeta_1^2 \neq 0.$$

¹⁾ Заметим, что если кривая γ лежит в подпространстве $\mathbb{E}^l \subset \mathbb{E}^n$, то $(e_{l+1}, \dots, e_n)$ -часть обобщенного репера Френе можно произвольно поворачивать, не меняя при этом значения $L(x_1)$. Фактически вариационная задача для функционала опускается до вариационной задачи на многообразии Штифеля всех «частичных реперов» $(x; e_1, e_2)$, но с точки зрения вычислений удобнее работать на группе.

Покажем, что (III.b.23) приводит к противоречию при $n \geq 4$. Для этого воспользуемся оставшейся частью уравнений Эйлера (III.b.16)

$$d\zeta_1^i \equiv (\zeta_2^i r_1 - \zeta_1^{i-1} r_{i-1} + \zeta_1^{i+1} r_i + \mu_i) dt.$$

При $i \geq 3$ условия (III.b.23) дают

$$(III.b.24) \quad 0 = d\zeta_1^i \equiv (-\zeta_1^{i-1} r_{i-1} \delta_3^i + \mu_i) dt.$$

В частности, при $i \geq 4$ имеем

$$\mu_4 = \dots = \mu_n = 0.$$

Полагая в равенстве $d\mu_i \equiv (\mu_{i+1} r_i - \mu_{i-1} r_{i-1}) dt$ (см. (III.b.14)) $i = 4$, получаем

$$\mu_3 r_3 = 0 \Rightarrow \mu_3 = 0.$$

Повторение этого рассуждения дает

$$\mu_2 = \mu_1 = 0.$$

И наконец, полагая $i = 3$ в равенстве (III.b.24), видим, что

$$0 = d\zeta_1^3 \equiv (-\zeta_1^2 r_2) dt,$$

откуда

$$r_2 = 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $r_{n-2} \neq 0$, $n \geq 4$. $\square$

(III.b.25) З а м е ч а н и я. При $n = 3$ условие (III.b.23) принимает вид

$$\zeta_1^3 = 0.$$

Используя соотношение $d\zeta_1^3 = 0$, можно теперь проинтегрировать уравнения Эйлера, ассоциированные с функционалом $\frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2 ds$ для кривой $\gamma \subset \mathbb{E}^3$, как это было сделано в разд. б гл. II. Во всяком случае, объединив рассуждения п. 3 разд. б гл. II с теоремой (III.b.17), мы завершаем доказательство теоремы (II.a.33) в случае $R = 0$. На самом деле мы доказали даже гораздо больше—равенства (II.b.30) дают явное описание фазового портрета уравнений Эйлера для этого случая.

Кажется правдоподобным, что теорема (III.b.17) допускает следующее обобщение: если лагранжиан имеет вид $L = L(\kappa_1, \dots, \kappa_{j-1})$, то любое решение уравнений Эйлера—Лагранжа лежит в некотором пространстве $\mathbb{E}^{2j-1}$. При $j = 1$ это просто утверждение о том, что геодезические являются прямыми.

2. Некоторые задачи п. 1, но для кривых в S^n

В этом пункте, используя уравнения Эйлера и орбиты коприсоединенного представления, мы определим решения уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом

$$(III.b.26) \quad \frac{1}{2} \int_{\gamma} \chi^2 ds, \quad \gamma \subset S^n.$$

Как и для кривых в $\mathbb{E}^n$, общая кривая $\gamma \subset S^n$ обладает (по существу единственным) репером Френе с кривизнами $\tau_1(s), \dots, \tau_{n-1}(s)$, определяющими кривую с точностью до эвклидова движения. Нами будет доказана

(III.b.27) ТЕОРЕМА. *Уравнения Эйлера, ассоциированные с функционалом (III.b.26), квазиинтегрируемы в квадратурах. На любом решении γ мы имеем $\tau_3 \equiv \dots \equiv \tau_{n-1} \equiv 0$, так что кривая γ лежит на некоторой сфере S^3 . Если положить $\kappa = \tau_1$ и $\sigma = \tau_2$, то фазовый портрет кривой γ задается эллиптической кривой*

$$\begin{aligned} \sigma \kappa^2 &= c_1 \\ (\kappa')^2 &= \frac{\kappa^4}{4} - \kappa^2 - \frac{c_1}{\kappa^2} + c_2. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и я. i) Степень рациональной функции $p(x) = x^4/4 - x^2 - c_1/x^2 + c_2$ равна 6, и у нее двойной нуль в точке $x = \infty$. Поэтому для общего набора постоянных c_1, c_2 алгебраическая кривая $y^2 = p(x)$ имеет 4 точки ветвления на x -сфере, и, значит, ее род равен единице (см. [36], [59]).

ii) Установив справедливость теоремы (III.b.27), мы завершим и доказательство теоремы (II.a.33).

При условии что индексы меняются в пределах $0 \leq i, j \leq n$, структурные уравнения для многообразия $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^{n+1}) \cong O(n+1)$ реперов $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ в начале координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ выглядят так:

$$(III.b.28) \quad \begin{aligned} de_i &= \omega_i^j e_j, \quad \omega_j^i + \omega_i^j = 0, \\ d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \end{aligned}$$

Рассмотрим на многообразии $X = O(n+1) \times \mathbb{R}^{n+1}$, где в $\mathbb{R}^{n+1}$ заданы координаты $(t, q_0, \dots, q_{n-1}) = (t; q_i)$, пфаффову систему (I, ω) , определяемую 1-формами

$$(III.b.29) \quad \begin{aligned} \theta_i^{i+1} &= \omega_i^{i+1} - q_i dt = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \theta_i^{i+k} &= \omega_i^{i+k} = 0, \quad k \geq 2, \\ \omega &= dt \neq 0. \end{aligned}$$

Под действием отображения $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow S^n$, определяемого формулой

$$(e_0, e_1, \dots, e_n) \mapsto e_0,$$

интегральные многообразия N системы (I, ω) проектируются в кривые $\gamma \subset S^n$, у которых элемент длины дуги имеет вид $ds = q_0 dt$. Если $q_1 \dots q_{n-1} \neq 0$, то кривая N является поднятием Френе кривой γ , а ее кривизны задаются равенствами

$$\tau_1 = q_1/q_0, \dots, \tau_{n-1} = q_{n-1}/q_0.$$

Условие того, что кривая γ лежит в евклидовой подсфере $S^k \subset S^n$, записывается в виде

$$(III.b.30) \quad \tau_k \equiv 0.$$

Рассмотрим, как и ранее, вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где

$$(III.b.31) \quad \varphi = l(q_0, \dots, q_{n-1}) dt = L(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) ds.$$

Например, функционал (III.b.26) определяется функцией

$$l(q) = (q_1)^2/2q_0.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ будем использовать координаты $\lambda = (\lambda_j^i)$, где $\lambda_j^i + \lambda_i^j = 0$. Следуя алгоритму, описанному в разд. е гл. I, положим

$$\psi = l(q) dt + \frac{1}{2} (\lambda_j^i \theta_j^i)$$

на $X \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, причем суммирование производится по всем индексам (этим объясняется появление коэффициента 1/2). Ввиду соотношений (III.b.28) и (III.b.29), 2-форма $\Psi = d\psi$ равна

$$(III.b.32) \quad \Psi = (l_{q_i} - \lambda_{i+1}^i) dq_i \wedge dt + \frac{1}{2} d\lambda_j^i \wedge \theta_j^i + \frac{1}{2} \lambda_j^i \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

и поэтому система Картана порождается уравнениями Пфаффа

$$(i) \quad \partial/\partial \lambda_j^i \lrcorner \Psi = \theta_j^i = 0,$$

$$(III.b.33) \quad (ii) \quad \partial/\partial q_i \lrcorner \Psi = (l_{q_i} - \lambda_{i+1}^i) dt = 0,$$

$$(iii) \quad \partial/\partial \omega_i^j \lrcorner \Psi = -d\lambda_j^i + [\omega, \lambda]_j^i = 0,$$

где $[\omega, \lambda]$ обозначает матричный коммутатор. Уравнение (iii) (без индексов) есть уравнение Эйлера

$$d\lambda - [\omega, \lambda] = 0.$$

Обозначая символом « $\equiv$ » сравнение по модулю идеала $\{\theta^i\}$, получаем уравнения Эйлера

$$(III.b.34) \quad \begin{aligned} (i) \quad d\lambda_{i+1}^i &\equiv (q_{i+1}\lambda_{i+2}^i - q_{i-1}\lambda_{i+1}^{i-1}) dt, \\ (ii) \quad d\lambda_j^i &\equiv (q_j\lambda_{j+1}^i - q_{i-1}\lambda_j^{i-1} + q_i\lambda_j^{i+1} - q_{j-1}\lambda_{j-1}^i) dt, \\ & j \geq i + 2. \end{aligned}$$

Отметим, что при $j = i + 1$ уравнение (ii) сводится к уравнению (i), поскольку $\lambda_{i+1}^{i+1} = \lambda_i^i = 0$.

На основании равенств (III.b.31) и (III.b.33), (ii) мы заключаем, что для лагранжиана $L = L(\tau_1)$, не зависящего от переменных $\tau_2, \dots, \tau_{n-1}$,

$$(III.b.35) \quad \lambda_3^2 = \dots = \lambda_n^{n-1} = 0.$$

Если предположить, что кривая γ не лежит ни в какой подсфере $S^k \subset S^n$ ни при каком $k < n$, то, как и при доказательстве теоремы (III.b.17), мы можем считать, что

$$(III.b.36) \quad q_0 \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_{n-1} \neq 0.$$

Дальше доказательство разбивается на несколько шагов.

Шаг 1. Покажем, что

$$(III.b.37) \quad \lambda_{i+2}^i = 0 \quad \text{для} \quad i \geq 1.$$

Доказательство. Используя уравнение (III.b.34), (i) и равенства (III.b.35), (III.b.36), получаем

$$0 = d\lambda_n^{n-1} \equiv -q_{n-1}\lambda_n^{n-2} dt,$$

откуда

$$\lambda_n^{n-2} = 0.$$

Повторяя вычисление при $i = n - 2$ и используя уже доказанное, получаем

$$0 = d\lambda_{n-1}^{n-2} \equiv (q_{n-1}\lambda_n^{n-2} - q_{n-2}\lambda_{n-1}^{n-3}) dt \equiv -q_{n-2}\lambda_{n-1}^{n-3} dt,$$

откуда

$$\lambda_{n-1}^{n-3} = 0.$$

По индукции

$$\lambda_{j+1}^i = 0 \quad \text{для} \quad j \geq i \Rightarrow \lambda_{k+2}^k = 0 \quad \text{для} \quad k \geq i - 1.$$

Вместе с равенством (III.b.35) это и дает утверждение (III.b.37).

Шаг 2. Теперь покажем, что

$$(III.b.38) \quad \lambda_{i+3}^i = 0 \quad \text{для} \quad i \geq 1.$$

Доказательство. Уравнения (III.b.34), (ii) вместе с уравнениями (III.b.35)—(III.b.37) дают

$$0 = d\lambda_{i+2}^i \equiv (q_{i+2}\lambda_{i+3}^i - q_{i-1}\lambda_{i+2}^{i-1}) dt, \quad i \geq 2.$$

Как и при доказательстве равенства (III.b.37), отправляясь от $i = n - 2$ и «спускаясь вниз», получаем

$$0 = d\lambda_{i+2}^i \equiv -q_{i-1}\lambda_{i+2}^{i-1} dt, \quad i \geq 2,$$

откуда и следует равенство (III.b.28)

Шаг 3. Докажем, что

$$(III.b.39) \quad \lambda_{i+4}^i = 0 \quad \text{для} \quad i \geq 0.$$

Доказательство. Уравнения (III.b.34), (ii) вместе с равенствами (III.b.35)—(III.b.38) дают

$$0 = d\lambda_{i+3}^i \equiv (q_{i+3}\lambda_{i+4}^i - q_{i-1}\lambda_{i+3}^{i-1}) dt, \quad i \geq 1.$$

Как и выше, по индукции получаем

$$0 = d\lambda_{i+3}^i \equiv -q_{i-1}\lambda_{i+3}^{i-1} dt, \quad i \geq 1,$$

откуда и вытекает (III.b.39).

Действуя таким же образом, получаем равенство

$$(III.b.40) \quad \lambda_{i+j}^i = 0 \quad \text{для} \quad i \geq 0, \quad j \geq 4.$$

Беря $L = (\tau_1)^2/2$ и используя равенство (III.b.31), (III.b.33), (ii), (III.b.35) и (III.b.37)—(III.b.40), приходим к заключению, что единственные отличные от нуля λ_j^i ($i < j$) — это

$$\lambda_1^0 = l_{q_0} = -\frac{1}{2}(q_1/q_0)^2 = -\kappa^2/2,$$

$$(III.b.41) \quad \lambda_2^1 = l_{q_1} = q_1/q_0 = \kappa,$$

$$\lambda_2^0 = ?,$$

$$\lambda_3^0 = ?,$$

где мы положили

$$\kappa = \tau_1, \quad \sigma = \tau_2.$$

В силу (III.b.34), (ii)

$$0 = d\lambda_3^1 \equiv (-q_0\lambda_3^0 - q_2\lambda_2^1) dt,$$

откуда, ввиду (III.b.41),

$$(III.b.42) \quad \lambda_3^0 = -\sigma\kappa.$$

Аналогично равенства (III.b.34), (i) и (III.b.37) дают

$$d\lambda_2^1 \equiv -q_0\lambda_2^0 dt.$$

Обозначая штрихом производную по длине дуги $ds = q_0 dt$, получаем из (III.b.41)

$$(III.b.43) \quad \lambda_2^0 = -\kappa'.$$

Теперь все λ_j^i определены.

В силу (III.b.34), (ii)

$$d\lambda_3^0 \equiv -q_2 \lambda_2^0 dt,$$

откуда, ввиду (III.b.42), (III.b.43),

$$(-\sigma\kappa)' = \sigma\kappa',$$

а значит,

$$2\sigma\kappa' = -\sigma'\kappa,$$

т. е.

$$(\sigma\kappa^2)' = 0.$$

Это дает первый интеграл

$$(III.b.44) \quad V_1 = \sigma\kappa^2 = c_1$$

на решениях уравнений Эйлера. В силу (III.b.34), (ii)

$$d\lambda_2^0 \equiv (q_2 \lambda_3^0 + q_0 \lambda_2^1 - q_1 \lambda_1^0) dt.$$

Используя (III.b.41)—(III.b.44), получаем

$$-\kappa'' = -\sigma^2\kappa + \kappa - \frac{\kappa^3}{2},$$

откуда

$$\kappa'' = \frac{\kappa^3}{2} - \kappa + \frac{c_1}{\kappa^3},$$

что дает еще один первый интеграл

$$(III.b.45) \quad V_2 = (\kappa')^2 - \frac{\kappa^4}{4} + \kappa^2 + \frac{c_1}{\kappa^2} = c_2.$$

Для завершения доказательства теоремы (III.b.27) остается показать, что

$$(III.b.46) \quad q_3 \equiv 0.$$

Действительно, отсюда следует, что $\tau_3 \equiv \dots \equiv \tau_{n-1} \equiv 0$, что ввиду равенств (III.b.30), (III.b.44), (III.b.45) и доказывает теорему.

Соотношения (III.b.39), (III.b.34), (ii) и (III.b.42) дают

$$0 = d\lambda_4^0 \equiv -q_3 \lambda_3^0 dt \equiv q_3 \sigma\kappa dt,$$

откуда

$$q_3 \equiv 0,$$

так как если $\sigma \equiv 0$, то либо $\sigma \equiv 0$, либо $\kappa \equiv 0$, а любое из этих равенств означает, что $q_\kappa \equiv 0$. $\square$

По нашему мнению, приведенные доказательства теорем (III.b.17) и (III.b.27) убедительно свидетельствуют, что теорема (III.a.25) не только представляет теоретический интерес, но и полезна практически.

3. Уравнения Эйлера, ассоциированные с невырожденными линейчатыми поверхностями

Любой функционал первого порядка

$$\Phi(\gamma) = \int L(t, x(t), x'(t)) dt$$

на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^n$ (задаваемых отображениями $t \mapsto x(t)$), инвариантный относительно сдвигов по времени и евклидовых движений, имеет вид

$$\Phi(\gamma) = \int_{\gamma} L(\|x'(t)\|) dt.$$

Если функция $L(r)$ однородна, то решения ассоциированных уравнений Эйлера—Лагранжа — это просто геодезические (т. е. прямые, см. пример (II.a.23)). То же справедливо в любом пространстве постоянной кривизны.

Однако представляют интерес и функционалы, определенные на кривых, лежащих в других однородных пространствах. Например, можно рассмотреть грассманиан $G(k, n)$, состоящий из k -мерных плоскостей Λ , проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^n$. Как хорошо известно, существует каноническое отождествление

$$(III.b.47) \quad T_{\Lambda}(G(k, n)) \cong \text{Hom}(\Lambda, \Lambda^{\perp}),$$

и действие на многообразии $G(k, n)$ подгруппы изотропии плоскости $\Lambda_0 = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ в группе $O(n)$ индуцирует на касательном пространстве действие, совпадающее с действием группы $O(n-k) \times O(k)$ в пространстве $T_{\Lambda_0}(G(k, n)) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$, определенным равенством

$$(III.b.48) \quad (A \times B) \cdot \xi = A \circ \xi \circ B^{-1},$$

где $A \in O(n-k)$, $B \in O(k)$ и $\xi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$.

Доказательство. Будем представлять точки многообразия $G(k, n)$ их плюккеровыми координатами

$$p(\Lambda) = e_1 \wedge \dots \wedge e_k \in \Lambda^k \mathbb{R}^n,$$

где $e_1, \dots, e_k$ — ортонормированный базис в плоскости Λ . (Та-

ким образом, $p(\Lambda)$ — вектор единичной длины, определенный с точностью до коэффициента ± 1 , т. е. $p(\Lambda) \in \mathbb{R}P^{(n)}_k$). Определим для кривой $\Lambda(t) = \text{span}\{e_1(t), \dots, e_k(t)\}$ элемент $\xi e_i \in \Lambda^\perp$ условием

$$(III.b.49) \quad (\xi e_i, v) = \left(\frac{de_i}{dt}(0), v \right), \quad v \in \Lambda^\perp.$$

Так как $\left(\frac{de_i}{dt}(0), e_i \right) = 0$, то

$$\frac{dp(\Lambda(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha-1} e_1 \wedge \dots \wedge \xi e_{\alpha} \wedge \dots \wedge e_n,$$

и поэтому отождествление (III.b.47) задается отображением (мы полагаем $\Lambda'(t) = dp(\Lambda(t))/dt$)

$$\Lambda'(0) \mapsto \xi,$$

где элемент $\xi \in \text{Hom}(\Lambda, \Lambda^\perp)$ определен равенством (III.b.49). $\square$

В случае $n = 2m$ и $k = m$ рассмотрим «срединный» грассман $G(m, 2m)$. Касательный вектор к нему задается линейным отображением

$$\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(обратите внимание на то, что эти $\mathbb{R}^m$ «различны», т. е. отображение ξ определено лишь с точностью до преобразования (III.b.48)). Чтобы определить инварианты отображения ξ относительно действия указанной группы изотропии, рассмотрим образ E единичной сферы в $\mathbb{R}^m$ при этом отображении. Ясно, что E — эллипсоид (возможно, вырожденный, если отображение ξ — особое), и выбирая в качестве части базиса в $\mathbb{R}^m$ главные оси этого эллипсоида, можно привести отображение ξ к нормальной форме

$$(III.b.50) \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_m \end{pmatrix}.$$

Пусть $L(\xi) = L(\xi_1, \dots, \xi_m)$ — произвольная функция переменных $\xi_1, \dots, \xi_m$, инвариантная относительно перестановок переменных и замен знаков $\xi_i \mapsto -\xi_i$. Тогда, используя отождествление (III.b.47) и обозначая через $\Lambda'(t) \in \text{Hom}(\Lambda(t), \Lambda(t)^\perp)$ касательный вектор к кривой $\gamma = \{\Lambda(t)\} \subset G(m, 2m)$, мы получаем, что функционал

$$\Phi(\gamma) = \int L(\Lambda'(t)) dt$$

задает хорошо определенную инвариантную вариационную задачу первого порядка на многообразии $G(m, 2m)$. Например,

лагранжиан

$$L(\xi) = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}$$

определяет длину дуги. Другой крайний случай — это функционал

$$(III.b.51) \quad \Phi(\gamma) = \int \|\Lambda'(t)\| dt,$$

соответствующий лагранжиану $L(\xi) = |\xi_1 \dots \xi_m|$.

Будем говорить, что кривая γ невырождена, если $\det \|\Lambda'(t)\| \neq 0$.

Ч а с т н ы й с л у ч а й. При $m = 3$ можно изобразить кривую γ как линейчатую поверхность в $\mathbb{R}P^3$ (рис. 27), и тогда

$$\|\Lambda'(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{расстояние от } \Lambda(t+h) \text{ до } \Lambda(t)}{h}.$$

Например, если мы представим себе движение стержня, причем при вращении стержня вокруг неподвижной точки не производится

никакой работы, то величина $\frac{1}{2} (\det \|\Lambda'(t)\|)^2$ — это вид кинетической энергии. Докажем следующий результат:

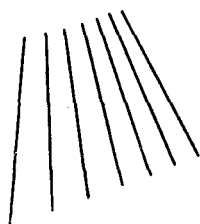


Рис. 27. $\Lambda(t)$ — кривая в $\mathbb{R}P^3$.

(III.b.52) ТЕОРЕМА. Решения уравнений Эйлера-Лагранжа, соответствующих функционалу (III.b.51) для случая $m = 2$, даются орбитами однопараметрических подгрупп группы $O(4)$ в многообразии $G(2, 4)$.

Хорошо известно, что в любом римановом симметрическом пространстве геодезические являются орбитами однопараметрических подгрупп (см. [53]), поэтому теорема (III.b.52) наводит на такой

(III.b.53) ВОПРОС. Всегда ли решения уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с произвольным однородно-инвариантным функционалом первого порядка, определенным на симметрическом пространстве, даются геодезическими?

(Конечно, здесь надо предполагать, что сравниваемые кривые невырождены в том смысле, что функционал отличен на них от нуля.)

Доказательство теоремы (III.b.52). Заметим прежде всего, что невырожденные кривые в многообразии $G(2, 4)$ обладают поднятиями Френе на многообразие $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}^4) \cong O(4)$, матрица Маурера—

Картана которого имеет вид (см. [34, [35], [44])

$$(III.b.54) \quad \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & \omega_2^4 \\ -\omega_1^3 & 0 & 0 & \omega_3^4 \\ 0 & -\omega_2^4 & -\omega_3^4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, поднятия Френе задаются интегральными многообразиями инвариантной дифференциальной системы

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0$$

на группе $O(4)$; эта дифференциальная система просто задает условие того, что реперы в подпространствах $\Lambda(t)$ и $\Lambda(t)^\perp$ выбраны таким образом, чтобы диагонализировать производную $\Lambda'(t) \in \text{Hom}(\Lambda(t), \Lambda(t)^\perp)$.

Рассмотрим на многообразии $X = O(4) \times \mathfrak{so}(4) \times \mathbb{R}$ дифференциальную систему

$$(III.b.55) \quad \begin{aligned} \theta_i^j &= \omega_i^j - q_i^j dt = 0, \\ q_1^4 &= q_2^3 = 0, \\ \omega &= dt \neq 0. \end{aligned}$$

Функционал (III.b.51) соответствует вариационной задаче $(I, \omega; \varphi)$, где

$$(III.b.56) \quad \begin{aligned} \varphi &= L dt, \\ L &= \frac{|q_1^3 q_2^4|}{l}, \end{aligned}$$

$$l = \sqrt{(q_1^3)^2 + (q_2^4)^2} = ds/dt.$$

Следуя алгоритму разд. е гл. I, рассмотрим 1-форму

$$\psi = L dt + \frac{1}{2} \lambda_j^i \theta_i^j$$

на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^6$, где $\mathbb{R}^6$ — пространство антисимметричных матриц $\lambda = \|\lambda_j^i\|$. Тогда 2-форма $\Psi = d\psi$ задается равенством

$$(III.b.57) \quad \Psi = \left(L_{q_i^j} - \lambda_j^i \right) dq_i^j \wedge dt + \frac{1}{2} d\lambda_j^i \wedge \theta_i^j + \lambda_j^i \omega_k^j \wedge \omega_k^i,$$

где мы, понятно, полагаем формально $q_1^4 = q_2^3 = dq_1^4 = dq_2^3 = 0$.

Система Картана имеет вид

$$(i) \quad \partial/\partial q_i^j \lrcorner \Psi = (L_{q_i^j} - \lambda_j^i) dt = 0, \\ i < j \text{ и } (i, j) \neq (1, 4) \text{ или } (2, 3), \\ (III.b.58) \quad (ii) \quad \partial/\partial \lambda_i^j \lrcorner \Psi = \theta_j^i = 0, \\ (iii) \quad -d\lambda + [\omega, \lambda] = 0.$$

Уравнения (iii) — это уравнения Эйлера.

Из (i) и (III.b.56) получаем

$$(III.b.59) \quad \lambda_2^1 = \lambda_4^3 = 0.$$

Обозначая символом « $\equiv$ » сравнение по модулю идеала $\{\theta_i^j\}$, заключаем на основании соотношений (III.b.55) и уравнений Эйлера (III.b.58), (iii), что

$$0 = d\lambda_2^1 \equiv (\lambda_4^1 q_2^4 - \lambda_3^2 q_1^3) dt.$$

Отсюда

$$(III.b.60) \quad \lambda_4^1 q_2^4 = \lambda_3^2 q_1^3.$$

Аналогично из равенства $d\lambda_1^3 = 0$ следует, что

$$(III.b.61) \quad \lambda_4^1 q_1^3 = \lambda_3^2 q_2^4.$$

Равенства (III.b.60), (III.b.61) дают

$$\lambda_3^2 (q_1^3)^2 = \lambda_3^2 (q_2^4)^2.$$

Рассмотрим отдельно два случая.

С л у ч а й 1: $q_1^3 \neq \pm q_2^4$. [З а м е ч а н и е. Если $q_1^3 = -q_2^4$, то, обратив e_1 , мы можем добиться того, чтобы $q_1^3 = q_2^4$. Кривые на многообразии $G(2, 4)$, удовлетворяющие условию

$$(III.b.62) \quad q_1^3 = q_2^4 \neq 0,$$

естественно назвать *омбиликами*; в нашей теории они играют особую роль.] В этом случае

$$(III.b.63) \quad \lambda_3^2 = 0 = \lambda_4^1;$$

второе равенство следует также из равенств (III.b.60), (III.b.61) и того, что $q_1^3 \neq q_2^4$. Из (III.b.58), (iii) и (III.b.59) получаем

$$0 = d\lambda_3^2 \equiv (\lambda_4^2 q_3^4 - \lambda_3^1 q_1^2) dt.$$

Это соотношение вместе с аналогичным соотношением для $0 = d\lambda_1^4$ дает

$$(III.b.64) \quad \lambda_4^2 q_3^4 = \lambda_3^1 q_1^2, \\ \lambda_4^2 q_1^2 = \lambda_3^1 q_3^4.$$

Как и выше, отсюда вытекает, что

$$\lambda_4^2 (q_3^4)^2 = \lambda_4^2 (q_1^2)^2,$$

$$\lambda_3^1 (q_3^4)^2 = \lambda_3^1 (q_1^2)^2.$$

Возможны два подслучая.

Подслучай 1а: $q_1^2 \neq \pm q_3^4$. [Заметим, что в случае равенства мы опять можем выбрать знак «+».] Тогда

$$(III.b.65) \quad \lambda_4^2 = 0 = \lambda_3^1,$$

и соотношения (III.b.59), (III.b.63), (III.b.65) дают

$$(III.b.66) \quad \lambda_j^i = 0 \quad \text{для всех } i, j.$$

Таким образом, решением уравнений Эйлера служит $\lambda = 0$.

Всё сказанное справедливо для любой функции $L = L(q_1^3, q_2^4)$. В рассматриваемом подслучае равенства (III.b.56) и (III.b.58), (i) дают

$$\frac{q_2^4}{l} - \frac{(q_1^3)^2 (q_2^4)}{l^3} = 0,$$

$$\frac{q_1^3}{l} - \frac{(q_2^4)^2 q_1^3}{l^3} = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$(III.b.67) \quad q_1^3 = 0 = q_2^4,$$

в противоречие с предположением. Таким образом, подслучай 1а не может иметь места, и мы заключаем, что

$$q_1^2 = q_3^4.$$

Тогда равенства (III.b.64) дают

$$(III.b.68) \quad \lambda_3^1 = \lambda_4^2.$$

Заметим, что все остальные $\lambda_j^i = 0$ ввиду равенств (III.b.59) и (III.b.63). Уравнение (III.b.58), (iii) дает

$$d\lambda_3^1 = 0 = d\lambda_4^2.$$

Поэтому из (III.b.58), (i) вытекает, что

$$\left(\frac{q_2^4}{l}\right)^3 = \lambda_4^2 = \text{const},$$

$$\left(\frac{q_1^3}{l}\right)^3 = \lambda_3^1 = \text{const}.$$

Если нормировать наш параметр l так, чтобы он равнялся 1, то эти равенства принимают вид

$$q_2^4 = c_2^4, \quad q_1^3 = c_1^3,$$

где c_i^j — постоянные.

III. Уравнения Эйлера

Наконец, мы можем поворачивать реперы Френе $\{e_1(t), e_2(t)\}$ и $\{e_3(t), e_4(t)\}$ на один и тот же угол $\theta(t)$, удовлетворяющий условию (см. (III.b.67)),

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -q_1^2 = -q_3^4.$$

Тогда кривая $\Lambda(t) \subset G(2, 4)$ остается той же самой при

$$q_1^2 = q_3^4 = 0.$$

Таким образом, матрица Маурера—Картана отображения $t \mapsto g(t) \in O(4)$ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2^4 \\ -c_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2^4 & 0 & 0 \end{pmatrix} dt,$$

и это отображение задает однопараметрическую подгруппу¹⁾.

С л у ч а й 2: $q_1^3 \equiv q_2^4$. Те же рассуждения применимы и в этом случае, и мы не будем входить в подробности.

¹⁾ Как хорошо известно, из (I.b.7) следует, что условием того, что отображение

$$f: \mathbb{R} \rightarrow G$$

t -прямой в группу Ли G является однопараметрической подгруппой (или левым сдвигом такой подгруппы), служит выполнение равенства

$$f^*(\omega) = c \, dt \quad (c = \text{const})$$

для любой левоинвариантной 1-формы ω на G . Например, кривые в $\mathbb{E}^3$ с постоянными кривизной и кручением в точности совпадают с орбитами однопараметрических подгрупп группы $E(3)$.

IV

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ И ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

а. Граничные условия

Рассмотрим на некотором многообразии X вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$ с одной независимой переменной. В разд. е гл. I мы каноническим образом связали с задачей $(I, \omega; \varphi)$ многообразие Y и пфаффову систему (J, ω) на Y , по определению являющуюся системой Эйлера—Лагранжа. Однако мы пришли к системе (J, ω) только на основании эвристического истолкования условия

$$(IV.a.1) \quad \left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} = 0,$$

где N_t — семейство интегральных кривых системы (I, ω) , $N_0 = N$. Не было доказано, что для решений N системы (J, ω) условие (IV.a.1) выполняется. На самом деле это утверждение даже не имеет смысла без определения граничных условий, наложенных на вариацию N_t . Конечно, проблема снимается, если многообразие N компактно; в этом случае равенство (IV.a.1) следует из уравнений Эйлера—Лагранжа. Однако граничные условия

$$v_{\partial N} = 0$$

(см. (I.d.3)), наложенные для получения уравнений Эйлера—Лагранжа на нормальные векторные поля к многообразию N , удовлетворяющие условиям (I.b.15), чересчур стеснительны по двум причинам.

Прежде чем обсуждать их, заметим, что, как показывает анализ вывода уравнений (I.d.14), фактически использовались не условия (I.d.3), а более слабые условия

$$(IV.a.2) \quad \langle \varphi, v \rangle = \langle \theta^\alpha, v \rangle = 0 \quad \text{на } \partial N.$$

Точное утверждение состоит в следующем:

Если $N \in \mathcal{V}(I, \omega)$ — решение уравнений Эйлера—Лагранжа (I.d.14), то равенство (IV.a.1) справедливо для всех семейств N_t , инфинитезимальная вариация которых удовлетворяет условиям (IV.a.2).

Но и это не вполне нас устраивает.

(IV.a.3) ПРИМЕР. Вернемся к проведенному в разд. b гл. II анализу функционала (II.b.19). Используя равенства (II.b.18), мы видим, что условия (IV.a.2) на вариацию $\gamma_t \subset \mathbb{E}^3$ состоят в том, что все кривые γ_t должны иметь одинаковые реперы Френе в концевых точках кривой γ (точнее говоря, это условие

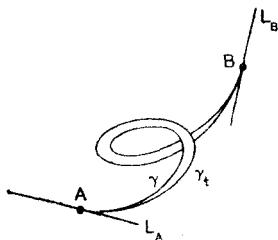


Рис. 28.

должно выполняться с точностью до первого порядка по t). Ясно, однако, что «правильные» условия состоят в том, что кривые γ_t должны иметь одинаковые концы A, B и одинаковые касательные L_A, L_B (рис. 28); соприкасающиеся двумерные плоскости не обязаны совпадать.

В данном случае ясно, что существует «много» инфинитезимальных вариаций $[v] \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$ с компактным носителем, так что уравнения Эйлера—Лагранжа заведомо служат *необходимым* условием справедливости равенства (I.d.14) для вариаций, удовлетворяющих правильным граничным условиям, но достаточность их ни в коей мере не очевидна.

(IV.a.4) ПРИМЕР. Рассмотрим задачу Делоне, задаваемую функционалом (II.b.31) на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}$ постоянной кривизны $\kappa \equiv 1$. Здесь граничные условия (IV.a.2) такие же, как и в предыдущем примере, и к ним можно предъявить те же самые претензии (см. замечание вслед за утверждением (II.b.32)).

Важнее другое — в данном случае явно сомнительно, что существует «много» инфинитезимальных вариаций $[v] \in T_N(\mathcal{Y}(I_0, \omega))$ с компактными носителями, удовлетворяющих условию $\kappa \equiv 1$ (мы используем обозначения разд. b гл. II). Поэтому неясно даже, будут ли уравнения Эйлера—Лагранжа (I.d.14) необходимы для справедливости равенства (IV.a.1); при всех своих достоинствах система (II.b.34) (с ограничением $\kappa \equiv 1$) может быть никак не связана с задачей минимизации функционала (II.b.31).

Как уже несколько раз отмечалось, задача $(I, \omega; \varphi)$ может представлять собой «замаскированный» вариант сложной задачи высшего порядка с ограничениями. Оказывается, что получение правильных граничных условий и уравнений Эйлера—Лагранжа в общем случае требует обращения к полному производному флагу (см. разд. c гл. I). Поэтому лучше поставить другую цель — сформулировать набор *достаточных* условий на задачу $(I, \omega; \varphi)$, гарантирующих, что наша система Эйлера—Лагранжа дает правильный ответ. Эти условия должны формулироваться не слишком

сложно и, что, пожалуй, самое главное, должны срабатывать в «интересных случаях». Трудно, конечно, ожидать, что эти условия могут обслужить все вариационные задачи, но они должны быть применимы к достаточно широкому кругу примеров.

Формулировка и изучение одного такого набора условий и являются целью настоящего раздела.

Рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$ на некотором многообразии X с ассоциированной дифференциальной системой Эйлера—Лагранжа (J, ω) на многообразии импульсов Y (эта конструкция описана в разд. е гл. I). Как будет объяснено далее, суть в том, чтобы *сформулировать граничные условия на многообразии Y , а не на X* . Без существенной потери общности можно считать, что

$$(IV.a.5) \quad \varphi = L\omega,$$

где L — функция на X . Именно так обстоит дело во всех наших примерах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ называется *хорошо поставленной*, если выполняются следующие два условия:

i) задача $(I, \omega; \varphi)$ невырождена и

$$\dim Y = 2m + 1$$

(см. разд. е гл. I; отсюда следует, в частности, что поле характеристических направлений $\Psi_Y^\perp \subset T(Y)$ задает линейное подрасслоение);

ii) можно определить подрасслоение $U^* = \text{span} \{\theta^1, \dots, \theta^m\}$ расслоения $W^* = \text{span} \{\theta^1, \dots, \theta^s\}$, такое что на многообразии Y распределение

$$(IV.a.6) \quad K^* = \text{span} \{\omega, \theta^1, \dots, \theta^m\} \subset T^*(Y)$$

является вполне интегрируемым подрасслоением ранга $m + 1$, трансверсальным к линейному подрасслоению $\Psi_Y^\perp \subset T(Y)$, причем (самое важное!)

$$(IV.a.7) \quad \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_s = 0$$

на Y .

З а м е ч а н и я. i) Конечно, вторую часть этого определения можно сформулировать инвариантно, потребовав, чтобы распределение K^* было системой Фробениуса и чтобы $Y \subset U^*$ (см. замечание (I.e. 8)). Выбранная формулировка обусловлена вычислительными целями.

ii) Заметим, что вследствие равенства (IV.a.5)

$$\psi_Y \in K^*.$$

iii) Решающий момент состоит в том, что требуемые условия должны выполняться на Y , а не на X .

Вернемся к общей ситуации. Вполне интегрируемая пфафова система K^* определяет расслоение многообразия Y на m -мерные слои. Такое впечатление, что во всех примерах фактор-многообразия многообразия Y по этому расслоению существует, поэтому мы просто предположим, что так происходит всегда, и будем обозначать это фактормногообразие через

$$Q = Y/K^*.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть многообразие Q *приведенным пространством импульсов*.

Заметим, что

$$K^* = \tilde{\omega}^* T^*(Q),$$

где $\tilde{\omega} : Y \rightarrow Q$ — проекция; в частности, $\dim Q = m + 1$. Все введенные выше символы можно свести в одну диаграмму:

$$(IV.a.8) \quad \begin{array}{ccc} & Y \subset W^* \subset T^*(X) & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow \pi \\ Q & & X \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предположим, что вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ хорошо поставлена. Тогда *граничные условия на допустимые вариации* определяются равенствами

$$(IV.a.9) \quad \omega = \theta^1 = \dots = \theta^m = 0.$$

Пояснение. Пусть $N = \{a \leq s \leq b\}$ и

$$f : N \rightarrow X$$

— интегральное многообразие системы (I, ω) . *Допустимая вариация* задается, по определению, отображением

$$F : N \times [0, \varepsilon] \rightarrow X,$$

таким что если положить $F(s, t) = f_t(s)$, то

$$f_t : N \rightarrow X$$

представляет собой интегральное многообразие системы (I, ω) . Утверждение о том, что *допустимые вариации должны удовлетворять граничным условиям* (IV.a.9), означает по определению, что

$$(IV.a.10) \quad F^* \omega = F^* \theta^1 = \dots = F^* \theta^m = 0 \quad \text{на} \quad \partial N \times [0, \varepsilon].$$

Как и обычно, ниже нам понадобится использовать не всю вариацию $\{f_t\}$, а только ее часть до второго порядка по t (т. е.

f_0 и $\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$). Тогда условие (IV.a.10) принимает вид

$$F^*\omega = F^*\theta^1 = \dots = F^*\theta^m = 0 \text{ в } T^*(\partial N \times [0, \varepsilon])|_{\partial N \times \{0\}}.$$

Для большей ясности изложения мы будем работать со всей вариацией.

Положим $N_t = f_t(N) \subset X$. Вообще говоря, существуют (и не в единственном числе) кривые $\Gamma_t \subset Y$, для которых $\pi(\Gamma_t) = N_t$. Если положить $\gamma_t = \tilde{\omega}(\Gamma_t) \subset Q$ в нашей основной диаграмме (IV.a.8), то граничные условия означают, что у всех кривых γ_t

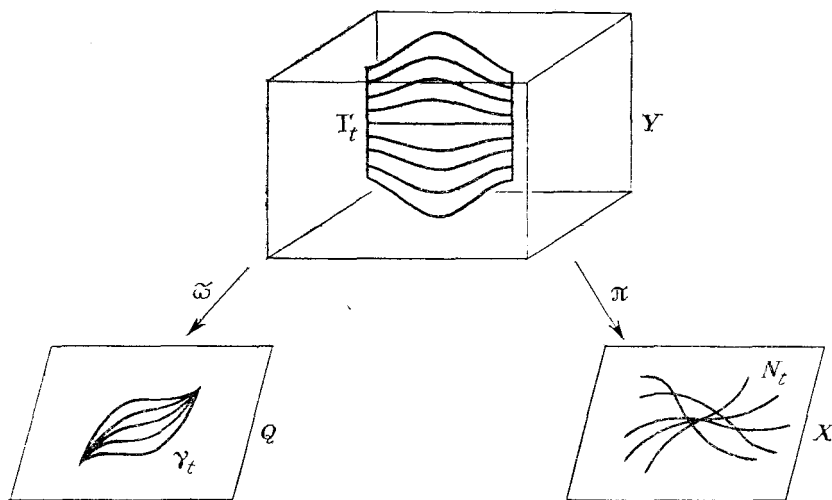


Рис. 29.

общие концы. Эту ситуацию можно изобразить примерно, как на рис. 29, где вертикальные прямые представляют слои расслоения $\tilde{\omega}$. Всё это прояснится далее на примерах.

(IV.a.11) З а м е ч а н и е. Говоря о решении уравнений Эйлера—Лагранжа (I.d.14), «соединяющем две концевые точки», полезно держать в памяти следующую картину. Слои W_q слоения пространства импульсов Y , определенного идеалом K^* , локально выглядят как m -мерные плоскости, определяемые первыми m координатами, — слои стандартного расслоения пространства $\mathbb{R}^{2m+1}$. Семейство интегральных многообразий Γ_t дифференциальной системы $\pi^*\theta^1 = \dots = \pi^*\theta^s = 0$, $\pi^*\omega \neq 0$ на многообразии Y , два конца которых лежат на заданных слоях W_{q_1} и W_{q_2} соответственно, проектируется на X в допустимую вариацию $N_t = \pi(\Gamma_t)$, удовлетворяющую граничным условиям (IV.a.9).

(Пользуясь языком алгебраической геометрии, можно назвать слои W_q «раздутыми» граничными условиями.) Характеристические направления 2-формы Ψ_Y (т. е. поле направлений $\Psi_Y^1 \subset \subset T(Y)$) трансверсальны слоям W_q . Если зафиксировать слой W_{q_1} , то характеристические кривые, выходя из W_{q_1} , заполняют некоторое многообразие $\mathcal{C}(W_{q_1})$ размерности $m+1$, и из соображений размерности мы ожидаем, что в общем положении многообразие $\mathcal{C}(W_{q_1})$ пересекает W_{q_2} в одной точке. Таким образом, можно ожидать, что по заданным q_1 и q_2 найдутся (однозначно определенные) точки $y_1 \in W_{q_1}$, $y_2 \in W_{q_2}$ и решение системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) соединяющее точки y_1 и y_2 . Это решение и будет экстремалью рассматриваемого функционала, соответствующей начальным условиям q_1, q_2 .

Конечно, столь приятная картина будет наблюдаться не всегда. Достаточные условия для этого, аналогичные классическим условиям Лежандра и Якоби, будут приведены в теоремах (IV.c.7) и (IV.d.1) ниже. Здесь мы докажем следующую теорему:

(IV.a.12) ТЕОРЕМА. *Если многообразие N удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа для хорошо поставленной вариационной задачи, то*

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} = 0$$

для любой допустимой вариации N_t многообразия N , удовлетворяющей граничным условиям (IV.a.9).

Доказательство. Будем следовать обозначениям разд. d гл. I и использовать уравнения Эйлера—Лагранжа в форме (I.d.14). Таким образом, интегральное многообразие $N \subset X$ системы (I, ω) диффеоморфно отрезку $\{a \leq s \leq b\}$, и на многообразии X существуют такие функции λ_α , что

$$(IV.a.13) \quad v \rfloor d(\varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha) \equiv 0 \bmod N$$

для всех векторов v , касательных к объемлющему многообразию X в точках многообразия N . [Заметим, для дальнейшего, что поскольку $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_s = 0$ на многообразии N , то условие (IV.a.13) совпадает с условием

$$(IV.a.14) \quad v \rfloor d(\varphi + \lambda_i \theta^i) \equiv 0 \bmod N$$

для $1 \leq i \leq m$, ибо $\theta^\alpha \equiv 0 \bmod N$.]

Предположим теперь, что векторное поле $v \in C^\infty(N, T(X))$ касается допустимой вариации $\{N_t\}$ многообразия N , удовлетворяющей граничным условиям (IV.a.9). Тогда ввиду равенств

(I.b.15), (IV.a.5) и (IV.a.9)

$$(IV.a.15) \quad (i) \quad v \lrcorner d\theta^\alpha + d(v \lrcorner \theta^\alpha) \equiv 0 \bmod N,$$

$$(ii) \quad \langle \varphi, v \rangle = \langle \theta^1, v \rangle = \dots = \langle \theta^m, v \rangle = 0 \quad \text{на } \partial N.$$

В силу предположения (I.b.5) и теоремы Стокса,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} &= \int_N v \lrcorner d\varphi + \int_{\partial N} v \lrcorner \varphi \\ &= \int_N v \lrcorner d\varphi \quad (\text{ввиду (IV.a.15)}) \\ &= - \int_N v \lrcorner d(\lambda_\alpha \theta^\alpha) \quad (\text{ввиду (IV.a.13)}) \\ &= \int_N d(v \lrcorner \lambda_\alpha \theta^\alpha) \quad (\text{ввиду замечания iii) к (I.b.15)}) \\ &= \int_{\partial N} v \lrcorner (\lambda_i \theta^i) \quad (\text{ввиду теоремы Стокса и (IV.a.7)}) \\ &= 0 \quad (\text{ввиду (IV.a.15), (ii)}). \quad \square \end{aligned}$$

Прежде чем привести ряд примеров хорошо поставленных вариационных задач, нам будет удобно сформулировать одно условие общего характера, обеспечивающее «хорошую постановку».

IV.a.16) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ сильно невырожденна (см. разд. е гл. I). Тогда она хорошо поставлена.*

Доказательство. Это немедленно следует из теоремы (I.e.34) и того факта, что пфафова система $L^* = \text{span} \{ \omega, \theta^1, \dots, \theta^s \}$ вполне интегрируема. $\square$

З а м е ч а н и е. Отметим, что в этом случае $L^* = K^*$.

IV.a.17) ПРИМЕР. Рассмотрим невырожденную классическую вариационную задачу, обсуждавшуюся в примере (I.e.18). Как можно установить непосредственно или с помощью предложения (IV.a.16), эта задача хорошо поставлена, причем

$$\begin{aligned} K^* &= \text{span} \{ dx; \theta^1, \dots, \theta^m \} \\ &= \text{span} \{ dx; dy^1, \dots, dy^m \}. \end{aligned}$$

Таким образом, граничные условия (IV.a.9) имеют следующий геометрический смысл. Допустимые вариации задаются 1-струями

$$x \mapsto \left(x, y(x, t), \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right), \quad a \leq x \leq b,$$

IV. Граничные условия

кривых $x \mapsto y(x, t)$ в $\mathbb{R}^m$. Граничные условия (IV.a.10) означают, что векторное поле вариации

$$v = \frac{\partial y^\alpha(x, 0)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial^2 y^\alpha(x, 0)}{\partial x \partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^\alpha}$$

удовлетворяет условиям

$$\langle dx, v \rangle = \langle dy^1, v \rangle = \dots = \langle dy^m, v \rangle = 0$$

на ∂N . Это эквивалентно тому, что

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, a) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, b) = 0,$$

т. е. граничные условия такие, как мы и ожидали, — рассматриваются пути, соединяющие две фиксированные точки в $\mathbb{R}^m$.

[З а м е ч а н и е. Условие $\langle dx, v \rangle = 0$ на ∂N бессодержательно ввиду нашего выбора параметризации интегральных элементов.] Основная диаграмма (IV.a.8) имеет в данном случае вид

$$\begin{array}{ccc} & Y = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^{2m} & \\ \swarrow \tilde{\omega} & & \searrow \pi \\ J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) & & J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \end{array}$$

и интерпретация граничных условий очевидна (рис. 30).

(IV.a.18) ПРИМЕР. Рассмотрим невырожденную вариационную задачу второго порядка из примера (I.e.23). Снова убеждаемся непосредственно или с применением предложения (IV.a.16), что эта задача хорошо поставлена и

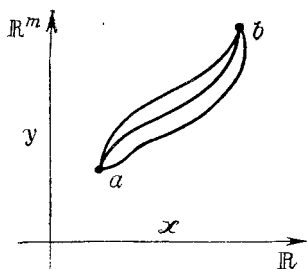


Рис. 30. Семейство кривых с общими концевыми точками.

$$\begin{aligned} K^* &= \text{span} \{ dx; \theta^1, \dots, \theta^m; \\ &\quad \dot{\theta}^1, \dots, \dot{\theta}^m \} \\ &= \text{span} \{ dx; dy^1, \dots, \\ &\quad dy^m; d\dot{y}^1, \dots, d\dot{y}^m \}. \end{aligned}$$

Допустимая вариация задается 2-струями

$$x \mapsto \left(x; y(x, t); \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}; \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right), \quad a \leq x \leq b,$$

кривых $x \mapsto y(x, t)$ в $\mathbb{R}^m$. Векторное поле вариации выглядит так:

$$v = \frac{\partial y^\alpha(x, 0)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial^2 y^\alpha(x, 0)}{\partial t \partial x} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^\alpha} + \frac{\partial^3 y^\alpha(x, 0)}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial}{\partial \ddot{y}^\alpha},$$

и опять, как и ожидалось, оказывается, что граничные условия (IV.a.9) имеют вид

$$\frac{\partial y(a, 0)}{\partial t} = \frac{\partial y(b, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y(a, 0)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 y(b, 0)}{\partial t \partial x} = 0.$$

Таким образом, допустимые вариации задаются семействами кривых, соединяющих две точки и имеющих в этих точках одинаковые касательные. Основная диаграмма (IV.a.8) выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} & Y = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow \pi \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m & & J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \end{array}$$

и снова интерпретация граничных условий очевидна (рис. 31).

(IV.a.19) ПРИМЕР. Возвращаясь к замечанию (II.b.25), рассмотрим вариационную задачу, ассоциированную с функционалом (II.b.26). Согласно предположению (IV.a.16), эта задача тоже хорошо поставлена, причем (в обозначениях (II.b.18))

$$\begin{aligned} K^* &= \text{span} \{ \omega, \theta^1, \dots, \theta^5 \} \\ &= \text{span} \{ \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3 \}. \end{aligned}$$

Основная диаграмма (IV.a.8) имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & Y = X \times \mathbb{R}^5 & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow \pi \\ \mathcal{F}(\mathbb{E}^3) = \mathcal{Q} & & X = \mathcal{F}(\mathbb{E}^3) \times \mathbb{R}^2 \end{array}$$

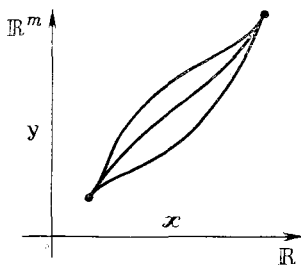


Рис. 31. Семейство кривых с общими концевыми точками и касательной в каждой из этих точек.

т. е. приведенное пространство импульсов есть просто многообразие реперов. Поэтому допустимые вариации представляют собой семейства кривых $\gamma_t \subset \mathbb{E}^3$, соединяющих две точки A, B и имеющих в этих точках одинаковые реперы Френе, т. е. одинаковые касательные и одинаковые соприкасающиеся двумерные пло-

скости (рис. 32). Заметим, что кривые γ_i не обязаны иметь все одинаковую длину и кривизна в концевых точках кривых не должна быть у всех них одной и той же.

(IV.a.20) ПРИМЕР. Рассмотрим вариационную задачу, ассоциированную с функционалом (II.b.19) (подобное рассмотрение

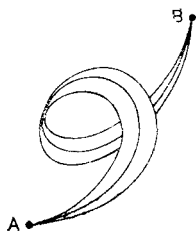


Рис. 32.

можно провести и когда этот функционал определен на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^n$). В этом случае предложение (IV.a.16) неприменимо (при $n \neq 2$), так как вариационная задача, ассоциированная с функционалом (II.b.19), не является сильно невырожденной. Однако, как было доказано в предложении (II.b.23), эта вариационная

задача невырожденна, и многообразие импульсов Y задается равенствами (II.b.22). Покажем, что эта вариационная задача с граничными условиями (IV.a.9), где в обозначениях (II.b.18)

$$\begin{aligned} K^* &= \text{span} \{ \omega, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4 \} \\ &= \text{span} \{ \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3 \}, \end{aligned}$$

хорошо поставлена. Действительно, согласно предложению (II.b.23), $\dim Y = 9$ и поэтому $m = 4$ и $\text{rank } K^* = 5 = m + 1$. Далее, из структурных уравнений (0.c.3) следует, что система K^* вполне интегрируема. Наконец, решающее условие (IV.a.7) следует из равенств (II.b.22) (фактически нам требуется лишь равенство $\lambda_5 = 0$ на Y). Основная диаграмма (IV.a.8) имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & Y \subset X \times \mathbb{R}^5 & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow \pi \\ Q & & X = \mathcal{F}(\mathbb{E}^3) \times \mathbb{R}^2 \end{array}$$

где приведенное пространство импульсов является многообразием Штифеля

$$Q = \{ (x, e_1) : x \in \mathbb{E}^3, e_1 \text{ — вектор единичной длины} \}.$$

Таким образом, допустимые вариации, удовлетворяющие граничным условиям, задаются семействами кривых $\gamma_i \subset \mathbb{E}^3$, соединяющих две точки и имеющих в этих точках одинаковые касательные; это и есть правильные условия.

(IV.a.21) ПРИМЕР. Рассмотрим задачу Делоне, ассоциированную с функционалом (II.b.31). Этот пример оказывается руководящим:

(IV.a.22) Существует однопараметрическое семейство способов хорошо поставить вариационную задачу, ассоциированную с функ-

ционалом (II.b.31). Один из них соответствует исходной постановке этой задачи, объясненной в замечании после утверждения (II.b.32).

Доказательство. Прежде всего надо показать, что наша вариационная задача невырожденна. Будем следовать обозначениям, использовавшимся в гл. II при обсуждении функционала (II.b.31), и рассмотрим пространство импульсов $Y \subset X_0 \times \mathbb{R}^5$, определенное уравнениями (II.b.35). Выберем на многообразии Y корепер

$$\{\omega, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \eta = -\lambda_4 d\tau, d\lambda_1, d\lambda_4\}$$

(таким образом, $d\lambda_2 = \eta - \tau d\lambda_4$). Ввиду равенств (II.b.35)

$$\psi_Y = \omega + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2 + \lambda_4 \theta^4,$$

$$\Psi_Y = d\omega + d\lambda_1 \wedge \theta^1 + \eta \wedge \theta^2 + d\lambda_4 \wedge (\theta^4 + \tau \theta^2) + \lambda_1 d\theta^1 + \lambda_2 d\theta^2 + \lambda_4 d\theta^4,$$

где все формы считаются ограниченными на многообразии Y . Ясно, что

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^4 = C \Theta$$

для некоторой постоянной C , где

$$\Theta = \omega \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \eta \wedge \theta^2 \wedge d\lambda_4 \wedge \theta^4 \wedge \theta^3 \wedge \theta^5$$

— невырожденная форма объема на Y . Записывая форму Ψ_Y в виде

$$\Psi_Y = d\lambda_1 \wedge \theta^1 + \eta \wedge \theta^2 + d\lambda_4 \wedge (\theta^4 + \tau \theta^2) + \sigma,$$

где σ — сумма членов, не содержащих $d\lambda_1$, η или $d\lambda_4$, и пользуясь алгеброй внешних форм, получаем

$$\begin{aligned} \psi_Y \wedge (\Psi_Y)^4 &= 6\psi_Y \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \eta \wedge \theta^2 \wedge d\lambda_4 \wedge (\theta^4 + \tau \theta^2) \wedge \sigma \\ &= 6\psi_Y \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \eta \wedge \theta^2 \wedge d\lambda_4 \wedge \theta^4 \wedge \sigma \\ &= 6\omega \wedge d\lambda_1 \wedge \theta^1 \wedge \eta \wedge \theta^2 \wedge d\lambda_4 \wedge \theta^4 \wedge \sigma; \end{aligned}$$

последнее равенство следует из выражения для Ψ_Y . При этом

$$\sigma = d\omega + \lambda_1 d\theta^1 + \lambda_2 d\theta^2 + \lambda_4 d\theta^4,$$

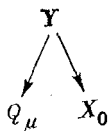
и для того, чтобы $C \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при члене $\theta^3 \wedge \theta^5$ в форме σ был отличен от нуля. Согласно равенству (II.b.20), этот коэффициент равен $-\lambda_4$, и это показывает, что $\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^4 \neq 0$.

Рассмотрим теперь следующие ∞^1 способов выбора системы K^* , зависящих от параметра μ :

$$\begin{aligned} K_\mu^* &= \text{span} \{\omega, \theta^1, \theta^2, \theta^4, (1 - \mu) \theta^3 + \mu \theta^5\} \\ &= \text{span} \{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^2, (1 - \mu) \omega_1^3 + \mu \omega_2^3\}. \end{aligned}$$

IV. Граничные условия

Каждая из этих дифференциальных систем вполне интегрируема и определяет набор граничных условий, по отношению к которым наша вариационная задача хорошо поставлена. Диаграмма (IV.a.8) имеет вид



Для случаев $\mu = 0, 1$ немедленно получаем

$$Q_0 = \{(x, e_1) : x \in \mathbb{E}^3, \text{ — вектор единичной длины}\},$$

$$Q_1 = \{(x, e_3) : x \in \mathbb{E}^3, \text{ — вектор единичной длины}\}.$$

Следовательно, соответствующие граничные условия на семейство кривых $\gamma_t \subset \mathbb{E}^3$ таковы: зафиксированы концевые точки и касательные в них (это соответствует системе K_0^*); зафиксированы концевые точки и соприкасающиеся двумерные плоскости (это соответствует системе K_1^*). Для произвольного μ граничные условия таковы: зафиксированы концевые точки и некоторая линейная комбинация касательного и бинормального векторов.

Ясно, что нужные нам граничные условия соответствуют случаю $\mu = 0$. $\square$

(IV.a.23) ПРИМЕР. Поучительный пример граничных условий доставляют аффинные геодезические, обсуждавшиеся в п. 2 разд. б. гл. II. Так как обычные евклидовы геодезические определяются двумя своими точками,

то для них граничные условия очевидны. Однако если считать, что кривая второго порядка $C \subset \mathbb{A}^2$ задана уравнением

$$(IV.a.24) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

и принять $[a, b, c, d, e, f] \in \mathbb{P}^5$ за «координаты» C , то для определения C требуется 5 точек обобщения («общность положения» означает, что никакие 3 точки не лежат на одной прямой; ср. с конструкцией Штейнера в [36]). Так, например, имеется однопараметрическое семейство коник, проходящих через две заданные точки $a, b \in \mathbb{A}^2$ и имеющих там заданные касательные l_a, l_b (рис. 33). Требование, чтобы кривая C проходила через начало координат и имела касательную $y = 0$, налагает два ли-

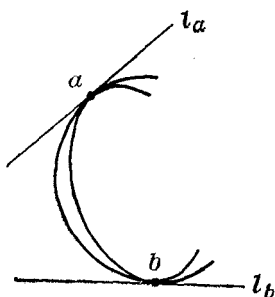


Рис. 33.

и имеет однопараметрическое семейство коник, проходящих через две заданные точки $a, b \in \mathbb{A}^2$ и имеющих там заданные касательные l_a, l_b (рис. 33). Требование, чтобы кривая C проходила через начало координат и имела касательную $y = 0$, налагает два ли-

нейных условия $d = f = 0$ на уравнение (IV.a.24), так что на самом деле многообразие коник, удовлетворяющих граничным условиям (a, l_a) , (b, l_b) , диффеоморфно $\mathbb{P}^1$.

Из уравнений (II.b.14), (II.b.15) видно также, что эти граничные условия неправильны. Они соответствуют подпространству

$$K_1^* = \text{span} \{ \omega^1, \omega^2, \omega_1^2 \} = \text{span} \{ \omega, \theta^1, \theta^2 \}$$

пространства $L^* = \text{span} \{ \omega, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4 \}$. Действительно, задание $\omega^1 = \omega^2 = \omega_1^2 = 0$ в точности соответствует выбору точки x и прямой $\mathbb{R}e_1$ в аффинном репере (x, e_1, e_2) . Конечно, система K_1^* вполне интегрируема, но условие $Y \subset K_1^*$ нарушено, поскольку $\lambda_2 = 1/3$ на Y !

Другой возможный выбор граничных условий определяется подпространством

$$K_2^* = \text{span} \{ \omega^1, \omega^2, \omega_2^1 \} = \text{span} \{ \omega^1, \theta^1, \theta^4 \}$$

пространства L^* . Система K_2^* снова вполне интегрируемая, так как задание $\omega^1 = \omega^2 = \omega_2^1 = 0$ соответствует выбору точки x и прямой $\mathbb{R}e_2$ в аффинном репере (x, e_1, e_2) . Далее, главное условие из определения хорошо поставленных граничных условий ($Y \subset K_2^*$) удовлетворено, так как $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$ на Y . Система K_2^* соответствует граничным условиям (a, v_a) , где $a \in \mathbb{A}^2$, а v_a — аффинная нормаль, и на первый взгляд эти условия могут показаться подходящими для задания хорошо поставленной задачи. Но и это неверно ввиду следующего замечательного геометрического факта:

(IV.a.25) Для всякой кривой второго порядка аффинная нормаль постоянна.

Действительно, аффинная кривизна — это просто скорость изменения аффинной нормали.

Чтобы понять геометрический смысл утверждения (IV.a.25), напомним (см. п. 2 разд. b гл. II), что аффинная нормаль v_a в точке $a \in \gamma$ произвольной кривой γ в $\mathbb{A}^2$ строится следующим образом. Для каждого $\varepsilon > 0$ проведем прямую l_ε , параллельную касательной в точке a на расстоянии ε от нее и обозначим через p_ε центр тяжести области, заключенной между кривой γ и прямой l_ε (рис. 34). Так как площадь — аффинный инвариант, то однозначно определено предельное положение v_a прямой $\overline{p_\varepsilon a}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; оно и задает аффинную нормаль. Для кривой второго порядка мы имеем картинку, представленную на рис. 35.

Аналитическое объяснение того, почему граничные условия (a, v_a) не задают хорошо поставленной вариационной задачи,

заключается в том, что не выполнено условие трансверсальности, фигурирующее в определении хорошо поставленной задачи.

В заключение этого раздела мы проиллюстрируем некоторые

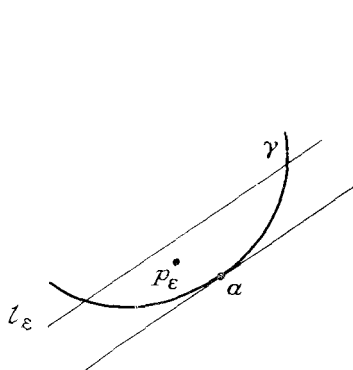


Рис. 34.

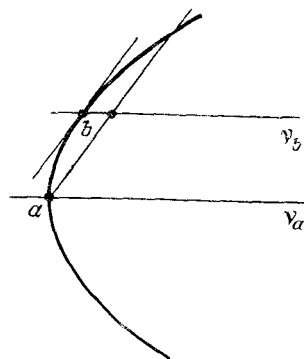


Рис. 35.

тонкие аспекты вопроса о граничных условиях в вариационных задачах со связями (см. разд. е в гл. IV) на следующем примере:

(IV.a.26) ПРИМЕР. Рассмотрим в пространстве $\tilde{X} = \mathbb{R}^{2k+1}$ с координатами $(x; v^1, \dots, v^k; \dot{v}^1, \dots, \dot{v}^k) = (x; v^i; \dot{v}^i)$ классическую вариационную задачу $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$, где $(\tilde{I}, \omega)$ — дифференциальная система

$$\tilde{\theta}^i = dv^i - v^i dx = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\omega = dx \neq 0$$

и

$$\tilde{\varphi} = L(x, v, \dot{v}) dx.$$

Предположим, что

$$\|L_{\dot{v}^i \dot{v}^j}\| > 0.$$

Тогда вариационная задача $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ сильно невырожденна и хорошо поставлена. Система Эйлера—Лагранжа порождается уравнениями Пфаффа

$$(IV.a.27) \quad \tilde{\theta}^i = 0,$$

$$dL_{\dot{v}^i} - L_{v^i} dx = 0,$$

$$dx \neq 0.$$

Как будет показано ниже в разд. с и d, у любой заданной точки v_0 существует такая окрестность V , что всякую точку $v_1 \in V$ можно соединить с точкой v_0 единственным решением системы (IV.a.27),

целиком лежащим в V . В этом смысле наша система обыкновенных дифференциальных уравнений с *граничными условиями*

$$(IV.a.28) \quad \frac{d}{dx} \left(L_{v^i} \left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx} \right) \right) = L_{v^i} \left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx} \right), \\ v(x_0) = v_0, \quad v(x_1) = v_1$$

имеет единственное решение.

Далее, та же система обыкновенных дифференциальных уравнений с *начальными условиями*

$$(IV.a.29) \quad \frac{d}{dx} \left(L_{v^i} \left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx} \right) \right) = L_{v^i} \left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx} \right) \\ v(x_0) = v_0, \quad \frac{dv}{dx}(x_0) = \dot{v}_0$$

также имеет единственное решение. Например, если $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ — механическая система, то эти начальные условия задают начальные положения и скорость, и потому они в некотором смысле более естественны с физической точки зрения, чем граничные условия (IV.a.28).

Предположим теперь, что мы рассматриваем в пространстве X с переменными $(x; v^1, \dots, v^k; \dot{v}^1, \dots, \dot{v}^k; z^1, \dots, z^l) = (x; v^i; \dot{v}^i; z^p)$ вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$, где (I, ω) — пфафова дифференциальная система

$$(IV.a.30) \quad (i) \quad \tilde{A}^i = dv^i - \dot{v}^i dx = 0, \\ (ii) \quad \tilde{\theta}^p = dz^p - \dot{f}^p(x, v, \dot{v}) dx = 0, \\ \omega = dx \neq 0$$

и

$$\varphi = L(x, v, \dot{v}) dx.$$

В качестве конкретного частного случая можно привести пример (II.a.40) колеса, катящегося без проскальзывания по плоскости; здесь $v^1 = \alpha$, $v^2 = \beta$, $z^1 = x$, $z^2 = y$,

$$L = (1 - \cos v^2)(\dot{v}^2)^2 + \frac{\sin^2 v^2}{2}(\dot{v}^1)^2,$$

и уравнения (IV.a.30), (ii) принимают вид (см. (II.a.42))

$$dz^1 - \dot{v}^2 \cos v^1 dx = 0,$$

$$dz^2 - \dot{v}^1 \sin v^1 dx = 0.$$

Задачу $(I, \omega; \varphi)$ можно рассматривать как классическую вариационную задачу со связями

$$(IV.a.31) \quad \dot{z}^p = \dot{f}^p(x, v, z, \dot{v}),$$

в которой функции f^p и лагранжиан L не зависят от z (произвольные неголономные связи выражаются локально уравнениями вида (IV.a.31), где, вообще говоря, функции f^p зависят от z).

Каждому решению $\tilde{\gamma} \subset \tilde{X}$ уравнений Эйлера — Лагранжа (IV.a.27), ассоциированных с задачей $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$, задаваемому отображением $x \mapsto (x, v(x), dv(x)/dx)$, соответствует единственная кривая $\gamma \subset X$, задаваемая отображением $x \mapsto (x, v(x), z(x), dv(x)/dx)$, с заданной начальной точкой $z(x_0) = z_0$ и такая, что

$$(IV.a.32) \quad \frac{dz^p(x)}{dx} = f^p \left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx} \right).$$

Докажем следующие два утверждения:

(IV.a.33) Вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ сильно невырождена (u , в частности, хорошо поставлена).

(IV.a.34) Всякая кривая γ , полученная из кривой $\tilde{\gamma}$ с помощью решения уравнений (IV.a.32), является решением уравнений Эйлера — Лагранжа для задачи $(I, \omega; \varphi)$. Однако эти кривые γ не дают общего решения.

После доказательства этих утверждений мы обсудим их смысл в свете вопроса о граничных и начальных условиях.

Доказательство утверждения (IV.a.33). Рассмотрим в пространстве переменных $(x; v^i; z^p, \dot{v}^i; \dot{z}^p)$ подмногообразие X , определенное равенствами

$$\dot{z}^p = f^p(x, v, \dot{v}),$$

и на нем классическую вариационную задачу со связями, задаваемую следующими данными:

$$(IV.a.35) \quad \begin{aligned} \theta^i &= dv^i - \dot{v}^i dx = 0, \\ \theta^p &= dz^p - \dot{z}^p dx = 0, \\ \omega &= dx \neq 0, \\ \varphi &= L(x, v, \dot{v}) dx. \end{aligned}$$

Ясно, что наша вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ эквивалентна задаче (IV.a.35), и поэтому мы будем использовать запись $(I, \omega; \varphi)$ и для обозначения задачи (IV.a.35). Если записать

$$\begin{aligned} df^p &\equiv f_i^p dv^i + f_{\dot{v}^i}^p d\dot{v}^i \bmod dx \\ &\equiv f_i^p \theta^i + f_{\dot{v}^i}^p d\dot{v}^i \bmod dx, \end{aligned}$$

то структурные уравнения задачи (IV.a.35) принимают вид

$$\begin{aligned}d\theta^i &\equiv -d\dot{v}^i \wedge dx \bmod \{\theta^i, \theta^0\}, \\d\theta^0 &\equiv -f_i^0 d\dot{v}^i \wedge dx \bmod \{\theta^i, \theta^0\}.\end{aligned}$$

Полагая

$$\eta^0 = \theta^0 - f_i^0 \theta^i,$$

видим, что первая производная система I_1 системы I порождается подрасслоением

$$W_1^* = \text{span} \{\eta^1, \dots, \eta^i\}$$

расслоения $T^*(X)$. Соответственно выберем на многообразии X корепер

$$\{dx; \theta^i; \eta^0; d\dot{v}^i\},$$

Тогда

$$\begin{aligned}dL &\equiv L_{\dot{v}^i} d\dot{v}^i \bmod \text{span} \{dx; \theta^i; \eta^0\}, \\dL_{\dot{v}^i} &\equiv L_{\dot{v}^i \dot{v}^j} d\dot{v}^j \bmod \text{span} \{dx; \theta^i; \eta^0\}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что квадратичная форма Q представляется матрицей $\|L_{\dot{v}^i \dot{v}^j}\|$, которая по предположению положительно-определённа.

Определение сильной невырожденности (см. разд. е гл. I) требует, чтобы существовал допустимый корепер, для которого выполняются соотношения (I.e.28). В нашей ситуации, если функции $f^0(x, v, \dot{v})$ линейны по переменным $\dot{v}^i$, можно выбрать в качестве такового корепер $\{dx; \theta^i; \eta^0; d\dot{v}^i\}$. В общем случае такой допустимый корепер не всегда можно найти. В нашем иллюстративном обсуждении мы просто опустим нелинейный случай (пример катящегося колеса охватывается линейным случаем).

Тогда утверждаемая сильная невырожденность следует из сделанных выше замечаний и положительной определенности матрицы $\|L_{\dot{v}^i \dot{v}^j}\|$. $\square$

Доказательство утверждения (IV.a.34). Следуя нашему обычному алгоритму вычисления системы Эйлера—Лагранжа, ассоциированной с задачей $(I, \omega; \varphi)$ (см. разд. е гл. I), рассмотрим на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^{k+l}$ 1-форму

$$\psi = \varphi + \lambda_i \theta^i + \lambda_0 \theta^0,$$

внешний дифференциал которой $\Psi = d\psi$ дается формулой

$$\begin{aligned}\Psi &= (L_{\dot{v}^i} - (\lambda_i + \lambda_0 f_i^0)) dy^i \wedge dx + d\lambda_0 \wedge \theta^0 \\&\quad + (d\lambda_i - (L_{\dot{v}^i} + \lambda_0 f_i^0) dx) \wedge \theta^i.\end{aligned}$$

Система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad \partial/\partial \dot{y}^i \lrcorner \Psi = \left(L_{\partial^i} - \left(\lambda_i + \lambda_\rho f_i^\rho \right) \right) dx = 0, \\ \text{(IV.a.36)} \quad & \text{(ii)} \quad \partial/\partial \dot{\theta}^i \lrcorner \Psi = -d\lambda_i + \left(L_{\partial^i} + \lambda_\rho f_i^\rho \right) dx = 0, \\ & \text{(iii)} \quad \partial/\partial \dot{\theta}^0 \lrcorner \Psi = -d\lambda_\rho = 0 \end{aligned}$$

вкупе с исходной системой $\theta^i = \theta^0 = 0$. Из (i) следует, что пространство моментов $Y \subset Z$ задается равенствами

$$L_{\partial^i} = \lambda_i + \lambda_\rho f_i^\rho,$$

а система Эйлера—Лагранжа на многообразии Y — равенствами (ii), (iii) вместе с исходной системой $\theta^i = \theta^0 = 0$.

Пусть теперь решение $\tilde{\gamma}$ системы (IV.a.27) задается отображением $x \mapsto (x; v^i(x); dv^i(x)/dx)$. Рассмотрим кривую γ в $\tilde{Y}$, задаваемую отображением

$$x \mapsto \left(x; v^i(x); z^0(x); \frac{dv^i(x)}{dx}; \frac{dz^0(x)}{dx}; \lambda_i(x); \lambda_\rho(x) \right),$$

где

$$\lambda_i(x) = L_{\partial^i} \left(x, v(x), \frac{dv(x)}{dx} \right),$$

$$\lambda_\rho(x) \equiv 0,$$

причем выполнены равенства (IV.a.32). Сравнивая систему (IV.a.36) с системой (IV.a.27), видим, что кривая γ задает решение системы Эйлера—Лагранжа для задачи $(I, \omega; \varphi)$.

Ясно, однако, что γ не является *общим* решением, так как на общем решении постоянные λ_ρ не обязаны обращаться в нуль. $\square$

Обсуждение. Суть дела состоит в следующем.

Предположим, нас интересуют решения уравнений Эйлера—Лагранжа для задачи $(I, \omega; \varphi)$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} v(x_0) &= v_0, \\ \frac{dv}{dx}(x_0) &= \dot{v}_0, \\ z(x_0) &= z_0. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное такое решение, вдоль которого все $\lambda_\rho \equiv 0$, и оно получается из решения задачи (IV.a.29) путем разрешения уравнений (IV.a.32) с начальными условиями $z(x_0) = z_0$. Именно эта задача с начальными значениями для уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с задачей $(I, \omega; \varphi)$, и имеет физический смысл, как, скажем, в примере с катящимся колесом (II.a.40).

С другой стороны, ввиду утверждений (IV.a.33) и (IV.a.16), вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ с граничными условиями

$$dx = \theta^i = \theta^0 = 0$$

хорошо поставлена. Эти граничные условия означают, что рассматриваются все кривые $x \mapsto (x, v(x), z(x))$, соединяющие точку (x_0, v_0, z_0) с точкой (x_1, v_1, z_1) . Например, в случае катящегося колеса мы должны перекатить колесо за данное время таким образом, чтобы точка Q_0 перешла в точку Q_1 (рис. 36).

Как будет доказано ниже, если граничные условия достаточно близки между собой, то существует единственное решение уравнений Эйлера—Лагранжа для системы $(I, \omega; \varphi)$, соединяющее точку (x_0, v_0, z_0) с точкой (x_1, v_1, z_1) и остающееся в некоторой окрестности точки (x_0, v_0, z_0) . Однако, вообще говоря, постоянные λ_p должны быть отличны от нуля на этой кривой. Иначе говоря, решений уравнений (II.a.36), вдоль которых $\lambda_p \equiv 0$, недостаточно, чтобы соединить две произвольные точки (x_0, v_0, z_0) и (x_1, v_1, z_1) .

Окончательный вывод состоит в следующем. Для классической вариационной задачи без связей решения задачи с начальными значениями и задачи с граничными значениями совпадают. Однако для задач со связями второе множество может быть строго больше первого.

б. Якобиевы векторные поля и сопряженные точки. Примеры

Как мы сейчас увидим, общая формулировка вариационного исчисления в терминах внешних дифференциальных систем естественным образом приводит к уравнениям Якоби, ассоциированным с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$ на многообразии X , а также позволяет относительно эффективно просчитывать примеры. Снова оказывается, что уравнения Якоби естественно «живут» на пространстве импульсов Y , на котором, напомним, определена дифференциальная система Эйлера—Лагранжа (J, ω) , ассоциированная с задачей $(I, \omega; \varphi)$ (см. разд. е гл. I).

Хотя приводимое ниже определение уравнений Якоби применимо в самой общей ситуации, рассматриваемая вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ должна быть хорошо поставлена (в смысле предыдущего раздела), чтобы можно было определить и сопряженные

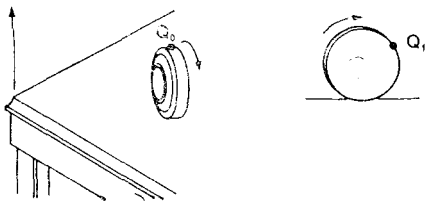


Рис. 36.

IV. Граничные условия

точки. Так как наши примеры, во всяком случае основные, удовлетворяют этому условию, кажется разумным раз и навсегда принять такое предположение.

В данном разделе мы будем использовать следующие ОБОЗНАЧЕНИЯ. Через $(I, \omega; \varphi)$ обозначается хорошо поставленная вариационная задача на многообразии X с ассоциированной системой Эйлера—Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y . Граничные условия будут задаваться вполне интегрируемой подсистемой $K^* \subset L^*$ и записываться в виде (IV.a.9):

$$(IV.b.1) \quad \omega = \theta^1 = \dots = \theta^m = 0.$$

Приведенное пространство импульсов обозначается через Q , и основная диаграмма (IV.a.8) имеет вид

$$(IV.b.2) \quad \begin{array}{c} Y \subset W^* \\ \swarrow \tilde{\omega} \quad \searrow \sigma \\ Q \quad X \end{array}$$

Интегральные кривые системы (J, ω) будут обозначаться через $\Gamma \subset Y$, а соответствующие проекции — через

$$\pi(\Gamma) = N \subset X,$$

$$\tilde{\omega}(\Gamma) = \gamma \subset Q.$$

Таким образом, кривая $N \subset X$ является интегральным многообразием системы (I, ω) , которое одновременно служит решением уравнений Эйлера—Лагранжа (I.d.14).

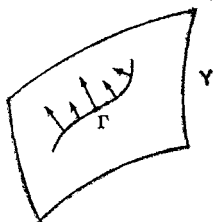


Рис. 37.

Напомним (см. разд. b.гл.I), что с каждым интегральным многообразием произвольной пфафовой дифференциальной системы (сейчас нас интересует интегральное многообразие $\Gamma \subset Y$ системы (J, ω) мы связали пространство векторных полей V на многообразии Y , определенных вдоль Γ (рис. 37) и задающих инфинитезимальные деформации кривой Γ как интегрального многообразия системы (J, ω) (см. (I.b.16)). Вспоминая введенное нами для пространства интегральных многообразий системы (J, ω) обозначение $\mathcal{V}(J, \omega)$, обозначим указанное выше пространство векторных полей V через $T_\Gamma(\mathcal{V}(J, \omega))$, где как и ранее, эта запись призвана вызывать мысль о касательном пространстве к $\mathcal{V}(J, \omega)$ в точке Γ . Линейные дифференциальные уравне-

ния (I.b.15) выделяют пространство $T_\Gamma(\mathcal{Y}(J, \omega))$ в пространстве всех нормальных векторных полей к кривой $\Gamma \subset Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) Пусть $N \subset X$ — интегральное многообразие системы (I, ω) , удовлетворяющее уравнениям Эйлера—Лагранжа, ассоциированным с вариационной задачей $(I, \omega; \varphi)$. Тогда векторное пространство $T_\Gamma(\mathcal{Y}(J, \omega))$, где $\pi(\Gamma) = N$ (см. диаграмму (IV.b.2)), называется *пространством якобиевых векторных полей*.¹⁾

ii) Условия на концах кривой N называются (*взаимно*) *сопряженными*, если существует якобиево векторное поле V , для которого

$$\langle \omega, V \rangle = \langle \theta^1, V \rangle = \dots = \langle \theta^m, V \rangle = 0 \text{ на } \partial\Gamma.$$

З а м е ч а н и я. i) Таким образом, как и в классическом случае, *уравнения Якоби — это уравнения в вариациях вдоль решений уравнений Эйлера—Лагранжа*. Однако в отличие от традиционного определения (и это весьма существенно) они определяются как нормальные векторные поля вдоль кривой Γ «вверху» на пространстве импульсов Y , а не «внизу» на многообразии X (фактически этот подход принят в [13] для классической задачи без связей).

ii) Каждому якобиеву полю V , определенному вдоль кривой $\Gamma \subset Y$, отвечает его проекция $w = \pi_* V$, определенная вдоль кривой $N \subset X$ (рис. 38) и задающая действительную вариацию

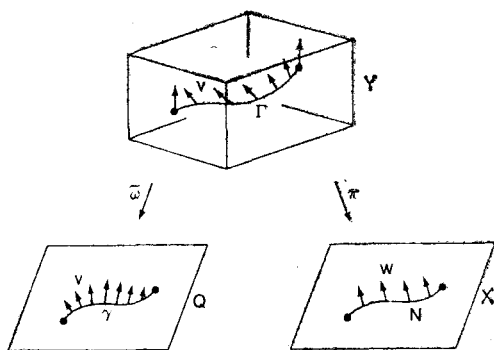


Рис. 38. Слои слоения K^* — вертикальные прямые в Y .

¹⁾ Ввиду теоремы (I.e.9), которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие между интегральными многообразиями системы (J, ω) на пространстве импульсов Y и интегральными многообразиями N системы (I, ω) на многообразии X , удовлетворяющими одновременно уравнениям Эйлера—Лагранжа (I.d.14), это определение — единственно возможное.

нашего решения уравнений Эйлера—Лагранжа. Условие сопряженности граничных условий для многообразия N не означает, что $\omega = 0$ на dN . Оно означает, что поднятое на $\partial\Gamma$ якобиево векторное поле V касается слоев слоения, определенного системой K^* (на нашем рисунке поле V должно быть вертикально на $\partial\Gamma$). Или, что то же самое, векторное поле $v = \tilde{\omega}_* V$ на многообразии Q должно обращаться в нуль в концах кривой γ (см. рисунок).

(IV.b.3) ПРИМЕР (геодезические). Это главный классический пример, и при его рассмотрении мы будем считать известными некоторые элементарные факты римановой геометрии (см. [6], [15], [53], [63]). Пусть M — риманово многообразие и X — расслоение единичных сфер, состоящее из пар (p, e_1) , где $p \in M$ и $e_1 \in T(M)$ — вектор единичной длины. Используя проекцию

$$\pi : X \rightarrow M,$$

определим на многообразии X каноническую 1-форму ω равенством

$$\omega(v) = (e_1, \pi_* v), \quad v \in T_{(p, e_1)}(X).$$

[З а м е ч а н и е. При изоморфизме $T(M) \cong T^*(M)$, задаваемом метрикой, форма ω просто переходит в каноническую 1-форму θ на $T^*(M)$.] Далее, определим пфаффову систему

$$W^* \subset T^*(X),$$

полагая

$$\bar{W}_{(p, e_1)}^* = \pi^*(e_1^\perp),$$

где $e_1^\perp \subset T_p^*(M)$ — гиперплоскость, ортогональная вектору e_1 ¹⁾. Система W^* порождает некоторый дифференциальный идеал I , и пара (I, ω) определяет пфаффову систему на многообразии X , интегральные многообразия которой можно записать в виде

$$t \mapsto \left(p(t), \frac{p'(t)}{\|p'(t)\|} \right).$$

Здесь $p(t)$ описывает некоторую кривую в M , а $p'(t)/\|p'(t)\|$ — единичный касательный вектор к ней.

Если каждой точке $(p, e_1) \in U$ некоторого данного множества $U \subset X$ сопоставлен полный ортонормированный репер $(p, e_1, \dots, e_n)$ в $T_p(M)$, где первый вектор есть как раз e_1 , то мы говорим, что в (или на) U задано поле реперов. Для всякого такого поля

¹⁾ Мы уже встречались с этой системой W^* при обсуждении понятия продолжения в конце разд. с гл. I.

реперов можно рассмотреть (*вверху на U*) двойственное поле кореперов $\{\omega^i\}$ и матрицу связности $\{\omega_j^i\}$; по определению,

$$(IV.b.4) \quad \begin{aligned} \omega^i(v) &= (e_i, \pi_* v) v \in T_{(p, e_1)}(X), \\ De_i &= \omega_j^i e_j. \end{aligned}$$

Символ D обозначает здесь оператор ковариантного дифференцирования, ассоциированный с римановой связностью. Непосредственно ясно, что

$$(IV.b.5) \quad \begin{aligned} \omega &= \omega^1, \\ W^* &= \text{span} \{\omega^2, \dots, \omega^n\}. \end{aligned}$$

Условимся, что индексы изменяются в пределах

$$1 \leq i, |j| \leq n, \quad 2 \leq \rho, \quad \sigma \leq n.$$

Тогда из второго равенства (IV.b.4) вытекает, что совокупность 1-форм

$$\{\omega^1; \omega^2, \dots, \omega^n; \omega_1^2, \dots, \omega_1^n\} = \{\omega; \omega^\rho; \omega_1^\rho\}$$

задает корепер в области $U \subset X$. Формы $\omega^1, \dots, \omega^n$ горизонтальны относительно проекции $X \rightarrow M$, а формы $\omega_1^2, \dots, \omega_1^n$ описывают инфинитезимальное вращение вектора e_1 в $T_p(M)$ при движении вдоль слоев проекции $X \rightarrow M$. Напомним, наконец, что для любого поля реперов формы связности ω_j^i однозначно определяются равенствами ¹⁾

$$(IV.b.6) \quad \begin{aligned} \omega_j^i + \omega_i^j &= 0, \\ d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i. \end{aligned}$$

Геодезические на многообразии M соответствуют вариационной задаче $(I, \omega; \varphi)$ на многообразии X , в которой

$$\varphi = |\omega|.$$

Эта запись означает, что

$$(IV.b.7) \quad \varphi(v) = |\langle \omega, v \rangle|$$

для любого касательного вектора v к X . Чтобы вывести систему Эйлера—Лагранжа (уравнения Эйлера—Лагранжа были выписаны в локальных координатах в примере (I.d.18) (для $U = 0$ ²⁾)),

¹⁾ Подчеркнем опять, что формы ω^i и ω_j^i определены на $U \subset X$, т. е. *вверху* на открытом подмножестве расслоения единичных сфер над многообразием M , а не *внизу* на открытом подмножестве многообразия M .

²⁾ Здесь U — потенциальная энергия, а не область в X . — Прим. перев.

рассмотрим многообразие $Z = X \times \mathbb{R}^{n-1}$ с координатами $\lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ в $\mathbb{R}^{n-1}$. Следуя алгоритму разд. е гл. I, рассмотрим 1-форму

$$\psi = \pm \omega + \lambda_p \omega^p$$

на многообразии Z . Здесь $\pm \omega$ обозначает форму φ , определяемую равенством (IV.b.7), которая в действительности не является 1-формой в обычном смысле, но, как мы сейчас увидим, наш формализм сохраняет силу (строго говоря, следовало бы рассмотреть форму ω , задаваемую равенством $\varphi = L\omega$, где $L = \pm 1$).

С учетом равенств (IV.b.6) внешний дифференциал $\Psi = d\psi$ 1-формы Ψ задается равенством

$$(IV.b.8) \quad \Psi = \pm \omega^p \wedge \omega_p^1 + d\lambda_p \wedge \omega^p + \lambda_p \omega^1 \wedge \omega_p^1 + \lambda_p \omega^\sigma \wedge \omega_\sigma^p.$$

Система Картана порождается уравнениями Пфаффа

$$(i) \partial/\partial \lambda_p \lrcorner \Psi = \omega^p = 0,$$

$$(IV.b.9) \quad (ii) \partial/\partial \omega^p \lrcorner \Psi = \pm \omega_p^1 - d\lambda_p + \lambda_\sigma \omega_\sigma^p = 0,$$

$$(iii) \partial/\partial \omega_p^1 \lrcorner \Psi = -\lambda_p \omega^1 \mp \omega^p = 0.$$

Из (i) и (ii) видно, что подмногообразие $Z_1 = Y = X$ определяется условиями $\lambda_p = 0$. Поэтому, используя соотношения $d\lambda_p = 0$ и $\omega_p^1 + \omega_p^1 = 0$, из уравнения (ii) получаем

$$(IV.b.10) \quad \omega_p^1 = 0.$$

Так как ввиду (IV.b.4)

$$De_i = \omega_i^p e_p,$$

то условие (IV.b.10) — это обычное условие

$$(IV.b.11) \quad \frac{D}{dt} \left(\frac{p'(t)}{\|p'(t)\|} \right) = 0$$

геодезичности кривой $p(t)$ на M . Геометрически оно означает, что касательный вектор к кривой $p(t)$ остается параллельным самому себе при движении вдоль кривой. Заметим для дальнейшего, что в силу (IV.b.8)

$$\psi_Y = \pm \omega,$$

$$\Psi_Y = \pm \omega^p \wedge \omega_p^1$$

и потому

$$\psi_Y \wedge (\Psi_Y)^{n-1} = \pm (n-1)! \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n \wedge \omega_1^2 \wedge \dots \wedge \omega_1^n \neq 0.$$

Таким образом, наша вариационная задача невырождена. Более того, при граничных условиях

$$K^* = \text{span} \{ \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n \} = \pi^* (T^*(M))$$

эта вариационная задача хорошо поставлена, а ее приведенное пространство моментов $Q = M$. Ясно, что указанные граничные условия соответствуют случаю, когда кривая в M изменяется, сохраняя неподвижные концы в обычном смысле (если бы так всегда было!).

Чтобы вывести уравнения Якоби, воспользуемся *структурным уравнением Картана* для кривизны

$$(IV.b.12) \quad \begin{aligned} d\omega_i^j &= \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j, \\ \Omega_i^j &= \frac{1}{2} R_{ikl}^j \omega^k \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

На пространстве моментов $Y = X$ (напомним, что X — это расслоение единичных сфер над M) система Эйлера—Лагранжа J задается уравнениями (IV.b.9), где $\lambda_p = d\lambda_p = 0$. Рассмотрим интегральное многообразие $\Gamma \subset X$ с проекцией $\gamma = \pi(\Gamma) \subset M$ (напомним, что в этом случае $Q = M$) и параметризуюем кривую Γ длиной дуги, так что $\omega = ds$. Тогда уравнения (IV.b.9) примут вид

$$(IV.b.13) \quad \begin{aligned} \omega^p &= 0, \\ \omega_1^p &= 0. \end{aligned}$$

При заданном вдоль кривой Γ векторном поле V на многообразии Y интересующие нас уравнения Якоби суть уравнения (I.b.15), в которых идеал I заменяется на J ; они имеют вид

$$(IV.b.14) \quad \begin{aligned} (i) \quad V \lrcorner d\omega^p + d(V \lrcorner \omega^p) &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ (ii) \quad V \lrcorner d\omega_1^p + d(V \lrcorner \omega_1^p) &\equiv 0 \bmod \Gamma. \end{aligned}$$

Согласно замечанию ii) после (I.b.15), можно считать, что касательная к кривой Γ компонента поля обращается в нуль. Таким образом,

$$V = V^p \partial / \partial \omega^p + V_1^p \partial / \partial \omega_1^p.$$

Используя равенства (IV.b.6) и то, что $\omega^p \equiv 0 \bmod \Gamma$, приводим уравнения (IV.b.14), (i) к виду

$$(IV.b.15) \quad dV^p - V_1^p \omega \equiv 0 \bmod \Gamma.$$

Аналогично с помощью равенств (IV.b.12) приведем уравнения (IV.b.14), (ii) к виду

$$(IV.b.16) \quad dV_1^p + \omega_\sigma^p V_1^\sigma + R_{1\sigma 1}^p V^\sigma \equiv 0 \bmod \Gamma.$$

Чтобы истолковать последние два соотношения, рассмотрим векторное поле

$$v = \pi_*(V) = V^p e_p$$

— нормальное векторное поле вдоль геодезической $\gamma \subset M$. Касательный вектор к геодезической γ равен e_1 . Пусть $R(v, \omega) \in$

$\in \text{Hom}(T(M), T(M))$ — оператор кривизны (см. [6], [53]), определенный на парах касательных векторов v, w . Тогда совокупность уравнений (IV.b.15), (IV.b.16) дает обычные уравнения Якоби

$$(IV.b.17) \quad \frac{D^2 v}{ds^2} + R(v, e_1)e_1 = 0,$$

ассоциированные с нормальным векторным полем v вдоль геодезической γ .

Предположим, например, что M — поверхность и (e_1, e_2) — подходящее поле реперов вдоль геодезической γ (рис. 39). Тогда $v = \eta e_2$ для некоторой функции $\eta(s)$, и мы выпишем сейчас уравнение для η , отвечающее уравнению (IV.b.17), используя свойство геодезических $\omega \equiv 0 \pmod \gamma$. Имеем

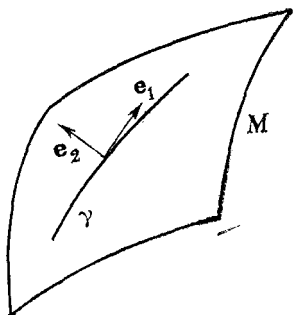


Рис. 39.

$$\begin{aligned} \frac{D^2 v}{ds^2} &= \frac{D}{ds} \left(\frac{D}{ds} (\eta e_2) \right) \\ &= \frac{D}{ds} (\eta' e_2) \quad \left(\text{так как } \frac{De_2}{ds} = 0 \right) \\ &= \eta'' e_2 \quad \left(\text{так как } \frac{De_2}{ds} = 0 \right). \end{aligned}$$

Если обозначить через R значение гауссовой кривизны вдоль кривой γ , то уравнение (IV.b.17) примет вид

$$(IV.b.18) \quad \eta'' + R\eta = 0.$$

Наложим начальные условия $\eta(0) = 0$ и $\eta'(0) > 0$. Тогда стандартные теоремы сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений дают

$$\eta(s) > 0 \text{ для } s > 0 \text{ при } R \leq 0,$$

$$\eta(s_0) = 0 \text{ для некоторого } s_0 > 0 \text{ при } R \geq R_0 > 0.$$

В первом случае геодезические «разбегаются», и притом экспоненциально, если $R \leq R_0 < 0$, и сопряженных точек быть не может. Во втором же случае сопряженные точки должны быть. Конечно, это лишь ε -начало далеко продвинутого раздела римановой геометрии (см. [21], [49] и указанную там литературу).

(IV.b.19) ПРИМЕР. В качестве неклассического примера исследуем уравнения Якоби, соответствующие функционалу

$$(IV.b.20) \quad \Phi(N) = \frac{1}{2} \int_N \kappa^2 ds,$$

определенному на кривых $N \subset \mathbb{E}^2$ (в соответствии с нашим соглашением об обозначениях, в этом разделе мы сохраняем символ γ для обозначения кривых в приведенном пространстве моментов). Как мы видели в примере (I.d.27), за исключением вырожденного случая прямых, дуги окружностей не являются экстремальями функционала (IV.b.20). Предположим, однако, что наложено интегральное ограничение

$$(IV.b.21) \quad \int_N ds = l = \text{const.}$$

Вариационные задачи с интегральными ограничениями обсуждаются в разд. а приложения, и там показано, что уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (IV.b.20) с ограничением (IV.b.21) совпадают с уравнениями Эйлера—Лагранжа для функционала (IV.b.20) без ограничений, определенного на кривых, лежащих на сфере радиуса ρ ($l > 0$ (см. пример (Пр.а.10))).

С физической точки зрения мы ищем положение, принимаемое куском гибкой проволоки фиксированной длины l , соединяющим две точки p, q на плоскости и имеющим в этих точках заданные касательные. Эти граничные условия выделяют шестимерное

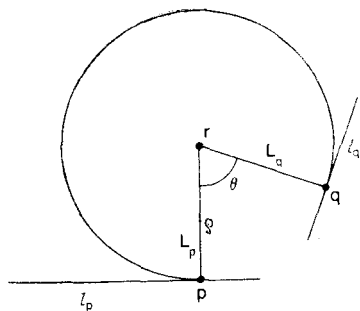


Рис. 40.

многообразие, а дуги окружностей соответствуют граничным условиям, лежащим на подмногообразии коразмерности 2. Чтобы усмотреть это, зафиксируем произвольным образом точку p и прямую l_p . Тогда окружности, проходящие через точку p и имеющие прямую l_p касательной, параметризуются своим радиусом ρ . Пусть L_p — перпендикуляр к l_p в точке p и q , l_q — другой «конец» нашей кривой с соответствующим перпендикуляром L_q (рис. 40). Если $r = L_p \cap L_q$, то условия существования окружности, дающей экстремаль функционала (IV.b.20) с ограничением (IV.b.21), имеют вид

$$(i) \quad \overline{pr} = \overline{qr} \text{ и}$$

$$(ii) \quad l = \rho (2\pi - \theta).$$

Исследуем уравнения Якоби, ассоциированные с функционалом (IV.b.20) при ограничении (IV.b.21), отвечающие такой дуге окружности, и докажем следующий результат:

(IV.b.22) ТЕОРЕМА. Для каждого значения ρ ($\neq \infty$) существует такое значение l , что наши граничные условия на концах дуги длины l окружности радиуса ρ взаимно сопряжены.

Длина l окажется большой, так что соответствующая физическая картина напоминает часовую пружину.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего посмотрим, как выглядит система Эйлера—Лагранжа для функционала (IV.b.20) на сфере S радиуса $1/\rho$. В обозначениях примера (I.d.27) имеем

$X = \mathcal{F}(S) \times \mathbb{R}$ (координата в $\mathbb{R}$ обозначается κ);

$Z = X \times \mathbb{R}^2$ (координаты в $\mathbb{R}^2$ обозначаются (λ_1, λ_2));

$Y \subset Z$ определяется условием $\lambda_2 = \kappa$;

$\{\omega, \omega^1, \omega^2, d\lambda_1, d\lambda_2\}$ — корепер на Y , и ввиду равенства, непосредственно следующего за уравнениями (I.d.34), 2-форма Ψ_Y равна

$$\Psi_Y \equiv \eta_1 \wedge \eta_2 + \eta_3 \wedge \eta_4,$$

где

$$\eta_1 = d\lambda_1 + \left(\lambda_2 \rho - \frac{\lambda_2^3}{2} \right) \omega,$$

$$\eta_2 = \theta^1,$$

(IV.b.23)

$$\eta_3 = d\lambda_2 + \lambda_1 \omega,$$

$$\eta_4 = \theta^2.$$

Размерность пространства моментов Y равна 5, и, согласно (I.d.34) (с учетом равенства $\lambda_2 = \kappa$), дифференциальная система Эйлера—Лагранжа на Y порождается уравнениями Пфаффа

$$(IV.b.24) \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0.$$

Шаг 2. Выведем теперь уравнения Якоби, соответствующие интегральной кривой Γ системы (IV.b.25). Используя структурные уравнения (I.d.30) для расслоения реперов над поверхностью, получаем следующие выражения для дифференциалов форм (IV.b.23):

$$d\eta_1 \equiv \left(\left(\rho - \frac{3}{2} \lambda_2^2 \right) d\lambda_2 - \left(\lambda_2^2 \rho - \frac{\lambda_2^4}{2} \right) \theta^1 \right) \wedge \omega,$$

(IV.b.25)

$$d\eta_2 \equiv -\theta^2 \wedge \omega,$$

$$d\eta_3 \equiv (d\lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 \theta^1) \wedge \omega,$$

$$d\eta_4 \equiv -(d\lambda_2 + \rho \theta^1 - \lambda_2^2 \theta^1) \wedge \omega.$$

Уравнения в вариациях (см. I.b.15)

$$d(V \rfloor \eta_i) + V \rfloor d\eta_i \equiv 0 \bmod \Gamma$$

для векторного поля

$$(IV.b.26) \quad V = \alpha \partial / \partial \theta^1 + \beta \partial / \partial \theta^2 + \varepsilon \partial / \partial \lambda_1 + \delta \partial / \partial \lambda_2$$

в силу (IV.b.25) принимают вид

$$d\varepsilon + \left(\delta \left(\rho - \frac{3\lambda_2^2}{2} \right) - \alpha \left(\lambda_2^2 \rho - \frac{\lambda_2^4}{2} \right) \right) \omega \equiv 0 \bmod \Gamma,$$

$$(VI.b.27) \quad d\alpha - \beta \omega \equiv 0 \bmod \Gamma,$$

$$d\delta + (\varepsilon - \lambda_1 \lambda_2 \alpha) \omega \equiv 0 \bmod \Gamma,$$

$$d\beta - (\delta + \rho \alpha - \lambda_2^2 \alpha) \omega \equiv 0 \bmod \Gamma.$$

Эти уравнения (с учетом того, что $\lambda_2 = \kappa$ и $\lambda_1 = -\kappa'$ на Y) эквивалентны следующим:

$$\alpha' = \beta,$$

$$\beta' = \alpha (\rho - \kappa^2) + \delta,$$

$$(IV.b.28) \quad \varepsilon' = \alpha \kappa^2 \left(\rho - \frac{\kappa^2}{2} \right) - \delta \left(\rho - \frac{3\kappa^2}{2} \right),$$

$$\delta' = -\varepsilon - \kappa \kappa' \alpha.$$

Шаг 3. Рассмотрим теперь такие граничные условия, что вдоль Γ

$$\lambda_2 = \text{const} > 0.$$

Тогда равенства (IV.b.23) дают

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = \sqrt{2\rho} = \kappa.$$

Поэтому уравнения Якоби (IV.b.28) сводятся к уравнениям

$$(i) \quad \alpha' = \beta,$$

$$(IV.b.29) \quad (ii) \quad \beta' = -\rho \alpha + \delta,$$

$$(iii) \quad \varepsilon' = 2\rho \delta,$$

$$(iv) \quad \delta' = -\varepsilon,$$

а из этих уравнений вытекает одно уравнение четвертого порядка (в котором фигурируют лишь члены с четным порядком производной)

$$(IV.b.30) \quad \alpha^{iv} + 3\rho \alpha'' + 2\rho^2 \alpha = 0.$$

Обратно, по заданному решению уравнения (IV.b.30) с помощью равенств (IV.b.29), (i), (ii), (iv) можно определить функции β , δ , ε , а равенство (iii) следует тогда из (IV.b.30).

Ввиду (IV.b.26), для того чтобы доказать существование сопряженных точек, нам нужно найти решение $\alpha(s)$ уравнения (IV.b.30), удовлетворяющее условиям

$$(IV.b.31) \quad \alpha(0) = \alpha(l) = \alpha'(0) = \alpha'(l) = 0.$$

Функции

$$\cos(\kappa s), \sin(\kappa s), \cos \frac{\kappa s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{\kappa s}{\sqrt{2}}$$

задают базис векторного пространства решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (IV.b.30). Таким образом, нам надо найти такие κ и l , что

$$(IV.b.32) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos \kappa l & -\kappa \sin \kappa l \\ 0 & \kappa & \sin \kappa l & \kappa \cos \kappa l \\ 1 & 0 & \cos \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} & \frac{-\kappa}{\sqrt{2}} \sin \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \sin \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} & \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} \cos \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0.$$

Вычисление показывает, что равенство (IV.b.32) эквивалентно равенству

$$(IV.b.33) \quad F(\kappa l) = 2\sqrt{2} \left(1 - \cos(\kappa l) \cos \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} \right) - \\ - 3 \sin(\kappa l) \sin \frac{\kappa l}{\sqrt{2}} = 0.$$

Чтобы доказать теорему, достаточно теперь, положив $\sigma = \kappa l$, выбрать такие σ_1 и σ_2 , что

$$(IV.b.34) \quad F(\sigma_1) > 0,$$

$$(IV.b.35) \quad F(\sigma_2) < 0.$$

Рассмотрим для этого аддитивную подгруппу окружности

$$G = \left\{ \frac{2\pi m}{\sqrt{2}} \right\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Как хорошо известно, эта подгруппа плотна (см., например, [2]); поэтому для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что

$$0 \neq \left| \frac{2\pi m}{\sqrt{2}} - 2\pi n \right| < \varepsilon.$$

Для $\sigma_1 = 2\pi m$

$$F(\sigma_1) = 2\sqrt{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{\sqrt{2}} \right) > 0,$$

т. е. выполнено (IV.b.34).

Аналогично, выбрав точку из G , близкую классу эквивалентности точки $\pi/2 - \pi/2\sqrt{2}$, мы можем по заданному $\varepsilon > 0$ найти такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что

$$0 \neq \left| \left(\frac{2\pi m}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) - \left(2\pi n + \frac{\pi}{2} \right) \right| < \varepsilon,$$

и для $\sigma_2 = 2\pi m + \pi/2$

$$F(\sigma_2) = 2\sqrt{2} - 3 \sin \left(\frac{2\pi m}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right).$$

Так как величина $\sin(2\pi m/\sqrt{2} + \pi/2\sqrt{2})$ может быть сделана сколь угодно близкой к 1, а $2\sqrt{2} < 3$, то для достаточно малого ε неравенство (IV.b.35) выполняется.

(IV.b.36) ПРИМЕР. Обсудив уравнения Якоби и вопрос о существовании сопряженных точек для геодезических и для функционала (IV.b.20), мы, в обращение логического порядка, обсудим теперь уравнения Якоби для классической вариационной задачи с невырожденным лагранжианом (I.e.18). Проведя вывод уравнений в общем случае, мы затем конкретизируем их для наиболее важного классического примера — задачи о минимальной поверхности вращения.

Предположим, что на многообразии $X = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ задан лагранжиан $L(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$, для которого $\det \|L_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\| \neq 0$. Пространство моментов $Y \subset Z = X \times \mathbb{R}^s$ (координаты в $\mathbb{R}^s$ обозначим через $\lambda = (\lambda_\alpha)$) задается равенствами

$$\lambda_\alpha = L_{\dot{y}^\alpha}.$$

Конечно, в этом случае $Y \cong \mathbb{R} \times T^*(\mathbb{R}^m)$, и в качестве корепера мы выбираем набор 1-форм $\{dx; \theta^\alpha; d\lambda_\alpha\}$ (напомним, что $\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx$). Тогда (см. разд. е гл. I)

$$\psi_Y = L dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha = -H dx + \lambda_\alpha dy^\alpha,$$

где

$$H(x; y^\alpha; \lambda_\alpha) = -L + \dot{y}^\alpha L_{\dot{y}^\alpha}$$

— функция Гамильтона. Дифференциал $\Psi_Y = d\psi_Y$ задается равенством

$$\Psi_Y = -H_{y^\alpha} dy^\alpha \wedge dx - H_{\lambda_\alpha} d\lambda_\alpha \wedge dx + d\lambda_\alpha \wedge dy^\alpha,$$

и система Картана $\mathcal{C}(\Psi_Y)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$(IV.b.37) \quad \begin{aligned} \partial/\partial y^\alpha \lrcorner \Psi_Y &= -d\lambda_\alpha - H_{y^\alpha} dx = 0, \\ \partial/\partial \lambda_\alpha \lrcorner \Psi_Y &= dy^\alpha - H_{\lambda_\alpha} dx = 0. \end{aligned}$$

Вкупе с условием независимости $\omega = dx \neq 0$ эти уравнения Пфаффа образуют систему Эйлера—Лагранжа (J, ω) на пространстве моментов Y , и решения уравнений (IV.b.37) находятся путем решения уравнений Гамильтона

$$(IV.b.38) \quad \begin{aligned} \frac{d\lambda_\alpha}{dx} &= -H_{y^\alpha}, \\ \frac{dy^\alpha}{dx} &= H_{\lambda_\alpha}. \end{aligned}$$

Всё это хорошо известно и уже обсуждалось ранее; мы хотим лишь снова заметить, что с точки зрения внешних дифференциальных систем введение гамильтонова формализма — *единственный возможный путь*.

Обратимся теперь к уравнениям Якоби, которые являются уравнениями в вариациях для системы (J, ω) на многообразии Y . Будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= d\lambda_\alpha + H_{y^\alpha} dx, \\ \varphi^\alpha &= dy^\alpha - H_{\lambda_\alpha} dx, \end{aligned}$$

так что пфафхова дифференциальная система $J = \{\eta_\alpha; \varphi^\alpha\}$ алгебраически порождается 1-формами η_α и φ^α . Их дифференциалы равны

$$(IV.b.39) \quad \begin{aligned} d\eta_\alpha &= H_{y^\alpha y^\beta} dy^\beta \wedge dx + H_{y^\alpha \lambda_\beta} d\lambda_\beta \wedge dx, \\ d\varphi^\alpha &= -H_{\lambda_\alpha y^\beta} dy^\beta \wedge dx - H_{\lambda_\alpha \lambda_\beta} d\lambda_\beta \wedge dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим нормальное векторное поле

$$V = V^\alpha \partial/\partial \lambda_\alpha + V_\alpha \partial/\partial y^\alpha,$$

определенное вдоль интегральной кривой $\Gamma = \{(x; y^\alpha(x); \lambda_\alpha(x))\}$ системы (J, ω) . Уравнения в вариациях

$$\begin{aligned} d(V \lrcorner \eta_\alpha) + V \lrcorner d\eta_\alpha &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ d(V \lrcorner \varphi^\alpha) + V \lrcorner d\varphi^\alpha &\equiv 0 \bmod \Gamma \end{aligned}$$

с учетом равенств (IV.b.39) принимают соответственно вид

$$(IV.b.40) \quad \begin{aligned} dV^\alpha + (H_{y\alpha y^\beta} V_\beta + H_{y\alpha \lambda_\beta} V^\beta) &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ dV^\alpha - (H_{\lambda_\alpha y^\beta} V_\beta + H_{\lambda_\alpha \lambda_\beta} V^\beta) dx &\equiv 0 \bmod \Gamma. \end{aligned}$$

Это классические уравнения Якоби в гамильтоновой форме.

[З а м е ч а н и е. В лагранжевой форме, т. е. на многообразии $\mathbb{R} \times T(\mathbb{R}^m)$, они несколько более запутанны.]

(IV.b.41) Частный случай. Классическая задача о минимальной поверхности вращения (рис. 41) задается на многообразии $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ лагранжианом (мы опускаем коэффициент 2π)

$$L(x, y, \dot{y}) = y \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

Решая уравнение

$$\lambda = L_{\dot{y}} = \frac{y \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

получаем

$$\dot{y} = \pm \frac{\lambda}{\sqrt{y^2 - \lambda^2}}$$

и

$$H = -L + \lambda \dot{y} = -\sqrt{y^2 - \lambda^2}.$$

Так как функция $H = H(y, \lambda)$ не зависит от переменной x , то существует первый интеграл

$$H = -a \quad (a > 0).$$

Поскольку

$$(IV.b.42) \quad \begin{aligned} H_\lambda &= \frac{\lambda}{H}, \\ H_y &= -\frac{y}{H}, \end{aligned}$$

то уравнения Гамильтона (IV.b.38) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} &= \frac{y}{a}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\lambda}{a} \end{aligned}$$

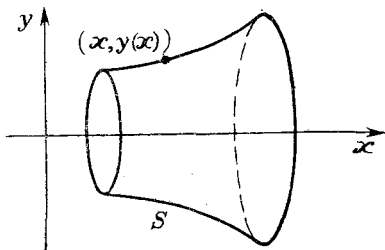


Рис. 41. Площадь поверхности S равна

$$2\pi \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} y(x) dx.$$

(a — «энергетический уровень»). При их интегрировании получаем

$$(IV.b.43) \quad \begin{aligned} y(x) &= \frac{a}{2} (e^{(x-x_0)/a} + e^{-(x-x_0)/a}), \\ \lambda(x) &= \frac{a}{2} (e^{(x-x_0)/a} - e^{-(x-x_0)/a}). \end{aligned}$$

Две постоянные a и x_0 используются, чтобы провести решение через две заданные точки. Эти решения — хорошо известные цепные линии в плоскости x, y (рис. 42).

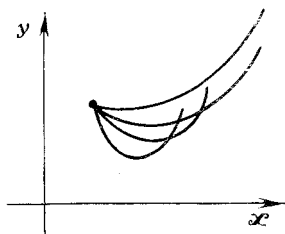


Рис. 42.

Чтобы выписать уравнения Якоби, продифференцируем равенства (IV.b.42):

$$H_{\lambda\lambda} = \frac{y^2}{H^3},$$

$$H_{\lambda y} = -\frac{\lambda y}{H^3},$$

$$H_{yy} = \frac{\lambda^2}{H^3}.$$

Поэтому уравнения Якоби (IV.b.40) принимают вид (ниже $U = V_1$ и $W = V^1$)

$$(IV.b.44) \quad \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= -\frac{\lambda y}{a^3} U + \frac{y^2}{a^3} W, \\ \frac{dW}{dx} &= -\frac{\lambda^2}{a^3} U + \frac{\lambda y}{a^3} W. \end{aligned}$$

Вдоль кривой (IV.b.43) мы можем разрешить уравнения Якоби (IV.b.44) и получить

$$U = a (\lambda (\alpha x + \beta) - y \alpha),$$

$$W = a (y (\alpha x + \beta) - \lambda \alpha).$$

Так как вариационное векторное поле V имеет вид $U \partial / \partial y + W \partial / \partial \lambda$, то граничные условия таковы:

$$U(x_1) = U(x_2) = 0.$$

Отсюда и из равенств (IV.b.43) следует, что при $\alpha = 0$ у функции $U(x)$ в точности два нуля $x_i(a, \alpha)$ ($i = 1, 2$). Другими словами, на общем решении уравнений Эйлера—Лагранжа для этой вариационной задачи есть в точности одна пара сопряженных точек. Детальное обсуждение этого поучительного примера см., например, в [13, с. 297—304].

(IV.b.45) ПРИМЕР. Выведем в общем виде уравнения Якоби для классической вариационной задачи второго порядка с невырожденным лагранжианом (см. (I.e.23)).

Предположим, что на многообразии $X = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)$ задана функция $L(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)$, для которой $\det \|L_{\ddot{y}^\alpha \ddot{y}^\beta}\| \neq 0$. Пространство импульсов Y выделяется в многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^{2s}$ (в $\mathbb{R}^{2s}$ координаты обозначаются $(\lambda_\alpha; \dot{\lambda}_\alpha)$) равенствами

$$\dot{\lambda}_\alpha = L_{\dot{y}^\alpha}.$$

Возьмем на Y корепер $\{dx; \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha; d\lambda_\alpha; d\dot{\lambda}_\alpha\}$ (где, напомним, $\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx$, $\dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx$), так что основная диаграмма (IV.b.2) принимает вид

$$(IV.b.46) \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow \pi \\ J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = Q & & X = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \end{array}$$

Далее (см. разд. е гл. I),

$$\begin{aligned} \psi_Y &= L dx + \lambda_\alpha \theta^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \dot{\theta}^\alpha \\ &= -H dx + \lambda_\alpha dy^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha d\dot{y}^\alpha, \end{aligned}$$

где гамильтониан дается равенством

$$H = -L + \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha + L_{\dot{y}^\alpha} \ddot{y}^\alpha.$$

Дифференциал $\Psi_Y = d\psi_Y$ записывается так:

$$\begin{aligned} \Psi_Y &= -H_{y^\alpha} dy^\alpha \wedge dx - H_{\dot{y}^\alpha} d\dot{y}^\alpha \wedge dx - H_{\lambda_\alpha} d\lambda_\alpha \wedge dx \\ &\quad - H_{\dot{\lambda}_\alpha} d\dot{\lambda}_\alpha \wedge dx + d\lambda_\alpha \wedge dy^\alpha + d\dot{\lambda}_\alpha \wedge d\dot{y}^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, система Картана порождается уравнениями Пфаффа

$$(IV.b.47) \quad \begin{aligned} \eta_\alpha &= -\partial/\partial y^\alpha \lrcorner \Psi_Y = d\lambda_\alpha + H_{y^\alpha} dx = 0, \\ \dot{\eta}_\alpha &= -\partial/\partial \dot{y}^\alpha \lrcorner \Psi_Y = d\dot{\lambda}_\alpha + H_{\dot{y}^\alpha} dx = 0, \\ \varphi^\alpha &= \partial/\partial \lambda_\alpha \lrcorner \Psi_Y = dy^\alpha - H_{\lambda_\alpha} dx = 0, \\ \dot{\varphi}^\alpha &= \partial/\partial \dot{\lambda}_\alpha \lrcorner \Psi_Y = d\dot{y}^\alpha - H_{\dot{\lambda}_\alpha} dx = 0. \end{aligned}$$

Решения системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\alpha}{dx} &= -H_{\nu_\alpha}, \\ \frac{d\dot{\lambda}_\alpha}{dx} &= -H_{\dot{\nu}_\alpha}, \\ (IV.b.48) \quad \frac{dy^\alpha}{dx} &= H_{\lambda_\alpha}, \\ \frac{d\dot{y}^\alpha}{dx} &= H_{\dot{\lambda}_\alpha}. \end{aligned}$$

За конкретным примером такой ситуации отсылаем к (II.a.50).
Уравнения Якоби для поля

$$V = V^\alpha \partial / \partial \lambda_\alpha + \dot{V}^\alpha \partial / \partial \dot{\lambda}_\alpha + V_\alpha \partial / \partial y^\alpha + \dot{V}_\alpha \partial / \partial \dot{y}^\alpha$$

вдоль решения Γ системы (IV.b.48) имеют вид

$$\begin{aligned} d(V \rfloor \eta_\alpha) + V \rfloor d\eta_\alpha &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ d(V \rfloor \dot{\eta}_\alpha) + V \rfloor d\dot{\eta}_\alpha &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ d(V \rfloor \varphi^\alpha) + V \rfloor d\varphi^\alpha &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ d(V \rfloor \dot{\varphi}^\alpha) + V \rfloor d\dot{\varphi}^\alpha &\equiv 0 \bmod \Gamma, \end{aligned}$$

и равенства (IV.b.47) дают

$$\begin{aligned} \frac{dV^\alpha}{dx} &= - (H_{y^\alpha \lambda_\beta} V^\beta + H_{y^\alpha \dot{\lambda}_\beta} \dot{V}^\beta + H_{y^\alpha y^\beta} V_\beta + H_{y^\alpha \dot{y}^\beta} \dot{V}_\beta), \\ (IV.b.49) \quad \frac{d\dot{V}^\alpha}{dx} &= - (H_{\dot{y}^\alpha \lambda_\beta} V^\beta + H_{\dot{y}^\alpha \dot{\lambda}_\beta} \dot{V}^\beta + H_{\dot{y}^\alpha y^\beta} V_\beta + H_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta} \dot{V}_\beta), \\ \frac{dV_\alpha}{dx} &= H_{\lambda_\alpha \lambda_\beta} V^\beta + H_{\lambda_\alpha \dot{\lambda}_\beta} \dot{V}^\beta + H_{\lambda_\alpha y^\beta} V_\beta + H_{\lambda_\alpha \dot{y}^\beta} \dot{V}_\beta, \\ \frac{d\dot{V}_\alpha}{dx} &= H_{\dot{\lambda}_\alpha \lambda_\beta} V^\beta + H_{\dot{\lambda}_\alpha \dot{\lambda}_\beta} \dot{V}^\beta + H_{\dot{\lambda}_\alpha y^\beta} V_\beta + H_{\dot{\lambda}_\alpha \dot{y}^\beta} \dot{V}_\beta. \end{aligned}$$

с. Геометрия приведенного пространства импульсов.

Вторая вариация, форма индекса

и достаточные условия локального минимума

Мы сохраняем обозначения двух предыдущих разделов и рассматриваем хорошо поставленную вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$ на данном многообразии X . Обозначим граничные условия (IV.b.1) через A, B , а через

$$(IV.c.1) \quad \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]) \subset \mathcal{Y}(I, \omega)$$

— множество интегральных многообразий $N \subset X$ системы (I, ω) , удовлетворяющих этим граничным условиям. Чуть позднее мы уточним это понятие. Примеры из разд. а гл. IV. показывают, что часто можно считать условия A, B «лежащими» над точками $a, b \in X$; интегральные многообразия $N \in \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])$ будут при этом интегральными кривыми системы (I, ω) в X , соединяющими точки a и b и удовлетворяющими некоторым линейным условиям, наложенным на касательные в этих точках.

Рассмотрим функционал

$$(IV.c.2) \quad \Phi : \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]) \rightarrow \mathbb{R},$$

определенный равенством

$$\Phi(N) = \int_N \varphi.$$

Как и в разд. а гл. IV, мы вводим касательное пространство $T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]))$, которое состоит из C^∞ -гладких нормальных к подмногообразию $N \subset X$ векторных полей, удовлетворяющих уравнениям в вариациях (I.b.15) и граничным условиям (IV.b.1). Напомним, что выполнение уравнений в вариациях для поля $v \in C^\infty(N, T(X))$ означает, что деформация кривой N вдоль поля v также является с точностью до членов порядка t^2 интегральным многообразием системы (I, ω) . Напомним также, что это последнее зависит только от нормальной составляющей $[v] \in C^\infty(N, T(X)/T(N))$ поля v . Однако граничные условия $\langle \omega, v \rangle(a) = \langle \omega, v \rangle(b) = 0$ существенно зависят от самого поля v , и точное определение пространства $T_N \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])$ звучит следующим образом:

Пусть $E = T(X)/T(N)$ — нормальное расслоение к подмногообразию $N \subset X$. Тогда $T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])) \subset C^\infty(N, E)$ — это образ множества сечений $v \in C^\infty(N, T(X))$, удовлетворяющих уравнениям (I.b.15) и граничным условиям (IV.b.1).

В разд. а мы определили дифференциал

$$(IV.c.3) \quad \delta\Phi(N) : T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])) \rightarrow \mathbb{R}$$

функционала (IV.c.2). Как было вычислено при доказательстве теоремы (IV.a.12) (ср. с предложением (I.b.5)),

$$(IV.c.4) \quad \delta\Phi(N)(v) = \int_N v \lrcorner d\varphi.$$

В теореме (IV.a.12) мы доказали также, что если многообразие N удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа (I.d.14), то $\delta\Phi(N) = 0$. При этом остались невыясненными следующие центральные вопросы:

(IV.c.5) Дает ли многообразие N *локальный минимум* функционала (IV.c.2) в том смысле, что $\Phi(N) \leq \Phi(N')$ для всех $N' \in \mathcal{U}(I, \omega; [A, B])$ из некоторой окрестности точки N ?

(IV.c.6) Дает ли многообразие N *абсолютный минимум* функционала (IV.c.2)?

З а м е ч а н и я. Второй вопрос обсуждать мы не будем. При рассмотрении первого вопроса стало обычным проводить различие между *слабым локальным минимумом*, т. е. таким многообразием N , что $\Phi(N) \leq \Phi(N')$ для всех $N' \in \mathcal{U}(I, \omega; [A, B])$ из некоторой C^2 -окрестности точки N (во всех наших рассмотрениях нужна лишь гладкость класса C^2 , а не класса C^∞), и *сильным локальным минимумом*, т. е. таким многообразием N , что то же неравенство выполняется для всех N' из некоторой C^0 -окрестности точки N . Это важное различие мы опять-таки обсуждать не будем (см. [13], [29] и [31]).

Цель данного раздела — сформулировать и доказать один результат общего характера, утверждающий, что при определенных условиях решение уравнений Эйлера—Лагранжа дает локальный минимум функционала (IV.c.2). Довольно естественно, что этот результат аналогичен обычной «проверке на вторую производную» из элементарного анализа и потому в нем должна фигурировать вторая вариация функционала Φ . Другими словами, надо кое-что представлять себе о вторых производных функционалов, определенных лишь на интегральных многообразиях некоторой внешней дифференциальной системы. Лобовой подход к соответствующему вычислению довольно труден; суть дела, как мы увидим, состоит в изучении весьма замечательной геометрии, связанной с основной диаграммой (IV.b.2).

Чтобы сформулировать наши результаты, примем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Вариационная задача $(I, \omega; \Phi)$ *сильно невырождена* в смысле определения разд. е гл. I. Напомним, что в этом случае можно ввести невырожденную квадратичную форму $\|A_{\mu\nu}\|$ вдоль интегральных многообразий N системы (I, ω) .

(IV.c.7) ТЕОРЕМА. Пусть квадратичная форма $\|A_{\mu\nu}\|$ *положительно-определённа*. Тогда для достаточно близких между собой граничных условий всякое решение $N \in \mathcal{U}(I, \omega; [A, B])$ уравнений Эйлера—Лагранжа, не выходящее из некоторой окрестности точки A , дает локальный минимум функционала Φ .¹⁾

¹⁾ На самом деле требуется лишь, чтобы эта квадратичная форма была положительно-определенной в точке N .

Как было сказано выше, доказательство этого утверждения требует предварительных рассмотрений, которые и сами по себе интересны. Этим мы и займемся сначала.

1. Геометрия пространства импульсов и приведенного пространства импульсов

Рассмотрим нашу основную диаграмму

$$(IV.c.8) \quad \begin{array}{c} Y \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tilde{\omega} \quad \pi \\ \downarrow \quad \downarrow \\ Q \quad X \end{array}$$

и сделаем несколько наблюдений относительно взаимосвязи входящих в нее многообразий. Для удобства напомним структурные уравнения (I.e.28) и (I.e.29) для задачи $(I, \omega; \varphi)$:

$$(IV.c.9) \quad \begin{aligned} (i) & d\theta^0 \equiv 0 \bmod L^* \wedge L, \quad \rho = 1, \dots, s - s_1, \\ (ii) & d\mu^\mu \equiv -\pi^\mu \wedge \omega \bmod L^* \wedge L^*, \quad \mu = s - s_1 + 1, \dots, s, \\ (iii) & d\omega \equiv 0 \bmod L^* \wedge L^*, \\ (iv) & d\varphi \equiv A_\nu \pi^\nu \wedge \omega \bmod L^* \wedge L^*, \\ (v) & dA_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\nu} \pi^\nu \bmod L^*, \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Все они рассматриваются на многообразии X . Напомним, далее, что пространство импульсов $Y \subset X \times \mathbb{R}^s$ определяется уравнениями

$$\lambda_\mu = A_\mu$$

и ввиду предположения $\det \|A_{\mu\nu}\| \neq 0$ мы можем выбрать на Y корепер

$$(IV.c.10) \quad \{\omega; \theta^\alpha; d\lambda_\alpha\}.$$

Кроме того,

$$(IV.c.11) \quad \begin{aligned} (i) & \psi_Y = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha, \\ (ii) & \Psi_Y \equiv (\alpha \lambda_\alpha + \xi_\alpha \omega) \wedge \theta^\alpha, \end{aligned}$$

где символ $\equiv$ обозначает сравнение по модулю линейных комбинаций членов $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ (см. (II.b.4)).

Доказательство соотношения (IV.c.11), (ii). Используя (IV.c.9), получаем

$$\begin{aligned} d\psi_Y & \equiv (A_\mu - \lambda_\mu) \pi^\mu \wedge \omega + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha \bmod L^* \wedge L^* \\ & \equiv d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha \bmod L^* \wedge L^*, \end{aligned}$$

так как $\lambda_\mu = A_\mu$ на Y . Элементы множества $L^* \wedge L^*$ разлагаются в суммы членов вида $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ и $\omega \wedge \theta^\alpha$, а последние можно заменить членами вида $\xi_\alpha \omega \wedge \theta^\alpha$. $\square$

На самом деле в равенстве (IV.c.11) следовало бы писать $\pi^*\phi$ и $\pi^*\theta^\alpha$, но для упрощения записи мы не стали этого делать. Однако поднятие внешней дифференциальной системы (I, ω) на многообразии X на пространство импульсов Y будем обозначать через (π^*I, ω) . Мы утверждаем, что

(IV.c.12) *Характеристическая система Коши для системы (π^*I, ω) задается распределением $F \subset T(Y)$, определяемым формулой*

$$F = \text{span} \{ \partial / \partial \lambda_\rho \}.$$

Это немедленно следует из определения характеристик Коши и структурных уравнений (IV.c.9)¹⁾. Заметим, что распределение $F = \ker \pi_*$ касается слоев отображения $\pi : Y \rightarrow X$. Интересно отметить, что при таком инвариантном подходе появляются «подлежащие определению функции λ_ρ ».

Рассмотрим теперь граничные условия *вверху* на многообразии Y (мы вновь опускаем указание на поднятие π^*)

$$\omega = \theta^1 = \dots = \theta^s = 0.$$

Эти условия определяют интегрируемое подрасслоение (которое мы будем называть *граничным подрасслоением*)

$$(IV.c.13) \quad S \subset T(Y)$$

ранга s . Так как $\dim Y = 2s + 1$ и

$$(IV.c.14) \quad \psi_Y \wedge (\Psi_Y)^s \neq 0,$$

то ранг замкнутой 2-формы Ψ_Y всюду максимально возможный (т. е. всюду равен s), и в силу (IV.c.9) и (IV.c.11) справедлив следующий результат:

(IV.c.15) *Граничное расслоение S изотропно по отношению к 2-форме Ψ_Y . Это означает, что*

$$\langle \Psi_Y, V \wedge W \rangle = 0 \text{ для } V, W \in S.$$

Уделим теперь внимание расслоению

$$(IV.c.16) \quad \tilde{\omega} : Y \rightarrow Q$$

¹⁾ Утверждение (IV.c.12) представляет собой частный случай следующего общего факта. Если отображение $\pi : X \rightarrow X'$ сюръективно и на многообразии X' задана внешняя дифференциальная система (I', ω') , то характеристическая система Коши для системы $(\pi^*I', \pi^*\omega')$ на многообразии X — это пфафова система, порожденная множеством $(\pi_*^{-1}(S'))^\perp$, где $S' \subset T(X')$ — распределение, отвечающее характеристической системе Коши для системы (I', ω') .

над приведенным пространством моментов, где граничное подрасслоение $S \subset T(Y)$ — это касательное расслоение к слоям. Мы утверждаем, что

(IV.с.17) *Первая производная система $(\pi^*I)_1, \omega$ для системы (π^*I, ω) есть поднятие на пространство импульсов Y пфаффовой системы (G, ω) на приведенном пространстве импульсов Q .*

Доказательство. Все 1-формы $\omega, \theta^1, \dots, \theta^s$ по определению горизонтальны (см. разд. а гл. 0) относительно расслоения (IV.с.16). Но, как можно проверить, используя структурные уравнения (IV.с.9), лишь у форм

$$\omega, \theta^1, \dots, \theta^{s-s_1}$$

дифференциалы тоже горизонтальны относительно расслоения (IV.с.16). Следовательно, с одной стороны, первая производная система для системы (π^*I, ω) выглядит так:

$$\theta^1 = \dots = \theta^{s-s_1} = 0, \quad \omega \neq 0,$$

а с другой (как хорошо известно и легко доказать) — условие того, что дифференциальная форма η на многообразии Y имеет вид $\tilde{\omega}^*\xi$ для некоторой формы ξ на Q , состоит в том, что и форма η , и форма $d\eta$ горизонтальны относительно расслоения (IV.с.16) (см. разд. а гл. 0). Тем самым наше утверждение доказано. $\square$

Так как мы будем работать в некоторой окрестности одномерного подмногообразия $N \subset X$, то мы можем сделать следующие заключения (напомним, что N — интервал, включающий в себя концы):

(IV.с.18) *Всякое интегральное многообразие $N \subset X$ системы (I, ω) является проекцией некоторого интегрального многообразия $\Gamma \subset Y$ системы (π^*I, ω) . Далее, многообразие Γ единственно с точностью до действия группы $\mathbb{R}^{s-s_1}$, определяемого характеристиками Коши системы (π^*I, ω) . Каждое интегральное многообразие $\Gamma \subset Y$ системы (π^*I, ω) проектируется в некоторое интегральное многообразие $\gamma \subset Q$ системы (G, ω) .*

Займемся граничными условиями. Поднимая многообразие $N \in \mathcal{Y}(I, \omega)$, мы получаем $\Gamma \in \mathcal{Y}(\pi^*I, \omega)$, а проектируя Γ посредством отображения $\tilde{\omega}$, получаем кривую $\gamma \in \mathcal{Y}(G, \omega)$. Граничные условия A, B для многообразия N не зависят от выбора поднятия Γ (так как $\langle \omega, \partial/\partial\lambda_p \rangle = \langle \theta^\alpha, \partial/\partial\lambda_p \rangle = 0$) и означают в точности, что кривая γ должна соединять две фиксированные точки приведенного пространства моментов Q .

Все эти общие рассуждения становятся совершенно очевидными, если проследить их на примерах (IV.а.17)—(IV.а.20).

2. Перенесение задачи о второй вариации на пространство импульсов

Мы переходим теперь к одному из основных моментов обсуждения. Ввиду общности вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$ (даже в предположении сильной невырожденности) ситуация «внизу» на многообразии X может быть чрезвычайно сложной. Однако благодаря двум обстоятельствам:

а) тому что для $N \in \mathcal{Y}(I, \omega)$

$$(IV.c.19) \quad \int_N \varphi = \int_{\Gamma} \psi_Y, \quad \pi(\Gamma) = N^1;$$

б) тому что форма ψ_Y локально приводится к нормальной форме Пфаффа—Дарбу (см. (0.d.9)), «вверх» на пространстве импульсов Y ситуация оказывается значительно проще.

Точнее, пусть $N \in \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])$ — решение уравнений Эйлера—Лагранжа. Тогда $\delta\Phi(N) = 0$, и мы рассмотрим

$$(IV.c.20) \quad \delta^2\Phi(N): \text{Sym}^2(T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]))) \rightarrow \mathbb{R}$$

— вторую вариацию функционала Φ^2 .

Для заданных $v, w \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]))$ существует двухпараметрическое семейство

$$N_{s,t} \in \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]),$$

такое что элемент v соответствует полю $\partial/\partial s$, элемент w — полю $\partial/\partial t$, вычисленным в точке $N = N_{0,0}$. По определению, вторая вариация равна

$$(IV.c.21) \quad \delta^2\Phi(N)(v, w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(\int_{N_{s,t}} \varphi \right)_{s=t=0}.$$

Мы хотим вывести явную формулу для правой части и с помощью этой формулы показать, что в условиях теоремы (IV.c. 7)

$$(IV.c.22) \quad \delta^2\Phi(N)(v, v) > 0 \text{ для } 0 \neq v \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])).$$

¹⁾ До сих пор мы это равенство никак не использовали. Оно будет играть существенную роль в следующем разделе при обсуждении инвариантного интеграла Гильберта.

²⁾ Вторая вариация $\delta^2\Phi$ определяется равенством (IV.c.21), и ниже будет доказано, что она является симметричной билинейной формой на векторном пространстве $T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]))$.

В силу стандартных соображений этого будет достаточно для доказательства теоремы ¹⁾.

Сначала мы построим гладкое поднятие семейства $\{N_{s,t}\}$ в семейство интегральных многообразий $\{\Gamma_{s,t}\}$ системы (π^*I, ω) на многообразии Y . Пусть V, W — нормальные векторные поля к подмногообразию $\Gamma = \Gamma_{0,0}$, соответствующие полям $\partial/\partial s, \partial/\partial t$. Тогда ввиду (IV.c.19) правая часть (IV.c.21) равна

$$(IV.c.23) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \int_{\Gamma_{s,t}} \Psi_Y \right)_{s=t=0}.$$

Докажем основную формулу

$$(IV.c.24) \quad \delta^2 \Phi(N)(v, w) = \int_{\Gamma} V \lrcorner d(W \lrcorner \Psi_Y).$$

Доказательство. Левая часть равна

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Gamma_{s,t}} \Psi_Y \right) \right)_{t=0} \Big|_{s=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\int_{\Gamma_{s,0}} W \lrcorner \Psi_Y + d(W \lrcorner \Psi_Y) \right) \right)_{s=0} \quad (\text{в силу (I.b.5)}) \\ &= \left(\frac{d}{ds} \int_{\Gamma_{s,0}} W \lrcorner \Psi_Y \right)_{s=0} \quad (\text{в силу теоремы Стокса и нашего граничного условия}) \\ & \qquad \qquad \qquad \langle \Psi_Y, W \rangle = 0 \text{ на } \partial \Gamma_{s,0} \\ &= \int_{\Gamma} V \lrcorner d(W \lrcorner \Psi_Y) + d(V \lrcorner W \lrcorner \Psi_Y) \quad (\text{снова в силу (I.b.5)}) \\ &= \int_{\Gamma} V \lrcorner d(W \lrcorner \Psi_Y) + \langle \Psi_Y, V \wedge W \rangle_{\partial \Gamma} \quad (\text{по теореме Стокса}). \end{aligned}$$

¹⁾ Это место стоит уточнить. Окрестность «точки» N есть ε -окрестность U точки $N \in \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])$ в C^2 -топологии. Если $N' \in U$, то мы можем соединить точки N и N' дугой $\{N_t\} \subset \mathcal{Y}(I, \omega; [A, B])$ с инфинитезимальной вариацией $v_t \in T_{N_t}(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]))$, такой что $N_0 = N, N_1 = N'$, и

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \int_{N_t} \Phi \right)_{t=0} = \delta^2 \Phi(N)(v, v) > 0.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \int_{N_t} \Phi > 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и поэтому $\Phi(N) < \Phi(N')$.

Но (решающий момент доказательства!) *ввиду предложения (IV.c.15) последний член $\langle \Psi_Y, V \wedge W \rangle_{\partial T}$ равен нулю.* $\square$

З а м е ч а н и е. Отсюда вытекает, что вверху на Y нас интересуют следующие данные:

- а) 1-форма Ψ_Y максимального ранга;
- б) интегрируемое подрасслоение $S \subset T(Y)$;
- с) еще одно подрасслоение S' , такое что $S \subset S' \subset T(Y)$, где S' — поднятие $\tilde{\omega}^*(G^\perp)$ подрасслоения $G^\perp \subset T(Q)$ над приведенным пространством импульсов, определенного первой производной системой системы (π^*I, ω) .

Так как $\Psi_Y|_S = 0$, мы можем, в некотором смысле привести объекты а) и б) одновременно к локальной нормальной форме. Точнее, если подрасслоение S определено локально уравнениями

$$dx = dv^1 = \dots = dv^s = 0$$

для подходящих функций $x, v^1, \dots, v^s$, то для подходящих функций $H, u_1, \dots, u_s$ (см. (0.d.9))

$$\Psi_Y = -H(x, u, v) dx + u_\alpha dv^\alpha.$$

Так как ранг формы Ψ_Y максимален, можно считать, что переменные $(x; u_\alpha; v^\alpha)$ задают систему координат, и рассматривать H как функцию этих переменных.

Однако уравнения

$$\xi^\rho = A^\rho dx + B_\alpha^\rho dv^\alpha = 0,$$

определяющие подрасслоение S' , вообще говоря, имеют сложную природу; преодолеть эту трудность позволяет утверждение (IV.c.17): *мы можем предполагать, что форма $\xi^\rho = \tilde{\omega}^*\eta^\rho$ является поднятием некоторой 1-формы с приведенного пространства импульсов Q .*

3. Уравнения Якоби и вторая вариация

Хорошо известно, что в классической ситуации между уравнениями Якоби и второй вариацией есть тесная связь (исторически это было основополагающим открытием; см. [13, § 315]). Как обобщить этот факт на нашу общую ситуацию, сразу не видно. Например, вторая вариация относится к интегралу, определенному на X , уравнения же Якоби определены на Y . Однако формула (IV.c.24) обеспечивает нужную связь.

Прежде чем объяснить, как это делается, мы должны отклониться в сторону. Напомним, что система Эйлера—Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y является (благодаря предположению о сильной невырожденности; см. теорему (I.e.34) системой Картана $(\mathcal{E}(\Psi_Y), \omega)$. Уравнения Якоби были определены как

уравнения в вариациях для системы (J, ω) . Пусть $\Gamma \subset Y$ — интегральное многообразие системы (J, ω) с нормальным расслоением E . Проведенное в разд. в гл. I обсуждение показывает, что уравнения в вариациях для системы (J, ω) задаются линейным дифференциальным оператором первого порядка

$$(IV.c.25) \quad L: C^\infty(\Gamma, E) \rightarrow C^\infty(\Gamma, E \otimes T^*(\Gamma)).^1$$

С другой стороны, так как $J = \mathcal{C}(\Psi_Y)$, то касательные к кривой Γ являются в точности характеристическими направлениями $\Psi_Y^\perp$ формы Ψ_Y^2). Отсюда следует, что форма Ψ_Y определяет невырожденное спаривание

$$(IV.c.26) \quad \Psi_Y: E \otimes E \rightarrow \mathbb{R}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для нормальных векторных полей V, W к подмногообразию $\Gamma \subset Y$ форма индекса определяется равенством

$$(IV.c.27) \quad I(V, W) = \int_{\Gamma} \Psi_Y(W, L \cdot V),$$

где Ψ_Y — спаривание (IV.c.26).

В соответствующих локальных координатах всё это совершенно прозрачно. Действительно, согласно теореме Дарбу (0.d.8) мы можем выбрать на пространстве импульсов Y такие локальные координаты $(x; u_1, \dots, u_s; v^1, \dots, v^s) = (x; u_\alpha; v^\alpha)$, что

$$(IV.c.28) \quad \Psi_Y = du_\alpha \wedge dv^\alpha$$

и кривая Γ задается уравнениями $u_\alpha = v^\alpha = 0$. Тогда система $\mathcal{C}(\Psi_Y)$ — это пфафова система

$$du_\alpha = dv^\alpha = 0,$$

и для нормального векторного поля

$$V = V^\alpha \partial / \partial u_\alpha + V_\alpha \partial / \partial v^\alpha$$

¹⁾ Согласно (I.b.16), уравнения в вариациях для системы (J, ω) задаются оператором первого порядка

$$L: C^\infty(\Gamma, E) \rightarrow C^\infty(\Gamma, W \otimes T^*(\Gamma)),$$

где E — нормальное расслоение над подмногообразием Γ и подрасслоение $W^* \subset T^*(Y)$ порождено пфафовой системой J . Суть в том, что в нашей ситуации

$$E^* = W^*.$$

В самом деле, это равенство справедливо всегда, когда подрасслоение W^* порождает систему Фробениуса.

²⁾ Возможно, читателю будет полезно обратиться к обсуждению симплектической линейной алгебры, проведенному в разд. d гл. 0.

IV. Граничные условия

мы имеем

$$LV = dV^\alpha \otimes \partial/\partial u_\alpha + dV_\alpha \otimes \partial/\partial v^\alpha.$$

Поэтому если

$$W = W^\alpha \partial/\partial u_\alpha + W_\alpha \partial/\partial v^\alpha,$$

то

$$\Psi_Y(W, L \cdot V) = dV_\alpha W^\alpha - dV^\alpha W_\alpha$$

и

$$(IV.c.29) \quad I(V, W) = \int_{\Gamma} W^\alpha dV_\alpha - W_\alpha dV^\alpha.$$

З а м е ч а н и е. В этих локальных координатах уравнения Якоби

$$dV^\alpha = dV_\alpha = 0$$

абсолютно тривиальны (их решениями служат *постоянные* нормальные векторные поля). Если включить в рассмотрение граничные условия, задаваемые распределением $S \subset T(Y)$, то утверждение о приведении к нормальному виду все еще сохраняет силу. Этот факт несколько тоньше; при его доказательстве используются предложение (IV.c.15) и одно усиление теоремы Дарбу, согласно которому можно при заданных i) замкнутой 2-форме Ψ_Y максимального ранга s на $(2s + 1)$ -мерном многообразии и ii) интегрируемом распределении $S \subset T(Y)$ максимальных изотропных относительно формы Ψ_Y $(s + 1)$ -мерных плоскостей выбрать локальные координаты таким образом, чтобы выполнялось равенство (IV.c.28) и распределение S задавалось уравнениями $dv^1 = \dots = dv^s = 0$.

Интегрируя по частям равенство (IV.c.29), убеждаемся, что если поля V, W удовлетворяют граничным условиям, так что, в частности

$$\langle \Psi_Y, V \wedge W \rangle_{\partial\Gamma} = 0,$$

то

$$I(V, W) = I(W, V).$$

Таким образом, индекс — это *симметричная билинейная* форма на пространстве нормальных векторных полей к многообразию Γ , удовлетворяющих граничным условиям. На самом деле справедливо следующее обобщение указанного выше основополагающего классического результата:

(IV.c.30) ТЕОРЕМА. *Вторая вариация и индекс связаны соотношением*

$$\delta^2\Phi(N)(v, w) = I(V, W).$$

Здесь V и W — нормальные векторные поля к произвольному поднятию Γ многообразия N , проектирующиеся в поля v и w соответственно.

Доказательство. Очевидно, что в локальных координатах, в которых форма Ψ_Y приводится к нормальному виду (IV.c.28), мы имеем

$$\begin{aligned} W \lrcorner d(V \lrcorner \Psi_Y) &= W \lrcorner (dV^\alpha \wedge dv^\alpha - dV_\alpha \wedge du_\alpha) \\ &\equiv (W^\alpha dV_\alpha - W_\alpha dV^\alpha) \bmod \mathcal{C}(\Psi_Y). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы получается теперь из равенства (IV.c.24) интегрированием по многообразию Γ с использованием сравнения $\mathcal{C}(\Psi_Y) \equiv 0 \bmod \Gamma$. $\square$

Доказательство неравенства (IV.c.22). Ввиду теоремы (IV.c.30) достаточно доказать неравенство для индекса

$$I(V, V) > 0.$$

Здесь мы работаем сверху на пространстве импульсов Y , и V — это произвольная ненулевая инфинитезимальная вариация кривой Γ как интегрального многообразия системы (π^*I, ω) , сохраняющая граничные условия. Согласно утверждению (IV.c.12), выбор поля V , проектирующегося в заданное поле $v \in T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B]))$, однозначен по модулю характеристик Коши. Для удобства будем выбирать поле V в виде

$$(IV.c.31) \quad V = V^\mu \partial / \partial \lambda_\mu + V_\rho \partial / \partial \theta^\rho + V_\mu \partial / \partial \theta^\mu.$$

Условия, определяющие поле V :

$$d(V \lrcorner \theta^\rho) + V \lrcorner d\theta^\rho \equiv 0 \bmod \Gamma,$$

$$d(V \lrcorner \theta^\mu) + V \lrcorner d\theta^\mu \equiv 0 \bmod \Gamma$$

(см. (I.b.15)), с использованием структурных уравнений (IV.c.9) приводятся соответственно к виду

$$(IV.c.32) \quad \begin{aligned} dV_\rho - B_\rho^\alpha V_\alpha \omega &\equiv 0 \bmod \Gamma, \\ dV_\mu - (C_{\mu\nu} V^\nu + B_\mu^\alpha V_\alpha) \omega &\equiv 0 \bmod \Gamma, \end{aligned}$$

где $C_{\mu\nu}$ удовлетворяют сравнениям

$$\pi^\mu \equiv C_{\mu\nu} d\lambda_\nu \bmod \text{span} \{ \omega, \theta^\alpha \}.$$

Вспоминая, что подмногообразие $Y \subset X \times \mathbb{R}^s$ определяется уравнениями $\lambda_\mu = A_\mu$, заключаем, что на Y

$$d\lambda_\mu \equiv A_{\mu\nu} \pi^\nu \bmod \text{span} \{ \omega, \theta^\alpha \}.$$

Таким образом, матрица $\|C_{\mu\nu}\|$ является обратной для матрицы $\|A_{\mu\nu}\|$, и ввиду нашего предположения

$$(IV.c.33) \quad \|A_{\mu\nu}\| > 0.$$

Выбирая x в качестве локальной координаты на кривой Γ , перепишем равенства (IV.с.32) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(IV.с.34) \quad \begin{aligned} \frac{dV_\rho}{dx} &= B_\rho^\alpha V_\alpha, \\ \frac{dV_\mu}{dx} &= C_{\mu\nu} V^\nu + B_\mu^\alpha V_\alpha, \end{aligned}$$

где $\|B_\beta^\alpha\|$ — некоторая матрица функций.¹⁾ Если кривая Γ отвечает интервалу $a \leq x \leq b$, то граничные условия (IV.с.13) записываются так:

$$(IV.с.35) \quad V_\alpha(a) = V_\alpha(b) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

С другой стороны, в силу (IV.с.11)

$$\Psi_Y \equiv (d\lambda_\alpha + \xi_\alpha \omega) \wedge \theta^\alpha.$$

Так как

$$LV = (B_\rho^\alpha V_\alpha) \partial/\partial \theta^\rho + (C_{\mu\nu} V^\mu + B_\mu^\alpha V_\alpha) \partial/\partial \theta^\mu$$

(см. разд. с гл. I), то подынтегральное выражение в формуле для формы индекса имеет вид

$$\Psi_Y(V, LV) = C_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + B_\mu^\alpha V_\alpha V^\mu + B^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta.$$

Таким образом,

$$I(V, V) = \int_a^b (C_{\mu\nu} V^\mu V^\nu + B_\mu^\alpha V_\alpha V^\mu + B^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta) dx.$$

Вспомнив, что матрица $\|A_{\mu\nu}\|$ обратна к матрице $\|C_{\mu\nu}\|$ из (IV.с.34) получаем

$$V^\mu = A_{\mu\nu} \frac{dV_\mu}{dx} + C_\mu^\alpha V_\alpha,$$

так что предыдущий интеграл можно записать в виде

$$(IV.с.36) \quad I(V, V) = \int_a^b \left(A_{\mu\nu} \frac{dV_\mu}{dx} \frac{dV_\nu}{dx} + D^{\alpha\mu} \frac{dV_\mu}{dx} V_\alpha + \right. \\ \left. + E^{\alpha\beta} V_\alpha V_\beta \right) dx.$$

Согласно неравенству (IV.с.33), для произвольного вектора $\xi = (\xi_\mu)$ имеем

$$(IV.с.37) \quad A_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu \geq \delta \|\xi\|^2$$

¹⁾ Из этих уравнений видно, что интегральные многообразия системы (π^*I, ω) зависят от s произвольных функций одной переменной и некоторого числа постоянных. Из этих s функций s_1 представляют собой функции $V^\nu(x)$, а оставшиеся $s-s_1$ — это характеристики Коши $\lambda_\rho(x)$.

при некотором $\delta > 0$. Если использовать неравенство Коши—Шварца для векторов ξ, ζ по принципу «тришкина кафтана»¹⁾:

$$2 |(\xi, \zeta)| \leq \varepsilon \|\xi\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\zeta\|^2,$$

то соотношения (IV.с.36) и (IV.с.37) дадут

$$(IV.с.38) \quad I(V, V) \geq c_1 \sum_{\mu} \int_a^b \left(\frac{dV_{\mu}}{dx} \right)^2 dx - c_2 \sum_{\alpha} \int_a^b V_{\alpha}^2 dx$$

для подходящих постоянных $c_1 > 0$ и c_2 . Теперь нам понадобится хорошо известная

(IV.с.39) ЛЕММА. Пусть функция $f(x) \in C^1[a, b]$ такова, что $f(a) = 0$. Тогда

$$\int_a^b f(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(x)^2 dx.$$

Доказательство. В силу неравенства Коши

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= \left(\int_a^x f'(t) dt \right)^2 \\ &\leq (x-a) \left(\int_a^x f'(t)^2 dt \right) \\ &\leq (x-a) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt \right). \end{aligned}$$

Остается проинтегрировать крайние части по отрезку $a \leq x \leq b$. $\square$

Теперь мы можем завершить доказательство неравенства (IV.с.22), а с ним и теоремы (IV.с.7). Выбирая наши граничные условия достаточно близкими и используя (IV.с.34) и лемму (IV.с.39), получаем

$$(IV.с.40) \quad \begin{aligned} \int_a^b V_{\rho}^2 dx &\leq \varepsilon \sum_{\alpha} \int_a^b V_{\alpha}^2 dx, \\ \int_a^b V_{\mu}^2 dx &\leq \varepsilon \left(\sum_{\nu} \int_a^b \left(\frac{dV_{\nu}}{dx} \right)^2 dx + \sum_{\alpha} \int_a^b V_{\alpha}^2 dx \right). \end{aligned}$$

¹⁾ В оригинале *rob Peter to pay Paul* (облагодетельствовать одного за счет другого). — Прим. перев.

IV. Граничные условия

Отсюда следует, что второй член в правой части неравенства (IV.c.38) можно включить в первый, т. е.

$$I(V, V) \geq c_3 \sum_{\mu} \int_a^b \left(\frac{dV_{\mu}}{dx} \right)^2 dx$$

для некоторой постоянной $c_3 > 0$. Если все производные $dV_{\mu}/dx = 0$, то из (IV.c.40) следует, что $V \equiv 0$. Таким образом, $I(V, V) > 0$. $\square$

ПРИМЕРЫ. Под теорему (IV.c.7) подпадают такие классические ситуации вариационного исчисления, как, скажем, пример (I.e.18) при

$$\|L_{\dot{y}^{\alpha} \dot{y}^{\beta}}\| > 0$$

и пример (I.e.23) при

$$\|L_{\dot{y}^{\alpha} \dot{y}^{\beta}}\| > 0.$$

Большой интерес представляет применение ее к функционалу

$$(IV.c.41) \quad \Phi(N) = \frac{1}{2} \int_N (\kappa_1(s)^2 + \dots + \kappa_l(s)^2) ds,$$

определенному на кривых $N \subset \mathbb{E}^n$, когда граничные условия задаются фиксированием l -х соприкасающихся пространств в точках ∂N (см. пример (IV.a.20)).

При « $l = 0$ » это в точности случай геодезических (вообще-то здесь следовало бы взять кинетическую энергию, но — см. примеры (II.a.23) и (IV.b.3)).

В задачах разд. b гл. II выполнены условия теоремы (IV.c.7) при $l = n - 1$.

При $1 \leq l \leq n - 2$, если сформулировать вариационную задачу «вверху» на многообразии $\mathcal{F}(\mathbb{E}^n) \times \mathbb{R}^{n-1}$ (как в разд. b гл. II), то квадратичная форма $\|A_{\mu\nu}\|$ будет лишь неотрицательно-определенной (для функционала, соответствующего функции $L(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$, мы имеем $A_{\mu\nu} = \partial^2 L / \partial \kappa_{\mu} \partial \kappa_{\nu}$). Однако эта вариационная задача «опускается» до вариационной задачи на многообразии $X_l = \mathcal{F}(l, \mathbb{E}^n) \times \mathbb{R}^l$, где $\mathcal{F}(l, \mathbb{E}^n)$ — многообразие Штифеля всех частичных реперов $(x; e_1, \dots, e_l)$, и на многообразии X_l квадратичная форма, ассоциированная с данной вариационной задачей, уже положительно-определенна. Другими словами, хотя вычислять систему Эйлера—Лагранжа для функционала (IV.c.41) удобнее на $\mathcal{F}(\mathbb{E}^n) \times \mathbb{R}^{n-1}$ (благодаря тому, что многообразие $\mathcal{F}(\mathbb{E}^n)$ является группой Ли), нам приходится «опустить» вариационную задачу, разрешив произвольным образом крутить несущественную часть репера Френе, чтобы иметь возможность применить теорему (IV.c.7).

д. Поля и уравнение Гамильтона—Якоби.

Новые достаточные условия локального минимума

К числу важнейших понятий классического вариационного исчисления относятся *поле* (иногда говорят *геодезическое поле*) и *уравнение Гамильтона—Якоби*. Мы кратко обсудим каждое из этих понятий в нашей общей ситуации, а затем приведем несколько примеров и в качестве приложения полученных результатов докажем теорему, которую сформулируем уже сейчас (доказательство появится в конце данного раздела).

(IV.d.1) ТЕОРЕМА.¹⁾ Пусть $(I, \omega; \varphi)$ — сильно невырожденная вариационная задача на многообразии X и $N \subset X$ — интегральное многообразие системы (I, ω) , удовлетворяющее условиям:

- i) N является решением уравнений Эйлера—Лагранжа;
- ii) квадратичная форма $\|A_{\mu\nu}\|$ положительно-определенна вдоль N ;

iii) никакие две точки кривой N не сопряжены.

Тогда N дает локальный минимум функционала (IV.c.3).

З а м е ч а н и е. Этот результат, который является фундаментальным в теории классических вариационных задач первого порядка, включает в себя теорему (IV.c.7) как частный случай. В этом можно убедиться, заметив, что ни одно из решений дифференциальной системы Якоби на пространстве импульсов Y не может удовлетворять граничным условиям A, B , если A и B достаточно близки (это следует из предположений о положительной определенности и трансверсальности, фигурирующих в определении хорошо поставленных граничных условий).

Доказательство теоремы следует за нашим обсуждением полей и уравнения Гамильтона—Якоби; задача снова состоит в том, чтобы понять геометрию основной диаграммы

$$(IV.d.2) \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ \omega \swarrow & & \searrow \pi \\ \varphi & & X \end{array}$$

¹⁾ Интуитивно утверждение этой теоремы заключается в следующем. Если N — решение уравнений Эйлера—Лагранжа, вдоль которого квадратичная форма $\|A_{\mu\nu}\|$ положительно-определенна, и (существенное предположение) никакие две точки кривой N не являются взаимно сопряженными, то N дает локальный минимум. Разумеется, в классической теории вариационных задач без ограничений это основополагающий результат (см. [13]). Для случая задачи Лагранжа также имеются результаты в духе теоремы (IV.d.1), приведенные, например, в [5] и в последней главе книги [13]. Но надлежащим образом сформулировать общий результат без применения структурной теории внешних дифференциальных систем (в частности, понятия производной системы) представляется делом весьма затруднительным (напомним, что квадратичная форма $\|A_{\mu\nu}\|$ определена на расслоении (W^*/W_1^*)).

Займемся сначала полями. Пусть $(I, \omega; \varphi)$ — хорошо поставленная вариационная задача на многообразии X с дифференциальной системой Эйлера—Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y . Напомним, что J — это система Картана $\mathcal{C}(\Psi_Y)$ для 2-формы

$$(IV.d.3) \quad \Psi_Y = d\psi_Y.$$

Напомним также, что образующие $\theta^1, \dots, \theta^s = \theta^1, \dots, \theta^m; \theta^{m+1}, \dots, \theta^s$ идеала I выбирались таким образом, чтобы

$$i) \lambda_{m+1} = \dots = \lambda_s = 0 \text{ на } Y;$$

ii) подрасслоение $K^* = \text{span} \{\omega, \theta^1, \dots, \theta^m\}$ расслоения $T^*(Y)$ было вполне интегрируемо и задавало разбиение на слои отображения $\tilde{\omega}$;

$$iii) \psi_Y = \varphi + \lambda_\rho \theta^\rho, \quad 1 \leq \rho \leq m.$$

Мы пока не предполагаем, что задача $(I, \omega; \varphi)$ сильно невырожденна; поэтому наши рассуждения охватывают, например, и функционал (IV.c.41).

До сих пор мы использовали соотношение (IV.d.3) лишь от случая к случаю. Сейчас оно начинает работать в полную силу.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) *Поле* для задачи $(I, \omega; \varphi)$ будем называть такое подмногообразие

$$S \subset Y,$$

что ограничение Ψ_S формы Ψ_Y на S удовлетворяет условиям

$$(IV.d.4) \quad \begin{aligned} \Psi_S &= 0, \\ \omega \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m|_S &\neq 0. \end{aligned}$$

ii) Ограничение ψ_S формы ψ_Y на S называется *инвариантным интегралом Гильберта*.

Приведем четыре замечания по поводу этого определения.

З а м е ч а н и я. i) Пусть $I(\Psi_Y)$ — дифференциальный идеал, порожденный замкнутой 2-формой. Ψ_Y . Положим

$$\Omega = \omega \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m.$$

Тогда поле — это просто интегральное многообразие внешней дифференциальной системы $(I(\Psi_Y), \Omega)$.

ii) В старой литературе понятия дифференциальной формы и «интеграла» совпадали (дифференциальная форма — это «то, что интегрируют»). Под «инвариантным интегралом» понималась просто замкнутая форма, так как по теореме Стокса деформация пути с фиксированными концами не меняет значения интеграла. В рассматриваемом случае

$$d\psi_S = 0$$

для поля S , чем и объясняется происхождение названия «инвариантный интеграл Гильберта». Мы будем в основном рассматривать случай односвязного многообразия S . В этом случае можно определить на S функцию G равенством

$$(IV.d.5) \quad G(s) = \int_{s_0}^s \psi_S,$$

где точка $s_0 \in S$ зафиксирована.

iii) Напомним наше обозначение

$$\Psi_Y^\perp = \{(y, v) \in T(Y) : v \lrcorner (\Psi_Y(y)) = 0\}$$

для линейного подрасслоения расслоения $T(Y)$, определяемого полем характеристических направлений формы Ψ_Y , и сделаем следующее наблюдение:

(IV.d.6) Пусть $S \subset Y$ — поле. Тогда линейное расслоение $\Psi_Y^\perp$ касается многообразия S . В частности, S расслоено на интегральные кривые системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) .

Доказательство получается элементарным рассуждением с использованием внешней алгебры. Для точки $y \in S$ имеем $T_y(Y) \cong \mathbb{R}^{2m+1}$ и $\Psi_Y(y^m) \neq 0$. Пусть линейное подпространство $L \subset T_y(Y)$ коразмерности m таково, что

$$(IV.d.7) \quad (\Psi_Y(y))_L = 0.$$

Если предположить, что L определяется уравнениями

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0,$$

где функции $\alpha_i \in T_y^*(Y)$ линейно-независимы, то из равенства (IV.d.7) следует существование таких функционалов $\beta^i \in T_y^*(Y)$, что

$$\Psi_Y(y) = \alpha_1 \wedge \beta^1 + \dots + \alpha_m \wedge \beta^m.$$

Так как ранг формы $\Psi_Y(y)$ равен m , то функции α_i, β^i линейно-независимы. Таким образом, $\Psi_Y(y)$ — обычная симплектическая форма. В частности,

$$\{v \lrcorner \Psi_Y(y) : v \in T_y(Y)\} = \text{span}\{\alpha_i, \beta^i\} \subset T_y^*(Y),$$

и, следовательно, характеристическое направление

$$\Psi_Y^\perp(y) = (\text{span}\{\alpha_i, \beta^i\})^\perp \subset T_y(Y)$$

содержится в подпространстве L . $\square$

Плоскость $L \subset T_y(Y)$, удовлетворяющая условию (IV.d.7), называется *изотропной* для антисимметричной билинейной формы

$\Psi_Y(y)$; максимальные изотропные плоскости ($\dim L = m + 1$) иногда называют *лагранжевыми подпространствами*¹⁾.²⁾

iv) В качестве последнего замечания к определению поля и инвариантного интеграла Гильберта покажем, что ограничение (J_S, ω) дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) на поле S определяется уравнениями

$$(IV.d.8) \quad \theta^1 = \dots = \theta^m = 0, \quad \omega \neq 0$$

(подразумевается, конечно, что все дифференциальные формы сужены на S); это означает, что

$$(IV.d.9) \quad J_S = (\pi^* I)_S.$$

Действительно, как было отмечено в утверждении (IV.d.6), поле S расслоено на интегральные кривые пфафовой дифференциальной системы J_S . Так как 1-формы $\{\theta^1, \dots, \theta^m, \omega\}$ задают корепер на поле S , то оно расслоено также на интегральные кривые системы $(\pi^* I)_S$. Наконец, поскольку всегда

$$(\pi^* I)_S \subset J_S$$

(так как $\pi^* I \subset J$), мы заключаем, что справедливо равенство (IV.d.9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция g , определенная на открытом подмножестве $R \subset Q$ приведенного пространства импульсов, называется решением *уравнения Гамильтона—Якоби*, ассоциированного с задачей $(I, \omega; \varphi)$, если существует сечение

$$s : R \rightarrow Y, \quad \tilde{\omega} \circ s = \text{id},$$

такое что

$$(IV.d.10) \quad dg = s^* (\Psi_Y).$$

Относительно этого определения мы сделаем три замечания (второе из них — весьма длинное³⁾).

З а м е ч а н и я. i) Из того что

$$0 = d^2 g = s^* (\Psi_Y),$$

¹⁾ Строго говоря, этот термин относится обычно к максимальным изотропным плоскостям в четномерном пространстве с невырожденной кососимметрической билинейной формой. — *Прим. ред.*

²⁾ Размерность максимальных изотропных плоскостей для 2-формы Ψ ранга m на векторном пространстве $V \cong \mathbb{R}^{2m+1}$ равна $m + 1$, и все они содержат характеристические направления $\Psi^\perp$.

³⁾ И даже включает в себя «внутренние» замечания. — *Прим. перев.*

следует, что образ множества

$$s(R) = S \subset Y$$

является полем и на этом поле существует такая функция G , что

$$G(s) = \int_{s_0}^s \psi_S + \text{const},$$

где $\psi_S = (\psi_Y)_S$. В самом деле, функция G на поле S однозначно определена условием $s^*G = g$, и из равенства (IV.d.10) следует, что

$$dG - \psi_S = 0.$$

Таким образом, решение уравнения Гамильтона—Якоби определяет такое положение $S \subset Y$, что 1-форма ψ_S точна (т. е., в модных терминах, $\psi_S = 0$ в группе когомологий де Рама $H_{DR}^1(S, \mathbb{R})$).

Обратно, по всякому инъективно проектирующемуся на Q полю $S \subset Y$, на котором 1-форма ψ_S точна, мы получаем решение уравнения Гамильтона—Якоби.

ii) Один из вариантов этой конструкции является аналогом (в нашей общей подстановке) классической функции действия, и мы на время остановимся, чтобы обсудить этот вопрос.

(IV.d.11) Интерлюдия. *Функция действия для некоторых невырожденных вариационных задач.*

Предположим, что вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ на многообразии X сильно невырождена, и пусть $q_0 \in Q$. Из каждой точки y , принадлежащей прообразу F_{q_0} отображения $\tilde{\omega} : Y \rightarrow Q$, выходит единственное решение F_{q_0} дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) на пространстве импульсов Y , и мы положим $\gamma_y = \tilde{\omega}(\Gamma_y)$. Отображение

$$F_{q_0} \rightarrow \mathbb{P}T_{q_0}(Q),$$

действующее по правилу

$$y \mapsto \{\text{касательное направление к кривой } \gamma_y \text{ в точке } q_0\},$$

однозначно определено; для целей настоящего обсуждения мы будем предполагать его диффеоморфизмом (имея в виду пример геодезических).

Картина для $n = 2$ представлена на рис. 43.

Пусть S — некоторая достаточно малая окрестность слоя F_{q_0} в многообразии $\bigcup_{y \in F_{q_0}} \Gamma_y$, так что отображение

$$\tilde{\omega} : S \setminus F_{q_0} \rightarrow Q \setminus \{q_0\}$$

является диффеоморфизмом на образ. Обозначим этот образ ¹⁾

¹⁾ С добавленной точкой q_0 . — Прим. перев.

через U , так что U — некоторая окрестность точки $q_0 \in Q$, и у нас определено сечение

$$s: U \setminus \{q_0\} \rightarrow S \setminus F_{q_0} \quad (s = \tilde{\omega}^{-1}).$$

З а м е ч а н и е. В случае когда $(I, \omega; \varphi)$ — задача о геодезических в римановой метрике на некотором многообразии M (см. разд. б гл. IV), приведенное пространство импульсов Q совпадает с M , и мы вправе считать, что окрестность U точки q_0 такова, что любую точку $q \in U$ можно соединить с точкой q_0 единственной геодезической. Предполагая, что метрика полна, мы можем взять в качестве U геодезический шар радиуса, равного расстоянию до ближайшей сопряженной с q_0 точки.

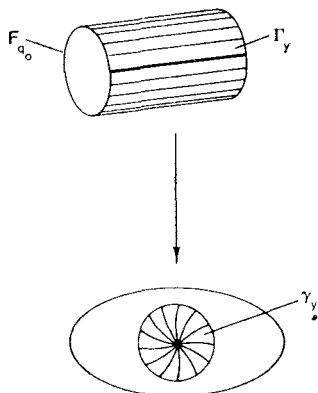


Рис. 43. F_{q_0} — окружность касательных направлений в точке q_0 . Под действием отображения $\tilde{\omega}$ эта окружность стягивается в точку q_0 , а прямые Γ_y на цилиндре переходят в кривые γ_y , выходящие из q_0 .

Положим $\Psi_S = (\Psi_Y)_S$. Мы утверждаем, что

$$(IV.d.12) \quad \Psi_S = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что $S \setminus F_{q_0}$ — поле над множеством $U \setminus \{q_0\}$.

Доказательство равенства (IV.d.12). Пусть V — векторное

поле, поле направлений которого совпадает с полем характеристических направлений $\Psi_Y^\perp$ формы Ψ_Y . Тогда

- i) $V \lrcorner \Psi_Y = 0$ (по определению);
- ii) V касается S (по построению S);
- iii) $L_V(\Psi_S) = 0$ (ввиду i) и (0.a.1)).

Из равенства iii) интегрированием получаем

$$\exp(tV)^*\Psi_S = \Psi_S.$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$\langle \Psi_Y \cdot W, W' \rangle = 0$$

для любой пары касательных векторов $W, W' \in T_y(S)$ в точке $y \in F_{q_0}$. Но

$$T_y(S) \cong T_y(F_{q_0}) \oplus \Psi_S(y)^\perp,$$

и равенство (IV.d.12) следует из утверждения (IV.c.15) и свойства i). $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция действия* $A(q)$ ($q \in U$) определяется равенством

$$A(q) = \int_{q_0}^q s^*(\varphi_S),$$

в котором интеграл берется вдоль единственной кривой γ_y , соединяющей точку q_0 с точкой q .

З а м е ч а н и е. Для произвольной интегральной кривой Γ_y системы Эйлера—Лагранжа на многообразии Y через γ_y мы обозначаем здесь проекцию этой кривой.

(IV.d.13) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Функция действия является решением уравнения Гамильтона—Якоби.*

Доказательство. По сути дела доказательство уже было проведено в ходе предшествующего обсуждения. Так как Γ_y — интегральная кривая системы (π^*I, ω) , то функция действия равна

$$A(q) = \int_{\Gamma_y} \varphi_S = \int_{\Gamma_y} \psi_S \quad (\psi_S = \psi_Y|S).$$

С другой стороны, ввиду соотношений (IV.d.9) и (IV.d.12),

$$(\psi_S)_{F_{q_0}} = 0,$$

$$d\psi_S = \Psi_S = 0.$$

Поэтому

$$A(q) = s^*\left(\int_{y_0}^y \psi_S\right),$$

где точка $y_0 \in F_{q_0}$ фиксирована и интеграл берется по произвольному пути, ведущему от точки y_0 к точке y . Таким образом,

$$dA = s^*(G),$$

где функция G на поле S определена равенством

$$G(y) = \int_{y_0}^y \psi_S,$$

чем доказательство предложения и завершено. $\square$

iii) ¹⁾ Согласно предложению (IV.d.13) (точнее говоря, со-

¹⁾ Напомним, что это — третье, заключительное замечание к определению уравнения Гамильтона—Якоби. — *Прим. перев.*

гласно обобщению этого предложения на случай, когда точка q_0 заменяется произвольной «нехарактеристической» начальной гиперповерхностью), мы можем найти общее решение классического уравнения Гамильтона—Якоби (см. пример (IV.d.14) ниже), если нам удастся разрешить дифференциальную систему Эйлера—Лагранжа, что в классическом случае эквивалентно решению канонических уравнений Гамильтона. В [2] объясняется, что *теорема Якоби* позволяет, наоборот, зная общее решение уравнения Гамильтона—Якоби, интегрировать в квадратурах уравнения Гамильтона, и это один из наиболее эффективных методов решения задач классической механики.

Естественно ожидать, что и в случае общей сильно невырожденной вариационной задачи решение уравнения Гамильтона—Якоби также позволит проинтегрировать в квадратурах систему Эйлера—Лагранжа и что таким образом можно получить эффективный метод исследования конкретных примеров, существенно выходящий за рамки методов этой книги.

(IV.d.14) ПРИМЕР. Рассмотрим классическую невырожденную вариационную задачу (см. (I.e.18))

$$\Phi = \int L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx,$$

где $y(x) = (y^1(x), \dots, y^m(x))$ и

$$\det \|L_{y^\alpha y^\beta}\| \neq 0.$$

Тогда на X можно выбрать координаты $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$, в которых система (I, ω) задается 1-формами

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0.$$

Функции $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \lambda_\alpha)$ задают координаты в многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^m$, и пространство импульсов $Y \subset Z$ выделяется в нем уравнениями

$$L_{\dot{y}^\alpha} = \lambda_\alpha.$$

Далее, функции $(x; y^\alpha; \lambda_\alpha)$ задают систему локальных координат на многообразии Y , и в качестве корепера на Y можно взять набор $\{\omega; \theta^\alpha; d\lambda_\alpha\}$ или набор $\{dx; dy^\alpha; d\lambda_\alpha\}$. Напомним также, что

$$\psi_Y = L\omega + \lambda_\alpha \theta^\alpha = -H dx + \lambda_\alpha dy^\alpha,$$

где гамильтониан H равен

$$H(x; y^\alpha; \lambda_\alpha) = -L + \dot{y}^\alpha \lambda_\alpha.$$

Подмногообразие $S \subset Y$ коразмерности $m+1$, на котором

$$\omega \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m = dx \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m \neq 0,$$

локально задается отображением

$$(IV.d.15) \quad (x, y) \mapsto (x, y, \lambda(x, y)) \quad (y = (y^\alpha), \lambda = (\lambda_\alpha)).$$

Так как

$$\Psi_Y = -dH \wedge dx + d\lambda_\alpha \wedge dy^\alpha,$$

то для того, чтобы S было полем, должны выполняться условия

$$(i) \quad \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial y^\beta} = \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial y^\alpha},$$

$$(ii) \quad \frac{\partial H}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda_\beta} \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial y^\alpha} = 0.$$

В равенстве (ii) производные функции H вычисляются в точках $(x, y, \lambda(x, y))$.

В невырожденной классической вариационной задаче приведенное пространство моментов есть просто многообразие $J^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^{m+1}$ с координатами (x, y^α) . Сечение расслоения

$$\tilde{\omega}: Y \rightarrow Q$$

задается отображением (IV.d.15), где функция $\lambda(x, y)$ определена на открытом множестве $R \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Образ $S = s(R)$ будет полем, если выполнены приведенные выше условия (i) и (ii). В случае когда множество R односвязно, равенство (i) позволяет определить (однозначно с точностью до функции, зависящей лишь от x) функцию $g(x, y)$, такую что

$$\lambda_\alpha(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y^\alpha}.$$

Тогда равенство (ii) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + H \left(x, y, \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) \right) = 0,$$

где

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial g(x, y)}{\partial y^m} \right).$$

Функция $g(x, y)$ является решением уравнения Гамильтона—Якоби, если существует сечение (IV.d.15) над некоторым открытым множеством $R \subset \mathbb{R}^{m+1}$, такое что

$$dg(x, y) = s^*(\Psi_Y),$$

где

$$s(x, y) = (x, y, \lambda(x, y)).$$

Условие $dg = s^*(\Psi_Y)$ записывается в виде

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y^\alpha} dy^\alpha = -H(x, y, \lambda(x, y)) dx + \\ + \lambda_\alpha(x, y) dy^\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_\alpha(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y^\alpha}$$

и

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right) = 0.$$

Это обычная форма уравнения Гамильтона—Якоби для классической вариационной задачи.

Примеры использования классического уравнения Гамильтона—Якоби для интегрирования уравнений Эйлера—Лагранжа, возникающих в задачах классической механики, можно найти в [2], [5] и [29].

З а м е ч а н и е. В соответствии с интерлюдией (IV.d.11), и в частности предложением (IV.d.13), рассмотрим функцию действия

$$A(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} s^*(\varphi)$$

для классической вариационной задачи

$$\varphi = L(y, \dot{y}) dx,$$

$$\|L_{y^\alpha \dot{y}^\beta}\| > 0.$$

Если $L = T - U$ — лагранжиан, отвечающий механической системе, то значение $A(x, y)$ равно наименьшему действию, необходимому для перехода из состояния (x_0, y_0) в состояние (x, y) .

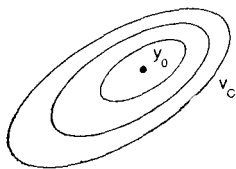


Рис. 44.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (Гипер) поверхности уровня $V_c \subset \mathbb{R}^m$, задаваемые условием

$$A(\underline{x}, y) = c = \text{const}$$

(при фиксированном $x = \underline{x}$), называются *волновыми фронтами* (рис. 44).

Внутренность поверхности уровня V_c состоит из всех точек $y \in \mathbb{R}^m$, которых можно достичь из точки y_0 , затратив действие, не большее c , и время, не большее x .

Рассмотрим дифференциальную систему Эйлера—Лагранжа на многообразии $Z = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$. Напомним, что в Z введены координаты $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \lambda_\alpha)$. Возьмем решение

$$x \mapsto (x; y^\alpha(x); \dot{y}^\alpha(x); \lambda_\alpha(x))$$

с начальным условием $y(0) = y_0$. Тогда отображение $x \mapsto y(x)$ определяет кривую в $\mathbb{R}^m$ с касательным вектором

$$\dot{y}(x) = \dot{y}(x) \partial/\partial y^\alpha = \frac{dy(x)}{dx}.$$

Используя функцию действия, можно следующим образом интерпретировать величины $\lambda_\alpha(x)$. Прежде всего заметим, что 1-форма

$$\lambda(x) = \lambda_\alpha(x) dy^\alpha \in T_{y(x)}^*(\mathbb{R}^m)$$

определяет в каждом касательном пространстве $T_{y(x)}(\mathbb{R}^m)$ гиперплоскость (которую мы также будем обозначать через $\lambda(x)$). Поскольку

$$\lambda_\alpha(x) = L_{y^\alpha}(y(x), \dot{y}(x)),$$

мы видим, что если определить *индикатрису*

$$I(y, c) \subset T_y(\mathbb{R}^m)$$

как множество уровня

$$I(y, c) = \{(y, \dot{y}) : L(y, \dot{y}) = c\}$$

лагранжиана, то, с одной стороны, $\lambda(x)$ — это касательная гиперплоскость к индикатрисе, проходящая через точку $dy(x)/dx$

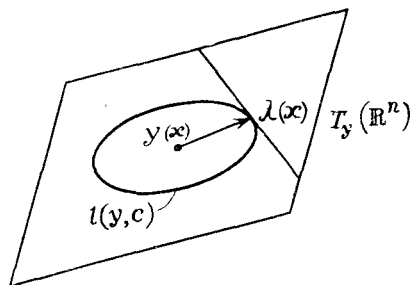


Рис. 45.

(рис. 45):

$$c = L(y(x), \dot{y}(x)),$$

$$\dot{y}(x) = dy(x)/dx,$$

а с другой — из уравнения Гамильтона—Якоби следует, что

$$\lambda_\alpha(x) = \frac{\partial A(x, y)}{\partial \lambda_\alpha}.$$

Поэтому гиперплоскость $\lambda(x)$ касается также волнового фронта, проходящего через точку $y(x)$ (рис. 46).

(IV.d.16) Вывод. Волновые фронты и решения уравнений Эйлера—Лагранжа связаны между собой следующим геометрическим свойством: касательная гиперплоскость к фронту V_c в точке

$y(x)$ совпадает с касательной гиперплоскостью к индикатрисе $I(y(x), c)$ ($c = L(y(x), \dot{y}(x))$) в точке $dy(x)/dx$.

Из этой геометрической конструкции более или менее ясно, что нахождение общего решения уравнения Гамильтона—Якоби и интегрирование уравнений Эйлера—Лагранжа сводятся по существу к одному и тому же (теорема Якоби, см. [2]).

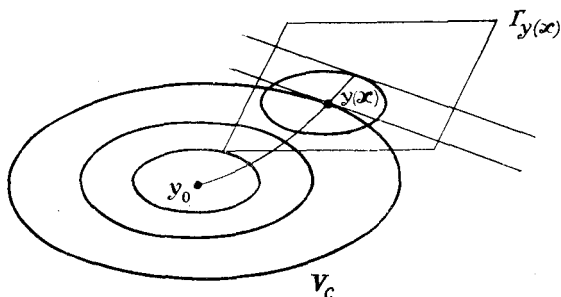


Рис. 46.

(IV.d.17) ПРИМЕР. Рассмотрим невырожденную классическую вариационную задачу второго порядка (см. пример (I.e.23))

$$\Phi = \int L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) dx,$$

где $y = (y^1, \dots, y^m)$ и

$$\det \|L_{\ddot{y}^\alpha \ddot{y}^\beta}\| \neq 0.$$

На многообразии X есть такие координаты $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)$, что система (I, ω) задается 1-формами

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\dot{\theta}^\alpha = d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0,$$

а на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^{2m}$ — такие координаты $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha; \lambda_\alpha; \dot{\lambda}_\alpha)$, что пространство импульсов $Y \subset Z$ выделяется уравнениями

$$L_{\dot{y}^\alpha} = \dot{\lambda}_\alpha.$$

Таким образом, функции $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \lambda_\alpha; \dot{\lambda}_\alpha)$ задают систему локальных координат на Y , и можно рассмотреть корепер $\{\omega; \theta^\alpha; \dot{\theta}^\alpha; d\lambda_\alpha; d\dot{\lambda}_\alpha\}$ или $\{dx; d\dot{y}^\alpha; d\ddot{y}^\alpha; d\lambda_\alpha; d\dot{\lambda}_\alpha\}$. Основная 1-форма имеет вид

$$\psi_Y = L\omega + \lambda_\alpha \theta^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \dot{\theta}^\alpha = -H dx + \lambda_\alpha dy^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha d\dot{y}^\alpha,$$

где гамильтониан H равен

$$H = -L + \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha \ddot{y}^\alpha.$$

Подмногообразие $S \subset Y$ размерности $2m + 1$, на котором

$$\omega \wedge \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m \wedge \dot{\theta}^1 \wedge \dots \wedge \dot{\theta}^m \\ = dx \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m \wedge d\dot{y}^1 \wedge \dots \wedge d\dot{y}^m \neq 0,$$

локально задается отображением

$$(IV.d.18) \quad (x, y, \dot{y}) \mapsto (x, y, \dot{y}, \lambda(x, y, \dot{y}), \dot{\lambda}(x, y, \dot{y}))$$

и является полем, если

$$(i) \quad \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial y^\beta} = \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial y^\alpha},$$

$$(ii) \quad \frac{\partial \dot{\lambda}_\alpha}{\partial \dot{y}^\beta} = \frac{\partial \dot{\lambda}_\beta}{\partial \dot{y}^\alpha},$$

$$(iii) \quad \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial \dot{y}^\beta} = \frac{\partial \dot{\lambda}_\beta}{\partial y^\alpha},$$

$$(iv) \quad \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda_\beta} \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_\beta} \frac{\partial \dot{\lambda}_\beta}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial y^\alpha} = 0,$$

$$(v) \quad \frac{\partial \dot{\lambda}_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda_\beta} \frac{\partial \lambda_\beta}{\partial \dot{y}^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \dot{\lambda}_\beta} \frac{\partial \dot{\lambda}_\beta}{\partial \dot{y}^\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}^\alpha} = 0,$$

где производные от функции H вычислены на S . Уравнения (i)—(iii) позволяют записать

$$(\lambda, \dot{\lambda}) = \left(\frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial y}, \frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right)$$

для некоторой функции $g = g(x, y, \dot{y})$ и тогда уравнения (iv), (v) переписываются как производные

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + H \left(x, y, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \right) \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}^\alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + H \left(x, y, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \right) \right) = 0$$

от уравнения

$$(IV.d.19) \quad \frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial x} + H \left(x, y, \dot{y}, \frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial y}, \frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \right) = 0.$$

Приведенным пространством импульсов служит $Q = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$, и сечение расслоения $Y \rightarrow Q$ над открытым множеством $R \subset Q$ задается отображением (IV.d.18). Определенная на множестве R функция $g(x, y, \dot{y})$ является решением уравнения Гамильтона—Якоби, если существует такое сечение $s: R \rightarrow Y$, что

$$dg = s^*(\psi_Y).$$

Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial x} dx + \frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial y^\alpha} dy^\alpha + \frac{\partial g(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^\alpha} d\dot{y}^\alpha \\ = -H(x, y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda}) dx + \lambda_\alpha dy^\alpha + \dot{\lambda}_\alpha d\dot{y}^\alpha,$$

где $\lambda = \lambda(x, y, \dot{y})$, $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(x, y, \dot{y})$. Отсюда следует, что уравнение (IV.d.19) — это уравнение Гамильтона—Якоби для классической вариационной задачи второго порядка. Заметим, что формально оно совпадает с уравнением Гамильтона—Якоби для некоторой классической вариационной задачи первого порядка.

Один частный случай. Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^5$ с координатами $(x, y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$ задан гамильтониан $H = H(y, \dot{y}, \lambda, \dot{\lambda})$ и надо показать, что соответствующие уравнения Гамильтона вполне интегрируемы. По теореме Якоби ([2, с. 224]) так будет, если можно найти решение $g = g(y, \dot{y}, \eta, \dot{\eta})$ уравнения

$$(IV.d.20) \quad H\left(y, \dot{y} \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\right) = K(\eta, \dot{\eta}),$$

удовлетворяющее условию

$$\det \begin{vmatrix} g_{y\eta} & g_{y\dot{\eta}} \\ g_{\dot{y}\eta} & g_{\dot{y}\dot{\eta}} \end{vmatrix} \neq 0$$

(такое g называется *полным интегралом*).

Для функционала (II.a.43) мы в свое время выписали гамильтониан

$$H = \frac{1}{2y} \left(\dot{\lambda}^2 G^5 - \frac{1}{G} \right) + \lambda \dot{y}.$$

Помимо H мы нашли также первый интеграл

$$V = -xH + \lambda y,$$

который, к сожалению, зависит от x (если бы производная V_x равнялась нулю, то соответствующие уравнения Гамильтона были бы вполне интегрируемы; см [2, с. 59, следствие 1]). Поэтому естественно попытаться решить уравнение (IV.d.20). Нам не удалось найти полный интеграл, но мы покажем сейчас, как найти решение $g(y, \dot{y}, \eta)$, представимое в виде абелева интеграла, зависящего от трех функций одного параметра η .

Уравнения Гамильтона—Якоби традиционно решаются методом разделения переменных (см. [2, с. 226]). Мы используем несколько видоизмененный метод. Положим

$$g(y, \dot{y}, \eta) = k(y, \eta) + l(\dot{y}, \eta),$$

$$k' = \frac{\partial k}{\partial y},$$

$$l' = \frac{\partial l}{\partial \dot{y}}$$

и рассмотрим следующую пару обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра η и произвольной функции $L(\eta)$:

$$(IV.d.21) \quad \begin{aligned} -2yk' &= L, \\ (l')^2 \frac{G^5}{\dot{y}} - \frac{1}{\dot{y}G} &= L. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает решение уравнения (IV.d.20) при $K = 0$, так как

$$H\left(y, \dot{y}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial \dot{y}}\right) = H(y, \dot{y}, k', l') = \frac{L\dot{y}}{2y} - \frac{L\dot{y}}{2y} = 0.$$

Перепишем первое уравнение системы (IV.d.21) в виде

$$\frac{dk}{dy} = -\frac{L}{2y}.$$

Оно имеет интеграл

$$k(y, \eta) = -\frac{L(\eta)}{2} \ln y + M(\eta).$$

Второе уравнение системы (IV.d.21) выглядит так:

$$\frac{dl}{d\dot{y}} = \frac{1}{(1 + \dot{y}^2)^3} \sqrt{L\dot{y} \sqrt{1 + \dot{y}^2 + 1}}.$$

Его можно «проинтегрировать», введя рациональную 1-форму

$$\omega = \frac{\rho d\sigma}{(1 + \sigma^2)^3},$$

по алгебраической кривой

$$(\rho^2 - 1)^2 = L^2 \sigma^2 (1 + \sigma^2).$$

Род этой кривой (для общего значения $L(\eta)$) равен 3, и абелев интеграл

$$l = \int \omega + N(\eta)$$

дает общее решение второго уравнения системы (IV.d.21).

(IV.d.22) ПРИМЕР. Опишем процесс определения полного интеграла для уравнения Гамильтона—Якоби на примере функционала

$$(IV.d.23) \quad \Phi = \frac{1}{2} \int_N x^2 ds,$$

заданного на кривых $N \subset \mathbb{E}^2$. Будем следовать обозначениям примера (I.d.27) и п. 1 разд. b гл. II. Таким образом, на пространстве импульсов Y задан корепер $\{\omega, \theta^1, \theta^2, d\lambda_1, d\lambda_2\}$, где

$$\omega = \omega^1 = (dx, e_1),$$

$$\theta^1 = \omega^2 = (dx, e_2),$$

$$\theta^2 = \omega_1^2 - \kappa\omega, \quad \omega_1^2 = (de_1, e_2),$$

$$\lambda_2 = \kappa.$$

Далее,

$$(IV.d.24) \quad \psi_Y = \frac{\kappa^2}{2} \omega + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2 = -\frac{(\lambda_2)^2}{2} \omega^1 + \lambda_1 \omega^2 + \lambda_2 \omega_1^2.$$

Отождествим $\mathbb{E}^2$ с $\mathbb{R}^2$, зафиксировав какой-либо базисный репер, и положим

$$x = (u, v),$$

$$e_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi),$$

$$e_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi),$$

Тогда

$$\omega^1 = \cos \varphi du + \sin \varphi dv,$$

$$\omega^2 = -\sin \varphi du + \cos \varphi dv,$$

$$\omega_1^2 = d\varphi.$$

Расслоение $Y \rightarrow Q$ задается равенствами

$$\omega = \theta^1 = \theta^2 = 0,$$

т. е.

$$du = dv = d\varphi = 0,$$

и мы можем принять функции (u, v, φ) за координаты на приведенном пространстве импульсов.

Мы не будем выписывать уравнения, определяющие поле $S \subset Y$, а перейдем непосредственно к уравнениям Гамильтона—Якоби (их решение и даст поле). Сечение расслоения $Y \rightarrow Q$ над односвязной областью R в (u, v, φ) -пространстве (напомним, что $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — угловая координата) задается функциями

$$(IV.d.25) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(u, v, \varphi), \\ \lambda_2 &= \lambda_2(u, v, \varphi). \end{aligned}$$

Мы хотим определить это сечение таким образом, чтобы для некоторой функции $g(u, v, \varphi)$ выполнялось равенство

$$(IV.d.26) \quad dg = s^*(\psi_Y),$$

где 1-форма ψ_Y задается формулой (IV.d.24). Подстановка выражений для 1-форм $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ дает

$$s^*(\psi_Y) = \left(-\frac{(\lambda_2)^2}{2} \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi \right) du + \left(-\frac{(\lambda_2)^2}{2} \sin \varphi + \lambda_1 \cos \varphi \right) dv + \lambda_2 d\varphi.$$

Таким образом, равенство (IV.d.26) эквивалентно тому, что

$$(i) \quad \lambda_2 = g_\varphi,$$

$$(ii) \quad -\frac{g_\varphi^2}{2} \cos \varphi - \lambda_1 \sin \varphi = g_u,$$

$$(iii) \quad -\frac{g_\varphi^2}{2} \sin \varphi + \lambda_1 \cos \varphi = g_v.$$

Линейная комбинация

$$-\sin \varphi \cdot (ii) + \cos \varphi \cdot (iii)$$

дает

$$(iv) \quad \lambda_1 = -\sin \varphi \cdot g_u + \cos \varphi \cdot g_v,$$

а линейная комбинация

$$\cos \varphi \cdot (ii) + \sin \varphi \cdot (iii)$$

приводит к уравнению в частных производных

$$(IV.d.27) \quad \frac{g_\varphi^2}{2} = -\cos \varphi \cdot g_u - \sin \varphi g_v,$$

решение которого в сочетании с (i) и (iv) определяет решение уравнения Гамильтона—Якоби, ассоциированного с функционалом (IV.d.23).

Поучительно проинтегрировать уравнение (IV.d.27), используя классический *метод характеристик* (см. [13], [45]). Рассмотрим в пространстве переменных $(u, v, \varphi, g, p, q, r)$ подмногообразие U , заданное уравнением

$$(IV.d.28) \quad r^2 = -2(\cos \varphi \cdot p + \sin \varphi \cdot q).$$

Ясно, что $\dim U = 6$. Рассмотрим на этом подмногообразии 1-форму

$$\theta = -dg + p du + q dv + r d\varphi$$

(тем самым подразумевается, что $p = g_u, q = g_v, r = g_\varphi$) и будем искать интегральные многообразия пфафовой дифференциальной системы

$$(IV.d.29) \quad \theta = 0, \quad du \wedge dv \wedge d\varphi \neq 0.$$

Такое интегральное многообразие локально задается отображением

$$(u, v, \varphi) \mapsto (u, v, \varphi, g(u, v, \varphi), g_u, g_v, g_\varphi),$$

где функция $g(u, v, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби (IV.d.27).

Положим

$$h = \sqrt{2(-p \cos \varphi - q \sin \varphi)} \quad (= r|U).$$

Тогда дифференциал $\Theta = d\theta$ имеет вид

$$\Theta = dp \wedge (du + h_p d\varphi) + dq \wedge (dv + h_q d\varphi).$$

Характеристическое векторное поле ¹⁾ V однозначно с точностью до ненулевого множителя определяется условиями

$$V \lrcorner \theta = 0,$$

$$V \lrcorner \Theta = 0.$$

Если записать поле V как

$$V = \alpha \partial/\partial u + \beta \partial/\partial v + \gamma \partial/\partial \varphi + \delta \partial/\partial g + \lambda \partial/\partial p + \mu \partial/\partial q,$$

то эти условия принимают вид

$$\delta = \alpha p + \beta q + \gamma h,$$

$$\begin{aligned} & \lambda (du + h_p d\varphi) + \mu (dv + h_q d\varphi) - \\ & - dp (\alpha + h_p \gamma) - dq (\beta + h_q \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Нормируя V условием $\gamma = -1$, находим

$$V = h_p \partial/\partial u + h_q \partial/\partial v - \partial/\partial \varphi + (ph_p + qh_q - h) \partial/\partial g.$$

Так как функция h однородна степени $1/2$ по переменным (p, q) , то

$$V = -\frac{2 \cos \varphi}{h} \partial/\partial u - \frac{2 \sin \varphi}{h} \partial/\partial v - \partial/\partial \varphi - \frac{h}{2} \partial/\partial y.$$

Удобно принять $\varphi = -t$ за параметр на интегральных кривых поля V . Таким образом, система обыкновенных дифференциаль-

¹⁾ Здесь мы понимаем это словосочетание в несколько ином смысле, чем в разд. d гл. 0. Сейчас нам заданы векторное пространство $T \cong \mathbb{R}^6$ (типичное касательное пространство к подмногообразию U), а также 1-форма $\theta \in T^*$ и 2-форма $\Theta \in \Lambda^2 T^*$. Предполагается, что 2-форма Θ_H на гиперплоскости $H = \{\theta = 0\}$ имеет максимальный ранг 2, и наше поле $V \in H$ порождает характеристическое направление формы Θ_H в смысле разд. d гл. 0.

ных уравнений, определяющая характеристические кривые для уравнения Гамильтона—Якоби ¹⁾, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{V\sqrt{2} \cos t}{V - p \cos t - q \sin t}, \\ \text{(IV.d.30)} \quad \dot{v} &= \frac{2 \sin t}{V - p \cos t - q \sin t}, \\ \dot{g} &= \frac{V p \cos t - q \sin t}{V\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

вкупе с уравнениями $\dot{p} = \dot{q} = 0$. Таким образом, мы хотим решить эту систему при *постоянных* p, q .

Заметим, что

$$2\dot{g} + p\dot{u} + q\dot{v} = 0,$$

и поэтому у уравнения (IV.d.30) есть первый интеграл

$$2g + pu + qv = \text{const.}$$

Этого достаточно для решения первых двух уравнений. Если представить тригонометрические функции в виде

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \\ \sin t &= \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}), \end{aligned}$$

то ясно, что достаточно решить следующее общее уравнение (относительно комплекснозначной функции $w(z)$ комплексной переменной z):

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{\alpha e^z}{V\beta e^z + \gamma e^{-z}},$$

где α, β, γ — постоянные. Заменой $\xi = e^z$ это уравнение сводится к уравнению

$$d\omega(\xi) = \frac{\alpha d\xi}{V\beta\xi + \gamma\xi^{-1}}.$$

Укажем кратко, как можно вычислить соответствующий неопределенный интеграл (конечно, ответ можно сразу найти почти в любом справочнике). Алгебраическая кривая

$$\eta^2 = \beta\xi + \gamma\xi^{-1}$$

двулистно накрывает ξ -сферу с точками ветвления $\xi = \pm i\sqrt{\gamma/\beta}$. Следовательно, по формуле Римана—Гурвица (см., например,

¹⁾ По определению это интегральные кривые характеристического векторного поля.

[36]), она биголоморфна римановой сфере с координатой ξ (этот изоморфизм нетрудно выписать явно). Таким образом, можно рассматривать 1-форму $\omega = \alpha d\xi/\eta$ как мероморфную 1-форму на ξ -сфере, а тогда неопределенный интеграл $\int \omega$ можно вычислить разложением на простейшие дроби:

$$\int \omega = \sum_i R_i(\xi) \log(\xi - \xi_i) + R(\xi),$$

где функции $R(\xi)$, $R_i(\xi)$ рациональны. В нашем простом случае это опять-таки легко проделать явно.

Подробное развертывание этой схемы приводит к явному интегрированию системы (IV.d.30). В получаемые при этом формулы входят только элементарные функции.

Чтобы решить уравнение Гамильтона—Якоби, зададим на начальной поверхности $\varphi = 0$ произвольную функцию $g(u, v, 0)$, удовлетворяющую условию $g_u < 0$. Такая функция определяет (гипер)поверхность (см. (IV.d.28))

$$(IV.d.31) \quad (u, v) \mapsto (u, v, 0, g(u, v, 0), g_u, g_v, \sqrt{-2g_u})$$

в U . Из точки этой поверхности мы за время φ перемещаемся по интегральной кривой поля V , получаемой интегрированием уравнений (IV.d.30). Четвертая координата $g(u, v, \varphi)$ и дает искомое решение уравнения (IV.d.27).

З а м е ч а н и е. Любопытно, что для интегрирования уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом (IV.d.23), требуются эллиптические функции, а при интегрировании уравнения Гамильтона—Якоби удастся обойтись элементарными функциями. В каждом из этих случаев «разрешение» производится относительно некоторой системы координат, а как связаны эти системы координат, неясно.

Доказательство теоремы (IV.d.1). Рассмотрим основную диаграмму (IV.d.2). Пусть $\Gamma \subset Y$ — решение системы Эйлера—Лагранжа (J, ω) , соответствующее по теореме (I.e.9) решению N уравнений Эйлера—Лагранжа. Обозначим через $\gamma = \tilde{\omega}\Gamma$ проекцию кривой Γ в приведенное пространство импульсов. Мы утверждаем, что

(IV.d.32) *Если на кривой Γ нет взаимно сопряженных точек, то можно найти поле $S \subset Y$, содержащее Γ и диффеоморфно проектирующееся в некоторую односвязную окрестность R кривой γ (рис. 47).*

На рисунке граничные условия A, B изображены на пространстве импульсов Y слоями отображения $\tilde{\omega}$, проектирующимися

в концы a, b кривой γ . Хотя для приводимого ниже доказательства это и несущественно¹⁾, напомним (см. утверждение (IV.c.17)), что кривая γ является интегральным многообразием (единственной) дифференциальной системы (G, ω) , которая поднимается отображением $\tilde{\omega}^*$ в первую производную систему для системы (π^*I, ω) на пространстве импульсов Y .

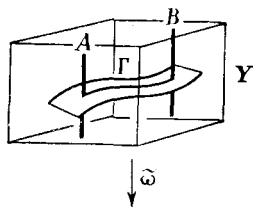


Рис. 47.

Доказательство. Как и в только что обсуждавшемся примере, воспользуемся методом характеристик. Напомним, что кривая Γ является интегральной кривой системы (J, ω) . Форма Ψ_Y приводится локально к нормальной форме Дарбу (IV.c.28), и поэтому

для данной точки $y \in \Gamma$ можно найти маленький кусочек m -мерного многообразия T , трансверсальный кривой Γ и такой, что ограничение

(IV.d.33) $(\Psi_Y)_T = 0$.

Мы можем предполагать также, что многообразие T диффеоморфно проектируется на свой образ в Q (см. рис. 48, на котором вообще-то следовало бы изобразить многообразие T большей размерности).

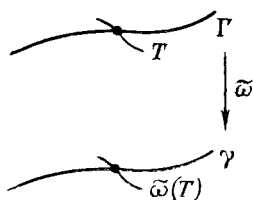


Рис. 48.

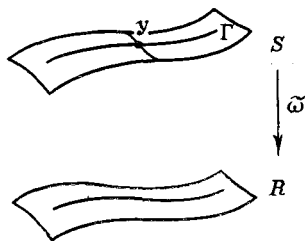


Рис. 49.

Пусть поле направлений векторного поля V определяет характеристическое линейное расслоение $\Psi_Y^\perp$. Обозначим V -поток многообразия T через S . Точнее говоря, можно считать, что кривая Γ является V -потокм точки $y \in \Gamma \cap T$ при $-\delta \leq t \leq \delta$, и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ мы через S обозначаем V -поток многообразия T при $-\delta - \varepsilon \leq t \leq \delta + \varepsilon$ (рис. 49). Нам надо показать, что:

i) $\Psi_Y|_S \equiv 0$;

¹⁾ Это будет весьма существенно позднее, и на самом деле это основной факт, стоящий за теоремой (IV.d.1) в классическом случае без связей.

ii) проекция $S \rightarrow R$ является диффеоморфизмом (для достаточно малого ϵ).

Первое нетрудно. По той же причине, что и при доказательстве свойства (IV.d.12)¹⁾, достаточно показать, что для любой точки $\tilde{y} \in T$ и любых касательных векторов W, W' к многообразию T в этой точке

$$\langle \Psi_Y(\tilde{y}), (W, W') \rangle = 0,$$

$$\langle \Psi_Y(\tilde{y}), (V, W) \rangle = 0.^2)$$

Первое из этих равенств следует из способа (IV.d.33) построения многообразия T , второе — из равенства $V \lrcorner \Psi_Y \equiv 0$.

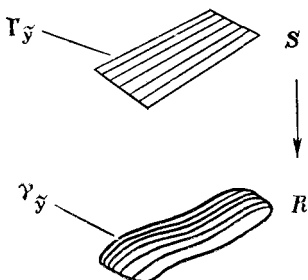


Рис. 50.

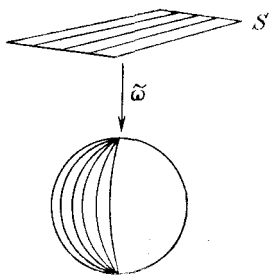


Рис. 51.

Доказывая утверждение ii), мы можем предполагать, что V -поток любой точки $\tilde{y} \in T$, который, напомним, является интегральной кривой системы (J, ω) при $-\delta - \epsilon \leq t \leq \delta + \epsilon$, не содержит пар сопряженных точек. Обозначим эту кривую через $\Gamma_{\tilde{y}}$ и положим $\gamma_{\tilde{y}} = \tilde{\omega}(\Gamma_{\tilde{y}})$. Кривые $\gamma_{\tilde{y}}$ определяют семейство попарно непересекающихся кривых, которое раслаивает множество R (рис. 50). Откуда и следует утверждение ii). $\square$

З а м е ч а н и е. Стандартный пример сопряженных точек доставляют диаметрально противоположные точки сферы S^2 в вариационной задаче, соответствующей геодезическим в обычной метрике. В этом случае (см. пример (IV.b.3)) отображение

$$\begin{aligned} Y &\cong \{\text{расслоение касательных векторов} \\ &\quad \text{единичной длины}\} \\ &\downarrow \tilde{\omega} \\ Q &\cong S^2 \end{aligned}$$

¹⁾ Эта причина — инвариантность формы Ψ_Y относительно потока $\exp(tV)$. Она позволяет проверить любое утверждение относительно формы Ψ_Y на многообразии S , рассмотрев его на T .

²⁾ Здесь используется очевидное разложение

$$T_{\tilde{y}}(S) \cong T_{\tilde{y}}(T) \oplus (RV).$$

— обычная проекция. Заданную кривую Γ , соответствующую какой-либо геодезической, соединяющей северный и южный полюсы, можно, как и выше, вложить в некоторое интегральное многообразие S системы $(\Psi_Y, \omega \wedge \theta^1)$; однако отображение $\tilde{\omega} : S \rightarrow R \subset S^2$ выглядит, как изображено на рис. 51, — «концы» многообразия S стягиваются в точки. Таким образом, кривую $\gamma = \tilde{\omega}(\Gamma)$ нельзя включить в поле.

Утверждение (IV.d.32) позволяет свести доказательство теоремы (IV.d.1) к вычислениям на кривой N . Пусть близкое к N интегральное многообразие $N_1 \subset X$ системы (I, ω) удовлетворяет тем же граничным условиям, что и N , и $\Gamma_1 \subset Y$ — интегральное многообразие системы (π^*I, ω) , проектирующееся в N_1 (см. (IV.c.18)). Обозначим через $\gamma_1 = \tilde{\omega}(\Gamma_1)$ проекцию кривой Γ_1 в Q ; таким образом, кривые γ и γ_1 имеют общие концы. Наконец, через

$$\tilde{\Gamma}_1 = s(\gamma_1)$$

обозначим (единственную) кривую в поле S , проектирующуюся в кривую γ_1 . Хотя кривая $\tilde{\Gamma}_1$ и не является интегральным многообразием дифференциальной системы (π^*I, ω) , однако из (IV.c.17) и (IV.c.18) следует, что¹

(IV.d.34) Кривая $\tilde{\Gamma}_1 \subset Y$ является интегральным многообразием системы (π^*I_1, ω) , где I_1 — первая производная система для I .¹)

Это означает, что для базисных форм θ^ρ

$$(IV.d.35) \quad \theta^\rho \equiv 0 \bmod \tilde{\Gamma}_1, \quad \rho = 1, \dots, s-s_1.$$

Конечно, и Γ , и Γ_1 являются интегральными многообразиями системы (π^*I, ω) ; в частности,

$$(IV.d.36) \quad \theta^\alpha \equiv 0 \bmod \Gamma, \quad \alpha = 1, \dots, s.$$

Картина приблизительно такова, как на рис. 52. Слои отображения $\tilde{\omega}$ — это вертикальные прямые F_q . Граничные условия заданы жирными прямыми F_a, F_b , и каждая из кривых $\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1$ является сечением расслоенного пространства $F_{\gamma_1} = \Pi_{q \in \gamma_1} F_q$.

Теперь, и это ключевой момент доказательства, рассмотрим разность

$$(IV.d.37) \quad \Delta = \int_{N_1} \varphi - \int_N \varphi.$$

¹) Так как отображение π сюръективно, то $(\pi^*I)_1 = \pi^*(I_1)$ (т. е. для любой пфафовой системы поднятие ее первой производной системы и первая производная система ее поднятия относительно сюръективного отображения совпадают).

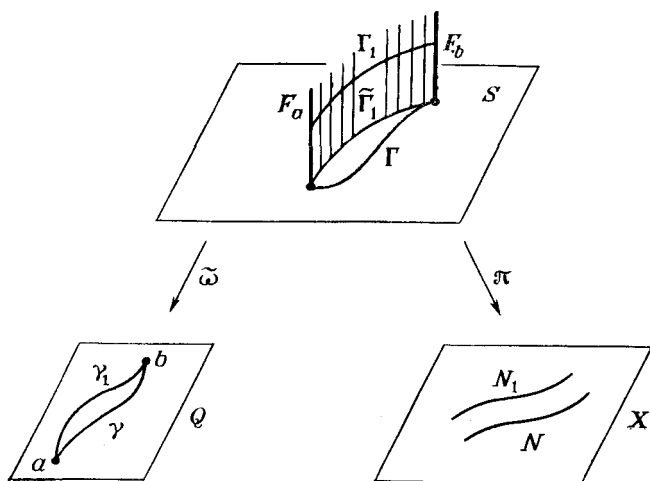


Рис. 52.

Мы хотим показать, что

$$(IV.d.38) \quad \Delta \geq 0,$$

если N_1 достаточно близко к N . Решающим шагом при доказательстве неравенства (IV.d.37) является следующее вычисление

$$\Delta = \int_{\Gamma_1} \varphi - \int_{\Gamma} \varphi = \int_{\Gamma_1} \varphi - \int_{\Gamma} \psi_Y,$$

так как

$$\psi_Y = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha,$$

и равенство (IV.d.36) дает

$$\Delta = \int_{\Gamma_1} \varphi - \int_{\tilde{\Gamma}_1} \psi_Y,$$

поскольку S — поле и, значит, $d\psi_s = 0$ (здесь и использован инвариантный интеграл Гильберта). Таким образом,

$$\Delta = \int_{\gamma_1} \eta,$$

где

$$\eta = s_1^*(\varphi) - s^*(\psi_Y)$$

и сечение $s_1 : \gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ соответствует кривой Γ_1 . Для доказательства неравенства (IV.d.38) нам достаточно теперь установить, что

$$(IV.d.39) \quad \eta \geq 0 \text{ на } \gamma_1,$$

если N_1 достаточно близко к N . Мы докажем утверждение (IV.d.39) в двух случаях, которые ясно демонстрируют происходящее, а затем объясним, почему оно справедливо и в общем случае.

С л у ч а й 1. Рассмотрим классическую вариационную задачу на многообразии $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ и лагранжианом $L(x, y, \dot{y})$, для которого

$$(IV.d.40) \quad \|L_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\| > 0.$$

Основная диаграмма (IV.d.2) в координатной записи имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & Y = \{(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \lambda_\alpha)\} & \\ \tilde{\omega} \swarrow & & \searrow \pi \\ J^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{(x; y^\alpha)\} & & \{(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)\} = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \end{array}$$

Напомним, что пространство импульсов $Y \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}$ выделяется уравнениями

$$\lambda_\alpha = L_{\dot{y}^\alpha}(x, y, \dot{y}),$$

и что

$$\psi_Y = L dx + \lambda_\alpha (dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx).$$

Многообразие N_1 является 1-струей

$$(IV.d.41) \quad \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\alpha(x)}{dx} \right)$$

некоторой функции $y(x)$ (вместо $y_1(x)$ мы пишем просто $y(x)$). Предположим, что в координатах $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ ¹⁾ сечение s задается отображением

$$(x, y^\alpha) \mapsto (x; y^\alpha; s^\alpha; s^\alpha(x, y));$$

для упрощения записи положим

$$s^\alpha(x) = s^\alpha(x, y(x)).$$

Тогда

$$(IV.d.42) \quad s_1^*(\varphi) = L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx$$

и

$$(IV.d.43) \quad s^*(\psi_Y) = L(x, y(x), s(x)) dx + L_{\dot{y}}(x, y(x), s(x)) \left(\frac{dy^\alpha(x)}{dx} - s^\alpha(x) \right) dx.$$

¹⁾ Так как $\det \|L_{\dot{y}^\alpha \dot{y}^\beta}\| \neq 0$, то функции $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)$ задают хорошую локальную систему координат на Y . Хотя и не столь привычные для гамильтонова формализма, как $(x; y^\alpha; \lambda_\alpha)$, эти координаты лучше подходят к требуемому вычислению.

Из (IV.d.42), (IV.d.43) следует, что

$$\eta = E\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, s(x)\right) dx,$$

где

$$(IV.d.44) \quad E(x, y, u, v) = L(x, y, u) - L(x, y, v) - \\ - L_{\dot{y}\alpha}(x, y, v)(u^\alpha - v^\alpha)$$

— это так называемая *E-функция Вейерштрасса* (см. [13], [29]).
Суть в том, что по теореме Тэйлора

$$E(x, y, u, v) = L_{\dot{y}\alpha\dot{y}\beta}(x, y, v)(u^\alpha - v^\alpha)(u^\beta - v^\beta) + O(\|u - v\|^2).$$

В частности, на множестве, где $u = v$, функция E обращается в нуль с точностью до второго порядка, а ввиду условия (IV.d.40)

$$E(x, y, u, v) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|u - v\| < \varepsilon.$$

Отсюда ясно, что условие (IV.d.39) выполняется, если многообразие N_1 достаточно близко к N^1 .

С л у ч а й 2. Рассмотрим классическую вариационную задачу второго порядка на многообразии $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)$ и таким лагранжианом $L(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$, что

$$(IV.d.45) \quad \|L_{\dot{y}\alpha\ddot{y}\beta}\| > 0.$$

Основная диаграмма (IV.d.2) в координатной записи имеет вид

$$\begin{array}{ccc} & Y = \{(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha; \lambda_\alpha; \dot{\lambda}_\alpha)\} & \\ \swarrow \tilde{\omega} & & \searrow \pi \\ J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \{(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha)\} & & \{(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha)\} = J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \end{array}$$

где пространство импульсов $Y \subset J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^{2m}$ выделяется уравнениями

$$\dot{\lambda}_\alpha = L_{\dot{y}\alpha}(x, y, \dot{y}, \ddot{y}).$$

Далее,

$$\psi_Y = L dx + \lambda_\alpha (dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx) + \dot{\lambda}_\alpha (d\dot{y}^\alpha - \ddot{y}^\alpha dx).$$

Системой (G, ω) на приведенном пространстве импульсов $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, которая поднимается в первую производную систему для системы

¹⁾ Это рассуждение объясняет, что мы понимаем под сведением теоремы (IV.d.1.) к вычислению на N : величина Δ обращается при $N_1 = N$ в нуль с точностью до второго порядка, и мы определяем знак квадратичного члена.

(π^*I, ω) , служит каноническая система

$$\theta^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0.$$

Таким образом (и это играет решающую роль, когда мы выходим за рамки классического случая),

$$(IV.d.46) \quad \psi_Y \equiv L dx + L_{\dot{y}^\alpha} (d\dot{y}^\alpha - \dot{y}^\alpha dx) \bmod \tilde{\omega}^*G.$$

Кривая N_1 определяется 2-струей

$$\left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\alpha(x)}{dx}; \frac{d^2y^\alpha(x)}{dx^2} \right)$$

некоторой функции $y(x)$. Предположим, что в локальных координатах $(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; \ddot{y}^\alpha; \lambda_\alpha)$ на многообразии Y сечение s , определяющее поле согласно предложению (IV.d.32), записывается в виде

$$(x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha) \mapsto (x; y^\alpha; \dot{y}^\alpha; s^\alpha(x, y, \dot{y}); r_\alpha(x, y, \dot{y})).$$

Для упрощения записи положим

$$s^\alpha(x) = s^\alpha\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right).$$

Так как $\varphi = L dx$, то

$$(IV.d.47) \quad s_i^*(\varphi) = L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right) dx.$$

С другой стороны, поскольку кривая $\gamma_1 \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ является 1-струей функции $y(x)$ и, следовательно, интегральным многообразием идеала G , то ввиду равенства (IV.d.46)

$$(IV.d.48) \quad s^*(\psi_Y) = L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, s(x)\right) dx \\ + L_{\dot{y}^\alpha}\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, s(x)\right) \left(\frac{d^2y^\alpha(x)}{dx^2} - s^\alpha(x)\right) dx.$$

Из (IV.d.47), (IV.d.48) вытекает, что

$$\eta = E\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, s(x)\right),$$

где

$$E(x, y, \dot{y}, u, v) = L(x, y, \dot{y}, u) - L(x, y, \dot{y}, v) - \\ - L_{\dot{y}^\alpha}(x, y, \dot{y}, v)(u^\alpha - v^\alpha)$$

— это E -функция Вейерштрасса для вариационной задачи второго порядка. Снова, как и в случае (i), предположение (IV.d.45) обеспечивает выполнение неравенства $\eta \geq 0$, что и доказывает теорему для случая 2.

З а м е ч а н и я п о п о в о д у о б щ е г о с л у ч а я. В общем случае рассуждения фактически повторяют рассуждения, про-

веденные во втором из рассмотренных выше случаев. Решающий момент состоит в том, что в силу (IV.d.35) соотношение (IV.d.36) принимает вид

$$\psi_Y \equiv \varphi + A_\mu \theta^\mu \bmod G.$$

Тогда вычисление, аналогичное выполненному в разд. с, показывает, что величина η при $N_1 = N$ обращается в нуль с точностью до *второго порядка*, и поэтому при N_1 , близком к N , главный член определяется второй производной, которая оказывается положительной, ибо $\|A_{\mu\nu}\| > 0$. $\square$

е. Смешанные граничные условия и классическая задача Лагранжа

По традиции классические вариационные задачи с ограничениями решают методом множителей Лагранжа. Развитая в этой книге теория предлагает другой подход, в котором удастся обойтись меньшим количеством переменных и который поэтому при просчете конкретных примеров может дать некоторое преимущество. В данном разделе мы объясним, как работает наш метод, а также сравним его с традиционным методом множителей Лагранжа. Коротко говоря, оказывается, что использовавшиеся нами на всем протяжении книги величины λ_α не совпадают с множителями Лагранжа и играют в теории существенно иную роль (см. (IV.e.41)).

1. Хорошо поставленные смешанные вариационные задачи

В разд. а мы ввели и обсудили один класс хорошо поставленных вариационных задач. Большинство рассмотренных нами примеров входит в этот класс, и он дает весьма естественную основу для рассмотрения более глубоких аспектов теории (вторая вариация, уравнения Гамильтона—Якоби и т. д.). Однако граничные условия в классических задачах Лагранжа и Майера (см. [5], [13]) носят другой характер; они *не* симметричны в том смысле, что два конца нельзя поменять местами. Мы включим такие смешанные граничные условия в нашу общую постановку, а позднее применим полученные результаты к классической задаче Лагранжа.

Пусть вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ на некотором многообразии X удовлетворяет следующему предположению:

(IV.e.1) ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. (I, ω) — *пфафхова система в хорошей форме, являющаяся локально вложимой, а*

$$\varphi = L\omega$$

для некоторой функции L на X .

З а м е ч а н и е. Согласно утверждению (I.c.10) это предположение означает, что задача $(I, \omega; \varphi)$ локально эквивалентна классической вариационной задаче с ограничениями. Однако допустимые замены корепера образуют большую группу, чем в классических вариационных задачах с ограничениями (даже если дозволить контактные преобразования).

Выберем образующие $\{\theta^\alpha\}$ дифференциального идеала I таким образом, чтобы первая производная система порождалась подмножеством $\{\theta^\rho\}$. Таким образом, наша дифференциальная система порождается уравнениями Пфаффа

$$\theta^\rho = 0, \quad \rho = 1, \dots, s - s_1,$$

$$(IV.e.2) \quad \theta^\mu = 0, \quad \mu = s - s_1 + 1, \dots, s,$$

$$\omega \neq 0,$$

где s_1 — число Картана. Если, как обычно, обозначить через $\{\theta^\alpha\} \subset A^*(X)$ алгебраический идеал, порожденный 1-формами θ^α , то структурные уравнения системы (IV.e.2) примут вид

$$\theta^\rho \equiv 0 \bmod \{\theta^\alpha\},$$

$$(IV.e.3) \quad d\theta^\mu \equiv -\pi^\mu \wedge \omega \bmod \{\theta^\alpha\},$$

где 1-формы π^μ линейно-независимы по модулю подпространства $\text{span}\{\theta^\alpha, \omega\}$.

Пусть $N \in \mathcal{Y}(I, \omega)$ — некоторое интегральное многообразие системы (IV.e.2), диффеоморфное отрезку $[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$. Введем в рассмотрение подпространство

$$T_N(\mathcal{Y}(I, \omega; [A, B'])) \subset T_N(\mathcal{Y}(I, \omega))$$

(объяснение подобных обозначений см. в разд. а), состоящее из инфинитезимальных вариаций N как интегрального многообразия системы (I, ω) , удовлетворяющих некоторому набору смешанных граничных условий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что векторное поле $v \in C^\infty(N, T(X))$, удовлетворяющее условию (I.b.15), задает инфинитезимальную вариацию многообразия N , удовлетворяющую смешанным граничным условиям, если

$$(i) \quad (v \rfloor \varphi)_{\partial N} = 0,$$

$$(IV.e.4) \quad (ii) \quad (v \rfloor \theta^\mu)_{\partial N} = 0,$$

$$(iii) \quad (v \rfloor \theta^\rho)_a = 0.$$

П о я с н е н и е. Каждое из выражений

$$v \rfloor \varphi, \quad v \rfloor \theta^\rho, \quad v \rfloor \theta^\mu$$

является функцией на N . Граница ∂N состоит из концов a, b отрезка $[a, b]$. Уравнения (i), (ii) означают, что соответствующие функции должны обращаться в нуль на обоих концах, а уравнение (iii) — что функция $v \lrcorner \theta^\rho$ должна обращаться в нуль лишь на левом конце a .

Пусть однопараметрическое семейство $\{N_t\} \subset \mathcal{V}(I, \omega)$ интегральных многообразий системы (I, ω) таково, что $N_0 = N$, и его инфинитезимальная вариация v удовлетворяет смешанным граничным условиям. Чуть ниже мы объясним две вещи:

i) что означает условие *невыврожденности* вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$ (это понятие сводится к введенному ранее в разд. е гл. I);

ii) что означает, что многообразие N удовлетворяет дифференциальной системе Эйлера—Лагранжа со смешанными граничными условиями.

Используя эти понятия, сформулируем

(IV.e.5) ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Предположим, что задача $(I, \omega; \varphi)$ невырожденна и многообразие N удовлетворяет дифференциальной системе Эйлера—Лагранжа со смешанными граничными условиями. Тогда*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} = 0$$

для всех кривых $\{N_t\}$ в $\mathcal{V}(I, \omega)$, инфинитезимальные вариации которых удовлетворяют смешанным граничным условиям (IV.e.4).

Символически это утверждение можно записать в виде

$$v \in T_N(\mathcal{V}(I, \omega; [A, B'])) \Rightarrow (\delta\Phi)(v) = 0.$$

Доказательство. С использованием соглашения (II.b.4) об обозначениях структурные уравнения (IV.e.3) можно записать в виде

$$(IV.e.6) \quad \begin{aligned} d\theta^\rho &\equiv -A_{\alpha\mu}^\rho \theta^\alpha \wedge \pi^\mu + B_\alpha^\rho \theta^\alpha \wedge \omega, \\ d\theta^\mu &\equiv -\pi^\mu \wedge \omega + A_{\alpha\nu}^\mu \pi^\nu \wedge \theta^\alpha. \end{aligned}$$

Возможно, что при этом во втором уравнении (IV.e.3) форму π^μ следует заменить на форму $\pi^\mu + C_\alpha^\mu \theta^\alpha$, но эта подстановка допустима. Запишем

$$\begin{aligned} dL &\equiv L_\mu \pi^\mu \bmod \{\theta^\alpha, \omega\}, \\ dL_\mu &\equiv L_{\mu\nu} \pi^\nu \bmod \{\theta^\alpha, \omega\}. \end{aligned}$$

Мы говорим, что задача $(I, \omega; \varphi)$ *невыврожденна*, если

$$(IV.e.7) \quad \det \|L_{\mu\nu}\| \neq 0.$$

Это определение согласуется с предыдущим, если выполнены дополнительные условия интегрируемости (I.e.28).

Следуя алгоритму вычисления дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа, описанному в разд. е гл. I, рассмотрим на многообразии $X \times \mathbb{R}^s$ 1-форму

$$\psi = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha.$$

Так как

$$\begin{aligned} d\varphi &= dL \wedge \omega + L d\omega \\ &\equiv L_\mu \pi^\mu \wedge \omega + A_\alpha \theta^\alpha \wedge \omega + B_{\mu\alpha} \pi^\mu \wedge \theta^\alpha \end{aligned}$$

(на втором шаге мы использовали предположение о локальной вложимости системы (I, ω)), то дифференциал $\Psi = d\psi$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{(IV.e.8)} \quad \Psi &\equiv (L_\mu - \lambda_\mu) \pi^\mu \wedge \omega \\ &\quad + (d\lambda_\mu - (A_\mu + \lambda_\rho B_\mu^\rho) \omega + (B_{\nu\mu} + \lambda_\rho A_{\mu\nu}^\rho) \pi^\nu) \wedge \theta^\mu \\ &\quad + (d\lambda_\rho - (A_\rho + \lambda_\sigma B_\rho^\sigma) \omega + (B_{\rho\mu} + \lambda_\sigma A_{\mu\rho}^\sigma) \pi^\mu) \wedge \theta^\rho + \lambda_\mu A_{\nu\alpha}^\mu \pi^\nu \wedge \theta^\alpha. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} C_\mu &= A_\mu + \lambda_\rho B_\mu^\rho, \\ C_\rho &= A_\rho + \lambda_\sigma B_\rho^\sigma, \\ D_{\nu\mu} &= B_{\nu\mu} + \lambda_\rho A_{\mu\nu}^\rho + \lambda_\nu A_{\nu\mu}^\nu, \\ D_{\mu\rho} &= B_{\rho\mu} + \lambda_\sigma A_{\mu\rho}^\sigma + \lambda_\nu A_{\nu\mu}^\nu, \end{aligned}$$

и перепишем (IV.e.8) в виде

$$\begin{aligned} \text{(IV.e.9)} \quad \Psi &\equiv (L_\mu - \lambda_\mu) \pi^\mu \wedge \omega + (d\lambda_\mu - C_\mu \omega + D_{\nu\mu} \pi^\nu) \wedge \theta^\mu \\ &\quad + (d\lambda_\rho - C_\rho \omega + D_{\mu\rho} \pi^\mu) \wedge \theta^\rho. \end{aligned}$$

Система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа (см. (I.d.16))

$$\begin{aligned} \text{(IV.e.10)} \quad &\text{(i)} \quad \partial/\partial \lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0, \\ &\text{(ii)} \quad \partial/\partial \pi^\mu \lrcorner \Psi \equiv (L_\mu - \lambda_\mu) \omega = 0, \\ &\text{(iii)} \quad -\partial/\partial \theta^\mu \lrcorner \Psi \equiv d\lambda_\mu + C_\mu \omega + D_{\nu\mu} \pi^\nu = 0, \\ &\text{(iv)} \quad -\partial/\partial \theta^\rho \lrcorner \Psi \equiv d\lambda_\rho + C_\rho \omega + D_{\mu\rho} \pi^\mu = 0, \end{aligned}$$

где символ „ $\equiv$ “ обозначает, как обычно, сравнение по модулю идеала $\{\theta^\alpha\}$.

Многообразие N является решением дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа, если существуют такие функции $\lambda_\alpha(x)$, что выполнены уравнения (IV.e.10) вкупе с условием независимости $\omega \neq 0$. Равенство (ii) дает

$$L_\mu = \lambda_\mu;$$

поэтому граничные условия на функции $\lambda_\mu(x)$ уже определены концами кривой N . Ввиду условия невырожденности, 1-формы

$\{\omega; \theta^\alpha; d\lambda_\mu\}$ образуют корепер на X . Уравнения (i), (iii), (iv) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для кривой $N \subset X$ и функций $\lambda_\rho(x)$, линейную по $\lambda_\rho(x)$. По определению, N является решением дифференциальной системы Эйлера—Лагранжа со смешанными граничными условиями, если существует решение системы (IV.e.10), удовлетворяющее условиям

$$(IV.e.11) \quad \lambda_\rho(b) = 0.$$

Закончим теперь доказательство предложения. Применение нашей основной вычислительной формулы (I.b.5) дает

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} = \int_N v \rfloor d\varphi + d(v \rfloor \varphi) = \int_N v \rfloor d\varphi$$

(в силу теоремы Стокса и того, что $(v \rfloor \varphi)_{\partial N} = 0$). Ввиду уравнений Эйлера—Лагранжа,

$$\begin{aligned} v \rfloor d\varphi &\equiv -v \rfloor d(\lambda_\alpha \theta^\alpha) \\ &\equiv -v \rfloor (d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha d\theta^\alpha) \\ &\equiv d\lambda_\alpha (v \rfloor \theta^\alpha) + \lambda_\alpha d(v \rfloor \theta^\alpha) \bmod N \end{aligned}$$

(на последнем шаге использована формула (I.b.15)). Таким образом,

$$v \rfloor d\varphi \equiv d(\lambda_\alpha (v \rfloor \theta^\alpha)),$$

и, опять по теореме Стокса,

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{N_t} \varphi \right)_{t=0} = (\lambda_\alpha (v \rfloor \theta^\alpha))_{\partial N}.$$

Наши граничные условия (см. (IV.e.4) и (IV.e.11)) выглядят так:

$$(v \rfloor \theta^\mu)(a) = (v \rfloor \theta^\mu)(b) = 0,$$

$$(v \rfloor \theta^0)(a) = 0, \quad \lambda_\rho(b) = 0.$$

Следовательно,

$$(\lambda_\alpha (v \rfloor \theta^\alpha))_{\partial N} = 0. \quad \square$$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. i) Пусть невырожденная вариационная задача $(I, \omega; \varphi)$ удовлетворяет предположению (IV.e.1). Тогда мы говорим, что задача $(I, \omega; \varphi)$ с граничными условиями (IV.e.4) определяет хорошо поставленную смешанную вариационную задачу.

ii) Уравнениями Эйлера—Лагранжа для этой задачи мы называем обычные уравнения Эйлера—Лагранжа с дополнительными граничными условиями (IV.e.11).¹⁾

¹⁾ Мы не пытались развить для хорошо поставленных смешанных вариационных задач теорию разд. b—d (уравнения Якоби, сопряженные точки, вторая вариация, поля и т. д.) Было бы интересно проделать это.

2. Задача Лагранжа

(см. [4], [5], [13], [40], [57])

Традиционно эта задача ставится следующим образом:

Определить в пространстве $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x, y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m) = (x; y; \dot{y})$ экстремали функционала

$$(IV.e.12) \quad \Phi = \int L\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) dx,$$

заданного на параметризованных кривых $x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих набору ограничений, или связей,

$$(IV.e.13) \quad g^p\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right) = 0.$$

Связи называются *конечными* (в противоположность инфинитезимальным) или *голономными*, если функции $g^p = g^p(x, y)$ не зависят от переменных $\dot{y}$ (см. замечание после (IV.e.16)). Если, кроме того, функции

$$g^p = g^p(y)$$

зависят лишь от переменных y , то задачу Лагранжа можно считать классической вариационной задачей, определенной на подмногообразии

$$M = \{y \in \mathbb{R}^m : g^p(y) = 0\}$$

в $\mathbb{R}^m$. Уравнения Эйлера—Лагранжа для этой задачи обсуждались в разд. d гл. I.

Мы будем использовать индексы из интервалов

$$1 \leq \mu, \nu \leq l,$$

$$l+1 \leq \rho, \sigma \leq m.$$

Если связи голономны, то можно считать, что локально они имеют вид

$$(IV.e.14) \quad y^\rho = h^\rho(x; y^\mu).$$

Естественный способ задания граничных условий состоит в том, чтобы задать значения

$$y^\mu(a), y^\mu(b)$$

(где $a \leq x \leq b$), а затем с помощью уравнений (IV.e.14) определить оставшиеся граничные условия. Для классической вариационной задачи, поставленной на многообразии $M \subset \mathbb{R}^m$, эти условия совпадают с естественными граничными условиями из разд. а.

Произвольные ограничения (IV.e.13) называются *неголономными*. В противоположном голономному случае матрица

$$\left\| \frac{\partial g^p(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^\alpha} \right\|$$

имеет максимальный ранг $m - l$. Тогда можно считать, что локально ограничения имеют вид

$$(IV.e.15) \quad \dot{y}^0 = h^0(x; y^\alpha; \dot{y}^\mu).$$

Таким образом, удовлетворяющие этим ограничениям кривые задаются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С этой точки зрения естественный способ задания граничных условий состоит в задании значений

$$(IV.e.16) \quad y^\mu(a), y^0(a), y^\mu(b)$$

и определении оставшихся граничных значений $y^0(b)$ из уравнений (IV.e.15).

З а м е ч а н и е. Слово «неголономный» означает ¹⁾ «неинтегрируемый». Чтобы пояснить это, предположим, что ограничения линейны и имеют вид

$$g^0(x, y, \dot{y}) = A_\alpha^0(y) \dot{y}^\alpha.$$

Тогда уравнения Пфаффа

$$\theta^0 = A_\alpha^0(y) dy^\alpha = 0.$$

определяют распределение в $\mathbb{R}^m$, и решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (IV.e.15) являются параметризованными кривыми, касающимися этого распределения (мы просчитали один такой пример в (II.a.40)). Это распределение будет, вообще говоря, неинтегрируемым, чем и объясняется происхождение слова «неголономный».

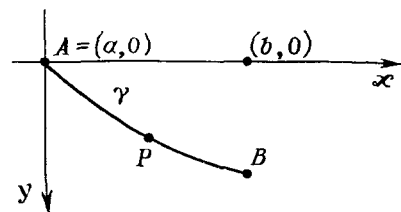


Рис. 53.

будет, вообще говоря, неинтегрируемым, чем и объясняется происхождение слова «неголономный».

(IV.e.17) ПРИМЕР. Одна из самых классических задач вариационного исчисления — задача о брахистохроне:

Определить такую кривую γ , соединяющую две фиксированные точки A, B , что путь частицы P , движущейся от A до B по этой кривой под действием силы тяжести, занимает наименьшее время (рис. 53).

В любом элементарном курсе вариационного исчисления доказывается, что решение этой задачи представляет собой циклоиду (см. также разд. b приложения). Если задать кривую γ отображением $x \mapsto (x, y(x))$, то в момент времени t частица P будет иметь

¹⁾ Слово «голономный» происходит от греческого «холос» ($\acute{o}\lambda\omicron\varsigma$), означающего «целый, цельный, совершенный». — *Прим. перев.*

координаты

$$(x(t), y(x(t)))$$

и скорость

$$v(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{dx}{dt}.$$

Согласно закону сохранения полной энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = gy,$$

где m — масса точки P , а g — постоянная силы тяжести. (Заметим, что ось y направлена вниз.) Отсюда

$$dt = c \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad c > 0,$$

и, следовательно, задача состоит в том, чтобы минимизировать функционал

$$\Phi = \int_a^b L\left(x, y, \frac{dy(x)}{dx}\right) dx,$$

где

$$L(x, y, \dot{y}) = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{y}},$$

с заданными граничными условиями $y(a), y(b)$.

З а м е ч а н и е. Вообще-то было бы естественней работать в пространстве $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ (в котором заданы координаты $(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$) с функционалом

$$\Phi = \int dt$$

и ограничением

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = gy.$$

Однако граничные условия (IV.e.16) — не такого вида.

С другой стороны, можно работать в пространстве с координатами $(x, y, v, \dot{y}, \dot{v})$ (где v обозначает скорость) и заниматься минимизацией функционала

$$\Phi = \int \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v} dx,$$

подчиненного голономному ограничению

$$\frac{mv^2}{2} = gy.$$

IV. Граничные условия

В этом случае требуемые граничные условия для задачи как раз таковы, как указано после (IV.e.14). Сейчас мы рассмотрим обобщение такого подхода.

Интересный вариант задачи о брахистохроне получается, если предположить, что точка P движется в сопротивляющейся среде, причем сила сопротивления является функцией от скорости. При этом происходят потери энергии в соответствии с законом

$$(IV.e.18) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + gy \right) = -R(v),$$

где $R(v) > 0$. Таким образом, задача о брахистохроне в сопротивляющейся среде естественным образом ставится как задача Лагранжа с голономными связями.

Более конкретно, мы рассматриваем в пространстве $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ с координатами $(x, y, v, \dot{y}, \dot{v})$ классическую вариационную задачу со связями, определяемую следующими данными:

$$(i) \quad \Phi = \int L \left(x, y(x), v(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{dv(x)}{dx} \right) dx \quad (\text{функционал}),$$

$$(IV.e.19) \quad (ii) \quad L(x, y, v, \dot{y}, \dot{v}) = \frac{V\sqrt{1+\dot{y}^2}}{v} \quad (\text{лагранжиан}),$$

$$(iii) \quad mv\dot{v} + g\dot{y} + \frac{V\sqrt{1+\dot{y}^2}R(v)}{v} = 0 \quad (\text{связи}),$$

с заданными граничными значениями

$$y(a), y(b), v(a).$$

Точка обозначает здесь дифференцирование по x , а v обозначает скорость, т. е.

$$dt = \frac{V\sqrt{1+\dot{y}^2}}{v} dx$$

и

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + gy \right) = (mv\dot{v} + g\dot{y}) \frac{dx}{dt} = \frac{(mv\dot{v} + g\dot{y})v}{V\sqrt{1+\dot{y}^2}}.$$

К этому примеру мы еще вернемся ниже.

(IV.e.20) ПРИМЕР. Рассмотрим классическую вариационную задачу второго порядка, задаваемую функционалом

$$(IV.e.21) \quad \Phi = \int L \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2} \right) dx.$$

Как не раз отмечалось выше, эту задачу можно рассматривать как задачу первого порядка с неголономными ограничениями.

А именно, многообразие $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ с координатами $(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$ естественным образом вкладывается в многообразие $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2m})$ с координатами $(x, y, u, \dot{y}, \dot{u})$ с помощью отображения

$$(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) \mapsto (x, y, \dot{y}, \dot{y}, \ddot{y}).$$

Таким образом, подмногообразие $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2m})$ определяется уравнениями

$$(IV.e.22) \quad \dot{y} - u = 0,$$

и экстремали функционала (IV.e.21) соответствуют экстремалам функционала с ограничениями

$$(IV.e.23) \quad \Phi = \int L\left(x, y(x), u(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{du(x)}{dx}\right) dx, \\ \frac{dy(x)}{dx} = u(x),$$

где

$$(IV.e.24) \quad L(x, y, u, \dot{y}, \dot{u}) = L(x, y, u, \dot{u}).$$

Как было указано в разд. а, в предположении что $\det \|L_{\ddot{y}^{\alpha} \ddot{y}^{\beta}}\| \neq 0$, функционал (IV.e.21) задает хорошо поставленную вариационную задачу с граничными условиями

$$(IV.e.25) \quad y(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad y(b), \quad \frac{dy}{dx}(b) \text{ фиксированы.}$$

Интересно отметить, что естественные граничные условия (IV.e.16) для вариационной задачи первого порядка *не совпадают* с ограничениями (IV.e.23), так как фиксируют всего лишь $3m$ постоянных

$$y(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad \frac{dy}{dx}(b),$$

величина же $y(b)$ определяется затем по формуле

$$y(b) = \int_a^b \frac{dy(x)}{dx} dx + y(a).$$

Это будет объяснено ниже (см. (IV.e.48)).

Вернемся к обсуждению общего случая. Задачи Лагранжа с ограничениями традиционно решаются методом множителей Лагранжа. Мы поговорим о нем ниже. Мы хотим только сразу указать, что формализм внешних дифференциальных систем дает другой подход (*не эквивалентный традиционному*), который на практике обеспечивает иногда преимущество работы в пространстве с меньшим числом переменных. Поясним это.

Рассмотрим задачу Лагранжа (IV.e.12), (IV.e.13), в которой

$$(IV.e.26) \quad \text{rank} \left\| \frac{dg^{\rho}(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^{\sigma}} \right\| = m - l,$$

т. е. в которой выписанный ранг максимален. Предполагая, что

$$(IV.e.27) \quad \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^{\mu} \partial \dot{y}^{\nu}} \right\| \neq 0,$$

представим задачу Лагранжа как хорошо поставленную смешанную вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$. Конечно, при этом подразумевается, что естественные граничные условия (IV.e.16) для задачи Лагранжа будут соответствовать смешанным граничным условиям (IV.e.4) для задачи $(I, \omega; \varphi)$.

В качестве X возьмем подмногообразие в $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, задаваемое уравнениями связей

$$g^{\rho}(x, y, \dot{y}) = 0,$$

а в качестве системы (I, ω) — ограничение на X канонической системы на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ (см. (0.e.2)). Так как все наши формулировки носят инвариантный характер, мы свободны в выборе удобных образующих для пфафовой системы I . По причинам, которые сейчас будут объяснены, выберем такие образующие:

$$(IV.e.28) \quad \begin{aligned} \theta^{\mu} &= dy^{\mu} - \dot{y}^{\mu} dx = 0, \\ \theta^{\rho} &= g_{\dot{y}\sigma}^{\rho}(dy^{\sigma} - \dot{y}^{\sigma}) dx + g_{\dot{y}\mu}^{\rho}(dy^{\mu} - \dot{y}^{\mu} dx) = 0. \end{aligned}$$

Ввиду нашего предположения о ранге (IV.e.26), они независимы. Далее, поскольку на многообразии X

$$0 = dg^{\rho} \equiv g_{\dot{y}\sigma}^{\rho} d\dot{y}^{\sigma} + g_{\dot{y}\mu}^{\rho} d\dot{y}^{\mu} \bmod \{dy^{\alpha}, dx\},$$

то, если положить

$$\omega = dx, \quad \pi^{\mu} = d\dot{y}^{\mu},$$

структурные уравнения для образующих (IV.e.28) примут вид

$$d\theta^{\mu} \equiv -\pi^{\mu} \wedge \omega \bmod \{\theta^{\alpha}\},$$

$$d\theta^{\rho} \equiv 0 \bmod \{\theta^{\alpha}\}.$$

Другими словами, образующие (IV.e.28) идеала I были выбраны указанным образом просто для того, чтобы первая производная система порождалась подпространством

$$\text{span} \{\theta^{\rho}\}.$$

Ясно, что предположение (IV.e.1) и структурные уравнения (IV.e.3) выполняются. Далее, из равенств (IV.e.28) очевидно

следует, что смешанные граничные условия (IV.e.4) в точности совпадают с естественными граничными условиями (IV.e.16) в задаче Лагранжа. Наконец, легко видеть, что условие невырожденности (IV.e.7) эквивалентно условию (IV.e.27).¹⁾ Поэтому из предложения (IV.e.5) вытекает первая часть следующего результата:

(IV.e.29) ТЕОРЕМА. *Вариационная задача Лагранжа (IV.e.12), (IV.e.13), удовлетворяющая условиям (IV.e.26), (IV.e.27), определяет хорошо поставленную вариационную задачу $(J, \omega; \varphi)$. Решения уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с задачей $(J, \omega; \varphi)$, задают экстремали задачи Лагранжа. Наконец, дифференциальная система Эйлера—Лагранжа (J, ω) имеет глобально гамильтонов вид.*

Доказательство. Нам требуется доказать лишь последнее утверждение, а для его доказательства надо, в сущности, лишь вспомнить конструкцию системы (J, ω) . Рассмотрим на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^m$ (координаты в $\mathbb{R}^m$ обозначены через $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$) 1-форму

$$\psi = \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha$$

с дифференциалом

$$\Psi = d\psi.$$

Пфафова система (J, ω) на подмногообразии $Y \subset Z$ каноническим образом строится по системе Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ (см. разд. е гл. I); по существу, система (J, ω) является инволютивным продолжением системы $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$ (см. разд. с гл. I).

Теперь, и это существенный момент, перейдем к новому набору образующих идеала I , приводящему к той же внешней дифференциальной системе (J, ω) . В качестве новых образующих возьмем просто 1-формы

$$\tilde{\theta}^\alpha = dy^\alpha - \dot{y}^\alpha dx.$$

Обозначая через $\tilde{\lambda}_\alpha$ соответствующие новые переменные, получаем

$$\psi = \varphi + \tilde{\lambda}_\alpha \tilde{\theta}^\alpha = -H dx + \tilde{\lambda}_\alpha dy^\alpha,$$

где

$$(IV.e.30) \quad H = -L(x, y, \dot{y}) + \lambda_\alpha \dot{y}^\alpha.$$

¹⁾ В примере (I.e.39) мы обсуждали понятие невырожденности для классической задачи Лагранжа в случае выполнения дополнительных условий (I.e.28). Так как эти условия имели не слишком инвариантный вид, то непонятно, как условие невырожденности в указанном примере соотносится с условием (IV.e.27).

IV. Граничные условия

Из доказательства предложения (IV.e.5) следует, что

i) пространство импульсов $\bar{Y} \subset Z$ задается уравнениями

$$\lambda_\mu = L_{y^\mu}$$

и, значит,

$$\dim Y = 2m + 1;$$

ii) 1-формы $\{\omega; dy^\alpha; d\tilde{\lambda}_\alpha\}$ определяют корепер на Y .

Отсюда ясно видно, что 1-форма

$$\psi_Y = -H dx + \tilde{\lambda}_\alpha dy^\alpha$$

имеет максимальный ранг (т. е. $\psi_Y \wedge (d\psi_Y)^m \neq 0$) и система Эйлера—Лагранжа есть не что иное, как система Картана для 2-формы $\Psi_Y = d\psi_Y$. $\square$

Одно из преимуществ конструкции, в которой $\dim X$ меньше, чем при традиционном подходе (описываемом ниже), состоит в том, что для интегрирования системы Эйлера—Лагранжа требуется меньше интегралов. Например, из гамильтоновости системы Эйлера—Лагранжа следует, что

Если функция $L = L(y, \dot{y})$ не зависит от переменной x , $m = 2$ и у нас есть один первый интеграл V , не зависящий от H , то система Эйлера—Лагранжа является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.

(IV.e.31) ПРИМЕР. Продолжим обсуждение брахистохроны в сопротивляющейся среде (см. пример (IV.e.17)). Из равенства (IV.e.9) видно, что каждое из векторных полей

$$\partial/\partial x, \quad \partial/\partial y$$

сохраняет лагранжиан (ii) и связи (iii). Поэтому эти поля индуцируют инфинитезимальные симметрии вариационной задачи $(I, \omega; \varphi)$. По теореме Нётер (II.a.10) существуют два первых интеграла H, V . Как нетрудно проверить, в типичном случае они независимы. Если предположить, что сила сопротивления является рациональной функцией $R(v)$ от скорости, то справедлив следующий результат, обнаруженный Эйлером:

(IV.e.32) Уравнения Эйлера—Лагранжа для брахистохроны в сопротивляющейся среде алгебраически интегрируемы в квадратурах.

Явное интегрирование этих уравнений путем определения системы Пфаффа (IV.e.28) с последующим применением нашего обычного алгоритма довольно запутанно. Для получения формул оказывается более удобным сформулировать задачу в параметрической форме; это будет проделано вслед за обсуждением классического метода множителей Лагранжа.

3. Классический подход к задаче Лагранжа

Рассмотрим классическую вариационную задачу с ограничениями, определяемую данными (IV.e.12) и (IV.e.13). Чтобы найти экстремали для этой задачи (при описанных выше граничных условиях), Эйлер и Лагранж придумали следующее элегантное

(IV.e.33) Правило множителей Лагранжа. *Рассмотрим классическую вариационную задачу без связей с лагранжианом*

$$(IV.e.34) \quad \tilde{L} = L + \Lambda_\rho g^\rho,$$

где Λ_ρ — некоторые подлежащие определению функции переменной x . Тогда экстремали функционала (IV.e.12) с ограничениями (IV.e.13) даются решениями уравнений Эйлера—Лагранжа

$$(IV.e.35) \quad \frac{d}{dx} (\tilde{L}_{y^\alpha}) = \tilde{L}_{y^\alpha}$$

при условии соблюдения ограничений (IV.e.13).

Укажем сначала, как этот метод должен работать на практике в максимально неголономном случае (IV.e.15). Для подходящих функций F_μ , G_ρ уравнения (IV.e.13) и (IV.e.34) можно переписать в виде

$$(i) \quad \frac{dy^0(x)}{dx} = h^0 \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx} \right),$$

$$(ii) \quad (L_{\dot{y}^\mu \dot{y}^\nu} + L_{\dot{y}^\mu \dot{y}^\rho} h_{\dot{y}^\nu}^\rho) \frac{d^2 y^\nu(x)}{dx^2} = F_\mu \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx}; \Lambda_\rho(x); \frac{d\Lambda_\rho(x)}{dx} \right),$$

$$(iii) \quad L_{y^0 \dot{y}^\mu} \frac{d^2 y^\mu(x)}{dx^2} + L_{y^0 \dot{y}^\sigma} \frac{d}{dx} \left(h^\sigma \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx} \right) \right) + \frac{d\Lambda_\rho(x)}{dx} = G_\rho \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx}; \lambda_\rho(x) \right).$$

При соответствующих предположениях о невырожденности уравнение (ii) можно разрешить относительно вторых производных $d^2 y^\mu(x)/dx^2$. Подстановка этих выражений в равенство (iii) даст систему вида

$$(i) \quad \frac{dy^0(x)}{dx} = h^0 \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx} \right),$$

$$(ii) \quad \frac{d^2 y^\mu(x)}{dx^2} = H^\mu \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx}; \Lambda_\rho(x); \frac{d\Lambda_\rho(x)}{dx} \right),$$

$$(iii) \quad I_\rho \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx}; \Lambda_\sigma(x); \frac{d\Lambda_\sigma(x)}{dx} \right) = 0.$$

Допустим теперь, что уравнение (iii) можно разрешить относительно $d\Lambda_\sigma(x)/dx$, и подставим получающееся выражение обратно в уравнение (ii). Мы приходим к системе вида

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{dy^0(x)}{dx} &= h^0 \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx} \right), \\ (IV.e.36) \quad (ii) \quad \frac{d^2 y^\mu(x)}{dx^2} &= J^\mu(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx}; \Lambda_\rho(x)), \\ (iii) \quad \frac{d\Lambda_\rho(x)}{dx} &= K_\rho \left(x; y^\alpha(x); \frac{dy^\mu(x)}{dx}; \Lambda_\sigma(x) \right). \end{aligned}$$

Это и будут уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (IV.e.12) с ограничениями (IV.e.13).

Граничные условия (IV.e.16) являются естественными граничными условиями для функций $y^0(x)$, $y^\mu(x)$, фигурирующих в системе обыкновенных дифференциальных уравнений (IV.e.36). Граничные условия для функций $\Lambda_\rho(x)$ определяются требованием

$$(IV.e.37) \quad \Lambda_\sigma(b) g_{y^0}^\sigma \left(x, y(b), \frac{dy}{dx}(b) + L_{y^0}(b, y(b), \frac{dy}{dx}(b)) \right) = 0.$$

Причину такого выбора мы объясним при доказательстве следующего результата:

(IV.e.38) Решения уравнений (IV.e.35) и (IV.e.15), удовлетворяющие граничным условиям (IV.e.16) и (IV.e.37), служат экстремальными функционала (IV.e.12) с ограничениями (IV.e.13).

Доказательство. Пусть вариация $y(x, t)$ ($a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq \epsilon$) функции $y(x) = y(x, 0)$ удовлетворяет условиям

$$y^\mu(a, t) = A^\mu, \quad y^\mu(b, t) = B^\mu, \quad y^0(a, t) = C^0$$

и ограничениям

$$g^0 \left(x, y(x, t), \frac{dy(x, t)}{dx} \right) = 0$$

(мы предполагаем, что эти ограничения можно представить в виде (IV.e.15)). Допустим также, что существуют такие функции $\Lambda_\rho(x)$, что выполнены равенства (IV.e.35) и (IV.e.37). Мы хотим показать, что

$$(IV.e.39) \quad \left(\frac{d}{dt} \int_a^b L \left(x, y(x, t), \frac{dy(x, t)}{dx} \right) dx \right)_{t=0} = 0.$$

Доказательство по существу совпадает с соответствующим доказательством для классических уравнений Эйлера—Лагранжа. Если положить $y_t(x) = (\partial y(x, t)/\partial t)_{t=0}$, то левая часть равенства

(IV.e.39) примет вид

$$\int_a^b \left(y_t^\alpha L_{y^\alpha} + \frac{dy_t^\alpha}{dx} L_{\dot{y}^\alpha} \right) dx.$$

Интегрирование по частям с учетом того факта, что

$$y_t^u(a) = y_t^u(b) = y_t^0(a) = 0,$$

дает

$$\int_a^b y_t^\alpha \left(L_{y^\alpha} - \frac{d}{dx} (L_{\dot{y}^\alpha}) \right) dx + (y_t^0 L_{\dot{y}^0}) \Big|_{x=b}.$$

Ввиду равенства (IV.e.35) это выражение равно

$$- \int_a^b y_t^\alpha \left(\Lambda_\rho g_{y^\alpha}^\rho - \frac{d}{dx} (\Lambda_\rho g_{\dot{y}^\alpha}^\rho) \right) dx + (y_t^0 L_{\dot{y}^0}) \Big|_{x=b}.$$

Еще одно интегрирование по частям с использованием (IV.e.37) (именно здесь вступают в игру эти граничные условия) приводит к следующему выражению для левой части равенства (IV.e.39):

$$(IV.e.40) \quad - \int_a^b \Lambda_\rho \left(y_t^\alpha g_{y^\alpha}^\rho + \frac{dy_t^\alpha}{dx} g_{\dot{y}^\alpha}^\rho \right) dx.$$

С другой стороны, уравнения связей дают

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dt} g^\rho(x, y(x, t), \frac{dy}{dx}(x, t)) \right)_{t=0} \\ &= y_t^\alpha g_{y^\alpha}^\rho + \frac{dy_t^\alpha}{dx} g_{\dot{y}^\alpha}^\rho, \end{aligned}$$

поэтому выражение (IV.e.40) равно нулю. Тем самым установлено равенство (IV.e.39), и доказательство нашего утверждения завершено. $\square$

(IV.e.41) З а м е ч а н и е. Естественно спросить, можно ли вывести утверждение (IV.e.38) непосредственно из теоремы (IV.e.29). Ответ на этот вопрос утвердительный (и его нетрудно обосновать). Интересно, однако, отметить, что использовавшиеся на протяжении всей книги параметры λ_α в классическом случае отнюдь не совпадают с множителями Лагранжа Λ_ρ : функции λ_α являются линейными послойными координатами в расслоении $W^* \subset T^*(X)$, величины же Λ_ρ соответствуют выбору образующих идеала функций, обращающихся в нуль на подмногообразии $X \subset T^*(M)$.

(IV.e.42). ПРИМЕР. Простейшая задача Лагранжа заключается в том, чтобы определить уравнения геодезических, параметризованных пропорционально длине дуги. Для удобства будем рассматривать лишь евклидов случай. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{2m+1}$ с координатами $(s; y^1, \dots, y^m; \dot{y}^1, \dots, \dot{y}^m) = (s, y, \dot{y})$ функционал

$$(IV.e.43) \quad \Phi = \int ds$$

с ограничениями

$$\|\dot{y}\| = \sqrt{(\dot{y}^1)^2 + \dots + (\dot{y}^m)^2} = c = \text{const} > 0.$$

Следуя правилу (IV.e.33), положим

$$\tilde{L} = 1 + \Lambda g,$$

где

$$g = \|\dot{y}\| - c.$$

Уравнения (IV.e.35) принимают вид

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\Lambda \dot{y}^\alpha}{\|\dot{y}\|} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\Lambda \dot{y}^\alpha}{\|\dot{y}\|} = c^\alpha = \text{const}.$$

Принимая во внимание ограничение $g = 0$, получаем соответственно

$$\Lambda \dot{y}^\alpha = b^\alpha = \text{const},$$

$$\Lambda = \sqrt{(b^1)^2 + \dots + (b^m)^2} / c = \text{const},$$

$$y^\alpha(s) = a^\alpha s + A^\alpha.$$

Постоянная c определяется значениями a^α , которые фиксированы граничными условиями.

Подобный метод применим и к геодезическим на произвольном римановом многообразии.

(IV.e.44) ПРИМЕР. Мы продолжаем обсуждение брахистохроны в сопротивляющейся среде (см. примеры (IV.e.17) и (IV.e.31)). Чтобы проинтегрировать уравнения в явном виде, удобно поставить эту задачу как классическую вариационную задачу с ограничениями, в котором величины x, y, v являются функциями некоторого параметра τ , вывести уравнения Эйлера—Лагранжа, а затем положить $\tau = cs$, где s — длина дуги, а c — подходящая постоянная.

Продemonстрируем этот метод на одном более простом примере. Рассмотрим опять функционал (IV.e.43), но уже как заданный на пространстве переменных $(\tau, y, \dot{y})$ формулой

$$\Phi = \int \|\dot{y}\| d\tau,$$

при отсутствии ограничений. Уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} (L_{\dot{y}\alpha}) = 0,$$

т. е.

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{y}^\alpha}{\|\dot{y}\|} \right) = 0.$$

Мы можем сначала проинтегрировать их, а затем положить $\tau = cs$. Получим соответственно

$$\|\dot{y}\| = \text{const},$$

$$y^\alpha = a^\alpha = \text{const},$$

а эти уравнения можно проинтегрировать очевидным образом.

В случае брахистохроны в сопротивляющейся среде мы работаем в пространстве с координатами $(\tau; x, y, v; \dot{x}, \dot{y}, \dot{v})$ и рассматриваем функционал

$$\Phi = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{v} d\tau$$

с ограничением

$$(IV.e.45) \quad g(v, \dot{x}, \dot{y}, \dot{v}) = v\dot{v} + \delta\dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tilde{R}(v)$$

(мы умножили ограничение (iii) из (IV.e.19) на $1/m$, положили $\delta = g/m$ и заменили функцию $R(v)$ на $\tilde{R}(v) = R(v)/mv$). Следуя предписанию (IV.e.33), рассмотрим лагранжиан

$$\tilde{L} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{v} + \Lambda g.$$

Если положить

$$K = v \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \frac{\tilde{\Lambda} R(v)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

то уравнения Эйлера—Лагранжа (IV.e.35) примут вид

$$(i) \frac{d}{d\tau} (K\dot{x}) = 0,$$

$$(IV.e.46) \quad (ii) \frac{d}{d\tau} (K\dot{y} + \Lambda\delta) = 0,$$

$$(iii) v \frac{d\Lambda}{d\tau} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) K v$$

(третье равенство следует из равенств $\tilde{L}_{\dot{x}} = \Lambda v$ и $\tilde{L}_v = \Lambda\dot{v} + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) K$). Теперь мы полагаем $\tau = cs$, и уравнения (i) и (ii) дают

$$(IV.e.47) \quad \begin{aligned} K \frac{dx}{ds} &= a, \\ K \frac{dy}{ds} &= b - \Lambda\delta, \end{aligned}$$

где

$$K = c \frac{1}{v} + \Lambda \tilde{R}(v).$$

Из (IV.e.47) следует, что

$$K^2 = c^2 (a^2 + (b - \Lambda\delta)^2).$$

Используя это равенство, мы можем представить v как функцию от переменной Λ :

$$v = V(\Lambda, a, b, c);$$

точнее, v является одной из ветвей некоторой алгебраической функции. Тогда уравнение (IV.e.47), (iii) и система (IV.e.47) дают

$$(i) dx = \frac{ads}{K},$$

$$(ii) dy = \frac{(b - \Lambda\delta) ds}{K},$$

$$(iii) ds = \frac{v d\Lambda}{K_v}.$$

Мы можем проинтегрировать (iii) и получить $s = s(\Lambda)$ как функцию от Λ . Тогда, в силу (i) и (ii),

$$dx = f(\Lambda) d\Lambda,$$

$$dy = h(\Lambda) d\Lambda$$

для подходящих функций $f(\Lambda)$, $h(\Lambda)$. Еще одно интегрирование дает x и y как функции от Λ , и, взяв функцию $\Lambda = \Lambda(s)$, обратную

к функции $s = s(\Lambda)$, мы проинтегрируем в квадратурах уравнения Эйлера—Лагранжа.

Заметим, что даже в том простом случае, когда функция

$R(v) = \lambda v$ пропорциональна скорости, выполнить интегрирование в явном виде довольно сложно. Весьма вероятно, что более эффективен подход, основанный на использовании утверждения (IV.e.32) и следующих трех замечаний:

i) Типичная поверхность уровня

$$H = c$$

функции Гамильтона состоит из вещественных точек некоторого двумерного комплексного абелева многообразия A_C (это следует из теоремы (IV.e.29) и некоторых общих результатов гл. 10 книги [2]).

ii) Гамильтоново векторное поле является элементом алгебры Ли $\mathfrak{a}_C$ векторных полей на A_C , инвариантных относительно сдвигов.

iii) Явное интегрирование уравнений Эйлера—Лагранжа можно выполнить, заметив, что абелево многообразие A_C бирационально эквивалентно якобиану гиперэллиптической алгебраической кривой (см. [36]).

$$\xi^2 = \prod_{i=1}^6 (\eta - a_i)$$

рода два. Рассмотрим на этой кривой C абелевы интегралы (ниже $p, q \in C$)

$$u_1(p) = \int_p^q \frac{d\eta}{\xi},$$

$$u_2(p) = \int_r^q \frac{\eta d\eta}{\xi}.$$

По теореме обращения Якоби (см. указанные выше работы) уравнения

$$u_1(0) + \alpha_1 t = u_1(p_1(t)) + u_2(p_2(t)),$$

$$u_2(0) + \alpha_2 t = u_2(p_1(t)) + u_2(p_2(t))$$

можно однозначно и голоморфно разрешить относительно дивизора

$$D(t) = p_1(t) + p_2(t),$$

где

$$p_i(t) = (\eta_i(t), \xi_i(t)) \quad (i = 1, 2).$$

Эта кривая в A_C и представляет решение уравнений Эйлера—Лагранжа.

(IV.e.48) ПРИМЕР. Вернемся снова к функционалу (IV.e.21) и объясним, почему естественные граничные условия Лагранжа (IV.e.16) — это не то, что требуется в данной конкретной задаче.

А именно, применим правило множителей Лагранжа (IV.e.33) к функционалу с ограничениями (IV.e.23), (IV.e.24). Рассмотрим для простоты записи случай $m = 2$, т. е. новый лагранжиан (IV.e.34) задается равенством

$$\tilde{L} = L(x, y, u, \dot{u}) + \Lambda(\dot{y} - u).$$

Уравнения Эйлера—Лагранжа (IV.e.35) имеют вид

$$\frac{d}{dx}(L_{\dot{u}}) = L_u - \Lambda,$$

$$\frac{d}{dx}(\Lambda) = L_y.$$

С учетом вложения $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2m})$ их можно переписать в координатах $(x, y, \dot{y}, \ddot{y})$ в виде

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{d}{dx}(L_{\ddot{y}}) = L_{\dot{y}} - \Lambda, \\ \text{(ii)} \quad & \frac{d}{dx}(\Lambda) = L_y. \end{aligned}$$

Если теперь *продифференцировать* уравнение (i) и подставить то, что получится, в уравнение (ii), то мы получим обычное уравнение Эйлера—Лагранжа второго порядка (см. (I.d.23))

$$\text{(IV.e.50)} \quad \frac{d^2}{dx^2}(L_{\ddot{y}}) - \frac{d}{dx}(L_{\dot{y}}) + L_y = 0,$$

для которого естественны ограничения (IV.e.25). Однако равенства (IV.e.49) следуют из равенства (IV.e.50) лишь с точностью до прибавления постоянной в уравнении (i), что и объясняет, почему граничные условия (IV.e.16) содержат три, а не четыре постоянные.

4. Некоторые смежные примеры

Обсудим напоследок несколько забавных примеров, связанных с задачей о брахистохроне в сопротивляющейся среде, в которых удобно выполнять интегрирование, используя формализм внешних дифференциальных систем.

(IV.e.51) ПРИМЕР. Как хорошо известно, самолеты летают в основном по большим окружностям. Из опыта известно также, что (при дальних перелетах) полет с востока на запад отнимает

в среднем в 6/5 раз больше времени, чем полет с запада на восток по тому же маршруту. Дело в том, что господствующие ветры — западные, особенно на больших высотах. По причине тех же ветров оптимальный путь для самолета не совпадает с большой окружностью. Мы покажем, что дифференциальная система Эйлера—Лагранжа для определения оптимального пути алгебраически интегрируема в квадратурах (по крайней мере после введения некоторых упрощающих предположений). Предварительно рассмотрим три упрощенных примера, которые последовательно подведут нас к цели.

Упрощенный пример 1. Представим себе, что мы находимся в лодке на озере или реке без течения и хотим попасть из точки A в точку B за кратчайшее время. Если лодка движется с постоянной скоростью, то ясно, что оптимальным путем будет прямая. Докажем теперь это методом, допускающим обобщение на более интересные ситуации.

А именно, рассмотрим параметризованные пути

$$\tau \mapsto (x(\tau), y(\tau)), \\ 0 \leq \tau \leq 1,$$

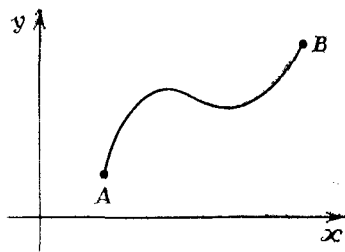


Рис. 54.

от точки A к точке B (рис. 54).

Мы хотим ограничиться путями,

на которых 1-форма $d\tau$ пропорциональна длине дуги: $d\tau = \mu^{-1} ds$ (постоянная μ — это длина данного пути). Чтобы выразить это требование, рассмотрим в пространстве $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ с координатами $(\tau, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ дифференциальное ограничение

$$\theta^3 = \dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y} = 0.$$

Кривые $\tau \mapsto (\tau, x(\tau), y(\tau), dx(\tau)/d\tau, dy(\tau)/d\tau)$, вдоль которых $\theta^3 = 0$, удовлетворяют условию

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left\| \frac{dx(\tau)}{d\tau}, \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right\| \right) = 0,$$

и поэтому вдоль таких кривых

$$ds/d\tau = \mu = \text{const.}$$

Отсюда следует, что мы должны рассмотреть внешнюю дифференциальную систему (I, ω) , задаваемую уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^1 &= dx - \dot{x} d\tau = 0, \\ \tilde{\theta}^2 &= dy - \dot{y} d\tau = 0, \\ \text{(IV.e.52)} \quad \tilde{\theta}^3 &= \dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y} = 0, \\ \omega &= d\tau \neq 0, \end{aligned}$$

IV. Граничные условия

интегральные кривые которой являются 1-струями кривых, параметризованных пропорционально длине дуги. На открытом множестве, где $\dot{y} \neq 0$, удобнее в качестве образующих системы (I, ω) взять уравнения Пфаффа (см. (IV.e.28), где был произведен аналогичный выбор)

$$\begin{aligned} \theta^1 &= dx - \dot{x} d\tau = 0, \\ \theta^2 &= \dot{x} (dx - \dot{x} d\tau) + \dot{y} (dy - \dot{y} d\tau), \\ \theta^3 &= \dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y} = 0, \\ \omega &= d\tau \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.e.53})$$

Положив $\pi = d\dot{x}$, получим на открытом множестве $\{\dot{y} \neq 0\} \subset J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ корепер $\{\omega, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \pi\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} d\dot{y} &= -\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \pi, \\ dy - \dot{y} d\tau &= \frac{1}{\dot{y}} \theta^2 - \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \theta^1. \end{aligned}$$

Используя эти равенства, легко подсчитать, что структурные уравнения системы (IV.e.53) имеют вид

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\pi \wedge \omega, \\ d\theta^2 &= \frac{\mu^2}{\dot{y}^2} \pi \wedge \theta^1 - \frac{\dot{x}}{\dot{y}^2} \pi \wedge \theta^3 + \omega \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.e.54})$$

где $\mu = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Таким образом, 1-формы θ^2, θ^3 порождают первую производную систему для системы (I, ω) .

Вернемся к нашей вариационной задаче. Мы предполагаем, что скорость лодки v удовлетворяет условию

$$v = \frac{ds}{dt} = c$$

(t — время, а c — некоторая постоянная). Таким образом, если положить

$$\varphi = dt = \frac{ds}{c} = \frac{\mu}{c} d\tau,$$

то мы хотим минимизировать функционал

$$\Phi(N) = \int_N \varphi$$

на интегральных многообразиях N системы (I, ω) , удовлетворяющих описанным выше граничным условиям. Следуя нашему

обычному предписанию, рассмотрим на многообразии $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^3$ 1-форму

$$\psi = \varphi + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2 + \lambda_3 \theta^3.$$

Ее дифференциал $\Psi = d\psi$ ввиду равенств (IV.e.54) представляет собой следующую 2-форму:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{\mu c} \theta^3 \wedge \omega + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha - \lambda_1 \pi \wedge \omega \\ & + \lambda^2 \left(\frac{\mu^2}{\dot{y}^2} \pi \wedge \theta^1 - \frac{\dot{x}}{\dot{y}^2} \pi \wedge \theta^2 + \omega \wedge \theta^3 \right). \end{aligned}$$

Система Картана порождается уравнениями Пфаффа (см. лемму (I.d.16))

$$\begin{aligned} \partial/\partial \lambda_\alpha \lrcorner \Psi &= \theta^\alpha = 0, \\ \partial/\partial \pi \lrcorner \Psi &\equiv \lambda_1 \omega = 0, \\ \text{(IV.e.55)} \quad \partial/\partial \theta^1 \lrcorner \Psi &\equiv -d\lambda_1 - \frac{\lambda_2 \mu^2}{\dot{y}^2} \pi = 0, \\ \partial/\partial \theta^2 \lrcorner \Psi &\equiv -d\lambda_2 + \frac{\lambda_2 \dot{x}}{\dot{y}^2} \pi = 0, \\ \partial/\partial \theta^3 \lrcorner \Psi &\equiv -d\lambda_3 + \left(\frac{1}{\mu c} - \lambda_2 \right) \omega = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что вдоль решений системы Эйлера—Лагранжа

$$\begin{aligned} \mu &= \text{const}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \pi = 0, \\ \lambda_2 &= \text{const}, \quad d\lambda_3 + \left(\lambda_2 - \frac{1}{\mu c} \right) \omega = 0. \end{aligned}$$

Мы заключаем, что на решениях системы (IV.e.55)

$$\begin{aligned} t &= \frac{s}{c}, \\ x &= \alpha s + \beta, \\ y &= \gamma s + \delta, \end{aligned}$$

чем и доказана справедливость нашего утверждения об оптимальном пути от точки A к точке B .

З а м е ч а н и е. Используемый в этом примере прием ведет к общему методу выбора специальной параметризации сравниваемых кривых в вариационных задачах.

Упрощенный пример 2. Представим теперь себе реку, текущую с постоянной скоростью c_1 , и лодку, скорость которой в стоячей воде постоянна и равна c_2 (рис. 55). Мы опять хотим определить путь от точки A до точки B , требующий наименьшего времени. Из опыта снова хорошо известно, что оптимальным путем будет прямая, что мы сейчас и докажем. Для этого представим себе реку как часть плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) , причем вектор скорости течения $V_1 = c_1 \partial/\partial x$. Если обозначить вектор скорости лодки через V , то мы имеем картину, представленную на рис. 56, где V_2 — направление, определяемое рулевым.

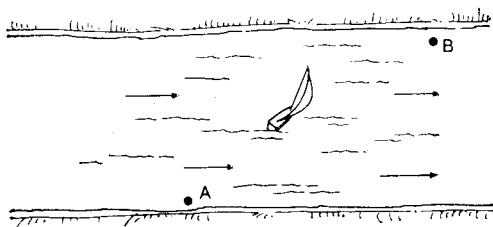


Рис. 55.

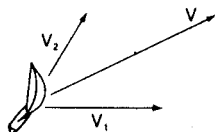


Рис. 56.

Чтобы поставить задачу математически, снова воспользуемся многообразием $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ с координатами $(\tau, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Тогда

$$V = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt},$$

то

$$V - V_1 = \left(\frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - c_1, \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right) = V_2.$$

Предположение, что лодка движется с постоянной скоростью c_2 по отношению к окружающей ее воде, записывается в виде

$$\|V_2\|^2 = \left(\frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - c_1 \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = c_2^2.$$

Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно функции $d\tau/dt$ и найдем его решение

$$d\tau/dt = f(\dot{x}, \dot{y}, c_1, c_2).$$

Заметим, что функция f однородна степени -1 по переменным $(\dot{x}, \dot{y})$. Если положить $L = 1/f$, то функция L будет однородна степени $+1$ по переменным $(\dot{x}, \dot{y})$ и

$$dt = L(\dot{x}, \dot{y}, c_1, c_2) d\tau.$$

Действуя, как и в предыдущем примере, мы хотим определить экстремали вариационной задачи $(I, \omega; \Phi)$, где система (I, ω)

определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^1 &= dx - \dot{x} d\tau = 0, \\ \tilde{\theta}^2 &= dy - \dot{y} d\tau = 0, \\ \tilde{\theta}^3 &= dL = 0, \\ \omega &= d\tau \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.e.56})$$

(заметим, что интегральные многообразия системы (I, ω) задаются 1-струями кривых, вдоль которых функция L постоянна), а

$$(\text{IV.e.57}) \quad \varphi = dt = L d\tau.$$

З а м е ч а н и е. В первом приближении мы могли бы рассматривать вариационную задачу $(\tilde{I}, \omega; \varphi)$, в которой $(\tilde{I}, \omega)$ — каноническая пфафова система на $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, задаваемая условиями $\tilde{\theta}^1 = \tilde{\theta}^2 = 0$, $\omega \neq 0$, а 1-форма φ задается равенством (IV.e.57). Однако, поскольку

$$L(\lambda \dot{x}, \lambda \dot{y}, c_1, c_2) = \lambda L(\dot{x}, \dot{y}, c_1, c_2),$$

то

$$\det \begin{vmatrix} L_{\dot{x}\dot{x}} & L_{\dot{x}\dot{y}} \\ L_{\dot{y}\dot{x}} & L_{\dot{y}\dot{y}} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и, следовательно, стандартная вариационная задача вырожденна. Вырожденность можно устранить, зафиксировав параметризацию, что мы и сделали.

Как и выше, удобно работать на открытом множестве, где $L_{\dot{y}} \neq 0$, и заменить образующие (IV.e.56) образующими

$$\begin{aligned} \theta^1 &= dx - \dot{x} d\tau = 0, \\ \theta^2 &= L_{\dot{x}}(dx - \dot{x} d\tau) + L_{\dot{y}}(dy - \dot{y} d\tau) = 0, \\ \theta^3 &= dL = 0, \\ \omega &= d\tau \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.e.58})$$

Заметив, что

$$(\text{IV.e.59}) \quad dL_{\dot{x}}, dL_{\dot{y}} \equiv 0 \bmod \{\pi, \theta^3\},$$

положим

$$\begin{aligned} \pi &= d\dot{x}, \\ dL_{\dot{x}} - \frac{L_{\dot{x}}}{L_{\dot{y}}} dL_{\dot{y}} &\equiv \alpha \pi \bmod \{\theta^\alpha\}, \\ \frac{dL_{\dot{y}}}{L_{\dot{y}}} &\equiv \beta \pi \bmod \{\theta^\alpha\}, \end{aligned}$$

где α, β — функции от $\dot{x}, \dot{y}$. Структурные уравнения для задачи $(I, \omega; \varphi)$ имеют вид

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\pi \wedge \omega, \\ d\theta^2 &\equiv \alpha\pi \wedge \theta^1 + \beta\pi \wedge \theta^2 + \omega \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \\ d\varphi &= \theta^3 \wedge \omega. \end{aligned} \quad (\text{IV.e.60})$$

Как и выше, используя (IV.e.60), убеждаемся, что дифференциальная система Эйлера-Лагранжа, ассоциированная с задачей $(I, \omega; \varphi)$, порождается уравнениями Пфаффа

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= 0, \\ \lambda_1 \omega &= 0, \\ (\text{IV.e.61}) \quad -d\lambda_1 - \lambda_2 \alpha \pi &= 0, \\ -d\lambda_2 - \lambda_2 \beta \pi &= 0, \\ -d\lambda_3 + (1 - \lambda_2) \omega &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вдоль общего (типичного) решения

$$\begin{aligned} L &= \text{const}, \lambda_1 = 0, \pi = 0, \\ \lambda_2 &= \text{const}, d\lambda_3 + (\lambda_2 - 1) \omega = 0. \end{aligned}$$

В частности,

$$\pi = d\dot{x} = -\frac{L_{\dot{y}}}{L_{\dot{x}}} d\dot{y} = 0,$$

откуда и следует, что экстремали — прямые.

У п р о щ е н н ы й п р и м е р. 3. Здесь ситуация та же, что и в упрощенном примере 2, только теперь течение задается векторным полем

$$V_1 = f(y) \partial/\partial x,$$

зависящим от переменной y . Мы по-прежнему ищем путь между точками A, B , требующий наименьшего времени. Покажем, что

(IV.e.62) *Связанная с этой задачей дифференциальная система Эйлера—Лагранжа интегрируема в квадратурах.*

Доказательство. Сохраним предыдущие обозначения. По предположению величина

$$(\text{IV.e.63}) \quad \|V_2\|^2 = \left(\frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - f(y(\tau)) \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right)^2 = c_2^2$$

постоянна. Обозначим через $1/L$ решение уравнения (IV.e.63), рассматриваемого как квадратное уравнение относительно $d\tau/dt$. Тогда

$$L = L(\dot{x}, \dot{y}, y, c_2),$$

$$L(\lambda\dot{x}, \lambda\dot{y}, y, c_2) = \lambda L(\dot{x}, \dot{y}, y, c_2).$$

Эти уравнения можно проинтегрировать в явном виде, следуя методу, изложенному в предыдущем примере. Однако проще рассуждать следующим образом. Рассмотрим классическую вариационную задачу с лагранжианом

$$\tilde{L}(\dot{x}, \dot{y}, y) = L(\dot{x}, \dot{y}, y, c_2)^v \quad (v \neq 1).$$

Легко видеть, что для общего v эта вариационная задача невырождена и что гамильтониан

$$H = (v - 1) \tilde{L}$$

является первым интегралом. Далее, так как координата x циклическая, то функция

$$W = \tilde{L}_x$$

дает еще один первый интеграл. Отсюда следует, что эта классическая вариационная задача интегрируема в квадратурах. Но по тем же причинам, что и в примере (II.a.23), ее экстремали совпадают с экстремалими классической вариационной задачи с лагранжианом L . $\square$

Обсуждение примера (IV.e.51). Те же рассуждения, что и в упрощенном примере 1, показывают, что оптимальными траекториями самолета при отсутствии воздушных течений являются большие окружности.

Предположим теперь, что воздушные потоки задаются векторным полем на сфере S^2 , инвариантным относительно поворотов вокруг оси, проходящей через северный и южный полюсы. Тогда соответствующая вариационная задача об оптимальном пути полета допускает инфинитезимальную симметрию. Поэтому рассуждение из упрощенного примера 3 можно непосредственно приспособить к рассматриваемому случаю и показать, что экстремали данной вариационной задачи совпадают с экстремалими классической вариационной задачи на сфере S^2 , задаваемой невырожденным не зависящим от времени лагранжианом, допускающим инфинитезимальную симметрию. Как и выше, эта задача интегрируема в квадратурах.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРИМЕРЫ

а. Задачи с интегральными ограничениями. Примеры

Рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$ на некотором многообразии X . Таким образом, нам задана дифференциальная система (I, ω) на X , и мы имеем дело с функционалом

$$(\text{Пр. а.1}) \quad \Phi : \mathcal{Y}(I, \omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

где через $\mathcal{Y}(I, \omega)$ обозначено множество интегральных многообразий системы (I, ω) , определенным равенством

$$\Phi(N) = \int_N \varphi$$

(φ — заданная дифференциальная форма на X). Часто возникает задача минимизации функционала (Пр. а.1) при условии, что интегральные многообразия подчинены некоторому набору *интегральных ограничений*

$$(\text{Пр. а.2}) \quad \Xi_p(N) = \int_N \xi_p = \text{const},$$

где ξ_p — дифференциальные формы на многообразии X . Конечно, здесь следует точно определить граничные условия, налагаемые на многообразия N , однако мы пока не будем обращать на это внимания, а просто будем действовать формально. Будем также предполагать, как обычно, что число независимых переменных (т. е. степень формы ω) равно единице.

Напомним, что система Эйлера—Лагранжа, ассоциированная с задачей (Пр. а.1), получается следующим образом (см. разд. е гл. I). Мы предполагаем, что система (I, ω) является пфафовой дифференциальной системой

$$\theta^1 = \dots = \theta^s = 0, \quad \omega \neq 0,$$

и рассматриваем на многообразии $Z = X \times \mathbb{R}^s$ дифференциальные формы

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha, \\ \Psi &= d\psi. \end{aligned}$$

Система Эйлера—Лагранжа (J, ω) была определена нами как ограничение на пространство моментов $Y \subset Z$ системы Картана $(\mathcal{C}(\Psi), \omega)$. Главный результат состоял в том, что (по крайней мере формально) интегральные многообразия $N \in \mathcal{V}(I, \omega)$, удовлетворяющие условию

$$(\text{Пр.а.3}) \quad \delta\Phi(N) = 0,$$

находятся во взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями системы (J, ω) на пространстве импульсов Y . Наконец, в разд. а гл. IV мы обсудили граничные условия и объяснили, как следует точно понимать равенство (Пр.а.3).

Обозначим теперь через $\mathcal{V}(I, \omega; \xi_\rho) \subset \mathcal{V}(I, \omega)$ множество интегральных многообразий системы (I, ω) , удовлетворяющих ограничениям (Пр.а.2). Мы можем рассматривать $\mathcal{V}(I, \omega; \xi_\rho)$ как конечномерное подмногообразие бесконечномерного многообразия $\mathcal{V}(I, \omega)$. Тогда дифференциал функционала $\Phi|_{\mathcal{V}(I, \omega; \xi_\rho)}$ представляет собой ограничение первой вариации $\delta\Phi$ на подпространство $\delta\Xi = 0$ пространства $T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$. Поэтому

Условие $\delta\Phi(N) = 0$ на многообразии $N \in \mathcal{V}(I, \omega; \xi_\rho)$ выражается в виде

$$(\text{Пр.а.4}) \quad (\delta\Phi + \mu^\rho \delta\Xi_\rho)(N) = 0,$$

где μ^ρ — постоянные.

В соответствии с этим положим $\tilde{X} = X \times \mathbb{R}^t$ (с координатами $(\mu^1, \dots, \mu^t)$ в $\mathbb{R}^t$) и рассмотрим на $\tilde{X}$ пфаффову дифференциальную систему $(\tilde{I}, \omega)$, задаваемую 1-формами

$$\theta^1 = \dots = \theta^s = d\mu^1 = \dots = d\mu^t = 0, \quad \omega \neq 0.$$

Далее рассмотрим на X вариационную задачу $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$, где

$$(\text{Пр.а.5}) \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \mu^\rho \xi_\rho,$$

и построим для нее систему Эйлера—Лагранжа $(\tilde{J}, \omega)$ на пространстве моментов $\tilde{Y}$, как в разд. е гл. II. Ясно, что (если уделить соответствующее внимание граничным условиям, как в разд. а гл. IV)

(Пр.а.6) *Интегральные многообразия $N \in \mathcal{V}(I, \omega; \xi_\rho)$, удовлетворяющие уравнениям Эйлера—Лагранжа (Пр.а.4), находятся во взаимно-однозначном соответствии с интегральными многообразиями системы (J, ω) .*

(Пр.а.7) ПРИМЕР. Пожалуй, старейшей задачей вариационного исчисления является *изопериметрическая задача Паппа:*

Среди всех кривых N , соединяющих две точки A, B оси x и ограничивающих вместе с отрезком AB область заданной площади, найти кривую наименьшей длины (рис. 57).

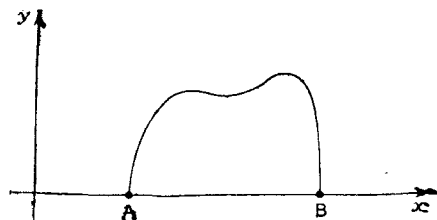


рис. 57.

При обсуждении этой задачи будем для простоты рассматривать лишь такие кривые, которые являются графиками $x \mapsto (x, y(x))$ функций $y(x)$, а в конце укажем, как быть в общем случае. Таким образом, мы имеем следующую ситуацию

на многообразии $X = J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с координатами $(x, y, \dot{y})$:

$$\theta = dy - \dot{y} dx = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0,$$

$$\varphi = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx,$$

$$\xi = y dx,$$

ибо, очевидно, длина кривой N равна

$$\Phi(N) = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx,$$

а площадь, ограниченная кривой N и отрезком AB , —

$$\Xi(N) = \int_A^B y(x) dx.$$

Следуя нашему предписанию, рассмотрим на многообразии $\tilde{X}$ с координатами $(x, y, \dot{y}, \mu)$ вариационную задачу, определяемую данными

$$\theta^1 = dy - \dot{y} dx = 0,$$

$$\theta^2 = d\mu = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0,$$

$$\tilde{\varphi} = \tau + \mu \xi.$$

Для 1-формы

$$\tilde{\psi} = \tilde{\varphi} + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2$$

2-форма $\tilde{\Psi} = d\tilde{\psi}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} d\dot{y} \wedge dx + \mu \theta^1 \wedge dx + d\lambda_1 \wedge \theta^1 + \\ + d\lambda_2 \wedge \theta^2 - \lambda_1 d\dot{y} \wedge dx. \end{aligned}$$

Система Картана $\mathcal{C}(\tilde{\Psi})$ порождается уравнениями Пфаффа

$$(i) \partial/\partial \dot{y} \rfloor \tilde{\Psi} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} - \lambda_1 \right) dx = 0,$$

$$(Пр.а.8) \quad (ii) \partial/\partial \theta^1 \rfloor \tilde{\Psi} = -d\lambda_1 + \mu dx = 0,$$

$$(iii) \partial/\partial \theta^2 \rfloor \tilde{\Psi} = -d\lambda_2 = 0,$$

$$(iv) \partial/\partial \lambda_1 \rfloor \tilde{\Psi} = \theta^1 = 0,$$

$$(v) \partial/\partial \lambda_2 \rfloor \tilde{\Psi} = \theta^2 = 0.$$

Из первого уравнения следует, что подмногообразие $Z_1 \subset \tilde{Z}$ задается уравнением

$$\lambda_1 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}.$$

Разрешив это уравнение относительно $\dot{y}$, получим

$$\dot{y} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}.$$

Выберем на многообразии $\tilde{Z}_1$ корепер $\{dx, \theta^1, \theta^2, d\lambda_1, d\lambda_2\}$; система Картана в точках $p \in \tilde{Z}_1$ выглядит так:

$$\eta_1 = d\lambda_1 - \mu dx = 0,$$

$$\eta_2 = d\lambda_2 = 0,$$

$$\theta^1 = 0,$$

$$\theta^2 = 0$$

(это линейные уравнения в *объемлющем касательном пространстве* $T_p(\tilde{Z})$. Так как набор 1-форм $\{dx, \theta^1, \theta^2, \eta_1, \eta_2\}$ также можно принять за корепер на $\tilde{Z}_1$, то существуют интегральные элементы системы $(\mathcal{C}_1(\tilde{\Psi}), \omega)$, *касающиеся* многообразия $\tilde{Z}_1$, т. е.

$$\tilde{Y} = \tilde{Z}_1.$$

Мы утверждаем, что вариационная задача $(\tilde{I}, \omega)$, на многообразии $\tilde{X}$ невырожденна. Действительно,

$$\tilde{\Psi}\tilde{Y} = \tilde{L}dx + \lambda_1\theta^1 + \lambda_2\theta^2, \quad \tilde{L} = \sqrt{1+\dot{y}^2} + \mu y,$$

$$\tilde{\Psi}\tilde{Y} = \eta_1 \wedge \theta^1 + \eta_2 \wedge \theta^2.$$

Следовательно,

$$\tilde{\Psi}\tilde{Y} \wedge (\tilde{\Psi}\tilde{Y})^2 \neq 0;$$

откуда и следует невырожденность.

В координатах $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ на пространстве моментов $\tilde{Y}$ система Эйлера—Лагранжа имеет вид (в выражении для $\dot{y}$ мы берем знак плюс)

$$(i) \eta_1 = d\lambda_1 - \mu dx = 0,$$

$$(ii) \eta_2 = d\lambda_2 = 0,$$

$$(iii) \theta^1 = dy - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} dx = 0,$$

$$(iv) \theta^2 = d\mu = 0.$$

Проинтегрируем эту систему:

$$dy = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} \quad (\text{в силу (i) и (ii)}),$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2} - \alpha \quad (\alpha = \text{const}),$$

$$\frac{\lambda_1}{\mu} = x + \beta \quad (\beta = \text{const}),$$

откуда

$$(\text{Пр.а.9}) \quad y(x) = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - (x + \beta)^2} - \alpha.$$

Чтобы определить постоянные, предположим, что $A = -1$, $B = +1$. Тогда $\beta = 0$ и $\alpha = \sqrt{1 - \mu^2}/\mu$. Поэтому из формулы (Пр.а.9) получаем

$$(y + \alpha)^2 + x^2 = \frac{1}{\mu^2}.$$

Это — семейство окружностей с центрами на оси y . Теперь можно подобрать значение μ , дающее нужную площадь.

З а м е ч а н и я. i) Если отбросить предположение о том, что кривая N является графиком, то задачу надо ставить в параметрической форме на многообразии $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ с координатами $(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$:

$$\theta^1 = dx - \dot{x} dt = 0,$$

$$\theta^2 = dy - \dot{y} dt = 0,$$

$$\omega = dt \neq 0,$$

$$\varphi = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

$$\xi = (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

ii) Про любую вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$ можно спросить, не является ли она результатом наложения интегральных ограничений на другую задачу. Необходимое условие состоит в том, чтобы производная система I_* была отлична от нуля (см. разд. с гл. I). По теореме Фробениуса система I_* порождается локально уравнениями $d\mu^1 = \dots = d\mu^t = 0$ для функций $\mu^1, \dots, \mu^t$, и эти функции — кандидаты на роль постоянных μ^0 в равенстве (Пр.а.4).

Теперь интересно посмотреть, как вкладывается задача Паппа в общую теорию, развитую в гл. IV. Мы i) покажем, что эта задача хорошо поставлена, ii) покажем, что она сильно невырождена, и iii) исследуем поведение сопряженных точек.

В координатах $(x, y, \mu, \lambda_1, \lambda_2)$ на пространстве импульсов $\tilde{Y}$ имеем

$$\theta^1 = dy - \frac{\lambda_1 dx}{\sqrt{1 - \lambda_1^2}},$$

$$\theta^2 = d\mu,$$

$$\omega = dx.$$

Таким образом, распределение $K^* = \text{span} \{\omega, \theta^1, \theta^2\} = \text{span} \{dx, dy, d\mu\}$ вполне интегрируемо, и в приведенном пространстве импульсов

$$\tilde{Q} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

можно ввести координаты (x, y, μ) . Пфаффова дифференциальная система $(\tilde{G}, \omega)$ на многообразии $\tilde{Q}$, которая поднимается в первую производную систему для системы $(\pi^* \tilde{I}, \omega)$ на пространстве импульсов Y , имеет вид

$$d\mu = 0, \quad dx \neq 0.$$

Интегральные кривые $\tilde{N} \subset \tilde{Y}$ системы $(\pi^* \tilde{I}, \omega)$ проектируются в интегральные кривые γ системы $(\tilde{G}, \omega)$ на многообразии $\tilde{Q}$.

Такую кривую можно изобразить, как на рис. 58. Она задается параметрически отображением

$$x \mapsto (x, y(x), \mu = \text{const}),$$

где $x \mapsto (x, y(x))$ — изображенная на рисунке кривая γ . Граничные условия (IV.a.9) для семейства $\tilde{N}_t$ интегральных многообразий $x \mapsto (x, y(x, t), \mu(t))$ таковы:

$$dy(A, t) = dy(B, t) = d\mu(t) = 0.$$

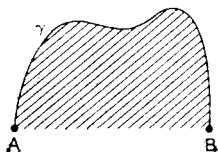


Рис. 58. μ — площадь заштрихованной области.

Это означает в точности, что концы кривой γ и ограничиваемая ею площадь постоянны. Таким образом, наша вариационная задача есть хорошо поставленная задача с правильными граничными условиями.

Чтобы проверить, что она сильно невырождена, рассмотрим исходную вариационную задачу $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ в пространстве переменных $(x, y, \dot{y}, \mu)$. Таким образом, система $(\tilde{I}, \omega)$ является пфафовой дифференциальной системой

$$\theta^1 = dy - \dot{y} dx = 0,$$

$$\theta^2 = d\mu = 0,$$

$$\omega = dx \neq 0$$

и

$$\tilde{\varphi} = L\omega,$$

где

$$L = \sqrt{1 + \dot{y}^2} + \mu \dot{y}.$$

Первая производная система имеет вид $\theta^2 = 0$, $\omega \neq 0$. Следовательно, удовлетворены структурные уравнения (I.e.28), в которых

$$\pi = \pi^1 = d\dot{y}.$$

Полагая

$$K^* = \text{span} \{ \omega, \theta^1, \theta^2 \} = \text{span} \{ dx, dy, d\mu \},$$

получаем

$$dL \equiv \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \pi \bmod K^*,$$

$$d \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) \equiv \frac{\pi}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \bmod K^*.$$

Таким образом, в обозначениях разд. е гл. I,

$$A_\mu = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \quad (\text{вектор с одной компонентой}),$$

$$\|A_{\mu\nu}\| = \frac{1}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (\text{матрица размера } 1 \times 1),$$

и, следовательно, вариационная задача $(\tilde{I}, \omega; \tilde{\varphi})$ сильно невырождена.

Перейдем, наконец, к уравнениям Якоби. Это уравнения в вариациях для системы Эйлера—Лагранжа

$$\theta^1 = dy - \frac{\lambda_1 dy}{\sqrt{1-\lambda_1^2}} = 0,$$

$$\theta^2 = d\mu = 0,$$

$$\eta_1 = d\lambda_1 - \mu dx = 0,$$

$$\eta_2 = d\lambda_2 = 0$$

на пространстве импульсов $\tilde{Y}$. Если рассмотреть поле

$$V = \alpha \partial / \partial \theta^1 + \beta \partial / \partial \theta^2 + \gamma \partial / \partial \eta_1 + \delta \partial / \partial \eta_2,$$

то уравнения Якоби для $V(x)$ вдоль интегральной кривой $\tilde{\Gamma}$ системы $(\tilde{J}, \omega)$, где $A = -1$, $B = 1$ и $\lambda_1 = \mu x$, имеют вид

$$d\alpha - \frac{\gamma dx}{(1 - \mu^2 x^2)^{3/2}} \equiv 0 \bmod \tilde{\Gamma},$$

$$d\beta \equiv 0 \bmod \tilde{\Gamma},$$

$$d\gamma - \beta dx \equiv 0 \bmod \tilde{\Gamma},$$

$$d\delta \equiv 0 \bmod \tilde{\Gamma}.$$

Чтобы узнать, существуют ли сопряженные точки, нам надо найти решения этих уравнений, определенные при $-1 \leq x \leq +1$ и удовлетворяющие условиям

$$\alpha(-1) = \alpha(1) = \beta(-1) = \beta(1) = 0.$$

Эти условия дают

$$\beta = 0, \gamma = c = \text{const},$$

$$\alpha'(x) = \frac{c}{(1 - \mu^2 x^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя второе уравнение, получаем

$$\alpha(x) = \frac{cx}{\sqrt{1 - \mu^2 x^2}} + c'.$$

Граничные условия

$$\alpha(-1) = \alpha(1) = 0$$

дают

$$c = c' = 0.$$

Таким образом, $V \equiv 0$, и сопряженных точек нет.

На основании теоремы (IV.d.1) мы заключаем, что локальный минимум в задаче Паппа доставляет полуокружность (рис. 59).

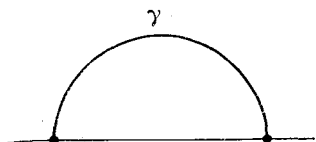


Рис. 59.

На самом деле, используя E -функцию Вейерштрасса и опираясь на отсутствие сопряженных точек, можно показать, что она дает и глобальный минимум в задаче Паппа (см. [5], [13]).

(Пр.а.10) ПРИМЕР. Рассмотрим, как и в примере (I.d.27),

вариационную задачу, соответствующую функционалу

$$(\text{Пр.а.11}) \quad \Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \kappa^2(s) ds, \quad \gamma \subset \mathbb{E}^2,$$

с интегральным ограничением

$$(\text{Пр.а.12}) \quad \Xi(\gamma) = \int_{\gamma} ds = l,$$

означающим, что длина кривой γ постоянна (см. рис. 9). Следуя указанной в (Пр. а.6) процедуре и используя обозначения примера (I.d.27), получаем

$$\theta^1 = \omega^2 = 0,$$

$$\theta^2 = \omega_1^2 - \kappa \omega = 0,$$

$$\theta^3 = d\mu = 0,$$

$$\omega = \omega^1 \neq 0$$

$$\tilde{\varphi} = \left(\frac{\kappa^2}{2} + \mu \right) \omega.$$

Вывод уравнений Эйлера—Лагранжа, проделанный в указанном примере, приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\text{Пр.а.13}) \quad \frac{d^2 \kappa}{ds^2} + \left(\frac{\kappa^3}{2} - \kappa \mu \right) = 0.$$

Сопоставляя это уравнение с обсуждением, проведенным в примере (I.d.27), приходим к следующему интересному заключению:

Уравнения Эйлера—Лагранжа для функционала (Пр.а.11), определенного на кривых $\gamma \subset \mathbb{E}^2$, удовлетворяющих ограничению (Пр.а.12), совпадают с уравнениями Эйлера—Лагранжа для функционала (Пр.а.11), определенного на кривых на поверхности постоянной кривизны μ .

Чтобы решить эти уравнения, представим кривизну κ в виде эллиптической функции $\kappa(s, \mu)$, зависящей от параметра μ и выберем μ таким образом, чтобы кривая, определяемая функцией $\kappa(s, \mu)$ (см. рис. 9), имела между точками α, α' и β, β' заданную длину l . Соответствующая картинка выглядит приблизительно так, как на рис. 60.

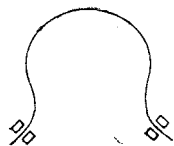


Рис. 60.

Как и в примере (I.d.27), поучительно нарисовать фазовый портрет уравнения (Пр.а.13). Следуя обозначениям примера (I.d.27), рассмотрим в фазовой плоскости с координатами (x, y) векторное поле

$$v = yd/\partial x + (\mu x - x^3/2) d/\partial y$$

с особыми точками $(0, 0)$ и $(0, \pm \sqrt{2\mu})$. Интегральные кривые поля v представляются вещественными точками алгебраических кривых

$$(\text{Пр.а.14}) \quad y^2 + \frac{x^4}{4} - \mu x^2 - c = 0.$$

Чтобы изобразить эти кривые, рассмотрим функции

$$f(x, c) = -\frac{x^4}{4} + \mu x^2 + c$$

и нарисуем их графики рядом с кривыми (Пр.а.14) (рис. 61). Мы видим, что семейство кривых (Пр.а.14) выглядит, как показано на рис. 62. В частности, при $c = -\mu^2$ у уравнения (Пр.а.13) есть два равновесных решения, задаваемых условиями

$$\kappa = \pm \sqrt{2\mu} = \text{const.}$$

Это дуги окружностей, и мы можем заключить, что при подходящих граничных условиях экстремали функционала (Пр.а.11) с ограничением (Пр.а.12) являются окружностями. Обсуждение, проведенное в примере (I.d.27), показывает, что это в точности случай, когда уравнение (Пр.а.13) можно проинтегрировать в элементарных (круговых) функциях.

график функции

$$f(x, c) = -\frac{x^4}{4} + \mu x^2 + c$$

кривая

$$y^2 = -\frac{x^4}{4} - \mu x^2 + c$$

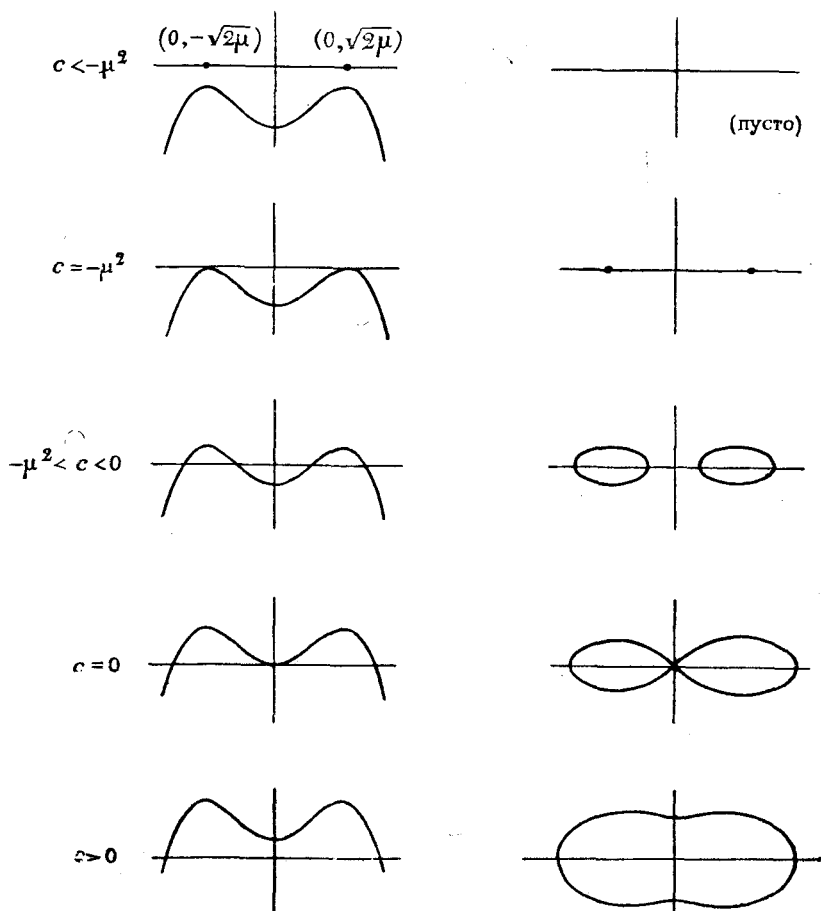


Рис. 61.

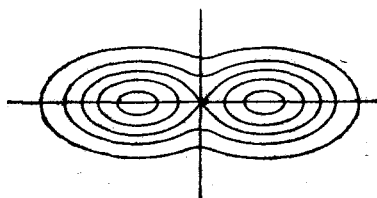


Рис. 62.

б. Некоторые классические задачи, рассмотренные методом подвижных реперов

К числу классических задач вариационного исчисления относятся задачи о ньютоновом движении (при использовании принципа наименьшего действия), о брахистохроне и о минимальной поверхности вращения. Вторую и третью из этих задач мы уже комментировали (см. примеры (IV.e.17) и (IV.b.41)), но стоит рассмотреть эти задачи и методом подвижных реперов. При этом оказывается, что инвариантно выраженные с л е д с т в и я уравнений Эйлера—Лагранжа (т. е. результаты, в которых фигурируют кривизна и кручение) выводятся непосредственно и естественно, но чтобы действительно р е ш и т ь эти уравнения, нужно прибегнуть к традиционным методам анализа (разделение переменных и т. д.). На самом деле это утверждение более или менее очевидно, но представляет интерес проследить все детали рассуждений.

1. Движение по Ньютону

В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами $x = (x^1, x^2, x^3)$ положим $\rho = \|x\|$ и предположим, что нам задана потенциальная функция $U(\rho)$. Мы хотим изучить механическую систему с кинетической энергией $T = \|\dot{x}\|^2/2$ и потенциальной энергией U методом подвижных реперов. Будем следовать обозначениям и предписаниям разд. б гл. III. Рассмотрим на многообразии $X = \mathcal{F}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^6$ внешнюю дифференциальную систему, порожденную уравнениями Пфаффа (соответствующими реперам Френе кривых в $\mathbb{R}^3$)

$$\theta^1 = \omega^1 - p dt = 0,$$

$$\theta^2 = \omega^2 = 0,$$

$$\theta^3 = \omega^3 = 0,$$

$$(\text{Пр.б.1}) \quad \theta^4 = \omega_1^2 - q dt = 0,$$

$$\theta^5 = \omega_1^3 = 0,$$

$$\theta^6 = \omega_2^3 - r dt = 0,$$

$$\omega = dt \neq 0.$$

Непосредственно выводятся структурные уравнения

$$d\theta^1 \equiv -q\theta^2 \wedge dp - dp \wedge dt,$$

$$d\theta^2 \equiv q\theta^1 \wedge dt - p\theta^4 \wedge dt - r\theta^3 \wedge dt,$$

$$d\theta^3 \equiv -p\theta^5 \wedge dt + t\theta^2 \wedge dt,$$

$$(\text{Пр.б.2}) \quad d\theta^4 \equiv -r\theta^5 \wedge dt - dq \wedge dt,$$

$$d\theta^5 \equiv r\theta^4 \wedge dt - q\theta^6 \wedge dt,$$

$$d\theta^6 \equiv q\theta^5 \wedge dt - dr \wedge dt.$$

Положим на X

$$(Пр. b.3) \quad \varphi = \left(\frac{p^2}{2} - U(\rho) \right) dt$$

и рассмотрим вариационную задачу $(I, \omega; \varphi)$. Движение радиус-вектора $x(t) \in \mathbb{R}^3$ по решениям уравнений Эйлера—Лагранжа для этой задачи минимизирует функционал действия

$$(Пр. b.4) \quad \Phi = \int \left(\frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{2} - U(\|x(t)\|) \right) dt.$$

Как объясняется почти в любой книге по данному предмету (см. например, [1], [2]) и как уже отмечалось выше (см. (I.d.18), экстремали функционала (Пр. b.4) являются решениями уравнений Ньютона

$$(Пр. b.5) \quad \ddot{x}(t) - F(x(t)) = 0, \quad F = -\nabla U.$$

Следуя нашему обычному алгоритму (см. разд. е гл. I), положим $Z = X \times \mathbb{R}^6$ и рассмотрим на многообразии Z дифференциальные формы

$$\begin{aligned} (Пр. b.6) \quad (i) \quad \psi &= \varphi + \lambda_\alpha \theta^\alpha = \left(\frac{p^2}{2} - U(\rho) \right) dt + \lambda_\alpha \theta^\alpha, \\ (ii) \quad \Psi &= d\psi = p dp \wedge dt - \frac{U'(\rho)}{\rho} (dx, x) \wedge dt \\ &\quad + d\lambda_\alpha \wedge \theta^\alpha + \lambda_\alpha d\theta^\alpha. \end{aligned}$$

Система Картана $\mathcal{C}(\Psi)$ порождается уравнениями Пфаффа

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$(i) \quad \partial/\partial r \lrcorner \Psi \equiv -\lambda_6 dt = 0,$$

$$(ii) \quad \partial/\partial q \lrcorner \Psi \equiv -\lambda_4 dt = 0,$$

$$(iii) \quad \partial/\partial p \lrcorner \Psi \equiv (p - \lambda_1) dt = 0,$$

$$(iv) \quad \partial/\partial\theta^6 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_6 - q\lambda_5 dt = 0,$$

$$(v) \quad \partial/\partial\theta^5 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_5 + (q\lambda_6 - r\lambda_4 - p\lambda_3) dt = 0,$$

$$(Пр. b.7) \quad (vi) \quad \partial/\partial\theta^4 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_4 + (r\lambda_5 - p\lambda_2) dt = 0,$$

$$(vii) \quad \partial/\partial\theta^3 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_3 + \left(-r\lambda_2 - \frac{U'(\rho)}{\rho} (x, e_3) \right) dt = 0,$$

$$(viii) \quad \partial/\partial\theta^2 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_2$$

$$+ \left(r\lambda_3 - q\lambda_1 - \frac{U'(\rho)}{\rho} (x, e_2) \right) dt = 0,$$

$$(ix) \quad \partial/\partial\theta^1 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_1 + \left(q\lambda_2 - \frac{U'(\rho)}{\rho} (x, e_1) \right) dt = 0$$

(здесь символ « $\equiv$ » обозначает сравнение по модулю $\{\theta^\alpha\}$). Эти уравнения немедленно следуют из равенств (Пр.б.2), причем при выводе уравнений (vii)—(ix) используется сравнение

$$(dx, x) \equiv (\kappa, e_1) \theta^1 + (x, e_2) \theta^2 + (x, e_3) \theta^3 \bmod dt.$$

Конечно, система (Пр.б.7) выглядит несколько громоздко, но мы хотим подчеркнуть *алгоритмический* характер всей процедуры, которая может оказаться полезной и в других контекстах.

Так как экстремали функционала не являются прямыми (за исключением случая $U = \text{const}$), то кривизна

$$(\text{Пр.б.8}) \quad \kappa = q/p^2 \neq 0.$$

Тогда уравнения (i), (iv), (ii), (v), (vi) дают соответственно

$$\lambda_6 = \lambda_5 = \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = 0,$$

и, что интереснее, уравнение (ii) дает

$$\frac{U'(\rho)}{\rho} (x, e_3) = 0.$$

Отбрасывая случай $U = \text{const}$, получаем

$$(x, e_3) = 0.$$

Как хорошо известно, любая кривая в пространстве $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая этому уравнению, лежит в некоторой плоскости (напомним, что e_3 обозначает бинормаль). [Доказательство. Пусть штрих обозначает производную по длине дуги, а τ — кручение. Дифференцируя равенство $(x, e_3) = 0$ и используя уравнения Френе, получаем

$$0 = (x', e_3) - \tau (x, e_2) = -\tau (x, e_2)$$

(так как $x' = e_1$). Если $\tau \neq 0$, то $(x, e_2) = 0$ и

$$0 = (x', e_2) + (x, -\kappa e_1 + \tau e_3) = -\kappa (x, e_1).$$

Таким образом, $(x, e_1) = 0$, откуда

$$0 = (x', e_1) + (x, \kappa e_2) = (e_1, e_1),$$

— противоречие.] Итак, решения уравнений (Пр.б.5) — плоские кривые. Из (iii) и (viii) находим выражение для кривизны:

$$(\text{Пр.б.9}) \quad \kappa = \frac{1}{p^2} (F, e_2), \quad p = \|\dot{x}\| \text{ (скорость),}$$

— хорошо известное (но не так уж часто выписываемое) свойство движения в поле центральных сил (см. [66]). Наконец, из (ix) следует, что

$$(\text{Пр.б.10}) \quad \dot{p} = (F, e_1).$$

Таким образом, равенства (Пр.б.9) и (Пр.р.10) дают интерпретацию нормальной и тангенциальной компонент силового поля на решении уравнений (Пр.б.5).

Хорошо известно также, что теорема Нётер доставляет еще два первых интеграла (в дополнение к $\tau = 0$). Во-первых, векторное поле $v = \partial/\partial t$ определяет очевидную инфинитезимальную симметрию задачи $(I, \omega; \varphi)$ с первым интегралом

$$H = v \lrcorner \psi = - \left(\frac{p^2}{2} + U(\rho) \right)$$

(здесь следует учесть равенства $\lambda_0 = \dots = \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = \rho$). Таким образом, полная энергия

$$E = -H$$

постоянна на решениях системы (Пр.б.6). Во-вторых, симметрия относительно поворотов вокруг начала координат в $\mathbb{R}^2$ дает сохранение момента количества движения. Теперь у нас достаточно первых интегралов, чтобы заключить, что *уравнения Эйлера—Лагранжа, ассоциированные с уравнениями (Пр.б.4), алгебраически интегрируемы в квадратурах*. Вопрос о нахождении явных «формул» сводится к вопросу, равен или не равен нулю род g алгебраических кривых, задающих фазовый портрет. (На самом деле терминология здесь не устоялась; можно условиться считать, что эллиптический или даже гиперэллиптический случай тоже приводят к «формулам».)

В любом случае для завершения рассуждений введем полярные координаты:

$$x = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

и предположим, что

$$(\text{Пр.А.б.11}) \quad U(\rho) = \frac{k}{\rho^m}, \quad 0 \neq m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда законы сохранения момента количества движения и полной энергии примут вид

$$\begin{aligned} \rho^2 \dot{\varphi} &= c_1, \\ \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{k}{\rho^m} &= \frac{c_2}{2}. \end{aligned}$$

Вместе они дают

$$\dot{\rho}^2 + \left(\frac{c_1^2}{\rho^2} + \frac{2k}{\rho^m} - c_2 \right) = 0.$$

При $m = 1, 2$ и общем наборе постоянных c_1, c_2 род алгебраической кривой

$$(\text{Пр.б.12}) \quad y^2 + \frac{c_1^2}{x^2} + \frac{2k}{x^m} - c_2 = 0$$

равен нулю, и уравнения Эйлера—Лагранжа можно проинтегрировать в элементарных функциях (ср. с рассуждением в конце примера (IV.d.22)). При $m = 1$ мы имеем дело с *кеплеровым движением*, и решения уравнения (Пр.б.5) представляют собой конические сечения. При традиционном подходе это доказывают непосредственным вычислением. Используя подход, развиваемый в настоящей книге, это можно установить следующим забавным способом — показав, что *в случае, когда в равенстве (Пр.б.11) $m = 1$, решениями уравнений Эйлера—Лагранжа, ассоциированных с функционалом (Пр.б.4), служат аффинные геодезические* (см. предложение (II.b.8)). Конечно, вычисления приводят к тому же самому результату, но, как нам кажется, они не слишком проясняют суть дела.

При $m = 3, -1, -2$ кривая (Пр.б.12) является эллиптической (случай $m = -1$ особенный, см. [66]), а в остальных случаях — гиперэллиптической.

2. Брахистохрона

Напомним, что задача о брахистохроне состоит в следующем: по заданным двум точкам A, B на плоскости определить такую кривую γ , соединяющую A с B , что время движения точечной массы по кривой γ под действием силы тяжести минимально (рис. 63). На рисунке вектор F изображает силу тяжести; таким образом, потенциальная энергия равна $-(x, F)$.

В соответствии с п. 2 разд. в гл. II будем описывать кривые $\gamma \subset \mathbb{E}^2$ их реперами Френе, рассматриваемыми как интегральные многообразия N дифференциальной системы

$$\theta^1 = \omega^2 = 0,$$

$$(\text{Пр.б.13}) \quad \theta^2 = \omega_1^2 - \kappa \omega,$$

$$\omega = \omega^1 \neq 0$$

на $\mathcal{F}(\mathbb{E}^2) \times \mathbb{R}$. Если обозначить через s длину дуги на кривой γ и через $s(t)$ — расстояние, пройденное частицей за время t , то скорость частицы равна

$$p(t) = ds(t)/dt.$$

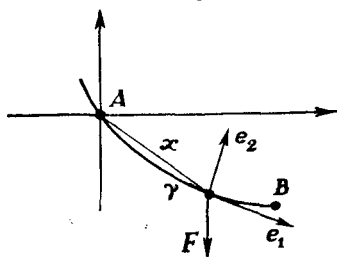


Рис. 63.

По закону сохранения полной энергии

$$\frac{p(t)^2}{2} - (x(t), F) = 0.$$

Таким образом, мы хотим минимизировать функционал

$$\Phi = \int_N \varphi,$$

где (опустим множитель $1/\sqrt{2}$)

$$\varphi = dt = ds/p = \frac{\omega}{V(x, F)}.$$

Для вывода уравнений Эйлера—Лагранжа рассмотрим дифференциальные формы

$$\psi = \varphi + \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2,$$

$$\Psi = d\psi.$$

Полагая $L = 1/\sqrt{(x, F)}$, получаем

$$\varphi = L\omega,$$

$$d\varphi = -\frac{L^3}{2}((e_1, F)\omega + (e_2, F)\theta^1) \wedge \omega - \kappa L\theta^1 \wedge \omega,$$

$$\Psi = d\varphi + d\lambda_1 \wedge \theta^1 + d\lambda_2 \wedge \theta^2 + \lambda_1 d\theta^1 + \lambda_2 d\theta^2,$$

где формы $d\theta^1, d\theta^2$ задаются формулами

$$d\theta^1 \equiv -\theta^2 \wedge \omega,$$

$$d\theta^2 \equiv -\pi \wedge \omega, \quad \pi = -d\kappa - \kappa^2 \theta^1$$

(см. п. 2 разд. в гл. II). Следуя обычной нашей процедуре, заключаем, что система Картана порождается уравнениям Пфаффа

$$\partial/\partial\lambda_\alpha \lrcorner \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$\partial/\partial\pi \lrcorner \Psi \equiv -\lambda\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^2 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_2 - \lambda_1\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^1 \lrcorner \Psi \equiv -d\lambda_1 - \left(\frac{L^3}{2}(e_2, F) + \kappa L\right)\omega = 0.$$

Отсюда $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$, а значит,

$$(\text{Пр.в.14}) \quad \kappa = -\frac{1}{2} \frac{(e_2, F)}{(x, F)}.$$

Если задать кривую γ в виде $(x_1, x_2(x_1))$, то, полагая $x'_2 = dx_2/dx_1$, $x''_2 = d^2x_2/dx_1^2$ и $Y = \sqrt{1 + (x'_2)^2}$, имеем

$$e_1 = \frac{(1, x'_2)}{Y},$$

$$e_2 = \frac{(-x'_2, 1)}{Y},$$

$$\kappa = \frac{x''_2}{Y^3},$$

и равенство (Пр.б.14) принимает вид

$$\frac{x'_2}{1 + (x'_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{x'_2}{x_2}.$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Интегрируя обе части, снова разделяя переменные и опять интегрируя, приходим к уравнению циклоиды (см. [13], [29]). Таким образом, равенство (Пр.б.14) дает интересное дифференциально-геометрическое описание циклоиды.

3. Минимальная поверхность вращения

Как и в предыдущем примере, будем использовать дифференциальную систему (Пр.б.13) на многообразии $\mathcal{F}(\mathbb{E}^2) \times \mathbb{R}$. Рассмотрим вектор $V = (0, 2\pi)$ (рис. 64) и положим

$$L = (x, V),$$

$$\varphi = L\omega$$

(так что L — это с точностью до коэффициента 2π вертикальная

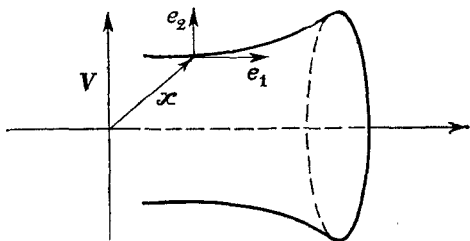


Рис. 64.

координата точки x). Задача о минимальной поверхности вращения соответствует вариационной задаче $(I, \omega; \varphi)$.

Действуя, как и прежде, получаем

$$\begin{aligned} \Psi \equiv & (e_2, V) \theta^1 \wedge \omega - \kappa(x, V) \theta^1 \wedge \omega + d\lambda_1 \wedge \theta^1 \\ & + d\lambda_2 \wedge \theta^2 - \lambda_1 \theta^2 \wedge \omega - \lambda_2 \pi \wedge \omega. \end{aligned}$$

Система Эйлера—Лагранжа порождается уравнениями

$$\partial/d\lambda_\alpha \rfloor \Psi = \theta^\alpha = 0,$$

$$\partial/\partial\pi \rfloor \Psi \equiv -\lambda_2\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^2 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_2 - \lambda_1\omega = 0,$$

$$\partial/\partial\theta^1 \rfloor \Psi \equiv -d\lambda_1 + ((e_2, V) - \kappa(x, V))\omega = 0.$$

Отсюда $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$, а значит,

$$(\text{Пр.б.15}) \quad \kappa = \frac{(e_2, V)}{(x, V)}.$$

Как уже отмечалось, решениями этого уравнения служат катеноиды (см. (IV.b.41)). И опять мы видим, что эти кривые характеризуются любопытным свойством кривизны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *R. Abraham, J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, 1978.*
- [2] *Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — Наука, 1979.*
- [3] *W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Vol. 1, Springer, 1929.*
- [4] *G. Bliss, The problem of Lagrange in the Calculus of variations, Amer. J. Math. 52 (1930), 673—744.*
- [5] *O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Kohler und Amelang, Leipzig 1909.*
- [6] *W. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, 1975.*
- [7] *R. W. Brockett, Lie theory and control systems defined on spheres, SIAM J. Appl. Math. 25 (1973), 213—225.*
- [8] *R. W. Brockett, Control theory and singular riemannian geometry, in: New Directions in Applied Mathematics (P. Hilton, C. Young, eds.), Springer Verlag, 1981, 11—27.*
- [9] *R. W. Brockett, Lie theory and Lie groups in control theory, in: Geometric Methods in Systems Theory (D. Mayne, R. Brockett, eds.), Reidel, 1973, 43—82.*
- [10] *R. Brockett, Finite Dimensional Linear Systems, Wiley, 1970.*
- [11] *R. Bryant, S. S. Chern, P. Griffiths, Exterior Differential Systems, Proc. Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, 1980.*
- [12] *R. Bryant, S. S. Chern, R. Gardner, P. Griffiths, Essays on Exterior Differential Systems, to appear.*
- [13] *C. Caratheodory, Calculus of variations and Partial Differential Equations of the First Order (2 Volumes), Holden-Day, 1965/67.*
- [14] *C. Caratheodory, Die methode der geodätischen Äquidistanten und das Problem von Lagrange, Acta Math., 47 (1926), 199—236.*
- [15] *E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1946. [Имеется перевод 1-го издания: Картан Э. Геометрия римановых пространств. — М.—Л.: Гостехиздат, 1936.]*
- [16] *Картан Э. Интегральные инварианты. — М.—Л.: Гостехиздат, 1940.*
- [17] *Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1962.*
- [18] *E. Cartan, La Theorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, Gauthiers-Villars, Paris, 1937. [Имеется перевод в кн.: Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. — М.: Изд-во МГУ, 1963.]*
- [19] *E. Cartan, Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, Paris, 1952.*
- [20] *L. Cesari, Existence theorems for optimal solutions in Lagrange and Pontryagin problems, SIAM J. Control, 1965, 475—498.*
- [21] *J. Cheeger, D. Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry, North-Holland, 1975.*
- [22] *S. S. Chern, Studies in Global Geometry and Analysis, No. 4, Prentice-Hall, 1967.*
- [23] *Y. Choquet-Bruhat, Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Dunod Paris, 1968.*
- [24] *W. L. Chow, Über Systeme von linearen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Ann. 117 (1940), № 1, 98—105.*
- [25] *R. Courant, Calculus of Variations and Supplementary Notes and Exercises, Notes from NIU.*

- [26] *P. Dedecker*, Calcul des variations, formes différentielles et champs géodésiques in: Géométrie différentielles, Colloq. Int. de la Recherche Sci., Strassbourg, 1953, 17—34.
- [27] *Th. DeDonder*, Théorie invariante du calcul des variations, Gauthier-Villars, Paris, 1935.
- [28] *M. DoCarmo*, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976.
- [29] *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961.
- [30] *H. Gluck*, The converse to the four-vertex theorem, Enseignement Math., 17 (1971), 295—309.
- [31] *H. Goldschmidt, S. Sternberg*, The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 203—267.
- [32] *E. Goursat*, Leçons sur le Problème de Pfaff, Herman, Paris, 1922.
- [33] *E. Goursat*, Leçons sur l'Intégration des Équations Partielles du Première. Ordre, Herman, Paris, 1921.
- [34] *M. Green*, The Moving frame, differential invariants and rigidity theorems for curves in homogeneous spaces, Duke J. Math. 45 (1978), 735—780.
- [35] *P. Griffiths*, On Cartan method of Lie groups and moving frames as applied to existence and uniqueness questions in differential geometry, Duke J. Math. 41 (1974), 775—814.
- [36] *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. В 2-х т. — М.: Мир, 1982.
- [37] *J. Hadamar*, Leçons sur les Calcul des Variations, Herman, Paris, 1940.
- [38] *R. Hermann*, Differential Geometry and the Calculus of Variations, 2nd ed., Math. Sci. Press, 1977.
- [39] *R. Hermann*, Geodesics of singular Riemannian metrics, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 780—782.
- [40] *R. Hermann*, Some differential geometric aspects of the Lagrange variational problem, Ill. J. Math. 6 (1962), 634—673.
- [41] *R. Hermann, C. Martin*, Lie Theoretic Aspects of the Ricatti Equation, Proc. of the 1977 CDC Conference, New Orleans, LA.
- [42] *R. Hermann*, E. Cartan's geometric theory of partial differential equations, Adv. Math. 1 (1965), 265—317.
- [43] *R. Hermann*, Cartanian Geometry, Nonlinear Waves, and Control Theory. Part A, Math. Sci. Press, 1979.
- [44] *G. Jensen*, Higher Order Contact of Submanifolds of Homogeneous Spaces, Springer, 1977.
- [45] *F. John*, Partial Differential Equations, Springer, 1971.
- [46] *V. Jurdjevic, I. Kupka*, Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces, Ann. Institut Fourier 31 (1981), 151—180.
- [47] *E. Kähler*, Einführen in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Hamburger Math. Einz. 16 (1934).
- [48] *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру. — М.: ИЛ, 1959.
- [49] *Клингенберг В.* Лекции о замкнутых геодезических. — М.: Мир, 1982.
- [50] *B. Kostant*, Quantization and unitary representations, in: Lectures in Modern Analysis and Applications III (C. T. Taam, ed.), Springer, Lect. Notes in Math., 170, 1970, 87—208.
- [51] *P. Li, S. T. Yau*, A New Conformal Invariant and its Applications to the Wilmore conjecture and the first Eigenvalue of compact surfaces, to appear.
- [52] *P. Lieberman*, Pfaffian systems and transverse differential geometry, in: Differential Geometry and Relativity (Cahen and Flato, eds.); Reidel, 1976, 107—126.
- [53] *Милнор Дж.* Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
- [54] *M. Morse*, The Calculus of Variations in the Large, A. M. S. Colloquium Publ. No. 18, 1934.

- [55] *E. Noether*, Invariante Variationsprobleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1918), 235—257. [Имеется перевод: Нётер Э. Инвариантные вариационные задачи. — В сб.: Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959, с. 611—630.]
- [56] *B. O'Neill*, Elementary Differential Geometry, Academic Press, 1966.
- [57] *J. Radon*, Zum Problem von Lagrange, Hamburger Math. Einz., Teubner, Leipzig, 1928.
- [58] *H. Rund*, The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations, D. van Nostrand, 1966.
- [59] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — М.: Наука, 1972.
- [60] *I. Singer, S. Sternberg*, The infinite groups of Lie and Cartan, J. d'Analyse Math. 15 (1965) 1—114.
- [61] *J.-M. Souriau*, Structure des Systèmes Dynamics, Dunod, Paris, 1970.
- [62] *D. C. Spencer*, Overdetermined systems of linear partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 179—239.
- [63] *M. Spivak*, Differential Geometry (5 volumes), Publish or Perish, 1970.
- [64] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.
- [65] *H. Weyl*, Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals, Ann. Math. 36 (1935), 607—629.
- [66] *E. T. Whittaker*, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1937. [Имеется перевод 1-го издания: Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. — М.—Л., Гостехиздат, 1937.]
- [67] *T. J. Willmore*, Note on embedded surfaces, Anal. Ştiinţifice ale Univ., Iaşi, Sect. I. a, Math. 11 (1965), 493—496.

ДОБАВЛЕНИЕ

А. М. Вершик, В. Я. Гершкович

НЕГОЛОНОМНЫЕ ЗАДАЧИ И ГЕОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. Введение

Пусть X есть C^∞ -многообразие, на котором задано гладкое распределение, т. е. семейство гладко зависящих от точки векторных подпространств $V = \{V_x\}$, $x \in X$, $V_x \subset T_x$, где T_x — касательное пространство к X в точке x (см. гл. 0 основного текста). В наиболее простом случае, когда многообразие X разбивается на слои и каждое V_x есть касательное подпространство к слою, проходящему через точку x , распределение V называется интегрируемым или голономным. Гораздо более интересны и важны неинтегрируемые или неголономные распределения, для которых такого разбиения на слои не существует. Неголономные распределения — случай общего положения в пространстве распределений; они часто встречаются в различных областях математики. Простейший такой пример — распределение в $\mathbb{R}^3$, натянутое на два векторных поля $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\xi_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$. Его

можно задать также как аннулятор 1-формы $x_1 dx_2 + dx_3$ (эта форма задает контактную структуру на $\mathbb{R}^3$). Кривая на многообразии, касательный вектор в каждой точке которой принадлежит подпространству распределения, называется допустимой или согласованной с распределением. Геометрические, вариационные, механические и др. задачи, в которых требуется изучить поведение таких кривых, а также исследовать свойства самого неголономного распределения, составляют предмет соответственно неголономной геометрии, вариационного исчисления, механики и т. д.

Различие между голономными и неголономными теориями не всегда резко очерчено. Например, в данной книге Гриффитса, как и ранее в работах Э. Картана, обычная задача вариационного исчисления ставится как условная на многообразии 1-струй; точнее, структура пространства 1-струй задается с помощью некоторого распределения. Вообще же, хотя граница между условными и безусловными экстремальными задачами условна

и задачу без ограничений можно рассматривать в некотором большем пространстве (или в том же пространстве с менее богатой структурой) как задачу с ограничениями, в ряде случаев существуют «инвариантные» (не зависящие от постановки) различия между этими классами задач, и, пожалуй, нигде они не видны столь ясно, как в неголономном вариационном исчислении и механике.

Начало общей теории распределений и кораспределений было положено в 19-м в. (системы Пфаффа), а в 20-м в. они особенно интенсивно разрабатывались Э. Картаном (см., например, [Г16], [Г17]¹⁾). Однако сейчас ясно, что многие вопросы, возникающие в геометрии распределений и неголономном вариационном исчислении, тесно связаны с современной теорией особенностей, теорией алгебр Ли, римановой геометрией и поэтому лишь сейчас и могут быть точно поставлены. Сюда относятся вопросы классификации распределений (или их струй) общего положения, изучение неголономной римановой метрики, условий существования на многообразии распределений с заданными алгебраическими свойствами и др. Имеется ряд чисто алгебраических задач из теории групп и алгебр Ли, появившихся в связи с теорией распределений. Неголономные задачи возникают также в геометрической теории уравнений в частных производных (Рашевский—Хёрмандер—А. Д. Александров [25, 30, 11]), геометрии многообразий (Картан и его последователи), оптимальном управлении. Подчеркнем также постоянную заинтересованность физиков и прикладников в изучении этих задач. Достаточно вспомнить работы Каратеодори по обоснованию термодинамики (см. литературу к основному тексту), Дирака по квантованию систем со связями [17] (см. также [41]) и огромную литературу по неголономной механике (отметим здесь лишь две недавних публикации [18], [25]).

Весь этот круг вопросов начинает сейчас интенсивно разрабатываться и превращаться в интересную и многообещающую область математики.

В книге Гриффитса о неголономной проблематике сказано мало (см. разд. с гл. I и разд. а гл. II), а в подавляющем большинстве учебников и монографий по вариационному исчислению авторы вообще лишь упоминают о неголономных задачах и формулируют метод Лагранжа, по-видимому, и не подозревая, сколь содержательна и непохожа на традиционную теория этих задач. Кроме того, в математической литературе (и у Гриффитса) не проводится четкого различия между механическими и вариационными неголономными задачами; это создает у читателя иллюзию, что различия нет.

¹⁾ Буква Г отсылает к авторскому списку литературы.

В настоящем добавлении мы кратко излагаем некоторые известные сравнительно давно и недавние результаты о неголономных задачах вариационного исчисления и механики, а также формулируем ряд новых определений и вопросов теории распределений и кораспределений, близких к теории особенностей и дифференциальной геометрии.

В § 2 излагаются общие определения. Всюду, где это возможно, они согласованы с определениями Гриффитса. Особенно важны понятия степени неголономности и вектора роста. Мы формулируем их в нескольких вариантах — для струй, ростков и глобальных объектов. Строго говоря, эти понятия относятся к теории распределений (и кораспределений), а не к неголономным вариационным задачам. Однако исследование этих задач потребовало более подробного анализа понятий и известных фактов. В частности, в § 2 выявляется исключительно прозрачный чисто алгебраический смысл классической теоремы Фробениуса.

Параграф 3 начинается с теоремы Рашевского—Чжоу, затем рассматривается неголономная вариационная задача и уравнения Эйлера—Лагранжа. Для квадратичного функционала вводится неголономная риманова метрика (см. [11]). Затем обобщается на неголономные случаи понятие экспоненциального отображения. Для этого вводится так называемый смешанный пучок, который является естественным фазовым пространством для неголономных задач и с помощью которого следует изучать задачи Коши, геодезический поток и др. Затем приводится результат В. Я. Гершковича, дающий двустороннюю оценку неголономной метрики (теорема о параллелепипеде). В заключение мы показываем, что неголономная сфера имеет особенности. В § 4 кратко излагаются результаты А. М. Вершика и Л. Д. Фаддеева о решении неголономной механической задачи с квадратичным лагранжианом и об усеченной связности. Сравняются решения вариационной и механической задач.

В § 5 изучаются алгебры Ли, порожденные наборами векторных полей и распределениями. Их удобно рассматривать как факторалгебры свободных алгебр Ли, что позволяет найти векторы роста распределений и наборов векторных полей общего положения, получить нормальные формы. Этот параграф носит более технический характер и может быть опущен без ущерба для понимания добавления. (Более подробное изложение входящих в него результатов и их связей с неголономной динамикой см. в статье, упомянутой в примечании к стр. 321 в конце добавления.)

В § 4 приводится ряд групповых примеров. Как и в голономной механике и геометрии, групповой случай служит хорошей моделью общего и допускает почти исчерпывающие расчеты. Мы даем

(см. п. 3, § 4 и рис. 65) описание особенностей ε -сферы для неголономной метрики на группе $SO(3)$ и группе Гейзенберга. Разумеется, эти (трехмерные) примеры являются лишь простой иллюстрацией более сложных многомерных эффектов, которые предстоит исследовать подробно.

Остановимся еще на одном вопросе. Неоспоримое достоинство книги Гриффитса в том, что в ней, возможно впервые, классическое вариационное исчисление последовательно строится на основе теории внешних форм и бескоординатной дифференциальной геометрии. Построение механики на этой основе осуществлено уже довольно давно. На очереди стоят неклассическое вариационное исчисление и, в первую очередь, теория оптимального управления. До последних лет, за исключением немногих работ (см., например, [2], [16]) эта теория почти не опиралась на методы геометрии многообразий, хотя преимущества такого подхода очевидны. И здесь снова уместно подчеркнуть роль неголономных вариационных задач: являясь классическими по постановке (ограничения типа равенства), по характеру ответов они более похожи на неклассические; хорошая иллюстрация этого — примеры особенностей области достижимости простейшей неголономной задачи (см. §§ 3, 4). Кроме того, инвариантные методы, применяемые здесь (нормальные формы, классификация алгебр Ли), переносятся на задачи с более общей индикатрисой — задачи с коническими ограничениями, полисистемы и др., т. е. на типичные задачи теории управления. С другой стороны, особенности, возникающие в неголономных задачах, имеют, по-видимому, иной характер, чем особенности в голономных задачах (особенности волновых фронтов и др., см. [2]) и в теории оптимального управления [16]. Однако вопрос этот совершенно не исследован. ¹(Курсивные цифры отсылают к примечаниям, сделанным при корректуре и помещенными в конце добавления.)

§ 2. Распределения, дифференциальные системы и кораспределения

1. Определения. Теорема Фробениуса

В дальнейшем все объекты (поля, формы, функции, сечения и др.) предполагаются бесконечно-дифференцируемыми. Понятие распределения было определено в основном тексте; распределения можно определить также как подпучки касательных пучков ¹⁾. Введем более общее понятие.

¹⁾ В данном добавлении термин «пучок» используется как синоним расслоения. — *Прим. ред.*

*Дифференциальной системой*¹⁾ называется линейное пространство векторных полей на многообразии, образующее модуль над кольцом функций. Пространство всех сечений распределения (как подпучка) есть дифференциальная система. Но существуют и другие дифференциальные системы, отвечающие «распределениям с особенностями», т. е. полям линейных подпространств в TX с непостоянной размерностью. Такие распределения естественно возникают в результате простейших операций над обычными распределениями. Например, скобка Ли двух распределений есть уже распределение с особенностями. Чтобы охватить этот случай и не оговаривать каждый раз отсутствие особенностей (ср. с (0.d.9)), проще, как это сделано в [32], использовать язык $C^\infty(X)$ -модулей.

Легко доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Дифференциальная система на гладком многообразии X порождена обычным распределением тогда и только тогда, когда она является проективным C^∞ -модулем.*

Если X — открытый шар, то всякий проективный модуль свободен, поэтому в локальных задачах дифференциальная система, являющаяся свободным модулем, — это то же самое, что распределение.

В дальнейшем нас будут интересовать в основном локальные проблемы, поэтому введем ростковые и струйные понятия (о понятиях струй, ростков см. [3]). Обозначим через W_n^k , $1 < k \leq \infty$, $n = 1, \dots$, $W_n^\infty = W_n$ пространство k -струй векторных полей в точке $0 \in \mathbb{R}^n$ и через $\mathscr{W}_n$ — пространство ростков векторных полей в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$. Пространства W_n и $\mathscr{W}_n$ образуют алгебры Ли относительно скобки полей $[\cdot, \cdot]$; кроме того, эти пространства являются модулями соответственно над кольцами J_n^∞ (струй) или $\mathcal{E}_n$ (ростков функций). Название «дифференциальная система» мы удержим за подмодулями и в W_n и в $\mathscr{W}_n$. Таким образом, на этом языке ∞ -струя (соотв. росток) распределения есть свободный подмодуль в W_n (соотв. $\mathscr{W}_n$).

Пусть N — дифференциальная система в W_n (соотв. $\mathscr{W}_n$). Положим $N_1 = N$, $N_2 = [N_1, N_1]$, ..., $N_k = [N_{k-1}, N_1]$; здесь $[A, B]$ — подмодуль, порожденный $[\alpha, \beta]$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Последовательность $N_i \subset W_n$ стабилизируется, т. е. существует такое r , что $N_{r-1} \neq N_r = N_{r+1} \dots$. При этом N_r есть подалгебра.*

¹⁾ Некоторые авторы (например, Стернберг [Г64]) под дифференциальными системами понимают распределения. Поскольку в русской литературе термин «распределение» уже устоялся, мы вслед за Гриффитсом используем термин «дифференциальная система» для другого понятия.

Если $N_r = W_n$, то дифференциальную систему (или распределение) N назовем *вполне неголономной*. Число r назовем *степенью неголономности* дифференциальной системы или распределения, порождающего ее. Если $r = 1$, то N — подалгебра и мы имеем дело с голономным случаем. Из определения видно, что переход от распределений к дифференциальным системам коммутует со взятием скобок Ли дифференциальных систем и, соответственно, распределений.

Доказательство предложения основано на следующих фактах:

1) J_n есть нётерово кольцо (см. [61]);

2) всякий подмодуль конечно-порожденного модуля над J_n нётеров (обладает свойством обрыва возрастающих цепочек подмодулей).

З а м е ч а н и е. Для глобальных дифференциальных систем утверждение о стабилизации, неверно, так как степень неголономности может меняться от точки к точке и быть неограниченной.

Обратимся теперь к интегральному, или голономному, случаю.

Если $N_i = N_1$ для всех $i \geq 2$, то распределение называется *инволютивным*. Классическая *теорема Фробениуса* (см. [Г64]) утверждает, что всякое инволютивное распределение интегрируемо и, обратно, всякое интегрируемое распределение инволютивно (обратное утверждение очевидно). Интегрируемость означает наличие слоения, касательный пучок которого и есть данное распределение. Те авторы, которые приводят доказательство теоремы Фробениуса (см., например, [Г64]), обращают внимание лишь на аналитический ее аспект, и потому доказательства довольно громоздки. (В книге Гриффитса теорема Фробениуса не доказывается.) Мы приведем ее доказательство, выделяющее алгебраическую суть дела ¹⁾. Вот в чем эта суть состоит (рассматривается лишь локальный случай, так как только он и важен в теореме Фробениуса):

ТЕОРЕМА. *Росток (или струя) всякого инволютивного распределения порождается коммутирующими векторными полями. Более точно, пусть N — дифференциальная система (в струях или ростках), являющаяся подалгеброй и свободным $\mathcal{E}_n$ -модулем размерности m . Тогда N порождается как модуль m коммутирующими векторными полями.*

Заключительная часть теоремы Фробениуса (построение слоев) сводится после этого к применению теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений.

¹⁾ Единственное известное нам простое доказательство имеется в [27]; в [30] есть ссылка на пока не вышедшую работу с новым доказательством теоремы Фробениуса.

Доказательство. Пусть N — росток инволютивного распределения размерности m в $\mathbb{R}^n$, порожденного $\xi_1, \dots, \xi_m \in W_n$. Докажем индукцией по m , что N порождено коммутирующими векторными полями $\psi_1, \dots, \psi_m$. Выберем в $\mathbb{R}^n$ систему координат $\{x_i\}_{i=1}^n$ так, чтобы $\xi_1 = \partial/\partial x_1$. Разложим ξ_i по $\partial/\partial x_i$:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^m c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c_{ij} \in \mathcal{E}_n$$

($\mathcal{E}_n$ — кольцо ростков гладких функций в $\mathbb{R}^n$).

Система векторных полей $\tilde{\xi}_i = \xi_i - c_{i1}\xi_1$, $i = 2, \dots, m$, инволютивна. По предположению индукции найдутся коммутирующие векторные поля $\psi_2, \dots, \psi_m$, такие что $V(\xi_2, \dots, \xi_m) = V(\psi_2, \dots, \psi_m)$.

Выберем систему координат $\{y_i\}$ в $\mathbb{R}^n$ так, чтобы $\psi_i = \partial/\partial y_i$, $i = 2, \dots, m$, и разложим ξ_1 по $\partial/\partial y_i$:

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Возьмем $\tilde{\xi} = \xi_1 - \sum_{i=2}^m b_i \xi_i$ ($b_i \in \mathcal{E}_n$). Тогда

$$\tilde{\xi} = b_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{j=m+1}^n b_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Найдется индекс $j \in \{1, m+1, m+2, \dots, n\}$, такой что $b_j(0) \neq 0$. Мы можем считать (перенумеровав, если нужно, координаты), что $j = 1$. Возьмем $\psi = b_1^{-1} \tilde{\xi}$. Тогда $V(\psi_1, \dots, \psi_m) = V(\xi_1, \dots, \xi_m)$, и поля ψ_i коммутируют. (Нужно проверить лишь, что $[\psi_i, \psi_1] = 0$. Это немедленно вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{b_j}{b_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} &= [\psi_i, \psi_1] = \sum_{k=1}^m b_{i,1}^k \psi_k \\ &= \sum_{k=1}^m b_{i,1}^k \frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{k=m+1}^m b_{i,1}^k b^{-1} b_k \frac{\partial}{\partial y_k}, \end{aligned}$$

поскольку все $b_{i,1}^k$ равны 0). $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Множество струй (ростков) инволютивных распределений данной размерности образует одну орбиту относительно группы струй (ростков) диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$.

Таким образом эта орбита определяется по 1-струе распределения, так как инволютивность есть «1-струйное» условие.

2. Вектор роста, распределение общего положения и вопросы классификации

Вектором роста вполне неголономной дифференциальной системы $N \subset W$ назовем стабилизирующую последовательность $(n_1, \dots, n_r, \dots)$, где $m = n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r = n_{r+1} = \dots = n$ и n_i есть размерность пространства 0-струй дифференциальной системы N_i , $i = 1, \dots, r$. В терминах распределений $n_i = n_i(x)$ — размерность пространства V_i , порожденного скобками порядка $\leq i$ полей из V в точке x . Сами подпространства $V = V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset TX$ образуют флаг распределения.

Вектор роста определен в точке и может зависеть от нее. Росток распределения называется *регулярным*, если вектор роста постоянен в окрестности точки. Теорема Фробениуса показывает, что при изучении ростков распределений можно ограничиться вполне неголономным случаем, т. е. считать, что дифференциальная система порождает всю алгебру W_n или $\mathcal{W}_n$. Векторы роста можно (частично) упорядочить по координатно. Оказывается, среди векторов роста вполне неголономных распределений фиксированной размерности $(n_1 = m, n_r = n)$ существует максимальный в смысле этого порядка. Он, разумеется, отвечает распределению минимальной степени неголономности. Его начало совпадает с началом вектора роста числа слов в свободной алгебре Ли с m образующими (формула для n_i имеется в [7, с. 159]). Порядок степени неголономности равен $\ln n / \ln m$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Распределение общего положения имеет максимальный рост. Точнее, в пространстве всех (не обязательно вполне неголономных) ростков распределений с естественной топологией открытое всюду плотное множество образуют распределения максимального роста во всех точках.*

Эта теорема выделяет случай общего положения, для которого в § 5 даны нормальные формы струй базисов из векторных полей.

Посмотрим, насколько можно продвинуться в задаче классификации распределений относительно группы диффеоморфизмов. Очевидно, что вектор роста и степень неголономности — инварианты распределения. Фробениусов случай допускает полную классификацию. Однако он является наиболее вырожденным. Поэтому можно изучать две противоположные ситуации — слу-

чаи, близкие к фробениусову, и случаи, близкие к общему положению. В классической литературе имеется несколько результатов в первом направлении. Например, известная теорема Дарбу [Г64] может быть истолкована как классификационная для некоторых распределений с вектором роста $(n_1 = n - 1, n)$. Общий случай распределений коразмерности 1 как будто бы не изучен. (Заметим, что он сводится к проективной классификации 1-форм). Имеются также некоторые результаты для распределений с вектором роста $(m, m + 1, m + 2, \dots, n - 2, n)$ (см. [30, 31]). Однако уже при классификации распределений степени неголономности 2 (вектор роста (m, n)), как показано в [9], появляются функциональные модули. Это обстоятельство, впрочем, не мешает классификации конечных струй некоторых порядков, каковые собственно и нужны для большинства задач. Имеются и другие целочисленные инварианты распределений, не определяющиеся вектором роста (класс, рост подраспределений и т. п.); см. § 5.

3. Двойственные формулировки.

Пфаффа система и кораспределение

Все понятия, введенные выше, допускают дуализацию. На самом деле классики гораздо чаще использовали язык форм и кораспределений, а не язык векторных полей¹⁾. Например, в механике и геометрии распределение чаще задают как аннулятор кораспределений. Удобство пространства форм — в наличии внешнего дифференцирования и внешнего произведения, удобство пространства векторных полей — в наличии структуры алгебры Ли. В книге Гриффитса также в большей степени используются формы, и мы отсылаем читателя к определениям гл. I. В дальнейшем мы используем оба языка и потому начнем с таблицы параллельных понятий. Переход от одних понятий к другим основан на двойственности пространств полей (струй полей, ростков полей) и 1-форм (соотв. струй и т. д.) как модулей над кольцом функций (соотв. струй, ростков функций). Обозначим через W_n^* пространство ∞ -струй 1-форм в точке $0 \in \mathbb{R}^n$, через $\mathcal{W}_n^*$ — пространство ростков, через $A^*(X)$ — пространство 1-форм на X и через $\langle \xi, \omega \rangle$ — спаривание полей и форм в функции (например, $W_n \times W_n^* \rightarrow J_n$). Переход от понятий в левой части к понятиям в правой части приводимой ниже таблицы сводится к взятию аннулятора относительно этой двойственности:

¹⁾ Херманн в [Г42] ссылается на работу Вессии 1926 г., в которой тот писал, что многие идеи теории Картана выглядят более естественно (по крайней мере с алгебраической точки зрения) на языке векторных полей.

распределение на X	кораспределение (подпучок в T^*X)
дифференциальная система (на многообразии, в струях, ростках)	пфафова система (подмодуль в пространстве 1-форм на многообразии и т. д.)
инволютивная дифференциальная система	пфафова система (замкнутая относительно внешнего дифференцирования), являющаяся дифференциальным идеалом
флаг распределения	производный флаг или кофлаг

Пусть N — подмодуль в W_n , N^* — его аннулятор в W_n^* , N^{**} — бианнулятор в W_n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) $N \subset N^{**}$. 2) Пусть $\{N_i\}$ — флаг N , $\{M_i\}$ — кофлаг пфафовой системы N^* . Тогда $N_i^* = M_i^{**}$ и $M_i^* = N_i^{**}$.

Таким образом, флаг распределения и производный флаг находятся в двойственности. Понятия степени неголономности и вектора роста фактически совпадают с введенными в книге. Для векторных полей они определяются гораздо проще.

Дифференциальная система N^{**} , вообще говоря, не совпадает с N и в определенном смысле представляет собой замыкание N .

СЛЕДСТВИЕ. Если V — распределение без особенностей и N — отвечающая ему дифференциальная система, то $N^{**} = N$, а N^* порождено $V^\perp$.

§ 3. Условная вариационная задача с неголономными связями и неголономная риманова геометрия

1. Теорема Рашевского—Чжоу и постановка задачи

Пусть X — гладкое многообразие, V — распределение на X . Предположим, что V вполне неголономно во всех точках X . Следующая теорема доказана независимо Рашевским и Чжоу [23, Г24]¹⁾:

¹⁾ Это еще один замечательный пример почти одновременного и независимого появления назревшей теоремы. Любопытно, что для Чжоу поводом для изучения этого вопроса послужили работы Каратеодори по термодинамике. Для Рашевского таким поводом, по-видимому, были геометрические задачи; в СССР неголономной геометрией в это время активно занимался В. В. Вагнер и некоторые другие математики. Работа Рашевского, видимо, неизвестна Гриффитсу, который ссылается лишь на Чжоу. Доказательства у обоих авторов весьма похожи и несложны.

ТЕОРЕМА. Для любых двух точек $x, y \in X$ существует допустимая кривая, соединяющая их.

Таким образом, для вполне неголономных распределений возможна постановка произвольной двухточечной вариационной задачи с произвольным гладким лагранжианом

$$\min \int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt : \dot{x}(t) \in V_x(t),$$

$$x(0) = a, \quad x(1) = b\}. \quad (1)$$

Если распределение V вполне неголономно и лагранжиан L удовлетворяет условиям леммы Филиппова [28], то решение такой вариационной задачи существует для любой пары точек a, b .

Ниже мы выпишем явно уравнение Эйлера — Лагранжа для этой задачи. Заметим, что в книге Гриффитса дана общая постановка вариационной задачи (разд. d гл. I) и приведено уравнение (I.d.14), однако в такой форме, что различия между голономным и неголономным случаем не видны.

2. Уравнения Эйлера—Лагранжа и неголономная метрика

Пусть V — распределение размерности m на n -мерном гладком многообразии X . Пусть, далее, на $TX \oplus R^1$ задана функция L , называемая *лагранжианом*. Выберем базис 1-форм $\omega_{m+1}, \dots, \omega_n$ кораспределения $V^\perp$.

Уравнения Эйлера — Лагранжа в локальной системе координат $\{x_i\}$ имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} - L_x = \lambda_j \omega_j - \lambda_j (\dot{x} \lrcorner d\omega_j). \quad (2)$$

Условия допустимости кривой $x(t)$ дают

$$(\dot{x}, \omega_j) = 0, \quad j = m+1, \dots, n. \quad (3)$$

Важное свойство уравнения (2) состоит в том, что оно является дифференциальным и относительно λ .

Уравнения (2) можно записать в инвариантной форме, как это сделано в [11]. Лагранжиан $L(t, x, \dot{x})$ безусловной задачи надо при этом заменить на функцию Лагранжа

$$L_V(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) + \langle \omega, \dot{x} \rangle,$$

где ω — неопределенная форма из кораспределения $V^\perp$ (*множители Лагранжа*).

Предположим, что L — риманова метрика. Поставим вариационную задачу на минимум действия, т. е. задачу (1). Оказы-

вается, что, как и в классическом случае, ее можно связать с вариационной задачей на минимум длины:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — риманово многообразие, V — распределение на X . Условные вариационные задачи на минимум действия и минимум длины имеют с точностью до параметризации одни и те же решения.

Доказательство почти не отличается от доказательства в голономном случае (см., например, [21]).

Пусть X — риманово многообразие, V — вполне неголономное распределение на X . Определим *неголономную метрику* ρ_V на X следующим образом (см. [12]):

$$\rho_V(x, y) = \inf_{\gamma \in S(x, y)} \int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{1/2} dt,$$

где

$$S(x, y) = \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, \dot{\gamma} \in V \}.$$

Неголономной геодезической будем называть допустимую кривую, локально являющуюся решением указанной вариационной задачи. В терминах ковариантной производной уравнение неголономных геодезических записывается так:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \sum_{i=m+1}^n \dot{\lambda}_i \omega_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \dot{\gamma} \lrcorner \omega_i$$

(мы отождествляем с помощью метрики 1-формы с векторными полями).

3. Задачи Коши

При изучении вариационных неголономных задач мы сталкиваемся со следующим эффектом. Пространство начальных данных такой задачи на первый взгляд состоит из пар (x, v) , где $x \in M$, $v \in V(x)$ — допустимый вектор в точке x , $\dim V(x) = m$. В то же время из теоремы Рашевского — Чжоу и леммы Филиппова вытекает разрешимость любой двухточечной задачи, так что число параметров в пространстве геодезических (при фиксированной начальной точке) равно n . Поэтому может показаться, что задача Коши имеет неединственное решение.

Объяснение такое. Начальные данные задачи Коши состоят не только из допустимого вектора $v \in V(x)$ — начальной скорости, но и из ковектора $\omega \in V^\perp$, поскольку (2) является дифференциальным по λ . Задание ω на координатном языке есть задание начальных значений множителей Лагранжа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным пучком* для распределения V называется сумма $V \oplus V^\perp$, где V — распределение на X , понимаемое как подпучок касательного пучка, а $V^\perp$ — его аннулятор, понимаемый как подпучок кокасательного пучка. Слой V_x — множество допустимых скоростей, а $V_x^\perp$ — множество множителей Лагранжа. Смешанный пучок есть расслоение над X . Резюмируем все это в виде отдельного утверждения (далее мы считаем, что лагранжиан не зависит от времени):

ТЕОРЕМА. *Уравнения Эйлера — Лагранжа для неголономной задачи (1) определяют векторное поле в смешанном пучке. Поток, отвечающий этому полю, дает решение задачи Коши. Если существует поток для безусловной задачи и выполнены условия леммы Филиппова, то существует поток и для условной задачи.*

В частности, на полном римановом многообразии для любого вполне неголономного распределения глобально определен поток в $V \oplus V^\perp$. Этот поток называется *неголономным геодезическим потоком*.

Имеется другой способ построения теории. Он состоит в том, что из уравнений Эйлера — Лагранжа надлежащими дифференцированиями исключают множители Лагранжа и получают систему более высокого порядка. Тем самым единственность задачи Коши снова восстанавливается, но уже за счет высших скоростей. На инвариантном языке такой подход похож на обобщение римановой геометрии, при котором длина кривой зависит от струй более высокого порядка. Вместо смешанного пучка нужно рассматривать некоторые подмногообразия в высших касательных пучках. Этот путь, по-видимому, связан с подходом, развиваемым в [10, 13, 33].

З а м е ч а н и е. Мы определили неголономный геодезический поток и неголономную метрику на римановом многообразии M с заданным на нем вполне неголономным распределением V . Фактически же неголономный геодезический поток и неголономная метрика зависят лишь от ограничения метрического тензора g на распределение V . Если ограничения на V метрических тензоров двух римановых метрик совпадают, то совпадают также построенные по ним неголономные геодезические потоки (и неголономные метрики), хотя формально уравнения Эйлера — Лагранжа и различны.

4. Неголономное экспоненциальное отображение

С помощью определенного в п. 3 неголономного геодезического потока можно обобщить понятие экспоненциального отображения на случай неголономных римановых многообразий.

Пусть M — полное риманово многообразие, $n = \dim M$, $x \in M$, V — произвольное распределение размерности m . Определим отображение

$$\exp_{V, \delta} : V_x \oplus V_x^\perp \rightarrow M$$

следующим образом. Пусть $v_0 \in V$, $\omega_0 \in V^\perp$, γ_{v_0, ω_0} — неголономная геодезическая с начальным вектором v_0 и начальными значениями множителей Лагранжа, определенными формой ω_0 . Тогда

$$\exp_{V, \delta}(v_0, \omega_0) = \gamma(\delta)$$

($\exp_{V, 1}$ в дальнейшем будет обозначаться просто $\exp_V$). Обычное экспоненциальное отображение есть диффеоморфизм окрестности нуля в касательном пространстве на окрестность точки $x \in M$ (см. [Г64], [29]). Для определенной выше экспоненты дело обстоит сложнее; отображение $\exp_V$ не является диффеоморфизмом ни для какой окрестности нуля в $V_x \oplus V_x^\perp$. Например, $\exp_V(0, \omega) = x$ при любом $\omega \in V_x^\perp$ (т. е. если начальная скорость равна нулю, а начальные множители Лагранжа ω_0 произвольны, то $\gamma_{0, \omega_0}(t) \equiv x$).

Другой эффект состоит в том, что сколь угодно близко к точке $0 \in V_x \oplus V_x^\perp$ могут лежать точки (v_0, ω_0) , в которых ранг $\exp_V$ падает (см. п. 6). Как сказано выше, ранг $\exp_{V, \delta}$ заведомо падает в точках из $0 \oplus V_x^\perp$. Для точек $(v_0, \omega) \notin 0 \oplus V_x^\perp$ ситуацию описывает следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $v \in V$, $v \neq 0$. Существуют ε , R , δ , такие что ограничение $\exp_{V, \delta}$ на $D_\varepsilon^V(v) \times D_R^{V^\perp} \setminus Y$ есть диффеоморфизм в M ; здесь $D_\varepsilon^V(v) \subset V$ — шар радиуса R с центром v , $D_R^{V^\perp}$ — шар радиуса R с центром 0 в $V^\perp$, $\text{codim } Y \geq 2$.

З а м е ч а н и е. Зафиксируем ε , R и рассмотрим $\delta_R = \max \delta$, где максимум берется по всем δ , для которых выполнено утверждение теоремы. Тогда $\delta_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Это означает, что большие по величине множители Лагранжа играют ту же роль, что и малые скорости; соответствующие им геодезические имеют близко расположенные сопряженные точки.

5. Теорема о параллелепипеде

Выше была введена неголономная метрика ρ_V на римановом многообразии X .

Мы дадим сейчас двустороннюю оценку в метрике ρ_V для ε -шара $D_\varepsilon^V(x)$, т. е. для множества точек, достижимых из x по допустимым кривым длины $\leq \varepsilon$. Пусть в окрестности точки x

введена локальная система координат $x_i : X \rightarrow R^i$, $i = 1 \dots n$, и задана функция $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi_{C, \varepsilon}(x) = \{y \in X \mid |x_i(y)| \leq C\varepsilon^{\varphi(i)}\}.$$

ТЕОРЕМА (о параллелепипеде). Пусть M — риманово многообразие, $x \in M$, V — регулярное абсолютное неголономное распределение на M . Тогда найдутся локальная система координат x_i и положительные константы C, c, ε_0 , такие что для $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\Pi_{C, \varepsilon}(x) \subset D_V^\varepsilon(x) \subset \Pi_{C, \varepsilon}(x),$$

причем функция φ , фигурирующая в определении параллелепипеда $\Pi_{C, \varepsilon}(x)$, строится по распределению V следующим образом: $\varphi(i) = j$ при $n_{j-1} < i \leq n_j$, где $\{n_j\}$ — рост распределения V .

Доказательство теоремы опирается на возможность приведения струй наборов векторных полей к нормальной форме. Эти вопросы будут рассмотрены в § 5. Использование полученных в § 5 нормальных форм позволяет получить также оценку множества достижимости в случае «неклассических» ограничений — полей конусов, подсистем. Эти результаты приведены в [14]; здесь мы не будем на них останавливаться.

6. Геометрия неголономной ε -сферы и ее особенности

Пусть X — риманово многообразие размерности n , V — вполне неголономное m -мерное распределение на X . Теорема о параллелепипеде дает двустороннюю оценку ε -шара $D_\varepsilon^V(x)$ в неголономной метрике ρ_V , точную по порядку, однако ничего не говорит о геометрической структуре этого шара.

В данном пункте мы покажем, что в неголономных задачах в случае общего положения возникают новые эффекты; к числу таких эффектов относятся особенности неголономных ε -сфер. Под сферой $S_\varepsilon^V(x)$ радиуса ε с центром в x относительно распределения V мы понимаем границу ε -шара $D_\varepsilon^V(x)$. Следует отличать ε -сферу от множества $A_\varepsilon^V(x)$ концов геодезических длин ε , которое естественно назвать *волновым фронтом*. Разумеется,

$$D_\varepsilon^V(x) = \bigcup_{\delta \leq \varepsilon} A_\delta^V(x).$$

В обычной римановой геометрии при достаточно малом ε множества $A_\delta^V(x)$, входящие в объединение, дизъюнкты и $S_\varepsilon^V(x) = A_\varepsilon^V(x)$. В неголономном случае $A_{\delta_1}^V(x)$ и $A_{\delta_2}^V(x)$ могут пересекаться при различных δ_1 и δ_2 , и притом сколь угодно близких к нулю (это еще один «неголономный» эффект!), и $S_\varepsilon^V(x) \neq A_\varepsilon^V(x)$.

Из теоремы о параллелепипеде легко следует, что при достаточно малых и различных между собой ε_1 и ε_2

$$S_{\varepsilon_1}^V(x) \cap S_{\varepsilon_2}^V(x) = \emptyset$$

и что при всех ε

$$S_\varepsilon^V(x) \subset A_\varepsilon^V(x).$$

В терминах определенной в п. 4 неголономной экспоненты множество $A_\delta^V(x)$ описывается следующим образом:

$$A_\delta^V = \exp_V(S_\delta^{m-1} \times V^\perp),$$

где S_δ^{m-1} — это δ -сфера в распределении V , т. е. множество допустимых векторов из $T_x X$ длины δ .

Оказывается, что неголономная ε -сфера при малых ε имеет особенности. Обозначим через $\bar{x}_\varepsilon$ точку сферы $S_\varepsilon^V(x)$, ближайшую (или одну из ближайших) к x в римановой метрике.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — мерное риманово многообразие размерности n , $x \in X$ и V — распределение общего положения в точке x . Тогда при достаточно малых ε сфера S_ε^V имеет особенность в точке $\bar{x}_\varepsilon$.

Мы рассмотрим сейчас примеры групп Ли, где эта особенность, а также особенности волнового фронта A_ε^V будут точно описаны.

Геометрия неголономной сферы для группы Гейзенберга и специальной ортогональной группы. Приведем два примера групп, для которых явно вычислены неголономные геодезические и установлены геометрические свойства неголономных ε -сфер $S_\varepsilon^V(x)$ и волновых фронтов $A_\varepsilon^V(x)$. Это группа Гейзенберга и группа $SO(3)$. Первый пример проще с точки зрения вычислений, а второй важен для приложений.

Группа Гейзенберга. Рассмотрим трехмерную нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{h}$ с базисом e_1, e_2, e_3 и соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$; ее группа Ли есть группа Гейзенберга N , т. е. группа верхне-треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Введем на $\mathfrak{h}$ евклидову метрику, считая e_1, e_2, e_3 ортонормированным базисом, и введем на N левоинвариантную метрику. Пусть $v = \text{Lin}(e_1, e_2)$. Определим левоинвариантное распределение V на N с помощью левых сдвигов v ; распределение V вполне неголономно.

Зададим мономорфизм алгебры Ли $\mathfrak{n}$ в алгебру Ли $\text{Vect } \mathbb{R}^3$, задав его на базисе $\mathfrak{n}$ следующим образом:

$$\mu e_i = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\xi_1 = \partial/\partial x, \quad \xi_2 = \partial/\partial x_2 + x_1 \partial/\partial x_3, \quad \xi_3 = \partial/\partial x_3.$$

Мономорфизм μ индуцирует диффеоморфизм нильпотентной группы Ли на $\mathbb{R}^3$, задаваемый правилом

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, c, b - ac).$$

В дальнейшем мы отождествляем N и его образ, перенося тем самым на $\mathbb{R}^3$ метрику и распределение, заданные на N (и сохраняя для распределения обозначение V).

В соответствии с п. 3 неголономная геодезическая, выходящая из точки x , задается допустимым вектором скорости — элементом из V_x — и значением множителя Лагранжа — элементом из $V_x^\perp$ (здесь $\dim V_x^\perp = 1$). В дальнейшем рассматриваются геодезические, выходящие из точки 0 (начала координат в $\mathbb{R}^3$) с единичной скоростью; направление вектора скорости определяется его углом φ с осью x_1 ; геодезическую, определенную начальными данными φ, λ , будем обозначать $\gamma_{\varphi, \lambda}(t)$. Уравнения Эйлера — Лагранжа неголономной вариационной задачи (см. п. 2) выглядят здесь следующим образом:

$$\dot{\gamma}_{\varphi, \lambda}(t) = c_1(t) \xi_1 + c_2(t) \xi_2,$$

$$\dot{c}_1 = \lambda c_2,$$

$$\dot{c}_2 = -\lambda c_1,$$

$$\dot{\lambda} = 0.$$

Эти уравнения интегрируются в квадратурах. Далее приведены явные выражения для геодезического потока, волнового фронта и неголономной ε -сферы. Неголономные геодезические

$$\gamma_{\varphi, \lambda}(t) = (x_{\varphi, \lambda}(t), y_{\varphi, \lambda}(t), z_{\varphi, \lambda}(t))$$

задаются формулами

$$x_{\varphi, \lambda}(t) = t \frac{\sin(\theta + \varphi) - \sin \varphi}{\theta},$$

$$y_{\varphi, \lambda}(t) = t \frac{\cos \varphi - \cos(\theta + \varphi)}{\theta},$$

$$z_{\varphi, \lambda}(t) = t^2 \frac{2\theta - (\sin(2\theta + 2\varphi) - \sin 2\varphi) + 4 \sin \varphi (\cos(\theta + \varphi) - \cos \varphi)}{4\theta^2},$$

где

$$\theta = \lambda t, \quad x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3.$$

Отсюда получаем такое выражение для волнового фронта:

$$A_\varepsilon^V(x) = \bigcup_{\lambda \in (-\infty, \infty)} \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi]} (x_{\varphi, \lambda}(\varepsilon), y_{\varphi, \lambda}(\varepsilon), z_{\varphi, \lambda}(\varepsilon)).$$

Приведенные формулы задают отображение цилиндра $S_\varepsilon \times V^\perp$ в $\mathbb{R}^3$ — неголономное экспоненциальное отображение, определенное в п. 4, — которое обладает следующими свойствами:

а) отображение $\exp_V$ переводит окружность $S_\varepsilon \times \theta_k$, $\theta_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, в точку $z_k = (0, 0, \varepsilon^2/4k\pi)$;

б) подмножество волнового фронта $\exp_V(S_\varepsilon \times \Delta)$, где $\Delta = [-2\pi/\varepsilon, 2\pi/\varepsilon]$, есть неголономная ε -сфера S_ε^V ;

в) росток A_ε^V в каждой из точек z_k , $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, диффеоморфен ростку прямого кругового конуса K в начале координат $\mathbb{R}^3$, росток S_ε^V в каждой из точек z_1 и z_2 диффеоморфен полё K_+ прямого кругового конуса K ;

г) неголономная ε -сфера и волновой фронт квазиоднородны; точнее,

$$\psi_\delta S_\varepsilon^V = S_{(\delta, \varepsilon)}^V, \quad \psi_\delta A_\varepsilon^V = A_{(\delta \varepsilon)}^V, \quad \psi_\delta D_\varepsilon^V = D_{(\delta \varepsilon)}^V,$$

где

$$\psi_\delta(x, y, z) = (\delta x, \delta y, \delta^2 z);$$

д) группа симметрий G неголономной ε -сферы и волнового фронта описывается следующим образом: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с образующими f_1 и f_2 , такими что

$$f_1(x, y, z) = (-x, -y, z), \quad f_2(x, y, z) = (x, -y, -z).$$

Из г) немедленно следует, что A_ε^V (соотв. S_ε^V , D_ε^V) при всех ε диффеоморфно A_1^V (соотв. S_1^V , D_1^V) и что S_ε^V гомеоморфно S^{n-1} .

Оказывается, волновой фронт и неголономная сфера не имеют других особенностей, кроме описанных в пункте в). Мы получаем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА. Пусть N — группа Гейзенберга с определенной выше левоинвариантной метрикой и левоинвариантным распределением V и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

1) волновой фронт A_ε^V имеет особенности в точках z_l , $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, в окрестности каждой из которых росток A_ε^V диффеоморфен ростку K в начале координат $\mathbb{R}^3$;

2) неголономная ε -сфера S_ε^V имеет особенности в точках z_1 и z_{-1} ; росток S_ε^V в каждой из этих точек диффеоморфен полё K_+ прямого кругового конуса K в начале координат $\mathbb{R}^3$.

Приведенные выше факты проиллюстрированы на рис. 65 и 66, выполненных Н. Е. Мнёвым. На рис. 65 схематически изображено неголомомное экспоненциальное отображение $\exp_V : S_\varepsilon \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ и дан общий вид неголомомной ε -сферы S_ε^V и волнового фронта A_ε^V на группе Гейзенберга. Левый цилиндр на рисунке — это произведение окружности S_ε — окружности скоростей v в допустимой плоскости распределения V_x с $\|v\| = \varepsilon$ — на прямую множителей Лагранжа $\{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^1} = V_x^\perp$. Экспоненциальное отобра-

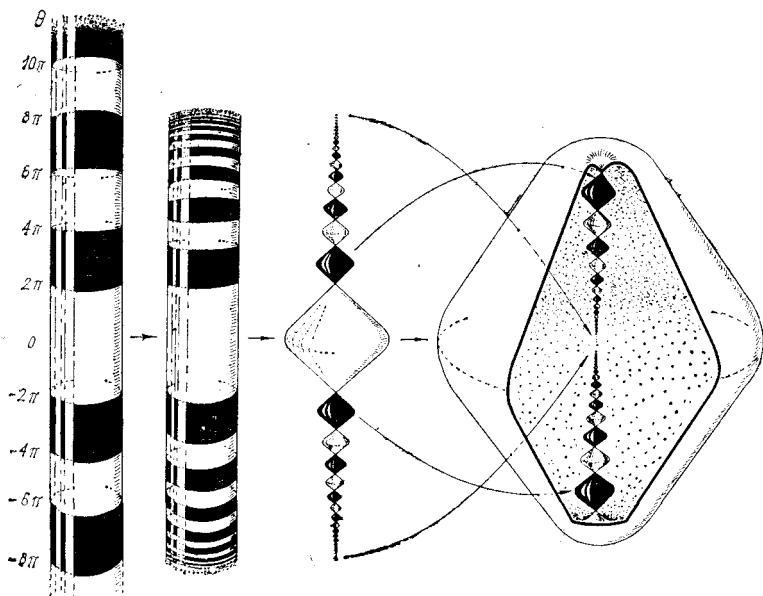


Рис. 65.

жение $\exp_V$ переводит окружность $S_\varepsilon \times \theta_k$, $\theta_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, в точку z_k , являющуюся, стало быть, критическим значением отображения $\exp_V$; точки z_k являются особыми в A_ε^V . Образ цилиндра (т. е. $\exp_V(S_\varepsilon \times V^\perp)$) диффеоморфен третьей фигуре на рисунке (бусы с бесконечным числом бусинок; соседние бусинки соединены как две полы прямого кругового конуса). На последней (правой) фигуре показано расположение волнового фронта A_ε^V на группе Гейзенберга N . Все бусинки переходят внутрь первой; иначе говоря, точки $\gamma_{\varphi, \lambda}(\varepsilon)$ — концы геодезических длины ε , соответствующих множителям Лагранжа λ с $|\lambda| > 2\pi/\varepsilon$, — лежат во внутренности неголомомного ε -шара $D_\varepsilon^V(0)$; кроме того, $\gamma_{\varphi, \lambda}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \pm \infty$. Неголомомная ε -сфера есть образ

первой бусинки:

$$S_\varepsilon^V = \exp_V (\Delta \times V^\perp), \quad \Delta = [-2\pi/\varepsilon, 2\pi/\varepsilon];$$

S_ε^V имеет лишь две особые точки типа вершины прямого кругового конуса.

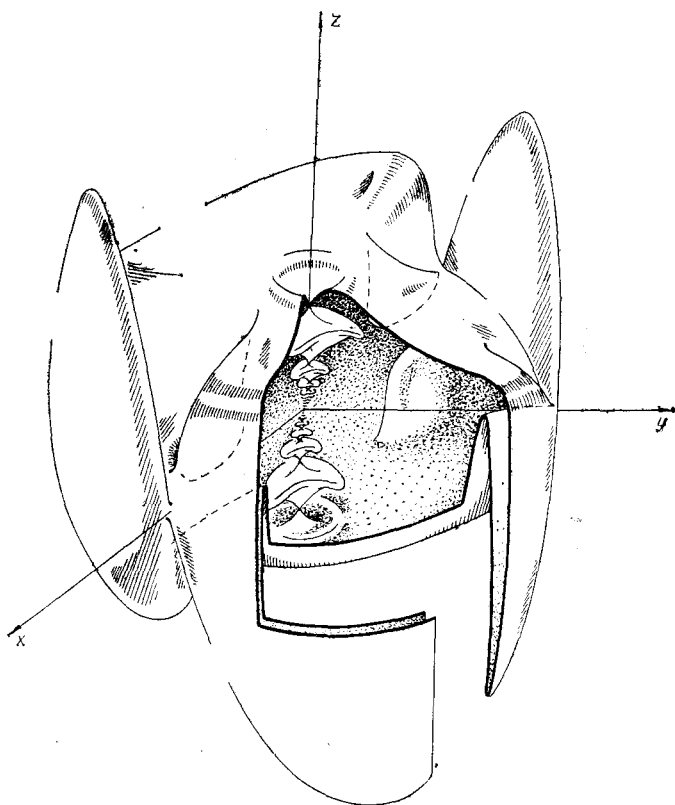


Рис. 66.

Метрически неголономная ε -сфера и неголономный волновой фронт устроены довольно сложно. На рис. 66 более или менее точно показан их вид при $\varepsilon = 1$. Напомним читателю, что такую экзотическую форму имеет ε -сфера одной из самых простых неголономных вариационных задач! В координатах эта сфера записывается так:

$$S_\varepsilon^V = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid \rho_V(0, \alpha) = \varepsilon\},$$

где

$$\rho_V(\alpha, \beta) = \inf_T \int_0^1 (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{1/2} dt, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3,$$

$$T = \{\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \mid \gamma(0) = \alpha, \gamma(1) = \beta, \dot{y} = x\dot{z}\}.$$

О р т о г о н а л ь н а я г р у п п а. Рассмотрим $SO(3)$ — группу ортогональных матриц с определителем единица. Форма Киллинга (см. [7]) задает на $SO(3)$ двусторонне инвариантную метрику. В алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ антисимметричных 3×3 -матриц выберем стандартный базис e_1, e_2, e_3 :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зададим левоинвариантное распределение V_1 на $SO(3)$ левыми сдвигами линейного подпространства $v_1 = \text{Lin}(e_1, e_2) \subset \mathfrak{so}(3)$. Уравнения Эйлера — Лагранжа для неголономной задачи на $SO(3)$, ограничения в которой заданы распределением V_1 , имеют тот же вид, что и для группы Гейзенберга (см. выше):

$$\dot{\beta}_{\varphi, \lambda} = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad \dot{c}_1 = \lambda c_2, \quad \dot{c}_2 = -\lambda c_1, \quad \dot{\lambda} = 0.$$

где $\beta_{\varphi, \lambda}$ — неголономная геодезическая на $SO(3)$ с начальными данными φ, λ . Неголономный геодезический поток на $SO(3)$ описывается следующим образом (см. [15]). Определим отображение h топологического тора $S^1 \times S^1$ в $SO(3)$ правилом

$$h : (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \exp(\varphi_1 e_3) \exp(\lambda(e_1 \cos \varphi_2 + e_2 \sin \varphi_2)),$$

$(\varphi_1, \varphi_2) \in S^1 \times S^1, \lambda \in \mathbb{R}^1$ — параметр (множитель Лагранжа). Пусть T_λ — его образ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Неголономные геодезические, выходящие из единицы E группы $SO(3)$, относятся к одному из двух видов:*

- 1) *однопараметрическая группа с допустимым генератором;*
- 2) *равномерная обмотка T_λ в $SO(3)$.*

Введем в окрестности единицы $E \in SO(3)$ локальную систему координат x_1, x_2, x_3 . Для этого рассмотрим мономорфизм $\mu_1 : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{Vect } \mathbb{R}^3$, задав его на базисе $\mathfrak{so}(3)$ следующим

образом:

$$\begin{aligned}\mu_1 e_1 &= \psi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ \mu_1 e_2 &= \psi_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \dots, \\ \mu_1 e_3 &= \psi_3 = [\psi_1, \psi_2] = \frac{\partial}{\partial x_3} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \dots\end{aligned}$$

Все коэффициенты разложения векторного поля ψ_2 в степенной ряд полностью определяются его 1-струей (и коммутационными соотношениями между ψ_i).

Мономорфизм μ_1 индуцирует диффеоморфизм окрестности нуля $\mathbb{R}^3$ и окрестности единицы $SO(3)$, который позволяет перенести на $\mathbb{R}^3$ распределение V_1 и заданную на $SO(3)$ метрику. Таким образом, на $\mathbb{R}$ возникают два распределения V и V_1 , два геодезических потока $\gamma_{\varphi, \lambda}$ и $\beta_{\varphi, \lambda}$ и два неголономных экспоненциальных отображения $\exp_V$ и $\exp_{V_1}$. Как сказано выше, уравнения Эйлера—Лагранжа для неголономных задач на $SO(3)$ и на N совпадают, и распределения V и V_1 близки в том смысле, что $J^1 \xi_i = J^1 \psi_i$, $i = 1, 2, 3$. Неголономные экспоненциальные отображения также оказываются близкими, а волновой фронт и неголономные ε -сферы — близкими метрически и диффеоморфными при малых ε .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 : A_\varepsilon^V$ диффеоморфно $A_\varepsilon^{V_1}$.

2) $\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 : S_\varepsilon^V$ диффеоморфно $S_\varepsilon^{V_1}$.

3) Пусть ρ — стандартная метрика в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$\forall \varphi, \lambda : \rho(\gamma_{\varphi, \lambda}(\varepsilon), \beta_{\varphi, \lambda}(\varepsilon)) = O(\varepsilon^3)$.

Из 3) немедленно следует, что

$$\rho(A_\varepsilon^V, A_\varepsilon^{V_1}) = O(\varepsilon^3), \quad \rho(S_\varepsilon^V, S_\varepsilon^{V_1}) = O(\varepsilon^3).$$

Последнее утверждение приходится формулировать для малых ε , поскольку для $SO(3)$ ни ε -сфера, ни волновой фронт уже не являются квазиоднородными.

§ 4. Задачи неголономной механики.

Усеченная связность

1. Механика со связями

Пусть многообразие X служит конфигурационным пространством механической системы. Его касательный пучок TX — это фазовое пространство. Рассмотрим задачу классической механики с неголономными связями. Пусть заданы лагранжиан L и линейная

связь, т. е. распределение на X . В механике признано (после некоторой дискуссии в начале века), что траектория движения такой механической системы вовсе не является, вообще говоря, решениями условной вариационной задачи на экстремум действия при наличии связей². Иначе говоря принцип наименьшего действия здесь не имеет места. Это легко пояснить. При решении экстремальной задачи правые части уравнений связи включаются в лагранжиан (см. § 3), и тем самым связь действует динамически. В то же время известно, что в механической задаче о качении связи действуют лишь через реакции связей, т. е. по существу кинематически. Для голономных систем и в некоторых других частных случаях эти два вида влияния связи совпадают.

Общим универсальным принципом, из которого можно вывести уравнения движения и в голономном, и в неголономном случаях, может служить, например, принцип Даламбера (виртуальных перемещений). Его инвариантная формулировка и вывод на его основе (для общих нелинейных связей) уравнений движения вместе с точной интерпретацией механических понятий даны в [11]. Там же доказана теорема, воспроизведенная ниже и относящаяся к квадратичному лагранжиану и линейным связям. Заметим еще, что вариационная неголономная задача имеет термодинамическую интерпретацию (так называемая метрика Карно—Каратеодори), а также оптико-механическую интерпретацию (см. [20]); последняя основана на аппроксимации неголономной задачи голономными (метод штрафных метрик).

Прежде всего, уравнения движения для неголономной задачи с лагранжианом L и связями, задаваемыми формами $\omega_1, \dots, \omega_k$, имеют вид

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} - L_{x_i} = \mu_j \omega_{ji}, \quad i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots k \quad (5)$$

(см. [11, 24]).

Сравним их с уравнениями Эйлера — Лагранжа (2) для неголономной вариационной задачи

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}_i} - L_{x_i} = \dot{\lambda}_j \omega_{ji} - \lambda_j (\dot{x} \rfloor d\omega_j)_i.$$

Как видим, уравнения (5) не являются дифференциальными относительно множителей Лагранжа μ . Следовательно, задача Коши имеет единственное решение, если заданы лишь начальная точка и допустимая скорость (см. § 3). Иначе говоря, после исключения множителей Лагранжа порядок уравнения (5) не повысится. Разумеется, траектории этого движения, выпущенные из данной точки, не заполняют всего многообразия (если связи неголономны). Если и есть основания сравнивать траектории двух задач, то в вариационной задаче нужно отобрать те траектории, которые отве-

чают нулевым начальным множителям Лагранжа. Тогда второе слагаемое в (2) в начальный момент исчезает. Но и эти траектории, вообще говоря, различны.

2. Проектирование и усеченная связность

В основе инвариантного вывода уравнений (5) и уравнений для нелинейных связей лежит операция ортогонального проектирования полей в $T_x X$ на подпространство, касательное к связи. Ортогональность понимается в смысле скалярного произведения, порожденного гесссианом $(\partial^2 L / \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j)^{-1}$, поэтому необходимо предполагать его положительную определенность. Проектируемое поле есть поле для безусловной задачи. Правая часть в (5) — соответствующая разность (поправка), на механическом языке — реакция связей. Операция проектирования является ультра-локальной (т. е. проекция зависит лишь от значений полей в точке и не зависит от их производных).

Рассмотрим теперь случай римановой метрики. Уравнение (5) переписывается в виде

$$P \nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0, \quad (6)$$

где P — оператор ортогонального проектирования в $T_x X$ на V_x (V — распределение). Подробности см. в [11]. Введем операцию $\tilde{\nabla} = P \cdot \nabla$. Нетрудно проверить, что $\tilde{\nabla}$ есть операция ковариантного дифференцирования допустимых векторных полей вдоль таких же полей. Иначе говоря, $\tilde{\nabla}$ определяет связность в подпучке V . Ее символ Кристоффеля записывается просто как ограничение риманова символа Кристоффеля, записанного в ортогональном базисе (содержащем ортогональный базис распределения), на базис распределения:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, \text{ где } i, j, k = 1, \dots, m.$$

Назовем эту связность *усеченной*³. Любопытно, что она зависит от всей римановой метрики, а не только от ее ограничения на распределения (ср. п. 2 § 3).

Уравнение (6) записывается теперь так:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}} \dot{x} = 0. \quad (7)$$

Справедлива следующая теорема, доказанная Вершиком и Фаддеевым [11]:

ТЕОРЕМА. *Траектории движения механической системы с квадратичным лагранжианом и линейными связями суть геодезические усеченной римановой связности на подпучке, определяемом связями.*

До сих пор явное решение уравнения (7) получено в очень немногих случаях. Наиболее интересен случай групп Ли и левоинвариантных связей (обобщение задачи о качении твердого тела).

При построении поля Эйлера — Лагранжа для вариационной задачи фактически используется другая проекция поля безусловной задачи на допустимое распределение. Эта проекция уже зависит от струй полей, предположительно от струй порядка, равного степени неголономности. Имеются и другие способы проектирования, но не ясно, встречаются ли они в приложениях. Поставленные в [11, 12] задачи о группах голономии, редукции и др. нуждаются в дальнейшем изучении.

3. Сравнение механической и вариационной задачи

Выше было показано, что уравнения движения неголономной механической задачи и неголономной вариационной задачи при одной и той же метрике (кинетической энергии) и одном и том же распределении V различны. Интересно сравнить их решения, т. е. сравнить неголономные геодезические с геодезическими усеченной связности. Фиксируем точку x на многообразии X и будем рассматривать неголономные геодезические и геодезические усеченной связности, выходящие из x ; достаточно сравнивать кривые, выходящие из x с единичной скоростью. Геодезическая усеченной связности определяется вектором $v \in S_1$ ($S_1 = \{v \in V_x : \|v\| = 1\}$); мы будем обозначать эту геодезическую γ_v ; неголономная геодезическая $\beta_{v, \omega}$ задается начальными условиями (v, ω) , где $v \in S_1$, $\omega \in V_x^\perp$.

Обозначим через Φ множество точек $v \in S_1$, для которых найдется $\omega(v) \in V_x^\perp$, такое что росток в точке x неголономной геодезической γ_v совпадает с ростком $\beta_{v, \omega}$.

ТЕОРЕМА. Пусть на гладком многообразии X задано распределение общего положения V . Тогда для некоторого открытого всюду плотного подмножества в пространстве метрик множество Φ пусто.

Таким образом, на римановом многообразии в случае общего положения решения неголономной механической и неголономной вариационной задач совершенно различны. Рассмотрим групповой случай. Пусть G — группа Ли с левоинвариантной метрикой. Левоинвариантное распределение V на G задается левыми сдвигами линейного подпространства $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G). Полная неголономность V означает, что $\mathfrak{v}$ порождает алгебру $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G — группа Ли с левинвариантной метрикой ρ , V — вполне неголономное левинвариантное распределение на G , $\dim V = m$. Тогда

- 1) $\text{card } \Phi \geq m$;
- 2) если метрика ρ двусторонне инвариантна, то $\Phi = S_1$.

§ 5. Алгебраические инварианты.

Нормальные формы струй наборов векторных полей

Как уже упоминалось во введении, в этом параграфе приводятся вспомогательные алгебраические факты; наиболее существенными для неголономной динамики являются теоремы пп. 2 и 3. Начнем с изложения некоторых сведений о свободных алгебрах Ли.

1. Свободные алгебры Ли и целочисленные инварианты наборов векторных полей

Пусть $\mathfrak{f}$ — свободная алгебра Ли с m образующими $f_1, \dots, f_m$. Мы будем использовать процедуру построения линейного базиса в $\mathfrak{f}$. Вопрос о выборе такого базиса в $\mathfrak{f}$ решается теоремой Холла — Витта [7] следующим образом. Пусть X — множество, $M(X)$ — свободный моноид над X , $l(h)$ — длина слова $h \in M(X)$, $M^i(X) \subset M(X)$ — множество слов длины i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейством Холла над множеством X называется любое линейно упорядоченное подмножество H свободного моноида $M(X)$ над X (см. [7]), такое что

- 1) если $u \in H$, $v \in H$ и $l(u) < l(v)$, то $u < v$;
- 2) $X \subset H$, $H \cap M^2(X)$ состоит из произведений xu , где $x, u \in H$ и $x < u$;
- 3) элемент $\omega \in M(X)$ с $l(\omega) \geq 3$ принадлежит H тогда и только тогда, когда $\omega = a(bc)$, где $a, b, c \in H$, $b \leq a \leq bc$ и $b < c$.

Известно [7], что существует канонический гомоморфизм $\theta : M(X) \rightarrow I(X)$, где $I(X)$ — свободная алгебра Ли с множеством образующих X .

ТЕОРЕМА (Холла — Витта [7]). Образ семейства Холла H относительно канонического гомоморфизма $\theta : M(X) \rightarrow I(X)$ — базис $I(X)$.

Идеалом в H называется такое подмножество $Q \in H$, что если $\alpha\beta \in Q$, то $\alpha \in Q$ и $\beta \in Q$. Приведенная теорема дает удобное описание линейных базисов в свободной алгебре Ли. Элементы этих базисов однородны в смысле естественной градуировки в свободной алгебре Ли, и каждый базис есть линейное упорядоченное множество. Зафиксируем семейство Холла H и обозначим той же буквой отвечающий ему базис в $I(X)$. Элементы и подмножества в H и их образы в $I(X)$ также будем обозначать одинаково. Если Q — идеал в H , то из включения $[q_1, q_2] \in Q$ следует, что $q_1, q_2 \in Q$.

Пусть Q — идеал в H . Тогда на Q определена цепочка подмножеств

$$\emptyset \subset Q_1 \subset \dots \subset Q, \text{ где } Q_j = Q_{j-1} \cup \{q_j\}$$

$$\text{и } \forall q \in Q_{j-1} : q < q_j.$$

Введем некоторые целочисленные инварианты набора струй векторных полей. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ — векторные поля в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через r гомоморфизм f в $\text{Vect } \mathbb{R}^n$, переводящий f_i в ξ_i . Через $J^k \xi_i$ обозначим k -струю ξ_i .

Пусть H — базис (и семейство Холла) в f , Q — идеал в H . Сопоставим Q_j подпространство $L_j = \text{Lin } \{J^0 r q_i\}_{i \in j}$. Вектором роста $\{\xi_i\}$ относительно идеала Q назовем последовательность $\{l_j^Q\}$, $l_j^Q = \dim L_j$. Так как l_j^Q — инвариант относительно действия группы струй диффеоморфизмов на наборах струй векторных полей, то для каждого идеала Q мы получаем семейство инвариантов; последовательность $\{l_j^Q\}$ будем называть Q -ростом набора векторных полей $\{\xi_i\}$.

Напомним, что в свободной алгебре Ли имеется естественная фильтрация l по длинам скобок Ли; положим $H^j = \{h \in H \mid l(h) \leq j\}$, $n_j = \text{card } H^j$; разность $n_j - n_{j-1}$ совпадает с размерностью подпространства однородных элементов $l(x)$ степени j . Мы приведем сейчас два примера идеалов в семействе Холла.

а) Зафиксируем n и выберем r из условия $\bar{n}_{r-1} \leq r \leq \bar{n}_r$. Пусть Y состоит из $n - \bar{n}_{r-1}$ первых (в смысле линейного упорядочения на H) элементов $H_r \setminus H_{r-1}$. Положим $Y = H_{r-1} \cup \tilde{Y}$.

В полученном наборе инвариантов l_j^Y (Y -росте) содержится набор $\{n_i\}$ — вектор роста распределения $V(\xi_1, \dots, \xi_m)$, порожденного набором векторных полей $\xi_i : n_i = l_{n_i}^V$.

б) Для получения нормальных форм нам понадобится другой идеал Z , который строится следующим образом. Пусть $Z_1 = \{f_1, \dots, f_{n_1}\}$. Если Z_j уже построено, то положим

$$Z_{j+1} = \{h_2 h_1 \in H \mid h_1 \in Z_j\}.$$

Пусть $s_j = \text{card } Z_j$. Выберем p, m так, чтобы $s_{p-1} < n \leq s_p$. Далее, выберем z , состоящее из $s_p - n$ первых элементов множества $Z_p \setminus Z_{p-1}$. Наконец, положим $Z = Z_{p-1} \cup \tilde{z}$.

Ниже эти примеры используются для получения инвариантов и нахождения нормальных форм.

2. Теоремы о росте и общность положения

Опишем сейчас векторные поля и распределения общего положения в терминах построенных в п. 1 инвариантов. Дадим необходимые определения.

Пусть Q — произвольный идеал семейства Холла H свободной алгебры Ли $\mathfrak{f}$ с m образующими. Будем говорить, что набор векторных полей $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ имеет максимальный Q -рост $\{l_j^Q\}$, если $l_j = j$ при $j \leq n$.

На множестве ростков векторных полей и распределений естественным образом вводится C^∞ -топология Уитни (см. [3], [6])¹⁾.

ЛЕММА. Пусть F — свободная алгебра Ли с m образующими, H — семейство Холла, Q — произвольный идеал в H . Тогда в множестве S , элементами которого служат всевозможные наборы из m векторных полей в $\mathbb{R}^n$, подмножество S_H наборов, имеющих максимальный Q -рост, открыто и всюду плотно в C^∞ -топологии Уитни.

З а м е ч а н и е. В свободной алгебре Ли существует лишь конечное число n -элементных идеалов. Поэтому открытое всюду плотное множество в S составляют наборы векторных полей, имеющие максимальный рост по всем таким идеалам.

Из приведенной выше леммы и замечания к примеру а) предыдущего пункта вытекает

ТЕОРЕМА. В множестве T ростков m -мерных распределений в $\mathbb{R}^n$ открытое и всюду плотное множество T_A составляют ростки m -мерных распределений, имеющие максимальный рост. Этот рост совпадает с ростом $\{\tilde{n}_i\}$ числа слов в свободной алгебре Ли $\mathfrak{f}$.

¹⁾ C^∞ -топологию Уитни можно ввести, отождествляя ростки наборов m векторных полей с ростками сечений тривиального расслоения $\{s | s : U(x) \rightarrow [TU(x)]^m\}$, где $[TU(x)]^m$ — сумма Уитни m экземпляров ростков касательного расслоения над $U(x) \subset \mathbb{R}^n$, а ростки распределений размерности m — с ростками сечений тривиального расслоения $\{s | s : U(x) \rightarrow U(x) \times G_n^{n_1}\}$, где $U(x) \subset \mathbb{R}^n$, $G_n^{n_1}$ — грассманово многообразие n_1 -мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$.

В терминах построенных инвариантов можно классифицировать также коразмерности вырожденных наборов векторных полей и распределений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{f}$ — свободная алгебра Ли с m образующими, H — семейство Холла, Q — произвольный идеал в H , $i < j \leq n$. Тогда множество S_Y^i наборов векторных полей $\{\xi_i\}_{i=1}^m$, таких что $l_j^? \leq j - i$, имеет коразмерность $i(n - j + i)$ в S .

Взяв в качестве Q идеал Y из примера 2 предыдущего пункта, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{f}$ — свободная алгебра Ли с m образующими, $\{\tilde{n}_i\}$ — рост числа слов в $\mathfrak{f}$. Пусть, далее, T — множество m -мерных распределений в $\mathbb{R}^n$, $T_{j,i}$ — его подмножество, состоящее из распределений V , таких что $\dim V_j \leq \tilde{n}_j - i$, $i < \tilde{n}_j \leq n$. Тогда $T_{j,i}$ имеет коразмерность $i(n - n_j + i)$ в T .

3. Открытая и всюду плотная орбита в пространстве наборов струй векторных полей

На множестве q -струй наборов из m векторных полей в $\mathbb{R}^n$ действует GJ_n^q — группа q -струй диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$. Мы указали набор дискретных инвариантов этого действия — рост относительно идеалов семейства Холла. Оказывается, других инвариантов в струях до некоторого порядка нет. Тем самым случай общего положения однозначно описывается вектором роста.

ТЕОРЕМА (о всюду плотной орбите). Пусть $p = p_{n,m}$ (см. конец п. 1). Тогда p -струи m -наборов векторных полей, имеющих Z -максимальный рост, образуют открытую и всюду плотную орбиту относительно действия GJ_n^p .

В струях порядка, большего чем $p_{n,m}$, всюду плотной орбиты нет. В случае общего положения имеются непрерывные инварианты; иначе говоря, нормальные формы струй наборов векторных полей имеют модули, число которых экспоненциально возрастает с ростом порядка струй.

Доказательство теоремы о всюду плотной орбите опирается на лемму о квазитреугольной форме (см. [14]), формулировку которой мы сейчас приведем, поскольку она представляет самостоятельный интерес.

ЛЕММА (о квазитреугольной форме). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_m$ — набор векторных полей в $\mathbb{R}^n$, таких что $V = V(\xi_1, \dots, \xi_m)$ — регулярное распределение. Тогда найдется система координат x_i в $\mathbb{R}^n$,

$x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^i$, $i = 1, \dots, n$, такая что струи векторных полей ξ_i имеют в ней следующий вид (r — степень неголономности V):

$$J^{r-1} \xi_{i_0} = \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} + \sum_T \mu_{i_{l+1}, \dots, i_1, i_0} \prod_{j=1}^l x_{i_j} \frac{\partial}{\partial x_{i_{l+1}}},$$

где $\mu_{i_{l+1}, \dots, i_1, i_0} \in \mathbb{R}$. В множество T входят наборы индексов $(i_{l+1}, \dots, i_1, i_0)$ такие что $l \leq r-1$ и выполнены следующие три условия (ниже φ — функция, определенная в теореме п. 3.5):

- 1) $i_1 < i_0$,
- 2) $i_{j+1} \geq i_j$,
- 3) $\varphi(i_{l+1}) \leq \sum_{j=0}^l \varphi(i_j)$.

4. Универсальный пример набора векторных полей максимального роста

Приведем набор m векторных полей, имеющих максимальный Z -рост. Выберем n координатных функций в $\mathbb{R}^n$ и занумеруем их элементами Z . Векторные поля занумеруем однобуквенными словами из Z . Положим

$$\xi_{z_0} = \sum_Q \left(\prod_{i=1}^l x_{z_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_{z_{l+1}}},$$

где

$$Q = \{(z_{l+1}, \dots, z_1, z_0) \mid l \leq p, z_i \in Z, z_0 \in Z_1, \\ z_{l+1} = z_l(z_{l-1}(\dots(z_1 z_0) \dots))\},$$

где $p = p_n, m$ (см. пример 2 п. 2).

Семейство векторных полей $\{\xi_{z_0}\}_{z_0 \in Z_1}$ имеет максимальный Z -рост. Теорема об открытой орбите показывает, что $(p-1)$ -струи произвольного набора векторных полей максимального Z -роста приводятся к указанному виду выбором системы координат. Заметим, что построенные для различных n примеры согласованы в том смысле, что получаются специализацией набора m векторных полей максимального H -роста в $\mathbb{R}^\infty$:

$$\xi_{z_0} = \sum_{\bar{O}} \left(\prod_{i=1}^l x_{z_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_{z_{l+1}}},$$

где

$$\bar{O} = \{(z_{l+1}, \dots, z_1, z_0) \mid z_i \in H, z_0 \in H_1, \\ z_{l+1} = z_l(z_{l-1}(\dots(z_1 z_0) \dots))\};$$

здесь x_z — координаты в $\mathbb{R}^\infty$, занумерованные элементами $z \in H$; семейства Холла свободной алгебры Ли с m образующими.

ПРИМЕЧАНИЯ, СДЕЛАННЫЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

¹ (К стр. 321.)

В недавно вышедшем сборнике [34] (авторы: В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт) рассмотрено большое количество вариационных и механических неголономных задач. В выходящем вскоре в той же серии сборнике [35] в статье «Неголономные динамические системы и геометрия распределений» авторы настоящего добавления приводят развернутое изложение и историю многих затронутых здесь вопросов.

² (К стр. 340.)

По-видимому, первым, кто указал на это различие, был Г. Герц, назвавший решения вариационной задачи «кратчайшими», а механической — «прямейшими» и предложивший термины «голономный» и «неголономный».

³ (К стр. 341.)

Впервые ее рассматривал Я. Схоутен (1926 г.), позднее Дж. Синг, Г. Вранчеану, В. В. Вагнер. Однако вывод теоремы из точной формулировки принципа Даламбера и общее описание связности до [11], видимо, отсутствовали. Подробнее об этом говорится в статье, упомянутой в примечании ¹.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров А. Д. Исследования о принципе максимума, I—III. — Известия высших учебных заведений, 1958, № 5, с. 126—157; 1959, № 3, с. 3—12; 1959, № 5, с. 16—32.
- [2] Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении. Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Т. 22. — М.: ВИНТИ, 1983, с. 3—55.
- [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гуссейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1—3. — М.: Наука, 1982, 1984.
- [4] Березин Ф. А. Гамильтонов формализм в общей задаче Лагранжа. — УМН, 1974, 29, № 3, с. 183—184.
- [5] Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
- [6] Брекер Г., Ландер Л. Дифференциальные ростки и катастрофы. — М.: Мир, 1977.
- [7] Бурбаки Н. Группы Ли и алгебры Ли. Главы I—III. — М.: Мир, 1976.
- [8] Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем. — Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 1941, 5, с. 301—327.
- [9] Варченко А. Н. О препятствиях к локальной эквивалентности распределений. — Мат. заметки, 1981, 29, № 6, с. 936—947.
- [10] Восилюс Р. В. Контравариантная теория дифференциальных продолжений в модели пространства со связностью. — Проблемы геометрии, 1983, 14, с. 101—175.
- [11] Вершик А. М., Фаддеев Л. Д. Лагранжева механика в инвариантном изложении. — В сб.: Проблемы теоретической физики. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1975: с. 129—141.
- [12] Вершик А. М. Классическая и неклассическая динамика со связями. — В сб.: Новое в глобальном анализе. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984, с. 23—48.
- [13] Виноградов А. М. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 11, 1980, с. 89—134.
- [14] Гершкович В. Я. Двусторонние оценки метрик, порожденных абсолютно неголономными распределениями на римановых многообразиях. — ДАН СССР, 1984, 278, № 5, с. 1040—1044.
- [15] Гершкович В. Я. Вариационная задача с неголономной связью на $SO(3)$. — В сб.: Новое в глобальном анализе. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984, с. 149—152.

- [16] Давыдов А. А. Квазигёльдеровость границы достижимости. — Труды сем. по вект. и тенз. анализу, 1985, 22, с. 25—30.
- [17] Дирак П. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
- [18] Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I—III. — Вестник МГУ, 1982, № 3, с. 92—100; 1982, № 4, 70—76; 1983, № 3, с. 102—111.
- [19] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.
- [20] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
- [21] Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.
- [22] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией. — Уч. записки Моск. пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физ.-мат наук, 1938, № 2, с. 83—94.
- [23] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. — М.—Л., Гостехиздат, 1947.
- [24] Румянцев В. В. О принципе Гамильтона для неголономных систем. — ПММ, 1978, 42, № 3, с. 387—399.
- [25] Румянцев В. В. О принципе Гамильтона и обобщенном методе Гамильтона—Якоби для неголономных систем. — Teorijaska i primenljna mehanika, 1978, № 4, 131—138.
- [26] Сулов Г. К. Теоретическая механика. — М.—Л., Гостехиздат, 1946.
- [27] Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1, 2 — М.: Мир, 1982.
- [28] Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. — Вестник МГУ, сер. мат., 1959, 2, с. 25—32.
- [29] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
- [30] Brockett R. W., Millman R. S., Sussmann H. J. Differential geometric control theory. — Boston: Birkhäuser, 1983.
- [31] Gardner R. Invariants of Pfaffians systems. — Trans. AMS, 1967, 126, p. 514—533.
- [32] Nagano T. Linear differential systems with singularities and an applications to transitive Lie algebras. — J. Math. Soc. Japan, 1966, 18, № 4, p. 398—404.
- [33] Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 9. — М.: ВИНТИ, 1979 (авторы: Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков).
- [34] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы — 3. Т. 3. — М.: ВИНТИ, 1985 (авторы: В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт).
- [35] Вершик А. М., Гершкович В. Я. Неголономные динамические системы и геометрия распределений. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы — 7, 8. — М.: ВИНТИ, 1986 (в печати).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Александров А. Д. 319
Арнольд В. И. 6, 157, 348

Бляшке (W. Blaschke) 15
Брайент (R. Bryant) 19, 118, 119

Вагнер В. В. 327, 348
Вейнштейн (Weinstein) 159
Вершик А. М. 6, 318, 320, 341
Вессно (Vessio) 326
Витт (E. Witt) 343
Вранчану (G. Vranceanu) 348

Галуа (E. Galois) 5
Герц (H. Hertz) 348
Гершкович В. Я. 6, 318, 320
Глакк (H. Gluck) 80
Гриффитс Дж. Ф. (Jeanett Field Griffiths) 7
Гриффитс Ф. (P. Griffiths) 318—323, 327, 328

Д'Арканджело (Renate D'Arcangelo) 19
Дирак (P. Dirac) 319

Каратеодори (C. Caratheodory) 38, 319, 327
Картан (E. Cartan) 5, 318, 319, 326
Кириллов А. А. 9, 161, 166
Козлов В. В. 348
Костант (B. Kostant) 9, 16
Кэлер (E. Kähler) 49

Лагранж (J. Lagrange) 7
Ли П. (P. Li) 127
Ли С. (S. Lie) 161

Майер (A. Mayer) 368
Марсден (J. Marsden) 159
Миrolло (R. Mirollo) 19
Мнёв Н. Е. 336
Мозер (J. Moser) 110

Нейштадт А. И. 348
Нётер (E. Noether) 14

Радон (J. Radon) 15
Рашевский П. К. 319, 327

Синг (J. L. Synge) 348
Стернберг (S. Sternberg) 322
Сурьо (J.-M. Souriau) 9, 16
Схоутен (J. Schouten) 348

Уиллмор (T. J. Willmore) 127, 128

Фаддеев Л. Д. 320, 341
Филиппов А. Ф. 328

Херманн (R. Hermann) 326
Хёрмандер (L. Hörmander) 319
Холл (M. Hall) 343

Черн (=Чжэнь) (S. S. Chern) 14
Чжоу (W. L. Chow) 54, 327

Эйлер (L. Euler) 280

Яу (S. T. Yau) 127

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ¹⁾

- алгебраическая** вариационная задача 115
— идеал, порождённый набором форм 27
— интегрируемость в квадратурах 115
— первый интеграл 115
ассоциированная система 55
аффинная геодезическая 40
— длина дуги 40, 141
— кривизна 141
— нормаль 142
— репер 25
— — *Френе* 141
- бинормаль** 145
брахистохрона 274, 311
- вариационная** задача 11
— — алгебраическая 115
— — классическая 36
— — — k -го порядка 39
— невырожденная 13, 88
— положительная 18
— с ограничениями 38
— сильно невырожденная 14, 98
— смешанная хорошо поставленная 272
— — хорошо поставленная 193
вариация 41
— допустимая 194
— инфинитезимальная 42
Вейерштрасса E -функция 266
— — для вариационной задачи второго порядка 267
вектор роста 325, 344
вертикальный касательный вектор 22
взаимно достижимые точки 54—55
внешняя дифференциальная система 31
— — — на многообразии 1-струй каноническая 32
волновой фронт 250, 332
вполне интегрируемая гамильтонова система 120
— — пфаффов дифференциальный идеал 28
вторая вариация 232
— квадратичная форма 126
- Гамильтона* уравнения 90
— функция *см.* гамильтониан
Гамильтона — *Якоби* уравнение 244, 250
гамильтониан 108, 111
гамильтонова система вполне интегрируемая 120
— форма уравнений *Эйлера* — *Лагранжа* 119
гауссова кривизна 74
Гейзенберга группа 333
геодезическая 38
— аффинная 40
— кривизна кривой 73
— на римановом многообразии 38
— — поверхности 75
— поле 242
Гессе матрица 103
Гильберта инвариантный интеграл 242
гиперэллиптическая кривая 117
главные моменты инерции 164
— оси инерции 164
головномый 274, 348
— ограничения 50, 273
горизонтальная дифференциальная форма 22
граничное подрасслоение 230
— условия на допустимые вариации 194
— — сопряжённые 211
грассманово многообразие 28
— расслоение 28
группа *Гейзенберга* 333
— ортогональная 338
- Дарбу* репер 129
— теорема 30, 56
действия функционал 37

¹⁾ При повторении слова иногда заменяются на тире, даже если они имеют другие окончания. На возможность изменения окончания указывает курсивный шрифт (например, алгебраическая). — *Прим. перев.*

— функция 247
Делоне задача 15, 151
 дифференциал $\delta\Phi$ 65
 дифференциальный идеал 27
 — — порожденный набором форм 27
 — — ограничение 289
 — система 31, 322
 — — алгебраическая 115
 — — вполне неголомомная 323
 — — индуцированная 51
 — — каноническая 32
 — — *Эйлера* — *Лагранжа* 13, 87
 — форма горизонтальная 22
 длина дуги аффинная 141
 допустимая вариация 194
 — замена корепера 95
 — кривая 318
 достижимые взаимно точки 54—55

задача *Делоне* 15, 151
 — изопериметрическая 297
 — *Лагранжа* 10, 11, 273
 — о брахистохроне 274, 311
 — — — в сопротивляющейся среде 276
 — *Паппа* 297
 закон *Ньютона* 70
 — сохранения полной энергии 110

идеал семейства *Холла* 344
 изопериметрическая задача *Паппа* 297
 изотропное граничное расслоение 230
 — плоскость (для внешней 2-формы) 243
 импульсов пространство 13, 87
 — — приведённое 17, 194
 инвариантный интеграл *Гильберта* 242
 инволюция (функции в инволюции) 120
 индекс поворота кривой 81
 индекса форма 18, 235
 индикатриса 251
 индуцированная дифференциальная система 51
 инерции момент 164
 — эллипсоид 164
 интегральное многообразие внешней дифференциальной системы 31
 — — дифференциального идеала 27
 — — ограничения 296
 — элемент внешней дифференциальной системы 31

— — дифференциального идеала 28
 интегрируемость в квадратурах алгебраическая 115
 инфинитезимальная вариация 42
 — — многообразия, удовлетворяющая смешанным граничным условиям 269
 — симметрия вариационной задачи 106

каноническая внешняя дифференциальная система на многообразии 1-струй 32
 — 1-форма 21
 — поднятие иммерсии 60
Картана А. формула 21
Картана Э. лемма 98
 — — метод многоугольника 143
 — — система (ассоциированная с 2-формой) 30, 56
 — — структурное уравнение для формы кривизны 215
 — — число 52
 касательное пространство к $\mathcal{U}(I, \omega)$ 41, 47
 — расслоение проективизированное 82
 квадратичная форма, ассоциированная с вариационной задачей 98
 квазинтегрируемость в квадратурах 77, 117
 квазиоднородность 335
 кеплерово движение 311
 кинетическая энергия 37
 классическая вариационная задача 36
 — — — невырожденная 13, 88
 — — — с ограничениями 38
 — — — — k -го порядка 40
 — — — k -го порядка 39
 — уравнения *Якоби* в гамильтоновой форме 223
Клеро теорема 115
 ковариантная производная на римановом многообразии 213
 конфигурационное пространство 162
 коприсоединённое представление 160
 корепера допустимая замена 95
Костанта — *Сурьо* теорема 157, 161
Коши характеристическая система 56
 кривая постоянного типа 156, 168
 — рациональная нормальная 141
 — согласованная с распределением 318
 кривизна аффинная 141
 — гауссова 74
 — геодезическая 73
 — средняя 127

кривизны кривой 173
кривизны оператор 216
Кристоффеля символы 70
кручение 145

Лагранжа множители 281, 328
лагранжево подпространство 244
лагранжиан 36, 328
— второго порядка 39
— однородный 113
Лежандра преобразование 93
Ли производная 21
линейчатая поверхность 186
локально вложимая *пфафова* система 52
локальный минимум 228
— — сильный 228
— — слабый 228

матрица связности 213
Маурера — *Картана* уравнение 22
— — форма 22
метод характеристик 257
механическая система 37
минимум локальный 228
— сильный 228
— слабый 228
многообразиие риманово 38
— струй 22
— *Штифеля* 200, 240
множители *Лагранжа* 281, 328
модифицированная скобка *Пуассона* 105
момент инерции 164
Мопертюи принцип 114

наименьшего действия принцип 37
невыврожденная вариационная задача 13, 88
— — классическая 90, 93, 118
— — со смешанными граничными условиями 270
— кривая в *грассманиане* 186
— функционал Φ 90, 93
неголономный 274, 348
— геодезическая 329
— — поток 330
— метрика 329
— ограничения 38, 273
— сфера 322
— экспоненциальное отображение 331
независимости условие 32
— форма 32
независимых переменных число 31

Нётер теорема 107
нормаль аффинная 142
нормальное расслоение 20
— форма *Пфаффа* — *Дарбу* 31
Ньютона закон 70
ньютоново движение 307

ограничения 38, 50, 273
— голономные 38, 273
— интегральные 296
— неголономные 39, 273
однородный лагранжиан 113
омбилика 188
оператор кривизны 216
орбита (точки) коприсоединенного представления 160
ортогональная группа 338

Панна изопериметрическая задача 297
первый интеграл вариационной задачи 104
— — алгебраический 115
— продолжение внешней дифференциальной системы 60
— — многообразия 83
— производная система 50
плоскость изотропная 243
плюккеровы координаты 184
поднятие иммерсии каноническое 60
— *Френе* 168
поле (геодезическое) 242
— реперов 212
полный интеграл уравнения *Гамильтона* — *Якоби* 254
— энергия 93
постоянного типа кривая 156, 168
потенциальная энергия 37
правило множителей *Лагранжа* 281
преобразование *Лежандра* 93
приведённое пространство импульсов 17, 194
принцип *Мопертюи* 114
— наименьшего действия 37
присоединённое представление 160
приспособленный к подрасслоению базис 53
продолжение многообразия первое 60
— первое 60
— универсальное 59
проективизированное касательное расслоение 82
производная *Ли* 21
— отображение, ассоциированное с *пфафовой* системой 50

- система 54
- — первая 50
- флаг 54
- пространственная форма 77
- пространство импульсов 13, 87
- — приведённое 17, 194
- конфигурационное 162
- Пуассона* скобка 120
- — модифицированная 105
- пучок 321
- Пфаффа* — *Дарбу* теорема 31
- пфаффов дифференциальный идеал 27
- — — вполне интегрируемый 28
- система 10, 29
- — в хорошей форме 49
- — локально вложимая 52

- ранг 2-формы 29
- распределение 29, 318, 322
- голономное 318
- инволютивное 29, 323
- интегрируемое 318
- неголономное 318
- неинтегрируемое 318
- расслоение единичных сфер 212
- рафинированные структурные уравнения 53
- рациональная нормальная кривая 141
- регулярный росток распределения 325
- репер 25
- аффинный 25
- *Дарбу* 129
- *Френе* 9, 145
- — аффинный 141
- решение дифференциальной системы
- Эйлера* — *Лагранжа* со смешанными граничными условиями 272
- уравнения *Гамильтона* — *Якоби* 244
- риманова метрика 37
- многообразие 38

- связи 273
- голономные 273
- конечные 273
- связности матрица 213
- сдвиг по времени 109
- семейство *Холла* 343
- сильно невырожденная вариационная задача 14, 98
- сильный локальный минимум 228
- символы *Кристоффеля* 70
- симплектическая структура 119
- форма стандартная 21
- система ассоциированная 55
- *Картана* 30, 56
- механическая 37
- производная 50, 54
- характеристическая *Коши* 56
- скобка *Пуассона* 120
- — модифицированная 105
- слабый локальный минимум 228
- слой 29
- смешанные граничные условия 269
- пучок 330
- сопряжённые граничные условия 211
- сохраняемые величины 104
- средняя кривизна 127
- стабилизация 322
- стандартные локальные координаты на многообразии 1-струй 23
- симплектическая форма на кокасательном расслоении 21
- степень неголономности 323
- струй многообразие 22
- структурное уравнение *Картана* 215
- — поверхности 74
- — подвижного репера 26
- — рафинированные 53

- твёрдое тело 162
- теорема *Дарбу* 30, 56
- *Картана* — *Кэлера* 12, 58
- *Клеро* 115
- *Костанта* — *Сурьо* 157, 161
- *Нётер* 107
- о всюду плотной орбите 346
- о квазитреугольной форме 346
- о параллелепипеде 332
- *Пфаффа* — *Дарбу* 40
- *Фробениуса* 38, 323
- *Холла* — *Витта* 343
- *Чжоу* 70
- *Якоби* 243
- тришкин кафтан 239

- универсальное продолжение 59
- уравнения в вариациях для интегрального многообразия 47
- — — функционала 36
- *Гамильтона* — *Якоби* 244
- — для классической вариационной задачи 250
- *Маурера* — *Картана* 22
- *Ньютона* 308
- *Пфаффа* 60
- *Френе* — *Серре* 145, 173
- *Эйлера*, ассоциированные с вариационной задачей 169

Предметный указатель

- — для левоинвариантного лагранжиана на группе *Ли* 159
- *Эйлера* — *Лагранжа* 11, 12, 36, 68, 69
- — для хорошо поставленной смешанной вариационной задачи 272
- *Якоби*, ассоциированные с нормальным векторным полем вдоль геодезической 216
- — классические в гамильтоновой форме 223
- усечённая связность 341
- условие независимости 32

- флаг производный 69
- форма индекса 18, 235
- *Маурера* — *Картана* 22
- независимости 32
- пространственная 77
- связности 213
- формула *А. Картана* 29
- *Римана* — *Гурвица* 154
- Френе* поднятие 168
- репер 9, 145
- — аффинный 141
- Френе* — *Серре* уравнения 145, 173
- Фробениуса* теорема 29
- функционал Φ 36
- действия 37
- функция *Гамильтона* см. гамильтониан
- действия 247
- *Лагранжа* 328
- эллиптическая 78

- характеристик метод 257
- характеристическое векторное поле 258
- направление, ассоциированное с 2-формой 29
- система *Коши* 56
- хорошая форма пфафовой системы 49
- хорошо поставленная вариационная задача 193
- — смешанная вариационная задача 272

циклическая координата 110, 112

Чжоу теорема 55

число *Картана* 52

— независимых переменных в дифференциальной системе 31

Штифеля многообразие 200, 240

Эйлера тождество для однородных функций 113

— уравнения 16

— — ассоциированные с вариационной задачей 169

— — для левоинвариантного лагранжиана на группе *Ли* 159

Эйлера — *Лагранжа* дифференциальная система 13, 87

— — уравнения 11, 12, 36, 68, 69

— — для хорошо поставленной смешанной вариационной задачи 272

экспоненциальное отображение 331

экстремаль 11, 36

эллипсоид инерции 164

эллиптическая функция 78

энергия кинетическая 37

— полная 93

— потенциальная 37

Якоби уравнения, ассоциированные с нормальным векторным полем вдоль геодезической 216

— — классические в гамильтоновой форме 223

якобиевы векторные поля 211

Янга — *Миллса* внешний функционал 127

C^∞ -топология *Уитни* 345

Е-функция *Вейерштрасса* 266

— — для вариационной задачи второго порядка 267

k-струя 22

Q-рост 344

— максимальный 345

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Определения используемых в этом списке терминов можно найти в основном тексте книги с помощью предметного указателя

$A^*(X)$	внешняя алгебра гладких дифференциальных форм на многообразии X
$\{\Sigma\}$	алгебраический идеал в $A^*(X)$, порожденный множеством Σ форм на X
(I, ω)	внешняя дифференциальная система с условием независимости
$\mathcal{V}(I, \omega)$	множество интегральных многообразий системы (I, ω)
$T_N(\mathcal{V}(I, \omega))$	касательное пространство к $\mathcal{V}(I, \omega)$ в «точке» N
$(I, \omega; \varphi)$	вариационная задача (см. разд. а гл. I)
$\Phi : \mathcal{V}(I, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$	функционал на $\mathcal{V}(I, \omega)$
$\delta\Phi : T_N(\mathcal{V}(I, \omega)) \rightarrow \mathbb{R}$	дифференциал (вариация) функционала Φ
$\mathcal{V}(I, \omega; [A, B])$	подмножество в $\mathcal{V}(I, \omega)$, задаваемое граничными условиями
$T_N(\mathcal{V}(I, \omega; [A, B]))$	касательное пространство к $\mathcal{V}(I, \omega; [A, B])$
$\equiv \text{ mod } I$	сравнение по модулю идеала $I \subset A^*(X)$
$\equiv$	сравнение по модулю образа отображения $I \wedge I \rightarrow A^*(X)$ (см. (II.b.4))
PE	проективизация векторного пространства E
θ_N	ограничение формы $\theta \in A^*(X)$ на подмногообразии $N \subset X$
$d\theta = \Theta$	внешний дифференциал дифференциальной формы θ (строчная буква) часто обозначается заглавной буквой Θ
$\mathcal{F}(\cdot)$	многообразие реперов

Список обозначений

$\mathcal{L}_v \varphi$	производная Ли формы φ вдоль векторного поля v
Y	пространство импульсов, ассоциированное с задачей $(I, \omega; \varphi)$
Q	приведенное пространство импульсов, ассоциированное с задачей $(I, \omega; \varphi)$
$\text{span } \{\theta^1, \dots, \theta^\alpha\}$	линейная оболочка элементов $\theta^1, \dots, \theta^\alpha$ (над соответствующим кольцом, полем)

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Введение	7
0. Предварительные сведения	20
a. Обозначения из теории многообразий	20
b. Язык многообразий струй	22
c. Многообразия реперов	25
d. Дифференциальные идеалы	27
e. Внешние дифференциальные системы	31
I. Уравнения Эйлера—Лагранжа для дифференциальных систем с одной независимой переменной	35
a. Постановка задачи. Классические примеры	35
b. Уравнения в вариациях для интегральных многообразий дифференциальных систем	41
c. Дифференциальные системы в хорошей форме. Производный флаг и характеристики Коши	48
d. Вывод уравнений Эйлера—Лагранжа. Примеры	63
e. Дифференциальная система Эйлера—Лагранжа. Невырожденные вариационные задачи. Примеры	81
II. Первые интегралы системы Эйлера—Лагранжа. Теорема Нётер и примеры	104
a. Первые интегралы и теорема Нётер. Некоторые классические примеры	104
b. Исследование системы Эйлера—Лагранжа для некоторых вариационных задач дифференциальной геометрии	136
1. Функционал $\int \kappa^2 ds$ для плоских кривых	136
2. Аффинная длина дуги	140
3. Функционал $\int \kappa^2 ds$ для пространственных кривых	145
4. Задача Делоне	151
III. Уравнения Эйлера для вариационных задач в однородных пространствах	155
a. Вывод этих уравнений	155
1. Мотивировки и идеи	155
2. Краткий обзор классического случая	157
3. Общие уравнения Эйлера	167
b. Исследование уравнений Эйлера для некоторых примеров из дифференциальной геометрии	172
1. Уравнения Эйлера, ассоциированные с функционалом $\int (\kappa^2/2) ds$ для кривых в E^n	172

2. Некоторые задачи п. 1, но для кривых в S^n	179
3. Уравнения Эйлера, ассоциированные с невырожденными линейчатыми поверхностями	184
IV. Граничные условия. Уравнения Якоби и вторая вариация. Уравнение Гамильтона—Якоби	191
а. Граничные условия	191
б. Якобиевы векторные поля и сопряженные точки. Примеры	209
с. Геометрия приведенного пространства импульсов. Вторая вариация, форма индекса и достаточные условия локального минимума	226
1. Геометрия пространства импульсов и приведенного пространства импульсов	229
2. Перенесение задачи о второй вариации на пространство импульсов	232
3. Уравнение Якоби и вторая вариация	234
д. Поля и уравнения Гамильтона—Якоби. Новые достаточные условия локального минимума	241
е. Смешанные граничные условия и классическая задача Лагранжа	268
1. Хорошо поставленные смешанные вариационные задачи	268
2. Задача Лагранжа	273
3. Классический подход к задаче Лагранжа	281
4. Некоторые смежные примеры	288
Приложение. Различные замечания и примеры	296
а. Задачи с интегральными ограничениями. Примеры	296
б. Некоторые классические задачи, рассмотренные методом подвижных реперов	307
1. Движение по Ньютону	307
2. Брахистохрона	311
3. Минимальная поверхность вращения	313
Литература	315
Добавление. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович. Неголономные задачи и геометрия распределений	318
§ 1. Введение	318
§ 2. Распределения, дифференциальные системы и кораспределения	321
1. Определения. Теорема Фробениуса	321
2. Вектор роста, распределение общего положения и вопросы классификации	325
3. Двойственные формулировки. Пфафова система и кораспределение	326
§ 3. Условная вариационная задача с неголономными связями и неголономная риманова геометрия	327
1. Теорема Рашевского—Чжоу и постановка задачи	327
2. Уравнения Эйлера—Лагранжа и неголономная метрика	328
3. Задачи Коши	329
4. Неголономное экспоненциальное отображение	330
5. Теорема о параллелепипеде	331
6. Геометрия неголономной e -сферы и ее особенности	332

Оглавление

§ 4. Задачи неголономной механики. Усеченная связность	339
1. Механика со связями	339
2. Проектирование и усеченная связность	341
3. Сравнение механической и вариационной задач	342
§ 5. Алгебраические инварианты. Нормальные формы струй наборов векторных полей	343
1. Свободные алгебры Ли и целочисленные инварианты наборов векторных полей	343
2. Теоремы о росте и общность положения	345
3. Открытая и всюду плотная орбита в пространстве наборов струй векторных полей	346
4. Универсальный пример набора векторных полей максимального роста	347
Литература	348
Именной указатель	350
Предметный указатель	351
Список обозначений	356

Научное издание

Филлип А. Гриффитс

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ