В.А.Красильников, В.В.Крылов

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИЧЕСКУЮ АКУСТИКУ

В книге дано сжатое изложение физической акустики — области физики, изучающей взаимодействия акустических волн с веществом на макро- и микроскопическом уровнях. Приведены основные сведения из механики сплошной среды, необходимые для анализа проблем физической акустики. Изложены линейные и нелинейные задачи акустики газов, жидкостей и твердых тел. Рассмотрены проблема «турбулентность и звук», основы акустики магнитных сред и кристаллоакустики. Даны важнейшие сведения по акусто-электронике и акустооптике. Ряд разделов книги иллюстрирован изложением методики экспериментов и экспериментальными данными.

Для студентов физических, физико-технических и физико-химических специальностей, аспирантов, преподавателей вузов, слушателей факультетов повышения квалификации, инженеров-акустиков, а также для лиц, занимающихся механикой жидкостей и газов, теорией упругости, физикой твердого тела, радиофизикой, обработкой сигналов, гидроакустикой и геофизикой.

Содержание

Предисловие 6

ЧАСТЬ I. ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Глава 1. Некоторые вопросы гидродинамики 9

§ 1. Идеальная жидкость 9

§2. Вязкая и теплопроводящая жидкость 14

§ 3. Примеры точных решений 17

§ 4. Законы подобия. Безразмерные числа в гидродинамике 21

§ 5. Приближенные решения уравнений вязкой жидкости при больших и малых числах Рейнольдса. Пограничный слой 23

§ 6. Волны на поверхности жидкости 25

§ 7. Турбулентное движение жидкости. Закон «двух третей» 27

Глава 2. Звуковые волны в газах и жидкостях. Релаксационная теория 34

§ 1. Звуковые волны бесконечно малой амплитуды в идеальной среде 34

§ 2. Скорость звука и поглощение в газах и жидкостях 36

§ 3. Дисперсия и поглощение звука. Экспериментальные исследования 41

§ 4. Релаксация объемной вязкости 47

§ 5. Релаксация сдвиговой вязкости в жидкостях 55

§ 6. Акустическая спектроскопия 60

Глава 3. Основы нелинейной акустики газов и жидкостей 65

§ 1. Плоская волна конечной амплитуды в газе и жидкости в отсутствие диссипации 65

§ 2. Экспериментальные методы исследования 72

§ 3. Плоская нелинейная волна в среде с диссипацией 76

§ 4. Нелинейные плоские волны в среде с дисперсией 80

§ 5. Сферические и цилиндрические нелинейные волны 85

§ 6. Ограниченные пучки 87

Глава 4. Взаимодействия нелинейных акустических волн. 89

Параметрические антенны
§ 1. Взаимодействие нелинейных волн 89
§ 2. Стоячие нелинейные волны и резонаторы 94
§ 3. Параметрические процессы в нелинейных волнах. Параметрическая излучающая и приемная антенны ' 99
§4. Статистические явления при распространении нелинейных акустических волн 108
§ 5. Поглощение звука шумом. Акустическая турбулентность ПО
Глава 5. Радиационное давление. Акустические течения 118
§ 1. Радиационное давление. Общие сведения 118
§ 2. Радиационная сила давления звука на взвешенные сферические частицы 126
§ 3. Взаимодействие двух сферических частиц в звуковом поле 132
§ 4. Акустические течения 135
Глава 6. Акустическая кавитация. Распространение звука в среде с пузырьками 138
§ 1 Общие сведения 138
§ 2. Динамика одиночного газового пузырька в акустическом поле 139
§ 3. Динамика одиночного парового пузырька 147
§ 4. Асимметричное захлопывание кавитационных пузырьков в жидкости 152
§ 5. Кавитационная область и пороги кавитации 155
§ 6. Распространение звука в среде с пузырьками 160
Глава 7. Турбулентность и звук 170
§ 1. Введение. Общие сведения 170
§ 2. Приближение геометрической акустики 171
§ 3. Приближенный учет дифракционных поправок. Метод плавных возмущений 179
§ 4. Задача о рассеянии звука на турбулентности 182
§ 5. Эксперименты по рассеянию звука на турбулентных неоднород-ностях 186
ЧАСТЬ II. ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ
Глава 8. Линейная акустика изотропных твердых тел 188
§ 1. Основные сведения из теории упругости 188
§ 2. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле 193
§ 3. Отражение и преломление продольных и поперечных волн 196
§ 4. Поверхностные волны Рэлея 199
§ 5. Другие типы поверхностных волн 203
§ 6. Волны в пластинках и стержнях 208
Глава 9. Основы кристаллоакустики 213
§ 1. Плоские упругие волны в кристаллах. Уравнение Кристоффеля. Квазипродольные и квазипоперечные волны 213
§ 2. Влияние симметрии упругих свойств на распространение волн. Пример расчета для кубического кристалла 215
§ 3. Поток энергии. Фазовая и групповая скорости 219
§ 4. Волны в пьезоэлектрических кристаллах. Коэффициент 221

электромеханической связи
§ 5. Отражение и преломление упругих волн на границах раздела 225
§ 6. Поверхностные волны в кристаллах 227
§ 7. Учет дискретности кристаллической решетки. Акустическая активность и другие эффекты, обусловленные микроструктурой 231
Глава 10. Поглощение и скорость звука в твердых телах. Взаимодействие с тепловыми фононами и дислокациями. Акустическая эмиссия 236
§ 1. Введение. Общие сведения 236
§ 2. Поглощение звука в изотропных диэлектриках 238
§ 3. Некоторые сведения о колебаниях кристаллической решетки и фононах 241
§ 4. Взаимодействие звуковых волн с тепловыми фононами. Микроскопическое рассмотрение. Низкие температуры и гиперзвуковые частоты 246
§ 5. Взаимодействие звуковых волн с тепловыми фононами. Макроскопическое рассмотрение. Высокие (комнатные) температуры и ультразвуковые частоты 253
§ 6. Дислокационное поглощение и дисперсия звука. Акустическая эмиссия 261
Глава 11. Нелинейная акустика твердого тела 280
§ 1. Введение. Общие замечания 280
§ 2. Основные сведения из нелинейной теории упругости 281
§ 3. Взаимодействие упругих волн конечной амплитуды в изотропном твердом теле 285
§ 4. Нелинейные акустические эффекты в кристаллах 291
§ 5. Экспериментальные методы исследования нелинейных явлений в твердых телах и некоторые результаты этих исследований 298
Глава 12. Акустоэлектроника 305
§ 1. Общие сведения 305
§ 2. Возбуждение и детектирование поверхностных волн. Встречно-штыревой преобразователь 307
§ 3. Линии задержки и фильтры, использующие встречно-штыревые преобразователи 313
§ 4. Рассеяние поверхностных волн. Резонаторы и фильтры на основе отражательных структур 318
§ 5. Усиление звука дрейфом носителей в пьезополупроводниках и слоистых структурах 324
§ 6. Волновые взаимодействия, обусловленные токопой нелинейностью. Акустоэлектрический эффект 330
§ 7. Нелинейные акустоэлектронные устройства на поверхностных волнах 333
Глава 13. Акустооптика 339
§ 1. Введение 339
§ 2. Дифракция света на звуке. Раман-натовский и брэгговский режимы 340
§ 3. Дифракция света на поверхностных акустических волнах 344
§ 4. Рассеяние Мандельштама — Бриллюэна на тепловых колебаниях 346

§ 5. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна 348
§ 6. Акустооптика жидких кристаллов 351
§ 7. Некоторые применения акустооптически.х взаимодействий 354
Глава 14. Волны в магнитоупорядоченных кристаллах 368
§ 1. Основные сведения о магнитоупорядоченных кристаллах 368
§ 2. Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках 371
§ 3. Магнитоупругие волны 375
§ 4. Затухание магнитоупругих волн 378
§ 5. Нелинейные эффекты 379
Литература 382
Предметный указатель 400

Предметный указатель *)

*) Настоящий предметный указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. Термины и понятия, отраженные в оглавлении, в указатель не включены

Адиабата Пуассона 11
Акустическая голография 357
— левитация 130
Акустические оси 218, 226, 233
— ветви колебаний 243
Акустолюминесценция 366
Акустооптические дефлекторы 364
— процессоры 365
Взаимодействие акустоэлектронное 325
— встречное 295, 333
— вырожденное 295, 334
— трехволновое 89
— фонон-фононное 244
Вектор смещения 189
Волны вязкие 20, 56
— гравитационно-капиллярные 26
— Гуляева — Блюштейна 203
— изгибные 210
— клиновые 207
— крутильные 212
— Лэмба 210
— Лэмба обобщенные 205
— Лява 204
— магнитостатические 373
—нормальные продольные 210
— — *SH* 210
— простые 68
— стационарные 70
— Стоунли 205
— температурные 20
— ударные 12
— утечки 206, 231
— щелевые 206
— юнговские 211
Выпрямленная теплопередача 151
Генерация обратной волны 295
Давление звуковое 34
— ланжевеновское 120
— рэлеевское 121
Закон Тука 192
— — обобщенный 213
Запоминание акустических сигналов 295, 336
Излучение звука дислокациями 272
— — трещинами 276
Магноны 373
Магнитоакустический резонанс 377
Механизм Ахиезера 257
— Ландау — Румера 257
Модули упругости 192, 215, 282
Односторонняя диффузия 146
Оптические ветви колебаний 243
Отражательные решетки ПАВ 320
Пики Бордони 268
Рассеяние звука на звуке 93, 290
Резонаторы на ПАВ 321

Решение Римана 66
Сила Бьёркнеса 133
Скорость звука адиабатическая 11, 36
высокочастотная 47
Скорость колебательная 34
Солитон 84
Соотношение Вайнрайха 332
Соотношения Крамерса — Кронига 54
— Мэнли — Роу 100
Тензор деформации 189
— напряжений 190
— — Пиолы — Кирхгофа 283
— термодинамических напряжений 193, 282
Термооптическая генерация звука 359
Углы Брюстера 199, 234
Уравнение Бернулли 17
— Больцмана кинетическое 256
— Бюргерса -77
— Герца — Кнудсена 149
— Дайсона 163
— движения упругой среды 190, 194, 213
— Кельвина — Фойгта 49
— Кортевега — де Вриза 83
— Навье — Стокса 14, 19
— непрерывности 10, 13
— Нолтинга — Непайреса 141
— переноса тепла 16
— Рэлея 140, 200
— Хохлова — Заболотской 87
— эйконала 173
— Эйлера 9, 13
Условия синхронизма 89, 289
Устройства свертки и корреляции 333
— считывания оптических изображений 337
Фильтры дисперсионные 317, 323
— полосовые 315
Флуктуации амплитуды 178
— фазы 174
Формула Кёнига 133
— Кинга 130
— Миннаерта 144
— Стокса — Кирхгофа 41
Фотоакустическая спектроскопия 363
Электроакустическое эхо 295
Эффективное магнитное поле 370

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общей, или классической, акустикой называют раздел физики, имеющий дело с упругими колебаниями и волнами в классической сплошной среде в случае, когда длины волн значительно больше расстояний между атомами и молекулами. Другими словами, общая акустика — это часть механики сплошных сред (гидродинамики и теории упругости), изучающая колебательные и волновые процессы. Если же среда характеризуется не только механическими, но и другими физическими свойствами (например, наличием пьезоэлектричества, фотоупругости, магнитных свойств и т. д.), то процесс распространения звука в такой среде может существенно зависеть от этих свойств. Для описания акустических явлений в этом случае уже недостаточно традиционных представлений механики сплошных сред. Необходимо использовать более общие модели, основанные на рассмотрении соответствующих явлений на макро- и микроуровнях. Это относится к взаимодействиям звука с тепловыми упругими волнами в кристаллах — фононами, взаимодействиям со светом — фотонами (акустооптика), со свободными носителями заряда — электронами (акустоэлектроника), с возбуждениями в магнитоупорядоченных кристаллах — магнонами. Когда длина волны становится сравнимой с параметром решетки кристалла, возникают специфические явления, которые также не могут быть описаны в рамках классической механики сплошных сред.

Область акустики, изучающую взаимодействия звука с веществом как на макроскопическом, так и на микроскопическом уровнях, обычно называют физической акустикой. В круг ее задач входит, с одной стороны, изучение особенностей распространения звука в средах с различными физическими свойствами и использование этих особенностей в практических целях. Это — прямые задачи физической акустики. С другой стороны, зондируя исследуемую среду звуком различной частоты и амплитуды, оказывается возможным определять многие ее физические свойства. Это — обратные задачи физической акустики.

В настоящее время физическая акустика занимает видное место не только в акустике в целом, но и во многих смежных областях физики; она служит основой многих практических приложений. За последние 25—30 лет возникли и получили большое развитие такие новые области, как нелинейная акустика, кристаллоакустика, акустоэлектроника, акустооптика, физика поверхностных волн. Результаты физической акустики нашли широкие приложения в физике твердого тела, квантовой физике, радиоэлектронике.

Физической акустике посвящена обширная литература. Содержание различных ее разделов рассредоточено по ряду специальных журналов и монографий. При этом изложение многих вопросов слишком специализировано, для того чтобы начинающий читатель, приступая к изучению физической акустики, мог получить необходимые сведения по основному кругу рассматриваемых в ней проблем. Так, например, широко известно многотомное американское издание «Физическая акустика», из которого у нас в стране издательством «Мир» выпущено 11 книг (в США выходят все новые и новые тома этой серии). Обширный и интересный материал, собранный в этом издании, написан различными авторами в виде статей обзорного характера. Вследствие этого он насыщен специальной терминологией, очень разнороден как по характеру, так и по стилю и уровню изложения. В результате этот многотомный труд доступен для изучения, как правило, лишь узким специалистам. Как в нашей, так и в зарубежной литературе пока нет монографии или учебного пособия, где бы на современном уровне сконцентрированно и сжато были изложены основные вопросы физической акустики. Предлагаемая книга — попытка осуществить такой труд. Она представляет собой расширенный курс лекций, которые читаются студентам акустической специальности радиофизического отделения на физическом факультете Московского университета.

Имеются трудности в определении того, что именно должно быть включено в понятие физической акустики и, как следствие этого, в выборе материала. Содержание книги в значительной степени сложилось под влиянием научных интересов одного из авторов (В. А. Красильникова) в процессе его длительной работы со студентами и аспирантами на кафедре акустики физического факультета МГУ, а также с сотрудниками Акустического института им. Н. Н. Андреева.

Многие вопросы из той обширной области, которую представляет собой физическая акустика, мы не могли включить в эту книгу. Так, опущены разделы по квантовым явлениям и по взаимодействию звука с электронами в металлах, не рассмотрены процессы аэродинамической генерации звука, очень кратко освещены вопросы возбуждения и рассеяния звука. С другой стороны, некоторые разделы изложены более подробно, чем, казалось, следовало бы. Так, основным понятиям гидродинамики посвящена отдельная глава, в то время как аналогичные сведения из теории упругости излагаются весьма конспективно. Это связано с тем, что, как показал наш опыт, студенты обычно лучше знакомы с теорией упругости, чем с гидродинамикой. В книге мы намеренно уделили большое внимание нелинейным задачам; наше твердое убеждение состоит в том, что развитие физической акустики идет и в ближайшее время пойдет еще более быстрыми темпами именно в этом направлении. Будут развиваться (как в теоретическом, так и в особенности в экспериментальном плане) те области физической акустики, где волны конечной амплитуды играют заметную роль.

Первая часть книги написана В. А. Красильниковым. При написании этой части большую помощь оказал А. М. Обухов, который сделал ряд ценных замечаний по главам 1 и 7. К. Н. Баранскому принадлежат основные идеи § 5 гл. 2, относящегося к релаксации сдвиговой вязкости; он также высказал ряд ценных замечаний по этой главе. В. Н. Алексеев принял большое участие в написании гл. 5, в которой использованы полученные им новые результаты о радиационном давлении звука на сферу и о взаимодействии двух сферических частиц в звуковом поле. В. Н. Алексеев и В. П. Юшин оказали большую помощь в написании гл. 6 (звуковая кавитация), в которой изложен ряд полученных ими новых результатов.

Во второй части книги гл. 10 написана В. А. Красильниковым, главы 8, 9 и 12 написаны В. В. Крыловым и главы 11, 13 и 14 совместно — В. А. Красильниковым и В. В. Крыловым. При написании этих глав авторы пользовались советами и замечаниями А. Г. Козорезова, В. И. Павлова, И. Ю. Солодова. Изложение вопросов нелинейной кристаллоакустики в значительной степени основано на оригинальных результатах, полученных В. Е. Лямовым. Ряд ценных замечаний сделали Л. К. Зарембо и О. В. Руденко, сотрудничество с которыми оказало большое влияние на формирование взглядов авторов по целому кругу проблем. Всем им авторы выражают искреннюю благодарность.

Эта книга написана физиками и предназначена прежде всего для физиков-экспериментаторов. Однако и начинающим теоретикам она, с нашей точки зрения, также может быть полезна. Книга не дает в руки теоретика рабочих технических приемов решения задач, но может ввести в курс дела по той или иной проблеме физической акустики.

Мы отдаем себе отчет, что некоторые положения или высказывания в этой книге могут показаться читателю спорными или, во всяком в случае, не лишенными недостатков. Все замечания и предложения по содержанию книги будут встречены нами с благодарностью.

Авторы

Часть I

ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 1. Идеальная жидкость

Теоретической основой физической акустики служит механика сплошных сред — гидродинамика и теория упругости. Подробное изложение гидродинамики содержится во многих книгах (см., например, [1—4]). Предполагая, что читатель знаком с ее основами, мы кратко остановимся лишь на тех сведениях, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Рассмотрим движение идеальной сплошной среды (жидкости или газа), вязкость и теплопроводность в которой отсутствуют. Закон Ньютона для сплошной среды — произведение массы единицы объема среды на ее ускорение равно действующей силе — в координатах неподвижного пространства (*координаты Эйлера*) запишется в виде

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho (\boldsymbol{v}\nabla)\, \boldsymbol{v} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{f}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость движения жидкости в данной точке пространства, ρ — плотность, p — давление и $\boldsymbol{f}$ — силы, действующие на единицу массы жидкости. (Например, $\rho\boldsymbol{f}=\rho\boldsymbol{g}$ — это сила тяжести, где $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения.) В этом уравнении $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ представляет собой так называемую локальную производную, $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ — конвективную производную. Это векторное уравнение называется *уравнением Эйлера*; оно содержит пять неизвестных — v_x, v_y, v_z, p, ρ. Сразу же отметим, что это уравнение нелинейное; нелинейность возникает, например, из-за присутствия конвективного члена $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$. Обычно в акустике, где скорость $\boldsymbol{v}$ есть колебательная скорость частиц жидкости, вызываемая прохождением волны в покоящейся среде, этот член отбрасывают, поскольку $\boldsymbol{v}$ мало и $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ — член второго порядка малости. Он значительно меньше остальных членов уравнения (1.1). Далее мы увидим, что во многих случаях этого делать нельзя, и учет конвективного члена позволяет рассматривать большой класс важных нелинейных эффектов.

Если при движении жидкости нет разрывов сплошности, масса в некотором фиксированном относительно неподвижного простран-

ства объеме сохраняется. Закон сохранения массы жидкости выражается *уравнением непрерывности*:

$$\partial\rho/\partial t + \nabla(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{1.2}$$

Правая часть (1.2) равна нулю, только если отсутствует источник массы. Условие несжимаемости жидкости $\rho = \text{const}$ запишется в виде

$$\nabla \boldsymbol{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.3}$$

Возможен другой подход к описанию движения, когда система координат связана с частицами среды *(лагранжевы координаты)*. Этот подход используется в теории упругости и некоторых задачах нелинейной акустики, там, где лагранжевы координаты удобны для задания граничных условий [5].

Если совокупность эйлеровых координат (E-координат) обозначить через x, y, z, а лагранжевых (L-координат) — через a, b, c, то преобразование от L-координат к E-координатам будет иметь вид

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t). \tag{1.4}$$

Обратное преобразование от E- к L-координатам:

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t). \tag{1.5}$$

Для совершения точного перехода от одних координат к другим нужно, вообще говоря, знать решение системы уравнений гидродинамики в E- или L-координатах. В акустических задачах, когда смещения частиц ξ из положения равновесия малы, этот переход можно выполнить приближенно. Связь между эйлеровой координатой x и лагранжевой a будет $x = a + \xi$, и, поскольку смещения малы, можно представить гидродинамические параметры, например акустическую скорость v в L- и E-координатах, в виде ряда по степеням ξ. Ограничиваясь в этом разложении членами второго порядка малости, имеем в L-координатах

$$v_L(a, t) = v_E(x - \xi, t) \approx v_E(x, t) - \xi \frac{\partial v_E}{\partial x} + \frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2 v_E}{\partial x^2} + \ldots \tag{1.6}$$

и в E-координатах

$$v_E(x, t) = v_L(a + \xi, t) \approx v_L(a, t) + \xi \frac{\partial v_L}{\partial a} + \frac{1}{2}\xi^2 \frac{\partial^2 v_L}{\partial a^2} + \ldots \tag{1.7}$$

В переменных Лагранжа уравнение непрерывности для «жидкого» объема (форма которого меняется с течением времени) в одномерном случае имеет вид

$$\rho(1 + \partial\xi/\partial a) = \rho_0, \tag{1.8}$$

а одномерное уравнение движения (при $\boldsymbol{f} = 0$) —

$$\rho_0 \partial^2\xi/\partial t^2 + \partial p/\partial a = 0. \tag{1.9}$$

Как видно, в отличие от (1.1), одномерное уравнение движения (1.9) в среде без вязкости в L-координатах линейно и имеет более простой вид.

Для несжимаемой жидкости система (1.1) и условие (1.3) (если сила $\boldsymbol{f}$ задана) представляют собой замкнутую систему четырех уравнений для четырех неизвестных: v_x, v_y, v_z и p. На основе этих уравнений могут решаться конкретные задачи. Для идеальной жидкости на непроницаемых границах обращается в нуль только нормальная к поверхности составляющая скорости. Из-за того, что жидкость не прилипает к стенкам, тангенциальная составляющая скорости на границе того же порядка, что и вдали от тела.

Акустика имеет дело со сжимаемыми жидкостями, поэтому неизвестной является также и плотность ρ. Чтобы замкнуть систему уравнений идеальной, но сжимаемой жидкости, необходимо еще одно уравнение, связывающее p и ρ. Таким уравнением служит *уравнение состояния* среды.

В случае идеального газа $du=C_V dT$, где C_V — теплоемкость при постоянном объеме, u — его внутренняя энергия (энергия единицы массы), и уравнение состояния может быть записано в виде *адиабаты Пуассона*:

$$p = p_0 (\rho/\rho_0)^{\gamma}. \tag{1.10}$$

Здесь p_0 — давление при $\rho=\rho_0$, $\gamma=C_p/C_V$, где C_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Отметим, что для газов всегда $\gamma>1$ (так, для воздуха при 20°C и атмосферном давлении $\gamma=1{,}43$) и уравнение состояния нелинейно; нелинейным также является и уравнение состояния для жидкостей. Сложность теории движения жидкости и состоит главным образом в том, что это движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных и нелинейным уравнением состояния. Следует добавить, что эти уравнения содержат большое число переменных.

Уравнение состояния для среды, отличающейся от идеального газа, можно получить, разложив $p=p(\rho)$ в ряд по малому объемному сжатию $\mu=(\rho-\rho_0)/\rho\ll 1$ [5]. Такие сжатия в акустике действительно малы, даже при больших интенсивностях звука. Разложение запишем в виде

$$p-p_0=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s,\ \rho=\rho_0}\Delta\rho+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,\ \rho=\rho_0}(\Delta\rho)^2+\ldots=$$

$$=\rho_0 c_0^2\mu+\frac{\rho_0^2}{2}\left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right)_{s,\ \rho=\rho_0}\mu^2+\ldots=A\mu+\frac{B}{2!}\mu^2+\ldots, \tag{1.11}$$

$$A=\rho_0 c_0^2, \quad B=\rho_0^2\,(\partial c^2/\partial\rho)_{s,\ \rho=\rho_0}. \tag{1.12}$$

Здесь c^2 — квадрат *адиабатической скорости звука*; безразмерная величина $B/A=(\rho_0/c_0^2)(\partial c^2/\partial\rho)_{s,\ \rho=\rho_0}$ определяет нелинейные свойства среды с точностью до квадратичных членов. Будем называть нелинейным параметром среды величину

$$n=1+\frac{\rho_0}{c_0^2}\left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right)_{s,\ \rho=\rho_0} \tag{1.13}$$

(когда справедливо (1.10), $n=\gamma$). Величина n выражается через A

и B так:

$$n = 1 + B/A. \tag{1.14}$$

Наряду с n часто используют параметр $\varepsilon = (n+1)/2$.

В отличие от газов, теория жидкостей еще недостаточно разработана, и мы не имеем уравнения состояния, которое следовало бы из теории. Поэтому для жидкости приходится пользоваться эмпирическим уравнением состояния, так называемым *уравнением Тэта*:

$$p = p_* [(\rho/\rho_0)^\Gamma - 1], \tag{1.15}$$

где p_* — так называемое внутреннее давление, Γ — нелинейный параметр, который характеризует отклонение адиабатической сжимаемости жидкости от линейного уравнения состояния. Если $p + p_*$ — полное давление, то тогда (1.15) формально не отличается от (1.10). Обе величины p_* и Γ — эмпирические постоянные. Из экспериментальных данных следует, что p_* имеет порядок 10^8 Па, а Γ для различных жидкостей меняется в пределах от 4 (жидкий азот) до 12 (ртуть); для воды $\Gamma \approx 7$. Адиабатический модуль сжимаемости жидкости

$$K_{\text{ад}} = \rho_0 (\partial p/\partial \rho)_{s,\ \rho=\rho_0} = \Gamma p_* \tag{1.16}$$

определяет внутреннее давление p_*, которое возникает из-за взаимодействия молекул. Подчеркнем еще раз, что для жидкостей имеется большое отличие Γ от единицы (нелинейность уравнения состояния жидкости значительна). Это обстоятельство, как мы увидим дальше, имеет большое значение в нелинейной акустике жидкостей.

Проведенные рассуждения относятся к случаю, когда изменения давления и плотности малы. Если приращения Δp и $\Delta \rho$ испытывают конечный скачок по нормали к некоторой поверхности раздела (прямой скачок уплотнения или *ударная волна*), уравнение состояния Пуассона заменяется так называемой ударной адиабатой или *адиабатой Рэнкина—Гюгонио*. Уравнение ударной адиабаты не может быть получено из системы уравнений гидродинамики, которые здесь неприменимы из-за разрывности движения. Оно получается из законов сохранения массы, энергии, импульса и имеет вид

$$p_2/p_1 = [(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1]/[(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2]. \tag{1.17}$$

Здесь индексы «1» и «2» относятся к значениям по обе стороны поверхности ударного фронта. Отметим, что при $p_2 \gg p_1$ (сильный разрыв) плотность идеального газа стремится к предельному значению

$$\rho_2 = \rho_1 (\gamma+1)/(\gamma-1). \tag{1.18}$$

Так, для двухатомного газа, которым можно приближенно считать воздух, $\gamma = 1{,}40$ и предельное значение $\rho_2/\rho_1 \approx 6$. При малых значениях p_2/p_1 ударная адиабата переходит в адиабату Пуассона (рис. 1.1). Заметим, что благодаря медленному росту плотности при $p_2 \gg p_1$ медленно уменьшается объем газа и произведение $pV = RT$, где

R — газовая постоянная, растет быстро. По этой причине быстро и до больших значений возрастает температура T. Этим объясняется, почему на фронте ударной волны возникают высокие температуры. Можно показать, что для слабых ударных волн, с которыми приходится встречаться, например, в нелинейной акустике, когда $(p_2-p_1)/p_0=\mu\ll 1$, $(\rho_2-\rho_1)/\rho_0=\mu\ll 1$, где p_0 и ρ_0 — давление и плотность в среде в отсутствие волны, также возникают скачки гидродинамических и термодинамических величин, в том числе возникает скачок энтропии (s_2-s_1). Этот скачок представляет собой величину третьего порядка малости по сравнению со скачком давления:

$$(s_2-s_1)\sim(\Delta p)^3. \qquad (1.19)$$

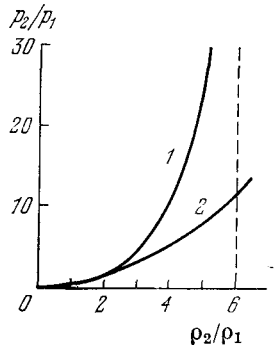


Рис. 1.1 Ударная адиабата Рэнкина — Гюгонио (кривая *1*) и адиабата Пуассона (кривая *2*).

Заметим, что при выводе ударной адиабаты Рэнкина — Гюгонио на основе законов сохранения массы, импульса и энергии ширина разрыва ударной волны δ считается равной нулю. В действительности в сильных ударных волнах, когда скачок скорости движения газа по обе стороны фронта $v_1-v_2=\Delta v$ становится сравнимым со скоростью звука c, величина δ имеет порядок длины свободного пробега молекул газа, и для рассмотрения вопроса о величине δ необходимо привлечение методов кинетической теории газов. Для слабых ударных волн (например, периодических ударных волн, с которыми приходится встречаться в нелинейной акустике) при рассмотрении вопроса о ширине фронта следует учесть в законах сохранения импульса и энергии процессы диссипации за счет вязкости и теплопроводности.

Далее мы будем пользоваться уравнениями как в векторных, так и в тензорных обозначениях. Уравнения (1.1) и (1.2) в компонентах записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=-\frac{c_0^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i},\\&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i}=0,\end{aligned} \qquad (1.20)$$

где $c_0^2=(\partial p/\partial\rho)_{\rho_0}$ — скорость звука. Как обычно, в тензорной записи мы условливаемся в том, что по индексам, повторяющимся дважды, производится суммирование. Умножив первое уравнение (1.20) на ρ, второе — на v_j и сложив их, получим закон сохранения импульса единицы объема идеальной жидкости в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j+p\delta_{ij})=0, \qquad (1.21)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $\delta_{ij}=1$ при $i=j$. Это

уравнение запишем также в виде

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad T_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j, \tag{1.22}$$

где T_{ij} есть *тензор плотности потока импульса*. Интегрируя (1.22) по объему V, ограниченному замкнутой поверхностью S, имеем закон сохранения импульса в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho v_i\, dV + \oint\limits_S T_{ij} n_j\, dS = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho v_i\, dV - F_i = 0. \tag{1.23}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, а сила, действующая на поверхность S объема V,

$$F_i = -\oint\limits_S T_{ij} n_j\, dS. \tag{1.24}$$

Закон сохранения энергии идеальной жидкости формулируется следующим образом. Полная энергия единицы объема жидкости (плотность энергии) определяется выражением

$$E = \rho v^2/2 + \rho u, \tag{1.25}$$

где $\rho v^2/2$ — кинетическая энергия и ρu — внутренняя энергия, которая для идеальной жидкости совпадает с потенциальной энергией. Из уравнений непрерывности и движения нетрудно получить для изменения плотности энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla\left[\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right], \tag{1.26}$$

где w — энтальпия единицы массы жидкости или тепловая функция; для адиабатического процесса $\nabla w = dp/\rho$. Взяв интеграл по объему от (1.26), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V E\, dV = -\oint\limits_S \rho \boldsymbol{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\boldsymbol{n}\, dS. \tag{1.27}$$

Вектор

$$\boldsymbol{I} = \rho \boldsymbol{v}\,(v^2/2 + w) \tag{1.28}$$

называют *вектором плотности потока энергии* или *вектором Умова — Пойнтинга*.

§ 2. Вязкая и теплопроводящая жидкость

Переходя к формулировке уравнений гидродинамики вязкой теплопроводящей жидкости в координатах Эйлера, отметим, что уравнение непрерывности для этого случая не изменяется. Уравнение Эйлера переходит в так называемое *уравнение Навье — Стокса*, в котором учитываются силы вязкости. Это уравнение в векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3}\eta + \eta'\right)\nabla\nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \tag{2.1}$$

где η [Па·с] — *сдвиговая вязкость* и η' — *объемная вязкость* при объемном расширении (сжатии). При этом здесь считается, что η и η' не зависят от координат, а также от давления и температуры, что представляет собой существенную идеализацию.

В вязкой среде тензор плотности потока импульса приобретает вид

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \sigma'_{ik}, \tag{2.2}$$

где σ'_{ik} — *тензор вязких напряжений*, наиболее общий вид которого дается выражением [1]

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \eta'\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \tag{2.3}$$

Отметим, что плотность потока импульса вдоль оси x (случай, соответствующий распространению плоской звуковой волны, о чем будет идти речь в § 2 гл. 2), вызванного внутренним трением, будет, согласно (2.2) и (2.3), определяться таким выражением:

$$\sigma'_{xx} = (4/3\eta + \eta')\,\partial v_x/\partial x. \tag{2.4}$$

Для несжимаемой жидкости выражение (2.3) упрощается:

$$\sigma'_{ik} = \eta\,(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i).$$

Уравнение сохранения импульса (1.21) переходит в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p\delta_{ij} - \sigma'_{ik}) = 0. \tag{2.5}$$

Если жидкость вязкая, но сжимаемость можно не учитывать, то в уравнении (2.1) $(1/3\eta+\eta')\nabla\nabla\boldsymbol{v}=0$ и уравнение Навье—Стокса упрощается, приобретая вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}(\nabla p + \eta\nabla^2\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f} = 0. \tag{2.6}$$

Вязкости η и η' определяют в большинстве случаев основные потери энергии звуковой волны. Как уже упоминалось, величину $\rho\,(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$ в (2.6) называют конвективным или нелинейным членом. Соответственно величину $\eta\nabla^2\boldsymbol{v}$ называют «вязким» членом.

Естественно, что граничным условием для движения вязкой жидкости вблизи абсолютно твердой стенки будет равенство нулю не только нормальной (как в случае идеальной жидкости), но и тангенциальных компонент скорости, так как частицы вязкой жидкости «прилипают» к стенке.

Система уравнений гидродинамики существенно усложняется, если учитывать еще теплопроводность жидкости. Хорошо известно, что процесс теплопередачи от нагретого тела к движущейся жидкости происходит значительно быстрее, чем в случае неподвижной жидкости. Обычная же теплопроводность покоящейся жидкости представляет собой процесс переноса тепла из более нагретых мест в более холодные. Этот процесс не связан с макроскопическим движением, а представляет собой молекулярный перенос энергии. *Вектор*

плотности теплового потока $\boldsymbol{q}$ при этом совпадает с направлением нормали к изотермической поверхности в каждой ее точке и определяется уравнением

$$\boldsymbol{q} = -\varkappa \nabla T, \tag{2.7}$$

где $\varkappa$ [Вт/(м·К)] — коэффициент теплопроводности. Для вязкой теплопроводящей жидкости энтропия уже не представляет собой неизменную величину. Увеличение энтропии описывается *уравнением переноса тепла*, учитывающим движение жидкости [1]

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\, s\right] = \frac{\eta}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right]^2 + \\ + \eta'(\nabla \boldsymbol{v})^2 + \varkappa \nabla^2 T. \tag{2.8}$$

Для несжимаемой жидкости, в отсутствие внешних источников тепла, это уравнение упрощается и принимает более простой вид

$$\partial T/\partial t + (\boldsymbol{v}\nabla)\, T = \chi \nabla^2 T, \tag{2.9}$$

где $\chi = \varkappa/C_p\rho$[м²/с] — коэффициент температуропроводности. Уравнение переноса тепла содержит дополнительно еще две неизвестные величины s и T. Таким образом, в системе уравнений вязкой теплопроводящей жидкости будет семь неизвестных. Чтобы замкнуть полученную систему уравнений — уравнений неразрывности, Навье — Стокса и переноса тепла,— следует воспользоваться уравнением сохранения энергии

$$T\,ds = du - p\,d\rho/\rho^2. \tag{2.10}$$

При этом выражения для энтропии s и внутренней энергии u могут быть получены с учетом свойств среды. Так, например, в случае идеального газа для единицы массы

$$du = C_V\,dT = \frac{1}{\gamma - 1}\,d\left(\frac{p}{\rho}\right), \quad ds = C_V\frac{dT}{T} - R\frac{dp}{\rho}, \tag{2.11}$$

и мы имеем семь уравнений для восьми неизвестных (к семи неизвестным добавляется u). Восьмым, замыкающим систему уравнений вязкой теплопроводящей жидкости, будет уравнение состояния.

В заключение приведем выражение для возникающего из-за необратимых процессов внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности изменения (увеличения) энтропии жидкости, занимающей объем V; оно нам потребуется при рассмотрении вопроса о поглощении звука в жидкости. Это изменение дается выражением, которое следует из уравнения переноса тепла (2.8):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s\,dV = \int \frac{\varkappa(\nabla T)^2}{T}\,dV + \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV + \\ + \int \frac{\eta'}{T}(\operatorname{div}\boldsymbol{v})^2\,dV. \tag{2.12}$$

Естественно, что последний член этого уравнения исчезает для несжимаемой жидкости, а во втором члене в правой части обращается в нуль третий член в скобках.

§ 3. Примеры точных решений

Дальнейшее применение теории движения жидкости состоит в нахождении решений конкретных задач. Для *потенциального движения* идеальной жидкости $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$ и, следовательно, $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$. Тогда уравнение Эйлера может быть записано в виде

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\nabla(p-p_0)}{\rho}=0.$$

Здесь p_0 — постоянное (в отсутствие внешних полей) значение давления в той области пространства, где отсутствует движение жидкости. Воспользовавшись соотношениями $\frac{\nabla p'}{\rho}=\nabla\frac{p'}{\rho}+\frac{p'}{\rho^2}\nabla\rho'$ ($\rho'=\rho-\rho_0$, $\rho_0=\text{const}$), получаем

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p'}{\rho}\right)+\frac{p'}{\rho^2}\nabla\rho'=0. \tag{3.1}$$

В случае адиабатического процесса $\nabla\rho'=\nabla p'/c^2$, где $c^2=(\partial p/\partial\rho)$ — квадрат адиабатической скорости звука. Если теперь в (3.1) положить $\rho=\rho_0+\rho'$, то приближенно получим

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p'}{\rho_0}-\frac{(p')^2}{2\rho_0^2c^2}\right)=0.$$

Без ограничения общности можно записать

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{(p-p_0)}{\rho_0}-\frac{(p-p_0)^2}{2\rho_0^2c^2}=0. \tag{3.2}$$

При стационарном ($\partial\varphi/\partial t=0$) движении несжимаемой ($c\to\infty$) жидкости имеем точное уравнение

$$v^2/2+(p-p_0)/\rho=0.$$

Это уравнение носит название *уравнения Бернулли*. Его также часто записывают в виде

$$v^2/2+p/\rho=\text{const}. \tag{3.3}$$

Приближенное уравнение (3.2) можно записать в виде (имея в виду, что $p'=-\rho_0\partial\varphi/\partial t$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p'}{\rho_0}-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{3.4}$$

Это уравнение иногда называют *обобщенным уравнением Бернулли*. Оно справедливо при условии $v\ll l/\tau$, где l — характерная длина, а τ — характерный временной интервал. Например, для акустических задач эти величины имеют смысл длины и периода волны и выписанное условие приобретает вид $v\ll c$.

Уравнение Бернулли есть следствие закона сохранения энергии и во многих случаях позволяет получить сведения о потоке, не прибегая к решению самих гидродинамических уравнений.

Из уравнения Бернулли легко выясняется смысл условия несжимаемости стационарного движения жидкости $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$. Поскольку при адиабатическом изменении плотности $\Delta\rho=(\partial\rho/\partial p)_s\Delta p=\Delta p/c^2$,

где c — скорость звука, а из (3.3) $\Delta p \sim \rho v^2$, то $\Delta\rho/\rho \sim (v/c)^2$. Таким образом, условие $(\Delta\rho/\rho) \ll 1$, т. е. условие несжимаемости жидкости состоит в том, что для стационарного течения число Маха $M = v/c \ll 1$; при $v \ll c$ газ или жидкость описываются одними и теми же уравнениями.

Однако такой вывод справедлив лишь для стационарного движения жидкости. Если движение нестационарно, то в добавление к условию несжимаемости $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ следует учесть еще одно условие. Действительно, акустическое число Маха $M_{ак} = v/c$ (здесь v — колебательная скорость частиц) всегда значительно меньше единицы. Тем не менее, поскольку акустические волны — это нестационарное движение жидкости, условие $M_{ак} \ll 1$ еще не означает, что жидкость можно считать несжимаемой; в несжимаемой жидкости звук вообще не распространяется.

Дело здесь в том, что для «несжимаемости» при нестационарных движениях жидкости необходимо выполнение условий $|\partial\rho/\partial t| \ll |\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}|$ и $\partial v/\partial t \sim \nabla p/\rho$, которые следуют из уравнения непрерывности и из уравнения Эйлера. Но из первого неравенства следует, что $\Delta\rho/\tau \ll \rho v/l$, где l и τ — соответственно характерные пространственный и временной масштабы движения (длина волны λ и ее период T в случае звука). Из второго приближенного равенства (уравнение Эйлера) $\nabla p/\rho \approx v/\tau$ и равенства $\Delta p = c^2 \Delta\rho$, имеем $\Delta\rho \approx l\rho v/\tau c^2$. Отсюда $\Delta\rho/\rho\tau \approx lv/c^2\tau^2$, и далее, используя неравенство $\Delta\rho/\tau \ll \rho v/l$, найдем $\tau \gg l/c$. Таким образом, жидкость при ее нестационарном движении можно считать несжимаемой, если выполняются два условия: $M \ll 1$ и $\tau \gg l/c$. Последнее условие означает, что в несжимаемой жидкости распространение возмущения должно происходить с бесконечной скоростью; в акустике хотя $M_{ак} \ll 1$, но зато $\tau \approx l/c$.

Другой пример использования уравнения Бернулли относится к теории *диска Рэлея*, применяемого для абсолютных измерений звукового давления. Диск Рэлея представляет собой небольшой легкий слюдяной кружок (его диаметр существенно меньше длины звуковой волны), подвешенный на тонкой кварцевой нити. Когда на диск падают звуковые волны, он поворачивается, стремясь занять положение, перпендикулярное направлению распространения этих волн. Причина этого может быть понята на основе уравнения Бернулли. На рис. 1.2 изображены линии, по которым движутся частицы воздуха при обтекании диска постоянным воздушным потоком,— линии тока; вблизи диска линии тока искривляются. Давление потока на диск в разных точках его поверхности зависит от скорости, которую в этих точках имеют частицы воздуха. Согласно уравнению (3.3) наибольшее давление будет в тех точках диска, где происходит полная остановка течения. Таких точек на диске две. В этих точках появляются силы, показанные на рис. 1.2 стрелками, которые образуют вращающий момент, стремящийся повернуть диск «лицом к потоку». По этой же причине лист бумаги, выпавший из рук, при своем падении стремится повернуться так, чтобы его поверхность стала перпендикулярной к направлению движения.

Из рис. 1.2 можно заметить, что если направление потока изменить на обратное, то благодаря симметрии картины линий тока вращающий момент не изменится; диск будет стремиться повернуться в том же направлении. Поэтому, если диск находится в переменном потоке воздуха, направление которого периодически изменяется (а такой поток имеет место при распространении звуковой волны), он будет поворачиваться так же, как и в постоянном потоке, занимая положение поперек потока.

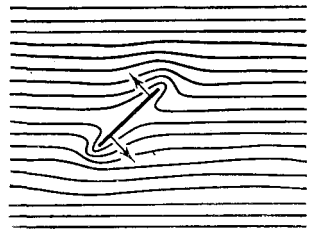


Рис. 1.2. Обтекание диска потоком. Диск поставлен под углом 45° к потоку.

Перейдем к реальной жидкости, обладающей вязкостью. Уравнения движения вязкой жидкости весьма сложны. По этой причине только небольшое число задач имеет точное решение. Такие задачи, как правило, отличаются геометрической простотой и определенными условиями симметрии. Весь же огромный комплекс остальных задач гидродинамики вязкой жидкости приходится решать приближенными аналитическими методами и широко применять численные методы с использованием быстродействующих ЭВМ [6]. К числу задач, которые удается решить точно, относятся такие задачи, как одномерное течение вдоль стенки, течение между двумя движущимися друг относительно друга параллельными плоскими стенками (течение Куэтта), течение в цилиндрической трубке (течение Пуазейля), стационарное течение между двумя цилиндрами, течение в расширяющейся трубе (диффузоре) и некоторые другие. Остановимся здесь лишь на важной для физической акустики задаче о движении в вязкой несжимаемой жидкости плоской безграничной стенки, которая колеблется в своей плоскости.

Пусть неограниченная плоская поверхность (плоскость xy) соприкасается с покоящейся в целом несжимаемой вязкой жидкостью, и пусть эта поверхность совершает гармонические колебания в своей плоскости с частотой ω в направлении y. Спрашивается, какое при этом возникает в жидкости ($z>0$) движение, если жидкость в целом покоится? Используя граничные условия, согласно которым скорость жидкости у поверхности совпадает со скоростью поверхности $v=v_y=v_0\exp(-i\omega t)$, условие несжимаемости жидкости $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ и геометрию задачи, нетрудно показать, что в рассматриваемом случае $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}=0$, $p=\text{const}$ и уравнение движения Навье — Стокса сводится к линейному одномерному уравнению типа уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \qquad (3.5)$$

Отыскивая периодическое решение этого уравнения в виде $v=v_0\exp[-i(\omega t-k_в z)]$, где $k_в$ — волновое число, найдем, используя граничные условия при $z=0$,

$$i\omega=\frac{\eta}{\rho}k_в^2=\nu k_в^2. \qquad (3.6)$$

Отсюда, поскольку $\sqrt{i} = \pm (1+i)/\sqrt{2}$, получаем

$$k_в = \frac{2\pi}{\lambda_в} = \sqrt{\frac{i\omega\rho}{\eta}} = \pm \frac{(i+1)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\eta}\rho} \tag{3.7}$$

и

$$v = v_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}\rho}\, z\right) \exp\left[-i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\eta}\rho}\, z\right)\right], \tag{3.8}$$

где у мнимой части $k_в$ взят знак «+», иначе скорость при $z>0$ возрастала бы.

Полученный результат показывает, что колеблющаяся в вязкой несжимаемой жидкости в своей плоскости пластина излучает поперечные волны с волновым числом $k_в$, которые называют *вязкими* или сдвиговыми волнами, иногда — волнами Стокса. Эти волны распространяются со скоростью

$$c_в = \sqrt{2\eta\omega/\rho} \tag{3.9}$$

и имеют длину

$$\lambda_в/2\pi = \sqrt{2\eta/\omega\rho} = \sqrt{2\nu/\omega}. \tag{3.10}$$

Коэффициент затухания вязкой волны $\alpha_в$, согласно (3.8), имеет значение

$$\alpha_в = \sqrt{\omega\rho/2\eta}. \tag{3.11}$$

Вязкая волна практически затухает на расстоянии, равном длине волны; в некотором тонком пограничном слое, толщина которого порядка $\lambda_в$, она все же распространяется.

Если на плоской поверхности жидкости имеются периодические изменения температуры, то, подобно вязким волнам, в жидкости возникают *температурные*, или тепловые волны. Характерные параметры этих волн определяются одномерным уравнением теплопроводности

$$\partial T/\partial t = \chi\, \partial^2 T/\partial z^2, \tag{3.12}$$

где T — температура и $\chi = \varkappa/\rho C_p$ — коэффициент температуропроводности, т. е. уравнением точно такого же вида, как и уравнение (3.5) для вязких волн.

Если на границе при $z=0$ $T = T_0 \exp(-i\omega t)$, то, по аналогии с (3.8), значение T в зависимости от z, ω, χ будет иметь вид

$$T = T_0 \exp\left(-\sqrt{\omega/2\chi}\, z\right) \exp\left[-i\left(\omega t - \sqrt{\omega/2\chi}\, z\right)\right]. \tag{3.13}$$

Так же, как и вязкие волны, тепловые волны распространяются в глубь среды со скоростью $c_т = \sqrt{2\chi\omega}$, экспоненциально затухая и образуя тонкий тепловой пограничный слой. Эти волны также имеют сильную дисперсию.

Длина тепловой волны выражается формулой

$$\lambda_т/2\pi = \sqrt{2\chi/\omega}. \tag{3.14}$$

Представление о вязких и тепловых волнах, быстро затухающих при удалении от колеблющейся поверхности тела внутрь жидкости и обладающих дисперсией, очень важно для большого круга задач физической акустики. Аналогичные процессы необходимо учитывать, в частности, в задаче о поглощении звука, распространяющегося вдоль твердой стенки (что имеет существенное значение в теории звукопоглотителей), в теории акустических течений, в явлениях, связанных с динамикой газовых и паровых пузырьков, находящихся в акустическом поле, и т. д.

§ 4. Законы подобия. Безразмерные числа в гидродинамике

Представление о наиболее характерных особенностях движения жидкости часто можно получить, не решая задачи, а зная лишь значения величин нескольких безразмерных чисел — специальных комбинаций физических параметров.

Впервые безразмерные числа были введены при рассмотрении вопроса о подобии течений. В гидродинамике часто приходится проводить эксперименты с моделями и потом уже полученные данные переносить на реальные тела. Простые рассуждения, основывающиеся на уравнениях движения для описания двух течений с различными гидродинамическими параметрами, приводят к тому, что для вязкой несжимаемой жидкости, когда отсутствуют внешние силы, а также внешние поверхности, два течения подобны, если, кроме кинематического подобия (т. е. геометрического подобия и подобия поля скоростей), для этих течений равны числа Рейнольдса. *Число Рейнольдса* $\mathbf{Re}=\rho vl/\eta=vl/\nu$ (где l — характерный масштаб движения, например радиус трубы при движении в ней жидкости, v — скорость потока и ν — кинематическая вязкость) играет очень большую роль в гидродинамике и акустике, и далее нам часто придется иметь с ним дело. Если необходимо учитывать наличие внешних сил, например силы тяжести, то в добавление к числу **Re** оказывается необходимым ввести также еще *число Фруда* $\mathbf{Fr}=v^2/lg$, и тогда два течения подобны, когда, кроме кинематического подобия, числа **Re** и **Fr** обоих течений равны. При учете сжимаемости жидкости в рассмотрение необходимо включить еще *число Маха* $\mathbf{M}=v/c$, где c — скорость звука в жидкости. Если учитывается теплопроводность жидкости, появляется безразмерное *число Прандтля* $\mathbf{Pr}=\eta C_p/\varkappa=\eta/\rho\chi=\nu/\chi$, представляющее собой материальную константу среды, не зависящую от свойств потока.

К необходимости введения этих чисел можно также прийти, если провести оценку различных членов в уравнениях движения и переноса тепла. Так, число **Re** получится, если взять отношение конвективного (нелинейного) члена в (2.6) $Z_{\text{нел}}$ к члену, характеризующему вязкость $Z_{\text{вяз}}$:

$$\frac{Z_{\text{нел}}}{Z_{\text{вяз}}}\sim\frac{\rho_0 v^2/l}{\eta v/l^2}=\frac{\rho_0 vl}{\eta}=\mathbf{Re}. \tag{4.1}$$

Число **Fr** получится, если взять отношение конвективного члена в уравнении (2.6) к члену, характеризующему внешнюю силу $\boldsymbol{f}$, например силу тяжести, которая на единицу массы равна просто ускорению свободного падения $\boldsymbol{g}$:

$$\frac{Z_{\text{нел}}}{Z_{\text{сил}}} \sim \frac{\rho_0 v^2/l}{\rho_0 g} = \frac{v^2}{lg} = \mathbf{Fr}. \tag{4.2}$$

Если воспользоваться уравнением переноса тепла (2.9) и взять отношение теплового конвективного члена $Z_{\text{конв}} = \boldsymbol{v}\nabla T$ к члену, характеризующему теплопроводность жидкости (газа) $Z_{\text{тепл}} = \chi\nabla^2 T$, то получим *число Пекле* **Pe**:

$$\frac{Z_{\text{конв}}}{Z_{\text{тепл}}} \sim \frac{vT'}{l\chi T'}\, l^2 = \frac{vl}{\nu}\,\frac{\nu}{\chi} = \mathbf{Re}\,\mathbf{Pr} = \mathbf{Pe}, \tag{4.3}$$

равное произведению числа Рейнольдса на число Прандтля. Здесь $T' = T - T_0$.

Нас в дальнейшем будут интересовать акустические волновые процессы, поэтому оценим по порядку величины отдельные члены в уравнениях Навье — Стокса для акустических колебаний в жидкости. В этом случае характерным масштабом длины, на которой могут происходить заметные изменения гидродинамических параметров, будет, очевидно, длина волны λ; характерным масштабом времени — период звуковой волны $\sim 1/\omega$ (ω — частота звука); характерной гидродинамической скоростью — колебательная, или акустическая скорость v. Тогда

$$Z_{\text{нел}}/Z_{\text{вяз}} \sim \rho_0 v\lambda/\eta = \mathbf{Re}_{\text{ак}}. \tag{4.4}$$

Как видим, это отношение представляет собой число Рейнольдса для акустического случая (так называемое акустическое число Рейнольдса). Когда $\mathbf{Re}_{\text{ак}} > 1$, т. е. $Z_{\text{нел}} > Z_{\text{вяз}}$, становятся существенными акустические нелинейные процессы, а при $\mathbf{Re}_{\text{ак}} < 1$ основными являются диссипативные процессы; об этом подробно говорится в гл. 3.

Число $\mathbf{Re}_{\text{ак}}$ записывают также в виде $\mathbf{Re}_{\text{ак}} = p'/b\omega$, где p' — акустическое (избыточное) давление и $b = {}^4/_3\eta + \eta' + \varkappa\,(1/C_p - 1/C_V)$ — диссипативный член; это выражение, справедливое для плоской акустической волны, получается из (4.4), если воспользоваться основным соотношением для плоской звуковой волны $p = v\rho c$ (§ 1 гл. 2).

Отношение $Z_{\text{нел}}$ к инерционному члену в (2.6) — $Z_{\text{ин}} = \rho_0 \partial \boldsymbol{v}/\partial t$:

$$\frac{Z_{\text{нел}}}{Z_{\text{ин}}} \sim \frac{\rho_0 k}{\rho_0 \omega}\,\frac{v_0^2}{v_0} \sim \frac{k\omega\xi}{\omega} \sim \frac{\xi}{\lambda} \sim \frac{v_0}{c_0} = \mathbf{M}_{\text{ак}}, \tag{4.5}$$

есть акустическое число Маха, которое уже было введено выше. Отметим, что в акустике даже для самых мощных звуковых волн число Маха не превышает значений 10^{-4}—10^{-3} (газы, жидкости), и при средних амплитудах смещений $\xi = v_0/\omega \sim 10^{-8}$—$10^{-7}$ число $\mathbf{M}_{\text{ак}} \sim 10^{-7}$—$10^{-5}$. Число Маха в акустических задачах всегда считается малым параметром.

Возвращаясь к процессам теплообмена, характеризуемым числом Прандтля **Pr**, напомним, что это число представляет собой материальную постоянную. Так, для газов число **Pr** мало отличается от единицы (для воздуха $\mathbf{Pr}\approx 0{,}73$), для жидкостей же это различие может быть существенным. Например, для воды при обычных условиях $\mathbf{Pr}\approx 6{,}75$, а для ртути $\mathbf{Pr}\approx 0{,}04$. Согласно (4.3), (3.10) и (3.14) число **Pr** может быть записано как отношение квадрата длины вязкой волны к квадрату длины тепловой волны:

$$\mathbf{Pr} = \lambda_{\text{в}}^2/\lambda_{\text{т}}^2. \tag{4.6}$$

Поскольку, как было сказано выше, для воздуха (и газов) $\mathbf{Pr}\approx 1$, то $\lambda_{\text{в}}\approx\lambda_{\text{т}}$. Для воды $\lambda_{\text{в}}\approx 3\lambda_{\text{т}}$ и для ртути $\lambda_{\text{в}}\approx 0{,}1\lambda_{\text{т}}$.

§ 5. Приближенные решения уравнений вязкой жидкости при больших и малых числах Рейнольдса. Пограничный слой

Перейдем теперь к приближенным методам решения уравнений движения вязкой жидкости. Решение упрощается в двух предельных случаях. Первый соответствует задачам, когда велика вязкость среды, малы скорости движения и масштабы движения, т. е. малы числа Рейнольдса $\mathbf{Re}=vl/\nu$. В этих случаях члены, характеризующие вязкость в уравнениях движения, гораздо больше инерционных членов, и последние могут быть отброшены. Тогда уравнение Навье — Стокса переходит в линейное уравнение, которое без учета объемной, или второй вязкости η', примет вид

$$\nabla p = \eta\nabla^2 v. \tag{5.1}$$

К числу известных задач, которые решаются в таком приближении, относится задача о плоском течении очень вязкой жидкости между двумя пластинками, о медленном движении малой сферы (задача Стокса) [1—2]. Решение, соответствующее последней задаче, приводит к известной *формуле Стокса* для силы сопротивления, которую испытывает сфера в вязкой жидкости:

$$F = 6\pi a v\eta, \tag{5.2}$$

где a — радиус сферы. Если учесть в уравнении Навье — Стокса те инерционные члены, которые имеют наибольшее значение, то эта формула приобретает вид

$$F = 6\pi\eta a v\,(1 + {}^3/_8\,\mathbf{Re}). \tag{5.3}$$

Член ${}^3/_8\mathbf{Re}$ носит название поправки Осеена.

Другой предельный случай соответствует движениям с большими скоростями в задачах, когда мала вязкость и велики пространственные масштабы, т. е. велико число Рейнольдса.

Однако полностью отбрасывать в уравнениях движения члены, учитывающие вязкость, нельзя, так как решения получающихся

при этом уравнений Эйлера не удовлетворяют граничным условиям, согласно которым реальная жидкость должна прилипать к стенкам, даже если она характеризуется большими числами Рейнольдса. Выход из такого положения был найден Л. Прандтлем (1904), который предположил, что при больших числах **Re** основное действие вязкости должно проявляться только вблизи самих стенок, в так называемом *пограничном слое*. Вне этого пограничного слоя движение жидкости можно считать движением идеальной жидкости.

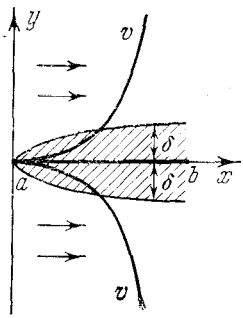


Рис. 1.3. Пограничный слой при обтекании пластинки ab потоком со скоростью v.

В дальнейшем теория пограничного слоя быстро развивалась и превратилась в широкую ветвь аэрогидромеханики, имеющую большие практические применения. Эта теория была затем распространена на случай сжимаемой жидкости и для больших чисел Рейнольдса, когда движение в слое становится турбулентным. Теория пограничного слоя важна для задач приема слабых акустических сигналов приемниками звука, установленными на движущихся или обтекаемых потоком поверхностях; пульсации давления при обтекании служат источниками существенных помех.

На рис. 1.3 дана условная схема обтекания тонкой пластинки потоком несжимаемой жидкости, направленным по оси x при малых числах **Re**. Рассматривая порядки членов в уравнении Навье—Стокса (2.6), для плоской задачи при $f=0$ можно упростить эти уравнения. Так, из физических соображений следует считать, что скорость течения $\boldsymbol{v}$ с изменением y меняется быстро, а с изменением x — значительно медленнее. Можно считать далее, что если длина пластинки равна l и толщина пограничного слоя δ, то $\delta \ll l$. Используя эти обстоятельства, а также тот факт, что при $y=0$ $v=0$, т. е. что v_y мало в слое, и принимая во внимание уравнение непрерывности для стационарного обтекания, когда $\partial v/\partial t=0$, членом $\partial^2 v/\partial x^2$ можно пренебречь по сравнению с другими членами. Нелинейные инерционные члены вида $v\,\partial v/\partial x$ имеют порядок v^2/l, а вязкие члены — порядок $\nu v/\delta^2$. Такого рода оценки дают возможность сформулировать основные уравнения теории пограничного слоя, которые мы здесь не приводим.

Отношение сил вязкости к нелинейным силам инерции в пограничном слое, согласно проведенным оценкам, будет

$$\frac{\nu v}{\delta^2} \Big/ \frac{v^2}{l} = \frac{\nu}{lv}\left(\frac{l}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{\mathbf{Re}}\left(\frac{l}{\delta}\right)^2. \qquad (5.4)$$

Прандтль высказал гипотезу, которая далее получила подтверждение, что в пограничном слое силы инерции имеют тот же порядок величины, что и силы вязкости. Эта гипотеза сразу же позволила оценить порядок толщины пограничного слоя. Действительно, если

$\mathrm{Re}^{-1}(l/\delta)^2 \sim 1$, то

$$\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{Re}}. \tag{5.5}$$

Этой формулой часто приходится пользоваться для получения оценки величины δ.

§ 6. Волны на поверхности жидкости

Любое локальное нарушение горизонтальности поверхности жидкости приводит к появлению волн, которые распространяются по поверхности и быстро затухают с глубиной. Возникновение волн происходит из-за совместного действия силы тяжести и силы инерции (*гравитационные гидродинамические волны*) или силы поверхностного натяжения и силы инерции (*капиллярные волны*).

Приведем ряд результатов по гидродинамике поверхностного волнения жидкости, которые понадобятся нам в дальнейшем [1, 2 (ч. 2), 7—10]. Можно существенно упростить задачу, если считать жидкость идеальной; учет диссипации необходим главным образом для капиллярных и коротких гравитационных волн.

Считая смещения частиц жидкости малыми, можно ограничиться линейной задачей и пренебречь в уравнении Эйлера нелинейным членом $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$, что соответствует малости амплитуды волны по сравнению с ее длиной λ. Тогда для несжимаемой жидкости волновое движение на ее поверхности без учета сил поверхностного натяжения определяется такой системой уравнений для потенциала φ (напомним, что $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$) [1]:

$$\nabla^2\varphi = 0, \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \tag{6.2}$$

(ось z направлена вертикально вверх и $z=0$ соответствует невозмущенной поверхности жидкости).

Для неограниченной поверхности жидкости, глубина которой значительно больше длины волны, можно искать решение задачи в виде распространяющейся в положительном направлении x и затухающей с глубиной z плоской неоднородной волны:

$$\varphi = \cos(kx - \omega t)\, f(z),$$

где $\omega = 2\pi f$ — частота волны и $k = \omega/c_\Phi = 2\pi/\lambda$ — волновое число, где c_Φ — фазовая скорость. Подставляя это значение потенциала в уравнение (6.1), а также учитывая, что решения имеют смысл для $z<0$, получаем выражение для потенциала:

$$\varphi = A\exp(kz)\cos(kx - \omega t), \tag{6.3}$$

а удовлетворяя граничному условию на поверхности жидкости (6.2)— дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = kg. \tag{6.4}$$

Таким образом, групповая скорость распространения гравитационной волны

$$c_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial k = (1/2)\sqrt{g/k}, \tag{6.5}$$

тогда как фазовая скорость такой волны

$$c_{\Phi} = \sqrt{g/k}. \tag{6.6}$$

Как видно, гравитационные волны обладают дисперсией; с увеличением длины волны их фазовая скорость c_{Φ} растет.

Интересен вопрос о том, каково распределение скоростей v_x и v_z частиц жидкости в волне; оно находится дифференцированием потенциала (6.3) по x и z.

Рассмотрение показывает, что частицы жидкости в волне описывают движение приблизительно по окружности (вокруг своих равновесных точек x_0, z_0), радиус которых экспоненциально спадает с глубиной. На глубине, равной одной длине волны, ее амплитуда примерно в 535 раз меньше, чем вблизи поверхности. Приведенные результаты относились к волнам на глубокой воде, когда $\lambda \ll h$, где h — глубина жидкости. Если имеет место противоположный случай (например, волны распространяются в канале конечной, но малой глубины), то

$$c_{\Phi} = \sqrt{gh}. \tag{6.7}$$

Как видно, такие волны дисперсией не обладают.

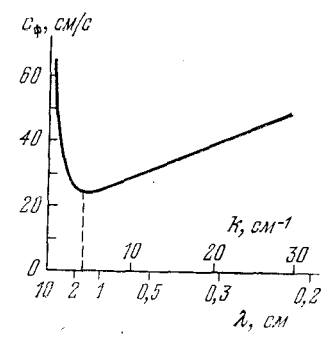


Рис. 1.4. Дисперсионная кривая для гравитационно-капиллярных волн на поверхности глубокой воды в области, где существенны и g, и σ.

С учетом капиллярной силы Лапласа, обусловленной поверхностным натяжением σ,

$$\omega^2 = (\sigma/\rho)\, k^3, \tag{6.8}$$

т. е., в отличие от гравитационных, скорость капиллярных волн растет с уменьшением длины волны. Совместное действие силы тяжести и силы поверхностного натяжения определяется таким дисперсионным уравнением (глубокая вода):

$$\omega^2 = gk + (\sigma/\rho)\, k^3. \tag{6.9}$$

На рис. 1.4 показана зависимость фазовой скорости распространения волн на поверхности жидкости от длины волны для воды согласно выражению (6.9). Из этого рисунка видно, что при $\lambda = 1{,}73$ см имеет место минимум скорости поверхностных волн, являющихся смешанными *гравитационно-капиллярными волнами*..

Приведенные результаты относились к одномерным линейным волнам в отсутствие диссипации. Кроме того, считалось, что волны регулярные и распространяются в одном направлении. Волны, возникающие при движении корабля в спокойной воде или при подходе к мелкому берегу, действительно представляют собой

регулярные возмущения. Волны же на поверхности жидкости, возникающие под действием ветра, преимущественно случайные — они движутся в разных направлениях и имеют разные частоты и амплитуды; именно такую картину мы наблюдаем, находясь на корабле в открытом море в ветренную погоду.

Затухание гравитационных волн с длинами волн более метра мало, но оно все же значительно больше, чем это следует из линейной теории. Это расхождение, очевидно, вызвано процессами, связанными с нелинейностью при распространении гравитационных и капиллярных волн. Так, если одиночная волна распространяется на мелкой воде с фазовой скоростью $c_ф = \sqrt{gh}$, то такая волна не обладает дисперсией. Ее профиль по мере распространения становится круче благодаря тому, что верхние частицы среды, для которых глубина h больше, чем для нижних частиц, будут двигаться с большей скоростью, согласно (6.7), и волна начнет захлестываться; при подходе к берегу волна обрушивается на него. Эффект захлестывания усиливается еще и потому, что при уменьшении глубины h возрастает амплитуда волны ξ: по закону сохранения потока энергии плотность энергии возрастает из-за уменьшения поперечного сечения слоя воды. С ростом же ξ нелинейные эффекты проявляются еще сильнее. Процесс «укручения» волн при их распространении происходит и на глубокой воде вследствие нелинейности уравнений движения. Теория нелинейных волн на поверхности жидкости получила большое развитие в последнее время, хотя первые работы в этом направлении были сделаны еще в конце прошлого века.

Если имеется несколько волн, они нелинейно взаимодействуют друг с другом; принцип суперпозиции для волн конечной амплитуды уже не соблюдается. Условия нелинейного взаимодействия гравитационных волн, благодаря их дисперсионным свойствам, отличаются интересными особенностями, на которых мы здесь не имеем возможности остановиться. Отметим лишь, что реально существующее взаимодействие случайных волн конечной амплитуды в принципе объясняет значительно большее затухание волн на поверхности, чем это предсказывает линейная теория. Действует механизм поглощения за счет нелинейного взаимодействия; энергия из области малых волновых чисел (длинные волны) перекачивается в области все меньших длин волн и, наконец,— в капиллярную область спектра, где она в конечном счете диссипируется за счет вязкости, переходя в тепло [11].

В гл. 3 мы будем иметь дело с нелинейными звуковыми волнами и еще вернемся к вопросам взаимодействия волн на поверхности жидкости.

§ 7. Турбулентное движение жидкости. Закон «двух третей»

При достаточно больших числах Рейнольдса движение жидкости перестает быть ламинарным; так в трубах с гладкими стенками ламинарное движение переходит в турбулентное при числах $\mathrm{Re} \sim 10^3$.

В этом движении гидродинамические параметры $\boldsymbol{v}$, ρ, p, T начинают флуктуировать около своих средних значений, возникает перемешивание жидкости и ее течение приобретает случайный характер. Движение воздуха в атмосфере и воды в океане, когда числа Рейнольдса велики (а они могут достигать в определенных условиях 10^8), практически всегда турбулентно. В технических задачах аэро- и гидромеханики чрезвычайно часто приходится встречаться с таким движением; числа **Re** и здесь могут достигать значений 10^4—10^6. По этой причине исследованию турбулентности уделялось всегда большое внимание. Однако хотя турбулентное движение, начиная с работ Рейнольдса, изучается около столетия и к настоящему времени мы уже много знаем об особенностях и закономерностях этого движения, нельзя еще сказать, что есть полное понимание этого сложного физического явления.

Далее нам придется рассматривать (гл. 7) задачи о распространении звука в турбулентной среде, поэтому остановимся кратко на основных современных представлениях о турбулентном движении жидкости.

Вопрос о возникновении и развитии турбулентного движения еще недостаточно выяснен, хотя несомненно, что он связан с неустойчивостью течения при больших числах **Re** из-за нелинейности уравнений гидродинамики; на этом мы кратко остановимся ниже. Для нас, однако, при изучении распространения волн в турбулентной среде большее значение будут иметь сведения об уже развитом, установившемся турбулентном потоке, его внутренней структуре и динамических закономерностях.

Большой успех в современных представлениях об уже развитом турбулентном течении был достигнут в 1941 г. А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуховым, которым принадлежит заслуга создания общей схемы механизма такого турбулентного потока при больших числах Рейнольдса, выяснения его внутренней структуры и целого ряда статистических закономерностей [12—14]. С тех пор развитие статистической теории турбулентности и связанных с ней экспериментов привело к ряду существенных результатов. Подробное изложение современной статистической теории турбулентности и ее экспериментального исследования дано в работах [15—20]. Эта теория оказалась важной для проблемы «турбулентность и волны» как для распространения акустических волн в атмосфере и море, так и для распространения электромагнитных волн в атмосфере, ионосфере и плазме. Здесь мы ограничимся кратким изложением лишь самых основных сведений об этой теории, необходимых нам в дальнейшем.

В 1920 г. английский гидромеханик и метеоролог Л. Ф. Ричардсон высказал плодотворную гипотезу, которую называют гипотезой «измельчения» турбулентности. Он предположил, что в случае атмосферной турбулентности, при движении больших масс воздуха, по какой-либо причине, например из-за шероховатости поверхности, поток становится неустойчивым, образуются большие пульсации скорости или вихри. Эти вихри черпают свою энергию из энергии всего потока в целом. Характерные размеры этих вихрей

L такого же масштаба, как и масштаб самого потока (внешний масштаб турбулентности). Но при достаточно больших масштабах движения и скоростях потока эти вихри сами становятся неустойчивыми и распадаются на более мелкие вихри масштабов l; числа Рейнольдса для таких вихрей $\mathbf{Re}_l = v_l l/\nu$, где v_l — пульсации их скорости, велики и они в свою очередь распадаются на более мелкие. Этот процесс «измельчения» турбулентных неоднородностей продолжается все дальше и дальше: энергия крупных вихрей, поступая из энергии потока, передается все более мелким вихрям, вплоть до самых мелких, имеющих внутренний масштаб $\tilde{l}$, когда начинает существенную роль играть вязкость жидкости (числа $\mathbf{Re}_{\tilde{l}}$ для таких вихрей малы ($\mathbf{Re}_{\tilde{l}} \leqslant 1$), движение их устойчиво). Энергия наименьших возможных вихрей превращается в тепло.

Эта гипотеза Ричардсона получила развитие в работах А. Н. Колмогорова и его школы.

В инерционной области масштабов пульсаций ($\tilde{l} < l < L$) можно считать, что вязкость не играет роли, энергия просто перетекает от бо́льших масштабов к меньшим и диссипация энергии единицы объема жидкости в единицу времени ε [Дж/(м^3·с)] есть некоторая функция только изменения средней скорости v_l на расстояниях порядка l, самого масштаба l и плотности ρ, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(v_l,\ l,\ \rho). \tag{7.1}$$

Из трех величин v_l, l и ρ можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность ε:

$$\varepsilon \sim v\,\rho/l. \tag{7.2}$$

Из этого соотношения можно оценить порядок изменения средней скорости турбулентного движения на расстоянии порядка l:

$$v_l \sim (\varepsilon l/\rho)^{1/3}. \tag{7.3}$$

Поскольку в рассматриваемом инерционном спектральном интервале вихрей, начиная с внешнего масштаба L и кончая внутренним масштабом $\tilde{l}$ (где определяющую роль играет вязкость), величина ε постоянна, то

$$v_l = Cl^{1/3}, \tag{7.4}$$

где C — постоянная, которая для условий атмосферной турбулентности и турбулентности в аэродинамической трубе (за решеткой) имеет порядок 10^{-1} и растет с ростом скорости потока u. Среднее квадратичное разности скоростей в точках 1 и 2 (или так называемая *структурная функция* D_v) в турбулентном потоке будет, таким образом,

$$D_v = \overline{(v_1 - v_2)^2} = C^2 r^{2/3}, \tag{7.5}$$

где r — расстояние между точками наблюдения 1 и 2. Это так называемый *закон двух третей* Колмогорова — Обухова (А. М. Обухов пришел к формулировке такого закона из спектральных пред-

ставлений). Следует заметить, что к такому же закону позднее пришли также Л. Онзагер, К. Вайцзэкер и В. Гейзенберг.

В проведенных рассуждениях, основанных на соображениях подобия и размерностей, предполагается, что поток в целом не оказывает ориентирующего влияния на вихри: поэтому движение вихрей в инерционной подобласти спектра пульсаций можно приближенно считать локально однородным и изотропным, о чем будет идти речь также в гл. 7. По этой причине статистическую теорию турбулентности называют *теорией локально изотропной турбулентности*.

Закон «двух третей» относится к турбулентному полю пульсаций, т. е. к векторному случайному полю, и, вообще говоря, следует уточнить, с какими компонентами $\boldsymbol{v}$ в (7.5) мы имеем дело.

Пульсации температуры, которые также имеются в динамическом турбулентном потоке (температурные неоднородности), перемешиваются пульсациями поля скоростей. Для скалярного температурного поля пульсаций также действует механизм измельчения неоднородностей пульсациями поля скоростей; размер наименьших температурных неоднородностей ограничивается действием теплопроводности, подобно тому как в поле пульсаций скоростей минимальный масштаб вихрей определяется вязкостью.

Для температурного поля пульсаций в динамическом потоке А. М. Обуховым был получен закон «двух третей», имеющий вид, аналогичный (7.5):

$$D_T = \overline{(T_1 - T_2)^2} = B^2 r^{2/3}, \tag{7.6}$$

где B [К/см$^{1/3}$] — постоянная, зависящая от скорости u.

В интервале внутренних масштабов $\tilde{l}$ (этот интервал называют интервалом равновесия) величина ε будет функцией не только $v_{\tilde{l}}$, $\tilde{l}$, ρ, но и кинематической вязкости ν [м^2/с]:

$$\varepsilon = \varepsilon\,(v_{\tilde{l}},\ \rho,\ \tilde{l},\ \nu). \tag{7.7}$$

Тогда единственной комбинацией, имеющей размерность [Дж/(м^3·с)], будет такое выражение для ε:

$$\varepsilon \sim \nu\rho v_{\tilde{l}}^2/\tilde{l}^2. \tag{7.8}$$

Соответственно

$$D_v = \overline{(v_1 - v_2)^2} = Ar^2, \tag{7.9}$$

где A=const, т. е. в этом случае имеет место квадратичная зависимость D_v от r (*закон Тэйлора*).

Сам внутренний масштаб турбулентности $\tilde{l}$ можно оценить из соотношения (7.4), считая, что (7.4) справедливо вплоть до $l \sim \tilde{l}$ и условия $\mathrm{Re}_{\tilde{l}} \sim 1$:

$$\tilde{l} \sim L\,\mathrm{Re}_L^{-3/4}. \tag{7.10}$$

Полная картина поведения структурной функции поля скоростей в зависимости от расстояния r между точками наблюдения изображе-

на на рис. 1.5. При малых масштабах пульсаций скорости, соответствующих внутреннему масштабу $\tilde{l}$, структурная функция D_v подчиняется квадратичному закону Тэйлора $D_v \sim r^2$ (интервал равновесия). При увеличении r функция D_v подчиняется закону «двух третей» (инерционный интервал; его называют также инерционной подобластью спектра пульсаций); при дальнейшем увеличении r, когда $r \sim L$, исходные положения перестают быть справедливыми.

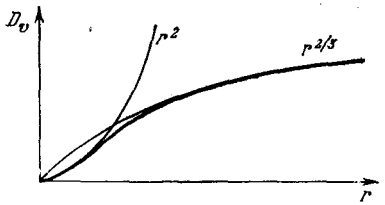


Рис. 1.5. Структурная функция поля скоростей.

Отметим, что закон «двух третей» имеет место не только для пульсаций поля скоростей и поля пульсаций температуры (рассматриваемой как пассивная примесь), но также для пульсаций влажности e, также рассматриваемой как пассивная примесь *):

$$\overline{(e_1 - e_2)^2} = \text{const} \cdot r^{2/3}; \tag{7.11}$$

для пульсаций давления

$$\overline{(p_1 - p_2)^2} = \text{const} \cdot r^{4/3}. \tag{7.12}$$

Таковы некоторые существенные для нас выводы, которые получены на основании гипотезы Ричардсона и соображений теории подобия и размерности или из спектральных представлений.

В законе «двух третей» следует обратить внимание на то, что в нем берется среднее квадратичное разности скоростей в двух точках потока, или так называемая «структурная функция» поля скоростей. В этом заложен глубокий смысл.

Если производить измерения (запись) пульсаций скорости или температуры в одной точке потока, то крупные неоднородности будут играть бóльшую роль, чем мелкие, и результаты измерений будут существенно зависеть от времени, в течение которого эти измерения производятся. Эта трудность отпадает, если производить измерения разности скоростей в двух относительно близких точках потока, т. е. следить за относительным движением двух близких элементов потока. На эту разность не будут влиять крупные вихри, размер которых гораздо больше, чем расстояние между этими двумя точками.

В отличие от кинетической теории газов, когда можно в первом приближении считать, что движение каждой молекулы не зависит от молекул, находящихся в непосредственной близости от нее, в турбулентном потоке дело обстоит иначе. Соседние элементы жидкости имеют тенденцию принять то же значение скорости, что и рассматриваемый элемент, если только расстояние между ними мало́. Если рассматривать турбулентный поток как наложение пуль-

*) Влажность e и давление p имеют значение для проблемы распространения в атмосфере радиоволн и света (гл. 7).

саций (вихрей) различных масштабов, то расстояние между двумя близкими элементами будет сначала изменяться благодаря только наименьшим вихрям. Крупные вихри будут просто переносить рассматриваемую пару точек (элементов) как целое, не стремясь их разделить. Но как только расстояние между элементами жидкости увеличится, в добавление к мелким в игру вступают более крупные вихри. Поэтому в турбулентном потоке жидкости важным является не столько перемещение самого элемента жидкости, сколько изменение его расстояния от соседних элементов.

После того как мы познакомились с основными представлениями о внутренней структуре развитого турбулентного потока, вернемся к вопросу о возникновении турбулентности, т. е. переходу от ламинарного движения к турбулентному (в современной литературе для этого явления употребляют сокращенный термин — «переход»).

Нелинейный процесс обмена энергией между различными степенями свободы, по существу заложенный в модели каскадного процесса преобразования энергии Ричардсона и усовершенствованный А. Н. Колмогоровым, привел Л. Д. Ландау к модели, в которой этот переход связывался с возбуждением в гидродинамической системе все возрастающего числа степеней свободы. В такой интерпретации перехода имеются определенные трудности. Шаг вперед в их преодолении был сделан А. М. Обуховым с сотрудниками [21, 22] и А. С. Мониным [23] на основе теоретического и экспериментального исследования простейшей системы, обладающей общими свойствами уравнений гидродинамики (квадратичная нелинейность и законы сохранения). Такой системой является система с тремя степенями свободы (*триплет*), уравнения движения которой совпадают в соответствующей системе координат с уравнениями Эйлера в теории гироскопа. Гидродинамической интерпретацией триплета может служить «жидкое вращение» в несжимаемой жидкости внутри трехосного эллипсоида, в котором поле скоростей линейно по координатам.

Элементарный механизм нелинейного преобразования энергии между различными степенями свободы в таком триплете, который проверен экспериментально, можно положить в основу для моделирования более сложных систем (каскад триплетов) для объяснения каскадного процесса преобразования энергии по схеме Ричардсона — Колмогорова — Ландау. Можно надеяться, что на этом пути будут достигнуты определенные успехи в ближайшей перспективе.

Другой путь в объяснении перехода, развиваемый в последнее время, связан с тем, что стохастичность возможна не только в исключительно сложных динамических системах, в которых абсолютно точные начальные условия реально не могут быть заданы, и поэтому возникает потребность в статистическом описании. Стало ясно, что эти сложившиеся представления о природе хаоса не всегда верны. Хаотическое поведение было обнаружено и в гораздо более простых системах, в том числе в системах, описываемых всего тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка [23, 24]. Несмотря на то, что это открытие сразу же стиму-

лировало ряд исследований в области математической теории сложного поведения простых динамических систем, лишь с середины семидесятых годов оно привлекло внимание широкого круга физиков, механиков, биологов. Примерно в это же время хаос в простых системах был сопоставлен с проблемой возникновения турбулентности. Далее стохастические автоколебания были обнаружены в самых различных, порой весьма неожиданных областях, а их математический образ — *странный аттрактор* (strange attractor) — к настоящему времени занял заметное место в качественной теории динамических систем наряду с широко известными аттракторами — состояниями равновесия и предельными циклами. В какой мере это направление будет способствовать развитию теории перехода, пока еще не вполне ясно,

Глава 2

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗАХ И ЖИДКОСТЯХ. РЕЛАКСАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Звуковые волны бесконечно малой амплитуды в идеальной среде

В этой главе мы рассмотрим распространение звуковых волн бесконечно малой амплитуды в газах и жидкостях. *Звуковыми* или *акустическими* волнами называются волны, существование которых обусловлено упругими силами, возникающими при деформировании среды. Бесконечно малыми принято называть возмущения, для которых с высокой степенью точности справедлив принцип суперпозиции. В классической акустике изучалось распространение именно таких возмущений. Согласно современной классификации эти вопросы составляют предмет линейной акустики. В приближении линейной акустики скорость распространения любого возмущения не зависит от величины этого возмущения.

Напомним основные соотношения линейной акустики покоящейся среды. Звуковая волна сжатия и разрежения характеризуется рядом изменяющихся во времени и пространстве параметров. Это — амплитуда избыточного, или *звукового давления* $p'=p-p_0$, где p — давление в возмущенной среде, а p_0 — среднее или равновесное давление. Другой величиной, характеризующей звук, является *колебательная скорость* частиц жидкости или газа $\boldsymbol{v}$. Отметим, что колебательная скорость в большинстве рассматриваемых в акустике задач значительно меньше скорости распространения возмущений c (скорости звука). Даже для очень сильного звука — шума реактивного самолета — $v\sim10^{-1}$м/с, в то время как скорость звука в воздухе $c\sim340$ м/с. Поэтому акустическое число Маха $M_{ак}=v/c$ обычно много меньше единицы. Звуковая волна сопровождается также отклонением плотности $\rho'=\rho-\rho_0$ от ее равновесного значения ρ_0.

В этом параграфе мы будем иметь дело с идеальной средой, для которой справедливы уравнения гидродинамики идеальной жидкости (1.1.1), (1.1.2) и (1.1.11). Подставляя выражения $p=p_0+p'$, $\rho=\rho_0+\rho'$ и $\boldsymbol{v}$ в эти уравнения и пренебрегая членами $\sim p'^2$, ρ'^2, v^2 и выше, получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0 \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \quad p'=\frac{dp}{d\rho}\rho'=\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\rho'=c^2\rho'. \tag{1.1}$$

В акустике идеальных газов и жидкостей $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=0$, и поэтому можно ввести скалярный потенциал скорости $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$. Тогда первые два уравнения (1.1) запишутся в виде

$$p'=-\rho_0\,\partial\varphi/\partial t,\quad \partial\rho'/\partial t+\rho_0\nabla^2\varphi=0, \tag{1.2}$$

откуда, принимая во внимание третье уравнение (1.1), найдем *волновое уравнение* для потенциала скоростей:

$$\partial^2\varphi/\partial t^2-c^2\nabla^2\varphi=0, \tag{1.3}$$

где по (1.1) $c=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$. Волновому уравнению вида (1.3) удовлетворяют также и другие акустические величины p', $\boldsymbol{v}$ и ρ'.

Простейшим видом волнового движения является *плоская волна*: возмущение среды в этом случае одномерно, и волновое уравнение принимает вид

$$\partial^2\varphi/\partial t^2-c^2\,\partial^2\varphi/\partial x^2=0. \tag{1.4}$$

Его решение представляет собой две плоские волны произвольного вида, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях:

$$\varphi=\psi_1(x-ct)+\psi_2(x+ct). \tag{1.5}$$

Форма этих волн со временем не изменяется, т. е. волны являются стационарными. Из решения (1.5) следует, что константа c имеет смысл скорости распространения этих волн, т. е. скорости звука.

Для плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, примем

$$\varphi(x,\ t)=\varphi_0\exp[i(\omega t-kx)], \tag{1.6}$$

где $k=\omega/c=2\pi/\lambda$ — *волновое число*, λ — *длина волны*. Из (1.2) получаем значение звукового давления:

$$p'=-p_0\,\partial\varphi/\partial t=-i\rho_0\omega\varphi=p_0'\exp[i(\omega t-kx)], \tag{1.7}$$

где $p_0'=-i\rho_0\omega\varphi_0$ — амплитуда звукового давления.

Для колебательной (акустической) скорости получим

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi=\partial\varphi/\partial x=-ik\varphi=v_0\exp[i(\omega t-kx)], \tag{1.8}$$

где $v_0=-ik\varphi_0$ — амплитуда колебательной скорости. Из (1.7) и (1.8) видим, что p' и v совпадают по фазе и что

$$v=p'/\rho_0 c. \tag{1.9}$$

Мы получили основное соотношение для плоской гармонической волны, связывающее между собой акустические величины p', v с *акустическим сопротивлением* среды $\rho_0 c$. Можно показать, что соотношение (1.9) оказывается справедливым и для любой другой формы профиля волны бесконечно малой амплитуды, а не только для волны гармонической. Хотя в действительности нет идеальных плоских волн, формулой (1.9) приходится очень часто пользоваться для проведения оценок или приближенных расчетов.

Звуковое поле, создаваемое плоской гармонической волной, кроме параметров p', ρ', v, можно характеризовать также колебательным смещением из положения равновесия ξ. Если считать, что $v=v_0 \sin(\omega t-kx)$, то

$$\xi = \int v\,dt = -v_0\omega^{-1}\cos(\omega t-kx) = v_0\omega^{-1}\sin(\omega t-kx-\pi/2), \quad (1.10)$$

откуда следует, что ξ отстает по фазе от v на $\pi/2$. Для ускорения имеем

$$\partial v/\partial t = \omega v = \omega v_0\cos(\omega t-kx) = \omega v_0\sin(\omega t-kx+\pi/2), \quad (1.11)$$

т. е. ускорение опережает v по фазе на $\pi/2$.

Для энергетической характеристики звукового поля плоской волны вводят понятие *интенсивности звука* I (средняя плотность потока звуковой энергии), которая дается формулой

$$I = p_0'^2/2\rho_0 c = c\rho_0 v_0^2/2, \quad (1.12)$$

или, используя эффективные значения $p'_{\text{эфф}}=\sqrt{\overline{p'^2}}$, $v_{\text{эфф}}=\sqrt{\overline{v^2}}$, имеем

$$I = p'^2_{\text{эфф}}/\rho_0 c = c\rho_0 v^2_{\text{эфф}}, \quad (1.13)$$

где чертой сверху обозначено среднее значение за период T.

Приведем для справок одномерное волновое уравнение в лагранжевых координатах (см. § 1 гл. 1). Для баротропного движения $p=p(\rho)$ и, учитывая, что $\partial p/\partial a = c_л^2\,\partial\rho/\partial a$, получим

$$\frac{\partial p}{\partial a} = -\rho_0 c_л^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^{-2}.$$

Из (1.9) следует

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - c_л^2\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^{-2}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} = 0, \quad (1.14)$$

или

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho c_л}{\rho_0}\right)^2\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} = 0. \quad (1.15)$$

Это уравнение отличается от волнового уравнения в эйлеровых координатах тем, что вместо c здесь присутствуют локальная скорость звука $c_л$ и сжатие ρ/ρ_0. В случае, если среда подчиняется уравнению Пуассона, формула (1.14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - c^2\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^{-(\gamma+1)}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2} = 0. \quad (1.16)$$

§ 2. Скорость звука и поглощение в газах и жидкостях

Остановимся сначала на определении скорости звука в газах. Формула для адиабатической скорости звука (*лапласова скорость*) $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$ *), хорошо оправдывающаяся на опыте, получена в

*) Индексы «0», обозначающие, что для величин p и ρ берутся их равновесные значения, для простоты будем опускать в тех случаях, когда смысл p и ρ очевиден.

предположении адиабатичности процесса распространения. При этом считается, что между участками сжатия и разрежения в волне температура не успевает выравниваться.

В первом приближении значение c не зависит ни от частоты звука, ни от его амплитуды, хотя при определенных условиях такие зависимости имеются; об этом подробно будет идти речь в §§ 3 и 4 этой главы и в гл. 3. Зависимость скорости от температуры для идеальных газов можно найти, используя соотношение $p/\rho = RT/\mu$, откуда $c = \sqrt{\gamma RT/\mu}$, $c \sim \sqrt{T}$, где T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, а μ — молекулярная масса. Для воздуха c возрастает примерно на 0,6 м/с при увеличении T на 1°С; значение c при нормальном атмосферном давлении и температуре 0°С составляет $c = 3{,}33 \cdot 10^2$ м/с. В рамках принятых предположений скорость звука не зависит от давления, поскольку в формулу для c давление и плотность входят в виде отношения p/ρ. Приведенная выше формула для c получена феноменологически, на основе термодинамического уравнения состояния газа и уравнений гидродинамики; еще раз подчеркнем, что она выведена при условии идеальности среды и при числе Маха $M_{ак} \ll 1$. Отметим, что из кинетической теории газов следует, что $\nu \sim l\bar{v}_т$, т. е. что кинематическая вязкость имеет порядок произведения длины волны свободного пробега молекул l на среднюю скорость их теплового движения $\bar{v}_т$. Поскольку скорость звука имеет величину порядка средней скорости движения молекул газа $c \sim \bar{v}_т$, то $\nu = l\bar{v}_т \sim lc$. Это соотношение представляет собой «акустическую» интерпретацию длины свободного пробега. Естественно, что говорить о распространении звука имеет смысл только при $l < \lambda$; при $\lambda \sim l$ гидродинамические уравнения не допускают осциллирующего решения и необходимо микроскопическое, а не феноменологическое рассмотрение.

Вычисление c на микроскопическом уровне на основе кинетической теории проводилось многими авторами, с чем подробно можно ознакомиться в [1, 2]. В случае одноатомного идеального газа (когда взаимодействием молекул можно пренебречь) еще Лоренц [1] на основе кинетического уравнения Больцмана нашел уравнение для скорости распространения малого возмущения функции распределения в первом приближении, ограничиваясь членами первого порядка по l/a (l — длина свободного пробега молекул газа и a — расстояние, на котором плотность изменяется заметным образом). При этом для скорости распространения этого возмущения им была получена формула $c^2 = {}^5/_3 RT/\mu$, что совпадает с выводами макроскопического рассмотрения.

Даже для одноатомного газа теоретическое нахождение c представляет собой сложную задачу, которая решается лишь приближенно. При нахождении c для двухатомного газа на основе газокинетического рассмотрения следует пользоваться модельным представлением. При решении задач по теоретическому вычислению c нужно, кроме учета теплового движения, сделать определенные предположения о характере столкновений молекул, учесть распределение

скоростей в тепловом движении, нецентральные удары, вращение молекул при соударениях и т. д. Такого рода задачи относятся к молекулярной и статистической физике; по этим вопросам имеется обширная литература [1, 2].

Жидкости занимают промежуточное положение между твердыми телами и газами, обладая, в отличие от твердых тел, лишь ближним порядком. Теория жидкого состояния не разработана в такой степени, как для газов и твердых тел (кристаллов). По этой причине теоретические расчеты скорости звука в жидкостях, основанные на молекулярных представлениях, оказываются в еще меньшей степени обоснованными, чем для реальных газов. Имеются только эмпирические и полуэмпирические выражения для c в жидкостях, дающие связь между c и такими макроскопическими параметрами, как ρ, T.

Представляет интерес нахождение c для смесей жидкостей и определение c для растворов. Все эти вопросы достаточно подробно изложены в монографиях по молекулярной акустике [1—3].

Поскольку скорость звука c определяется структурой среды и взаимодействием между молекулами, измерение c дает существенные сведения о равновесной структуре газов или жидкостей. Измерения c представляют собой важный метод определения термодинамических величин — адиабатической ($\beta_{ад}=(\partial\rho/\partial p)_s/\rho=1/\rho c^2$) и изотермической ($\beta_{из}=\gamma\beta_{ад}$) сжимаемостей (в последнем случае при дополнительном измерении теплоемкости при постоянном объеме C_V).

Отметим также, что по данным измерений c оказывается возможным судить о составе газовых смесей (ультразвуковые газоанализаторы) и смесей жидкостей, в том числе растворов. При наличии потоков смесей точность измерения c понижается благодаря турбулентному характеру движения. Однако определение флуктуаций скорости звука можно использовать для изучения турбулентного движения, о чем будет, в частности, идти речь в гл. 7.

По мере распространения звуковой волны амплитуда ее уменьшается. Это связано с рядом причин: с убылью плотности энергии волны вследствие увеличения поверхности, занимаемой фронтом волны (сферические, цилиндрические и вообще расходящиеся волны), поглощением энергии волны вследствие диссипативных процессов, вызываемых вязкостью и теплопроводностью среды, рассеянием на неоднородностях. Для плоской бегущей волны убыль ее амплитуды из-за процессов диссипации характеризуется *коэффициентом поглощения* α, который показывает, на каком расстоянии амплитуда волны (например, звуковое давление p') убывает в e раз, т. е.

$$p' = p'_0 \exp(-\alpha x). \tag{2.1}$$

Относительная убыль амплитуды на единицу расстояния будет

$$\alpha = -p'^{-1} dp'/dx \tag{2.2}$$

(амплитудный пространственный коэффициент поглощения). Величина α может быть определена также как убыль энергии волны,

распространяющейся со скоростью c за единицу времени:

$$\alpha = |\dot{\bar{E}}| \cdot (2c\bar{E})^{-1} = |\dot{\bar{E}}| \cdot (2I)^{-1}, \tag{2.3}$$

где $\dot{\bar{E}}$ — плотность энергии волны, поглощаемой за единицу времени, $\bar{E} = \rho v_0^2/2$ — *полная энергия звуковой волны*, усредненная за период времени T; двойка в знаменателе (2.3) появляется из-за квадратичной зависимости энергии от амплитуды.

Для того чтобы определить, от каких параметров среды и волны зависит коэффициент поглощения α, следует учесть все диссипативные процессы, происходящие при распространении звука в среде [4, 5]. При учете вязкости и теплопроводности в волновое уравнение (1.3) должен быть добавлен диссипативный член. Для его нахождения мы должны использовать уравнения гидродинамики вязкой теплопроводящей жидкости. Выпишем эти уравнения для случая распространения звука, когда скорость v есть акустическая скорость и когда квадратичными членами ρ'^2, p'^2, v^2 можно пренебречь, т. е. будем рассматривать линейный случай.

Эти уравнения, согласно (1.2.1), (1.2.8) и уравнению состояния $p = p(\rho, s)$, будут

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho_0}\left(\eta' + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla \boldsymbol{v}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \varkappa \Delta T', \\
p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho s' = c^2 \rho' + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho s'.
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Два последних уравнения можно свести к одному уравнению для p', в которое, кроме члена $c^2\rho'$, войдет также член, определяемый теплопроводностью $\varkappa$. Воспользуемся тем, что $T' = (\partial T/\partial p)_s p'$, где $T = T_0 + T'$, и, принимая во внимание уравнение (1.2) и то, что $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$, получим, согласно третьему уравнению системы (2.4), для изменения (приращения) энтропии s' соотношение

$$s' = -\frac{\varkappa}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{2.5}$$

При подстановке s' в четвертое уравнение системы (2.4) появится необходимость вычислить коэффициент $T^{-1}(\partial p/\partial s)_\rho (\partial T/\partial p)_s$. Для его вычисления воспользуемся некоторыми термодинамическими соотношениями, справедливыми для идеального газа. Так, используя уравнение состояния для идеального газа $pV = RTm/\mu$, можно вычислить $(\partial p/\partial s)_\rho = \mu^{-1}\rho R\,(\partial T/\partial s)_\rho = \rho RT/C_V\mu$ (здесь использовано равенство $(\partial s/\partial T)_\rho = C_V T^{-1}$). С другой стороны, как известно из термодинамики, $(\partial T/\partial p)_s = T(\partial V/\partial T)_p/C_p$ и так как $(\partial V/\partial T)_p = Rm/p\mu$, то $(\partial T/\partial p)_s = TRm/C_p p\mu$. Используя эти соотношения, получаем для p' (четвертое уравнение системы (2.4) с учетом равенства $Rm/\mu = C_p - C_V$) выражение

$$p' = c^2\rho' - \varkappa\,(1/C_V - 1/C_p)\operatorname{div} \boldsymbol{v}. \tag{2.6}$$

Заметим, что имеется некоторая непоследовательность в наших рассуждениях — занимаясь изучением влияния вязкости и теплопроводности на поглощение звука, мы, тем не менее, пользуемся соотношениями, которые справедливы для идеальной среды. Использование этих соотношений возможно лишь при малом влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звука, т. е. когда поглощение звука на расстоянии, равном длине волны λ, мало и $\alpha\lambda \ll 1$. В большом числе акустических задач это условие выполняется.

Пользуясь полученным выражением (2.6) и считая по-прежнему, что $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}=0$, можно показать, что уравнение Навье — Стокса примет вид

$$\rho_0 \partial \boldsymbol{v}/\partial t = -c^2 \nabla \rho' + b \nabla^2 \boldsymbol{v}, \tag{2.7}$$

где

$$b = {}^4/_3 \eta + \eta' + \varkappa (1/C_V - 1/C_p). \tag{2.8}$$

Из уравнений (2.4), (2.7) получим уравнение, которое для потенциала скорости можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \varphi - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \varphi = 0. \tag{2.9}$$

Это волновое уравнение описывает распространение волн бесконечно малой амплитуды в среде с диссипацией, но без учета дисперсии; диссипативный коэффициент b считается здесь не зависящим от частоты.

Будем рассматривать случай плоской гармонической волны и искать решение этого уравнения в виде $\varphi = \varphi_0 \exp[i(\omega t - kx)]$. Подставляя это значение в (2.9), получим для волнового числа k следующее выражение:

$$k = \frac{\omega}{c} \left(1 - i \frac{b\omega}{2\rho_0 c^3}\right). \tag{2.10}$$

Полагая $k = k_1 - ik_2$ и принимая во внимание, что

$$\exp[i(\omega t - kx)] = \exp(i\omega t) \exp(-ikx),$$
$$\exp(-ikx) = \exp(-ik_1 x) \exp(-k_2 x),$$

приходим к выводу, что величина k_2, или мнимая часть волнового числа k, представляет собой коэффициент поглощения волны. Таким образом, получаем для волны, бегущей в положительном направлении x (принимая во внимание (1.7)),

$$p' = p'_0 \exp\left(-\frac{b\omega^2}{2\rho_0 c^3} x\right) \exp[i(\omega t - kx)], \tag{2.11}$$

т. е. амплитуда звукового давления p' для плоской волны убывает с расстоянием x в соответствии с коэффициентом поглощения

$$\alpha = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c^3} = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \eta' + \varkappa \left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\right]. \tag{2.12}$$

Подчеркнем, что коэффициент поглощения пропорционален квадрату частоты звука и диссипативным коэффициентам η, η' и $\varkappa$. Впервые эта формула была получена Стоксом без учета теплопроводности $\varkappa$, влияние которой затем учел Кирхгоф. Хотя Стокс и понимал роль и значение объемной вязкости η', тем не менее включение ее в (2.8) впервые было сделано, по-видимому, только Рэлеем [5]. Поэтому обычно *формулой Стокса — Кирхгофа* называют формулу для α без учета η':

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3}\left[\frac{4}{3}\eta + \varkappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\right]. \qquad (2.13)$$

Выражение для α получено нами на основе волнового уравнения (2.9). Это же выражение для α можно получить другим путем, используя уравнение (1.2.12). Для этого следует воспользоваться известными термодинамическими соотношениями — для приращения температуры T' в звуковой волне, распространяющейся в жидкости со скоростью c и имеющей колебательную скорость v: $T' = \beta c v T / C_p$ (здесь $\beta = (\partial V/\partial T)_p / V$ — коэффициент теплового расширения), и выражением для разности теплоемкостей $C_p - C_V = T^2\beta^2 c^2 C_V / C_p$. В случае плоской гармонической волны ($v = v_0 \sin(\omega t - kx)$) $\dot{E} = -T_0 \dot{s}$ легко находится, и поскольку $\bar{E} = \rho v_0^2/2$, то с помощью третьего уравнения (2.4), используя определение коэффициента поглощения (2.3), получаем формулу (2.12) [6].

При взгляде на формулу (2.12) или (2.13) возникает вопрос: как получается, что при распространении плоской звуковой волны, когда, казалось бы, сдвиговые напряжения отсутствуют, проявляется сдвиговая вязкость? Дело здесь заключается в том, что в плоской акустической волне нет чистой деформации всестороннего сжатия. Сжатие происходит только по одной координате, вследствие чего отдельные элементы среды, кроме сжатия, испытывают еще и сдвиги. В результате и получается, что в компоненту тензора вязких напряжений σ'_{xx}, которая определяет α в случае плоской продольной волны, в соответствии с формулой (1.2.4) входит сдвиговая вязкость $\sigma'_{xx} = (4/3\eta + \eta')\partial v/\partial x$.

§ 3. Дисперсия и поглощение звука. Экспериментальные исследования

Уже первая попытка провести экспериментальную проверку формулы Стокса — Кирхгофа для коэффициента поглощения, сделанная по предложению П. Н. Лебедева его учеником Н. П. Неклепаевым в 1911 г. [7], показала, что для воздуха в диапазоне частот 120—4000 кГц поглощение звука в два с лишним раза больше, чем это следует из формулы (2.13). В 1925 г. Пирс [8] в США, используя разработанный им точный метод измерения скорости и поглощения ультразвука в газах (известный ультразвуковой интерферометр Пирса), обнаружил в углекислом газе заметную дисперс-

сию звука и аномальное поведение коэффициента поглощения в зависимости от частоты.

С этого времени в большом количестве проводятся экспериментальные и теоретические работы по исследованию дисперсии и поглощения ультразвуковых волн в газах, а затем и в жидкостях, среди которых следует отметить работы Кнезера [9] и Бикара [10]. К настоящему времени накопилось очень большое количество работ по измерению скорости и поглощения ультразвука в газах, в смесях газов, жидкостях, смесях различных жидкостей, растворах, электролитах, проведенных при разных физических условиях (температура, давление, плотность, фазовые переходы и т. д.). Результаты этих измерений важны не только для изучения молекулярных свойств газов и жидкостей, но также широко используются в технике для контроля протекания различных технологических процессов (по изменению скорости и поглощения звука). Методика этих измерений хорошо отработана и изложена во многих учебниках, поэтому мы не будем ее описывать. Отметим только, что на ультразвуковых частотах современные импульсные, фазовые и в особенности импульсно-фазовые методы позволяют получить относительную ошибку $\Delta c/c \sim 10^{-7}$—10^{-8}, а абсолютное значение c измерять с точностью $\sim 10^{-4}\%$. Аппаратурная точность может быть выше, однако точность измерения скорости ограничивается трудностью поддерживать неизменными физические свойства среды (температуру, плотность, однородность, отсутствие потоков и т. д.) и неоднородностями акустического поля; абсолютное значение α в области ультразвуковых частот можно измерять с ошибкой 2—5%. Трудности в определении коэффициента поглощения звука по результатам измерений также состоят в необходимости детального учета неоднородности излучаемого акустического поля, дифракционных эффектов, неизменности физических свойств среды. Для газов измерения на частотах выше нескольких МГц (при нормальном атмосферном давлении и комнатной температуре) затруднены из-за очень большого поглощения.

Чтобы иметь представление о порядке величин поглощения, приведем значения α/f^2 для некоторых газов и жидкостей при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°С в мегагерцевом диапазоне частот:

Газы	α/f^2, 10^{-13} с^2/см	Жидкости	α/f^2, 10^{-17} с^2/см
Воздух	1,85	Вода	23
Водород	3,58	Ртуть	6
Гелий	2,96	Глицерин	2500
Азот	1,35	Водород (H_2) (17 К, 44 МГц)	5,6
Кислород	1,68	Гелий (4 К, 15 МГц)	231

Заметим, что в жидкостях, как правило, поглощение значительно меньше, чем в газах (например, в воде α примерно в 1000 раз меньше, чем в воздухе).

Измерения поглощения звука α в газах и жидкостях акустическими методами в области ультразвуковых частот дают возможность, согласно формуле (2.12), определить объемную вязкость η', если известна сдвиговая вязкость η (значение которой рассчитывается или находится другими, неакустическими методами) и известны параметры, соответствующие условиям измерений, т. е. ω, ρ, c, $\varkappa$, входящие в формулу для α. При этом в большом числе случаев вклад $\varkappa$ в α для газов имеет существенное значение, тогда как для неметаллических жидкостей вклад теплопроводности в значение α не так велик (примерно на порядок меньше, чем вклад от влияния η и η'). Ультразвуковые измерения η' по разности измеренного α и вычисленного по значениям η и параметров эксперимента, по существу, являются единственным (косвенным) методом измерения объемной вязкости. В отсутствие релаксационных процессов (см. ниже), значение η и η' для многих простых жидкостей примерно равны. Для одноатомных газов $\alpha_{\text{эксп}}$ практически совпадает со значением $\alpha=\alpha_{\text{кл}}$, вычисленным согласно формуле (2.13), т. е. при $\eta'=0$. Многочисленные измерения c и α в многоатомных газах показали, что экспериментальные значения α оказываются существенно бо́льшими, чем вычисленные по формуле Стокса — Кирхгофа (2.13), т. е. что имеется заметное, так называемое *сверхстоксово поглощение*. Так, в CO_2 на частоте 300 кГц было обнаружено резкое повышение поглощения $\alpha\approx 20\alpha_{\text{кл}}$. Интересно, что вблизи этой частоты наблюдалась заметная *дисперсия скорости звука*: в диапазоне частот $(1—2{,}8)\cdot 10^5$ Гц c изменяется от $c_0=258{,}9$ м/с (значение совпадает со значением, вычисленным по формуле Лапласа) до $c_\infty=271$ м/с. На частотах $\sim 10^6$ Гц и выше величина поглощения снова совпадает со значением, которое дает классическая теория. Экспериментальные зависимости $\alpha\lambda$ и c в газе CCl_4 от частоты [11] представлены на рис. 2.1. Отметим уже здесь, что на частоте, где имеется максимальная дисперсия, наблюдается и максимум поглощения

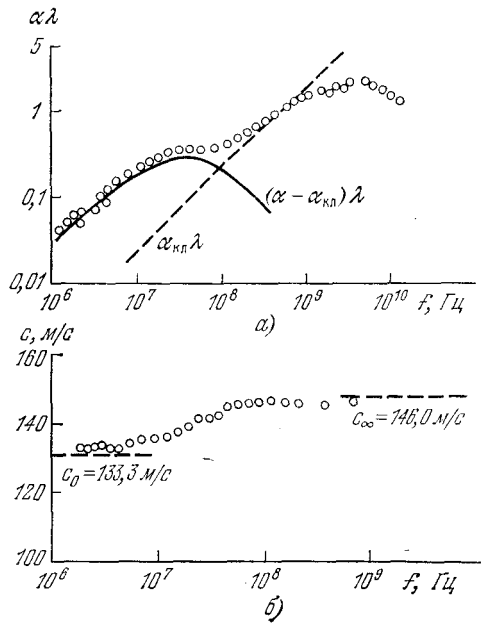


Рис. 2.1. Поглощение (*а*) и скорость (*б*) звука в газе CCl_4 при $p=1$ атм [11].

звука. Обратим внимание на то, что если скорость звука в указанном диапазоне частот меняется примерно на 10%, то поглощение — больше чем на порядок. В жидкостях, где также имеется дисперсия звука и аномальное, или сверхстоксово поглощение, такое различие в поведении c и α оказывается еще более существенным.

Здесь мы лишены возможности детально рассматривать весь огромный экспериментальный материал по измерению c и α в газах при различных частотах и отсылаем читателя к имеющейся литературе по этому вопросу [1—3].

Один из первых результатов по измерению скорости звука и поглощения на ультразвуковых частотах в жидкостях , в которых были зафиксированы дисперсия и аномальное поглощение, помимо упомянутой работы [10], содержится в статье [12]. Была обнаружена дисперсия ультразвука в уксусной кислоте и аномальное сверхстоксово поглощение в таких органических жидкостях, как муравьиная кислота, бензол, толуол.

Для маловязких жидкостей диапазон частот акустических волн, в котором можно исследовать c и α, в настоящее время простирается до 10^{10} Гц, т. е. в жидкостях мы можем прямыми акустическими методами изучать распространение гиперзвуковых волн. Для этого разработан целый ряд методов генерации высокочастотного ультразвука и гиперзвука. К числу таких методов принадлежит и так называемый метод Баранского [13], в котором используется возбуждение и прием упругих волн при помощи резонатора СВЧ колебаний (в резонатор помещают торцы пьезоэлектрического стержня). Применяются также тонкие пьезоэлектрические и пьезополупроводниковые пленки [14, 15].

Разумеется, вследствие сильного поглощения звука даже в таких маловязких жидкостях, как вода, спирты и т. д., при обычных температурах частоты выше 10^9 Гц использовать уже трудно; измерения приходится проводить на очень малых расстояниях (порядка десятков—сотен микрометров) и работать с достаточно интенсивными волнами.

Очень плодотворным для исследования распространения гиперзвука оказался метод изучения тонкой структуры линии рэлеевского рассеяния света на дебаевских упругих волнах в жидкости. Этот метод сыграл большую роль в указанных исследованиях еще до того, как развились прямые акустические методы изучения распространения гиперзвука в жидкостях и твердых телах; он продолжает использоваться с применением лазеров и в настоящее время.

Л. И. Мандельштам [16] и независимо от него Л. Брюллюэн [17] предсказали, что на тепловых флуктуациях плотности в жидкости (полагая, что тепловое движение представляет собой суперпозицию упругих или дебаевских волн) должна наблюдаться тонкая структура рэлеевской линии рассеяния света; в нашей литературе этот эффект называют *мандельштам-брюллюэновским рассеянием* (МБР); подробнее об этом эффекте будет говориться в гл. 13.

Это рассеяние света на неоднородностях плотности в силу малости длин световых волн λ и малости скорости звука по сравнению

со скоростью света можно рассматривать как его отражение от пространственных решеток движущихся со скоростью звука изменений плотности, которые образуются дебаевскими волнами. Обнаружить можно только те рассеянные световые волны, для которых выполняется известное *условие Брэгга*

$$2n\lambda \sin(\varphi_р/2) = \lambda_{св}, \qquad (3.1)$$

где $\varphi_р$ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн, λ — длина волны звука и n — показатель преломления среды. Поскольку пространственные решетки из оптических неоднородностей (возникающих из-за флуктуаций плотности) меняются во времени с частотой дебаевского звука, то происходит модуляция интенсивности рассеянного света. Эта модуляция проявляется в том, что в рассеянном свете, кроме частоты $f_0 = c_{св}/\lambda_{св}$, где $c_{св}$ — скорость света, появляются смещенные частоты $\pm\Omega = f - f_0 = \pm c/\lambda$, где c — скорость дебаевских волн, или скорость звука. Получающееся относительное изменение частоты будет

$$\Delta f/f_0 = \pm\,\Omega/f_0 = \pm\,(c/\lambda)\,\lambda_{св}/c_{св}, \qquad (3.2)$$

или, принимая во внимание брэгговское условие (3.1),

$$\Delta f/f_0 = \pm 2n\,(c/c_{св})\sin(\varphi_р/2). \qquad (3.3)$$

Смещение частоты может быть объяснено и чисто кинематически; сдвиги частоты происходят из-за доплеровского эффекта при рассеянии света на движущихся решетках флуктуаций плотности. Это так называемый *дублет Мандельштама — Бриллюэна*; смещенные спектральные линии находятся слева и справа от несмещенной спектральной линии. Несмещенная линия, теорию происхождения которой дали Л. Д. Ландау и Г. Плачек [18], появляется вследствие флуктуации энтропии (для некоторых жидкостей, например для воды, эта линия может отсутствовать). Все три линии, или триплет, образуют так называемую *тонкую структуру линии рэлеевского рассеяния*. Спектральная линия МБР слева от центральной линии, имеющая частоту $f_0 - \Omega$, носит название *стоксовой компоненты*, а справа от f_0, имеющая частоту $f_0 + \Omega$ — *антистоксовой компоненты*. Эффект МБР был впервые независимо обнаружен в опытах Е. Ф. Гросса [19] и Г. С. Ландсберга и Л. И. Мандель-

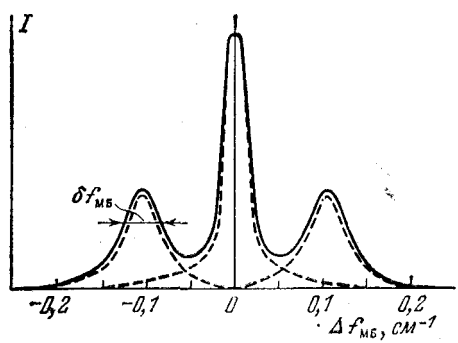


Рис. 2.2. Распределение интенсивности в тонкой структуре рассеянного света (He—Ne-лазер, 6328 Å) в CCl_4 в зависимости от расстройки спектроскопической частоты $\Delta f_{мб} = f_{мб} - f_{мб0}$. Штриховыми линиями показаны расшифрованные контуры всех трех компонент.

штама [20], которые были проведены с кристаллом кварца. В дальнейшем [21] была также обнаружена тонкая структура линий рэлеевского рассеяния в жидкостях.

На рис. 2.2 показаны спектр световой волны (триплет МБР) и схематичное распределение интенсивности в тонкой структуре линии рассеяния света He—Ne-лазера с $\lambda_{св}=0{,}63$ мкм в четыреххлористом углероде [22]; свет поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости рассеяния. Следует отметить, что, после того как в качестве источника света начали применяться газовые лазеры, оказалось возможным (благодаря большой спектральной плотности когерентного излучения света) не только определить положение спектральных линий рассеяния Мандельштама — Бриллюэна, но и измерить их полуширину. Эта полуширина $\delta f_{МБ}$ линии связана с поглощением следующей формулой:

$$\delta f_{МБ} = c\alpha/\pi c_{св} \tag{3.4}$$

($f_{МБ}[см^{-1}]$ — спектроскопическая частота, применяемая в оптической спектроскопии, $f_{МБ}=\omega/2\pi c_{св}=1/\lambda$). Полуширина в герцах связана с α выражением

$$\delta f \approx \alpha c/\pi. \tag{3.5}$$

Так, для четыреххлористого углерода измеренное значение $\delta f_{МБ}=17\cdot10^{-3}$ см$^{-1}$ и $\alpha=16\cdot10^{3}$ см$^{-1}$. Таким образом, определение по тонкой структуре δf (зная $\varphi_р$, Ω, c, n и $c_{св}$) дает возможность, согласно формулам (3.4) или (3.5), определить α.

Изучение МБР производится экспериментально главным образом для углов $\varphi_р\sim\pi/2$, что соответствует частотам $\sim10^{10}$ Гц (согласно условию Брэгга).

Исследования тонкой структуры линии рэлеевского рассеяния в ряде жидкостей показали, что для таких жидкостей, как бензол, четыреххлористый углерод, сероуглерод и т. д., имеет место заметная дисперсия скорости на гиперзвуковых частотах. Так, при 20°C скорость ультразвука в бензоле составляет 1324 м/с, а скорость гиперзвука — 1470 ± 20 м/с; относительное изменение скорости $(\Delta c/c)\approx10^{-1}=10\%$.

Обнаружение Е. Ф. Гроссом тонкой структуры рэлеевского рассеяния в жидкостях было вначале непонятным; в самом деле, полученные результаты означали, что на гиперзвуковых частотах, при которых наблюдалось это явление, должно было бы быть выполнено неравенство $\alpha\lambda\ll1$, поскольку только при выполнении этого условия можно говорить о распространении упругих волн *). Однако экстраполяция данных ультразвуковых измерений для величин α

*) Вообще говоря это не совсем точно. И при $\alpha\lambda\gg1$ имеется (хотя и весьма слабый) волновой процесс. Так обстоит дело, например, с быстро затухающими сдвиговыми волнами в вязкой жидкости, о чем будет идти речь в § 5 этой главы (см. также § 3 гл. 1).

по формуле (2.13) на гиперзвуковые частоты приводит к тому, что, например, для бензола $\alpha\lambda=10$.

Это противоречие было устранено в релаксационной теории дисперсии и поглощения. К изложению этой теории мы и переходим.

§ 4. Релаксация объемной вязкости

Поскольку сверхстоксово поглощение и дисперсия звука были объяснены рядом авторов, и прежде всего Кнезером [9], первоначально для многоатомных газов, мы также начнем рассмотрение с газообразных сред. Было показано, что причина этих явлений заключается в релаксационном механизме передачи энергии звука при неупругих соударениях молекул газа из поступательных во внутренние степени свободы молекул и обратно. *Релаксационный процесс* представляет собой процесс запаздывания на конечный промежуток времени отклонения макроскопической системы от состояния термодинамического равновесия или возвращения к этому состоянию. При распространении звуковой волны в силу закона возрастания энтропии часть энергии системы переходит в тепло. Как будет показано, при этом должна наблюдаться дисперсия звука.

Качественно возникновение дисперсии в многоатомном газе можно пояснить такими простыми рассуждениями. Полная энергия E представляет собой сумму энергий поступательного движения молекул (внешние степени свободы) E_k и энергий внутренних (колебательных и вращательных) степеней свободы молекул E_i. Соответственно этому теплоемкость C_V будет представлять собой сумму теплоемкостей (для одного моля) C_{V_k} (внешние степени свободы) и C_{V_i} (внутренние степени свободы). Если звук имеет низкую частоту и период T существенно больше *времени релаксации* τ (времени, за которое отклонение C_{V_k}, C_{V_i}, E_k, E_i и т. д. от их равновесных значений увеличивается или уменьшается в e раз), т. е. $T\gg\tau$, то установление равновесия между возбужденными и невозбужденными молекулами успевает следовать за изменением давления в звуковой волне. Формула для скорости звука представляет собой формулу Лапласа: $c_0=\sqrt{\gamma p/\rho}=\sqrt{(C_p/C_V)\,(p/\rho)}$, или, так как $C_p-C_V=R$,

$$c_0=\left[\frac{p}{\rho}\left(1+\frac{R}{C_V}\right)\right]^{1/2}=\left[\frac{p}{\rho}\left(1+\frac{R}{C_{V_k}+C_{V_i}}\right)\right]^{1/2} \tag{4.1}$$

(индекс «0» у c соответствует низким частотам).

Для высоких частот ($T\ll\tau$) равновесие между внешними и внутренними степенями свободы молекул не будет успевать устанавливаться и $C_{V_i}\to 0$. В этом случае

$$c_\infty\approx\left[\frac{p}{\rho}\left(1+\frac{R}{C_{V_k}}\right)\right]^{1/2}, \tag{4.2}$$

где c_∞ — значение скорости звука для высоких частот *). Как видно

*) Скорость c_∞ называют *высокочастотной скоростью звука*, а скорость c_0 — соответственно *низкочастотной скоростью звука*.

из этих выражений, $c_\infty > c_0$, и, следовательно, имеется изменение скорости звука с частотой, т. е. дисперсия.

Можно также качественно показать, что процессы обмена энергией между поступательными (внешними) и колебательными и вращательными (внутренними) движениями молекул, приводят не только к дисперсии, но также и к потере энергии звуковой волны, т. е. вызывают дополнительное так называемое молекулярное поглощение звука.

Отмеченные здесь релаксационные процессы — это процессы колебательной и вращательной релаксации; их часто называют *кнезеровскими процессами* или термической релаксацией возбуждения внутримолекулярных колебаний. В газах возможен также ряд других процессов. Это так называемая трансляционная релаксация установления максвелловского распределения скоростей молекул газа (как это следует из кинетической теории газов, она происходит всего за несколько столкновений частиц). Это также химические релаксационные процессы диссоциации и ассоциации в газах под действием звука, когда число частиц непостоянно. Возможен и ряд других релаксационных процессов.

Здесь мы не будем рассматривать различные виды релаксаций в газах на микроскопическом уровне, поскольку эти вопросы скорее относятся к молекулярной физике и кинетической теории, чем к физической акустике, а сконцентрируем свое внимание на макроскопическом (феноменологическом) подходе. Такой подход возможен не только для газов (где можно, используя более или менее простые модели, рассматривать вопрос об акустической релаксации и микроскопически), но и для жидкостей, для которых микроскопическое рассмотрение (из-за сложного строения жидкости и отсутствия разработанной теории жидкого состояния) чрезвычайно затруднено и может осуществляться только на основе сложных модельных представлений.

Укажем здесь только, что в жидкостях могут происходить разнообразные и весьма сложные релаксационные процессы: термическая релаксация (кнезеровские эффекты, возбуждения колебательных и вращательных степеней свободы молекул), поворотно-изомерная релаксация, химическая релаксация. В акустической волне может возникать под действием деформаций сжатия и сдвига так называемая *структурная релаксация*. Под этим понимают изменение ближнего порядка в расположении молекул, что приводит к некоторой перестройке структуры жидкости. Все эти типы релаксаций связаны в основном с объемной вязкостью, хотя структурная релаксация может происходить и под действием сдвиговой волны в маловязких жидкостях — на очень высоких частотах. В жидкости могут наблюдаться сразу несколько различных релаксационных процессов.

Обсудим основные положения феноменологической релаксационной теории объемной вязкости, не обращаясь к каким-либо модельным представлениям, а основываясь лишь на законах гидродинамики и законах неравновесной термодинамики; такая теория была

построена впервые Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем [23, 24].

Положим, что в релаксирующей среде возникла объемная деформация. Эта деформация нарушает термодинамическое равновесие жидкости (или газа). При этом модуль объемной упругости $K=V\,\Delta p/\Delta V$, или модуль всестороннего сжатия (величина, обратная сжимаемости), изменяется, поскольку K (имея в виду возможные релаксационные процессы в системе) зависит от скорости деформации. Подчеркнем, что здесь мы рассматриваем процессы релаксации, вызванные только объемной деформацией, а не деформацией сдвига. Изменение K происходит от максимального «динамического» значения (быстрые деформации) K_∞, когда установление равновесия не успевает следовать за изменением объема, до минимального (статического) значения модуля объемной упругости K_0 (медленные деформации), когда установление равновесия полностью следует за изменением объема. Согласно принципу Ле-Шателье, если система внешним воздействием выведена из состояния равновесия, так что объем ее уменьшается (сжатие), то в ней начинаются процессы восстановления равновесия, которые приводят к уменьшению давления, т. е. давление p будет противодействовать деформации и $\partial p/\partial\rho$ будет уменьшаться. В равновесном состоянии $(\partial p/\partial\rho)_0=c_0^2$ будет меньше, чем в неравновесном состоянии; при быстрых деформациях (высокие частоты) $(\partial p/\partial\rho)_\infty=c_\infty^2>c_0^2$. С этим результатом мы уже познакомились выше при обсуждении формул (4.1) и (4.2). Мы можем записать для изменения давления p', противодействующего объемной деформации в случае быстрых деформаций, формулу

$$\frac{\partial p'}{\partial t}=K_\infty\frac{\partial}{\partial t}\frac{\Delta V}{V}=K_\infty\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \tag{4.3}$$

где $\varepsilon=\Delta V/V$ — объемная деформация. Во втором случае для медленных деформаций $p'=p_0'=K_0\varepsilon$. Теперь рассмотрим сам процесс восстановления равновесия; он приводит к уменьшению давления, противодействующего деформации. В состояниях, близких к равновесию, скорость уменьшения давления можно считать пропорциональной разности $p'-p_0'$, где p_0' — равновесное приращение давления при данной деформации. Тогда

$$\frac{\partial p'}{\partial t}=-\frac{p'-p_0'}{\tau}=-\frac{p'-K_0\varepsilon}{\tau}, \tag{4.4}$$

где τ — время релаксации. Это уравнение часто называют *уравнением реакции* (уравнением релаксации).

Теперь объединим (4.3) и (4.4), считая, что имеет место (вследствие малости отклонения системы от равновесного состояния) аддитивность изменения давления в среде для быстрых и медленных изменений. Тогда можно записать:

$$\partial p'/\partial t=K_\infty\,\partial\varepsilon/\partial t-(p'-K_0\varepsilon)/\tau. \tag{4.5}$$

Мы получили так называемое *уравнение Кельвина — Фойгта* для вязкоупругой среды.

Это уравнение можно также записать в другом виде, если ввести обозначение $m=(c_\infty^2-c_0^2)/c_0^2$, где $c_\infty^2=K_\infty/\rho$ и $c_0^2=K_0/\rho$:

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\frac{p'}{\tau}=c_0^2\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\frac{\rho'}{\tau'}\right)+mc_0^2\frac{\partial \rho'}{\partial t}. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) — линеаризованное уравнение состояния, дающее связь между приращением давления и приращением плотности.

Более строгий вывод этого уравнения состоит в следующем [6]. В релаксирующей среде уравнение состояния можно записать в виде

$$p=p(\rho,\ s,\ \xi),$$

где ξ — некоторая «внутренняя» координата; это может быть степень возбуждения молекул, концентрация компонент в химической реакции и т. д.

Считая отклонение ξ от положения равновесия малым, изменение ξ со временем можно представить в виде разложения в ряд по этому малому отклонению

$$\dot{\xi}=-(\xi-\xi_0)/\tau+B(\xi-\xi_0)^2/\tau^2+\ldots \tag{4.7}$$

Это уравнение, так же как и (4.4), называют уравнением реакции. Поскольку $\dot{\xi}=0$ при $\xi=\xi_0$, то «нулевого» члена в разложении (4.7) не будет; считая, далее, процесс линейным, второй член разложения в (4.7) отбрасываем. Представляем далее $p=p(\rho,\ s,\ \xi)$ в виде разложения

$$p=p_0+\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_0}\rho'+\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho_0}(\xi-\xi_0)+\ldots \tag{4.8}$$

Мы пренебрегли в этом разложении малыми членами порядка μ^2 и выше, где $\mu\sim v/c$, ρ'/ρ, $(\xi-\xi_0)/\xi_0$. В (4.8), кроме того, опущен член с изменением энтропии s, поскольку это изменение представляет собой величину третьего порядка малости по сравнению с изменением давления (см. 1.1.19) *). Следует обратить внимание далее на то, что ξ_0 соответствует текущему значению плотности, т. е. что равновесное состояние ξ_0 само есть функция плотности: $\xi_0=\xi_0(\rho)$. Отсюда, если обозначить через ξ_{00} значение ξ в отсутствие возмущения (предельно быстрые возмущения, когда отклонение от равновесного состояния не успевает происходить), то

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_0}=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_{00}}+\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho_0}\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}. \tag{4.9}$$

Из (4.8), имея в виду очевидное соотношение $c_0^2=(\partial p/\partial \rho)_{\xi_0}$, получим

$$\frac{dp'}{dt}=c_0^2\frac{d\rho'}{dt}+\left(\frac{dp}{d\xi}\right)_{\rho_0}\frac{d\xi}{dt}. \tag{4.10}$$

Заменяя в (4.8) $(\xi-\xi_0)$ на $-\tau\, d\xi/dt$, используя уравнение реакции,

*) В [26] учтены члены порядка μ^2.

можно записать

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} \rho' - \tau \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \frac{d\xi}{dt}. \qquad (4.11)$$

Из этого соотношения и (4.9) исключим $d\xi/dt$. В результате найдем уравнение состояния для релаксирующей среды, дающее связь между приращением давления p' и приращением плотности ρ' в виде (4.6). Интегрируя это уравнение, получим [26]

$$p' = c_0^2 \rho' + m c_0^2 \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \frac{d\rho'}{dt} dt', \qquad (4.12)$$

где учтено, что $(\partial p/\partial \rho)_{\xi_{00}} = c_\infty^2$ и $(c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2 = m$. Теперь можно рассмотреть распространение звуковых волн в среде с релаксацией. Для этого воспользуемся линеаризованными уравнениями гидродинамики для жидкости без диссипации и уравнением состояния (4.12); тем самым мы учтем процессы релаксации. Из уравнений непрерывности и движения при $(\boldsymbol{v}'\nabla)\boldsymbol{v}' = 0$, исключая переменные p' и $\boldsymbol{v}'$ из этих уравнений и (4.12), получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' - m c_0^2 \Delta \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' = 0. \qquad (4.13)$$

Это волновое уравнение для релаксирующих сред, в котором наличие интегрального члена, как это будет видно ниже, феноменологически эквивалентно учету объемной вязкости η'. Действительно, при выводе (4.13) мы пользовались уравнениями гидродинамики невязкой жидкости, но оперировали с уравнением состояния (4.12), учитывающим процессы релаксации. Отыскивая решение этого уравнения в виде $\rho' = A \exp[i(\omega t - kx)]$, имеем для волнового числа

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\left(1 - m\frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}\right). \qquad (4.14)$$

Поскольку $m = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_0^2 \ll 1$, получаем

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0}\left[1 - \frac{m}{2}\frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} - i\frac{m}{2}\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}\right]. \qquad (4.15)$$

Из этого выражения получим соотношения для $c(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ в виде

$$c = c_0\left(1 + \frac{m}{2}\frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\right), \qquad (4.16)$$

$$\alpha = \frac{m}{2c_0\tau}\frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}. \qquad (4.17)$$

Вид кривых для c и $\alpha\lambda$ в зависимости от $\omega\tau$ изображен на рис. 2.3; эксперимент (см. рис. 2.1) достаточно хорошо согласуется с выражениями (4.16) и (4.17).

В проведенном рассмотрении мы имели дело с процессами релаксации, связанными только с объемными деформациями. Если не рассматривать процессов теплопроводности, можно прийти к заключению, что решение волнового уравнения (4.13) учитывает влияние релаксации только объемной вязкости η'; в уравнении состояния (4.6) возможная релаксация сдвиговой вязкости не учитывалась.

Воспользуемся формулой (2.12), согласно которой коэффициент поглощения за счет объемной вязкости равен

$$\alpha_{\eta'} = \omega^2 \eta' / 2\rho c^3.$$

Приравняем это значение коэффициенту поглощения (4.17), полученному при рассмотрении релаксации объемной вязкости. Получим

$$\eta' = (c_\infty^2 - c_0^2)\, \tau\rho / (1 + \omega^2 \tau^2). \qquad (4.18)$$

Мы приходим к заключению, что наличие релаксационных процессов в продольной звуковой волне феноменологически эквивалентно появлению объемной вязкости, зависящей от частоты.

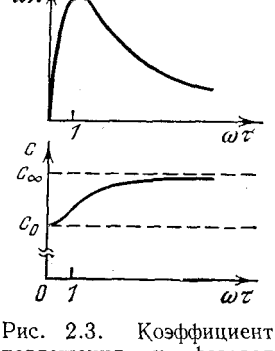


Рис. 2.3. Коэффициент поглощения и фазовая скорость в релаксирующей среде.

При низких звуковых частотах ($\omega\tau \ll 1$)

$$\eta' = \eta_0' = (c_\infty^2 - c_0^2)\, \tau\rho, \qquad (4.19)$$

где η' не зависит от частоты и пропорциональна времени релаксации τ. При высоких частотах ($\omega\tau \gg 1$)

$$\eta' = (c_\infty^2 - c_0^2)\, \rho / \omega^2 \tau; \qquad (4.20)$$

η' стремится к нулю при $\omega \to \infty$. Как говорят, η' в этом случае «отрелаксировала». Такое поведение объемной вязкости хорошо объясняет частотную зависимость коэффициента поглощения звука, измеренную в экспериментах (см., например, рис. 2.1).

Следовало бы обсудить вопрос о том, не будет ли коэффициент теплопроводности $\varkappa$ также подразделяться на два коэффициента. Такое рассмотрение было проведено в [25], где показано, что если учитывается релаксация η', то релаксацию $\varkappa$ учитывать не нужно.

Полезно иметь представление о порядке величин для коэффициента поглощения $\alpha_{\eta'}/f^2$ за счет объемной вязкости. Для этого приведем ряд значений коэффициента поглощения α_η/f^2 из-за действия сдвиговой вязкости η и экспериментально измеренное значение α/f^2 (поглощение $\alpha_\varkappa/f^2$ из-за теплопроводности $\varkappa$ для указанных жидкостей примерно на порядок меньше, и поэтому мы его не приводим); отличие экспериментально измеренного α/f^2 от значения α_η/f^2 следует отнести за счет действия η':

Жидкость ($t°=20°C$)	α_η/f^2, 10^{-17} с²/см теория	α/f^2, 10^{-17} с²/см эксперимент	Жидкость ($t°=20°C$)	α_η/f^2, 10^{-17} с²/см теория	α/f^2, 10^{-17} с²/см эксперимент
Вода (1—220 МГц)	8,5	23	Бензол (11—165 МГц)	8,6	850
Этиловый спирт (13—250 МГц)	22	55	Уксусная кислота (3,7—31 МГц)	17	2880

Из приведенных данных видно, что поглощение, вызываемое объемной вязкостью, может на два порядка и более превышать поглощение, вызываемое сдвиговой вязкостью.

Остановимся вкратце на общем вопросе о связи между дисперсией и поглощением. Для этого вернемся к выражению, дающему интегральную связь между p' и ρ' (см. (4.12)). Можно показать, что после интегрирования по частям оно может быть переписано в виде

$$p' = c_\infty^2 \rho' - \frac{m}{\tau} c_0^2 \int\limits_{-\infty}^{t} \rho'(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) d\tau'. \qquad (4.21)$$

Запись уравнения состояния среды в форме (4.12) и (4.21) полезна в том отношении, что она явным образом характеризует *запаздывание реакции среды на внешнее воздействие* (в данном случае на изменение плотности ρ'). Тот факт, что верхний предел интегрирования в (4.12) и (4.21) ограничен значением t, является выражением *принципа причинности*, согласно которому реакция среды в момент времени t определяется воздействием в прошлом и настоящем, т. е. при $t' \leqslant t$ (среда с памятью). Использование уравнения реакции в простейшей форме (4.7) без учета квадратичного члена привело к появлению экспоненциального ядра в (4.21). В общем случае среда описывается следующим линеаризованным уравнением состояния *):

$$p'(\boldsymbol{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int \varkappa(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t, t') \rho'(\boldsymbol{r}', t') d\boldsymbol{r}', \qquad (4.22)$$

в котором интеграл по объему означает, что реакция в точке $\boldsymbol{r}$ определяется суммированием воздействий в различных точках пространства ($\boldsymbol{r}$), т. е. имеется *пространственная нелокальность* (соответственно уже упомянутую зависимость реакции от воздействий в различные моменты времени часто называют *временной нелокальностью*). Вид ядра $\varkappa(r, r', t, t')$ можно определить, конечно, только с помощью микроскопического рассмотрения. Однако и феноменологический подход позволяет получить весьма полезные сведения. В частности, из (4.21) легко убедиться, что ядро $\varkappa$ убывает практически до нуля в течение характерного времени релаксации τ. Аналогичные выводы можно сделать и относительно пространственного спадания $\varkappa$ [27]. Можно показать, что $\varkappa$ заметно отлично от нуля лишь в интервале $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \leqslant d$, где d — характерный размерный параметр среды (длина свободного пробега частиц, дебаевский радиус, постоянная кристаллической решетки и т. д.).

*) Для среды с нелинейным уравнением состояния до второго порядка включительно величина $p'^{(2)}$ с учетом только временной нелокальности описывается выражением [26]

$$p'^{(2)} = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{-\infty}^{t'} \varkappa(t, t', t'') \rho'(t') \rho'(t'') dt''.$$

Поскольку пространственная нелокальность обычно проявляется лишь на очень высоких частотах, мы не будем здесь на ней останавливаться и перепишем (4.22) в виде

$$p' = \int_{-\infty}^{t} \varkappa (t-t')\, \rho' (t')\, dt'. \tag{4.23}$$

Здесь учтено, что для стационарных сред $\varkappa(t, t')=\varkappa(t-t')$. Для среды, описываемой уравнением реакции (4.7), из (4.21) и (4.23) следует, что

$$\varkappa (t-t') = c_\infty^2 \delta (t-t') - \frac{mc_0^2}{\tau} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right). \tag{4.24}$$

Важные заключения о процессах, происходящих в среде, можно получить и непосредственно из (4.23), не обращаясь к конкретному виду $\varkappa(t-t')$. В частности, можно показать, что распространение звуковых волн в любой неограниченной среде, описываемой уравнением вида (4.23), всегда сопровождается и поглощением, и дисперсией. Более того, последние оказываются связанными весьма общими интегральными соотношениями, которые принято называть *дисперсионными соотношениями типа Крамерса — Кронига.*

Действительно, вводя обозначение $\beta=t-t'$ и переходя к фурье-образам в (4.23), получим

$$p' (\omega) = \varkappa (\omega)\, \rho' (\omega), \tag{4.25}$$

где

$$\varkappa (\omega) = \int_0^\infty \varkappa (\beta) \exp (i\omega\beta)\, d\beta \tag{4.26}$$

(используется временная зависимость $\exp(-i\omega\beta)$). Функция $\varkappa(\omega)$, представляющая собой характеристику среды, имеет смысл величины, обратной комплексной сжимаемости, умноженной на плотность. Нетрудно убедиться, что $\varkappa(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексного переменного ω. В самом деле, подстановка $\omega=\mathrm{Re}\,\omega+i\,\mathrm{Im}\,\omega$ в (4.26) показывает, что мнимая добавка к ω только улучшает сходимость интеграла в этом выражении. Воспользуемся теперь теоремой Коши для аналитической функции $f(\omega)=\varkappa(\omega)-\varkappa(\infty)$. Согласно этой теореме интеграл

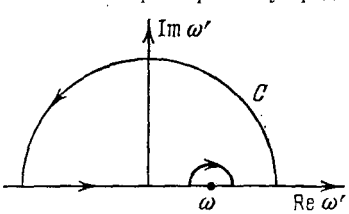


Рис. 2.4. Контур интегрирования при вычислении интеграла (4.27).

$$I = \int_C \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}\, d\omega' \tag{4.27}$$

равен нулю, если интегрирование производится по замкнутому контуру C, изображенному на рис. 2.4. Устремляя радиус дуги контура в интеграле (4.27) к бесконечности и учитывая, что при этом функция $f(\omega')=[\varkappa(\omega')-\varkappa(\infty)]\to 0$, получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}\, d\omega' - i\pi f(\omega) = 0. \tag{4.28}$$

Взятие действительной и мнимой частей от (4.28) дает следующие дисперсионные соотношения, связывающие $\mathrm{Re}\,f(\omega)$ и $\mathrm{Im}\,f(\omega)$:

$$\mathrm{Re}\, f(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'-\omega}\, d\omega', \quad \mathrm{Im}\, f(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, f(\omega')}{\omega'-\omega}\, d\omega', \tag{4.29}$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения. Поскольку комплексная фазовая скорость плоской волны, распространяющейся в рассматриваемой среде с памятью, связана с $\varkappa(\omega)$ простым дисперсионным уравнением

$$c(\omega)=\sqrt{\varkappa(\omega)}, \tag{4.30}$$

то дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига (4.29) и (4.30) остаются справедливыми и для величин $c(\omega)-c\infty$ и $1/c(\omega)-1/c\infty$. С учетом симметрии функции $1/c(\omega)$, а именно $1/c(-\omega)=[1/c(\omega)]^*$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение), вытекающей непосредственно из условия вещественности $\varkappa(\beta)$, интересующие нас дисперсионные соотношения для функции $\varphi(\omega)=1/c(\omega)-1/c(\infty)$ можно переписать с помощью интегралов по физической области частот $(0,\ \infty)$ [28]

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[1/c(\omega)-1/c(\infty)]&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\operatorname{Im}[1/c(\omega')]}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega',\\ \operatorname{Im}[1/c(\omega)]&=-\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}[1/c(\omega')-1/c_{(\infty)}]}{\omega'^2-\omega^2}\,d\omega'.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Соотношения (4.31) показывают, что в неограниченной среде, описываемой уравнением состояния (4.23), распространение звуковой волны всегда сопровождается поглощением (мнимая часть $1/c(\omega)$) и дисперсией (действительная часть $1/c(\omega)$), которые связаны между собой. Подчеркнем тот факт, что приведенный вывод дисперсионных соотношений (4.29) опирается только на аналитичность и ограниченность функции $\varkappa(\omega)$ в верхней полуплоскости ω, которые обусловлены условием причинности и стремлением среды к состоянию термодинамического равновесия. Справедливость соотношений (4.31) для функции $\varphi(\omega)=1/c(\omega)-1/c\infty$, характеризующей волновой процесс в среде, кроме того, обусловлена наличием достаточно простой связи (4.30) между $c(\omega)$ и $\varkappa(\omega)$, не приводящей к нарушениям аналитичности $c(\omega)$ или $1/c(\omega)$. В более сложных случаях, например для электромагнитных волн в анизотропной плазме [29] или для нормальных звуковых и электромагнитных волн в слоистых средах [30], связь между параметрами среды и волновыми параметрами приводит к нарушению аналитичности последних, и дисперсионные соотношения в общем случае не имеют места.

§ 5. Релаксация сдвиговой вязкости в жидкостях

При сдвиговых деформациях вязкой жидкости в ней возникают вязкие напряжения σ, подчиняющиеся закону Ньютона (*ньютонова жидкость*):

$$\sigma=\eta\frac{\partial v}{\partial y}=\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)=\eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)=\eta\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}. \tag{5.1}$$

Здесь $\varepsilon=\partial\xi/\partial y$ — изменение угла, т. е. деформация сдвига, ξ — перемещение точки с вертикальной координатой y по направлению оси x, а $\partial v/\partial y$ — изменение скорости v с координатой y. Вспомним, что по закону Гука $\sigma=\mu\varepsilon$, где μ — модуль сдвига. Таким образом, для ньютоновой жидкости напряжения пропорциональны не самой деформации, как это имеет место для твердых тел, а скорости изменения деформации, и, следовательно, сколь угодно малые силы могут вызвать сколь угодно большие деформации, если продолжительность действия силы достаточно велика.

В § 3 гл. 1 рассматривалась задача о гармонических колебаниях погруженной в жидкость плоской стенки (с частотой $\omega=2\pi f$ в своей

плоскости). Было показано, что внутрь жидкости распространяются вязкие, или сдвиговые, волны, скорость которых $c_в = \sqrt{2\eta\omega/\rho}$, поглощение $\alpha_в = 2\pi/\lambda_в$ и для которых $\sigma = i\omega\eta\varepsilon$ (при гармонических колебаниях стенки).

Комплексный *вязкий* или *сдвиговый импеданс* $Z_в$ такой ньютоновой жидкости определяется выражением

$$Z_в = \rho\tilde{c}_в = \rho\omega/k_в, \tag{5.2}$$

где $k_в = k_{в1} - ik_{в2} = k_{в1} - i\alpha_в$ — волновое число для вязких, или сдвиговых, волн, а по (1.3.7) $k_в = \sqrt{-i\omega\rho/\eta}$. Подставляя значение $k_в$ в (5.2), получаем

$$Z_в = (1+i)\sqrt{\pi f\rho\eta} = R_в + iX_в. \tag{5.3}$$

Таким образом, для чисто ньютоновой жидкости действительная и мнимая части импеданса $Z_в$ совпадают.

Реальные жидкости, однако, далеко не в полной мере являются ньютоновыми жидкостями, т. е. не полностью текучи. Даже такая относительно мало вязкая жидкость, как вода, при приложении к ней резких напряжений (удар быстро двигающимся стержнем по струе воды [31] или попадание в струю пули) становится хрупкой и «раскалывается», т. е. имеет большую упругость формы. С другой стороны, стальной шарик, падающий на кусок вара, упруго отскакивает от него, а если его положить на тот же кусок вара, он медленно в него погружается. Эти простые факты наглядно показывают наличие сдвиговых напряжений даже в маловязких жидкостях и их зависимость от скорости, с какой происходят деформации; с другой стороны, длительные деформации, приложенные к некоторым телам, кажущимся твердыми, приводят к образованию медленного течения.

Измерения на ультразвуковых частотах сдвигового импеданса в ряде вязких жидкостей, растворах полимеров, жидких кристаллах и т. д. и его зависимости от частоты также не дают согласия с представлением об этих жидкостях как о ньютоновых жидкостях, для которых $R_в = X_в$. Из экспериментов следует, что при повышении частоты мнимая часть импеданса $X_в$ становится меньше, чем $R_в$, и, имея на некоторой частоте максимум, $X_в$ при дальнейшем росте ω обращается в нуль, т. е. в пределе на высоких частотах импеданс становится действительным, как и в упругой среде.

Впервые Максвелл, занимаясь вязкоупругими свойствами газа, предсказал релаксационный характер сдвигового поведения жидкости. Он предположил, что на низких частотах сдвиговая упругость на фоне текучести почти не играет роли, т. е. что жидкость практически не имеет упругости формы. На высоких частотах, по теории Максвелла, основную роль играет упругость формы, а текучесть имеет мéньшее значение. Сейчас можно считать установленным, что скорость, с которой рассасываются (релаксируют) сдвиговые напряжения, возникающие в жидкости под действием внешних сил, на низких частотах пропорциональна величине этих

напряжений

$$d\sigma/dt = -\sigma/\tau, \tag{5.4}$$

где τ — время релаксации. На высоких частотах, когда отклонения от состояния равновесия не успевают происходить,

$$d\sigma/dt = \mu_\infty d\varepsilon/dt, \tag{5.5}$$

где μ_∞ — модуль сдвига (чистая упругость) на бесконечно высоких частотах. Максвелл предположил, что имеется аддитивность вязкой и упругой составляющих сдвиговой деформации и что реологическое уравнение, связывающее между собой $\dot{\sigma}$, σ, ε и τ имеет вид *(модель Максвелла)*

$$d\sigma/dt = -(1/\tau)\,\sigma + \mu_\infty d\varepsilon/dt. \tag{5.6}$$

При гармонических сдвиговых колебаниях из (5.6) получим

$$\sigma = \frac{i\omega\eta}{1+i\omega\tau}\,\varepsilon = \mu\varepsilon, \tag{5.7}$$

т. е. σ и ε связаны между собой комплексным модулем сдвига μ. При $\omega\tau \to 0$ (низкие частоты) $\sigma = i\omega\eta\varepsilon = \eta\dot{\varepsilon}$ — поведение жидкости чисто вязкое; при $\omega\tau \to \infty$ (высокие частоты) $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}/\tau = \mu_\infty\varepsilon$ — поведение жидкости чисто упругое. Таким образом, возвращаясь к сдвиговому импедансу, найдем, что он будет равен

$$Z_в = \sqrt{\rho\mu} = (i\omega\rho\eta/(1+i\omega\tau))^{1/2}.$$

При $\omega\tau \to 0$ $Z_в \to Z_0 = \sqrt{i\omega\rho\eta}$, а при $\omega\tau \to \infty$ $Z_в \to Z_\infty = \sqrt{\rho\mu_\infty}$. В диапазоне $0 < \omega\tau < \infty$ сдвиг фаз между σ и ε изменяется от $\pi/2$ на низких частотах до нуля на высоких.

Для более точного описания экспериментальных зависимостей $X(\omega)$ и $R(\omega)$ были предложены более сложные реологические связи между σ и ε, в том числе с несколькими временами релаксации.

Экспериментальные исследования релаксации сдвиговой вязкости в жидкостях не могут проводиться методом пропускания вязких или сдвиговых волн через слой жидкости, который применяется для продольных волн, из-за сильного их поглощения и акустического рассогласования с твердым излучателем и приемником поперечных колебаний.

Впервые Мэзон [32] начал исследования распространения сдвиговых волн в жидкостях, сначала используя крутильные колебания кристалла в жидкости, а затем вместе с Мак-Скимином [33], правильно применив *импедансный метод* измерения при отражении сдвиговых ультразвуковых волн, распространяющихся в твердом теле, от исследуемой жидкости. Принцип измерения состоит в сравнении амплитуды A и фазы φ отраженных волн от чистой полированной поверхности буферного (например, кварцевого) стержня, и значениями A и φ, которые получаются, если нанести на эту поверхность слой исследуемой жидкости, толщина которого из-за сильного поглощения не имеет значения. При использовании им-

пульсного режима излучения число прохождений сдвиговых волн через буферный стержень стараются иметь возможно большим, чтобы точность измерений была достаточно высокой. Полный комплексный импеданс исследуемой жидкости связан с импедансом кварцевого буферного стержня (линия задержки) Z_0 выражением

$$Z_в = Z_0 \frac{1-|r|\exp(-i\varphi)}{1+|r|\exp(-i\varphi)} = Z_0 \frac{1-\tilde{r}}{1+\tilde{r}} = R_в + iX_в, \qquad (5.8)$$

где $|r|$ — модуль коэффициента отражения и φ — сдвиг фазы, $\tilde{r}=|r|\exp(-i\varphi)$. Комплексный импеданс $Z_в$ удобно представить через величину $D=\alpha_в/k_{в1}=\alpha_в\lambda_в/2\pi=\alpha_в c_в/\omega$. Поскольку волновое число для вязких волн

$$k_в = k_{в1} - i\alpha_в = k_{в1}(1 - i\alpha_в/k_{в1}) = k_{в1}(1 - iD),$$

то комплексная скорость $\tilde{c}_в$ находится из выражения

$$k_в = \omega/\tilde{c}_в = \omega(1-iD)/c_в; \quad \tilde{c}_в = c_в/(1-iD).$$

Отсюда характеристическое волновое сопротивление

$$Z_в = \rho\tilde{c}_в = \frac{\rho c_в}{1-iD} = \frac{\rho c_в(1+iD)}{1+D^2} = R_в + iX_в = |Z_в|e^{i\gamma_z}, \qquad (5.9)$$

где $D=\operatorname{tg}\gamma_z$, $|Z_в|=\rho c_в(1+D^2)^{-1/2}$.

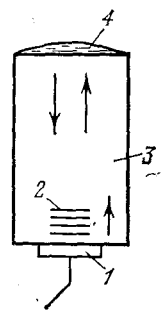


Рис. 2.5. Схема установки для измерения комплексного импеданса и динамических сдвиговых свойств жидкости по отражению ультразвуковых сдвиговых волн от слоя жидкости.

Заметим, что величина D, поскольку максимальное значение $\gamma_z=45°$ (так как разность фаз между σ и ε меняется от $\pi/2$ до нуля), меняется в пределах $0<D<1$; она связана с добротностью $Q=\pi/\alpha_в\lambda$ выражением $D=(2Q)^{-1}$. Из выражений для импеданса $Z_в$ имеем все связи между коэффициентом отражения $r=|r|\exp(-i\varphi)$, действительной $R_в$ и мнимой $X_в$ частями $Z_в$, скоростью $c_в$ и поглощением $\alpha_в$ ($\alpha_в=Dk_в$).

Следует отметить, что импедансный метод, вообще говоря, осложняется необходимостью проводить измерения весьма незначительных сдвигов фазы при отражении от исследуемой жидкости; при этом, естественно, возникают трудности, связанные с имеющейся нестабильностью сигналов как на акустической стороне, так и в радиотехнических цепях. Заметим, что, применяя дифференциальный метод (используя две идентичные линии задержки), оказывается возможным существенно повысить точность измерений.

Схема установки для измерения этих величин приведена на рис. 2.5. Пьезопреобразователь *1* излучает импульсы сдвиговых волн *2* в кварцевый стержень *3*, которые далее отражаются от полированного торца этого стержня, смоченного исследуемой жидкостью *4*, и принимаются тем же преобразователем. Вначале установку проверяют на известной жидкости, например воде, которая

до частот 10^{10} Гц не имеет релаксационных свойств и остается ньютоновой жидкостью.

Для проведения указанных измерений требуются очень чувствительные и стабильные приборы. В самом деле, например, на частоте 40 МГц изменения фазы при нанесении на поверхность воды при длине буферного стержня $\approx$1,3 см даже для 50-го эха составляют около 10 градусов, следовательно, для получения искомых величин $Z_в$ с ошибкой порядка 10% нужно обеспечить разрешающую способность всей установки по фазе на одно отражение порядка 10^{-7} (полный набег фазы при 50 отражениях $\sim 10^6$ градусов). Разрешение по амплитуде должно обеспечивать измерения $<$0,1 дБ [33]. Конечно, для более вязких жидкостей, чем вода, требования к точности измерений уменьшаются.

На достаточно низких частотах все жидкости ведут себя как ньютонова жидкость: $D=1$, $\alpha_в\lambda_в=2\pi$ и $c_в=\sqrt{2\omega\eta/\rho}$ (отметим, что на этом основан ультразвуковой метод измерения сдвиговой вязкости η).

Уже в первые годы работами Мэзона и Мак-Скимина [32, 33] были обнаружены релаксационные зависимости $D(\omega)$ и $c_в(\omega)$, отличные от ньютоновых, прежде всего в расплавах металлов и полимерах. Они были описаны удовлетворительно для расплавов металлов моделью Максвелла и для полимеров моделью Максвелла с двумя временами релаксации.

Интересные исследования переохлаждающихся органических жидкостей, в которых вязкость в небольшом интервале температур ниже температуры плавления изменяется на несколько порядков, провели Бэрлоу, Лэмб и Матесон [34]. Для этих жидкостей они эмпирически нашли следующую модель:

$$Z_в^{-1}=Z_N^{-1}+(\rho\mu_\infty)^{-1/2}, \tag{5.10}$$

где

$$Z_N=(\rho c_в)(1+i)/2=(\rho\omega\eta/2)^{1/2}(1+i), \tag{5.11}$$

μ_∞ — сдвиговый модуль упругости на частотах $\omega\tau\gg 1$. В дальнейшем эта модель была модернизирована. Измерения сдвиговой вязкости проводились ими до частот 3 ГГц и в этом диапазоне результаты хорошо согласовались с расчетами.

В 1967 г. И. Л. Фабелинский с сотрудниками ([35], см. также [36]) наблюдали тонкую структуру крыла линии Рэлея в молекулярном рассеянии света в салоле, которая была ими объяснена как результат рассеяния света на сдвиговых тепловых флуктуациях в жидкости; в дальнейших исследованиях это объяснение подтвердилось.

Как в [34], так и в [35] значения μ_∞ определялись из аппроксимации экспериментальных результатов к самым низким температурам, где $\omega\tau\gg 1$ и определяющей является релаксационная сдвиговая упругость.

Измерения, проведенные для жидкого салола прямыми акустическими методами в диапазоне от 500 до 3000 МГц [36], дали частот-

ные зависимости $|r|$, качественно описывающиеся моделью Максвелла с двумя временами релаксации.

Как уже говорилось, акустические характеристики сильновязких жидкостей не могут быть объяснены обычной релаксационной теорией с одним временем релаксации. В работе [37] показано, что если считать время релаксации $\sim \sqrt{\omega}$, что, однако, никак не согласуется с релаксационной теорией, то результаты расчетов $\alpha(\omega)$ и $c(\omega)$ получаются близкими к экспериментальным результатам, полученным рядом авторов. Следует отметить, что впервые указали на зависимость α от частоты как $\sqrt{\omega}$ в сильновязких жидкостях И. Г. Михайлов и С. Б. Гуревич [38, 39]. Эти авторы проводили измерения на продольных волнах в канифоли, вязкость которой изменялась при изменении температуры в определенном интервале температур. Ими была отмечена указанная зависимость α от ω.

Для жидкостей с малой вязкостью теоретические соображения предсказывают, что релаксация сдвиговой вязкости может быть связана лишь со структурной перестройкой жидкости и возникает лишь на очень высоких частотах. Для таких жидкостей, как, например, вода,— на частотах не ниже 10^{11} Гц; однако до сих пор экспериментально релаксации сдвиговой вязкости воды не обнаружено.

§ 6. Акустическая спектроскопия

Релаксационная теория и экспериментальные методы изучения быстропротекающих неравновесных процессов в газах и особенно в жидкостях служат важным «инструментом» исследования. Эти методы сильны, там, где проявляются коллективные взаимодействия. Особенно много ценных сведений о протекании неравновесных процессов они дают для теории жидкого состояния. В главах, посвященных физической акустике твердого тела, мы еще встретимся с разнообразными релаксационными процессами, имеющими место при распространении звука в твердых телах.

На основе изложенной релаксационной теории объемной и сдвиговой вязкостей предпринимаются многочисленные попытки создать акустическую спектроскопию газов и жидкостей. Хотя в этом направлении имеются определенные достижения, все же следует сказать, что если чувствительность в изменении c и α к добавлению примесей к той или иной среде достаточно велика ($\sim 1\%$ примеси может экспериментально обнаруживаться), то разделение нескольких релаксационных процессов, определение двух или нескольких времен релаксации (например, в смесях жидкостей, в химических реакциях) встречают большие затруднения. Другими словами, разрешающая способность акустической спектроскопии невелика. Так как поглощение звука, как об этом говорилось в § 3, измеряется довольно грубо, а дисперсия звука обычно мала, то даже в случае двух процессов с близкими временами релаксации можно лишь оценить порядок величины релаксационных параметров среды ([1], с. 229). Вместе с тем изучение поведения η' и нахождение τ, в осо-

бенности в широком интервале изменения частоты (имея в виду малую разрешающую способность), дает много сведений для понимания физических механизмов протекания молекулярных процессов в средах. Так, например, акустическими измерениями c и α удается получить сведения о структурной релаксации даже для таких жидкостей, время структурной перестройки в которых чрезвычайно мало ($\sim 10^{-11}$ с); другими способами получить такие сведения не удается [2].

Еще раз подчеркнем, что измерение самого значения объемной вязкости η' и ее зависимости от частоты и различных физических условий возможно только акустическим методом. Встречаются также случаи, когда акустические методы исследования процессов релаксации могут способствовать обнаружению самого релаксационного механизма, дают возможность проводить измерения характерных времен и внутренних параметров. Так, например, наблюдается сильнсе увеличение поглощения звука из-за флуктуаций концентрации вблизи критической точки расслаивания в ряде растворов. В некоторых растворах с критической точкой сосуществования при концентрации $C \to C_{\text{крит}}$ и при $T \to T_{\text{крит}}$, как известно, средний квадрат флуктуаций концентрации сильно увеличивается. Измерения в определенной области частот коэффициента поглощения звука α показывают, что α при этом также сильно увеличивается, что дает возможность определить время релаксации. Оптические методы в этом случае хотя и позволяют обнаруживать само явление рассеяния, но не дают определения величины флуктуаций концентрации, тогда как акустические методы это позволяют сделать [40, 41], правда, с небольшой точностью.

Значение η' и ее зависимость от различных физических условий, по-видимому, могут играть существенную роль в приложениях, в частности в физико-химических технологических процессах. Перспективными являются комбинированные методы использования оптической и акустической спектроскопии.

Одна из интересных попыток разделения вкладов различных механизмов релаксации в дисперсию и поглощение, прежде всего, для выделения колебательной («кнезеровской») релаксации, состоит в предложении использовать метод когерентной активной спектроскопии комбинационного рассеяния света; в [42] теоретически рассмотрен этот вопрос.

Предлагаемый метод активной спектроскопии состоит в зондировании населенностей различных колебательных уровней молекул, которые промодулированы звуковой волной (точнее, сопровождающими эту волну изменениями температуры T' из-за адиабатичности процесса распространения звука). Рассеяние света носит при этом когерентный характер, что приводит к высокому уровню детектированного светового сигнала, а также к его высокой направленности из-за брэгговских условий.

Зондирующее оптическое излучение частоты ω рассеивается в антистоксову область ω_a на когерентных внутримолекулярных колебаниях со звуковой частотой Ω. Эти колебания возбуждаются

биением интенсивных световых волн накачки ω_1 и ω_2, так что $\omega_1 - \omega_2 = \Omega$. Среда же дополнительно возбуждается звуком частоты ω'. Имеем

$$\omega_a = \omega + (\omega_1 - \omega_2) \pm \omega'.$$

Излучение антистоксовой компоненты происходит в направлении, определяемом условием фазового синхронизма:

$$\boldsymbol{k}_a = \boldsymbol{k} + (\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2) \pm \boldsymbol{q}.$$

Здесь волновые векторы $\boldsymbol{k}_a$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ относятся к соответствующим частотам света, а волновой вектор $\boldsymbol{q}$ — к звуковой частоте.

Условие синхронизма можно интерпретировать как брэгговское условие для когерентного антистоксова сигнала с частотой ω_a на бегущей фазовой решетке, образованной звуковой волной с волновым вектором $\boldsymbol{q}$. Интенсивность антистоксовой волны ω_a дает сведения о модуляции разности населенности возбужденного уровня с частотой Ω и основного состояния.

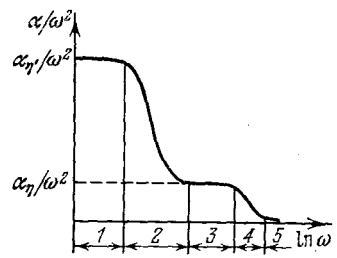


Рис. 2.6. Зависимость поглощения α/ω^2 от $\ln\omega$ с учетом релаксации как объемной, так и сдвиговой вязкостей.

Использование предлагаемого метода требует, однако, выполнения условий, при которых «истинность» состояний среды не нарушалась бы световой накачкой.

В этой главе мы познакомились с релаксационной теорией объемной и сдвиговой вязкостей в наиболее простом виде — для одного времени релаксации. Эта теория дает возможность качественно объяснить полную зависимость поглощения α/ω^2 от $\ln\omega$. Эта зависимость изображена на рис. 2.6 [39]. Она дает общее представление о том, какое поведение может иметь $\alpha(\omega)/\omega^2$ для такой жидкости, как, например, бензол.

При низких частотах, когда $\omega\tau \ll 1$ (область *1*) постоянная поглощения определяется как сдвиговой, так и объемной вязкостями и не зависит от частоты. В области *2* происходит релаксация η', и коэффициент поглощения падает; область *3* соответствует положению, когда η' «отрелаксировала», и коэффициент α определяется лишь значением η и α/ω^2 вновь не зависит от частоты. Наконец, в области *4* происходит релаксация сдвиговой вязкости η, вызванная, например, структурной перестройкой жидкости. Наконец, область *5* соответствует случаю, когда «отрелаксировала» и сдвиговая вязкость.

Хотя такая картина весьма упрощена, для общего представления о релаксационных явлениях в жидкостях она полезна.

Вернемся к вопросу о релаксации сдвиговой вязкости. Как мы отмечали, зависимость α от частоты продольного звука в жидкой канифоли $\sim\sqrt{\omega}$ [38]. Авторами [38] высказано предположение, что эта зависимость может быть объяснена наличием локально

вкрапленных в такую вязкую жидкость микроскопических неоднородностей. Они основывали свое предположение на результатах работы М. А. Исаковича [43], который развил теорию поглощения звука в микроскопически неоднородной среде, состоящей из отдельных кристаллов, и учел теплообмен между ними. В этом случае должна получаться такая же зависимость $\alpha \sim \sqrt{\omega}$.

Эта идея о микроскопически неоднородной вязкой жидкости была развита М. А. Исаковичем и И. А. Чабан [44, 45] применительно к построению феноменологической теории сильно вязких жидкостей, считая их микронеоднородными средами с диффузионным обменом между компонентами. Жидкость в этой теории считается двухфазной микронеоднородной средой типа эмульсии, компоненты которой характеризуются внутренним параметром ξ, равновесное значение которого меняется при изменении давления. Другими словами, высказывается предположение, что разные компоненты жидкости — это неупорядоченная фаза и погруженные в нее области (кластеры) относительно упорядоченной фазы, между которыми происходят диффузионные релаксационные процессы при отклонении состояния от равновесного.

Такая гипотеза дает возможность построить молекулярную теорию сильновязких жидкостей с одним временем релаксации, которая в принципе объясняет ряд не находящих пока объяснения экспериментальных фактов, в частности пропорциональность $\tau \sim \sqrt{\omega}$.

Прямых экспериментов, которые указывали бы на справедливость такой модели сильновязких жидкостей, пока еще нет, хотя результаты [46], по-видимому, согласуются с ней.

Сделаем одно общее замечание. При изучении релаксационных явлений все рассмотрение сводилось к изучению скорости звука и поглощения; именно поглощение звука в первую очередь характеризует особенности протекания неравновесного релаксационного процесса. Вместе с тем, если изучать протекание неравновесных процессов при помощи достаточно интенсивных акустических волн, мы встретимся с качественно иными закономерностями, которые могут быть существенными в получении новых сведений о протекании релаксационных явлений. Мы имеем в виду эффекты нелинейного поглощения и генерации гармоник, о чем будет идти речь в гл. 3 и 4. В особенности, по-видимому, это будет иметь значение для дальнейшего развития нелинейной неравновесной термодинамики.

Отметим еще, что для физической акустики интересен вопрос о том, каковы особенности распространения звука в зависимости от частоты и амплитуды в релаксирующих средах. Эта задача является прямой. Обратная задача — по данным акустических измерений (скорости звука, его поглощения, нелинейных особенностей распространения) выяснить физические механизмы и получить данные об особенностях неравновесных процессов в изучаемой среде. Эта последняя задача принадлежит уже скорее к области, которой занимается неравновесная термодинамика, а в применении к жидкостям — теория жидкого состояния.

В заключение этого параграфа заметим, что изучение поведения η' может иметь и достаточно неожиданные прикладные значения. Так, например, в [47] описаны весьма интересные акустические эксперименты, показывающие, что, изменяя свойства смазочных масел при помощи различных к ним присадок, можно менять для них значения η'. Этими присадками удается направленно изменять значение η' и тем самым создавать смазочные материалы с заданными диссипативными свойствами; значение же η' сравнительно легко контролировать акустическими методами, о которых шла речь в настоящей главе. Следует, однако, заметить, что здесь еще не совсем ясно, какова роль η' для тонких слоев смазки на сравнительно низких частотах, при которых процессы смазки имеют место, и не играют ли роль другие факторы — такие, как наличие вязких волн, акустические пристеночные вихревые течения и т. д.

Глава 3

ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. Плоская волна конечной амплитуды в газе и жидкости в отсутствие диссипации

В задачах линейной акустики амплитуда волны считалась настолько малой, что присутствие волны не влияло на свойства среды в той степени, чтобы их изменение сказывалось на распространении другой волны. Выполнялся принцип суперпозиции возмущений; волны не взаимодействовали между собой, распространяясь независимо.

Такое положение, однако, представляет собой идеализацию. Даже для сколь угодно малых амплитуд волн принцип суперпозиции не выполняется. Вопрос лишь в том, насколько существенно в той или иной задаче проявление всегда имеющейся нелинейности в исходных уравнениях движения и в уравнении состояния. Когда необходимо учитывать конечность амплитуды упругой волны и становятся заметными отклонения от принципа суперпозиции, возникает большое число разнообразных нелинейных эффектов. К их числу можно отнести искажение формы вначале синусоидальной волны и образование гармоник, превращение такой волны в пилообразную волну, возникновение комбинационных частот (в случае распространения нескольких волн), нелинейное поглощение, различные параметрические эффекты, рассеяние звука на звуке, трансформацию спектра интенсивных шумов, взаимодействие сигнала с шумом, акустические течения, радиационное давление, кавитацию и многие другие. Весь этот круг вопросов принято называть нелинейной акустикой.

В этой главе изложены основные принципиальные положения из всего теперь уже огромного количества нелинейных явлений, эффектов, приложений, которые исследованы и продолжают исследоваться. Теоретические основы нелинейной акустики — это часть общей теории нелинейных волн — быстро развивающейся области современной физики, изучающей общие вопросы распространения волн конечной амплитуды на поверхности жидкости, волн в плазме, мощного лазерного излучения в оптически нелинейных средах и т. д. В настоящее время имеется уже обширная литература, относящаяся к различным разделам теории нелинейных волн, в том числе и к нелинейной акустике [1—11]; по ходу изложения даются необходимые ссылки на оригинальные статьи, обзоры и монографии.

Рассмотрим распространение плоской звуковой волны в газе или жидкости без учета диссипации. Исходными уравнениями служат: уравнение движения идеальной жидкости, которое для одномерного движения (вдоль оси x) запишется в виде

$$\rho\,(\partial v/\partial t + v\,\partial v/\partial x) = -\,\partial p/\partial x, \tag{1.1}$$

уравнение неразрывности —

$$\rho\,\partial v/\partial x + v\,\partial\rho/\partial x = -\,\partial\rho/\partial t \tag{1.2}$$

и уравнение состояния —

$$\partial p/\partial\rho = c^2(\rho) = f(\rho), \tag{1.3}$$

где $c(\rho)$ — скорость звука, являющаяся функцией плотности.

В гл. 2 считалось, что акустические скорости v малы и членом $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}$, как членом второго порядка малости, можно пренебречь. Тогда из уравнений (1.1) и (1.2) легко получалось обычное волновое уравнение, описывающее процесс распространения плоской волны.

Не будем теперь пренебрегать нелинейным членом $v\,\partial v/\partial x$ и попытаемся решить систему уравнений (1.1)—(1.3). Впервые такое решение было найдено Риманом в 1860 г. [12] — *решение Римана*.

Пользуясь (1.3), исключим давление p из уравнения (1.1). Получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Следуя Риману, введем функцию

$$\sigma(\rho) = \int (c/\rho)\,d\rho. \tag{1.5}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.2) и (1.4) могут быть теперь записаны так:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + v\frac{\partial\sigma}{\partial x} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + c\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0. \tag{1.7}$$

Произведя сложение и вычитание этих уравнений, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\sigma+v) + (c+v)\frac{\partial}{\partial x}(\sigma+v) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}(\sigma-v) - (c-v)\frac{\partial}{\partial x}(\sigma-v) = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

При $\sigma = \pm v$ уравнения (1.8) сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm (c \pm v)\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{1.9}$$

Каждое из этих двух уравнений описывает распространение возмущения (волну); одно из них распространяется в положительном направлении оси x, другое — в направлении $(-x)$. Заметим, одна-

ко, что если в случае волнового уравнения для линейной задачи общее решение состояло из суммы двух волн, движущихся в противоположных направлениях, то в рассматриваемом случае суммировать возмущения нельзя, поскольку возможно нелинейное взаимодействие волн, распространяющихся навстречу друг другу.

В формуле (1.9) $c_л = c \pm v$ — локальная или местная скорость звука, являющаяся функцией x. Таким образом, в какой-либо точке профиля волны в области сжатия к скорости звука c прибавляется еще определенное значение колебательной скорости звука; в области разрежения будет вычитаться определенное значение v.

Учтем теперь нелинейность уравнения состояния. Согласно (1.1) имеем

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{p_0}{\rho_0}\gamma\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = c_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}. \qquad (1.10)$$

Здесь везде индекс «0» означает равновесное состояние; s — энтропия; рассматриваются адиабатические процессы, $s=\text{const}$. Таким образом,

$$c = c_0(\rho/\rho_0)^{(\gamma-1)/2}. \qquad (1.11)$$

Подставляя это значение c в выражение для функции Римана (1.5), получим

$$\sigma = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho)\,d\rho}{\rho} = c_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2} \frac{d\rho}{\rho} =$$

$$= \frac{2c_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2} - 1\right] = \frac{2c_0}{\gamma-1}\left(\frac{c}{c_0} - 1\right) = \pm v, \qquad (1.12)$$

откуда $c = c_0 \pm v(\gamma-1)/2$.

С учетом выражения (1.12) локальная скорость ($c_л = c \pm v$), фигурирующая в уравнении (1.9) и учитывающая вклад как нелинейности уравнения движения, так и нелинейности уравнения состояния, примет вид

$$c_л = c_0 \pm v \pm v(\gamma-1)/2 = c_0 \pm \varepsilon v, \qquad (1.13)$$

где $\varepsilon = (\gamma+1)/2$. Уравнение (1.9) примет вид

$$\partial v/\partial t + (c_0 + \varepsilon v)\,\partial v/\partial x = 0 \qquad (1.14)$$

(рассматриваем только волну, идущую вправо). Нелинейность уравнения движения изменяет скорость распространения возмущения на величину v (см. 1.9)), а нелинейность уравнения состояния — на величину $(\gamma-1)v/2$. Конечно, это условное разделение, поскольку уравнения решаются совместно. Отметим, что для воздуха $\gamma = 1{,}40$ и $(\gamma-1)/2 \approx 20\%$, тогда как для воды $\gamma = 7$ и $(\gamma-1)/2 \approx 300\%$.

Для волны, бегущей в положительном направлении x относительно неподвижной системы координат, возмущение движется со скоростью

$$c_л(v) = c_0 + \varepsilon v = c_0(1 + \varepsilon v/c_0). \qquad (1.15)$$

Это — скорость распространения возмущения среды в неподвижной системе координат. Отметим, что если для линейной гармонической волны $v=v_0 \sin\omega(t-x/c)$, то в рассматриваемом случае, согласно (1.15),

$$v=v_0 \sin\omega(t-x/(c_0+\varepsilon v)). \qquad (1.16)$$

Как видно, скорость перемещения точек профиля волны различна. Точки профиля, для которых $v>0$, движутся со скоростями $c>c_0$ (области сжатия). При $v<0$ имеем $c<c_0$ (области разрежения). Поэтому начальный профиль волны будет искажаться. Удобно следить за этим искажением, двигаясь вместе с волной со скоростью c_0 *(сопровождающая система координат)*. В этой системе координат те точки профиля, для которых $v=0$ («нули» волны), будут неподвижны; другие точки будут двигаться с относительной скоростью εv. На рис. 3.1 показана последовательная деформация профиля первоначально (при $t=0$) синусоидальной волны. Волна постепенно будет менять форму профиля, искажаться, и профиль приобретет *пилообразную форму*. Естественно, что такой процесс искажения будет происходить лишь до момента времени образования крутого пилообразного профиля, называемого *временем образования разрыва* $t_р$ (слабая периодическая ударная волна), поскольку «захлестывание» волны произойти не может; в противном случае в один и тот же момент времени каждый из трех гидродинамических параметров (v, p или ρ) имел бы разные значения, что не имеет смысла. По достижении пилообразной формы волна далее будет быстро затухать вследствие сильной диссипации, происходящей в тонком слое в окрестности фронта такой волны.

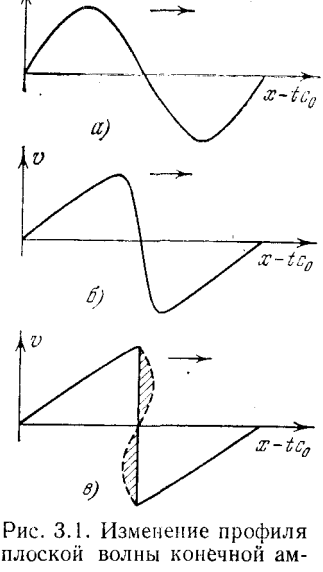


Рис. 3.1. Изменение профиля плоской волны конечной амплитуды по мере ее распространения: *а)* $t=0$, *б)* $t=t_1$, *в)* $t=t_р>t_1$; $t_р$ — время образования разрыва.

Обращаясь к рис. 3.1, можно видеть, что заштрихованные площади при $v>0$ и $v<0$ равны друг другу (что доказывается точно); этим пользуются для определения профиля волны после того, как она начинает «захлестываться». Волна, описываемая уравнением (1.14), носит название *простой волны*. Обычно простой волной называют одномерную бегущую в одном направлении нелинейную волну (в этом смысле простая волна есть обобщение бегущей линейной волны на нелинейный случай), в которой каждая из переменных поля (в акустическом случае это v, p или ρ) может быть выражена через одну из других переменных, например $\rho=\rho(v)$, $p=p(v)$, $c=c(v)$. Понятие простой волны является общим и для нелинейных волн другой физической природы. Это понятие, как, впрочем, и

многие другие понятия теории нелинейных волн, обладает свойствами универсальности (как это имеет место и в теории нелинейных колебаний для сосредоточенных систем различной природы).

На основании проведенного расчета можно, зная форму волны в момент времени t, построить форму волны для времени $t+\Delta t$. Такой процесс можно проводить только до момента образования ударного фронта. Удобно характеризовать «остановленную» волну углом θ между осью абсцисс и нашей кривой v, или коэффициентом $m=\operatorname{tg}\theta$. Будем рассматривать синусоидальную волну $v=v_0\sin(\omega t-kx)$ и проводить операции с одним полупериодом синусоиды, расположенным над осью абсцисс. Тогда начальный наклон кривой

$$m_0=\partial v/\partial x=(2\pi/\lambda)\,v_0.$$

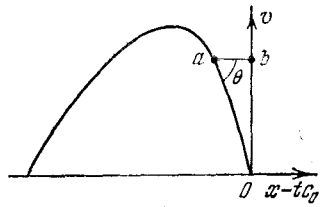


Рис. 3.2. Точка a на профиле скорости «остановленной» волны, двигаясь со скоростью εv, совпадает с точкой b через время t_p (время образования разрыва).

Через время t_p волна с начальным наклоном m_0 приобретает вертикальный передний фронт (рис. 3.2). Отсюда

$$m_0=\operatorname{tg}\theta_0=bO/ab=v/\varepsilon v t_p,\quad t_p=1/\varepsilon m_0. \tag{1.17}$$

Следовательно, примененное построение формы волны можно проводить только для времени $t\leqslant t_p$.

Выразим время образования пилообразной волны через амплитуду давления p_0. Из (1.16) и (1.17), учитывая, что для плоской волны $v_0=p_0/\rho_0 c_0$, получим

$$t_p=\lambda\rho_0 c_0/2\varepsilon\pi p_0. \tag{1.18}$$

Расстояние, на котором образуется разрыв,

$$x_p=c_0 t_p=\frac{\lambda\rho_0 c_0^2}{2\varepsilon\pi p_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon M_{ак}}=\frac{1}{k\varepsilon M_{ак}}=N\lambda. \tag{1.19}$$

Здесь $N=(2\pi\varepsilon M_{ак})^{-1}$ — число длин волн, на протяжении которых образуется разрывный передний фронт; очевидно, N зависит от параметров среды и от величины начального возмущения, $M_{ак}=v_0/c_0$ — акустическое число Маха *).

Теперь можно записать крутизну переднего фронта в зависимости от пройденного волной расстояния:

$$m=m_0/(1-x/x_p). \tag{1.20}$$

Отсюда видно, что если расстояние измеряется в единицах λ, то искажение будет одинаковым и не будет зависеть от амплитуды давления, частоты и природы газа или жидкости.

*) Поскольку в этой главе и в дальнейшем мы в основном будем иметь дело с акустическими, или колебательными, скоростями v, везде, где это не вызывает недоразумения, мы будем опускать индекс «ак» у акустических чисел Маха и Рейнольдса.

Запишем уравнение римановской простой волны (1.14) в сопровождающей системе координат. Для этого следует перейти от x и t к новым переменным.

$$x' = x, \quad \tau = t - x/c_0. \tag{1.21}$$

В этих переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x'} - \frac{1}{c_0}\frac{\partial v}{\partial \tau} \end{aligned} \tag{1.22}$$

(аналогичные соотношения имеют место для величин p и ρ). Пользуясь этими выражениями, уравнение (1.14) запишем в виде

$$\frac{1}{c_0}\frac{\partial v}{\partial t} + \left(1 + \varepsilon \frac{v}{v_0}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \left(1 + \varepsilon \frac{v}{c_0}\right)\frac{\partial v}{\partial x'} - \varepsilon \frac{v}{c_0^2}\frac{\partial v}{\partial \tau} = 0. \tag{1.23}$$

Считая, что $M = v/c_0 \ll 1$ и что $\partial v/\partial x' \ll 1$ (изменение профиля волны на длине волны мало), можно пренебречь членом $(\varepsilon v/c_0)\partial v/\partial x'$ и получить

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0. \tag{1.24}$$

Эта запись уравнения простой волны в сопровождающей системе координат часто применяется в нелинейной акустике. Уравнение (1.24), в отличие от уравнения *римановской волны* (1.14), уже не является точным (в рамках предположений, положенных в основу вывода (1.13)), поскольку при его выводе использовалось лишь второе приближение. Впрочем, ценность точного решения Римана ограничена тем, что оно относится к идеализированному случаю отсутствия диссипации.

Отметим также, что в линейном случае, когда $\varepsilon = 0$, $\partial v/\partial x = 0$ и, следовательно, профиль волны не изменяется, линейная волна в рамках сделанных предположений (отсутствие затухания, волна плоская) *стационарна*. В нелинейном случае профиль волны меняется — волна *нестационарна*. Эволюция профиля простой волны в зависимости от проходимого ею расстояния (или времени распространения) может быть проанализирована и другими методами, из которых существенную роль играют методы геометрических построений, в том числе метод характеристик. Характеристиками называют траектории движения возмущений скорости v в плоскости $x\tau$. Для линейных волн характеристикой служит уравнение $t - x/c_0 = \text{const}$, и все характеристики являются параллельными линиями, поскольку профиль при распространении не меняет своей формы и волны стационарны. Для простых волн семейство характеристик в координатах x, τ определяется формулой

$$\tau = \tau_0 - (x/c_0)\,\varepsilon M/(1 + \varepsilon M).$$

Искажение формы волны можно описывать и в спектральном представлении; очевидно, искажение эквивалентно образованию гармоник. При распространении синусоидальной волны с частотой ω,

из-за нелинейных процессов в среде образуются волны с частотой 2ω, 3ω и т. д., т. е. с расстоянием x спектр волны меняется.

Рассмотрим образование гармоник в основной волне, имеющей при $x=0$ синусоидальную форму. Ограничимся для простоты второй гармоникой. Имеем, разлагая в ряд выражение для v по (1.16),

$$v = v_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c_0 + \varepsilon v}\right) \approx v_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c_0} + \varepsilon x \frac{v}{c_0^2} + \ldots\right), \qquad (1.25)$$

членами порядка выше v/c в аргументе синуса пренебрегаем. Обозначим $\varphi_0 = \omega(t - x/c_0)$, $\varphi_1 = \omega x \varepsilon v / c_0^2$. Разлагая (1.25) в ряд и считая, что $v \ll c$, $\cos\varphi_1 \approx 1$, $\sin\varphi_1 \approx \varphi_1$, получим с учетом формулы для синуса суммы двух углов

$$v = v_0 \sin\omega(t - x/c_0) + \omega x \varepsilon (v_0 v / c_0^2) \cos\omega(t - x/c_0),$$

откуда

$$v = \frac{v_0 \sin\omega(t - x/c_0)}{1 - \omega x \varepsilon (v_0/c_0^2) \cos\omega(t - x/c_0)}.$$

Разлагая далее знаменатель в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, имеем

$$v = v_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \omega x \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{v_0}{c_0}\right)^2 \sin 2\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right). \qquad (1.26)$$

Таким образом, наряду с основным колебанием появилась вторая гармоника с амплитудой

$$v_{02} = (\omega x \varepsilon / 2)(v_0/c_0)^2. \qquad (1.27)$$

Относительная величина второй гармоники, являющаяся мерой нелинейного искажения, для звукового давления определится формулой (с учетом соотношения для плоской волны)

$$p_{02}/p_{01} = (\omega x \varepsilon / 2)(p_{01}/\rho_0 c_0^3), \qquad (1.28)$$

где p_{01} — амплитуда давления основной волны (первая гармоника) и p_{02} — то же для второй гармоники.

Согласно этому выражению p_{02} растет пропорционально пробегу волны x, частоте ω, нелинейному параметру среды ε и интенсивности звука. В действительности явление происходит сложней, чем это описывается формулой (1.28). Во-первых, амплитуда основной волны будет уменьшаться с ростом второй и более высоких гармоник, что здесь не учитывалось. Во-вторых, сама вторая гармоника p_{02} должна отдавать часть энергии на образование собственных высших гармоник. Все это связано с той идеализацией, которая с самого начала была положена в основу проведенного рассмотрения. Кроме того, пренебрегалось процессами диссипации.

Вернемся теперь снова к уравнению (1.12). При $\mu = (\rho - \rho_0)/\rho_0 = (p - p_0)/p_0 \ll 1$ из него можно получить соотношения между параметрами в волне конечной амплитуды. Ограничиваясь величинами второго порядка малости по μ, приведем ряд соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Запишем их для простой волны, распространяющейся в положительном направлении оси x.

При этом величины первого порядка малости будем отмечать одним штрихом, второго — двумя штрихами. Эти соотношения оказываются такими (см., например, [2, 17]):

$$v' = \frac{c_0}{\rho_0}\rho', \qquad v' = \frac{p'}{\rho_0 c_0},$$
$$v'' = \frac{c_0}{\rho_0}\rho'' + \frac{\varepsilon-2}{2}\frac{c_0}{\rho_0}\rho'^2, \qquad v'' = \frac{p''}{\rho_0 c_0} - \frac{\varepsilon}{2(2\varepsilon-1)}\frac{p'^2}{p_0\rho_0 c_0}, \tag{1.29}$$

или

$$\rho' = \frac{\rho_0}{c_0}v', \qquad p' = \rho_0 c_0 v',$$
$$\rho'' = \frac{\rho_0}{c_0}v'' - \frac{(\varepsilon-2)}{2}\frac{\rho_0 v'^2}{c_0^2}, \qquad p'' = \rho_0 c_0 v'' + \frac{\varepsilon}{2}\rho_0 v'^2. \tag{1.30}$$

Таким образом, в отличие от плоской волны бесконечно малой амплитуды, во втором приближении линейные соотношения между давлением и плотностью становятся неверными. Из приведенных формул следует, что при условии постоянства массы ($\rho'=0$, $\rho''=0$) в звуковом поле во втором приближении имеются постоянные составляющие скорости и давления

$$\overline{v''} = (\varepsilon-2)\,\overline{v'^2}/2c_0, \tag{1.31}$$

$$\overline{p''} = (\varepsilon-1)\,\rho_0\overline{v'^2} = (\varepsilon-1)\,\bar{E}. \tag{1.32}$$

Величина $\bar{E}=\rho_0\overline{v'^2}$ при условии сохранения количества жидкости в звуковом поле представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий в простой волне — среднюю по пространству плотность звуковой энергии простой волны (подробнее см. [2]).

§ 2. Экспериментальные методы исследования

Точное решение для плоской синусоидальной волны конечной амплитуды, распространяющейся в газах и жидкостях без учета диссипации, было получено Риманом более 100 лет назад. Однако экспериментальное обнаружение искажения формы волны и измерения амплитуды второй гармоники (ее зависимость от расстояния, нелинейного параметра, начальной интенсивности, частоты и др.) были сделаны сравнительно недавно. Л. Л. Мясников [13] экспериментально исследовал явление искажения в трубе, заполненной газом, создавая в ней интенсивные звуковые плоские синусоидальные волны. В жидкостях первые эксперименты для плоских синусоидальных волн достаточно большой интенсивности были проведены на ультразвуковых частотах в работах [14, 15]. Было обнаружено искажение формы синусоидальной у излучателя звуковой волны по мере ее распространения и превращение ее (при определенных интенсивностях) в слабую периодическую пилообразную ударную волну, а также возникающее при этом нелинейное поглощение. Было показано, что нелинейные свойства жидкости играют существенную роль при распространении даже не слишком интенсивного звука вопреки распространенному представлению о несущественности

влияния нелинейности уравнений движения и состояния жидкости на процесс распространения звука.

Остановимся кратко на методах, которые широко применяются для изучения особенностей распространения плоских волн конечной амплитуды в жидкостях и газах (подобные методы применяются также и для твердых тел; см. гл. 11).

На рис. 3.3 представлена блок-схема таких экспериментов с использованием спектрального метода.

Генератор Γ_ω синусоидальных колебаний ультразвуковой частоты ω модулируется генератором прямоугольных импульсов Γ_Ω

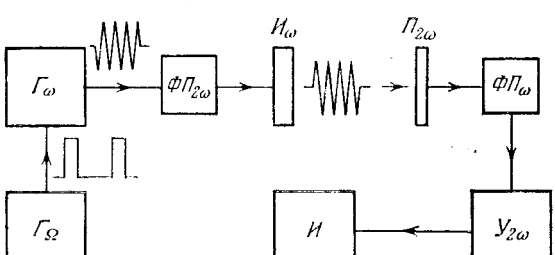


Рис. 3.3. Блок-схема установки для измерений искажения профиля синусоидальной волны конечной амплитуды.

с частотой повторения Ω (выбор Ω определяется расстоянием L, на котором проводятся измерения (обычно это 50—1000 Гц)). Импульсы с частотой повторения Ω и несущей синусоидальной частотой ω имеют продолжительность τ, которая выбирается из условия $\tau \ll T$, где T — время распространения волны на длине L, и чтобы переходные процессы, возникающие в элементах установки (в особенности в резонансном усилителе, настроенном на вторую гармонику несущей, т. е. на 2ω), успевали закончиться в течение трех-четырех колебаний несущей частоты ω.

Такого рода импульсы с генератора Γ_ω подаются на фильтр-пробку $ФП_{2\omega}$, не пропускающей возможную вторую гармонику от генератора. Далее импульсный сигнал подается на кварцевую пластинку $И_\omega$ (имеющую резонанс на частоте ω), помещенную в кювету с водой.

Волна второй гармоники в жидкости принимается кварцевым приемником $П_{2\omega}$ с собственной частотой 2ω. После этого приемника стоит фильтр-пробка $ФП_\omega$, которая не пропускает частоту ω (кварцевая пластинка в воде с собственной частотой 2ω имеет широкую полосу пропускания и может принимать частоту ω). После фильтра-пробки сигнал 2ω попадает далее на резонансный усилитель $У_{2\omega}$, настроенный на частоту 2ω. После усилителя импульсный сигнал 2ω подается на индикатор $И$, например на осциллограф. Передвигая приемник $П_{2\omega}$ относительно излучающей кварцевой пластинки $И_\omega$, мы увидим (рис. 3.4), что амплитуда второй гармоники, будучи равной нулю вблизи самого излучателя, увеличивается, достигая максимума на некотором расстоянии $x_{ст}$ (это расстояние назы-

вают *расстоянием стабилизации*), и далее начинает уменьшаться. Это уменьшение происходит вследствие затухания как основной волны ω, так и волны второй гармоники. Отметим, что, для того чтобы выполнялось условие плоской волны, описываемый эксперимент должен проводиться в «прожекторной зоне» излучателя, т. е. на расстояниях $L \ll R^2/\lambda$, где R — радиус излучателя и λ — длина волны, соответствующая частоте ω.

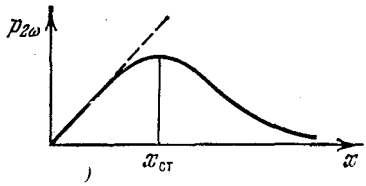


Рис. 3.4. Поведение амплитуды давления второй гармоники $p_{2\omega}$ синусоидальной волны конечной амплитуды с изменением расстояния x от излучателя. Штриховая прямая — решение (1.28).

На рис. 3.4 штриховой линией проведена прямая, которая соответствует зависимости $p_{2\omega}(x)$ согласно решению (1.28). Как видно, на расстояниях $x \ll x_{ст}$, когда затухание еще не играет определяющей роли, эксперимент находится в хорошем согласии с теорией.

Это дает возможность на таких расстояниях по формуле (1.28), зная p_0, ω, ρ, c, x, определять нелинейный параметр ε газа или жидкости. Такой «нелинейный» акустический метод является в настоящее время одним из наиболее удобных и точных методов

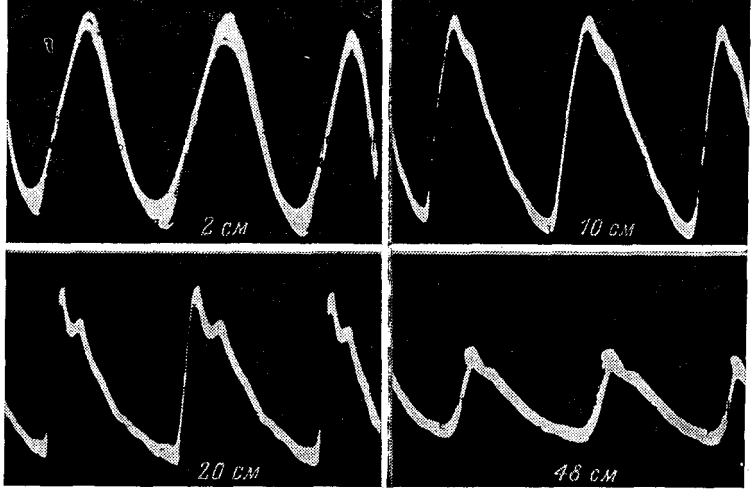


Рис. 3.5. Изменение формы ультразвуковой волны в воде (частота 1 МГц, интенсивность $5 \cdot 10^{-3}$ Вт/м^2) в зависимости от расстояния от излучателя: 2; 10; 20; 48 см. Излучение производилось в течение 1—2 с. Приемником служила помещенная в наполненный трансформаторным маслом корпус кварцевая пластинка диаметром 25 мм с резонансной частотой 11,5 МГц.

измерения ε и поведения ε в зависимости от определенных физических условий, например от температуры и от давления.

Описанный кратко спектральный метод исследования нелинейных искажений формы волны представляет собой весьма чувствительный метод. Используя его, можно производить измерения также амплитуды третьей и более высоких гармоник. Отметим, что при измерениях, например, в воде не требуется иметь дело с особенно большими интенсивностями. Так, при подаче на кварцевую пластинку около 100 В она излучает в воду звук с интенсивностью около 10^{-5} Вт/м^2. При этом можно работать с усилителем, имеющим коэффициент усиления не более 10^3.

Другой метод изучения нелинейных искажений состоит в наблюдении формы волны при помощи широкополосной аппаратуры — приемника и усилителя. Так, при измерениях в воде на ультразвуковой частоте 1 МГц желательно иметь собственную частоту приемной кварцевой пластины не менее 10 МГц и усилитель, пропускающий частоты в полосе до 10 МГц. На рис. 3.5 приведены осциллограммы формы плоской ультразвуковой волны в воде на частоте 1 МГц синусоидальной у излучателя ($x=0$) (интенсивность волны $\approx 5\cdot 10^{-3}$ Вт/м^2). При удалении приемной кварцевой пластинки от излучателя видно, как волна принимает пилообразную форму. Следует обратить внимание, рассматривая эти осциллограммы (фотографии получены с экрана катодного осциллографа), что пилообразная волна несимметрична; нижняя ее половина несколько меньше по амплитуде и более плавная. Кроме того, имеются небольшие осцилляции в верхней части осциллограммы; они вызваны, по-видимому, либо недостаточной шириной полосы пропускания приемного тракта, либо явлением дисперсии, обусловленной наличием пузырьков газа в воде ([1], с. 97). Заметим, что на больших расстояниях (>20 см) амплитуда волны заметно убывает.

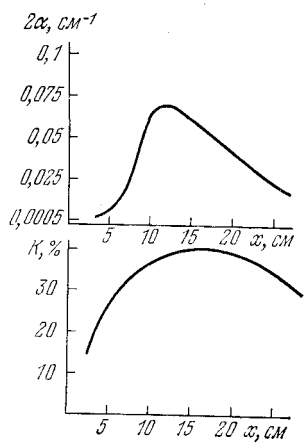


Рис. 3.6. Зависимость коэффициента поглощения по энергии и относительной амплитуды второй гармоники плоской синусоидальной волны конечной амплитуды от расстояния от излучающей кварцевой пластинки при условиях, соответствующих рис. 3.5.

Объяснение причины несимметричности формы пилообразной волны, по-видимому, также может быть связано с образованием кавитационных пузырьков в воде при прохождении интенсивной ультразвуковой волны и с явлением дисперсии, вызванной наличием этих пузырьков газа в воде, либо, наконец, с особенностями распространения ограниченного пучка волн конечной амплитуды. Отметим, что продолжительность ультразвукового импульса, или время «экспозиции» было порядка секунды.

Измерения поглощения волн конечной амплитуды показали, что коэффициент поглощения не является величиной постоянной. Напомним, что в линейной акустике коэффициент поглощения оп-

ределяется из выражения для амплитуды $A=A_0\exp(-\alpha_0 x)$ и $\alpha_0=\text{const}$. На рис. 3.6 показано поведение коэффициента поглощения по энергии плоской синусоидальной (у излучателя) волны конечной амплитуды 2α в зависимости от расстояния, измеренного в дистиллированной воде на частоте ультразвука 1 МГц и при интенсивности $5\cdot10^{-3}$ Вт/м² [16]. Из этого графика видно, что при увеличении x величина 2α увеличивается от значения $2\alpha_0$, соответствующего коэффициенту поглощения волны малой амплитуды, до максимального значения при $x\approx12$ см, а затем падает, стремясь вновь к значению $2\alpha_0$. На нижнем рисунке показано отношение амплитуд второй и первой гармоник (в процентах относительно амплитуды волны основной частоты) в зависимости от расстояния от излучающей кварцевой пластинки. В приведенном эксперименте поглощение ультразвуковых волн более чем в 100 раз превышает поглощение волн малой амплитуды. Видно, что максимум поглощения совпадает с максимумом амплитуды второй гармоники, т. е. примерно с областью наибольших искажений формы волны (расстояние стабилизации волны конечной амплитуды). Из сказанного следует, что благодаря *нелинейному поглощению* не имеет смысла использовать слишком большие мощности излучения (верхним пределом служит также порог образования кавитации, если только продолжительность ультразвукового импульса не мала).

Измерение α при интенсивных ультразвуковых волнах можно проводить различными методами (калориметрический, оптический и другие [2]).

§ 3. Плоская нелинейная волна в среде с диссипацией

Мы обсудили, как проявляется диссипация в экспериментах по искажению звуковых волн и по нелинейному поглощению. Рассмотрим теперь кратко теорию распространения волны конечной амплитуды в среде с диссипацией. В такой среде процессы зависят уже от двух безразмерных чисел — Маха и Рейнольдса. Нелинейные эффекты для плоской волны обычно проявляются при числе Рейнольдса, не слишком малом, таком, чтобы диссипация не могла помешать развитию нелинейности, определяемой числом Маха. Особенно существенны искажение формы плоских синусоидальных волн и генерация гармоник в маловязких жидкостях на ультразвуковых частотах при $\mathbf{Re}\gg1$. При распространении плоской волны в жидкости, обладающей диссипативными свойствами, процесс «укручения» будет происходить иначе, чем в среде, где диссипация отсутствует. При искажении волны, благодаря квадратичной зависимости поглощения от частоты, более высокие гармоники затухают сильнее и процесс искажения тормозится потерями. Ясно, что поглощение в такой волне должно быть значительно больше, чем для волны малой амплитуды.

Точного решения задачи о распространении плоской нелинейной волны в среде с диссипацией, в отличие от случая идеальной среды, не найдено. Поэтому приходится прибегать к приближенным

методам. Ограничиваясь членами второго порядка малости, полагая $v=v'+v''$, $\rho=\rho_0+\rho'+\rho''$ (квадратичное приближение), можно найти решение задачи непосредственно методом возмущений. Однако такие решения применимы обычно на расстояниях, малых по сравнению с длиной образования разрыва.

Имеются также приближенные решения уравнений гидродинамики вязкой теплопроводящей сжимаемой жидкости, представляющие аналог простых волн, бегущих в одном направлении. Такие волны называют квазипростыми. Уравнения для них можно получить, если учесть нелинейные члены второго порядка малости, а коэффициенты вязкости и теплопроводности считать членами первого порядка малости. Линейные диссипативные члены будут тогда второго порядка малости, а нелинейные диссипативные члены — третьего порядка малости, которые можно опустить. В рамках такого приближения эволюция слабозатухающей нелинейной волны описывается уравнением (1.14), правая часть которого уже не нуль, как для простой волны в среде без диссипации, а содержит член, учитывающий потери: $(b/2\rho_0)\,\partial^2 v/\partial x^2$. Выпишем это уравнение полностью (более подробно о его выводе см. в [1]):

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(c_0+\varepsilon v)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{b}{2p_0}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,. \tag{3.1}$$

В сопровождающей системе координат (x, τ) это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}\,. \tag{3.2}$$

Если диссипация отсутствует, то правые части (3.1), (3.2) обращаются в нуль и мы приходим опять к уравнениям для простой волны. Уравнение (3.2), описывающее поведение квазипростой волны, носит название *уравнения Бюргерса* [18]. Оно обладает замечательным свойством: при помощи подстановки Хопфа — Коула [19]

$$v=\frac{b}{\varepsilon\rho_0 c_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\ln\varphi\,(x,\tau) \tag{3.3}$$

его удается преобразовать в линейное уравнение типа теплопроводности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}\,, \tag{3.4}$$

которое, как известно, имеет точное решение. Уравнение Бюргерса приближенное; оно в принципе дает возможность детально (во втором приближении) проследить за эволюцией плоской нелинейной волны в среде с диссипацией.

Так, на основе уравнений (3.1) или (3.2) могут быть решены задачи об эволюции профиля исходной синусоидальной или непериодической волны по мере ее распространения и даны ответы на вопросы, какова ширина фронта возникающей слабой ударной волны, каково добавочное (нелинейное) затухание и т. д.

Решения уравнения Бюргерса могут быть получены при $\mathrm{Re}\ll 1$, $\mathrm{Re}\approx 1$ и $\mathrm{Re}\gg 1$, что является существенным достоинством метода.

Хотя получение точных решений уравнения Бюргерса и оказывается возможным, в ряде случаев это представляет довольно громоздкую процедуру.

Остановимся кратко на приближенных решениях. Рассмотрим сначала случай $\mathrm{Re}\ll 1$ и $\mathrm{M}\ll 1$ и воспользуемся методом последовательных приближений. Полагая $v=v'+v''+\ldots$, причем $v''/v'\ll 1$, найдем из (3.2) для первого приближения

$$\frac{\partial v'}{\partial x}=\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2}, \tag{3.5}$$

где $b/2\rho_0 c_0^3=\alpha/\omega^2=\alpha_0$ — постоянная поглощения волны малой амплитуды. Если при $x=0$ задана гармоническая волна и $v(0, t)=v_0\sin\omega t$, то решение получается в виде (2.2.1), с которым мы уже имели дело раньше.

Уравнение для второго приближения будет иметь вид

$$\frac{\partial v''}{\partial x}-\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 v''}{\partial \tau^2}=\frac{\varepsilon}{c_0^2}v'\frac{\partial v'}{\partial \tau}=\frac{\omega v_0^2}{2}e^{-2\alpha x}\sin\omega\tau. \tag{3.6}$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде $v''=v(x)\sin 2\omega\tau$, получим для $v(x)$ обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$dv/dx+4\alpha v=(\varepsilon v_0^2\omega/2c_0^2)\exp(-2\alpha x). \tag{3.7}$$

Считая, что при $x=0$ имеется только волна частоты ω, а вторая гармоника отсутствует, получаем решение уравнения (3.6) в виде

$$v''(x, \tau)=(\varepsilon v_0^2\omega/4\alpha c_0)(e^{-2\alpha x}-e^{-4\alpha x})\sin 2\omega\tau. \tag{3.8}$$

Когда диссипация в среде отсутствовала (§ 1 гл. 3), то, согласно формуле (1.27), вторая гармоника возрастала пропорционально x. В рассматриваемом случае диссипативной среды на *расстоянии стабилизации* $x_{\mathrm{ст}}=\ln\sqrt{2}/\alpha$ (где нелинейный рост компенсируется диссипацией) имеется максимум для амплитуды второй гармоники; некоторое расстояние искаженная волна проходит, не меняя своей формы, после чего ее амплитуда начинает убывать, так как подкачка энергии из основной волны становится меньше, чем диссипативные потери. Заметим, что на расстояниях x, когда $\alpha x\gg 1$, $v''\sim\exp(-2\alpha x)$, тогда как линейная волна частоты 2ω убывает быстрее. Это происходит из-за непрерывной подкачки энергии от первой гармоники во вторую.

Другое интересное решение уравнения Бюргерса, которое может быть получено без обращения к точному общему решению этого уравнения, соответствует $\mathrm{Re}\gg 1$. В этом случае можно воспользоваться поэтапным рассмотрением процесса эволюции волны. Отметим сначала, что в сопровождающей системе координат формула (1.25) записывается в виде

$$v=v_0\sin\omega\left(\tau+\frac{x}{c_0}\frac{\varepsilon M}{1+\varepsilon M}\right).$$

Если воспользоваться малостью M и сохранить лишь линейные по M члены в этом выражении, то тогда во втором приближении получим

$$v = v_0 \sin \omega (\tau + x\mathsf{M}/c_0).$$

Если в соответствии с (1.19) ввести безразмерное расстояние, равное числу длин образования разрыва $\sigma = x/x_p = \varepsilon\omega v_0 x c_0^{-2}$, то это выражение запишется в виде

$$v = v_0 \sin (\omega\tau + \sigma v/v_0).$$

При малых x волна мало отличается от простой волны и решение совпадает с тем, которое мы записали для v выше.

Когда волна переходит в пилообразную, она стабилизируется на некотором расстоянии $x_{ст}$, поскольку при таких x конкуренция нелинейности и диссипации вносит примерно одинаковый вклад в эволюцию формы волны. В этом случае в уравнении Бюргерса можно пренебречь производной $\partial v/\partial x$, и упрощенное уравнение

$$\varepsilon v \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{b}{2\rho c_0} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0 \qquad (3.9)$$

после двухкратного интегрирования по τ дает

$$v = v_0 \operatorname{th} (\varepsilon\,\mathrm{Re}\,\omega\tau), \qquad (3.10)$$

где v_0 — постоянная интегрирования. Решение (3.10) описывает стационарное возмущение, распространяющееся в нелинейной диссипативной среде без изменения своей формы. Это возмущение представляет собой слабую ударную волну (скачок скорости от $-v_0$ до $+v_0$) с конечной шириной фронта, равной $\delta \approx (\varepsilon\,\mathrm{Re})^{-1}$.

Точное решение уравнения Бюргерса дается выражением (*решение Хохлова*) [20, 21]

$$v = \frac{v_0}{1+\sigma} \left[-\omega\tau + \pi \operatorname{th} \left(\frac{\omega\tau}{\delta} \right) \right], \quad -\pi \leqslant \omega\tau \leqslant \pi. \qquad (3.11)$$

Безразмерная ширина фронта, как можно показать, в области стабилизации волны описывается формулой $\delta = (1+\sigma)(\pi\varepsilon\mathrm{Re})^{-1}$; ширина зависит от расстояния $\sigma = kx\varepsilon\mathsf{M}$. Убывание амплитуды пилообразной волны при $\sigma > \pi/2$, как это следует из (3.11), дается формулой

$$v = v_0 (1+\sigma)^{-1}. \qquad (3.12)$$

Как видно, при $\sigma = kx\varepsilon\mathsf{M} = kx\varepsilon v_0 c_0^{-1} \gg 1$ амплитуда волны не зависит от v_0. Это означает, что образование пилообразной волны (в силу ее большого поглощения) ограничивает передачу через среду большой мощности, какой бы эта мощность у источника (при $x=0$) ни была. После того как пила образовалась, она быстро затухает. Формула (3.11) допускает разложение в ряд Фурье (*решения Фэя*) [22]:

$$v = v_0 \frac{1}{\varepsilon\mathrm{Re}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin (n\omega\tau) \operatorname{sh}^{-1} \frac{n(1+\sigma)}{2\varepsilon\,\mathrm{Re}}, \qquad (3.13)$$

которое дает возможность при больших **Re** (малые δ) проследить за поведением гармоник.

Нелинейный коэффициент затухания пилообразной волны, определяемый формулой (3.12), при достаточно большой интенсивности исходной волны и не слишком малом **Re** может в таких маловязких жидкостях, как вода, спирты, в мегагерцевом диапазоне частот на один — два порядка превышать коэффициент затухания волн малой амплитуды α. Этот нелинейный коэффициент, согласно (3.11), имеет величину $\alpha_{нл} \sim \alpha \mathbf{Re}$ и может намного превышать α. Так, например, на частоте 1,5 МГц и при интенсивности 50 Вт/см^2 $\alpha_{нл} \approx 10^2 \alpha$ [16]. В [1, 2] проводится подробное рассмотрение затронутых здесь вопросов, в частности приводятся решения в виде геометрических построений для определения эволюции профиля нелинейной волны, выражения для амплитуд гармоник более высоких номеров, чем второй.

§ 4. Нелинейные плоские волны в среде с дисперсией

До сих пор рассматривались плоские нелинейные акустические волны в идеальной недиспергирующей среде и в среде с диссипацией. В акустике дисперсия не играет такой большой роли, как в оптике, в волнах на поверхности жидкости и в волнах в плазме, тем не менее с ней часто приходится встречаться. Так, например, в гл. 2 мы уже имели дело со слабой дисперсией среды, когда рассматривали релаксационные явления. Далее мы познакомимся с другими волновыми системами, где проявляется дисперсия,— жидкость с пузырьками воздуха, квазидисперсия при распространении звука в твердых телах, дисперсия в волноводах и т. д. Естественно, возникает вопрос, какие новые особенности появляются при распространении нелинейных волн в среде с дисперсией.

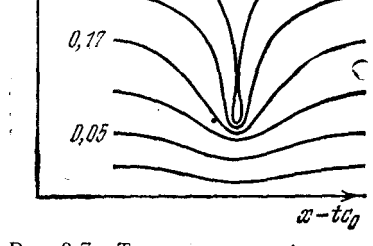


Рис. 3.7. Теоретическая форма профиля капиллярной волны конечной амплитуды при различных отношениях амплитуды волны к ее длине λ [24].

Наглядную картину проявления характерных черт при распространении плоской нелинейной волны в диспергирующей среде можно проследить, изучая капиллярные волны конечной амплитуды на поверхности жидкости [23]. Эти волны, о которых речь шла в гл. 1, имеют скорость распространения $c = \sqrt{\sigma k/\rho}$, т. е. эти волны диспергирующие. С другой стороны, для таких волн сильно выражены нелинейные явления благодаря нелинейности уравнений движения. Например, на рис. 3.7 показана форма профиля ζ капиллярной волны, полученная теоретически [24] при различных отношениях амплитуды волны a к ее длине λ.

Бегущие капиллярные волны легко возбудить в сосуде с водой при помощи легкого (алюминиевого) бойка *Б* (рис. 3.8) длиной несколько сантиметров (так, чтобы на длине бойка укладывалось с десяток длин волн — для получения плоской волны), имеющего се-

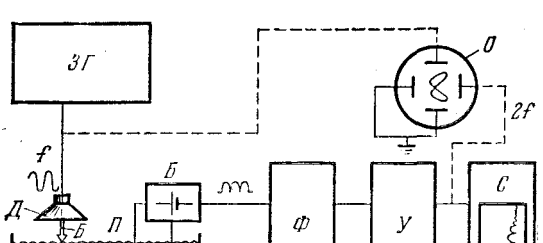


Рис. 3.8. Блок-схема установки для изучения нелинейных свойств капиллярных волн.

чение в виде призмы, вершина которой касается поверхности воды. Боек прикрепляется к диффузору небольшого звукового динамика *Д*, возбуждаемого звуковым генератором *ЗГ*. Для преобразования капиллярной волны в электрический сигнал можно использовать поляризованный электрод. В воду погружается медная пластинка *Пл*, а поверхности воды касается тонкая железная проволочка; на проволочку и пластинку подается поляризующее напряжение — несколько вольт от батареи *Б*. При периодическом погружении проволочки под действием капиллярной волны сопротивление промежутка между электродами изменяется, в результате чего возникает переменное напряжение. Принятый сигнал пропускается через фильтр *Ф* и усиливается усилителем *У*. Наблюдение нелинейных эффектов проводится в ближнем поле, когда волну можно считать плоской. Используются частоты 60—300 Гц и амплитуды волн $\sim 10^{-2}$ см; однородность волнового поля легко контролировать при помощи стробоскопического освещения. Заметим, что на описанной установке легко проводить точные измерения скорости капиллярных волн по фигурам Лиссажу.

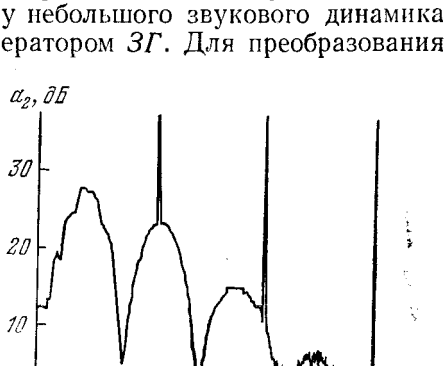


Рис. 3.9. Пространственные осцилляции амплитуды второй гармоники нелинейной капиллярной волны.

На рис. 3.9 показана зависимоть амплитуды второй гармоники a_2 (при частоте первой гармоники, равной 80 Гц) от расстояния до источника волны x. Видно, что эта амплитуда испытывает прост-

ранственные осцилляции. Отметим, что фазовая скорость второй гармоники, согласно формуле $c=\sqrt{\sigma k/\rho}$, на 26% (в воде) превышает скорость первой гармоники, т. е. дисперсионное число $D=(c_\omega-c_{2\omega})/c_\omega=0{,}26$ (в релаксационной теории (гл. 2) дисперсионное число m определялось несколько иначе: $m=(c_\infty^2-c_0^2)/c_0^2$; здесь c_ω — фазовая скорость основной волны и $c_{2\omega}$ — волны второй гармоники.

Из приведенного примера видно, что именно различие в скоростях первой ω и второй 2ω гармоник приводит к таким осцилляциям, в отличие от случая среды без дисперсии.

Здесь уже нет синхронизма между основной волной и ее гармониками. По этой причине и возникают пространственные биения амплитуды второй гармоники 2ω, которые видны на рис. 3.9. Можно показать [1], что пространственный период этих биений определяется выражением $\Delta_2=2\pi|k_2-k_1|^{-1}$, где $k_1=\omega/c_\omega$ и $k_2=\omega/c_{2\omega}$ (величину Δ_2 называют *длиной когерентности*).

Таким образом, когда имеется дисперсия, для амплитуды второй гармоники нарастающего решения в пространстве нет. Заметим при этом, что значение Δ_2, полученное экспериментально для капиллярных волн (рис. 3.9), совпадает с указанным теоретическим значением.

Мы уже говорили, что в акустике чаще приходится сталкиваться с более слабой дисперсией, чем в только что рассмотренном примере капиллярных волн. Слабой обычно называют такую дисперсию, влияние которой мало сказывается на изменении формы профиля волны на длине волны λ или за период волны T.

При наличии дисперсии поведение коэффициента нелинейного затухания сильно отличается от случая, когда дисперсии нет. Здесь из-за отсутствия синхронизма между различными гармониками нелинейное затухание уже не проявляется в такой степени, как при отсутствии дисперсии, когда волна из-за накапливания нелинейных эффектов превращается в пилообразную.

Таким образом, в случае распространения плоских нелинейных волн в среде с диссипацией и дисперсией к безразмерным числам **M** и **Re** добавляется дисперсионное число $\mathbf{D}=(c_\omega-c_{2\omega})/c_\omega$, т. е. теперь уже имеются три безразмерных числа: **M**, **Re** и **D**. Поправку к фазовой скорости можно определить из закона дисперсии, который мы запишем в виде

$$\omega = kc\,(k). \tag{4.1}$$

При $k=2\pi/\lambda\to 0$ значение $c\,(k)$ стремится к постоянной величине c_0, которая фигурирует в обычном волновом уравнении. Так, например, для гравитационных волн на глубокой воде $c\,(k)=\sqrt{g/k}$ (см. гл. 1), а для волн на мелкой воде при $kh\to 0$ $c_0=\sqrt{gh}$, где h — глубина водоема. Полное выражение для фазовой скорости имеет вид $c^2\,(k)=(g/k)\mathrm{th}\,kh$. Следовательно, при малых kh

$$c\,(k)\approx\sqrt{gh}\,[1-(1/6)\,(kh)^2]=c_0\,[1-(1/6)\,(kh)^2]. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что в сопровождающей системе координат, движущейся со скоростью c_0, $\omega = -c_0 hk^3/6$. Таким образом, при малых k, учитывая только первый член разложения, закон дисперсии можно записать в виде

$$\omega = c_0 k - \beta k^3, \tag{4.3}$$

где для рассматриваемого случая гравитационных волн $\beta = c_0 h/6$; эту величину принято называть параметром дисперсии. Для капиллярных волн, для которых $c(k) = \sqrt{\sigma k/\rho}$, в (4.3) будем иметь знак «+» (отрицательная дисперсия). Поскольку мы рассматриваем малые поправки как нелинейные, так и дисперсионные, можно считать их аддитивными, и для получения правильного закона дисперсии в уравнении простой волны (чтобы получить частоту $\omega = -\beta k^3$) следует добавить член с третьей производной $-\beta \partial^3 v/\partial \tau^3$. Мы получаем, таким образом, приближенное уравнение, описывающее распространение одномерной нелинейной волны в дисперсионной среде, которое в принятых нами обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon v}{c_0^2} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} = 0. \tag{4.4}$$

Это уравнение впервые было получено в 1895 г. двумя голландскими гидродинамиками Кортевегом и де Вризом [25] (которые вывели его в применении к изучению волн на мелкой воде); по этой причине его принято называть *уравнением Кортевега — де Вриза* (КдВ).

Интерес к этому уравнению появился вновь после того, как было показано, что оно описывает нелинейные волновые процессы в нелинейной оптике, в плазме, в ряде задач нелинейной акустики. Если, кроме нелинейности и дисперсии играет роль также и диссипация, то тогда уравнение (4.4) дополняется членом, учитывающим затухание волны, и оно переходит в *уравнение Кортевега — де Вриза — Бюргерса* (КдВБ):

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\varepsilon v}{c_0^2} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \alpha_0 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial \tau^3} = 0. \tag{4.5}$$

Как уравнение (4.4), так и (4.5) справедливы при M, D, $\alpha\lambda \ll 1$, т. е. для сред с малыми нелинейностями, дисперсией и затуханием на длине волны.

Одним из возможных применений уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса в акустике служит рассмотрение задачи о распространении волны конечной амплитуды в такой слабо диспергирующей среде, как, например, среда с релаксацией. Здесь, однако, в общем случае уравнение имеет более сложный вид, поскольку поглощение в среде с релаксацией уже может не квадратично зависеть от частоты. Мы не имеем здесь возможности заниматься этими интересными вопросами. Отметим лишь, что нелинейное уравнение (4.4), как и уравнение (3.2), имеет точное решение. Есть еще ряд нелиней-

ных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих волновые процессы, которые имеют точные решения. Это уравнения для нелинейных стационарных волн огибающей [26], для трехволновых процессов (аналогичные уравнениям Эйлера для движения гироскопа [27]), уравнение синус-Гордона и некоторые другие. Разработан мощный метод решения таких уравнений — метод обратной задачи рассеяния [28], играющий в определенных случаях такую же роль для решения нелинейных уравнений в частных производных для консервативных систем (типа уравнения (4.4)), какую играет метод Фурье при интегрировании линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами (см. подробно [29, 30]). Одно из возможных точных стационарных решений нелинейных уравнений для консервативных диспергирующих сред, в том числе (4.4), представляет собой так называемую уединенную волну, или *солитон*. В настоящее время специфическая волновая механика солитонов достаточно детально разработана [30].

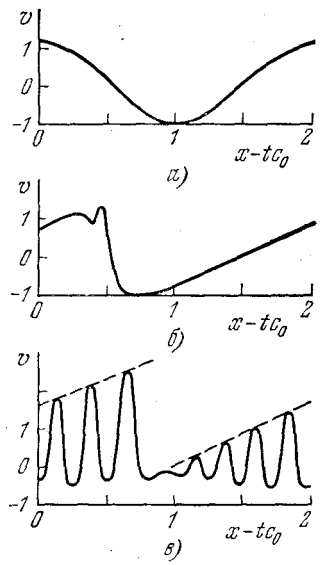


Рис. 3.10. Образование пилообразной волны в среде с дисперсией и распад ее на солитоны.

Одной из интересных и важных особенностей поведения солитонов служит то обстоятельство, что они локализованы в пространстве и, образовавшись, уже не меняют свою форму в нелинейной среде; именно конкуренция нелинейности и дисперсии приводит к возможности сохранения формы солитонов. Солитоны могут образоваться при распространении периодической пилообразной ударной волны в нелинейной среде с дисперсией. Благодаря тому, что пилообразная волна имеет крутой передний фронт, т. е. богата гармониками, из-за дисперсии появляются осцилляции ее формы, возникает тенденция к рассыпанию ее на солитоны.

Так, на рис. 3.10 показан пример распада на солитоны пилообразной волны, образовавшейся в нелинейной среде с дисперсией, приведенный в работе [31]. На рис. 3.10, *а* показана синусоидальная волна, которая после прохождения расстояния, равного расстоянию образования разрыва $x_р$, изменяет свою форму (3.10, *б*). Благодаря тому, что волна имеет крутой передний фронт, т. е. богата гармониками, из-за дисперсии начинается ее отличие от «пилы», переходящее к рассыпанию на солитоны. После того как волна проходит расстояние $3{,}6x_р$, видна уже совокупность отдельных солитонов (рис. 3.10, *в*); их максимальные амплитуды лежат на одной прямой. Далее траектории солитонов пересекаются, так как солитоны с бóльшей амплитудой движутся быстрее.

§ 5. Сферические и цилиндрические нелинейные волны

Если записать уравнения гидродинамики вязкой теплопроводящей жидкости в цилиндрических или сферических координатах, то ограничиваясь вторым приближением, можно получить нелинейное уравнение, аналогичное уравнению Бюргерса для сферических и цилиндрических волн. В сопровождающей системе координат r и τ эти одномерные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{nv}{2r}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \tag{5.1}$$

где r — радиальная координата и $n=0, 1, 2$. При $n=1$ это уравнение описывает нелинейную цилиндрическую волну и при $n=2$ — сферическую; $n=0$ соответствует уравнению Бюргерса для плоской волны. Проведено подробное рассмотрение эволюции профиля сферических и цилиндрических волн [32, 33], возможности образования пилообразных возмущений, динамики ширины ударного фронта, нелинейного затухания и других вопросов. Мы здесь остановимся только на некоторых важных сторонах распространения таких возмущений.

Если цилиндрические и сферические волны расходящиеся, то нелинейные эффекты проявляются значительно слабее, чем для плоской волны. Здесь вступает в силу геометрический фактор и плотность энергии волны, приходящаяся на единицу площади волнового фронта, убывает. Если произвести для сферически симметричных волн ($n=2$) замену $u=vr/r_0$ и $z=\ln(r/r_0)$, а для цилиндрически симметричных волн ($n=1$) замену $u=v(r/r_0)^{1/2}$ и $z=2(r/r_0)^{1/2}$, то получаются уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\varepsilon r_0}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{br_0}{2c_0^3\rho_0}e^z\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}u\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{bz}{4c_0^3\rho_0 r_0}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}. \tag{5.3}$$

Здесь r_0 — исходный радиус волнового фронта. Отличие этих уравнений от уравнения Бюргерса для плоской волны состоит в том, что для сферических расходящихся волн как бы увеличивается (экспоненциально нарастает с z) эффективная «вязкость» (в сходящихся волнах эта «вязкость» экспоненциально убывает). В цилиндрических расходящихся волнах «вязкость» линейно растет с z (в сходящихся — линейно убывает с z). Такие качественные рассуждения полезны, но не совсем точны, поскольку при получении (5.2) и (5.3) мы произвели нелинейные преобразования координат. Отметим также, что для сферических и цилиндрических волн нельзя ввести число Рейнольдса так, чтобы оно не зависело от расстояния.

Рассмотрим сферическую нелинейную волну. Если число Re велико (большая интенсивность, большое ε, малая диссипация), то правую часть уравнения (5.2) можно опустить, и тогда мы будем иметь дело с обычной плоской нелинейной волной, только описывае-

мой другими переменными u и z, τ. В этом случае может образоваться сферическая пилообразная волна, если только $\mathbf{Re} \gg 1$ вплоть до самого образования разрыва. Безразмерное расстояние в длинах образования разрыва для плоской волны определяется формулой $\sigma = kx\varepsilon\mathbf{M}$. Тогда из сравнения уравнений (5.2) и $\partial v/\partial x - (\varepsilon/c_0^2) v\, \partial v/\partial t = 0$ получаем, что для сферической волны $\sigma_{сф} = kz\varepsilon r_0 u/c_0$, и поэтому расстояние образования разрыва

$$r_p = r_0 \exp(1/\sigma_0), \tag{5.4}$$

где $\sigma_0 = \varepsilon k r_0 \mathbf{M}$. Поскольку $\sigma_0 \sim v_0$, где v_0 — амплитуда исходной волны, то отсюда следует, что при уменьшении v_0 расстояние r_p экспоненциально растет.

Если же число $\mathbf{Re}$ не слишком велико, то можно воспользоваться методом последовательных приближений. Мы здесь приведем окончательный результат: при граничных условиях $v''(r_0, t) = 0$ и $v'(r_0, t) = v_0 \sin \omega t$ при $\exp z \approx 1 + z$ ($z \ll 1$), т. е. на малых расстояниях от источника, получаем в переменных r, τ решение

$$v'' = -\frac{\sigma_0 v_0 r_0}{2r} \ln \frac{r}{r_0} \exp[-2\alpha_0 (r - r_0)] \sin 2\omega\tau. \tag{5.5}$$

Как видим, амплитуда второй гармоники сферической нелинейной волны растет не по линейному закону, как в плоской волне, а $\sim \ln(r/r_0)$, т. е. достаточно медленно, что происходит из-за сферического расхождения волны.

Проводя подобные рассуждения для цилиндрической расходящейся волны, получим, что разрыв (при достаточном $\mathbf{Re} \gg 1$) образуется на расстоянии

$$r_p = r_0 (1 + 1/2\sigma_0)^2. \tag{5.6}$$

Применяя метод последовательных приближений, получаем для второй гармоники слабой нелинейной цилиндрической волны, что v'' пропорционально $\sqrt{r/r_0}$:

$$v'' = \frac{\sigma_0 v_0}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r}} \left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} - 1 \right) \exp[-2\alpha_0 (r - r_0)] \sin 2\omega\tau. \tag{5.7}$$

Подводя итог рассмотрению расходящихся сферических и цилиндрических волн, мы видим, что нелинейные эффекты для них выражены существенно слабее, чем для плоских волн.

Совсем другая ситуация будет в сходящихся сферических или цилиндрических волнах. В этом случае геометрический фактор будет действовать в направлении усиления нелинейных эффектов. С таким положением часто приходится встречаться в ультразвуковой технике и физике ультразвука при использовании фокусирующих систем. В природных условиях также могут возникать эффекты фокусировки звука, например в гидроакустических задачах.

При малых интенсивностях сферической волны в формуле (5.5) расстояние r будет уже не в числителе, а в знаменателе и при уменьшении r возникает разрыв. Применение метода последовательных приближений при рассмотрении сходящихся волн ограничено, ко-

нечно, условием, чтобы отношение второй гармоники к первой было существенно меньшим единицы. Для сферических волн расстояние образования разрыва определяется при этом формулой

$$r_p = r_0 \exp(-1/\sigma_0), \tag{5.8}$$

а для цилиндрической волны —

$$r_p = r_0 (1 - 1/2\sigma_0)^2. \tag{5.9}$$

§ 6. Ограниченные пучки

До сих пор рассматривались одномерные нелинейные волны. Естественно, что теория неодномерных возмущений, хотя ее прикладное значение несомненно, становится существенно более сложной. Определенные успехи достигнуты при изучении ограниченных пучков в нелинейной среде. Уравнение во втором приближении, учитывающее нелинейные свойства среды и искажение волн одновременно с дифракционной расходимостью пучка, имеет вид [34]

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c_0\rho_0}\rho'\frac{\partial\rho'}{\partial\tau}\right) = \frac{c_0^2}{2}\Delta_\perp\rho', \tag{6.1}$$

где $\Delta_\perp\rho' = \partial^2\rho'/\partial y^2 + \partial^2\rho'/\partial z^2$ — «поперечный» лапласиан. Для двумерного пучка $\Delta_\perp\rho' = \partial^2\rho'/\partial y^2$, x — направление распространения. Это уравнение называют *уравнением Хохлова — Заболотской*. Оно выведено в предположении, что поперечная компонента скорости v_y имеет порядок $\mu^{1/2}$, где $\mu = \Delta\rho/\rho_0 = \rho'/\rho_0 \ll 1$; тем самым учитывается расходимость пучка. Изменения всех параметров волны поперек пучка происходят быстрее, чем вдоль (v_x имеет порядок μ), и при выводе этого уравнения предполагается, что

$$v,\ \rho' = F_{v,\rho'}(\mu x,\ \mu^{1/2} y,\ \tau = t - x/c_0). \tag{6.2}$$

Таким образом, «ограниченность» пучка совместно с нелинейностью должна привести к медленным изменениям формы волны не только вдоль направления распространения, но и поперек него.

Точного решения уравнения (6.1) не получено; оно исследуется асимптотическими методами и при помощи численных методов. Приближенные решения удобно получать, вводя безразмерное число [36],— назовем его в честь Р. В. Хохлова числом Хохлова (**X**):

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon M}\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2, \tag{6.3}$$

где a — ширина пучка и λ — длина волны основной частоты. Число **X** характеризует относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов в искажение профиля волны, подобно тому как акустическое число **Re** — относительный вклад нелинейных и диссипативных процессов. Если $\mathbf{X} \to 0$, преобладают нелинейные эффекты и дифракцию можно не учитывать, если $\mathbf{X} \to \infty$, основную роль играют дифракционные эффекты. Мы не имеем возможности вдаваться здесь в подробности обсуждения нелинейной теории ограниченных пучков (см. подробное изложение вопроса в [1, 11]).

Отметим лишь, что в безразмерных переменных $Q=\rho/\rho_0$, $\sigma=\varepsilon\omega\rho x/c\rho_0$, $\theta=\omega\tau$, $\xi=y/a$ уравнение (6.1) для плоского пучка будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial Q}{\partial\sigma}-Q\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right]=\frac{\mathbf{X}}{4}\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi^2}. \tag{6.4}$$

В предельном случае $\mathbf{X}\to\infty$, т. е. когда главными являются дифракционные эффекты, можно проанализировать уравнение (6.4), отыскивая первое приближение по малому параметру $\mathbf{X}^{-1}$. Результат показывает, что генерация гармоники в ограниченном пучке заметно отличается от того, как это происходит в плоской волне. Вначале при малых расстояниях от источника амплитуда второй гармоники на оси пучка растет линейно с расстоянием так же, как и в плоской волне. Но далее дифракция приводит к стабилизации этой амплитуды, после чего амплитуда уменьшается; имеет место (в некоторой области расстояний) аналогия с тем, как ведет себя амплитуда второй гармоники в диссипативной среде.

В случае малых чисел $\mathbf{X}\to 0$ сильно сказывается нелинейность и в меньшей степени дифракция. Здесь нужно учесть в получающихся уравнениях члены с $\mathbf{X}$ не более чем в первой степени; при этом удается получить решение задачи.

Учет диссипации в уравнении (6.4) в еще большей степени усложняет его решение. В настоящее время численным методом решены задачи по применению уравнения (6.4) к анализу формы нелинейных дифрагирующих волн, поведению гармоник в пространстве и ряд других (подробнее см. [11, 37]).

Глава 4

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АНТЕННЫ

§ 1. Взаимодействие нелинейных волн

Вернемся снова к плоским нелинейным волнам в средах без дисперсии и рассмотрим случаи, когда в среде распространяется не одна, а несколько таких волн. Но прежде отметим следующий важный факт: нелинейное взаимодействие плоских волн конечной амплитуды в средах без дисперсии происходит эффективно лишь в том случае, когда эти волны распространяются в одном и том же направлении, т. е. коллинеарно.

Прийти к такому выводу проще всего, если рассмотреть *трехволновое взаимодействие*: две волны с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми числами $k_1=\omega_1/c_1$ и $k_2=\omega_2/c_2$ рождают третью волну ω_3, $k_3=\omega_3/c_3$, где c_1, c_2, c_3 — соответствующие скорости этих трех волн. На квантовомеханическом языке можно представить плоские волны ω_1, $\boldsymbol{k}_1$ и ω_2, $\boldsymbol{k}_2$ как *фононы* с энергиями $\hbar\omega_1$, $\hbar\omega_2$ и квазиимпульсами $\hbar\boldsymbol{k}_1$, $\hbar\boldsymbol{k}_2$. В случае слияния двух фононов образуется результирующий фонон ω_3, $\boldsymbol{k}_3$ (при $\omega_1=\omega_2$ это рождение второй гармоники). Хотя понятие фонона как кванта упругой энергии возникло в применении к твердым телам (кристаллам), его можно использовать также применительно к жидкостям и газам.

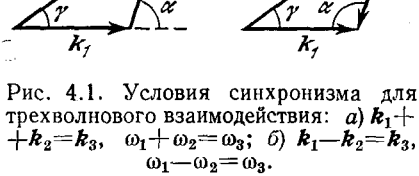


Рис. 4.1. Условия синхронизма для трехволнового взаимодействия: *а)* $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_3$, $\omega_1+\omega_2=\omega_3$; *б)* $\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_3$, $\omega_1-\omega_2=\omega_3$.

На рис. 4.1 представлено такое взаимодействие, при котором должны быть выполнены условия сохранения энергии и квазиимпульса фононов (так называемые *условия синхронизма* для трехволнового взаимодействия)

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3, \quad \boldsymbol{k}_1 \pm \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3. \tag{1.1}$$

Из приведенного геометрического построения следует, что

$$\left(\frac{\omega_3}{c_3}\right)^2 = \left(\frac{\omega_1}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{c_2}\right)^2 \pm 2\,\frac{\omega_1}{c_1}\,\frac{\omega_2}{c_2}\cos\alpha, \tag{1.2}$$

Для недиспергирующей среды $c_1=c_2=c_3$, и это равенство может быть выполнено лишь при условии $\alpha=0$, т. е. если все три волны коллинеарны. Подчеркнем, что этот вывод относится только к плоским волнам, но отнюдь не к ограниченным пучкам, когда могут играть роль дифракционные эффекты.

Итак, рассмотрим взаимодействие двух квазипростых волн, распространяющихся в одном и том же направлении x. Приведем сначала формулу (с точностью до второго приближения), часто применяющуюся в экспериментальных исследованиях, для случая, когда при $x=0$ излучаются две плоские волны разных частот ω_1, ω_2 и амплитуд v_{01}, v_{02} $[v(x=0,\ t)=v_{01}\sin\omega_1 t+v_{02}\sin\omega_2 t]$:

$$v(x,\tau)=v_{01}\sin\omega_1\tau+v_{02}\sin\omega_2\tau-\frac{v_{01}^2\varepsilon k_1 x}{2c_0}\sin 2\omega_1\tau-\frac{v_{02}^2\varepsilon k_2 x}{2c_0}\sin 2\omega_2\tau-$$
$$-\frac{\varepsilon v_{01}v_{02}(\omega_1+\omega_2)x}{2c_0^2}\sin[(\omega_1+\omega_2)\tau]-\frac{\varepsilon v_{01}v_{02}(\omega_1-\omega_2)x}{2c_0^2}\sin[(\omega_1-\omega_2)\tau]. \quad (1.3)$$

Видно, что, кроме вторых гармоник $2\omega_1$ и $2\omega_2$, возникают суммарные и разностные комбинационные частоты. В действительности, конечно, возникают гармоники и комбинационные частоты и более высоких порядков. Их можно описать, решив задачу более точно.

Рассмотрим теперь подробнее процесс генерации разностной частоты при взаимодействии двух гармонических волн в диссипативной среде; пусть

$$v(x=0,\tau)=v_{01}\cos\omega_1\tau+v_{02}\cos\omega_2\tau.$$

Проанализируем вначале случай, когда $\mathrm{Re}\ll 1$ и можно пользоваться методом последовательных приближений. Тогда, полагая $v=v'+v''\ldots$, получим решение уравнения первого приближения (3.3.5) для v' в виде

$$v'=v_{01}\exp(-\alpha_{01}x)\cos\omega_1\tau+v_{02}\exp(-\alpha_{02}x)\cos\omega_2\tau. \quad (1.4)$$

Подставляя значение $v=v'+v''+\ldots$, когда v' определяется по (1.4), в уравнение Бюргерса (3.3.2) и сохраняя в нелинейном члене составляющие только с разностной частотой $\Omega=\omega_1-\omega_2$, получим уравнение

$$\frac{\partial v''}{\partial x}-\alpha_0\frac{\partial^2 v''}{\partial\tau^2}=-\frac{\varepsilon\Omega v_{01}v_{02}}{2c_0^2}\exp\left[-\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}(\omega_1^2+\omega_2^2)x\right]\sin\Omega\tau. \quad (1.5)$$

Решение этого уравнения для v'' с граничным условием $v''=0$ при $x=0$ будет

$$v''=\left[-\exp\frac{b(\omega_1^2+\omega_2^2)x}{2\rho_0 c_0^3}-\exp\frac{b\Omega^2 x}{2\rho_0 c_0^3}\right]\frac{\rho_0 c_0\varepsilon\Omega v_{01}v_{02}}{b(\omega_1^2+\omega_2^2-\Omega^2)}\sin\Omega\tau. \quad (1.6)$$

Видно, что при малых x амплитуда растет пропорционально x и достигает максимума при

$$x_{\max}=\ln\left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{\Omega^2}\right)\frac{2c_0^3\rho_0}{b(\omega_1^2+\omega_2^2-\Omega^2)}, \quad (1.7)$$

после чего она начинает убывать.

При $\mathbf{Re} \gg 1$ можно не учитывать диссипативных процессов и решение для v'' дается формулой (1.3); при этом член, содержащий Ω, принимает вид

$$v'' = -(\varepsilon \Omega v_{01} v_{02} / 2c_0^2)\, x \sin \Omega\tau. \qquad (1.8)$$

Подобным же образом можно решить задачу о распространении амплитудно-модулированного гармонического сигнала конечной амплитуды ([11], с. 104)

$$v = v_0 (1 + m \sin \Omega\tau \sin \omega\tau), \qquad (1.9)$$

где m — коэффициент модуляции. Волна с частотой ω взаимодействует с боковыми частотами $\omega \pm \Omega$ и возникает, в частности, волна разностной частоты $\omega - \omega + \Omega = \Omega$.

Рассмотренные задачи о взаимодействии волн играют важную роль в теории параметрической нелинейной антенны, о которой речь будет идти дальше.

К числу интересных проблем относится также задача о коллинеарном взаимодействии слабого монохроматического сигнала с интенсивной волной; эта волна может быть гармонической, но может представлять собой и интенсивный шум. В работах [1—4] показано, что такое взаимодействие в среде без дисперсии может быть причиной дополнительного затухания звукового сигнала (поглощения звука звуком).

Проанализируем этот процесс более детально. Рассмотрим при помощи уравнения Бюргерса взаимодействие двух плоских коллинеарных волн, когда они задаются на входе в нелинейную среду в виде

$$v(0, \tau) = A_{01} \cos \omega_1 \tau + A_{02} \cos \omega_2 \tau, \qquad (1.10)$$

где через A_{0i} и A_{02} обозначены величины v_{01} и v_{02}. Эти волны взаимодействуют между собой в процессе распространения и рождают целый спектр комбинационных частот — суммарные $(\omega_1 + \omega_2)$ и разностные $(\omega_1 - \omega_2)$ частоты, гармоники частот ω_1 и ω_2 и т. д. На первом этапе исследования следует ограничиться изучением динамики амплитуд волн только основных частот ω_1, ω_2, а также суммарной и разностной частот. При этом наиболее простые аналитические результаты, дающие согласие с экспериментами, можно получить уже в рамках трехчастотного приближения. Четырехчастотное приближение решения уравнения Бюргерса, естественно, дает более точные результаты. Его можно искать в виде

$$v(x, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} [A_k(x) \exp(i\omega_k \tau) + \text{к. с.}], \qquad (1.11)$$

где $A_k(x) = B_k(x) \exp[iS_k(x)]$ — комплексные амплитуды, изменяющиеся по мере распространения волн в среде и $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2$, а граничное условие задается выражением (1.10). Здесь B_k, S_k — действительные амплитуды и фазы.

Рассмотрим случай, когда ω_1 — слабая высокочастотная гармоническая волна; мощная монохроматическая низкочастотная волна

имеет частоту ω_2, так что $\omega_1 \gg \omega_2$. Задачу можно решать в приближении заданного поля, считая, что $A_2(x)=A_0=\text{const}$.

Расчеты предсказывают характерные осцилляции амплитуд волн основной ω_1 и комбинационной частот с расстоянием, что является результатом интенсивного обмена энергией между волнами. Период этих пространственных осцилляций L или расстояние между двумя последовательными минимумами амплитуд может быть оценено с помощью результатов, полученных в четырехчастотном приближении. Наиболее просто выражение для L получается при $\varepsilon \mathrm{Re}_2 \gg 1$. В этом случае

$$L=\sqrt{2}\,\pi c_0^2/\varepsilon\omega_1 A_0, \qquad (1.12)$$

что хорошо согласуется с результатами численного решения.

Амплитуда слабого высокочастотного сигнала благодаря взаимодействию с интенсивной низкочастотной волной испытывает значительное дополнительное затухание. Характерно, что зависимость B_1, B_2 и B_4 от начального сдвига фаз появляется только при условии $\omega_2=\omega_1/2=\omega_1-\omega_2$ $(\omega_1 \gg \omega_2)$.

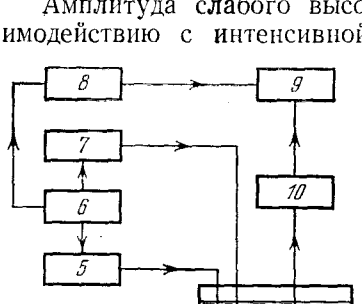


Рис. 4.2. Блок-схема установки по исследованию взаимодействия слабого высокочастотного ультразвукового сигнала (12 МГц) с интенсивными низкочастотными возмущениями (1 МГц и шумом в полосе 600 кГц — 2 МГц).

На рис. 4.2 представлена блок-схема установки по исследованию коллинеарного взаимодействия слабого ультразвукового сигнала (12 МГц, 10^{-10}—10^{-8} Вт/м^2) с интенсивными низкочастотными возмущениями в воде [5]. В качестве последних использовался низкочастотный непрерывный сигнал частоты 1 МГц и интенсивностью порядка 10^{-4} Вт/м^2 или интенсивный шум в полосе 600 кГц — 2 МГц с интенсивностью порядка $3\cdot10^{-4}$ Вт/м^2, что соответствует среднеквадратичному значению колебательной скорости $\sim 4{,}6\cdot10^{-2}$ м/с.

В кювете с водой *1* размещался низкочастотный пьезокерамический излучатель *2* и высокочастотный излучатель *3* (пластинка кварца X-среза). Излучатель *2* возбуждается или с помощью низкочастотного генератора синусоидальных сигналов *5* или с помощью мощного генератора шума. Излучатель *3* возбуждался генератором синусоидальных сигналов *7*. Все измерения проводились в импульсном режиме. Модулятор *6* с регулируемой временной задержкой обеспечивал задержку высокочастотного импульса на время, необходимое для прохождения низкочастотным акустическим сигналом от преобразователя *2* до преобразователя *3*.

Различные частотные компоненты спектра принятого сигнала изучались с помощью спектр-анализатора *9*, на который подавался сигнал, принятый плоским кварцевым преобразователем *4*. Для

выделения акустического сигнала из серии принятых импульсов было применено стробирующее устройство 10.

Акустическая «ловушка», установленная в конце кюветы, исключала появление сигналов, отраженных от ее стенок. С целью предотвращения перегрузки входных усилительных каскадов мощным низкочастотным сигналом, а также для повышения чувствительности приемной аппаратуры были использованы электрические фильтры.

На рис. 4.3 изображены графики изменения с расстоянием амплитуды волны 12 МГц с начальным значением колебательной скорости $B_1(0)=8\cdot10^{-4}$ м/с в случае ее взаимодействия с мощной волной 1 МГц, амплитуда колебательной скорости которой $B_2(0)=8\cdot10^{-2}$ м/с. Кривая *1* соответствует затуханию волны 12 МГц в отсутствие мощной волны 1 МГц, кривая *3* — при ее наличии (непрерывные линии — теория, соответствующие точки *2* и *4* — эксперимент). Заметим, что благодаря хорошему совпадению формулы (1.12) с экспериментом можно определять нелинейный параметр жидкости ε, производя измерения L.



Рис. 4.3. Пространственные осцилляции высокочастотного слабого сигнала ($f_1=12$ МГц, $B_1(0)=8\cdot10^{-4}$ м/с) в отсутствие взаимодействия (*1*, *2*) и при взаимодействии (*3*, *4*) с мощной волной ($f_2=1$ МГц, $B_2(0)=8\cdot10^{-2}$ м/с).

Подобного рода эксперименты по поглощению звука звуком в морских условиях на расстояниях порядка 100 м и частотах 68 кГц и 244 кГц (коллинеарное распространение) выполнены в [6], где получены аналогичные результаты.

Мы показали, что в отсутствие дисперсии плоские волны взаимодействуют лишь при их коллинеарном распространении. В связи с этим возникает вопрос: может ли происходить процесс *рассеяния звука на звуке*, или, точнее, комбинационного рассеяния звука.

Под таким нелинейным рассеянием принято понимать возникновение акустического поля комбинационных частот при пересечении двух ограниченных пучков с частотами волн ω_1 и ω_2 вне их области взаимодействия (естественно, что в самой области пересечения взаимодействие будет происходить). Такое рассеяние может иметь место, если размер области пересечения достаточен для того, чтобы в этой области возникла комбинационная волна $\omega_1\pm\omega_2$. С другой стороны, этот размер должен быть не слишком велик по сравнению с длиной волны комбинационной частоты, чтобы возникала дифракция комбинационной волны из области пересечения пучков. Задача о комбинационном рассеянии звука на звуке привлекала внимание

многих исследователей. Теория и эксперименты по рассеянию звука на звуке в жидкости рассматривались в работах [1,7—11]. Этот эффект достаточно мал, и экспериментально его трудно исследовать. Сложно, например, отделить именно этот тип рассеяния, связанный с дифракцией комбинационной волны, от возможных компонент поля (с теми же комбинационными частотами), которые в эксперименте возникают из-за наличия лепестков у характеристик направленности излучателей частот ω_1 и ω_2. При пересечении лепестков могут появиться коллинеарные компоненты полей ω_1 и ω_2, что приведет к эффективной генерации комбинационных частот. Кроме того, такие частоты возникают при модуляции, когда лепестки попадают на колеблющиеся излучатели; имеются и другие сложности проведения такого рода экспериментов.

Если среда обладает дисперсионными свойствами, условие синхронизма (1.2) может выполняться и при углах α, отличных от нуля, и нелинейное рассеяние звука может происходить не только из-за рассмотренного качественно дифракционного эффекта для комбинационных волн. Такое рассеяние звука на звуке может иметь место в релаксирующей среде, где имеется дисперсия; теоретически этот вопрос рассмотрен в книге [1], с. 124.

Как мы увидим в гл. 10, 11, в твердых телах, благодаря различию в скоростях продольных и поперечных волн («квазидисперсия»), комбинационное рассеяние звука на звуке наблюдается экспериментально и при косых взаимодействиях, поскольку и при $\alpha \neq 0$ условие синхронизма (1.2) будет выполнено.

§ 2. Стоячие нелинейные волны и резонаторы

До сих пор мы имели дело с нелинейными волнами в неограниченной среде. Однако, в физической акустике большое значение имеет распространение волн в ограниченных объемах-резонаторах, трубах, волноводах, образцах твердых тел. В таких системах возникают *стоячие волны*. Например, в резонаторах с большой добротностью нелинейность приводит к появлению дополнительных резонансов. Сами нелинейные явления благодаря большой добротности проявляются на резонансных частотах при весьма малых амплитудах, а добротность резонаторов может падать с увеличением амплитуды вынуждающей силы.

Если теория нелинейных волн, бегущих в одном направлении, получила большое развитие и здесь были разработаны достаточно мощные методы анализа (основанные на использовании уравнений типа Бюргерса), то для решения задач о стоячих нелинейных волнах такие методы разработаны в значительно меньшей степени. Достаточно сказать, что вопрос об отражении и преломлении волн конечной амплитуды еще недостаточно изучен. Законы отражения и преломления основываются на принципе Гюйгенса, в основу которого положен принцип суперпозиции, а он не выполняется для волн конечной амплитуды.

Законы отражения нелинейных упругих волн от границ становятся, вообще говоря, несколько (а в ряде случаев и существенно) иными по сравнению с линейной теорией. Например, если пилообразная волна падает нормально на абсолютно мягкую стенку, то, поскольку фаза волн давления меняется при этом на π, скачок давления переходит в скачок разрежения. Пилообразная волна становится неустойчивой, и разрывы сглаживаются. В других случаях наоборот, нелинейные эффекты подчеркиваются.

Рассмотрим сначала линейные собственные колебания (стоячие волны) для случая двух абсолютно жестких параллельных стенок (бесконечный импеданс) [12, 13], находящихся на расстоянии $n\lambda/2$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) друг от друга (условие резонанса). Если при $t=0$ $v\sim\sin kx$, то для v у стенок, т. е. при $x=0$ и $x=l=n\lambda/2$, имеется узел и значения v равны нулю (узлы колебаний при любых n и при любых временах t). Наоборот, звуковое давление p' на стенке будет иметь пучность и узел посередине между стенками. На рис. 4.4 представлены распределение скоростей и распределение давлений в стоячей волне между стенками через 1/8 периода ($n=1$).

Что изменится, если мы будем иметь дело с нелинейными колебаниями и волнами при тех же условиях? Эту задачу можно решать как для простых, так и для квазипростых волн как задачу о распространяющихся навстречу двух таких волнах. Благодаря тому, что эти волны движутся навстречу друг другу, нелинейного взаимодействия в области между стенками эти волны не испытывают (угол α в (1.2) равен π, и эффекта накапливания искажения нет). Однако каждая из встречных волн искажается независимо; кроме того, они связаны условиями на границах. Рассмотрение этой задачи приводит к тому, что форма профиля колебательной скорости v изменяется со временем, приобретая пилообразную форму (подробнее см. [12]), т. е. в решении задачи есть нарастающие во времени члены. Несколько иначе выглядит форма профиля давления p'.

На рис. 4.5 показано, как изменяется распределение v и p' в нелинейной стоячей волне между двумя абсолютно жесткими стенками. Так же, как для линейного случая (рис. 4.4), на рис. 4.5 через 1/8 периода представлены мгновенные формы профиля v и p'. Отметим, что если узлы для v остаются все время на стенках, то узлы p' смещаются («бегают») по x, что нужно учитывать в ряде экспериментов с большими амплитудами при использовании интерферометров со стоячими волнами.

Задача о вынужденных стоячих колебаниях конечной амплитуды трубы, открытой с одного конца, решалась в [14] методом последовательных приближений в переменных Лагранжа. Если $\xi(a, t)$ — смещение поршня, ρ_0 — невозмущенная плотность среды, $\rho(a, t)$ и $p(a, t)$ — плотность и давление, то для адиабатического распространения звука $p=p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$ и волновое уравнение в переменных Лагранжа будет, согласно (1.1.8) и (1.1.9),

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\frac{c_0^2}{(1+\partial\xi/\partial a)^{\gamma+1}}\frac{\partial^2\xi}{\partial a^2}=0, \qquad (2.1)$$

где $c_0^2=\gamma p_0/\rho_0$. Полагая $\xi=\xi'+\xi''+\ldots$, где ξ'' — второе приближение, получим решение уравнения (2.1) для первого приближения

$$\xi'=\xi_0\frac{\cos k(L-a)}{\cos kL}\cos\omega t. \qquad (2.2)$$

Считалось, что координата поршня $a=0$, а открытый конец трубы имеет координату $a=L$. Граничные условия приняты в виде

$$\xi'_{a=0}=\xi_0\cos\omega t, \quad (\partial\xi'/\partial a)_{a=L}=0. \qquad (2.3)$$

Условие резонанса будет тогда иметь вид

$$(2\pi/\lambda)L=kL=(2n-1)\pi/2 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \qquad (2.4)$$

Из (2.1) нетрудно получить уравнение второго приближения для ξ''.

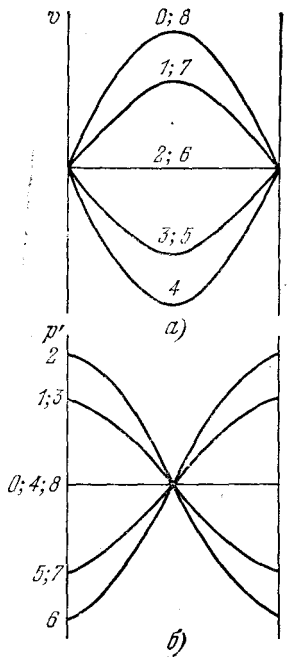


Рис. 4.4. Распределение скоростей (*а*) и давлений (*б*) в стоячей волне бесконечно малой амплитуды между двумя жесткими стенками через 1/8 периода. Число восьмых периода обозначено цифрами 0—8.

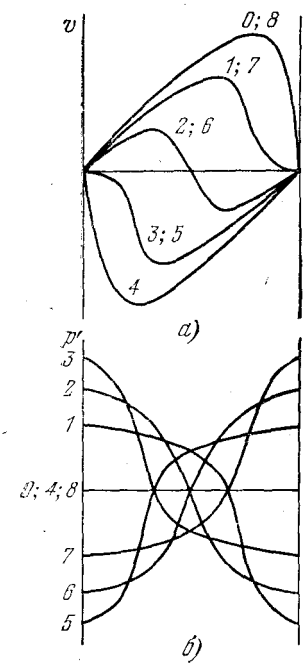


Рис. 4.5. Распределение скоростей (*а*) и давлений (*б*) в стоячей волне конечной амплитуды между двумя жесткими стенками через 1/8 периода. Число восьмых периода обозначено цифрами 0—8.

Подставляя в правую часть этого уравнения выражение для ξ' из (2.2) и считая, что граничные условия для ξ'' будут

$$\xi''_{a=0}=(\partial\xi''/\partial a)_{a=L}=0, \qquad (2.5)$$

получаем выражение для ξ''. Из этого решения, которое из-за его громоздкости мы здесь не выписываем, следует, что, помимо обычных «линейных» резонансов, имеются еще «нелинейные» *резонансы*, при которых не выполняются условия применимости метода последовательных приближений. Эти условия «нелинейных» резонансов таковы:

$$kL = (2n - 1)\,\pi/4. \qquad (2.6)$$

В точках, удовлетворяющих этим условиям, $\xi'' \to \infty$, а значения ξ' конечны. Физический смысл отмеченных «нелинейных» резонансов состоит в том, что одна из частот, возникающая из-за нелинейности, совпадает с одной из собственных частот резонатора. Если акустический резонатор имеет высокую механическую добротность, нелинейные эффекты вблизи резонансов при внешнем возбуждении могут проявляться при очень малых амплитудах. Для реальных резонаторов, у которых добротность ограничивается потерями на вязкость и теплопроводность, нелинейные явления зависят, как и в случае бегущих волн, от числа Рейнольдса. В [15] показывается, что в качестве числа Рейнольдса для резонаторов в виде слоя, с одной стороны которого происходит возбуждение, а другая сторона механически свободна, можно взять

$$\mathrm{Re} = k\xi_0 kLQ, \qquad (2.7)$$

где $Q = \alpha L/2$ — добротность резонатора, α — коэффициент поглощения среды, $\xi_0 = v_0/\omega$ — амплитуда колебательного смещения.

Пользуясь этим числом, можно заранее сказать, насколько существенными будут нелинейные эффекты вблизи резонансов. При $\mathrm{Re} \geqslant 1$ амплитуда колебаний на удвоенной частоте вблизи от линейных резонансов сильно растет как и в линейном резонаторе; т. е. здесь возникают также нелинейные резонансы. При $\mathrm{Re} \ll 1$ нелинейные эффекты оказываются несущественными.

Задача о вынужденных нелинейных колебаниях резонатора с комплексным граничным импедансом аналогичным методом рассмотрена в [16].

Хотя метод последовательных приближений и дает возможность найти «нелинейные» резонансы и определить критерии роли нелинейных эффектов для резонаторов с высокой добротностью, он не может быть применен для задач, где нелинейные эффекты в стоячих волнах достаточно сильно выражены. Не может этот метод дать ответ и на вопрос о том, каково поведение добротности резонатора вблизи резонансов. В [18, 19] разработан метод для решения задач взаимодействия встречных, достаточно интенсивных периодических нелинейных волн, являющийся обобщением метода медленно изменяющегося профиля.

Это обобщение сводится к тому, что в уравнениях Бюргерса в сопровождающих координатах проводится усреднение по быстропеременным функциям, описывающим встречные волны (двигающиеся друг относительно друга с двойной скоростью звука и взаимодействующие только на границе).

В качестве иллюстрации развитого метода на рис. 4.6 приведен результат расчета собственных колебаний слоя с двумя абсолютно отражающими стенками (нелинейный резонанс). Показаны стоячие волны колебательной скорости через равные интервалы времени $\Delta t=(1-9)T/8$ при различных значениях параметра $\Gamma_1=\varepsilon\omega v_0 t/2c_0$.

Как видно из рис. 4.6, прослеживается эволюция возмущения на одной из собственных частот резонатора при больших числах Рейнольдса. Рост гармоник высоких номеров приводит к образованию пилообразной волны; узлы скорости, как и в линейном случае, остаются неподвижными, тогда как узлы плотности и пучности давления перемещаются между узлами скоростей, а у колебательной скорости возникает дополнительный узел — бегущий разрыв. Когда разрыв движется вдоль резонатора, то уменьшается его положительная часть, а отрицательная увеличивается и к другому узлу скорости этот разрыв приобретает противоположную полярность. На границах резонатора возникают резкие перепады давления, тем большие, чем круче фронт волны; для нахождения его ширины необходимо учесть процессы диссипации. Этот учет осуществляется при помощи уравнений Бюргерса для каждой из встречных волн. При больших значениях времени ударный фронт постепенно расширяется и стоячие волны снова становятся гармоническими.

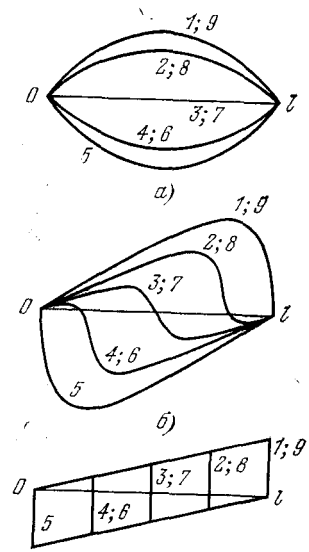


Рис. 4.6. Эволюция возмущения v/c_0 на одной из собственных частот резонатора в случае больших чисел Рейнольдса при различных значениях параметра, характеризующего нелинейность задачи $\Gamma_1=\varepsilon\omega v_0 t/2c_0$: $\ll 1$ (*а*), ≈ 1 (*б*), $\approx\pi/2$ (*в*). Расчет проведен для жестких стенок [18, 19]. Число восьмых периода обозначено цифрами 1—9.

В процессе образования ударной волны при собственных колебаниях резонатора увеличивается нелинейное поглощение и добротность резонатора падает. Последняя достигает минимума в момент образования разрыва.

В случае вынужденных колебаний нелинейного резонатора под действием распределенной внешней силы уравнения для прямой F_1 и обратной F_2 волн сводятся к неоднородным уравнениям Бюргерса, решения которых выражаются через функции Матье [19]. Это решение дает возможность проследить, как устанавливаются вынужденные колебания в резонаторе, какова стационарная форма этих колебаний. Потери энергии, возникающие при образовании гармоник из-за нелинейности, компенсируются энергией, отбираемой от источника. Это приводит к стабилизации профиля стоячих волн (рис. 4.5, *а*). При этом добротность при вынужденных колебаниях, так же как и в случае собственных колебаний, непостоянна;

она определяется амплитудой вынуждающей силы и уменьшается с увеличением амплитуды установившихся колебаний. Указанный метод дает возможность найти также резонансные кривые нелинейного резонатора. К задачам о нелинейных колебаниях в резонаторах примыкает задача о распространении акустических волн конечной амплитуды в акустических волноводах [20]. Здесь поле удается представить как сумму полей двух нелинейных волн, бегущих под углом друг к другу.

Однако разработанный метод использования уравнений Бюргерса для встречных (или бегущих под углом) волн с дополнительным усреднением уравнений по быстропеременным функциям пока что не обобщен для границ резонаторов и волноводов, имеющих произвольное значение импеданса.

§ 3. Параметрические процессы в нелинейных волнах. Параметрическая излучающая и приемная антенны

В нелинейной теории колебаний и ее приложениях (в особенности в радиотехнике) параметрические процессы при использовании достаточно интенсивных периодических изменений сосредоточенных параметров (емкости, индуктивности) позволяют осуществить усиление слабых колебаний и создать параметрические усилители и параметрические генераторы. Подобным образом обстоит дело в нелинейных системах с распределенными параметрами, в которых также можно осуществить параметрическое усиление и генерацию. Это с успехом делается в радиофизике и оптике. В акустике же получены менее значимые результаты.

Пожалуй, наибольшее значение имеет задача о *трехчастотном параметрическом взаимодействии*; вообще для параметрического усиления или генерации необходимо участие по крайней мере трех волн. Одна из этих волн — *волна накачки* с частотой ω_3, другая — слабая *волна сигнала* (если речь идет о параметрическом усилении) с частотой ω_1 и третья — волна разностной частоты ω_2 — так называемая *холостая волна*. Для этих трех волн должно выполняться соотношение

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \tag{3.1}$$

представляющее собой закон сохранения энергии фононов; именно отсюда следует необходимость участия в параметрическом процессе холостой волны.

Для того чтобы между этими волнами (будем считать их плоскими) происходило нелинейное взаимодействие в среде без дисперсии такой, как жидкость или газ, все эти три волны должны распространяться в одном и том же направлении и $\boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$. Перекачка энергии волны накачки в слабую волну (волну сигнала) представляет собой *распадный процесс*, в отличие от *процесса слияния* типа генерации второй гармоники.

На языке фононов мощная волна накачки или фонон ω_3 распадается на два фонона — ω_1 и ω_2, т. е. $\omega_3 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$ (если $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$, то этот процесс называют *вырожденным*).

Направление перекачки энергии определяется *соотношениями Мэнли — Роу* (для систем без диссипации) между параметрами взаимодействующих волн, выражающими закон сохранения энергии. Мы не будем подробно заниматься этими вопросами, укажем только, что параметрический процесс является *пороговым*; усиление начинается с определенного значения амплитуд. В этом процессе важное значение имеют также фазовые соотношения между волнами ω_3, ω_1, ω_2.

Если A_1, A_2, A_3 — амплитуды параметрически взаимодействующих волн, то в дифференциальной форме соотношения Мэнли — Роу для волн с частотами ω_1, ω_2, ω_3, распространяющихся в недиспергирующей среде с одинаковыми скоростями, имеют вид

$$d|A_1|^2/\omega_1 = d|A_2|^2/\omega_2 = -d|A_3|^2/\omega_3. \qquad (3.2)$$

Эти соотношения показывают, что энергия из высокочастотной волны накачки ω_3 распределяется между волнами ω_1 и ω_2 в отношении

$$d|A_1|^2/d|A_2|^2 = \omega_1/\omega_2, \qquad (3.3)$$

откуда следует, что преобразование частоты вверх по спектру происходит эффективнее, чем преобразование частоты «вниз», и при $\omega_1/\omega_2 \ll 1$ приращение энергии низкочастотной волны мало. Теория трехволнового *параметрического усиления* в приближении заданного поля с учетом диссипации, основанная на использовании уравнения Бюргерса, подробно изложена в [1]. Эта теория приводит к выводу о том, что амплитуды A_1 и A_2, т. е. амплитуды сигнала и холостой волны, при больших x будут нарастать экспоненциально, начиная с пороговой амплитуды накачки

$$A_3^{\text{пор}} = (\alpha_1\alpha_2)^{1/2}\, c_0^2/(\omega_1\omega_2)^{1/2}\, \varepsilon, \qquad (3.4)$$

где α_1 и α_2 — коэффициенты поглощения волн с частотами ω_1 и ω_2. При $A_3 > A_3^{\text{пор}}$ амплитуды A_1 и A_2 экспоненциально нарастают, и следует пользоваться теорией с учетом истощения энергии волны накачки при больших x.

Наиболее существенным отличием параметрического усиления в нелинейной акустике от подобного процесса, например в нелинейной оптике, служит то обстоятельство, что в последнем случае имеется сильная дисперсия и волна накачки слабо убывает с расстоянием. В акустическом же случае мощная волна накачки при $\mathbf{Re} \gg 1$ (когда и должно было бы иметь место достаточное усиление) превращается в пилообразную, быстро затухает и параметрическое усиление становится все более слабым. Если считать, что процесс усиления может происходить до расстояния образования разрыва x_p, то можно оценить коэффициент усиления. Для этого отметим, что если не учитывать диссипацию и рассматривать простые волны, амплитуда колебательной скорости волны сигнала ω_1 из-за взаимодействия с волной накачки на начальном этапе увеличивается согласно [1], с. 156 (рассматриваем для простоты вырожденный случай $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$)

$$A_1(x) = A_1(0) \exp(\varepsilon\omega_1 A_3(0)\, x/2c_0^2). \qquad (3.5)$$

Отсюда коэффициент усиления параметрического усилителя $K_{\text{п. у.}}$ будет

$$K_{\text{п. у.}} \sim A_1(x_p)/A_1(0) = \exp(\omega_1/2\omega_3) \approx 1{,}28. \qquad (3.6)$$

Отметим, что наиболее эффективный режим параметрического усилителя имеет место как раз при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$; он наиболее эффективен, в частности, и по той причине, что при этом «холостая волна», в которую также перекачивается энергия, является одновременно сигналом. Однако даже в этом наиболее благоприятном случае $K_{\text{п. у.}}$ лишь немногим больше единицы.

Имеются попытки создать параметрические усилители, вводя в среду искусственную дисперсию (например, вода с пузырьками; об этом будет идти речь в гл. 6); при волноводном распространении нелинейного звука также можно рассчитывать на создание эффективного параметрического усилителя.

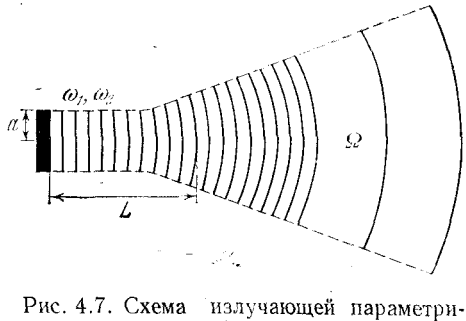


Рис. 4.7. Схема излучающей параметрической антенны.

Таким образом, параметрический усилитель в нелинейной акустике пока еще мало перспективен. Ситуация может измениться, если удастся создать подходящую диспергирующую среду с малым затуханием или использовать взаимодействия акустических волн с волнами другой природы.

Перейдем теперь к анализу физических принципов работы таких интересных нелинейных систем, как *параметрические излучающие и приемные антенны*. В этих антеннах излучающими или приемными элементами служит сам объем нелинейной среды, в котором происходит взаимодействие волн.

К 1960 г., в основном благодаря работам [2, 14, 15], было показано, что в ультразвуковом диапазоне частот даже при незначительных интенсивностях звука генерация гармоник и комбинационных частот в маловязких жидкостях (таких, например, как вода) благодаря их нелинейным свойствам проявляется весьма сильно. Это натолкнуло Вестервельта [21—24] и независимо от него В. А. Зверева и А. И. Калачева [25—29] на мысль о возможности создания параметрических излучающих и приемных антенн.

На рис. 4.7 показана схема излучающей параметрической антенны. Две интенсивные волны с близкими частотами ω_1 и ω_2, распространяясь в одном направлении, взаимодействуют между собой. Наряду с рядом комбинационных частот возникает и разностная частота $\Omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$. Так, в качестве ω_1 и ω_2 для воды выгодно использовать частоты примерно до 100 кГц. Если, например, $\omega_1 = 100$ кГц, $\omega_2 = 99$ кГц и $\Omega = 1000$ Гц, то волна частоты Ω поглощается значительно слабее, чем несущие ω_1 и ω_2. Эта волна может пройти значительно большее расстояние, чем волны ω_1 и ω_2. Эффек-

тивность такой излучающей распределенной антенны весьма невелика (порядка 1% мощности первичных волн в наилучшем случае может преобразоваться в волну частоты Ω). Тем не менее такая антенна обладает рядом весьма ценных свойств, вследствие чего она нашла важные применения в гидроакустике. К числу таких свойств относится прежде всего узкая *характеристика направленности* волны разностной частоты Ω; эта характеристика определяется не апертурой излучателей несущих частот ω_1 и ω_2, а объемом области взаимодействия, наподобие того, как это имеет место в антенне бегущей волны в радиотехнике. Такая антенна при относительно малых размерах излучающих устройств (ω_1, ω_2) дает возможность получать достаточно узкую характеристику направленности. Кроме того, параметрическая антенна обладает исключительно интересным свойством — она не имеет боковых лепестков, наличие которых типично для линейных антенн.

Здесь мы должны сделать важное замечание. В рамках общепринятой радиофизической терминологии истинные параметрические процессы распада фононов $\omega_3 \to \omega_1 + \omega_2$ (процессы усиления) всегда являются пороговыми, т. е. начинают идти в том случае, когда амплитуда волны накачки $|A_3|$ превышает некоторое пороговое значение $A_3^{\text{пор}}$ (см. (3.4)), зависящее от уровня диссипации в среде. При этом амплитуда сигнальной волны $|A_1|$ растет в пространстве по экспоненциальному закону от некоторого малого, но обязательно ненулевого значения (в реальных усилителях уровень сигнальной «затравки» должен превышать уровень шумов). По экспоненциальному закону при больших x растет и амплитуда «холостой» волны $|A_2|$, которая на входе усилителя может равняться нулю.

С другой стороны, в параметрических излучателях звука происходит генерация разностной, а в приемниках (см. ниже) — суммарной частоты при нулевом граничном условии. Как мы видели ранее (1.1), генерация комбинационных частот в плоских волнах идет без порога, от нуля и по линейному закону (эффекты дифракции лишь несколько «подправляют» его).

Таким образом, картина рассмотренного выше процесса параметрического усиления и физика волновых взаимодействий в параметрических излучателях и приемниках существенно различны. Эта оговорка необходима, поскольку в литературе в обоих случаях процессы называют параметрическими, вкладывая в это слово различный смысл. Собственно говоря, взаимодействия в параметрических антеннах с радиофизической точки зрения нельзя называть параметрическими, поскольку амплитуды накачки и «сигнала» на частотах ω_1, ω_2 сравнимы. Тем не менее этот термин прочно утвердился среди акустиков, употребляется в сотнях работ и является общепринятым; вряд ли сейчас имеет смысл настаивать на изменении сложившейся терминологии.

На рис. 4.8 представлены характеристики направленности первичного (*а*, *б*) и вторичного (*в*) излучения в воде для частот 418 кГц (*а*), 482 кГц (*б*) и 64 кГц (разностной частоты Ω) при диаметре излучателя $2a=7{,}5$ см [29]. Хорошо видно отсутствие дифракционных лепестков излучения на частоте Ω. Отметим, наконец, что параметрическая антенна обладает свойством широкополосности (условно — от нуля Гц), поскольку модуляция разностной частоты осуществляется модуляцией высокочастотных несущих.

Названные факторы играют большую роль во все увеличивающемся интересе к такой антенне, в особенности со стороны гидроакустиков. В мелком море (шельф) при использовании параметрической антенны значительно меньшую роль играют как донная, так и поверхностная реверберации, поскольку антенна не имеет лепест-

ков и позволяет возбудить в мелком море только одну нулевую моду [30].

В тех случаях, когда существенна малогабаритность и, с другой стороны, не имеют особого значения потери энергии, такая антенна (благодаря ее широкополосности и поэтому хорошим свойствам для передачи кодированных сигналов) находит все большее применение. Одно из таких применений — поиски под слоем донных отложений (благодаря направленности на разностной — низкой частоте $\sim$1000 Гц и в силу малого поглощения в этом слое низких частот) различного рода объектов — труб, кабелей и т. д. Интересна еще одна особенность параметрической излучающей антенны. Она заключается в том, что благодаря близости частот несущих ω_1 и ω_2

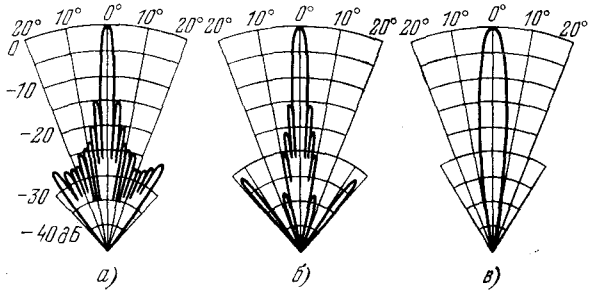


Рис. 4.8. Характеристики направленности первичного (*а*, *б*) и вторичного (*в*) излучения параметрической антенны [29].

и малости Ω флуктуации скорости звука в морской среде мало влияют на работу такой антенны, они не «разрушают» поле такой антенны.

Весьма интересной является теория параметрической излучающей антенны в силу ее необычного физического принципа. Здесь мы не можем вдаваться в подробное изложение этой теории [26] и отметим только основные ее положения.

Прежде всего следует отметить, что строгой теории такой антенны пока не существует, поскольку пока нет точного решения задачи нелинейной теории дифракции. Существующие приближенные теории можно разбить на три класса.

Первый, наиболее простой способ рассуждений, который принято называть приближением плоских волн [31], состоит в следующем. Рассматривается коллинеарное распространение плоских интенсивных нелинейных волн с учетом диссипативных процессов, так как это было сделано нами выше (§ 1 этой главы). При $\mathbf{Re} \ll 1$, т. е. при слабом проявлении нелинейных эффектов, можно воспользоваться решением уравнения Бюргерса (интересуясь прежде всего разностной частотой Ω) методом последовательных приближений. Амплитуда волны частоты Ω, как мы говорили, растет пропорционально x и достигает максимума на некотором расстоянии x_1, после чего сильно сказывается диссипация. Эффективность параметрического преобразования определяется как отношение максимальной

амплитуды скорости $v_\Omega(x_1)$ к амплитуде первичных волн v_0 и оказывается равной

$$\varkappa = v_\Omega(x_1)/v_0 = (\Omega/\omega)\,\mathbf{Re}. \tag{3.7}$$

Поскольку $\omega/\Omega \gg 1$ и $\mathbf{Re} \ll 1$, то $\varkappa \ll 1$, и в этом случае параметрическая излучающая антенна неэффективна.

В случае $\mathbf{Re} \geqslant 1$, когда нелинейность существенна, антенна будет эффективно работать до расстояния, когда образуется пилообразная форма волны при $x_p = (\varepsilon k \mathbf{M})^{-1}$. До образования разрыва при x_p

$$v(x)/\Omega \approx \varepsilon\Omega v_0^2 x/2c_0^2, \tag{3.8}$$

и максимальное значение v_Ω будет при $x = x_p$. Тогда эффективность преобразования, в отличие от (3.7), будет

$$\varkappa = v_\Omega(x_p)/v_0 = \Omega/2\omega. \tag{3.9}$$

Отсюда видно, что нельзя брать большое снижение по частоте. При $x = x_p$ антенна начинает работать в режиме насыщения и, как видно из полученного выражения (3.9), $\varkappa$ не зависит от ε (по этой причине в таком режиме искусственное увеличение ε не должно приводить к повышению $\varkappa$). Примененный метод в приближении плоских волн, конечно, не дает возможности получить какие-либо сведения о характеристике направленности излучения: для этого следует рассматривать по крайней мере двумерную задачу — в частности, параметрическое взаимодействие в ограниченных пучках.

Приведем общий вид решения для осевого распределения амплитуды v_Ω, которое получается при такого рода рассмотрении [26]:

$$v_\Omega = v_0 \pi\varepsilon M \Lambda^{-1} V(x,\ L_з,\ l_з,\ \Phi,\ L_D). \tag{3.10}$$

Здесь Λ — длина волны разностной частоты, v_0 — амплитуда накачки, V — некоторая функция осевого распределения v_0 от указанных в скобках параметров, $L_з = 1/\alpha_\omega$ — длина затухания накачки частоты ω, $l_з = 1/\alpha_\Omega$ — длина затухания частоты Ω, $\Phi = \omega/\Omega$, $L_D = \omega a^2/2c_0$ — длина дифракции (здесь $2a$ — диаметр излучателя первичных волн).

Подробный разбор вида функции V дан в [27], а частично о предельных случаях шла речь выше.

Следующий шаг в уточнении решения — это представление о параметрической антенне, состоящей из ограниченных пучков нелинейных волн, как о распределении в зоне взаимодействия интенсивных нелинейных волн с частотами ω_1 и ω_2 — вторичных источников и решение задачи излучения такими источниками. По существу, такая теория, впервые разработанная Вестервельтом [22], — это решение задачи о рассеянии звука на звуке с учетом дифракции комбинационной волны в области взаимодействия волн с частотами ω_1 и ω_2 (см. также [10]).

Рассмотрение задачи основано на неоднородном волновом уравнении для давления во втором приближении p'', которое можно

получить из уравнений гидродинамики:

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{Q}{4\pi}, \tag{3.11}$$

где p' — звуковое давление исходной волны (первое приближение), $Q/4\pi$ — плотность источников.

Это уравнение решается обычным методом запаздывающих потенциалов, причем интегрирование (для нахождения вторичного поля) ведется по всей области взаимодействия первичных волн. Для узкого коллимированного пучка функция $V(x, \theta)$ для дальнего поля имеет вид

$$V(x, \theta) = \frac{\pi a^3 L_3}{2x\Lambda} \left[1 - \frac{4(2\pi L_3)}{\Lambda} \sin^4 \frac{\theta}{2} \right]^{-1/2}, \tag{3.12}$$

и *ширина характеристики направленности* $\theta_н$, которую можно определить из условия уменьшения v_Ω^2 в два раза, для длинной антенны ($L_3 \gg \Lambda$, Λ — длина волны частоты Ω) равна

$$\theta_н = \sqrt{\Lambda/\pi L_3}. \tag{3.13}$$

Хотя теория Вестервельта и построена при предположениях, которые сильно ограничивают ее применение, все же она сыграла большую роль в развитии теории параметрических излучающих антенн. Кроме того, ее основные результаты (в частности, вывод о том, что для таких антенн отсутствует «изрезанность» характеристики направленности) оправдываются на эксперименте (за исключением того, что теория не дает правильно уровня амплитуды разностной частоты Ω и величины $\theta_н$). К числу ограничений этой теории относится также неучет дифракции первичного поля. Теория построена только для второго приближения и, следовательно, применима только для маломощных первичных полей; ближнее поле вторичного излучения не рассматривается, а это важно для оптимизации антенн [26, 28, 32].

Большое число работ было посвящено уточнению теории Вестервельта (учет поперечного распределения вторичных источников, сферически расходящихся параметрических антенн и т. д.), о которых мы здесь не имеем возможности говорить.

Более точная теория параметрических излучающих антенн, принципиально отличающаяся от теории Вестервельта, была разработана на основе точного волнового расчета нелинейных взаимодействий в дифрагирующих пучках в работах Р. В. Хохлова и его учеников. Использование метода медленно изменяющегося профиля волны в сопровождающей системе координат, наряду с методом параболического уравнения Леонтовича — Фока, приведшего, как известно, к новой области теории — так называемой квазиоптике (области, промежуточной между волновой и геометрической оптикой — акустикой), позволило получить упрощенные уравнения, описывающие поведение ограниченных пучков нелинейных волн (о чем шла речь в гл. 3). Весь этот круг вопросов подробно изложен в книге [26].

Нелинейные параметрические взаимодействия в жидкостях и газах могут быть использованы и для приема слабых сигналов. Принцип действия приемной параметрической антенны приведен на рис. 4.9. Излучатель *И* частоты ω (накачка) создает достаточно узкий пучок интенсивных звуковых волн. Слабый сигнал частоты $\Omega \ll \omega$ падает под некоторым углом θ к оси пучка. В области пересечения с полем накачки происходит нелинейное взаимодействие волн ω и Ω. При этом возникают комбинационные частоты $\omega-\Omega$ и $\omega+\Omega$, которые вместе с частотой накачки ω регистрируются приемником *П*. Фильтр *Ф*, настроенный на одну из боковых частот, выделяет эту частоту, которая далее усиливается усилителем *У*, тем самым обеспечивая параметрический прием.

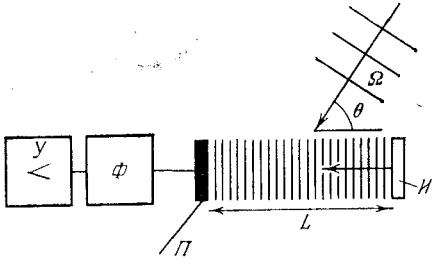


Рис. 4.9. Принцип действия приемной параметрической акустической антенны.

Приходящий издалека слабый сигнал Ω практически представляет собой плоскую волну. Что же касается накачки, то в «прожекторной зоне» мы имеем дело с плоскими волнами частоты ω, а при бо́льших расстояниях, чем a^2/λ,— с волнами расходящимися.

Для наиболее простого случая плоских волн в среде без дисперсии может иметь место только коллинеарное взаимодействие. Поэтому ясно, что максимум направленности приемной параметрической антенны должен быть ориентирован обратно направлению распространения волны накачки.

Однако угол θ, при котором возможен параметрический прием даже при идеально плоских волнах, не будет равен нулю. Имеется так называемый *угол параметрического захвата*, при котором взаимодействие (а значит, и прием) также возможно. Его можно определить из условия, чтобы пространственный период осцилляций Δx амплитуды волны частоты Ω был меньше $\Lambda/2$ (поскольку при $\Delta x > \Lambda/2$ изменится направление перекачки энергии из волны накачки в волну сигнала).

Можно показать, что угол параметрического захвата в среде без дисперсии при двух взаимодействующих плоских волнах с частотами ω_1 и ω_2 определяется соотношением [1]

$$\theta_3^2 = 2\pi c_0 (\omega_1 - \omega_2)/\omega_1 \omega_2 L_{вз}, \qquad (3.14)$$

где $L_{вз}$ — длина взаимодействия волн. Покажем это, имея в виду, что соотношение (3.14) понадобится нам и в дальнейшем. Положим, что под углом θ встречаются две плоские волны с амплитудами звукового давления p_1 и p_2 и суммарное поле в первом приближении будет

$$p' = p_1 \sin[\omega_1 (t - x/c_0)] + \\ + p_2 \sin[\omega_2 (t - x\cos\theta/c_0 - y\sin\theta/c_0)] = A + B. \qquad (3.15)$$

Нелинейные источники определятся тогда членами, пропорциональными

$$p'^2 = A^2 + B^2 + \\ + 2p_1p_2 \sin[\omega_1 (t - x/c_0)] \sin[\omega_2 (t - x\cos\theta/c_0 - y\sin\theta/c_0)]. \quad (3.16)$$

Здесь мы выписали член $2AB$, поскольку в этом члене присутствуют комбинационные частоты. Для разностной частоты из члена $2AB$ получаем

$$p_1p_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2) t - (\omega_1 - \omega_2) x\cos\theta/c_0 + \omega_2 y\sin\theta/c_0)] = \\ = p_1p_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2) t - k_x x + k_y y]. \quad (3.17)$$

При этом

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{(\omega_1 - \omega_2\cos\theta)^2 + \omega_2 \sin^2\theta}\, \Lambda/c_0 = \\ = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2\cos\theta}. \quad (3.18)$$

Для малых углов $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ и

$$k \approx \frac{\omega_1 - \omega_2}{c_0} - \frac{\omega_1\omega_2\theta^2}{2c_0(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (3.19)$$

Расстройка (пространственная осцилляция)

$$|k - k_{\text{рез}}| = \Delta k = \frac{\omega_1\omega_2\theta^2}{2c_0(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (3.20)$$

Набег фазы, приводящий к существенному изменению направления перекачки энергии, определится из условия $\Delta k L_{\text{вз}} = \pi$ (1/2 длины волны). Отсюда

$$\omega_1\omega_2\theta_3^2 L_{\text{вз}}/2c_0(\omega_1 - \omega_2) = \pi, \quad (3.21)$$

и мы получаем выражение (3.14) для θ_3^2. В рассматриваемом случае приемной параметрической антенны $\omega_1 \gg \omega_2 = \Omega$, откуда следует, что $\theta_3 \approx \sqrt{\Lambda/L_{\text{вз}}}$. Эта оценка совпадает с шириной характеристики направленности для параметрической излучающей антенны в модели Вестервельта, как это и должно быть, поскольку как в случае излучающей, так и в случае приемной антенны мы имеем дело с почти коллинеарным взаимодействием (см. также [27, 28]).

Хотя сам принцип создания приемных параметрических антенн чрезвычайно интересен, в осуществлении такой антенны имеются определенные трудности, например трудности борьбы (из-за широкополосности антенны) с помехами, которые (в особенности на низких частотах) всегда имеются в море, если иметь в виду применение таких антенн в гидроакустике.

Теория приемных параметрических антенн разработана в еще меньшей степени, чем теория излучающих. Здесь также возникают вопросы (как и в теории последних) нахождения характеристик направленности, оптимизации антенны и т. п. [28].

§ 4. Статистические явления при распространении нелинейных акустических волн

До сих пор мы имели дело с регулярными нелинейными волнами и их взаимодействиями; случайные процессы при этом не рассматривались. Вместе с тем статистические явления при распространении нелинейных волн часто встречаются и имеют большое значение в физической акустике.

К таким явлениям можно отнести нелинейную трансформацию спектра интенсивного шума при его распространении в нелинейной среде, когда из-за взаимодействий спектральных компонент этого шума происходит перекачка энергии как в низкочастотную, так и в высокочастотную части спектра (так называемая *акустическая турбулентность*). Другим примером может служить *поглощение звука шумом*, когда слабый монохроматический сигнал, распространяясь в широкополосном шуме, из-за взаимодействия с ним испытывает поглощение; энергия сигнала «отбирается» шумом. Отметим, что даже поглощение звука за счет вязкости и теплопроводности, о котором шла речь в гл. 2, можно считать именно результатом такого взаимодействия акустического сигнала с шумом, который в данном случае есть не что иное, как спектр тепловых фононов или упругих дебаевских волн. Об этом будет идти речь при рассмотрении поглощения упругих волн в твердых телах. Укажем еще на один эффект — уширение спектральных линий гармоник исходного узкополосного возмущения при распространении случайно-модулированной звуковой волны конечной амплитуды.

Теоретическое рассмотрение статистических задач в нелинейной акустике следует разделить на два класса. В первой группе задач акустическое поле (узкополосный шум, интенсивный шум с широким спектром, смесь сигнала и шума и т. д.) задается на входе в нелинейную среду и ставится вопрос, как по мере распространения статистические характеристики поля будут изменяться. Вторая группа — это когда в самой среде имеется случайное акустическое поле (например, шум, поле турбулентных пульсаций и т. д.) и в такой среде распространяются либо регулярные волны конечной амплитуды, либо случайные нелинейные волны. Распространение звуковых волн малой амплитуды в турбулентной среде будет нами рассмотрено в гл. 7.

Отметим существенное отличие в постановке задач о детерминированных сигналах на входе в нелинейную среду и сигналов случайных. В первом случае в решении задачи о поведении регулярных сигналов, таких, например, как несколько монохроматических нелинейных звуковых волн, необходимо учитывать фазовые соотношения между этими волнами, поскольку именно они определяют дальнейшую картину взаимодействия. Во втором случае такие фазовые соотношения не играют роли.

Кроме указанных статистических задач, связанных с распространением нелинейных волн, к статистической нелинейной акустике относятся, вообще говоря, также задачи о генерации интен-

сивного звука и шума. Рассмотрение этого вопроса проведено, например, в [12].

Одна из первых задач по нелинейной статистической акустике, относящаяся к трансформации спектра нелинейных шумовых волн, была рассмотрена Л. К. Зарембо [33]. Далее ряд основных результатов в изучении первого класса задач был получен О. В. Руденко и А. С. Чиркиным [34].

Рассмотрим сначала наиболее простую задачу о распространении плоской случайно-модулированной квазигармонической волны или узкополосного случайного процесса [34], который на входе в нелинейную среду ($x=0$) можно записать для колебательной скорости v в виде

$$v(t)=v_0(\Omega,\ t)\sin[\omega_0 t+\varphi(\Omega,\ t)], \tag{4.1}$$

где v_0 и φ — случайные медленно изменяющиеся ($\Omega/\omega_0\ll 1$) амплитуда и фаза.

Уравнение простой волны, описывающее поведение нашего сигнала, в сопровождающей системе координат $y=t-x/c_0$, x имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\varepsilon}{c^2}v\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.2}$$

Как можно теперь подойти к решению задачи об изменении с расстоянием профиля волны, заданного при $x=0$ выражением (4.1)? Мы не будем проводить здесь подробное решение этой задачи, которое изложено в [1], и укажем лишь путь получения такого решения, а также кратко остановимся на обсуждении результата.

При условии $\Omega/\omega_0\ll 1$, которое означает, что искажением v_0 и φ можно пренебречь за характерное время Ω^{-1}, можно показать, что решение уравнения для простой волны (4.2) в сопровождающей системе координат будет иметь вид

$$V(\theta,\ z)=A(\theta)\sin[\theta+zV+\varphi(\theta)], \tag{4.3}$$

где $V=v/\sigma$, $A=v_0/\sigma$, $\sigma=\sqrt{\overline{v^2}}$, а $\theta=\omega_0 y$, $z=\varepsilon\omega_0\sigma x/c_0^2$ — безразмерные координаты. Решение $V(\theta,\ z)$ этого уравнения дается *рядом Бесселя — Фубини*:

$$V(\theta,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_n[nzA(\theta)]}{nz}\sin\{n[\theta+\varphi(\theta)]\},$$

что позволяет записать корреляционную функцию сигнала $V(\theta,\ z)$ для любого значения θ и z в виде

$$B(\tau,\ z)=\overline{V(\theta,\ z)V(\theta',\ z)}, \tag{4.4}$$

где τ и θ' связаны выражением

$$\theta'=\theta+\omega_0\tau=\omega_0(t-x/c_0)+\omega_0\tau=\omega_0(t+\tau-x/c_0). \tag{4.5}$$

Найти $B(\tau,\ z)$ оказывается возможным для стационарного гауссовского (нормального) процесса, для которого известно выражение появляющейся при этом в выражении для $B(\tau,\ z)$ четырехмерной

функции распределения [35]. Если найдены $B(\tau, z)$, то, полагая далее $\tau \to 0$, для интенсивности случайного сигнала можно найти (имея в виду, что для случайного сигнала $I^{(N)} \sim \overline{v^2} = \sigma^2$, а для детерминированного сигнала $I^{(S)} \sim v_0^2/2$ при одинаковых интенсивностях исходных волн) выражения для интенсивности гармоник $I_n^{(S)}$ и $I_n^{(N)}$, которые мы здесь не приводим [1].

Полученные выражения позволяют сделать существенные выводы о том, каково будет различие в процессе возникновения и роста гармоник детерминированного сигнала и случайного узкополосного сигнала. Результат получается, вообще говоря, несколько неожиданным. Так, если исходные волны имеют одинаковую интенсивность I, то оказывается, что гармоники узкополосного случайного сигнала растут быстрее (а исходная волна случайного сигнала истощается сильнее), чем для детерминированного сигнала.

Объяснение этого результата состоит в том, что в случайном сигнале всегда найдутся большие по амплитуде выбросы, для которых нелинейность проявляется сильнее; нелинейные эффекты оказываются более чувствительными к выбросам гауссовского шума. Отметим, что в нелинейной оптике также имеет место подобный эффект [36]. Экспериментально при малых z этот эффект подтверждается; эксперимент приводит к такому результату: $I_n^{(N)}/I_n^{(S)} \approx n!$, где n — номер гармоники, что также следует из теории [37].

Задав форму линии начального сигнала при $x=0$, а также зная корреляционную функцию $B(\tau, z)$ (например, для стационарного гауссовского процесса), можно далее решать различные задачи по случайным нелинейным волновым процессам — такие, как задача о «расплывании» спектральных линий (что удается сделать и для диссипативных нелинейных сред), о ширине спектральной линии гармоник шума, построить общую теорию нелинейной эволюции спектров случайных звуковых полей в отсутствие диссипации, рассмотреть вопрос о взаимодействии модулированных волн [38, 39].

§ 5. Поглощение звука шумом. Акустическая турбулентность

Рассмотрим вопрос о взаимодействии гармонического сигнала с шумом, в частности вопрос о поглощении звука шумом. Положим, что мы имеем на входе в нелинейную среду ($x=0$) возмущение $\xi(\eta)$ в виде

$$\xi(\eta) = N(\eta) + S(\eta).$$

Здесь $S(\eta)$ — гармонический детерминированный сигнал: $S(\eta) = A \sin \omega_0 \eta$, а $N(\eta)$ — шум. Шум будем считать нормальным и $\overline{N} = 0$; его интенсивность $\sim \sigma^2 = \overline{v^2}$ $\left(\sigma = \sqrt{\overline{v^2}}\right.$ — дисперсия шума).

Не останавливаясь на довольно сложном выводе [1, 39], приведем выражение для интенсивности спектральной линии сигнала в зависимости от ω и от проходимого сигналом и шумом

расстояния x:

$$S(\omega, x)=\frac{A^2}{2}\exp\left[-(\varepsilon c_0^{-2}\sigma\omega_0 x)^2\right]\frac{2J_1(\varepsilon c_0^{-2}A\omega_0 x)}{\varepsilon c_0^{-2}A\omega_0 x}\,\delta(\omega-\omega_0), \quad (5.1)$$

где A — начальная амплитуда сигнала.

Это выражение показывает, что при нелинейном взаимодействии монохроматического сигнала S с шумом в среде без дисперсии, амплитуда убывает, во-первых, по причине генерации гармоник сигнала (второй сомножитель в (5.1); он может иметь значение лишь для интенсивного сигнала) и, во-вторых, из-за нелинейного взаимодействия с шумом (экспоненциальный множитель); как сигнал, так и шум заданы на входе в нелинейную среду при $x=0$ и «идут вместе».

Положим, что сигнальная волна имеет малую интенсивность. Тогда процесс генерации гармоник сигнала можно не принимать во внимание; уменьшение амплитуды сигнала будет определяться лишь экспоненциальным членом; энергия сигнала перекачивается в шум.

Формулу (5.1) можно применить для решения задачи о поглощении звука шумом [39]. Предположим, что поле шумов изотропно распределено по среде с полной объемной плотностью шума $E=\rho_0\sigma^2$. Сигнал частоты ω_0 распространяется по такой среде с шумом, но эффективно с волной ω_0 взаимодействует только часть от E, равная $E\,\Delta\Omega/4\pi$. Величина $\Delta\Omega=\pi\theta^2$ выражается через телесный угол параметрического захвата θ_3^2, который определяется формулой (см. (3.14))

$$\theta_3^2=2\pi c_0\,|\,\omega_0\pm\omega\,|/x\,\omega\omega_0. \quad (5.2)$$

В данном случае x — характерный размер области взаимодействия.

Рассматриваемый здесь механизм поглощения из-за нелинейного взаимодействия волн аналогичен (на макроскопическом языке) тому, который приводит к поглощению звука в кристаллах.

Действительно, забегая вперед, заметим, что в кристаллах поглощение звука возникает главным образом из-за взаимодействия звуковых фононов с высокочастотными тепловыми фононами ω, для которых $\omega\gg\omega_0$ — случай Ахиезера [40] (случай $\omega_0\gg\omega$, когда длина свободного пробега звукового фонона $l_э$ больше, чем теплового $l_ф$, осуществляется при низких температурах (гл. 10); это случай Ландау — Румера [41]).

При условии $\omega\gg\omega_0$ из (5.2) получаем $\theta_3^2=2\pi c_0/x\omega_0$, и показатель экспоненты в (5.1) приводится к формуле Ахиезера [40]: закон убывания интенсивности приобретает вид

$$I\sim\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 E}{2\rho_0 c_0^3}\omega_0^2\tau x\right)=\exp(-\alpha x), \quad (5.3)$$

где E — объемная плотность энергии шума и τ — характерное время релаксации или, то же самое, время синхронного взаимодействия волны с шумом. Поскольку сигнальная волна и тепловая дебаевская волна не идут вместе бесконечно долго, при выводе вы-

ражения для α, согласно (5.3), учтено время жизни теплового фронта τ (вытекающее из (5.1) значение $\pi\varepsilon^2 E\omega_0/2c_0^3\rho_0$ умножено на отношение $\omega_0\tau/\pi$ [1]).

Такой подход применим для выяснения вопросов об аномальном поглощении звука в тех случаях, когда оно вызывается наличием внешнего (стороннего) шума в среде. В общем случае плотность энергии шума E состоит из части, обусловленной внутренними шумами $E_{вн}$, и стороннего шума $E_{ст}$, происхождение которого имеет различные причины. В этом случае

$$\alpha=\alpha_{вн}+\alpha_{ст},\quad \alpha_{вн}=\frac{b\omega_0^2}{2\rho_0 c_0^3},\quad \alpha_{ст}=\frac{\varepsilon^2 E_{ст}}{2\rho_0 c_0^3}\omega_0^2\tau. \tag{5.4}$$

Поглощение, вызванное сторонними шумами, будет заметно, естественно, когда $\alpha_{ст}>\alpha_{вн}$ или $E_{ст}>b/\tau\varepsilon^2$.

Рассмотрим в качестве примера распространение звука в подводном звуковом канале для низких звуковых частот $<10^4$ Гц, где как раз, по-видимому, имеет место этот случай [42].

Известно, что уровень динамических шумов океана в канале весьма высок; в силу способности шумов накапливаться в канале их полная энергия на весь спектр может быть оценена величиной порядка $E_{ст}\approx 2\cdot 10^{-4}$ эрг/см^3.

В отличие от спектра тепловых шумов в твердых телах, шумы в канале сосредоточены главным образом на низких частотах, и из формулы (5.2) следует приближенно, что $\theta_3^2=2\pi c_0/x\omega$. В этом случае

$$\alpha_{ст}=\frac{\varepsilon^2 E_{ст}}{2\rho_0 c_0^3}\omega_0^3\frac{\tau(\omega)}{\omega}. \tag{5.5}$$

Как видно, $\alpha_{ст}$ зависит от структуры шумового спектра. Если положить, что $\tau(\omega)$ определяется длиной затухания и равно $(\alpha_{ст}c_0)^{-1}$, то вместо (5.5) найдем

$$\alpha_{ст}=\frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{2\rho_0 c_0^2}}f_0^{3/2}\int_{f_1}^{f_2}\frac{d\sqrt{E}}{df}\frac{df}{\sqrt{f}}, \tag{5.6}$$

где проведено интегрирование по частотам $f=\omega/2\pi$. В качестве пределов естественно выбрать верхнюю границу f_2 распределения dE/df, довольно резко спадающего при f_2 порядка 10^2 Гц. Нижняя граница f_1 лежит в области порядка единиц герц; именно для этих частот длина волны сравнима с толщиной канала и сказывается волноводная дисперсия.

Можно положить, согласно имеющимся данным, $dE/df=E_{ст}/f_2=$ $=\text{const}$ в области $0<f<f_2$, $dE/df=0$ при $f>f_2$; интегрируя, получим

$$\alpha_{ст}=\frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{2\rho_0 c_0^2}}\sqrt{\frac{E_{ст}}{f_2}}\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)f_0^{3/2}. \tag{5.7}$$

Как видно, результат слабо зависит от f_2/f_1, поэтому положим для оценки $f_2=200$ Гц, $f_1=5$ Гц. Поскольку для воды $\varepsilon=(\gamma+1)/2\approx$ ≈ 4, $c_0=1{,}5\cdot 10^5$ см/с, формула (5.7) дает известный в гидроакустике

эмпирический результат

$$\alpha_{ст}[\text{дБ/км}] \approx 0{,}04 f_0^{3/2}, \qquad (5.8)$$

где f_0 берется в кГц.

Интересно отметить, что, помимо описанной модели, дающей правильную частотную зависимость $f_0^{3/2}$, можно оценить другие возможные модели для $\tau(\omega)$. В большинстве случаев при $f_0 \approx 10^3$ Гц получается значительная величина $\alpha_{ст}$, соответствующая экспериментально наблюдаемой по порядку величины. Это, по-видимому, лишний раз свидетельствует в пользу гипотезы шумового механизма поглощения звука в океане.

Как мы уже отмечали (см. также работы [33, 38, 39, 43]), в нелинейной среде взаимодействие ультразвуковых сигналов с интенсивным акустическим шумом сопровождается ярко выраженными явлениями перераспределения энергии по спектру. При взаимодействии с низкочастотным шумом наблюдается сильное уменьшение интенсивности спектральной линии сигнала, но, кроме этого, возникают новые спектральные комплексы вблизи сигнальной частоты ω_0, а также вблизи разностных, суммарных и других комбинационных компонент сигнала и шума. Если при этом считать, что спектральная линия сигнала имеет дельтаобразный вид, и пренебречь вкладом в интенсивность линии E_{ω_0}, который дают спектральные комплексы, возникшие у ее подножия, то величина дополнительного затухания сигнала $\Delta_з$ запишется, согласно (5.1), в виде

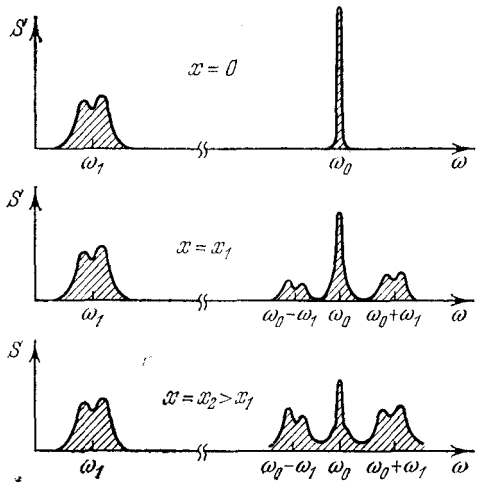


Рис. 4.10. Поведение спектральной линии сигнала при его взаимодействии с шумом на различных расстояниях x от оси излучателя.

$$\Delta_з[\text{дБ}] = 4{,}3\,(\varepsilon c_0^{-2}\,\sigma\omega_0\,x)^2. \qquad (5.9)$$

В это выражение входит единственный параметр, характеризующий шум: его интенсивность σ^2. В действительности, однако, спектральная линия сигнала всегда имеет конечную ширину, а ее слияние со спектральным комплексом, образовавшимся в процессе взаимодействия у основания линии, приводит, по сути дела, к образованию новой линии возросшей ширины (рис. 4.10). В большинстве случаев эта линия должна рассматриваться как единое целое и расчленить ее на отдельные составляющие не представляется возможным. Именно поэтому все расчеты, связанные с определением дополнительного

затухания сигнала вследствие нелинейного взаимодействия с шумом, должны вестись с учетом вклада, который дают в энергетический спектр $S(\omega_0)$ комплексы, возникшие в процессе взаимодействия. При этом результаты расчетов будут уже существенным образом зависеть от вида спектра шума и, в частности, от его ширины. Характерно, что деформация спектральной линии сигнала при взаимодействии приводит к тому, что соотношение между интенсивностью невозмущенной линии E_{ω_0} и пиковым значением спектральной плотности $S(\omega_0)$ в процессе совместного распространения сигнала и шума постоянно меняется. Не остается постоянным соотношение между аналогичными величинами $E_{n\omega_0\pm k\omega_1}$ и $S(n\omega_0\pm k\omega_1)$ и для боковых спектральных комплексов произвольного порядка (здесь ω_1 — центральная частота спектра шума n, $k=1, 2, \ldots$). Таким образом, расчет энергетических характеристик процесса взаимодействия $E_{n\omega_0\pm k\omega_1}$ должен производиться отдельно от расчета значений спектральной плотности $S(n\omega_0\pm k\omega_1)$. В эксперименте определение величины $E_{n\omega_0\pm k\omega_1}$ может быть произведено путем измерения полной интенсивности акустического излучения в достаточно узкой частотной полосе, содержащей внутри себя либо спектральную линию сигнала, либо спектральный комплекс k-го порядка. Как правило, «вырезание» необходимого частотного диапазона проходит в электрической части приемного тракта (с помощью какого-либо полосового фильтра). Чаще всего изучение спектральных характеристик акустических процессов производится спектроанализаторами, позволяющими наблюдать целиком всю спектральную картину в исследуемом диапазоне частот. В этом случае приходится иметь дело с изучением энергетического спектра процесса и измерением значений спектральной плотности $S(\omega)$. Величина дополнительного затухания сигнала определяется здесь по пиковому значению спектральной плотности на частоте сигнала $S(\omega_0)$. Достаточно простые выражения для величины дополнительного затухания сигнала, определяемого таким образом, в случае шума, имеющего спектр гауссовой формы, приведены в [5,44]. При этом, если оба взаимодействующих возмущения слабо отличаются от узкополосных, то величина затухания $\Delta_з$ полностью определяется двумя параметрами $\gamma_0=(\varepsilon\sigma\omega_0 x/c_0)^2$ и $p=\Delta\omega_0/\Delta\omega_1$, где σ — среднеквадратичное значение колебательной скорости низкочастотного возмущения, ω_0 — частота слабого высокочастотного сигнала, x — расстояние взаимодействия, $\Delta\omega_0$ и $\Delta\omega_1$ — ширина спектра высокочастотного и низкочастотного возмущений соответственно. Величина $\Delta_з$ заключена при этом между значениями $\Delta_з^0=4{,}3\gamma_0$ и $\Delta_з^{(1)}=\Delta_з^{(0)}-$ $-10\lg I_0(\gamma_0)$.

Сопоставление теоретических и экспериментальных данных по изучению зависимости $\Delta_з$ от безразмерного параметра γ_0 проведено на рис. 4.11 [44]. Вместо одной теоретической кривой здесь изображена целая область (отмеченная штриховкой), соответствующая расширению интервала теоретических значений $\Delta_з$ из-за ошибки в измерении интенсивности шума. Две кривые, ограничивающие данную область, представляют собой результат машинных расчетов

$\Delta_з$ при отклонении γ_0 от среднего значения на величину, соответствующую ошибке в определении σ^2 в одном случае в сторону увеличения, в другом — в сторону уменьшения. Прямая отражает зависимость вида $\Delta_з = 4{,}3\gamma_0$. Экспериментальные данные получены путем измерения величины дополнительного затухания сигнала при различных значениях интенсивности шума, частоты сигнала, протяженности участка взаимодействия.

Проведенные эксперименты [5,44] показали, что даже в случае весьма узкой спектральной линии сигнала расчеты необходимо проводить с учетом конечной ширины линии. Когда отношение $\Delta\omega_0/\Delta\omega_1$ составляло 0,15 и менее, расхождение между экспериментальными данными и теоретическими расчетами, проведенными в приближении бесконечно узкой спектральной линии, доходило до 35 дБ при $\gamma_0 \approx 12$. Учет конечной ширины спектральной линии сигнала снизил отмеченное расхождение до величины 4,5—5 дБ. Оставшееся расхождение следует, по-видимому, отнести за счет дифракционных явлений во взаимодействующих пучках, а также некоторой ограниченности теоретического подхода, не учитывающего образования разрывов в процессе распространения высокоамплитудных выбросов низкочастотного шума.

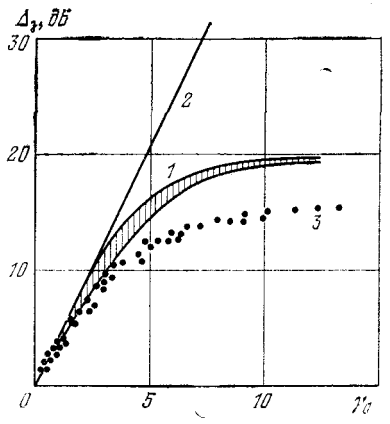


Рис. 4.11. Дополнительное затухание сигнала при взаимодействии с шумом в зависимости от параметра $\gamma_0 = (\varepsilon\sigma\omega_0 x/c_0^2)^2$: *1* — интервал значений $\Delta_з$, рассчитанный теоретически; *2* — зависимость вида $\Delta_з = 4{,}3\gamma_0$; *3* — экспериментальные точки [44].

Во всех расчетах имеется к тому же некоторая непоследовательность. По существу, рассматривается одномерный процесс, а вместе с тем, вводя угол параметрического захвата, мы отходим от этого предположения. Тем не менее такой нестрогий подход, как было показано, экспериментально хорошо подтверждается. Кроме того, он приводит к известным формулам Ахиезера, согласующимся с экспериментальными данными.

Имеются другие пути рассмотрения задачи о нелинейном взаимодействии монохроматического сигнала с шумом, позволяющие получить решение для трехмерного случая. Один путь—это использование гамильтонова подхода (подробнее об этом см. статью [45]). В рассматриваемой задаче канонические переменные и гамильтониан определены. Следовательно, можно использовать квантовомеханическую аналогию для описания процесса. Записав известные коммутационные соотношения для канонических переменных, можно определить операторы рождения и уничтожения элементарных возбуждений акустического поля. Гамильтониан взаимодействия содержит комбинацию канонических переменных в степени выше второй. Поэтому элементарные возбуждения в результате действия возмущения, определяемого нелинейностью, с некоторой вероятностью могут переходить из одного состояния в другое. Эта вероятность вычисляется, если из-

вестен явный вид гамильтониана. Учитывая полученное выражение для вероятности перехода, не представляет труда построить кинетическое уравнение, описывающее эволюцию интересующей нас моды во времени и, следовательно, определить характерное время релаксации.

Если речь идет о взаимодействии высокочастотного сигнала с низкочастотным шумом, то для времени $\tau_в^{-1}$ получаем выражение

$$\tau_в^{-1} \approx 4\pi\,(E/\rho c^2)\,(\omega_0^2/\omega). \tag{5.10}$$

Здесь ω_0 — частота сигнала, E — плотность энергии шума, локализованного в окрестности частоты $\omega \ll \omega_0$. В противоположном случае, когда $\omega \gg \omega_0$, имеем

$$\tau_в^{-1} \approx 4\pi\,(E/\rho c^2)\,\omega_0^2. \tag{5.11}$$

Можно использовать и другой подход. Если считать шумовое поле заданным, то его удобно рассматривать как большой резервуар, энергия которого велика по сравнению с энергией регулярной волны. Тогда задача сведется к линейной задаче о распространении звуковой волны в статистически неоднородной среде, созданной шумом и устойчивой во времени. Амплитуда волны, распространяющейся в выделенном направлении, слагается, вообще говоря, из трех частей: ее средней величины, флуктуационной добавки и шумовой компоненты. Принимая во внимание корреляционные характеристики шума, можно получить уравнение для усредненной амплитуды волны, которое позволяет получить самосогласованное решение, а не поправку к невозмущенному состоянию. Для коэффициента поглощения удается получить приведенные выше выражения. Однако здесь имеется возможность учесть влияние времени корреляции на процесс затухания [46].

Методом малых возмущений в [47] рассматривалось взаимодействие сигнала с изотропным шумом. Представляет интерес результат расчета величины «рассеянного» поля I_s, спектральные компоненты которого сосредоточены в области суммарных и разностных частот взаимодействующих акустических возмущений. При $\omega \gg \omega_ш$ этот результат дается выражением

$$I_s = \beta\varepsilon^2\,\omega_0^2\,x\int_0^{\omega_0}\frac{E(\omega)}{\omega}\,d\omega, \tag{5.12}$$

где β — вычисляемая постоянная и $E(\omega)$ — плотность энергии изотропного шума.

Кроме задачи о взаимодействии слабой регулярной акустической волны с шумом, представляет интерес задача о динамике нелинейной эволюции самого спектра интенсивного шума, происходящей из-за взаимодействия его отдельных компонент. Эволюция зависит от нелинейных свойств среды, от расстояния, которое этот шум проходит, от вида самого спектра и интенсивности его компонент. Эта задача первоначально рассматривалась в [33] для среды без диссипации и в [43] при малой нелинейности. Было выяснено, что для широкополосного исходного спектра спектры всех гармоник перекрываются, и если, например, начальный спектр $S(\omega, 0)$ сосредоточен вблизи $\omega=0$, то он с расстоянием деформируется: на низких частотах спектральная плотность уменьшается, а на высоких возрастает. В том же случае, когда максимум спектральной плотности находится на частоте $\omega \neq 0$, спектральная плотность возрастает как на более высоких частотах, так и параметрически подкачивается к низким частотам.

Задачи, относящиеся к нелинейной трансформации широкополосных спектров, принято называть акустической турбулентностью.

Здесь особенно интересно получить ответ на вопрос о том, какую форму приобретает вид спектра широкополосного шума в равновесном случае.

В задаче о нахождении равновесного спектра акустической турбулентности следует учитывать совместное действие двух факторов. С одной стороны, нелинейные эффекты возникают благодаря искажению каждой из волн и росту амплитуд гармоник (эффект самовоздействия). С другой стороны, происходит перераспределение энергии по спектру в результате нелинейного взаимодействия волн. При этом мы имеем дело с начальным интенсивным шумом с широким спектром — ансамблем плоских акустических продольных волн, распространяющихся во всевозможных направлениях; само взаимодействие происходит лишь в узком конусе, определяемом углом параметрического захвата.

Предположим сначала, что эффекта самовоздействия мы не учитываем. Тогда можно считать, что все гармонические волны некоррелированы. Предположим, что возбуждение волн происходит на сравнительно низких частотах и что действует эстафетный механизм передачи энергии от низких частот к высоким без потери энергии (аналогично механизму Колмогорова — Обухова перекачки энергии в инерционном интервале (§ 7, гл. 1) в статистической теории турбулентности) и лишь на высоких частотах в игру вступает вязкость. В этом случае В. Е. Захаровым и Р. З. Сагдеевым [48] было показано, что можно найти вид энергетического спектра в инерционном интервале. Закон спадания спектральной плотности энергии в зависимости от волнового вектора k имеет вид

$$E_k \sim k^{-3/2}. \tag{5.13}$$

В акустических нелинейных средах, когда типичным является случай отсутствия дисперсии, при больших акустических числах Рейнольдса происходят процессы генерации гармоник и образования пилообразных волн. Для таких волн уже нельзя пренебрегать эффектами корреляции между гармоническими составляющими, как это предполагалось в [48]. Б. Б. Кадомцев и В. И. Петвиашвили [49] обратили внимание на это обстоятельство и пришли к заключению, что для ансамбля пилообразных волн вид спектральной плотности энергии дается выражением

$$E_k \sim k^{-2}. \tag{5.14}$$

Если одновременно учесть оба указанных нелинейных эффекта (и процессы перемешивания, и процессы самовоздействия в широком спектре слабонелинейных акустических волн), можно показать [50], что перемешивание приводит к размытию фронта пилообразных волн. В инерционном интервале частот спектр системы разбивается на две области. В первой области главную роль играет спектр пилообразной волны и закон спадания спектральной плотности энергии соответствует зависимости (5.14). Вторая же область характеризуется законом спадания (5.13). Ряд других интересных задач в области статистической нелинейной акустики описан в [51, 52].

Глава 5

РАДИАЦИОННОЕ ДАВЛЕНИЕ. АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

§ 1. Радиационное давление. Общие сведения

Кроме переменных величин, таких, как давление, колебательная скорость и смещение, в звуковом поле возникают постоянные силы. К таким силам относится *радиационное давление*, которое также называют давлением звукового излучения [1—3].

Давление излучения характерно для волн любой природы, в том числе для электромагнитных волн (вспомним давление света). Его происхождение связано с изменением в некотором объеме (например, у препятствия или вследствие поглощения волн на пути их распространения) среднего по времени переносимого волной импульса. Отличие звукового радиационного давления от давления света состоит в том, что волновое уравнение для световых волн линейно (если не рассматривать задач нелинейной оптики, имеющей дело с мощным лазерным излучением), тогда как в акустике, даже при относительно небольших интенсивностях звука, возникают нелинейные эффекты (см. гл. 3, 4), которые в ряде случаев приходится принимать во внимание.

Кроме того, в акустических задачах поверхность препятствия, на которую падают звуковые волны, может испытывать колебания под действием волн, и при определении радиационного давления часто требуется учитывать эти движения. Возникает необходимость принимать во внимание целый ряд обстоятельств: каково акустическое поле и вид звуковой волны; какова геометрия задачи — в свободном ли пространстве имеется акустическое поле или это пространство ограничено; каково препятствие, на которое падают волны — поглощает оно звук или отражает и в какой степени; нужно ли учитывать нелинейные свойства среды или можно ограничиться линейной акустикой; велико или мало препятствие по сравнению с длиной звуковой волны и в какой степени следует учитывать рассеяние волн на этом препятствии; существенную ли роль играют диссипативные свойства среды и т. д.

В эйлеровых координатах при изменении импульса волны сила, действующая на некоторый фиксированный объем V, определяется потоком импульса через неподвижную поверхность S, ограничивающую этот объем (см. (1.1.24)):

$$F_i = -\oint_S T_{ij}\, n_j\, dS = -\oint_S T_{ij}\, dS.$$

Здесь T_{ij} определяется по (1.1.22): $T_{ij}=p\delta_{ij}+\rho v_i v_j$; p — звуковое давление, n_j — внешняя нормаль к поверхности $\boldsymbol{S}$. Обратим внимание на то, что выражение для тензора T_{ij} взято здесь без учета тензора вязких напряжений σ'_{ij}, и, таким образом, все дальнейшее изложение, пока не будет оговорено особо, относится к идеальной жидкости.

Для нахождения постоянной составляющей силы F_i, возникающей в звуковом поле, т. е. (по определению) силы радиационного давления P_i, следует взять среднее по времени от F_i:

$$P_i=\overline{F}_i=-\oint_S \overline{T}_{ij}\, n_j\, dS. \qquad (1.1)$$

Это выражение имеет общий вид и в нем должно быть учтено изменение импульса, которое вызывается поглощением волны. Вообще говоря, следует учитывать и изменение импульса волны, вызванное различными другими причинами, в том числе дифракцией и рассеянием на препятствии, а также нелинейными эффектами (если, например, падающая волна имеет искаженную форму профиля вследствие нелинейного отражения и взаимодействия падающей и отраженной волн [4]).

Сила радиационного давления, или просто радиационное давление, есть величина векторная, зависящая от направления нормали к площадке $d\boldsymbol{S}$ по отношению к направлению распространения звука. Она представляет собой интеграл от свертки тензора плотности потока импульса с единичным вектором нормали к поверхности. Эту силу иногда называют *радиационным напряжением* или *натяжением* (так как ее величина зависит от ориентации площадки относительно направления распространения волны), хотя название это (вообще говоря, более правильное) и не привилось.

Для плоских гармонических волн, распространяющихся по оси x («неограниченный» пучок волн), получаем из (1.1.22)

$$\overline{T}_{ij}=\begin{bmatrix} \overline{p}+\rho\overline{v_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{p} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{p} \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что радиационное давление, если даже не учитывать нелинейности уравнений движения и состояния, т. е. в линейной акустике, представляет собой величину квадратичную по переменным поля. Поэтому необходимо принимать во внимание величины второго порядка малости, не обращающиеся в нуль при усреднении по времени.

Если ограничиться первым приближением для p и v (считая, что $p=p'+p''$, $v=v'+v''$,, штрих означает первое приближение и два штриха — второе), то, поскольку для гармонической волны $\overline{p'}=0$, из (1.1) и (1.2) следует, что радиационное давление на полностью поглощающее препятствие действует вдоль направления распростра-

пения волны и равно (на единицу площади)

$$P = \rho_0 \overline{v'^2} = 2\overline{E}_k, \tag{1.3}$$

где $\overline{E}_к$ — средняя по времени плотность кинетической энергии. Выражение для среднего значения плотности потока импульса во втором приближении $\overline{T}_{ij}^{(2)}$ запишется в виде

$$\overline{T}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} \overline{p''} + \rho_0 \overline{v'^2} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{p''} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{p''} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Во втором приближении, как это следует из (1.4), тензор $\overline{T}_{ij}^{(2)}$ может быть представлен как сумма двух тензоров, один из которы^{x}

$$\overline{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{p''} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{p''} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{p''} \end{bmatrix} = \delta_{ij} \overline{p''} \tag{1.5}$$

есть дополнительное гидростатическое давление, обязанное своим происхождением нелинейности гидродинамических уравнений.

Если в звуковом поле плоской волны масса постоянна и $\rho'' = 0$, то, согласно (3.1.32), вспоминая, что $\varepsilon = (\gamma+1)/2$, получим

$$\overline{p''} = \frac{(\gamma-1)}{2} \rho_0 \overline{v'^2} = (\varepsilon - 1)\, \rho_0 \overline{v'^2},$$

$$\overline{T}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} (\varepsilon-1)\, \rho_0 \overline{v'^2} + \rho_0 \overline{v'^2} & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon-1)\, \rho_0 \overline{v'^2} & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon-1)\, \rho_0 \overline{v'^2} \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Это значение $\overline{T}_{ij}^{(2)}$ показывает, что среднее гидростатическое давление в плоской волне из-за нелинейности уравнений будет больше на величину $(\varepsilon-1)\rho_0 \overline{v'^2}$ (эффект «поджатия»).

Если, однако, учитывать ограниченность звукового пучка, то поджатие будет иметь место до тех пор, пока статическое давление в пучке не станет равным гидростатическому давлению в среде, где пучка нет. Поэтому радиационное давление пучка на полностью поглощающее препятствие оказывается равным

$$P_{пч} = \overline{T}_{xx} = \rho_0 \overline{v'^2} = 2\overline{E}_к = \overline{E}. \tag{1.7}$$

Такое давление в свободном пространстве с учетом ограниченности пучка называют *ланжевеновским* или *ланжевен-бриллюэновским* давлением радиации. Другими словами, это — давление, создаваемое пучком, когда последний окружен невозмущенной жидкостью. В выражении (1.7) мы считаем, что среднее значение кинетической энергии равно среднему значению потенциальной энергии; в общем случае этого может и не быть; подробно этот вопрос рассмотрен в [2]. Естественно, что если препятствие полностью отражает звук, то

$$P_{пч} = 2\overline{E}. \tag{1.8}$$

Таким образом, давление в ограниченном пучке бегущих волн не равно давлению плоской волны, где давление на поглощающую стенку, согласно (1.3) — (1.6), есть

$$P_{\text{пл}} = \varepsilon \overline{E}. \tag{1.9}$$

Нелинейный параметр ε для жидкостей принимает значения 4—12, поэтому отличие $P_{\text{пл}}$ от давления в ограниченном пучке $P_{\text{пч}}$ (в котором статическое давление выровнялось, став равным давлению в невозмущенной звуком среде), как мы видим может быть велико. Тем не менее экспериментального доказательства эффекта поджатия, насколько нам известно, пока не получено, хотя теоретически этот вопрос достаточно ясен. Радиационное давление в неограниченном пучке (1.7) можно назвать *рэлеевским давлением* [3], хотя более принято, следуя Рэлею, называть рэлеевским радиационное давление на полностью отражающую стенку в жесткой трубе (см. ниже).

Проведем теперь рассмотрение радиационного давления в лагранжевых координатах. Такой подход удобен для решения задачи о нахождении радиационного давления на сферу (см. §2). На тело, помещенное в озвучиваемую невязкую среду, действует сила

$$F = -\oint\limits_{S(r,\,t)} p\,d\boldsymbol{S}. \tag{1.10}$$

Уравнение поверхности $S(r, t)$, ограничивающей тело, в общем случае зависит от времени, так как в звуковом поле тело может увлекаться окружающей жидкостью и совершать колебательные движения как поступательного, так и радиального типа (например, пузырек в жидкости). Радиационное давление есть постоянная составляющая силы (1.10), т. е. сила, усредненная во времени за период колебаний звукового поля.

При непосредственном усреднении выражения (1.10) встречаются некоторые сложности, связанные именно с усреднением движения граничной поверхности. Чтобы избежать их, введем среднее равновесное положение границы $\overline{S}$ и перепишем интеграл (1.10) в следующем виде:

$$\boldsymbol{F} = -\oint\limits_{\overline{S}} p\,d\boldsymbol{S} - \int\limits_{V} \nabla p\,dV. \tag{1.11}$$

Интегрирование по движущейся поверхности $S(r, t)$ в (1.10) заменено здесь интегрированием по неподвижной поверхности $\overline{S}$, а оставшаяся разность интегралов по поверхностям $S(r, t)$ и $\overline{S}$ превращена, согласно теореме Гаусса, в объемный интеграл. При малой амплитуде колебаний ξ точек граничной поверхности объем V, заключенный между поверхностями $S(r, t)$ и $\overline{S}$, может быть приближенно записан как $dV \approx \boldsymbol{\xi}\, d\boldsymbol{S}$; здесь при переходе считается, что $d\boldsymbol{S}$ от времени не зависит. При этом $dV/dt = \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{\xi}}$ — колебательная скорость поверхности тела. Воспользовавшись далее уравнением движения Эйлера и совершив несложные преобразо-

вания, получим, что с точностью до квадратичных членов сила

$$\boldsymbol{F} \approx -\oint\limits_{\overline{S}} p\,d\boldsymbol{S} - \oint\limits_{\overline{S}} \rho \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{w}\,d\boldsymbol{S}) - \frac{d}{dt}\int\limits_{V} \rho \boldsymbol{v}\,dV. \qquad (1.12)$$

Усреднение выражения (1.12) по времени не представляет теперь труда. Принимая во внимание, что среднее значение производной по времени от любой величины, принимающей конечные значения, равно нулю, получим после усреднения (1.12)

$$\overline{F_i} \approx -\oint\limits_{\overline{S}} (\overline{p}\delta_{ij} + \rho\,\overline{v_i w_j})\,dS_j. \qquad (1.13)$$

Заметим, что при отсутствии массообмена на поверхности тела нормальная скорость точек границы равняется нормальной скорости движения прилегающих частичек жидкости и $\boldsymbol{w}\,d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{S}$. В этом случае выражение (1.13) совпадает с традиционными формулами для радиационного давления, полученными с помощью усредненного тензора плотности потока импульса $\overline{T}_{ij} = \overline{p}\delta_{ij} + \rho\,\overline{v_i v_k}$, согласно (1.1). Отметим, что из вывода формулы (1.13) следует, что она верна лишь при малых амплитудах колебаний поверхности и справедлива с точностью до квадратичных членов.

Произведя все дальнейшие выкладки именно с точностью до квадратичных членов, найдем теперь среднее значение давления. Для этого выпишем уравнение Эйлера с точностью до величин второго порядка малости по полю и усредним его по времени. При этом, согласно замечанию о среднем значении производной по времени, член $\rho_0\,\overline{dv_i/dt}$ выпадает и полученное равенство допускает интегрирование. В результате получаем, что

$$p = p_0 + p_д + \overline{p_1^2}/2\rho_0 c_0 - \rho_0 \overline{v_1^2}/2, \qquad (1.14)$$

где p_0 — статическое давление в жидкости, а p_1 и v_1 — решения линейной задачи. Постоянная интегрирования $p_д$ находится, как обычно, из граничных условий. Ее наличие описывает поджатие среды, т. е. возникновение дополнительного статического давления за счет динамических факторов, о чем уже шла речь выше. Подставим выражение (1.14) в формулу (1.13) и, положив $w = v$, получим окончательное выражение для силы радиационного давления, одинаково справедливое как для бегущих, так и для стоячих волн:

$$\overline{F_i} = -\oint\limits_{\overline{S}} [\rho_0\,\overline{v_i v_j} + (p_д + \overline{p_1^2}/2\rho_0 c_0^2 - \rho_0\,\overline{v_1^2}/2)\,\delta_{ij}]\,dS_j. \qquad (1.15)$$

При записи выражения (1.15) учтено, что интегрирование статического давления p_0 по всей замкнутой поверхности $\overline{S}$ ввиду его постоянства дало нуль. Заметим, однако, что аналогичное интегрирование динамического поджатия $p_д$ по всей поверхности в общем случае дает результат, отличный от нуля. Это возможно лишь в случае разрывных решений, когда на разных участках поверхности константа $p_д$ принимает различные значения.

Рассмотрим в качестве примера несколько простых случаев. Пусть в трубе на расстоянии L от начала координат находится массивный неподвижный диск, радиус которого равен радиусу трубы R. Взяв граничные условия в виде $v(0)=v(L)=0$ и положив $R \gg \lambda$, запишем решение линейной задачи в виде нормальных волн: при $0 \leqslant x \leqslant L$

$$v' = v_0' \sin kx \cos \omega t, \quad p' = -v_0 c_0 \cos kx \sin \omega t; \tag{1.16}$$

при $x \geqslant L$

$$v' = 0, \quad p' = 0,$$

где $k=\omega/c_0=\pi n/L$. Радиационная сила, действующая на диск, в этом случае равна, согласно формуле (1.15),

$$\overline{F}_x = S[p_д + \overline{p'^2}(L)/2\rho_0 c_0^2]; \tag{1.17}$$

где $S=\pi R^2$ — площадь диска. Решение (1.16) линейной задачи оказывается здесь разрывным при $x=L$ и значения $p'(L)$ и $p_д$ берутся в формуле (1.17) с внутренней стороны диска, поскольку на его внешней стороне эти величины равны нулю. Постоянную интегрирования $p_д$ найдем из уравнения состояния вещества (адиабата Пуассона (1.1.11)), которое с точностью до членов второго порядка малости по полю можно записать в виде

$$\rho \approx \rho_0 + \frac{1}{c_0}(p - p_0) + \frac{1-\gamma}{2c_0^4}(p - p_0)^2. \tag{1.18}$$

Усредним это выражение по времени и проинтегрируем по x от 0 до L. При этом учтем, что ввиду постоянства массы вещества внутри трубы интеграл от плотности сохраняется и

$$\int_0^L \rho\, dx = \int_0^L \rho_0\, dx.$$

Подставив в полученное равенство среднее давление в форме (1.14), найдем искомое значение динамического поджатия; константа $p_д$ дается выражением

$$p_д = \frac{\gamma-1}{2c_0^2\rho_0}\frac{1}{L}\int_0^L \overline{p'^2(x)} = \frac{\gamma-1}{8}\rho_0 \overline{v_0'^2}. \tag{1.19}$$

Используя это значение константы, перепишем (1.17) в окончательном виде

$$\overline{F}_x = S(\varepsilon/4)\rho_0 \overline{v'^2}. \tag{1.20}$$

Эта формула для радиационной силы, действующей на неподвижный диск в трубе с постоянной массой газа, была получена впервые Рэлеем [5]. Как видно из вывода (1.20), решение линейной задачи оказалось здесь разрывным. Особенно существенным является то обстоятельство, что на противоположных сторонах диска поджатие $p_д$ принимало различные значения. Полный интеграл от $p_д$ по

замкнутой поверхности (по обоим сторонам диска) в этом случае оказался отличным от нуля. Подобные решения в аналогичных задачах, когда динамическое поджатие среды оказывается отличным от нуля и разным на противоположных сторонах тела, приводят к давлению звука, которое, как уже упоминалось, называется рэлеевским.

Однако в большинстве случаев линейное решение задачи оказывается непрерывным. Но даже в случае его разрыва дополнительное поджатие среды $p_д$ зачастую постоянно вдоль всей поверхности тела. В этом случае динамическое поджатие $p_д$ эквивалентно действию статического давления p_0 и не оказывает на тело никакого влияния. Интеграл от $p_д$ по замкнутой поверхности обращается в нуль и выражение (1.15) принимает вид

$$\overline{F_i} = -\rho_0 \oint_S \left[\overline{v_i v_j} - \frac{\overline{v'^2}}{2} \delta_{ij} - \frac{\overline{p'^2}}{2\rho_0 c_0^2} \delta_{ij} \right] dS_j. \qquad (1.21)$$

Давление звука, испытываемое телом в этом случае, как мы знаем, называется ланжевеновским.

Рассмотрим случай падения плоской волны $v_0' \exp[i(kx - \omega t)]$ на диск, поперечные размеры которого значительно больше длины звуковой волны. Если диск расположен в открытом пространстве, то из условия на бесконечности следует, что динамическое поджатие отсутствует, т. е. $p_д = 0$ и радиационное давление определяется формулой (1.21). Если звуковая волна полностью поглощается, то за телом в области тени $p' = v' = 0$, а перед ним $p'^2/2\rho_0 c_0^2 = \rho_0 v'^2/2$. В этом случае

$$\overline{F_x} = \rho_0 \overline{v_x'^2}(0) S = \overline{E} S, \qquad (1.22)$$

где $\overline{E} = \rho_0 \overline{v_x'^2}/2 + \overline{p'^2}/2\rho_0 c_0 = \rho_0 \overline{v'^2}(0)$ — плотность энергии. Если тело неподвижно, а волна полностью отражается, то $v' = 2v_0' \sin kx \cos \omega t$ и

$$\overline{F_x} = \overline{p'^2}(0) S/2\rho_0 c_0^2 = \rho_0 \overline{v'^2} S = 2\overline{E} S. \qquad (1.23)$$

В этом случае скорость имеет только одну компоненту v_x и выражение для силы (1.21) можно представить в более простом виде:

$$\overline{F_x} = S(\overline{E_1} - \overline{E_2}),$$

где $\overline{E_1}$ и $\overline{E_2}$ — плотности энергий на противоположных сторонах диска. Если диск имеет толщину a, его плотность ρ_1, а скорость звука в нем c_1, то

$$\overline{F_x} = 2S\overline{E}(1 + 4\beta^2/(1-\beta^2)^2 \sin^2 ka)^{-1}, \qquad (1.24)$$

где $\beta = \rho_0 c_0/\rho_1 c_1$. При $\beta \ll 1$ диск ведет себя как абсолютно отражающее тело, и $\overline{F_x} \approx 2S\overline{E}$. В случае, если диск поглощающий, то $\overline{E_2} = 0$ и $\overline{F_x} = S\overline{E}$, т. е. мы получаем те же формулы, с которыми имели дело ранее.

Таким образом, радиационное давление есть величина квадратичная относительно переменного звукового давления и его значе-

ние P невелико даже для относительно интенсивных акустических волн, поскольку обычно мало само значение звукового давления. Так, например, для интенсивности звука в воде 10^{-3} Вт/м^2 амплитуда звукового давления $p=5\cdot10^3$ Па, тогда как радиационное давление на полностью поглощающую стенку составляет всего $P=10^2$ Па. Тем не менее измерение радационного давления производится без особого труда и представляет собой метод абсолютного определения интенсивности звука (плотности потока энергии), если воспользоваться тем, что для плоской волны интенсивность I и средняя плотность энергии $\overline{E}$ связаны соотношением $I=\overline{E}c$. Эти измерения производятся при помощи устройств, называемых *радиометрами* (например, легкий отражающий звук диск, подвешенный на коромысле с радиусом, заметно большим длины звуковой волны). Имеется большое разнообразие в конструкции радиометров как для газа, так и для жидкости, и здесь мы не будем на этом останавливаться. В условиях эксперимента следует иметь в виду необходимость различного рода поправок; в особенности большое значение имеет учет влияния акустического течения в звуковом поле (§ 4), под действием которого радиометр может испытывать дополнительное отклонение.

Перейдем теперь к рассмотрению сил радиационного давления на препятствия. Рассмотрим сначала простой случай, когда плоское препятствие достаточно велико по сравнению с длиной звуковой волны и в свою очередь площадь сечения S пучка, падающего нормально на препятствие, достаточно велика и $S\gg\lambda^2$. В этом случае сила $\overline{F}_x$ для полностью поглощающего или полностью отражающего препятствия в направлении распространения волны определяется соответственно по (1.22) или (1.23) с учетом того, что $I=\overline{E}c$.

При падении пучка под углом θ к нормали к полностью поглощающему препятствию, согласно (1.1),

$$\overline{F}=S'\overline{E}\cos\theta, \tag{1.25}$$

где S' — проекция площади звукового пучка на препятствие. Разлагая эту силу на нормальную $\overline{F}_n=S'\overline{E}\cos^2\theta$ и тангенциальную $F_t=S'\overline{E}\cos\theta\sin\theta$ и пользуясь тем, что $S'=S/\cos\theta$, имеем $\overline{F}_n=S\overline{E}\cos\theta$, $\overline{F}_t=S\overline{E}\sin\theta$, откуда $\overline{F}_x=\sqrt{\overline{F}_n^2+\overline{F}_t^2}=S\overline{E}$, т. е. действующая сила в направлении распространения волны на полностью поглощающее препятствие не зависит от угла падения. Для случая идеального отражателя в направлении x действует радиационная сила $\overline{F}=2S\overline{E}\cos^2\theta$.

Интересно отметить, что при падении звукового пучка на границу раздела двух сред (например, несмешивающихся жидкостей с различными плотностями ρ_1, ρ_2 и скоростями звука c_1, c_2) и частичном отражении и преломлении (при $\rho_1c_1\approx\rho_2c_2$, но $c_1\neq c_2$) может возникнуть интересное явление, состоящее в том, что при нормальном падении из-за различия плотностей энергии ($c_1\neq c_2$), $\overline{F}_n=\overline{E}S(1-c_1/c_2)$ и возникает радиационная сила, направление которой

зависит от знака (c_2-c_1). При $c_2-c_1>0$ эта сила направлена к источнику звука! В таком же направлении происходит деформация поверхности. Это явление наблюдалось в [6]. Заметим также, что вспучивание поверхности жидкости под воздействием падающего из жидкости на эту поверхность ультразвукового пучка, а также образование ультразвукового фонтана также объясняются действием сил радиационного давления.

В такой простой постановке можно рассчитать радиационные силы, действующие на частично отражающую и частично поглощающую плоскопараллельную пластину, и определить рэлеевское давление в стоячей волне между двумя неподвижными стенками [5, 7].

Задача о нахождении $\overline{F}$ значительно усложняется, если препятствие имеет конечные размеры, хотя и большие λ, и следует учитывать дифракцию. Таким образом, радиационная сила будет зависеть от формы препятствия. Имеется ряд решенных задач для препятствий симметричной конфигурации — для жесткой и сжимаемой сферы, на которую падает плоская волна (случай идеальной жидкости), на диск и полоску. Эти вопросы достаточно подробно изложены в [2]; там же приведены ссылки на оригинальные работы.

§ 2. Радиационная сила давления звука на взвешенные сферические частицы

Остановимся на задаче о радиационном давлении в другом предельном случае, когда «взвешенные» в среде препятствия (частицы) малы по сравнению с длиной звуковой волны λ. Для простоты ограничимся рассмотрением препятствия в виде шара радиуса R_1, причем $R_1 \ll \lambda$. Решение такой задачи в определенной степени проясняет физический механизм поведения пузырьков в звуковом поле, а также явление левитации (см. ниже). Этому решению посвящено много работ, однако нельзя сказать, что здесь все выяснено даже в простейшем случае отсутствия в среде вязкости.

Будем в решении этой задачи следовать формализму, развитому в [8]. Пусть в сжимаемой идеальной жидкости радиально и поступательно колеблется сжимаемый шар радиуса R_1. Сила, действующая на него, может быть записана в виде

$$\boldsymbol{F} \approx -\int\limits_{S_1(t)} p\, d\boldsymbol{s} = \rho \int\limits_{S_1(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2\right] d\boldsymbol{s}. \qquad (2.1)$$

Здесь интегрирование производится по движущейся поверхности $S_1(t)$, а изменение давления p дается обобщенным интегралом Бернулли. Стенка пузырька испытывает как радиальное, так и осциллирующее движение со скоростью $\boldsymbol{v}$; она связана с потенциалом φ выражением $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$. Сжимаемость жидкости учтена в квадратичном приближении по амплитуде падающего поля; здесь ρ — плотность, c — скорость звука в жидкости.

Для того чтобы найти радиационное давление на шар, следует, как мы знаем, усреднить $\boldsymbol{F}$ за период звукового поля. Поскольку

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S_1(t)}\varphi\, d\boldsymbol{s}=\int\limits_{S_1(t)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\boldsymbol{s}+\int\limits_{S_1(t)}\nabla\varphi\,(\nabla\varphi\boldsymbol{n})\,ds, \tag{2.2}$$

а среднее по времени значение полной производной от величины, которая во времени ограничена, равно нулю, получим, согласно (2.1) и (2.2),

$$\overline{\boldsymbol{F}}\approx\rho\int\limits_{S_0}\overline{(d\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{v})\,\nabla\varphi}+\rho\int\limits_{S_0}\left[\overline{\frac{v^2}{2}-\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}\right]ds, \tag{2.3}$$

где интегрирование теперь уже ведется по неподвижной поверхности S_0 (значение $S(t)$ в положении равновесия); это возможно сделать, поскольку мы ограничиваемся лишь квадратичным приближением. Вычисление $\overline{\boldsymbol{F}}$ для плоской гармонической волны было проведено в [8]. Здесь мы наметим путь решения (полученного В. Н. Алексеевым [9]) для произвольной формы падающей волны, не обязательно плоской или стоячей, т. е. при произвольном виде потенциала падающего поля $\varphi_i(\boldsymbol{r})$. При переходе к частному случаю плоской волны при этом получаются известные результаты для радиационной силы давления, приведенные в [8, 10]. Когда же вблизи шара имеется граница или другой шар, более общее рассмотрение задачи приводит, как мы увидим, к появлению добавочного члена к силе радиационного давления, который определяет взаимодействие двух шаров или шара с границей. Оказывается, что гидродинамические силы взаимодействия между колеблющимися в жидкости частицами, находящимися в звуковом поле, есть не что иное, как силы радиационного давления, возникающие из-за рассеяния звука, т. е. результат интерференции падающего на шар звукового поля и поля рассеяния от другого шара.

Для вычисления $\overline{\boldsymbol{F}}$ следует воспользоваться решением дифракционной задачи о рассеянии звуковой волны произвольной формы на малом шаре.

Потенциал падающего поля $\varphi_i(\boldsymbol{r})$ в общем виде можно представить разложением в ряд Тэйлора в окрестности шара с центром в точке $\boldsymbol{r}_1$ [11]

$$\varphi_i(\boldsymbol{r})\approx\varphi_i(\boldsymbol{r}_1)+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)_\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)_{\boldsymbol{r}_1}+ \\ +\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)_\alpha(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)_\beta\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)_{\boldsymbol{r}_1}. \tag{2.4}$$

Как обычно, α, β пробегают значения 1, 2, 3, и по дважды повторяющимся индексам производится суммирование. В (2.4) предполагается, что множитель $\exp(i\omega t)$ опущен и что φ удовлетворяет волновому уравнению $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$.

Полагая $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{\rho}_1=|\boldsymbol{\rho}_1|\boldsymbol{n}$, т. е. вводя относительную координату $\boldsymbol{\rho}_1$, после проведения необходимых преобразований можно записать

(2.4) в таком виде:

$$\varphi_i(\boldsymbol{r}) \approx 1 - \frac{k^2\rho_1}{6}\varphi_i(\boldsymbol{r}_1) + \\ + \rho_1 n_{1\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\alpha}\right)_{r_1} + \frac{\rho_1^2}{3}\frac{3n_{1\alpha}n_{1\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)_{r_1}. \quad (2.5)$$

Это представление потенциала есть не что иное, как разложение φ по мультиполям (первый член представляет собой монополь, второй — диполь и третий — квадруполь), записанное в общем виде в случае произвольной симметрии падающего поля. При $R_1 \ll \lambda$ можно ограничиться только этими тремя членами.

В области вне шара возникает еще рассеянное поле с потенциалом $\varphi_S(\boldsymbol{r})$ так, что при $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| \geqslant R_1$ полное значение потенциала $\varphi(\boldsymbol{r})$ будет: $\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_i(\boldsymbol{r}) + \varphi_S(\boldsymbol{r})$.

Потенциал рассеянного поля $\varphi_S(\boldsymbol{r})$ можно представить аналогично (2.5) в виде

$$\varphi_S(\boldsymbol{r}) \approx Ah_0(k\rho_1) + A_\alpha n_\alpha h_1(k\rho_1) + \frac{1}{3}A_{\alpha\beta}\frac{3n_{1\alpha}n_{1\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{2}h_2(k\rho_1), \quad (2.6)$$

где $h_n(z) = (-z)^n(z^{-1}\partial/\partial z)^n \exp(iz)/z$, $k\rho_1 = z$ — сферические функции Ханкеля.

Внутри шара при $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| \ll R_1$ потенциал φ запишется при $|\boldsymbol{\rho}_1| \leqslant R_1(t)$ аналогично (2.5)

$$\varphi_{\text{ш}}(\boldsymbol{r}) \approx \left(1 - \frac{k_{\text{ш}}^2}{6}\rho_1\right)B + \rho_1 n_{1\alpha}B_\alpha + \frac{\rho_1^2}{3}\left(\frac{3n_{1\alpha}n_{1\beta} - \delta_{\alpha\beta}}{2}\right)B_{\alpha\beta}, \quad (2.7)$$

где $k_{\text{ш}}$ — волновое число для шара (здесь и в дальнейшем индекс «ш» относится к шару).

Неизвестные постоянные A, A_α, $A_{\alpha\beta}$, B, B_α, $B_{\alpha\beta}$ определяются из граничных условий, соответствующих равенству нормальных скоростей $v_r = \partial\varphi/\partial r$ и давлений внутри и вне шара при $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| = R_1$:

$$\partial\varphi/\partial r = \partial\varphi_{\text{ш}}/\partial r, \quad \rho\,\partial\varphi/\partial t = \rho_{\text{ш}}\,\partial\varphi_{\text{ш}}/\partial t, \quad (2.8)$$

где $\varphi = \varphi_i + \varphi_S$, а ρ и $\rho_{\text{ш}}$ — плотности жидкости и шара.

Не приводя вычислений шести коэффициентов A и B, отметим, что коэффициенты B и B_α имеют простой физический смысл. На границе шара $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1(t)| = R_1(t)$ — нормальная скорость частиц сферы равна проекции на нормаль скорости перемещения самой границы и

$$\partial\varphi/\partial r = \dot{R}_1 + \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{\rho}_1, \quad (2.9)$$

где $\boldsymbol{w}_1$ — вектор скорости поступательного движения шара. Из (2.9) следует, что B_α есть компонента вектора $\boldsymbol{w}_{1\alpha} = \dot{\boldsymbol{r}}_{1\alpha}(t)$ скорости поступательного перемещения шара как целого. Коэффициенты B и B_α определяются выражениями

$$\dot{R}_1 = -{}^1/_3\,k_{\text{ш}}^2 R_1 B, \quad B_\alpha = \boldsymbol{w}_\alpha, \quad (2.10)$$

т. е. B имеет смысл величины, пропорциональной скорости радиального движения шара. Постоянные B, B_α, $B_{\alpha\beta}$ определяются

выражениями

$$B=\varphi_i(r_1)\frac{1+(ikR_1)^3/3}{\rho_ш/\rho+(ikR_1)^2(1+ikR_1)^3/3},$$

$$B_\alpha=\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\alpha}\right)_r\frac{3\rho}{\rho+2\rho_ш}\left[1+\frac{(ikR_1)^3}{3}\frac{\rho-\rho_ш}{\rho+2\rho_ш}\right], \qquad (2.11)$$

$$B_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right)_r\frac{5\rho}{2\rho+3\rho_ш}\left[1+\frac{2ikR_1}{45}\frac{\rho_ш-\rho}{3\rho_ш+2\rho}\right].$$

Для нахождения $\overline{F}_\alpha$ выражение (2.3) полезно записать в таком общем виде:

$$\overline{F}_\alpha=\rho\int\limits_{S_0}\left[-n_\beta\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}}+\frac{n_\alpha}{2}\overline{\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}}-\frac{n_\alpha}{2\rho c^2}\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}\right]ds. \qquad (2.12)$$

Используя граничные условия (2.8), определив значения B, B_α, $B_{\alpha\beta}$ и переходя к потенциалу внутреннего поля $\varphi_ш$, получим, используя (2.7) и производя интегрирование, окончательное выражение для силы радиационного давления звука на малый шар:

$$\overline{F}_\alpha=\frac{2}{9}\pi R_1\rho\left[k_ш^2\left(1+2\frac{\rho_ш}{\rho}-3\frac{\rho_ш^2c_ш^2}{\rho^2c^2}\right)\mathrm{Re}\,(BB_\alpha^*)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\left(3\frac{\rho_ш}{\rho}+2\right)\left(\frac{\rho_ш}{\rho}-1\right)\mathrm{Re}\,(3B_\gamma B_{\alpha\gamma}^*-B_\alpha B_{\gamma\gamma}^*)\right], \qquad (2.13)$$

где Re означает взятие действительной части соответствующих выражений с учетом формулы $\overline{BB}_\alpha=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(BB_\alpha^*)$; $\rho_ш$, $c_ш$ — соответственно плотность и скорость звука в материале шара, а коэффициенты B, B_α, $B_{\alpha\gamma}$ выражаются через потенциал падающего поля φ_i и его производные.

Первый член в (2.13) при $c_ш/c\approx0$ (пузырек в жидкости, когда сжимаемость шара велика) имеет наибольшее значение и, приняв во внимание выражения для B, B_α, $B_{\alpha\beta}$ (2.11) и (2.1), после ряда преобразований получаем для радиационной силы:

$$\overline{F}_\alpha=-\tfrac{4}{3}\overline{\pi R_1^3(\nabla p)_{r_1}}=-\overline{V\nabla p}. \qquad (2.14)$$

При $\rho_ш\gg\rho$ (твердый шар), главный вклад в $\overline{F}_\alpha$ дает второй член, тогда как первый член представляет собой поправку на сжимаемость шара.

Если на шар падает гармоническая плоская волна, то оказывается, что для радиационной силы давления из (2.13) получаются известные выражения, найденные в [8]. Так, для поля плоской бегущей волны, падающей на шар, имеющий плотность того же порядка величины, что и жидкость, т. е. $\rho_ш/\rho\approx1$, в направлении волнового вектора действует сила

$$\overline{F}=(2\pi(kR_1)^6\,2\overline{E}/\rho k^2)\,\rho\Phi(\Lambda,\ \sigma), \qquad (2.15)$$

где $\Lambda=\rho_ш/\rho$, $\sigma=c_ш/c$ и

$$\Phi(\Lambda,\ \sigma)=\frac{1}{(1+2\Lambda)^2}\left\{\left(\Lambda-\frac{1+2\Lambda}{3\Lambda\sigma^2}\right)^2+\frac{2}{9}(\Lambda-1)^2\right\}. \qquad (2.16)$$

Формула (2.15) при $\sigma=\infty$ представляет собой известную *формулу Кинга* [12] для радиационной силы, действующей в направлении распространения плоской гармонической волны на жесткую сферу.

При $\rho_ш/\rho \sim (k_ш R_1)^2 \ll 1$, что соответствует случаю пузырька, находящегося в жидкости,

$$\overline{F} = \frac{2\pi\, 2\overline{E}\,(kR_1)^2}{\rho k^2 (kR_1)^2 + [1-(\omega_0/\omega)^2]}, \qquad (2.17)$$

где $\omega_0 = \sqrt{3\Lambda c_ш / R_1^2}$ — резонансная частота пузырька.

Сила $\overline{F}$ достигает наибольших значений в поле стоячих волн. Полагая $\varphi_i(\boldsymbol{r}) = \varphi_n \cos \boldsymbol{kr} \cos \omega t$ и используя (2.11), получим для твердых шаров

$$\overline{F} = 4\pi \overline{E} k R_1^3 \sin 2\boldsymbol{kr}_0 \left(\frac{\rho_ш + (2/3)(\rho_ш - \rho)}{\rho + 2\rho_ш} - \frac{\rho c^2}{3\rho_ш c_ш} \right) \qquad (2.18)$$

и для пузырьков

$$\overline{F} = 4\pi \overline{E} (R_1/k) \sin 2\boldsymbol{kr}_0 (1 - \omega_0^2/\omega^2) [(1-\omega_0^2/\omega^2)^2 + k^2 a^2]^{-1}, \qquad (2.19)$$

где $\overline{E} = \rho k^2 (\varphi_m)^2/4$ — плотность энергии стоячих волн. Следует еще раз подчеркнуть, что в случае стоячих волн $\overline{F} \sim (kR_1)^3$, тогда как в поле бегущих волн $\overline{F} \sim (kR_1)^6$. Поскольку $kR_1 \ll 1$, то $\overline{F}$ значительно больше для стоячих волн.

То обстоятельство, что в поле стоячих волн имеет место удвоенная пространственная периодичность, приводит к двум возможным положениям равновесия — узлам и пучностям в стоячей волне. Анализ показывает, что если $\rho_ш > \rho$, то частицы собираются в пучностях скорости, а если $\rho_ш < \rho$ — в узлах скорости, что экспериментально подтверждается.

Случай воздействия звука на твердые малые частицы в воздухе, кроме значения для задачи о коагуляции аэрозолей, имеет интерес для задач, связанных с возможностью удерживать непроводящие немагнитные тела небольших размеров во взвешенном состоянии в поле силы тяжести (и тем более в состоянии невесомости) при помощи сил радиационного давления в стоячих волнах.

Под действием силы радиационного давления малые частицы массы m приходят в движение и собираются в узлах звукового давления в стоячей волне. Они могут находиться там в подвешенном состоянии, если эта сила достаточна для того, чтобы уравновесить силу тяжести mg. Такое «подвешивание» частиц в звуковом поле и фиксация их в определенных зонах называется *акустической левитацией*. Например, в поле стоячей волны при частоте $f=20$ кГц и интенсивности звука 10^{-4} Вт/м^2 в условиях земной гравитации может левитировать сфера с радиусом 0,4 см и массой ≈ 2 г.

Это явление используется при создании *акустических левитаторов* — устройств, предназначенных для установки и фиксации в определенных положениях жидких и твердых образцов заданной формы.

Акустическая левитация находит применение, например, в таких процессах, как бестигельная варка стекла, выращивание кристаллов, литье из различных компонент. Особенно полезной она может оказаться в космической технологии, в условиях невесомости.

Любой левитатор имеет, как правило, источник звука (один или несколько) и рефлектор, помещенные в экспериментальную камеру, в которой могут также размещаться нагревательные элементы, тепловые экраны, устройства ввода и вывода образца и другие конструктивные элементы.

В левитаторе формируется звуковое поле, которое должно обеспечивать устойчивое удержание образцов при изменении внешних условий (например, температуры).

Как показывают эксперименты, акустическое поле в левитаторе — это всегда комбинация ближнего поля излучателя и поля стоячих волн, что ведет к образованию в объеме камеры строго ограниченных областей, так называемых энергетических «ям», в которых происходит устойчивая фиксация образцов с размерами, меньшими $\lambda/2$. На рис. 5.1 схематически показано распределение звукового давления и положение взвешенных частиц в так называемом одноосевом левитаторе [13], состоящем из поршневого излучателя радиусом ρ в две длины волны в воздухе и с плоским рефлектором, помещенным на расстоянии $n\lambda/2$. Плоскости минимальной потенциальной энергии, в которых фиксируются образцы, почти совпадают с плоскостями минимального звукового давления, нормальными к оси излучателя. В горизонтальной плоскости зоны устойчивой левитации также совпадают с областями минимального давления, которые образуют аксиально симметричные кольцевые зоны вокруг оси; имеются более сложные конструкции.

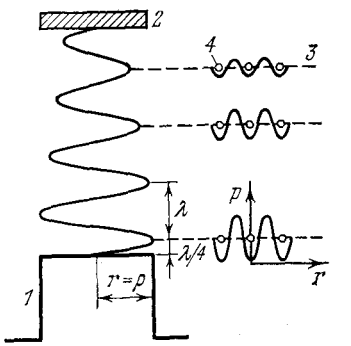


Рис. 5.1. Распределение звукового давления и положение взвешенных частиц в одноосевом левитаторе; *1* — поршневой источник звука, *2* — отражатель, *3* — плоскости минимального давления, *4*—взвешенные частицы.

Глубина и пространственное распределение потенциальных ям в левитаторе зависят от многих факторов, в том числе от поглощения звука в объеме камеры, от настройки системы излучатель — рефлектор на резонанс, которая может меняться при изменении температуры в камере, от наличия отражений от стенок и элементов конструкции.

Возможны и другие способы формирования звуковых полей с глубокими и стабильными энергетическими ямами, например при использовании фокусирующих излучателей и отражателей. Такие левитаторы выгодны с энергетической точки зрения, так как они дают возможность концентрировать акустическую энергию в определенных зонах.

§ 3. Взаимодействие двух сферических частиц в звуковом поле

Общая формула для силы радиационного давления звука на малый шар (2.13) позволяет рассмотреть более трудную и интересную задачу о взаимодействии двух сферических частиц в звуковом поле. Общий путь решения этой задачи таков. Положим, что исходный шар радиуса R_1 имеет координату $\boldsymbol{r}_1$, а на расстоянии $L=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$ от этого шара имеется другой шар с радиусом R_2.

В рассматриваемом случае падающее поле $\varphi_i(\boldsymbol{r})$ в окрестности первого шара можно представить как суперпозицию исходного поля $\varphi_i^{(0)}(\boldsymbol{r})$ без учета второго шара и поля, рассеянного от второго шара: $\varphi_i=\varphi_i^{(0)}+\varphi_S(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)$.

Рассеянное поле от второго шара состоит из суммы сферических волн, образованных в результате рассеяния на втором шаре как исходной волны $\varphi_i^{(0)}$, так и многократно перерассеянных волн на первом шаре. Ограничиваясь однократным рассеянием, можно записать $\varphi_S(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)$ аналогично (2.6), т. е.

$$\varphi_i^{(1)}(\boldsymbol{r})=\varphi_S(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)=Ah_0(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|)+$$
$$+A_\alpha n_\alpha h_1(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|)+\frac{A_{\alpha\beta}}{3}\left(\frac{3n_\alpha n_\beta-\delta_{\alpha\beta}}{2}\right)h_2(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|). \quad (3.1)$$

Коэффициенты A, A_α, $A_{\alpha\beta}$ определяются из граничных условий для $\varphi_i(0)$, взятых на поверхности шара с центром в точке $\boldsymbol{r}_2$. Далее, разложив этот потенциал в ряд Тэйлора в окрестности первого шара в точке $\boldsymbol{r}_1$, можно найти (через производные от $\varphi_i^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)$) значения коэффициентов B, B_α, $B_{\alpha\beta}$. Эти коэффициенты в приближении однократного рассеяния выразятся в виде

$$B=B^{(0)}+B^{(1)}, \quad B_\alpha=B_\alpha^{(0)}+B_\alpha^{(1)}, \quad B_{\alpha\beta}=B_{\alpha\beta}^{(0)}+B_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad (3.2)$$

где $B^{(0)}\approx\varphi_i^{(0)}(\boldsymbol{r}_1)$, $B^{(1)}\approx\varphi_i^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)$. Здесь индексы (0) означают величины коэффициентов, соответствующих падающему полю, а индексы (1) — рассеянному полю. Эти значения коэффициентов далее следует подставить в (2.13). Сила $\overline{F_\alpha}$ представится в виде двух составляющих. Первая, в которую будут входить произведения вида $B^{(0)}B_\alpha^{(0)}$, $B_\beta^{(0)}B_{\alpha\beta}^{(0)}$, представляет собой рассмотренное выше радиационное давление невозмущенного звука, падающего на частицу. Вторая же составляющая, которая определяется произведением коэффициентов $B^{(0)}B_\alpha^{(1)}$, $B^{(1)}B_\alpha^{(0)}$, есть не что иное, как сила взаимодействия между двумя частицами $\boldsymbol{F}_{\text{вз}}$.

Эта сила имеет довольно сложный вид, но ее выражение упрощается для случая, когда $R_1\ll L\ll\lambda$. Результат расчета показывает, что для случая двух пузырьков в жидкости, когда можно считать $\rho_{\text{ш}}/\rho\to 0$ и $c_{\text{ш}}/c\to 0$ в квадратичном приближении получается следующий результат:

$$F_{\text{вз}}=(2/9)\,\pi R_1^3\rho k_{\text{ш}}^2\,\mathrm{Re}\,(B^{(0)}B_\alpha^{(1)}). \quad (3.3)$$

Вычисляя коэффициенты $B^{(0)}$ и $B_\alpha^{(1)}$, $A^{(0)}(\boldsymbol{r}_2)$, а также отбрасывая члены, имеющие порядок величины L/λ и R_1/λ, найдем, что между

двумя пузырьками действует сила притяжения

$$\boldsymbol{F}_{\text{вз}} = 4\pi\,(R_1^2 R_2^2/L^2)\,\dot{R}_1\dot{R}_2\boldsymbol{p}, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)/|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$ — единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей центры двух пузырьков,

$$\dot{R}_{1,\,2} = (\varphi_i^{(0)}/R_{1,\,2})\,[-(\omega_0^2/\omega^2)+1+ikR_{1,\,2}]^{-1}. \tag{3.5}$$

Мы получили известный аналог (аналог в том смысле, что эта сила (3.4) написана для колеблющихся частиц в звуковом поле) формулы для *силы Бьеркнеса* [14, 15], которая представляет собой радиационную силу, испытываемую пузырьком за счет рассеяния волны от другого пузырька. Из формулы (3.3) следует, что $F_{\text{вз}}$ есть результат интерференции падающей волны с рассеянной волной $\varphi_S(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$.

В случае твердой частицы большее значение имеет второй член в (2.12) и при $R_1 \ll L \ll \lambda$

$$F_{\text{вз}\,\alpha} \approx (2/15)\,\pi R_1^3\,(3\rho_{\text{ш}}-2\rho)\,(\rho_{\text{ш}}/\rho-1)\,\operatorname{Re}(B_{\nu}^{(0)}B_{\alpha\nu}^{*(1)}), \tag{3.6}$$

причем члены, имеющие порядок L/λ, R_1/λ, отброшены.

Вычисления, которые мы здесь не приводим, дают такую формулу для $\boldsymbol{F}_{\text{вз}}$:

$$\boldsymbol{F}_{\text{вз}} = (R_1^3R_2^3/L^4)\cdot 3\pi\,[\boldsymbol{p}\,\overline{\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{W}_2}+\overline{\boldsymbol{W}_1(\boldsymbol{p}\boldsymbol{W}_2)}+ \\ +\overline{\boldsymbol{W}_2(\boldsymbol{p}\boldsymbol{W}_1)}-\overline{5\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{p}\boldsymbol{W}_1)\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{W}_2}]. \tag{3.7}$$

Здесь введена относительная скорость $\boldsymbol{W}_{1,2}=\boldsymbol{w}_{1,2}-\boldsymbol{u}=(2/3)\,(1-\rho_{\text{ш}}/\rho)\boldsymbol{w}_{1,2}$, где $w_{1,2;\,\gamma}=B_{1,2;\,\gamma}^{(0)}$, $\boldsymbol{u}=\nabla\varphi_i^{(0)}$ — колебательная скорость в точке нахождения частицы.

Если шары твердые ($\rho_{\text{ш}}\gg\rho$) и находятся в воздухе, то скорость поступательного движения таких шаров можно положить равной нулю $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2\to 0$ и $\boldsymbol{W}_{1,2}=-\boldsymbol{u}$. Формула (3.7) переходит в известную *формулу Кёнига* [16] для силы взаимодействия двух неподвижных шаров в гидродинамическом потоке несжимаемой жидкости, движущейся с постоянной (или колебательной) скоростью $\boldsymbol{u}$:

$$F_{\text{вз}} = (3/2)\,\pi\rho\,(R_1^3R_2^3/L^4)\,u^2\,(1+3\cos\alpha), \tag{3.8}$$

где угол α образован направлением скоростей осциллирующих шаров с линией, соединяющей центры шаров.

Из (3.7) следует, что $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{вз}}$ имеет тензорный характер; кроме сил, действующих вдоль линии, соединяющей центры частиц, имеется поперечная сила, которая разворачивает частицы друг относительно друга. Имеются зоны притяжения и зоны отталкивания при определенных конусах взаимодействия. Если линия, соединяющая центры шаров, направлена вдоль распространения звуковой волны, они отталкиваются друг от друга, если же перпендикулярно,— имеет место притяжение.

На рис. 5.2 построен конус взаимодействия с центром в точке нахождения первого шара и осью x, ориентированной вдоль на-

правления падающего поля. Образующая поверхности конуса пересекает ось x под углом α_0, величина которого определяется из условия $3\cos^2\alpha_0=1$.

Частицы внутри конуса взаимодействия при $\alpha<\alpha_0$ отталкиваются от первого шара, а частицы вне этого конуса притягиваются к нему. Поперечная сила, как это следует из (3.8), стремится вывести частицы из области отталкивания в область притяжения (телесный угол отталкивания оказывается примерно в 1,3 раза больше области притяжения). На рис. 5.2 стрелками показаны направления сил взаимодействия. Как уже говорилось, формула (2.13) была получена в предположении $R_1\ll L\ll\lambda$. Если расстояние между частицами L становится сравнимым с λ, то следует учитывать, что частицы могут совершать колебания в противофазе, да и вообще сама задача о нахождении радиационной силы взаимодействия становится сложнее.

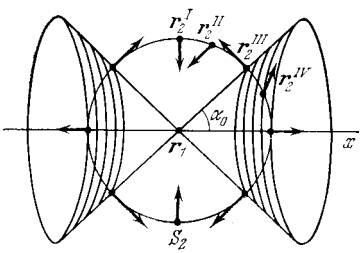


Рис. 5.2. Конус взаимодействия и направления сил, действующих на частицы, находящиеся на сфере S_2 при различных положениях частиц (r_2^{I-IV}) по отношению к исходному шару.

При малых расстояниях между частицами в реальной жидкости начинает играть роль вязкий пограничный слой вокруг частиц; в проведенном рассмотрении вязкость вообще не учитывалась.

Когда R_1 или L меньше длины вязкой волны $\lambda_в=\sqrt{2\nu/\omega}$, вязкость играет существенную роль и формула (2.12) уже неприменима. При $R_1\ll\lambda_в$ радиационная сила может возрасти на несколько порядков [17], поскольку вязкий слой увеличивает эффективный радиус частиц, а в знаменателях (3.4) и (3.8) и расстояние между частицами L присутствует соответственно во второй и в четвертой степенях.

Для случая когда $L<\lambda_в$ и вязкие слои частиц перекрываются, в [18] подсчитана сила взаимодействия частиц в режиме вязкого обтекания. Результат расчета не совпадает с выводами, получающимися из (2.13); впрочем, такого совпадения и не следовало ожидать, так как исходные предположения при выводе (2.13) были иные (в частности, отсутствовала вязкость). Из этих расчетов следует, что когда ось узкого конуса взаимодействия совпадает с направлением падающего поля, имеет место притяжение частиц, тогда как из (2.13) следует, что должно быть отталкивание. Если вязкие слои частиц не перекрываются, но $R_1\ll\lambda_в$, силы взаимодействия сильно увеличиваются [18], хотя закон их иной.

Как видно из проведенного рассмотрения, гидродинамические силы взаимодействия есть проявление сил радиационного давления рассеянного звука. В ряде обзоров для пояснения возникающих в звуковом поле сил взаимодействия вводят силы Бернулли. Как видно, для этого нет достаточных оснований.

В решении задач по радиационному давлению на малые частицы при интенсивных звуковых волнах, когда форма волны близка к пилообразной, следует, естественно, учитывать нелинейные эффекты. Такие задачи, насколько нам известно, пока еще не рассматривались.

§ 4. Акустические течения

В свободном неоднородном звуковом поле в отсутствие препятствий и границ радиационные силы вызывают движение газа и жидкости. Импульс волны, передаваемый за счет поглощения звука в среде, идет на образование течения. В начальной стадии после включения звука происходит ускорение среды, приводящее к установлению стационарного движения газа или жидкости. Это движение называют *акустическим течением* или акустическим ветром. На рис 5.3 показан характер акустического течения на частотах ультразвукового диапазона (несколько МГц). Такое течение принято называть *эккартовским*, поскольку его теория была развита Эккартом [20]. Как видно из рисунка, излучающая пьезоэлектрическая пластинка занимает только часть поверхности кюветы, заполненной жидкостью. При включении звука жидкость в сосуде начинает приходить в движение. Его нетрудно наблюдать, если поместить в жидкость немного алюминиевого порошка и сбоку осветить жидкость через прозрачную стенку кюветы. По прошествии некоторого времени движение жидкости устанавливается и имеет вид течения с противотоком. Такое акустическое течение было бы невозможно, если бы пьезопластинка закрывала всю левую поверхность кюветы (или трубы), так как тогда не было бы противотока жидкости и не выполнялся бы закон сохранения массы. Однако, вообще говоря, в случае неоднородного распределения амплитуды по фронту волны незначительное акустическое течение в принципе возможно, а вблизи стенок, в пограничном слое, оно возникает и в случае однородного по фронту звукового поля (см. ниже). Из рис. 5.3 следует, что масштаб вихрей эккартовского течения порядка объема кюветы и он существенно больше длины звуковой волны λ; радиус ультразвукового пучка также значительно больше λ.

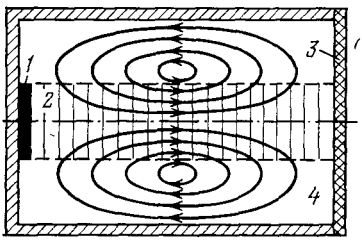


Рис. 5.3. Эккартовское течение в трубе: *1* — излучатель, *2* — ультразвуковой пучок, *3* — звукопоглотитель, *4* — жидкость.

Имеются другие типы акустических течений, связанных с наличием границ и препятствий. В сущности они были известны значительно раньше эккартовского течения, когда ультразвуковые волны еще не были получены. Впервые Фарадей еще в 1831 г. наблюдал стационарные вихревые потоки воздуха над колеблющейся мембраной. К течениям около препятствий обычно относят два вида акустических течений. Одно из них связано с именем Рэлея, создателя его теории *(рэлеевское течение)* [21]. Это течение возникает вне

пограничного слоя между двумя стенками; его масштаб больше размера вихрей в пограничном слое, а сами вихри имеют масштаб порядка λ.

Третий вид акустического течения, имеющий большое значение в задачах интенсификации процессов массо- и теплообмена, это *акустические потоки в тонком акустическом пограничном слое*, толщина которого порядка длины вязкой волны $\lambda_в \approx (2\eta/\omega\rho)^{1/2}$. Это течение проявляется в большей степени в звуковом диапазоне, так как на ультразвуковых частотах $\lambda_в$ очень мало. Масштабы вихрей в акустическом пограничном слое меньше λ, так что такое течение имеет малые масштабы. Теория таких мелкомасштабных течений в пограничном слое впервые была разработана Шлихтингом [22, 23]; их часто называют *шлихтинговскими*. Отметим, что скорость всех этих трех типов акустических течений даже при сравнительно большой интенсивности звука обычно мала по сравнению с колебательной скоростью в звуковой волне. Однако в небольшом числе экспериментов по возбуждению эккартовского течения очень интенсивным звуком эти скорости были сравнимы по величине. Подробные сведения о всех трех видах акустических течений имеются в обстоятельных обзорах [24, 25].

Здесь мы кратко остановимся лишь на эккартовском течении, являющемся наиболее характерным, и найдем из простых соображений скорость потока на оси ультразвукового пучка в направлении распространения звука (координата x); более строгий подход описан в [24, 25].

Для нахождения приближенного значения скорости стационарного течения U_0 на оси звукового пучка в трубе радиуса $r \gg \lambda$, конец которой закрыт полностью поглощающей стенкой, поступим следующим образом. Если звуковой пучок однороден по сечению, то, полагая, что на его границах скорость потока равна нулю, можно воспользоваться формулой Пуазейля для скорости жидкости на оси трубы:

$$U_0 = \Delta P R^2/4\eta x. \tag{4.1}$$

Здесь R — радиус пучка, ΔP — разность статических давлений в двух сечениях, находящихся друг от друга на расстоянии x. Так как при малых скоростях течения жидкость можно считать несжимаемой, то разность давлений ΔP на участке Δx представляет собой изменение радиационного давления пучка вследствие поглощения звука. Поэтому, если учесть поглощение звука по амплитуде α, то получим

$$\Delta P = \overline{E}(0) - \overline{E}(x) = \overline{E}(0)\,[1 - \exp(-2\alpha x)], \tag{4.2}$$

где $\overline{E}(x)$ — средняя по времени плотность энергии волны (см. § 1). Считая, что для маловязких жидкостей при малых x в большинстве случаев $\alpha x \ll 1$, найдем $\Delta P \approx 2\overline{E}(0)\alpha x$ и из (4.1) получим окончательно

$$U_0 = \overline{E}(0)\,\alpha R^2/2\eta = I_0 R^2 \alpha/2\eta c, \tag{4.3}$$

где I_0 — интенсивность звука в начальном сечении пучка при $x=0$.

Из этого выражения следует, что скорость течения на оси пучка пропорциональна начальной интенсивности звука и коэффициенту поглощения α. Скорость U_0 не меняется с расстоянием x; течение одномерно, поскольку рассматривается область, где $\alpha x \ll 1$.

Формулу для скорости акустического течения на оси звукового пучка, если вспомнить основные соотношения для плоской акустической волны $v=p/\rho c$ и $I=P^2/2\rho c$, а также выражение для коэффициента поглощения $\alpha=b\omega^2/2\rho c^3$, где $b=4\eta/3+\eta'$, можно записать в виде (не учитывая влияния теплопроводности)

$$U_0 = \frac{I_0 R^2 \omega^2}{4\rho_0 c^4 \eta} b = \frac{I_0 R^2 \omega^2}{4\rho_0 c^4 \eta} \left(\frac{4}{3} \eta + \eta' \right). \qquad (4.4)$$

Как видно из этого выражения, измеряя U_0, в принципе возможно определить α и отношение сдвиговой вязкости к объемной, хотя этот метод не отличается большой точностью. При таких измерениях необходимо учитывать влияние всех имеющихся для звука потерь, в том числе возможное рассеяние звука на неоднородностях среды. Измерения нужно проводить, принимая во внимание дифракционное расхождение пучка и не используя слишком больших амплитуд звукового поля, чтобы нелинейные явления не играли заметной роли.

Если исследуются акустические течения в такой жидкости, как, например, вода, для которой $\alpha=25\cdot10^{-15}$ м$^{-1}$, $\eta=10^{-3}$ кг/(м·с), $c=1{,}5\cdot10^3$ м/с, то на частоте 1 МГц при интенсивности 10^{-4} Вт/м^2 $U_0 \approx 10^{-2}$ м/с, тогда как колебательная скорость в волне при этом составляет $\approx 10^{-1}$ м/с. При больших значениях I_0, ω, α и R скорость акустического течения увеличивается, начинают играть роль нелинейные эффекты, связанные с нелинейностью уравнений гидродинамики, и теория существенно усложняется.

Экспериментальное исследование всех видов акустических течений производилось различными методами, один из которых состоит в наблюдении движения визуализирующих частиц (алюминиевый порошок, другие взвешенные частицы в жидкости, частицы дыма в воздухе и т. д.) при специально выбранном способе освещения. Красивый метод наблюдения линий тока в акустическом течении удается применить на границе двух несмешивающихся жидкостей [26].

Глава 6

АКУСТИЧЕСКАЯ КАВИТАЦИЯ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В СРЕДЕ С ПУЗЫРЬКАМИ

§ 1. Общие сведения

Мощное звуковое поле в жидкости порождает маленькие парогазовые пузырьки, которые под действием этого поля могут расти захлопываться и вызывать такие эффекты, как химические реакции, эрозия, звуколюминесценция и излучение звука (шума) в широкой полосе частот. Эти эффекты характеризуют физическое явление, называемое *акустической кавитацией*. Гидродинамическая кавитация, или образование и захлопывание парогазовых пузырьков (полостей), или образование разрывов в жидкости в местах локального понижения давления при обтекании тел, течений в трубах, в кильватерной струе и т. д., отличается только способом возбуждения и имеет много общего с явлением акустической кавитации.

Важность исследования кавитации была понята в начале нашего века, когда судостроители столкнулись с быстрым разрушением корабельных винтов из-за кавитационной эрозии. Первое математическое описание поведения кавитационной полости в жидкости было дано Рэлеем в 1917 г. [1]. Предложенная им модель сферической пустой полости, захлопывающейся в несжимаемой жидкости, помогла частично понять эрозионное действие кавитационных пузырьков. Дальнейшие исследования акустической кавитации были вызваны широким использованием звука и ультразвука в технологических процессах, где кавитация является одним из сильно действующих факторов, а также необходимостью повышения мощности акустических преобразователей в гидроакустике, где кавитация ставит предел максимальной интенсивности звука, излучаемого акустическими антеннами.

В общих чертах акустическую кавитацию можно представить себе следующим образом. В фазе разрежения звуковой волны на имеющихся в жидкости микропузырьках образуется разрыв в виде полости, которая заполняется насыщенным паром и диффундирующим в нее растворенным газом. В фазе сжатия пар конденсируется, а имеющийся в полости газ подвергается сильному адиабатическому сжатию. В момент захлопывания давление и температура газа достигают больших значений, что порождает в близкой окрестности пузырька импульс высокого давления. Акустическая кавитация представляет собой эффективный механизм концентрации энергии. При кавитации относительно низкая средняя плотность энергии

звукового поля трансформируется в высокую плотность энергии в малом объеме внутри и вблизи захлопывающегося пузырька. Полная энергия захлопывающегося пузырька невелика, однако сферическая сходимость пузырька приводит к образованию очень больших локальных плотностей энергии, а следовательно, высоких температур и давлений.

Теория образования, роста и захлопывания газовых пузырьков *(газовая кавитация)* первоначально развивалась для несжимаемой идеальной жидкости для случая одиночного сферического пузырька. Далее были уточнены уравнения динамики пузырька с учетом сжимаемости, вязкости и теплопроводности, конечности амплитуды колебаний стенки пузырька. Наконец, в этой теории был произведен учет несферичности колебаний пузырька, в особенности вблизи его резонансных частот и при достаточно больших амплитудах звука. Было показано, что несферичность колебаний и возникновение струек жидкости у захлопывающихся пузырьков, если они находятся вблизи твердой поверхности, является одной из причин кавитационной эрозии твердых тел. Теоретические исследования далее стали развиваться применительно к динамике паровых пузырьков *(паровая кавитация)*, которая имеет много общего с динамикой газового пузырька, однако имеются и существенные различия.

Бóльшая часть теоретических работ посвящена теории движения одиночного пузырька, тогда как в экспериментальных исследованиях и приложениях приходится иметь дело главным образом с кавитационной областью, т. е. совокупностью большого числа взаимодействующих пузырьков, различающихся своими размерами.

Распространение звука в гетерофазных средах, таких, например, как жидкость с пузырьками газа или пара, кавитационная область, кильватерная струя, верхние слои океана, содержащие большое количество газовых пузырьков различного радиуса, криогенная жидкость, содержащая паровые пузырьки, и т. д., отличается особенностями: газовые, паровые или парогазовые пузырьки приводят к рассеянию звука, вызывают увеличение поглощения звука и дисперсию.

Акустическая кавитация и распространение звука в пузырьковой (и вообще гетерофазной) среде представляет собой большую и сложную область исследований, имеющую существенное прикладное значение. В этой главе будут затронуты только основные аспекты акустической кавитации: динамика газовых и паровых пузырьков, кавитационная область, кавитационая прочность жидкостей, явления, сопровождающие кавитацию, а также ряд вопросов распространения акустических волн в жидкости с пузырьками.

§ 2. Динамика одиночного газового пузырька в акустическом поле

Все наблюдаемые при ультразвуковой кавитации явления связаны с существованием и характерным поведением кавитационных полостей или пузырьков в поле ультразвука. Поэтому изучение

движения пузырьков — одна из основных задач исследования ультразвуковой кавитации.

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования кавитации в обычной, недегазированной воде привели к выводу о том, что при амплитудах звука, меньших примерно 10^4 Па, основную роль играют газовые пузырьки, т. е. пузырьки, движение которых определяется внешним акустическим давлением и состоянием газа внутри пузырька. Более подробное рассмотрение кавитации мы начнем с вывода уравнений, описывающих динамику одиночных пузырьков и получения их простейших решений.

Рассмотрим поведение одиночного сферического пузырька радиуса $R(t)$, совершающего пульсации в идеальной несжимаемой жидкости. Введем полярные координаты, начало которых совместим с центром пузырька. В этом случае потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi=0$. Сферически симметричное решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = A/r, \quad r > R, \tag{2.1}$$

где константа A находится из граничного условия равенства давлений и нормальных скоростей частиц жидкости и газа на поверхности $r=R$. Так как $v(R)=(\partial\varphi/\partial r)_R=(\partial\varphi'/\partial r)_{R'}=\dot{R}$, где штрихи означают, что соответствующие величины относятся к внутренней части пузырька, то

$$A = -R^2\dot{R} \tag{2.2}$$

и искомый потенциал равен $\varphi=-R^2\dot{R}/r$. Подставляя это значение потенциала в интеграл Бернулли:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\frac{p(\infty)}{\rho}=\text{const}, \tag{2.3}$$

получим для $r\geqslant R$ уравнение

$$R\ddot{R}+(3/2)\dot{R}^2=[p(r)-p(\infty)]/\rho, \tag{2.4}$$

где $p(\infty)$ — давление при $r=\infty$.

Впервые это уравнение, как и его решение для простейшего случая постоянного давления на бесконечности, когда $p_0(\infty)=$ $=\text{const}$ (p_0 — гидростатическое давление) были получены Рэлеем [1]. Полагая, что $p(R)=0$, т. е. что внутри пузырька вакуум, из уравнения (2.4) нетрудно найти выражение для скорости захлопывания пустой полости:

$$v^2=(2p_0/3\rho)(R_0^3/R^3-1), \tag{2.5}$$

где R_0 — радиус пузырька в начале захлопывания.

Вводя замену переменных $R=R_0x^{1/3}$, преобразуем это уравнение к виду

$$(dx/dt)^2=(6p_0/\rho R_0^2)\,x^{1/3}(1-x),$$

откуда можно получить выражение для времени захлопывания

пустой полости:

$$\Delta t = R_0 \sqrt{\frac{\rho}{6p_0}} \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/6}(1-x)^{1/2}} = R_0 \sqrt{\frac{\rho}{6p_0}} \frac{\Gamma(5/6)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(4/3)} =$$

$$= 0{,}915 R_0 \sqrt{\rho/p_0}, \quad (2.6)$$

где Γ — гамма-функция.

Рассмотрение модели захлопывающейся пустой полости показывает, что сферическая сходимость пузырька может приводить к очень большим скоростям движения (в приближении несжимаемой жидкости $v \to \infty$). Давления $p_{\max}$, развиваемые во время захлопывания, $p_{\max} = (4/3) p_0 (R_m/R)^3$ и при $R \to 0$ стремятся к бесконечности.

Такие большие давления, которые, согласно упрощенной теории (не учитывается сжимаемость газа в пузырьке, не учитываются потери), должны возникать при захлопывании полости, привели к казавшемуся вначале очевидным объяснению возникающей эрозии корабельных винтов. Однако такое объяснение имеет определенные трудности (см. § 4).

Перейдем теперь к поведению пузырька, находящегося в жидкости в звуковом поле. Чтобы получить уравнение пульсаций пузырька для этого случая, сделаем ряд предположений. Согласно условию равенства давлений при $r = R(t)$ имеем

$$p'(R) = p(R) + 2\sigma/R. \quad (2.7)$$

Здесь величина $2\sigma/R$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения) представляет собой *капиллярное давление Лапласа*, которое оказывает искривленная поверхность пузырька на имеющийся в нем газ. Что касается условия на бесконечности, то будем считать, что вдали от пузырька гидростатическое давление равно p_0, а на пузырек падает плоская звуковая волна $p_m \exp[(i(kr - \omega t)]$. Если длина звуковой волны λ в жидкости, которую мы считаем несжимаемой, много больше радиуса пузырька R, то поле в его окрестности можно приблизительно считать однородным:

$$p(r) = p_0 + p_m \cos \omega t. \quad (2.8)$$

Подставив значения давлений (2.7), (2.8) в *уравнение Рэлея* (2.4), получим *уравнение Нолтинга — Непайреса* [2]:

$$p'(R) = p_0 + p_m \cos \omega t + 2\sigma/R + \rho(R\ddot{R} + (3/2)\dot{R}^2). \quad (2.9)$$

Это уравнение нелинейное и аналитического решения не имеет. Если давление газа в пузырьке подчиняется уравнению Пуассона $p'(R) = p_0 (R_0/R)^{3\gamma}$, его решения могут быть получены либо приближенными, либо численными методами. При малых амплитудах уравнение (2.9) можно линеаризовать; при больших амплитудах можно получить решения численно. На рис. 6.1 для примера представлены численные решения, описывающие адиабатические пульсации газового пузырька в воде при гидростатическом давлении $p_0 = 10^5$ Па и при превышающей частоту собственных пульсаций пузырька частоте возбуждающего поля [3]. Параметром представ-

ленного семейства кривых является амплитуда давления p_m (в 10^5 Па). Внизу показано изменение во времени давления ультразвуковой волны. Штриховкой показаны области, характеризующие структурную неустойчивость уравнения. В этих областях качественная структура решений существенно меняется при незначительном изменении величины p_m. При $p_m=2\cdot10^5$ Па пузырек не захлопывается в течение 1-го периода, а пульсирует многократно; эта амплитуда близка к пороговой. При большей амплитуде звука скорости захлопывания увеличиваются и приближаются к скорости звука, поэтому модель несжимаемой жидкости не пригодна для описания

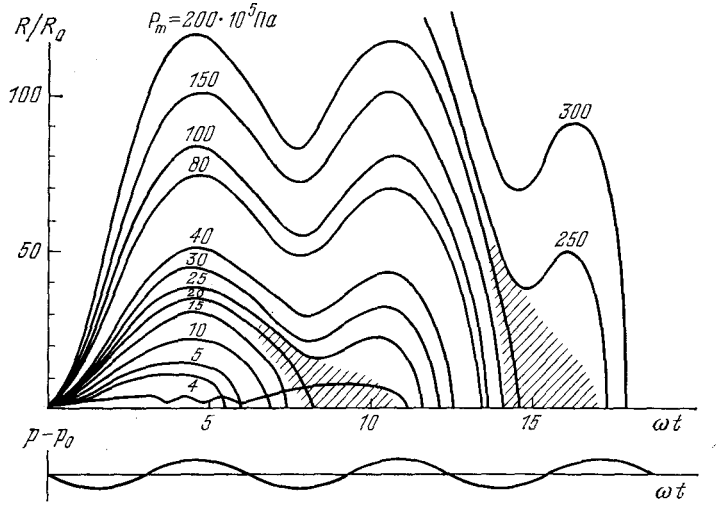


Рис. 6.1. Численные решения для адиабатических пульсаций газового пузырька, начальный размер которого $R=10^{-4}$ см; частота возбуждающего поля 500 кГц.

конечной стадии захлопывания. Решение более точных уравнений дает возможность оценить давления и температуры внутри пузырька на конечной стадии захлопывания. При этом необходимо учитывать не только сжимаемость жидкости, но и ее теплопроводность, вязкость, а также ионизацию газа внутри пузырька. Так, например, если для пузырька $R_0=5\cdot10^{-3}$ см и $p_m=10^6$ Па, то на конечной стадии захлопывания давление газа внутри пузырька достигает 10^9 Па, а температура ≈6000 К [4]. Такой пузырек излучает в воду импульс давления, который при распространении за счет нелинейных свойств жидкости превращается в ударную волну амплитуды $\sim10^8$ Па. Возникновением этих ударных волн частично можно объяснить кавитационную эрозию.

Пульсации кавитационных пузырьков экспериментально обычно исследуются с помощью скоростной киносъемки. Так, для частоты ультразвука ≈15 кГц применялась частота съемки 60 000 кадров в секунду [3]. Приведенные результаты показывают, что уравнение Нолтинга — Непайреса хорошо описывает пульсации газового

пузырька при умеренных амплитудах звука. Однако приведенные графики, рассчитанные для амплитуд давлений до $2 \cdot 10^7$ Па, имеют лишь иллюстративный характер, поскольку при таких значениях звукового переменного давления поведение газовых пузырьков в воде уже не может описываться уравнением (2.9). Как уже было сказано, это уравнение выведено без учета потерь при колебаниях пузырька; не учитывались сжимаемость, вязкость и теплопроводность. Кроме того, не учитывалось, что скорость стенки пузырька на конечной стадии захлопывания может быть сравнима со скоростью звука в воде и даже превышать ее. Учет сжимаемости в линейном приближении приводит к более сложному уравнению — так называемому уравнению Хэрринга — Флинна [4], а учет конечности амплитуд скорости стенки пузырька — к уравнению Кирквуда — Бете (см. [3, 5]). Здесь мы не будем на этом останавливаться.

Рассмотрим аналитически линейные решения уравнения (2.9) и обсудим их физический смысл.

Введем собственную сжимаемость пузырька согласно равенству

$$K_{\text{п}} = -(1/V)\, dV/dp' = -(3/R)\, dR/dp', \quad V = (4/3)\pi R^3. \quad (2.10)$$

Из этого определения сжимаемости следует, что в линейном приближении (по полю p_m) амплитуда колебаний пузырька

$$R_1 = -(1/3)\, K_{\text{п}} R_0 p_1', \quad (2.11)$$

где $R \approx R_0 + R_1 \exp(-i\omega t)$, $p' = \overline{p'} + p_1' \exp(-i\omega t)$; в общем случае величина $K_{\text{п}}$ комплексная и ее мнимая часть определяется различного рода потерями (см. ниже). Подставляя это значение амплитуды R_1 в линеаризованное уравнение (2.9), получим величину давления газа в пузырьке на поверхности $r = R(t)$:

$$p' = p_m/q. \quad (2.12)$$

Здесь множитель q учитывает резонансные свойства пузырька в жидкости:

$$q = 1 - (K_{\text{п}}/3)\, (\rho\omega^2 R_0^2 + 2\sigma/R_0). \quad (2.13)$$

Введем теперь понятия *резонансной частоты* пузырька из условия $q = 0$:

$$\omega_0 = \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{3\,\mathrm{Re}\, K_{\text{п}}}{|K_{\text{п}}|^2} - \frac{2\sigma}{R_0}\right)}, \quad (2.14)$$

и *затухания* δ

$$\delta = \mathrm{Im}\, K_{\text{п}}/|K_{\text{п}}|^2\, \rho\omega^2 R_0^2, \quad (2.15)$$

после чего выражение для амплитуды колебаний R_1 можно переписать в следующем виде:

$$R_1 = -\frac{p_m/\rho\omega^2 R_0}{\omega_0^2/\omega^2 - 1 - i\delta}. \quad (2.16)$$

В этих же обозначениях величина рассеянного поля $p = -\rho\, \partial\varphi/\partial t$ в окрестности пузырька запишется как $p = f_1/r$, где *амплитуда*

рассеяния [6]

$$f_1 = \frac{R_0}{\omega_0^2/\omega^2 - 1 - i\delta}. \qquad (2.17)$$

Заметим, что учет сжимаемости жидкости заставляет вместо решения (2.1) писать $\varphi = A\exp(ikr)/r$. Поэтому в сжимаемой жидкости рассеянное поле $p_s(r)$ записывается как

$$p_s(r) = (f_1/r)\exp(ikr). \qquad (2.18)$$

При этом амплитуда рассеяния f_1 имеет формально тот же вид, что и прежде (2.17), за исключением того, что значение затухания δ (2.15) приобретает дополнительное малое слагаемое kR. Учет вязкости жидкости при радиальных колебаниях пузырька сводится только к изменению граничного условия (2.7), которое будет теперь выглядеть так:

$$p'(R) = p(R) + 2\sigma/R + 4\eta\dot{R}/R. \qquad (2.19)$$

С учетом кинематической вязкости и сжимаемости жидкости затухание δ перепишется теперь в виде

$$\delta = \frac{3\,\mathrm{Im}\,K_\text{п}}{\rho\omega^2 R_0^2 |K_\text{п}|^2} + kR_0 + \frac{2\nu}{R_0^2\omega}, \qquad (2.20)$$

а выражение (2.14) для резонансной частоты ω_0 формально остается без изменений.

Из полученных формул (2.15) — (2.20) видно, что окончательное решение задачи о поведении пузырька в жидкости под действием звука сводится в конечном счете к нахождению собственной сжимаемости пузырька $K_\text{п}$. Для нахождения $K_\text{п}$ необходимо привлечь уравнение состояния вещества (газа) и ряд новых уравнений или сделать дополнительные предположения о физическом характере процесса сжатия. В дальнейшем будем считать, что вещество внутри пузырька подчиняется уравнению идеального газа $pV = RTm/\mu$ и рассмотрим вначале ряд предельных случаев при $\sigma = 0$.

Если радиус пузырька велик по сравнению с длиной тепловой волны в газе $\lambda_\text{т} \sim \sqrt{2\chi/\omega}$, где $\chi = \varkappa/\rho C_p$ — коэффициент температуропроводности, то пузырек можно считать теплоизолированным. Его поведение в этом случае можно считать адиабатическим, при этом $pV^\gamma = \text{const}$. В этом случае сжимаемость $K_\text{п} = 1/p_0\gamma = 1/\rho c^2$, где $\gamma = C_p/C_V$ и $K_\text{п}$ является действительной величиной. Затухание δ определяется в этом случае исключительно вязкими и акустическими потерями. Резонансная частота ω совпадает в этом случае с *формулой Миннаерта* для резонансной частоты газовых пузырьков [7]:

$$\omega_0 = R_0^{-1}\sqrt{\gamma p_0/\rho}, \quad \sigma = 0. \qquad (2.21)$$

В другом предельном случае $R_0 \ll \sqrt{2\chi/\omega}$ пузырьки можно считать изотермическими и сжимаемость $K_\text{п}$ найти из уравнения $pV = \text{const}$. В этом случае $K_\text{п} = 1/p_0$ является действительной величиной и за-

тухание (2.20) определяется также только акустическими и вязкими потерями. Заметим, что если в первом случае акустические потери вносили наибольший вклад в выражение для δ, то во втором случае, т. е. при $R_0 \ll \sqrt{2\chi/\omega}$, наибольший вклад в δ для газа вносят вязкие потери.

В промежуточном случае $R_0 \approx \sqrt{2\chi/\omega}$ процессы теплопередачи оказываются существенными для динамики пузырька и для нахождения сжимаемости $K_п$ необходимо решать дополнительную систему уравнений, учитывающую перенос тепла через границу $r=R(t)$. Точный расчет коэффициента $K_п$ в этом случае дает следующее его значение:

$$K_п = \frac{1}{\rho c^2}\left[1 + \frac{3}{2} i(\gamma - 1)\left(1 - \frac{\mu_1}{\chi}\right)\frac{k_2 R_0 \operatorname{ctg} k_2 R_0 - 1}{y^2}\Gamma_0\right], \quad (2.22)$$

где $k_2^2 \approx i\omega/\chi$ — тепловое число, а $y = R_0/\sqrt{2\chi/\omega}$ — безразмерный радиус пузырька, выраженный в толщинах теплового слоя, $\mu_1 = (4/3)\nu + \eta'/\rho$,

$$\Gamma_0 = \frac{\varkappa[1-(i-1)y]}{\varkappa[1-(i-1)y] + \varkappa[k_2 R_0 \operatorname{ctg} k_2 R_0 - 1]}. \quad (2.23)$$

Предельные случаи $R_0 \gg \lambda_т$ и $R_0 \ll \lambda_т$ дают для выражения (2.22) значения $K_п$, совпадающие с ранее полученными выражениями.

Отметим, что введение резонансной частоты согласно формуле (2.14) возможно лишь в том случае, если отсутствует частотная дисперсия сжимаемости $K_п$. Лишь только в отсутствие зависимости $K_п$ от ω (или ее слабой зависимости) выражения (2.12) и (2.19) достигают своего максимума (резонанса) на частоте ω_0, определяемой формулой (2.14). В общем же случае для нахождения резонанса, т. е. максимальных значений, достигаемых амплитудой рассеяния f_1 и амплитудой $|R_1|$, необходимо взять их производные по ω и приравнять нулю. При этом оказывается, что в ряде случаев при колебаниях пузырька возможно существование второго резонанса при малых R_0, частота которого отлична от резонансной частоты (2.14) [8, 9]; дополнительный резонанс имеет очень пологий максимум.

Затухание колебаний пузырька происходит за счет теплопроводности газа (тепловые потери), вязкости жидкости и за счет акустического переизлучения (радиационные потери). Приведенные соотношения позволяют оценить вклад в затухание указанных трех факторов. Так, на частоте 10 кГц для воздушных пузырьков в воде с радиусами в пределах от 0,002 до 0,2 см, т. е. для пузырьков, радиус которых меньше резонансного радиуса, основное влияние оказывает теплопроводность, а для пузырьков, радиус которых больше резонансного,— сжимаемость жидкости, т. е. радиационные потери, вязкие же потери на этой частоте роли практически не играют.

Вообще в диапазоне частот от самых низких и до частот порядка 100 кГц для воздушных пузырьков в воде радиуса $R_0 \approx 10^{-2}$ см основной вклад в затухание колебаний пузырька вносят тепловые

и радиационные потери. (Заметим, что добротность пузырьков порядка десяти, т. е. она невелика.)

Если затухание колебаний δ пузырька представить в виде суммы трех частей: затухания за счет теплопроводности δ_t, вязкости δ_η и переизлучения δ_r, так что $\delta=\delta_t+\delta_\eta+\delta_r$, то формулу (2.20) и выражения (2.22) и (2.23) удобнее записать в таком виде [10]:

$$\delta_t = 3(\gamma-1)\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[\frac{y(\operatorname{sh}2y+\sin 2y)-(\operatorname{ch}2y-\cos 2y)}{y^2(\operatorname{ch}2y-\cos 2y)+3(\gamma-1)\,y(\operatorname{sh}2y-\sin 2y)}\right], \tag{2.24}$$

$$\delta_\eta \approx \frac{2\nu}{\omega}R_0^{-2}, \quad \delta_r = \frac{2\pi}{\lambda}R_0.$$

Из приведенных соотношений видно, что в качестве параметра интенсивности теплообмена выступает соотношение между радиусом пузырька и длиной тепловой волны в газе $y=R_0/\sqrt{2\chi/\omega}$, этот же параметр влияет и на показатель политропы в уравнении состояния газа. Потери на вязкость определяются квадратом отношения длины вязкой (сдвиговой) волны (см. формулу (3.10) гл. 1) к радиусу пузырька, а на излучение — отношением R_0 к длине звуковой волны λ и близостью частоты звука к резонансной частоте.

При умеренных амплитудах звука можно теоретически объяснить интересное и имеющее достаточно общий характер явление — рост радиуса пузырька в звуковом поле. В случае газового пузырька этот рост обусловлен так называемой *выпрямленной, или односторонней диффузией* газа в пузырек. Кратко это явление можно описать следующим образом. Как известно, скорость диффузии растворенного в воде газа пропорциональна градиенту концентрации (закон Фика, аналогичный закону Фурье для теплопроводности):

$$q_1 = -D\nabla C, \tag{2.25}$$

где q_1 — масса газа, протекающего в секунду через единицу поверхности, D — коэффициент диффузии и C — концентрация растворенного в воде газа. Закон Фика выполняется на границе пузырька; концентрация газа в жидкости на границе равна концентрации насыщения $C_н(p)$ при давлении газа в пузырьке в данный момент времени и меняется в течение звукового периода. Вдали от пузырька концентрация будет постоянной C_0, зависящей от предыстории состояния воды. Если вода была подвержена специальной подготовке (длительному кипячению, вакуумированию и т. д.), то концентрация газа намного ниже насыщенной при давлении p_0, т. е. $C_0 \ll C_н(p_0)$. Если вода находилась в длительном контакте с воздухом или другим газом, то концентрация газа будет близка к насыщенной $C_0=C_н(p_0)$. Во втором случае в течение времени, равного части периода звука (полупериод сжатия), концентрация газа $C_н$ будет больше C_0 и газ из пузырька будет диффундировать в глубь жидкости и растворяться в ней; во время другой части периода, когда пузырек расширяется, $C_н<C_0$ и газ, наоборот, диффундирует из глубины жидкости к границе и выделяется в объем пузырька (рис. 6.2). При этом средний за период поток газа в пузырек может

быть отличен от нуля. Газообмен пузырька идет приблизительно с постоянным объемом жидкости. При этом диффузия газа из пузырька идет через маленькую поверхность и с малым градиентом концентрации, поскольку толщина слоя жидкости, участвующей в газообмене, больше (шелл-эффект), а диффузия газа в пузырек идет через бóльшую поверхность и бóльший градиент. Таким образом, когда концентрация растворенного газа C_0 близка к $C_н(p_0)$, средний поток газа, диффундирующего за период в пузырек, будет отличен от нуля, масса газа в пузырьке будет расти и его радиус будет увеличиваться [11].

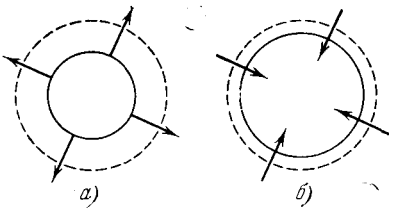


Рис. 6.2. Увеличение радиуса газового пузырька в звуковом поле: *а*) Фаза сжатия ($C_н > C_0$); *б*) фаза разрежения ($C_н < C_0$).

Не приводя громоздких выкладок, напишем конечное выражение для скорости роста массы газа m в пузырьке [12]:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{(8/3)\,\pi D C_0 R_0\,(p_m/p_0)^2}{(1-\xi^2)^2+\xi^2 d^2} - 4\pi D R_0 C_0 \left(1 - \frac{C_0}{C_н}\right), \qquad (2.26)$$

где $\xi = (\omega/\omega_0)^2$, $d = 1/Q = \omega\eta/K_п$, Q — добротность колебаний пузырька. Первое слагаемое обусловлено выпрямленной диффузией газа в пузырек, второе — статической диффузией, возникающей при отличии концентрации растворенного в воде газа от насыщенной.

Поскольку изменение площади поверхности пузырька максимально на резонансе, то и выпрямленная диффузия максимальна при совпадении частоты с резонансной.

Если $C_0 < C_н$, то, приравняв правую часть формулы (2.26) нулю, получим выражение для *порогового давления роста пузырька* p_m^* вследствие выпрямленной диффузии:

$$p_m^{*2} = (3/2)\, p_0^2\,(1 - C_0/C_н)\,[(\xi^2 - 1)^2 + \xi^2 d^2]. \qquad (2.27)$$

Как видим, p_m^* зависит от степени приближения к резонансу и от добротности пузырьков. На резонансе оно минимально:

$$p_{m,\,\min}^{*2} = (3/2)\, p_0^2\,(1 - C_0/C_н)/Q^2. \qquad (2.28)$$

Многочисленные эксперименты [13—15] надежно подтвердили теоретические выводы и выявили ряд дополнительных эффектов, в частности ускорение роста пузырьков при возбуждении на его поверхности капиллярных волн.

§ 3. Динамика одиночного парового пузырька

В § 2 мы имели дело с динамикой газового пузырька в звуковом поле. Часто, однако, приходится встречаться с чисто паровыми пузырьками. К таким случаям относится возникновение паровых пузырьков в криогенных жидкостях — таких, как жидкий азот, кислород, гелий. Паровые пузырьки возникают и в воде при кипе-

нии, где также мы встречаемся (при наличии звука в воде, которая находится в состоянии кипения либо близком к нему) с паровой кавитацией.

Естественно рассмотреть сначала, как это было сделано и в случае газовой кавитации, динамику одиночного парового пузырька [16—19].

При рассмотрении движения паровых пузырьков необходимо учитывать теплообмен между жидкостью и пузырьком, а также испарение и конденсацию на границе жидкость — пар. Теория пульсации парового пузырька строится так же, как и газового. Здесь следует только добавить к уравнениям движения и непрерывности уравнение переноса тепла и учесть особенности граничных условий на поверхности, разделяющей паровой пузырек с жидкостью.

Для упрощения задачи будем считать жидкость несжимаемой. Пусть жидкость имеет температуру T_0 и испытывает давление $p_{\text{нп}}(T_0)+\Delta p$, где $p_{\text{нп}}$ — давление насыщенных паров и Δp — слабое статическое «пережатие», такое, что при отсутствии звука «паразитное» кипение жидкости отсутствует. Считаем также, что пузырек находится в однородном переменном поле давления $p_m\cos\omega t$, поскольку $\lambda \gg R$.

Напишем уравнения гидродинамики в сферических координатах для двухфазной среды — для жидкости и для пузырька. В качестве уравнения состояния используем соотношение (здесь и далее мы следуем работе [20]) $F(p,\ \rho,\ T)=0$ или в дифференциальном виде:

$$(1/\rho)\,d\rho=\beta\,dp-\alpha_t T, \tag{3.1}$$

а в качестве уравнения переноса тепла — уравнение

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\nabla T\right)=\operatorname{div}(\varkappa\nabla T)+\alpha_t T\,\frac{dp}{dt}+\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{3.2}$$

Здесь

$$\beta=\rho^{-1}(\partial\rho/\partial p)_T,\quad \alpha_t=-\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_p.$$

На колеблющейся стенке пузырька $r=R(t)$ система уравнений для каждой фазы должна удовлетворять граничным условиям, следующим из законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{gathered}\rho[\dot R-v(R)]=\rho'[\dot R-v'(R)]=j,\\ p'(R,\ t)-\sigma'_{rr}+j^2/\rho'=p(R,\ t)+2\sigma/R-\sigma_{rr}+j^2/\rho,\\ jL_{\text{п}}+j\cdot 2\sigma/\rho R-\\ -j\,\frac{\sigma'_{rr}}{\rho'}+\frac{j^2}{\rho\rho'\beta' v_{lk}}+\frac{j^3}{2\rho'}-\frac{T}{R^2}\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\sigma}{dT}\right)=\varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{R(t)}-\varkappa'\left(\frac{\partial T'}{\partial r}\right)_{R(t)}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь и далее штрихами обозначены параметры пара. В отличие от случая газового пузырька, здесь имеются члены с потоком массы пара j/ρ, поскольку в случае парового пузырька частицы вещества, участвующие в теплообмене, несут с собой определенную массу, импульс и энергию. Кроме того, в (3.3) присутствуют тензоры вязких напряжений, которые привносят добавочное давление на поверхности раздела. Здесь в (3.3) v_{lk} — скорость испарения вещества

в вакуум, $j=(4\pi R^2)^{-1}dM'/dt$ — поток массы пара через поверхность и $L_{\text{п}}$ — теплота парообразования.

Выписанные гидродинамические уравнения и граничные условия учитывают как неоднородность температуры и давления внутри пузырька, так и неравновесность процесса испарения жидкости внутри самого пузырька. При этом неравновесность считается слабой и скачком температуры на границе раздела фаз $\Delta T=T-T'$ пренебрегается. Выражение для потока массы далее можно взять из *уравнения Герца — Кнудсена* (см. [21]):

$$j=\rho'\beta' v_{tk}\left[p_{\text{нп}}(T)-p'(\rho' T')\right], \tag{3.4}$$

где $p_{\text{нп}}(T)$ — давление насыщенного пара, взятого при температуре жидкости у поверхности раздела фаз. Отметим, что для идеального газа скорость испарения вещества в вакуум [22]

$$v_{tk}\approx\tilde{\alpha}\sqrt{p'/2\pi\rho'}, \tag{3.5}$$

где $\tilde{\alpha}$ — вероятность прилипания молекул пара к поверхности жидкости.

Задача о движении парового пузырька в поле звуковых волн состоит теперь в решении выписанных уравнений с использованием граничных условий (3.3) и выражения (3.4).

Второе из уравнений (3.3), связывающее давление в жидкости у поверхности пузырька с давлением пара внутри пузырька, вместе с другими уравнениями движения дает возможность вывести уравнение типа Нолтинга — Непайреса.

Решая совместно уравнение Навье — Стокса, уравнение непрерывности, уравнение состояния, уравнение переноса тепла, уравнение с учетом граничных условий (3.3) и уравнение Герца — Кнудсена (3.4), получаем в линейном приближении выражение для амплитуды колебаний радиуса пузырька

$$R=\overline{R}+R_1\exp(-i\omega t),\quad R_1=-p_m\overline{R}K_{\text{п}}/3q, \tag{3.6}$$

где $\overline{R}$ — средний радиус пузырька.

Мы не будем выписывать довольно громоздкое выражение для получающейся сжимаемости парового пузырька $K_{\text{п}}=-(1/V')\partial V'/\partial p'$. Отметим, что величину q в результате решения можно записать так:

$$q\approx 1-(2\sigma/\overline{R}+4i\omega\eta+\rho\omega^2\overline{R}^2)\,K_{\text{п}}/3. \tag{3.7}$$

Эта величина учитывает резонансные свойства парового пузырька. Она представляет собой отношение амплитуды давления звукового поля к амплитуде переменного давления внутри пузырька: $q=p_m/p_1'(\overline{R})$.

Прежде чем перейти к анализу полученных решений, поясним, откуда у парового пузырька возникают резонансные свойства. Массой образующегося осциллятора является, как и в газовом пузырьке, присоединенная масса жидкости, а упругостью — избыточное давление, возникающее в пузырьке при изменении его размеров. Однако при медленном изменении размеров парового пузырька дав-

ление пара в пузырьке будет соответствовать давлению насыщенного пара при температуре жидкости на границе пузырька. Лишний пар будет конденсироваться на стенке пузырька, и избыточного давления (т. е. возвращающей силы осциллятора) не возникает; таким образом, при медленных движениях упругость парового пузырька равна нулю. При быстрых движениях тепло, выделяющееся при конденсации пара, не успевает рассеяться в жидкости; жидкость на границе пузырька нагреется и нагреет пар в пузырьке. Вследствие этого давление пара в пузырьке будет соответствовать уже давлению насыщенного пара при более высокой температуре, т. е. возникнет возрастающая сила. При еще более высокой скорости движения стенки пузырька, приближающейся к скорости испарения

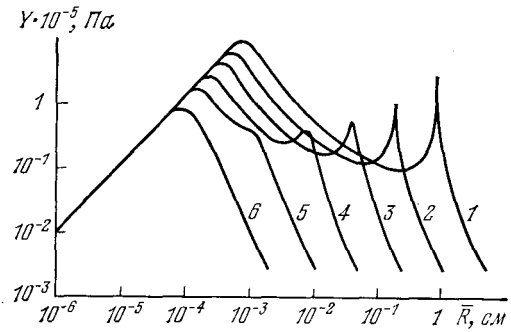


Рис. 6.3. Зависимость функций отклика $Y=|R_1|/\bar{R}p_m$ от радиуса паровых пузырьков для различных частот: кривая *1* — 400 Гц, *2* — 2 кГц, *3* — 10 кГц, 4 — 50 кГц, *5* — 250 кГц, *6* — 1,25 МГц.

жидкости в вакуум v_{lk}, пар не будет успевать конденсироваться, и его состояние будет отличаться от равновесного; его давление будет превышать давление насыщенного пара. Это превышение будет источником второй составляющей возвращающей силы; при этом свойства парового пузырька приближаются к свойствам газового. Таким образом, упругость (сжимаемость $K_п$) парового пузырька существенно зависит от частоты воздействия и радиуса пузырька и имеет достаточно сложный вид.

Используя получающиеся в линейном приближении решения, можно рассчитать функцию отклика $Y=|R_1|/\bar{R}p_m$ системы паровой пузырек — жидкость. График такой функции для воды при температуре 150°С при разных частотах звукового поля приведен на рис. 6.3 [23].

Обратим внимание на то, что функция отклика при не слишком малых радиусах паровых пузырьков имеет два резонанса. Один из этих резонансов, когда радиус пузырька большой, описывается формулой Миннаерта; добротность пузырька при этом достаточно велика. С увеличением частоты звука эта добротность уменьшается, а сам максимум передвигается в сторону меньших радиусов. Второй резонанс связан с поверхностным натяжением пузырька. Наличие

двух резонансов для паровых пузырьков впервые было отмечено в [9].

Если решать исходную полную систему уравнений пульсаций парового пузырька во втором (квадратичном) приближении, то можно убедиться, что действие звукового поля на паровой пузырек, кроме того, что оно вызывает вынужденные колебания пузырька, приводит также к постепенному увеличению его среднего радиуса. Здесь мы сталкиваемся с явлением, имеющим сходство с явлением

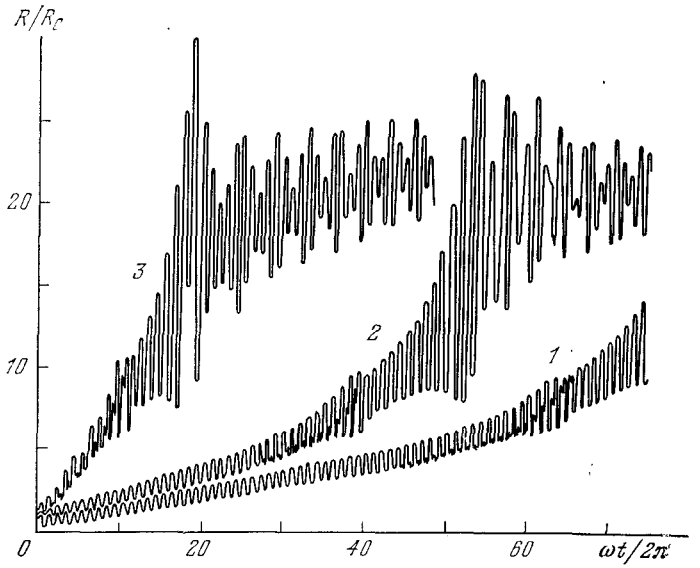


Рис. 6.4. Пульсация парового пузырька в жидком азоте: кривая *1* соответствует амплитуде звукового давления $p_m=0{,}35\cdot10^5$ Па, *2* — $p_m=0{,}4\cdot10^5$ Па и 3—$p_m=0{,}5\cdot10^5$ Па.

выпрямленной диффузии газа в пульсирующий в звуковом поле пузырек (§ 2). Это явление получило название *направленной или выпрямленной теплопередачи* (рост средней массы в пузырьке и рост его радиуса).

Основной причиной роста среднего радиуса пузырька является, кроме рассмотренного выше механизма шелл-эффекта (для более крупных пузырьков), поглощение механической энергии звука или, другими словами, работа сил поля над пузырьком. Величина этой энергии зависит от вязкости и теплопроводности пара, вязкости и теплопроводности жидкости, параметров, определяющих интенсивность испарения — конденсации, и, естественно, от амплитуды и частоты звука. В квадратичном приближении формула для скорости роста среднего радиуса пузырька выглядит следующим образом [23]:

$$\frac{d\overline{R}}{dt}=\frac{\overline{\varkappa}}{\overline{\rho}'L\overline{R}}\left[\frac{p_m^2}{|q|^2}\sum_{i=1}^{\infty}A_i(\overline{R},\ \omega)-\left(\Delta p+\frac{2\sigma}{\overline{R}}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\sigma\right]. \qquad (3.8)$$

Здесь Δp — пережатие, $(\partial T/\partial p)_\sigma$ — производная вдоль кривой фазового равновесия жидкость — пар, A_i — коэффициенты, связанные с различными механизмами поглощения звука.

Как видно из формулы (3.8), скорость роста пузырьков зависит от того, насколько близок пузырек к резонансу (насколько мал фактор q). Существует амплитуда звука p_m^*, которую можно назвать порогом роста; если амплитуда звука больше чем p_m^*, то пузырек растет, если меньше, то растворяется. На рис. 6.4 приведен пример численного расчета на ЭВМ [24] роста парового пузырька в жидком азоте при $T_0=77{,}35$ К, т. е. температуре кипения при нормальном давлении. Начальный радиус пузырька составлял $R_0=5\cdot10^{-4}$ см, пережатие $\Delta p=0{,}25\cdot10^5$ Па, $p_0=1{,}2\cdot10^5$ Па, частота $f=\omega/2\pi=$ $=50$ кГц. Из приведенных графиков видно, что при периодических пульсациях парового пузырька в звуковом поле средний радиус пузырька растет благодаря рассмотренному выше эффекту выпрямленной теплопередачи и что когда радиус пузырька превышает его резонансные значения, скорость роста заметно уменьшается и радиус приближается к некоторому асимптотическому значению.

Явление роста паровых пузырьков в поле ультразвука находит применение в разрабатываемых *ультразвуковых пузырьковых камерах* для исследования частиц высоких энергий [25].

§ 4. Асимметричное захлопывание кавитационных пузырьков в жидкости

Основное внимание при теоретическом изучении динамики кавитационных полостей уделялось получению сферически симметричных решений уравнений, описывающих движение пузырька при учете различных физических параметров: сжимаемости жидкости, тепломассообмена, вязкости, высокотемпературных явлений в сжатом газе и т. д.

При попытке воспользоваться этими решениями для объяснения кавитационной эрозии возникает противоречие между предпосылками теории и реальными условиями эксперимента. Действительно, в теории используется решение, полученное для одиночного пузырька в безграничной жидкости. Если из полученных решений оценить давления, возникающие в жидкости при захлопывании пузырька [26], то получается, что эти давления порядка 10^8 Па на расстоянии $r=2R$ и быстро падают при увеличении r. Таким образом, чтобы пузырек при захлопывании был способен разрушить конструкционные материалы, он должен находиться на расстоянии, меньшем $2R$, что конечно, противоречит условию безграничной жидкости, при котором строилась теория пульсаций пузырьков. Объяснение кавитационной эрозии должно опираться на решение уравнений динамики кавитационных полостей, которое получено при условии, что коллапсирующий пузырек расположен вблизи твердой стенки.

Впервые на необходимость учета влияния близкой стенки на динамику пузырька указали М. Корнфельд и Л. Суворов еще в 1944 г. в работе [27, 28], посвященной экспериментальному исследо-

ванию кавитационной эрозии, вызванной акустической кавитацией. Используя прерывистое искровое освещение кавитационных пузырьков (частота звука $\approx$7,5 кГц), ими было установлено, что при росте амплитуды колебаний пузырьки вблизи стенки теряют свою сферическую форму и становятся полигональными. Авторы предположили, что при этом возникают моды поверхностных колебаний высших порядков. С ростом амплитуды число граней растет, что указывает на возбуждение мод более высоких порядков. При больших амплитудах звука пузырьки теряют правильную форму и съемка сбоку показывает, что внутри пузырьков возникают микроструи (рис. 6.5).

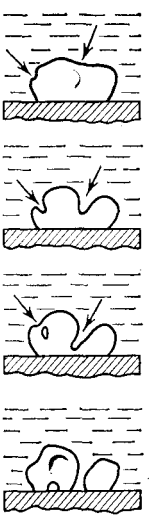


Рис. 6.5. Удары кумулятивных струек о твердую стенку при неустойчивости кавитационного пузырька под действием звукового поля.

Эти эффекты представляют собой частный случай проявления неустойчивости поверхности раздела сред с различной плотностью, так называемой *неустойчивости Рэлея — Тэйлора*. Ярким примером такой неустойчивости служит неустойчивость границы раздела ртути и воды в случае, когда ртуть находится сверху. В этом случае любое длинноволновое возмущение поверхности приводит к ее разрушению. Действительно, рассмотрим плоскую границу раздела двух жидкостей, из которых тяжелая лежит сверху, а легкая — снизу, $\rho_т > \rho_л$ (рис. 6.6). В случае возмущения поверхности длиной x образуется ее прогиб. Если длина возмущения поверхности и ее прогиб одного порядка, то на массу опустившейся жидкости действует сила тяжести, равная $\approx (\rho_т - \rho_л) x^3 g$ (g — ускорение свободного падения). Для устойчивости необходимо, чтобы эта сила была меньше силы поверхностного натяжения $(\sigma/x)x^2 = \sigma x$, направленной вверх и восстанавливающей форму поверхности. Однако при условии

$$x > x_{кр} \approx \sqrt{\sigma/(\rho_т - \rho_л) g} \qquad (4.1)$$

восстанавливающая сила оказывается меньше силы тяжести и все длинноволновые возмущения длиной $x > x_{кр}$ оказываются неустойчивыми.

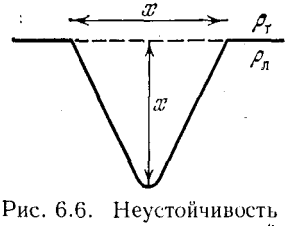


Рис. 6.6. Неустойчивость границы раздела тяжелой и легкой жидкостей.

В случае ускоренного движения границы раздела двух сред в отсутствие силы тяжести роль ускорения g может играть ускорение границы. Когда это ускорение направлено от легкой жидкости к тяжелой, то форма граничной поверхности оказывается также неустойчивой. В случае пузырька радиуса R_0 под действием звукового поля длина возмущения x может оказаться порядка его радиуса $x \approx R_0$, а при колебаниях пузырька ускорение равно $\ddot{R} \approx \omega^2 R_0 \delta_R$, где $R_0 \delta_R = R_I$ — амплитуда колебаний радиуса пузырька. Подставляя эти значения параметров в формулу (4.1), получим, что сферическая форма пузырька устойчива

только при условии

$$R_0 < \sqrt[3]{\sigma/\rho\omega^2\delta_R}. \qquad (4.2)$$

Потеря сферической устойчивости пузырька может произойти на последней стадии захлопывания, когда движение жидкости к центру пузырька замедляется из-за противодействия сжатого газа, а также на начальной стадии расширения. Только в этих случаях ускорение границы пузырька направлено от газа к жидкости. Более строгий расчет [29] основан на анализе условий роста амплитуды сферической гармоники с $n=2$, когда форма пузырька задается в виде

$$r = \overline{R(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n, \qquad (4.3)$$

где Y_n — сферическая функция порядка n. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательное выражение для условия устойчивости:

$$R_0 < \left[\frac{24\sigma}{5\rho\omega^2}\left(3+\frac{1}{\delta_R}\right)\right]^{1/3}\left(1+\frac{\rho'}{2\rho}\right) \approx \left[\frac{24\sigma}{5\rho\omega^2}\frac{1}{\delta_R}\right]^{1/3}. \qquad (4.4)$$

Подставив $\delta_R = R_1/R_0$ из выражения (2.16) и возведя полученное выражение в куб, получим

$$R_0^3 < (24\sigma/5\omega^2\rho)\, 3\Gamma p_0 \sqrt{(\xi^2-1)^2 + d^2\xi^2}\; p_m^{-1},$$

или, обратив это выражение, найдем

$$p_m < (24\sigma/5\omega^2\rho)\, 3\Gamma p_0 \sqrt{(\xi^2-1)^2 + d^2\xi^2}\, R_0^{-3}. \qquad (4.5)$$

Из выражения (4.5) видно, что амплитуда звука, при которой сферическая форма пузырька становится неустойчивой, минимальна, если радиус пузырька становится резонансным. Тогда выражение (4.5) можно упростить:

$$p_m < \frac{24\sigma}{5\rho\omega_0^2}\frac{3\Gamma p_0\delta}{R_0^3} = \frac{24\sigma}{5R_0}\frac{1}{Q} = p_m^*, \qquad (4.6)$$

где δ и Q — введенные ранее затухание и добротность.

Легко показать, что для парового пузырька порог несферичности будет выражаться точно такой же формулой. Оценка для воздушного пузырька в воде с радиусом $R_0 = 10^{-2}$ см дает $p_m^* = 3{,}5 \cdot 10^2$ Па, т. е. достаточно малую величину. Вопрос об экспериментальной проверке формулы (4.6) пока еще не имеет прямого ответа. Но в большинстве работ отмечается, что в кавитационной области при достаточном времени озвучивания почти нет пузырьков размера резонансного или больше, что находится в соответствии с этой формулой.

Вопрос об *асимметричном коллапсе пузырьков* в звуковом поле пока теоретически не решен. Из экспериментальных работ можно, кроме вышеупомянутой работы М. Корнфельда и Л. Суворова, отметить работу И. Х. Брантона [30]. В ней приведены результаты скоростной съемки пузырьков, захлопывающихся в кавитацион-

ной области 300-ваттного ультразвукового преобразователя на частоте 18 кГц. Эксперименты показали, что пузырьки при асимметричном захлопывании образуют кумулятивную струйку, направленную к близлежащей твердой поверхности. Скорость этой струйки достигает 200 м/с, а диаметр приблизительно 0,1 диаметра пузырька. Оценка давления в момент удара такой струи в твердую стенку дается формулой $p \approx \rho c u$, где c — скорость звука в жидкости и u — скорость струи [31]. Для экспериментов Корнфельда, Суворова и Брантона $p \approx 3 \cdot 10^8$ Па. Таким образом, такая струйка может быть одним из факторов, вызывающих эрозию.

§ 5. Кавитационная область и пороги кавитации

В экспериментах с акустической кавитацией всегда имеют дело с *кавитационной областью* [32, 33], т. е. совокупностью взаимодействующих кавитационных пузырьков. Многие свойства кавитационной области при умеренных амплитудах звука можно объяснить исходя из результатов исследования свойств одиночных пузырьков.

Рассмотрим поведение газовых пузырьков различных радиусов при различных амплитудах звукового поля. Для этого построим график зависимости порога роста пузырьков p_m^* от $\overline{R}$ (см. (2.27)) при фиксированной частоте ω (рис. 6.7, кривая *1*) [34]. Кривая *1* делит плоскость $(p_m^* \overline{R})$ на две области: *I* — область роста пузырьков и *II* — область растворения. Если начальный радиус пузырька попадает в область *I*, например при амплитуде p_{m0}^* — правее точки *C*, то такой пузырек будет расти вследствие выпрямленной газовой диффузии, и его радиус увеличивается, пока не достигнет точки *D*, являющейся асимптотической. Пузырьки, начальные радиусы которых попадают левее точки *C*, должны растворяться в жидкости, а пузырьки с радиусами правее точки *D* будут убывать и стремиться к точке *D*. Таким образом, кривая *AO* является порогом роста пузырьков вследствие выпрямленной газовой диффузии, кривая *OB* — кривой асимптотических радиусов. Скорость роста пузырьков зависит от того, насколько амплитуда звука превышает порог роста при данном радиусе $\overline{R}$. Поэтому максимальную скорость роста имеют резонансные пузырьки. В случае стационарной кавитации можно

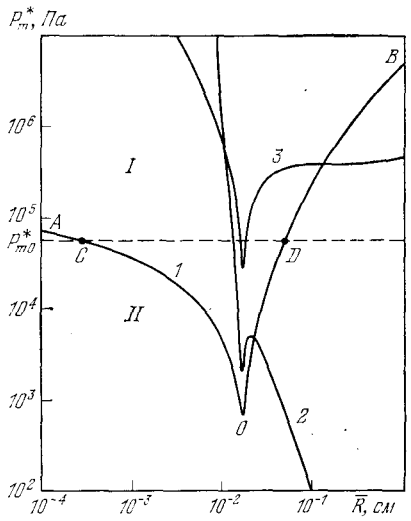


Рис. 6.7. Порог роста пузырьков (кривая *1*) и порог развития сферической неустойчивости (кривая *2*).

показать, что распределение пузырьков по размерам обратно пропорционально скорости роста пузырьков: $n(\overline{R}) \sim 1/\dot{R}$ [34]. Таким образом, в кавитационной области мало или совсем нет резонансных пузырьков, что подтверждается экспериментом [35]. На рис. 6.8 даны распределения пузырьков по значениям радиусов в воде, полученные экспериментально при колебаниях ультразвукового концентратора на частоте 22 кГц. Проводилось фотографирование и дальнейшая статистическая обработка с использование микроскопа.

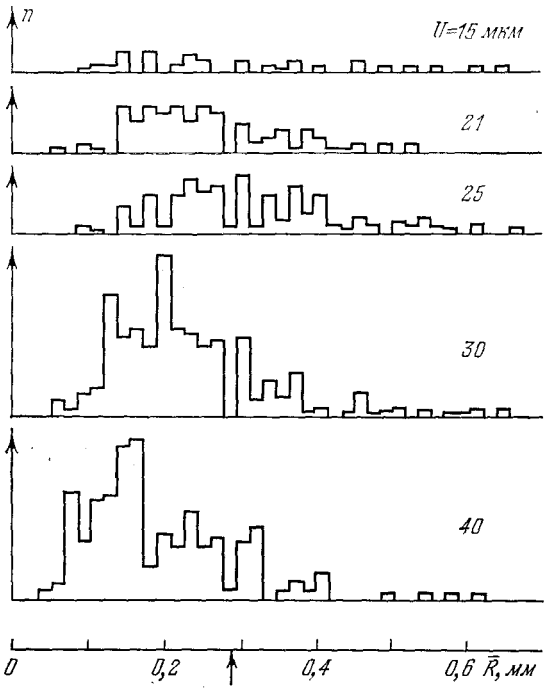


Рис. 6.8. Распределения пузырьков по размерам в воде, полученные экспериментально при комнатной температуре и при разных амплитудах колебаний U торца ультразвукового концентратора. Стрелкой указано резонансное значение радиуса пузырьков.

Как видно из рис. 6.8, на резонансной частоте заметен провал в функции распределения $n(\overline{R})$, т. е. имеется «просветление» кавитационной области; резонансные пузырьки быстро «уходят» из области резонансных размеров. Отметим, что одновременно и независимо такой же результат был получен в [36]. Авторы этой работы эффект просветления объясняют иначе, считая, что здесь определяющую роль играет коагуляция пузырьков, вызываемая силами Бьеркнеса, хотя, как мы знаем из гл. 5, силы Бьеркнеса не всегда приводят к эффекту слипания пузырьков.

Второй фактор, влияющий на распределение пузырьков по размерам,— это потеря пузырьком сферической устойчивости. По-

рог сферической устойчивости на плоскости (p_m^*, $\bar{R}$) дается по (4.5) кривой *2* (рис. 6.7). Слева от кривой пузырьки устойчивы, справа — нарастают капиллярные волны и может возникнуть кумулятивная струйка, приводящая в итоге к разрушению пузырька на большое количество маленьких пузырьков. Часть этих пузырьков имеет размер больше критического (справа от точки *C*) и они будут расти. Таким образом, в кавитационной области возникает самовоспроизводящийся процесс образования и роста пузырьков. Если среди вновь образующихся пузырьков есть такие, размер которых превышает размер пузырьков в жидкости до начала воздействия звука, то возникает гистерезис, т. е. кавитация пропадает при амплитудах звука, существенно меньших, чем порог кавитации.

Кривая *3* на рис. 6.7 обозначает предел применимости указанных аналитических решений. При этих амплитудах пульсации пузырька соизмеримы с его размером; пузырьки существуют только один-два периода звука и разрушаются, образуя новые зародыши кавитации и производя физико-химические эффекты, сопровождающие кавитацию. Примеры поведения пузырьков при таких амплитудах были приведены на рис. 6.1; эти решения полной системы уравнений получены численными методами.

Численными методами можно исследовать сильно нелинейные явления в кавитационной области, например излучение *кавитационного шума*. Спектр этого шума состоит из дискретных гармонических и субгармонических составляющих и «белого» шума. Одним из механизмов излучения гармонических составляющих является возбуждение собственных пульсаций пузырька при совпадении частоты его резонанса с гармониками основного тона $f_р = nf$, где $f_р$ — резонансная частота пузырька, f — частота звука, возбуждающего кавитацию, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Пример возбуждения собственных пульсаций был нами дан на рис. 6.4, относящемся к динамике парового пузырька в жидком азоте. Вторым источником гармоник являются импульсы высокого давления, излучаемые при сферическом и несферическом коллапсе пузырька, дающие сплошной спектр кавитационного шума [34, 37]. Гармонические компоненты возникают вследствие того, что импульсы высокого давления возникают периодически; сплошная часть спектра обусловлена разбросом моментов захлопывания пузырька в течение фазы сжатия звука. Вклад в сплошную часть спектра дает также излучение на собственных частотах пульсаций вновь образующихся пузырьков при несимметричном коллапсе. В спектре кавитационного шума обращает на себя внимание присутствие субгармонических составляющих на частотах $nf_р/2$, $nf_р/3, \ldots$ Механизм их излучения до сих пор до конца не выяснен; субгармонические компоненты эффективно используются в эксперименте как индикаторы акустической кавитации.

К нелинейным эффектам, возникающим при кавитации, относится и падение волнового сопротивления ρc кавитирующей жидкости. Это связано, во-первых, с уменьшением плотности среды при образовании пузырьков, во-вторых, со значительным увеличением

сжимаемости, поскольку при возникновении кавитации сжимаемость среды определяется пузырьками газа и пара, а не сжимаемостью жидкости. При интенсивной кавитации волновое сопротивление уменьшается в десятки раз [32, 36, 39], и это необходимо учитывать при расчете и конструировании ультразвуковых преобразователей для жидкости. Увеличение сжимаемости приводит и к понижению скорости звука в кавитирующей жидкости, причем это снижение может быть очень значительным, с 1500 до 10—12 м/с.

Нелинейные пульсации пузырька приводят также к различным физико-химическим явлениям. Одно из них — *кавитационная эрозия*. Она возникает вследствие различных механизмов. Первый — это воздействие кумулятивных струек, возникающих при асимметричном коллапсе пузырьков рядом с твердой поверхностью, о чем шла речь в § 4. Эти струйки направлены к твердой поверхности, в которой возникает «зеркальное» отображение пузырька, пульсирующее синфазно с исходным. Второй механизм — это скоростной напор пузырька, а точнее жидкости, окружающей поступательно движущийся по направлению к стенке пузырек. При захлопывании присоединенная масса пузырька (можно показать, что для поступательного движения она равна половине массы жидкости в объеме пузырька) резко уменьшается, и из-за сохранения импульса скорость увеличивается. При уменьшении радиуса в 10 раз скорость увеличивается в 1000 раз и достигает $\sim$300 м/с. Скоростной напор дается выражением $p=\rho v^2/2 \sim 10^8$ Па, и это воздействие имеет длительность 0,1 T, где T — период звука. Третий механизм эрозии обусловлен вязкими силами, вызывающими сдвиговые напряжения в металле и возникающими вследствие растекания жидкости, вытесняемой из пространства между твердой поверхностью и стенкой расширяющегося пузырька. Напряжения, которые при этом возникают, $\sim 10^8$ Па и длятся они $\sim$0,5 T. Как известно, прочность конструкционных материалов по отношению к сдвиговым напряжениям на порядок меньше, чем к напряжениям сжатия. Еще один эрозионный механизм обусловлен ударными волнами, возникающими в окружающей пузырек жидкости при его захлопывании, их амплитуда $\sim 10^8$ Па [4].

Когда поверхность шероховата, и в ней уже возникли каверны или лунки, эрозия резко усиливается. Возникает еще один механизм эрозии, обусловленный расширением пузырьков, попавших в эти лунки. Расширением пузырьков, попавших в трещины покрытий и загрязнений или в места отслоений покрытий, обусловлена высокая эффективность ультразвуковой очистки.

Эффективным методом увеличения кавитационной эрозии является повышение статического давления в жидкости. Поскольку максимальная амплитуда звука в кавитационной области редко превышает (0,4—0,6) p_0, то повышение статического давления позволяет увеличить амплитуду звука, действующего на пузырек, и, следовательно, существенно увеличить скорость захлопывания пузырьков. Повышение статического давления до 5—10 атм приводит к увеличению скорости эрозии на 2—3 порядка.

Такие же механизмы действуют и при воздействии мощного ультразвука на живые организмы. При возникновении кавитации (а порог кавитации для мягких тканей близок к порогу кавитации воды) в живой ткани происходят разрывы и разрушения. Это открывает возможность с помощью фокусированного ультразвука воздействовать на глубинные структуры организма, например опухоли, не производя хирургических вмешательств [40, 41].

Высокие давления и температуры, возникающие внутри захлопывающегося пузырька, вызывают в пузырьке ионизацию газа и образование свободных радикалов, инициируя химические реакции, идущие обычно при высокой температуре. Нагрев газа ведет к его свечению; кавитация ответственна за *сонолюминесценцию* — свечение кавитационной области, что также может служить для целей индикации кавитации.

Остановимся теперь на вопросе о зародышах кавитации. Чистая жидкость имеет порог кавитации (теоретически [42]) $\sim 10^8$ Па. Зародыши в ней могут возникать только вследствие гетерофазных флуктуаций. Но реально кавитационная прочность жидкостей, в том числе и воды, редко превышает 10^5 Па, что означает, что в жидкости присутствуют достаточно крупные стабильные пузырьки газа. Общепринятой гипотезой, объясняющей их возникновение и длительное существование, является следующая. В очищенной воде, дегазированной и профильтрованной, количество пузырьков ничтожно мало, и ее прочность может достигать около $3 \cdot 10^7$ Па [33]. Под действием космического излучения молекулы воды распадаются, образуя водород и кислород, которые растворяются в воде. Через некоторое время их концентрация возрастает до такой степени, что из-за флуктуаций могут образоваться пузырьки размерами $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ см. На поверхность этих пузырьков попадают молекулы поверхностно активных веществ, которые всегда, хотя и в малом количестве, присутствуют в жидкости. Мономолекулярный слой таких веществ на поверхности пузырька полностью останавливает диффузию газа из пузырька в жидкость, и даже в жидкости, где концентрация растворенного газа намного меньше насыщенной, такой пузырек будет жить длительное время. Броуновское движение пузырьков приводит к их столкновению и слиянию. Таким образом, возникают более крупные пузырьки, которые и обусловливают реальную кавитационную прочность жидкости. Зародышами кавитации могут служить и твердые несмачиваемые частички, а также газовые включения в трещинах и порах твердых поверхностей. В некоторых жидкостях, например в жидком гелии и водороде, зародышами кавитации являются паровые пузырьки, возникающие либо на теплых поверхностях вследствие локального вскипания, либо на треках пролета ионизующих частиц космического излучения. Это открывает возможности применить акустическую кавитацию для регистрации ионизующего излучения [29].

В заключение этого параграфа вернемся к вопросу о зависимости порогового давления в воде от размера пузырька и приведем пример, относящийся к паровой кавитации (вблизи резонансных разме-

ров пузырька поведение парового и газового пузырьков почти одинаково). На рис. 6.9 приведена зависимость порогового давления роста паровых пузырьков [20, 23] в воде при температуре 150°С при нулевом пережатии от размера зародыша при различных частотах ультразвука. Следует при этом отметить, что на самой кривой $p_m^*(\overline{R})$ пузырек испытывает вынужденные стационарные колебания, не изменяя своих средних размеров. Внутри областей, где поставлены цифры пузырек растет, а в некоторых пределах области слева от минимального значения $p_m^*(\overline{R})$ он захлопывается. Штриховая прямая соответствует так называемому блейковскому порогу кавитации с паровыми зародышами [4]: $p_m = \Delta p + 2\sigma/\overline{R}$. Из приведенных графиков можно сделать вывод, что при отсутствии пережатия жидкость начинает кипеть при значениях статических порогов давления выше, чем это дает формула для блейковского порога. Из приведенного рисунка видно также, что минимальные пороговые значения линейно растут с повышением частоты. Этот факт хорошо известен; как газовая, так и паровая кавитация тем труднее возбуждается (при прочих равных условиях), чем выше частота звукового поля. В технологических применениях кавитации используют частоты ультразвука, как правило, не превышающее 26—30 кГц.

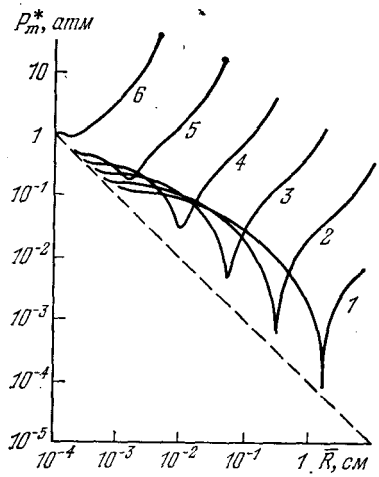


Рис. 6.9. Зависимость порогового давления роста паровых пузырьков в воде при температуре 150 °С от размера парового зародыша при различных частотах ультразвука: *1*—400 Гц, *2*—2кГц, *3*—10 кГц, *4*—50 кГц, *5*—250 кГц, *6*—1,25 МГц.

Подробные сведения о последних работах в области акустической кавитации в различных ее аспектах можно почерпнуть в [43, 44].

§ 6. Распространение звука в среде с пузырьками

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют рассмотреть интересную и важную в практических приложениях задачу о распространении звука в жидкости, где имеется множество пузырьков.

Мы видели, что при падении звуковой волны на одиночный пузырек последний, совершая вынужденные колебания, частично поглощает звуковую энергию за счет потерь на вязкость и теплопроводность, а частично переизлучает (рассеивает) падающую на него волну. Если же в жидкости имеется много пузырьков, то каждый из них находится в поле как падающей, так и рассеянных волн от соседних пузырьков, которые создают поле многократного рассеяния.

Проблема *рассеяния волн* имеет первостепенное значение во многих разделах физики; мы с ней встречались уже в гл. 2, когда речь шла о рассеянии Мандельштама — Бриллюэна; она будет встречаться нам и дальше [6, 45, 46].

Изучение особенностей рассеянного волнового поля часто является единственным способом получить сведения о физических свойствах среды (вспомним рассеяние рентгеновских лучей в кристаллах).

Введем сначала понятие о *полном сечении рассеяния* σ_s частицы, с которым нам далее придется неоднократно встречаться. Величина σ_s определяется из соотношения: полная энергия, рассеянная частицей (пузырьком) $4\pi r^2 I_s$ (здесь r — расстояние от центра пузырька), равна энергии падающей волны интенсивности I_0, проходящей через площадку размером σ_s, перпендикулярно к направлению падающей волны, т. е.

$$4\pi r^2 I_s = \sigma_s I_0, \tag{6.1}$$

откуда и находится σ_s. Поскольку площадь поперечного сечения пузырька радиуса R равна πR^2, то тогда, если бы вся падающая энергия рассеивалась пузырьком во всех направлениях, вся эта рассеянная энергия была бы равна $\pi R^2 I_0$. Отношение $\sigma_s/\pi R^2$ определяет количество рассеянной энергии в долях энергии падающей. Следует при этом заметить, что при резонансе, когда частота падающего поля совпадает с собственной (резонансной) частотой пузырька, сечение рассеяния σ_s может значительно превосходить геометрическое поперечное сечение пузырька (для случая пузырька в воде — на несколько порядков).

При падении плоской звуковой волны $p_m \exp(ikr)$ на единичный пузырек, радиус которого много меньше длины звуковой волны λ, полное поле вблизи рассеивателя можно представить в виде суммы двух членов:

$$p(r) \approx p_m \exp(ikr) + f_1 p_m \exp(ik|r-r_1|)/|r-r_1|, \tag{6.2}$$

где r_1 — координата центра пузырька, а f_1 — амплитуда рассеяния. При $R \ll \lambda$ амплитуда рассеяния f_1 сферически симметрична и не зависит от угла падения θ; ее значение выражается формулой (2.17).

Пусть теперь в жидкости имеется не один, а множество пузырьков. Будем считать, что радиус пузырьков R много меньше длины распространяющейся волны λ и что λ намного больше среднего расстояния L между пузырьками, т. е. что $\lambda \gg L \gg R$. Пузырьки сферически симметричны, а их центры неподвижны. Это дает нам возможность исключить из рассеянных волн дипольные и более высокие компоненты излучения. В этом случае волновое поле $p(r)$ в среде с N пузырьками можно записать по аналогии с (6.2) в виде суммы первоначально распространяющегося поля плоской волны и множества рассеянных волн монопольного типа, т. е.

$$p(r) = p_m \left(\exp(ikr) + \sum_{n=1}^{N} f_n \frac{\exp(ik|r-r_n|)}{|r-r_n|} \right), \tag{6.3}$$

где r_n — координаты центров n-х пузырьков. Неизвестные коэффициенты f_n, как и в случае одиночного пузырька, должны находиться из граничных условий, имеющих место на поверхности $|r-r_n|=R_n$ каждого из пузырьков. В дальнейшем для простоты будем считать, что радиусы всех пузырьков одинаковы и равны R.

При принятом условии $\lambda \gg L \gg R$ задачу нахождения неизвестных коэффициентов f_n можно значительно упростить. Оказывается, что в этом случае приближенное значение коэффициентов f_n выражается просто через произведение амплитуды рассеяния f_1 на одиночном пузырьке и амплитуды падающего поля $p_l^i(r)$ на l-й пузырек, взятой в точке r_l, где

$$p_l^i(r) = p_m\left(\exp(ikr) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq l}}^{N} f_n \frac{\exp(ik|r-r_n|)}{|r-r_n|}\right), \qquad (6.4)$$

где $l=1, 2, \ldots, N$. Действительно, полное поле $p(r)$ вблизи любого из N пузырьков можно представить как в форме (6.3), так и в виде суммы падающего на l-й пузырек поля $p_l^i(r)$ и рассеянной волны $p_l^s(r)$. При условии $kR \ll 1$ падающее поле $p_l^i(r)$ вблизи l-го пузырька мало меняется, его можно считать пространственно квазиоднородным и приближенно заменить эффективной плоской волной с амплитудой $p_l^i(r)$. В этом случае по аналогии с задачей рассеяния плоской волны на одиночном пузырьке можно считать, что полное поле $p(r)$ вблизи l-го пузырька имеет вид

$$p(r) = p_l^i(r) + p_l^s(r_l) = p_l^i(r) + p_l^i(r_l) f_l \exp(ik|r-r_l|)/|r-r_l|. \qquad (6.5)$$

Сравнивая теперь выражения (6.2) и (6.5), находим значения неизвестных коэффициентов в (6.3), $f_l = f_1 p_l^i(r_l)$. Далее подставим найденные значения коэффициентов f_n в формулу (6.3) и получим, что полное поле

$$p(r) = p_m\left(\exp(ikr) + f_1 \sum_{n=1}^{N} \frac{\exp(ik|r-r_n|)}{|r-r_n|} p_n^i(r_n)\right), \qquad (6.6)$$

где коэффициенты $p_n^i(r_n)$ находятся в свою очередь из решения системы (6.4).

Однако прежде чем переходить к решению системы уравнений (6.4) и (6.6), обратим внимание на то, что в реальных жидкостях пузырьки расположены произвольным, случайным образом. Поэтому и искомая величина $p(r)$, а с ней и коэффициенты $p_l^i(r_l)$ будут представлять собой случайные величины, зависящие от ансамбля конфигураций $\{r_N\}$ — месторасположений пузырьков. При малейшем движении пузырьков и изменении их месторасположения значение $p(r)$ также меняется и при этом произвольным образом. В подобных случаях интересуются обычно не мгновенными и точными значениями случайных величин, а их статистическими характеристиками. Соответственно и мы при изучении структуры волнового поля в жидкости со множеством пузырьков будем интересовать-

ся в первую очередь значением среднего поля $\overline{p(r)}$, а также билинейной корреляционной функцией вида $\overline{p^*(r_1)p(r_2)}$ (здесь звездочкой обозначено комплексное сопряжение).

Если каждый из N пузырьков занимает в объеме V любое равновероятное положение независимо от других рассеивателей, то усреднение любой случайной величины $p(r)$ по ансамблю конфигураций $\{r_N\}$ должно производиться по следующему правилу [47]:

$$\overline{p(r)} = \frac{N}{V} \int p(r_1, r_2, \ldots, r_N)\, dr_1 \ldots dr_N. \qquad (6.7)$$

Усредним теперь уравнение (6.6) согласно правилу (6.7), сделав при этом предположение, что падающее на l-й пузырек поле $p_l^i(r)$ не зависит от координат l-го рассеивателя r_l. Если при этом окажется вдобавок, что рассеяние на каждом из пузырьков мало, то среднее падающее поле вблизи любого из N пузырьков можно заменить на приближенно равное ему полное среднее поле $\overline{p(r)}$. Оценка справедливости этих предположений будет приведена ниже. После подобных замечаний и соответствующих операций получаем сразу *уравнение Дайсона* для среднего поля, или так называемое уравнение самосогласованного поля:

$$\overline{p(r)} = p_m \exp(ikr) + f_1 n \int \frac{\exp(ik|r-r'|)}{|r-r'|} \overline{p(r')}\, dr', \qquad (6.8)$$

где $n=N/V$ — плотность распределения пузырьков. Напомним, что обычно (как и в данном случае) под самосогласованным полем понимают поле взаимодействия данной частицы со всеми частицами системы, усредненное определенным образом по системе этих остальных частиц,— действия на данную частицу всех остальных частиц приближенно заменяются их усредненным действием. Уравнение (6.8) можно записать также и в дифференциальной форме. Подействовав оператором $\Delta+k^2$ на обе части интегрального уравнения (6.8), получим уравнение

$$(\Delta + k^2 + 4\pi n f_1)\, \overline{p(r)} = 0, \qquad (6.9)$$

которое можно рассматривать как аналог уравнения Гельмгольца, с некоторым эффективным волновым числом

$$k_{\text{эфф}}^2 = k^2 + 4\pi n f_1. \qquad (6.10)$$

Так как амплитуда рассеяния f_1 представляет собой комплексную величину, действительная и мнимая части которой зависят от ω, то скорость распространения звука в жидкости с пузырьками будет обладать дисперсией и поглощением, поскольку действительная часть волнового числа, как всегда, определяет скорость распространения волны, а комплексная часть числа — ее затухание. Затухание звука, являясь функцией от ω, складывается из поглощения в чистой жидкости без пузырьков и затухания, вызванного многократным рассеянием волн на пузырьках:

$$\alpha = \operatorname{Im} k_{\text{эфф}} \approx \operatorname{Im} k + (2\pi n/k) \operatorname{Im} f_1. \qquad (6.11)$$

Из приведенной формулы для коэффициента поглощения можно показать, что влияние пузырьков в жидкости на поглощение в ней ультразвука велико. Для случая газовых пузырьков в воде детальный расчет и оценка были проведены довольно давно [48] для целей гидроакустики, где количество пузырьков, в особенности в поверхностных слоях океана, существенно влияет на распространение акустических сигналов. Такие оценки и сравнение с наблюдениями продолжают проводиться и в последнее время [49].

Здесь мы приведем другой случай влияния газовых пузырьков на примере экспериментально наблюдаемых явлений в жидководородной ультразвуковой пузырьковой камере [25]. Для случая жидкого водорода $T_0=27$ К на частоте 40 кГц наблюдаются паровые пузырьки, радиус которых $R\sim 2\cdot 10^{-2}$ см и концентрация $n\sim 10$ см$^{-3}$; резонансная частота таких пузырьков $f_0\sim 100$ кГц, т. е. для них $\omega<\omega_0$. При этих условиях, согласно (6.11), можно получить, что $\alpha\sim 10^{-3}$ см$^{-1}$. Это значение примерно на четыре порядка превышает коэффициент поглощения чистого жидкого водорода, не содержащего пузырьков, для которого $\alpha\sim 10^{-7}$ см$^{-1}$ [50]. Еще большее затухание будет, естественно, иметь место в случае резонансных пузырьков. Следует отметить, что влияние газовых пузырьков на поглощение обычно оказывается несколько бо́льшим, чем влияние паровых пузырьков. Заметим также, что для указанного случая паровых пузырьков в жидком водороде скорость звука меняется приблизительно на 1,5%.

Отметим, что при выводе уравнений (6.8) и (6.9) для среднего поля $\overline{p(r)}$ мы пренебрегли корреляцией падающего поля $p_l^i(r)$ с координатой самого центра рассеивания r_l. Как видно из уравнения (6.4), это в общем случае не так, и подобное пренебрежение возможно лишь в первом приближении при решении системы уравнений (6.4) методом итераций. Учитывая корреляцию лишь в первом приближении, можно получить обобщенное уравнение для самосогласованного поля $\overline{p(r)}$. Эффективное волновое число в этом случае содержит добавку [51, 52]:

$$k_{\text{эфф}}^2 = k^2 + 4\pi n f_1 (1 + i\,(2\pi/k)\, n f_1^2), \qquad (6.12)$$

малость которой будет служить критерием справедливости уравнений (6.8) и (6.9) самосогласованного поля. Так как по предположению $L\ll\lambda$, где $L\sim n^{-1/3}$ — среднее расстояние между пузырьками, то из условия малости величины $(2\pi/k)n|f_1|^2\sim(\lambda/L)|f_1|^2/L^2$ следует, что поправка к эффективному волновому числу (6.10) мала при условии $|f_1|\ll L$. Так как $|f_1|^2\sim\sigma_s$, где σ_s — поперечное сечение рассеяния, то физический смысл малости рассматриваемой поправки и справедливости уравнений (6.8) и (6.9) состоит в неперекрываемости сечений рассеяния на пузырьках, т. е. малой плотности n.

Выражения (6.10) и (6.12) для эффективного волнового числа были получены в предположении, что рассеяние на каждом пузырьке носит сферически симметричный характер и поэтому описывается полностью только монополем. Однако в том случае, когда пузырьки

совершают, помимо радиальных колебаний, еще и осцилляции или когда kR не мало, то в рассеянном поле от каждого из пузырьков содержатся еще и мультиполи высших порядков. При условии $L \ll \lambda$ рассеянное поле вдали от пузырька можно записать, как и ранее, в форме (6.2). Однако, в отличие от рассматриваемого случая, амплитуда рассеяния f_1 является теперь уже функцией от угла θ. При распространении плоской волны в жидкости с пузырьками в этом случае выражение для эффективного волнового числа модифицируется и принимает следующий вид [53]:

$$k^2_{\text{эфф}} = k^2 (1 + 2\pi n f_1(0)/k^2)^2 - (2\pi n f_1(\pi)/k^2)^2, \qquad (6.13)$$

где $f_1(0)$ и $f_1(\pi)$ — амплитуды рассеяния на пузырьке вперед и назад, т. е. при углах $\theta = 0$, π соответственно.

В приближении отсутствия корреляции между падающим на пузырек полем и координатой его местоположения можно так же легко получить уравнение и для билинейной корреляционной функции:

$$\overline{p^*(r_1)\, p(r_2)} = \overline{p^*(r_1)}\;\overline{p(r_2)} + n\,|f_1^2|\int \frac{\exp(ik_{\text{эфф}}|r_1 - r'|)}{|r_1 - r'|}\,\frac{\exp(ik_{\text{эфф}}|r_2 - r''|)}{|r_2 - r''|}\,\overline{p^*(r')\, p(r')}\, dr'. \qquad (6.14)$$

Положив в уравнении (6.14) $r_1 = r_2$, найдем замкнутое уравнение для средней интенсивности звуковой волны $\overline{p(r)^2}$.

Общий вид уравнений (6.8) и (6.9) справедлив для нахождения среднего поля в жидкости не только с пузырьками, но и в произвольной жидкой среде с рассеивателями любой природы. В частных случаях конкретизируется только вид амплитуды рассеяния f_1. Однако рассеяние на пузырьках, помимо специфического резонансного характера амплитуды f_1, обладает еще и рядом своих особенностей. Уравнения (6.8) и (6.9), а также следующие из них выражения (6.10), (6.12) и (6.14) были получены в предположении заданного распределения пузырьков. А именно, при выводе уравнений предполагалось, что радиус всех пузырьков одинаков и неизменен, а распределение пузырьков в пространстве однородно. Обобщение на случай наличия известного распределения пузырьков по радиусам и в пространстве несложно и приводит к следующей модификации уравнения (6.8):

$$\overline{p(r)} = p_m \exp(ikr) + \int \frac{\exp(ik|r - r'|)}{|r - r'|} f_1(\bar{R})\, n(r', \bar{R})\, \overline{p(r)}\, dr'\, d\bar{R}. \qquad (6.15)$$

Однако, как было показано ранее, воздействие звукового поля на жидкость с пузырьками приводит в ряде случаев к росту их средних размеров, т. е. к изменению функции распределения пузырьков по их размерам. Поэтому при коротких звуковых посылках, когда время длительности импульса мало по сравнению с характерным временем роста средних размеров пузырьков τ, оказываются спра-

ведливыми приведенные выше формулы. В том же случае, когда время τ сравнимо или больше временной продолжительности звукового импульса, происходит перераспределение пузырьков по размерам, а также их пространственная перегруппировка. При этом происходит самоустановление среднего поля в соответствии с изменяющимся распределением пузырьков, которое в свою очередь устанавливается от распространяющегося значения $\overline{p(r)}$. Уравнение для среднего поля $\overline{p(r)}$ в этом случае можно также формально записать в дифференциальной форме (6.9). Однако оно теперь не замкнуто, так как коэффициент f_1 будет уже не постоянным, а функцией среднего радиуса пузырька $\overline{R}$, значение которого в свою очередь зависит от величины $\overline{|p(r)|^2}$. Поэтому для нахождения среднего поля в случае перераспределения пузырьков по их размерам уравнение (6.9) необходимо дополнить системой уравнений, состоящей из уравнения роста пузырьков $\dot{\overline{R}}=F(|p(r)|^2)$, и уравнением (6.14) для средней интенсивности $\overline{|p(r)|^2}$.

Рассмотрим теперь случай распространения звука при установлении предельного стационарного режима. Как известно, газовые или паровые пузырьки в звуковом поле могут расти в среднем, если амплитуда звукового давления превышает определенную величину. При падении амплитуды звука ниже порогового значения все пузырьки в конце концов растворяются. Поэтому ясно, что вдали от источника звука, когда амплитуда $\overline{p(r)}$ упадет ниже минимального порогового значения за счет поглощения звука на пузырьках, все далеко расположенные друг от друга пузырьки растворятся. А вблизи от излучателя образуется пузырьковая область с четко выраженной границей. Что касается близлежащих пузырьков, то некоторые из них, имеющие слишком маленький радиус, растворятся, а другие, радиус которых превышает критическое значение $\overline{R}_1$, будут расти до значения $\overline{R}_2$, которое определяется пороговым значением $\overline{|p|^2}$ в данной точке. Однако еще до установления стационарного самосогласованного распределения пузырьков по размерам в пространстве $R(|p(r)|^2)$ может возникнуть ряд особенностей.

Мы уже познакомились с тем, что при больших скоростях движения поверхности пузырьков может возникнуть их сферическая неустойчивость. Если время развития неустойчивости слишком мало, то пузырьки могут разрушиться и превратиться в группу маленьких пузырьков, часть из которых захлопывается, а другая часть будет снова расти. При этом возможно установление стационарного динамического режима— *самовозобновляющейся кавитации*. Функция распределения пузырьков по размерам будет тогда иметь вид

$$n(\overline{R})=\text{const}/\dot{\overline{R}}\,(\overline{R},\ \overline{|p(r)|^2}), \tag{6.16}$$

где верхний предел $\overline{R}$ определяется радиусом пузырька, при котором наступает сферическая неустойчивость. Поскольку при подходе к резонансу значение колебательной скорости $\dot{\overline{R}}$ резко возрастает,

в области резонанса и за ним может наступить дробление растущих пузырьков. Именно в этом случае возможно наступление режима самовозобновляющейся кавитации с функцией распределения пузырьков по размерам типа (6.16).

В области резонанса значение средней скорости роста $\dot{\bar{R}}$ также достигает максимума. Поэтому в окрестности резонанса в соответствии с формулой (6.16) в кавитационной области устанавливается распределение пузырьков по размерам с минимумом вблизи их резонансных радиусов. А так как в поглощение звука (6.11) вносят наибольший вклад резонансные пузырьки, а их становится все меньше и меньше, то с течением времени в любой точке пространства вблизи излучателя должен наступать эффект просветления. Амплитуда звука $\overline{p(r)}$ возрастает за счет уменьшения его поглощения на резонансных пузырьках в результате их быстрого уменьшения в функции распределения (6.16) на резонансных и вблизи резонансных частот; этот результат обсуждался нами в § 5.

Однако, помимо установления стационарного динамического режима самовозобновляющейся кавитации, возможно установление стационарного режима с неизменным предельным распределением пузырьков по размерам. Если время развития сферической неустойчивости велико по сравнению со временем достижения пузырьком его асимптотических размеров или сама неустойчивость даже и не возникает, то окончательное распределение пузырьков по размерам устанавливается в соответствии с пороговой кривой $\dot{\bar{R}}=F(\bar{R},\ \overline{|p|^2})$.

Оценки для плоской геометрии показывают, что вблизи излучателя в этом случае устанавливается кавитационная область с четко выраженной границей, длина которой составляет [51]

$$l \approx k \ln (p/p^*)/4\pi n f_1^*, \tag{6.17}$$

где значение p^* приближенно соответствует минимальной пороговой амплитуде, а f_1^* взято при радиусе пузырька, найденном из соотношения $\dot{\bar{R}}=F(\bar{R},\ \overline{|p|^2})=0$.

Отметим, что проведенное рассмотрение оказывается справедливым также и для паровых пузырьков, только в этом случае изменяется коэффициент рассеяния f_1 и необходимо учесть процессы, связанные с теплопередачей.

Проведенное рассмотрение линейной задачи о распространении звука в жидкости с пузырьками основано на «микроскопическом» подходе. Исходя из динамики поведения одиночного пузырька в жидкости в поле звуковой волны, методом теории рассеяния (при определенных упрощающих предположениях) были получены формулы для дисперсии и поглощения звуковых волн в такой среде. Изложенное решение задачи распространения звука в жидкости с пузырьками является, пожалуй, наиболее общим и последовательным с физической точки зрения, хотя обобщение этого метода на волны конечной амплитуды еще не проведено.

Имеется другой подход, основанный на гидродинамике гомогенной среды (гомогенное приближение). Модель такой среды представляет собой смесь жидкости и газа, состоящего из пузырьков; число пузырьков на расстоянии порядка длины звуковой волны считается достаточно большим (длинноволновое приближение). Учитываются процессы теплообмена между воздухом в пузырьке и жидкостью. Для такой системы записываются уравнения движения и непрерывности, причем для связи между давлением газа в пузырьке и объемом пузырька (уравнение состояния) используются решения (2.24). В линейном случае решение задачи о распространении плоской звуковой волны в такой гомогенной среде приводит, естественно, к тем же результатам, которые получены выше методом рассеяния.

Особый интерес представляет развитие такого гидродинамического подхода для случая, когда задача о распространении звука решается для волн конечной амплитуды, т. е. с учетом нелинейности. Рассматриваемая гомогенная среда обладает, вообще говоря, значительной нелинейностью, и поэтому изучение особенностей распространения звука в такой среде привлекает особое внимание. Нелинейность в этой среде проистекает в основном из-за нелинейности уравнения состояния жидкости с пузырьками. Нелинейность же самих гидродинамических уравнений движения играет значительно меньшую роль (на 3—4 порядка).

Если привести «нелинейное» обобщение теории колебаний газового пузырька в жидкости, о которой у нас речь шла выше, то можно получить уравнение состояния смеси (считая $p/p_{ж0}$ малым параметром; здесь $p_{ж0}$ — равновесное давление в жидкости и p — акустическое давление) [54]. На основе этого уравнения состояния можно определить эффективный показатель адиабаты смеси, т. е. ее нелинейный параметр γ^*, выражение для которого было получено впервые в [55]. Этот нелинейный параметр оказывается на несколько порядков больше, чем нелинейный параметр чистой воды. Так, например, при объемном содержании воздуха в воде в отсутствие звука $V_0 \approx 2 \cdot 10^{-4}$ этот нелинейный параметр $\gamma^* \approx 5700$ (!). Ясно, что при таких больших значениях γ^* нелинейные эффекты проявляются чрезвычайно сильно, большим становится и нелинейное поглощение [56].

На основе нелинейного уравнения состояния, полученного в [54], для длинноволнового акустического возмущения в смеси жидкости с распределенными по размерам пузырьками газа получены и исследованы модельные уравнения в случае адиабатических и изотермических колебаний пузырьков; определены зависимости скорости и поглощения от частоты в области низких частот. Там же рассмотрены процессы образования акустической волны с частотой второй гармоники и волны разностной частоты, что имеет значение для работы гидроакустических параметрических антенн.

Приведенные здесь результаты относились к узкополосным звуковым сигналам. Для широкополосных сигналов уже нельзя ограничиться предельными случаями либо адиабатического, либо изотермического процессов, и достаточно простые методы решения по-

лучающихся сложных уравнений, которые можно было бы исследовать аналитическими или численными методами, еще не разработаны; для среды с пузырьками различных радиусов пока такая задача вообще не решалась.

Для модели гомогенной среды с одинаковыми радиусами пузырьков и без учета процессов теплообмена исследование методами современной теории нелинейных волн, частично рассмотренными нами в гл. 3 и 4, было проведено в [57, 58]. Для такой упрощенной модели был найден ряд интересных результатов: получено уравнение Бюргерса — Кортевега — де-Вриза, найдены акустические солитоны, проведены эксперименты, результаты которых достаточно хорошо совпали с предсказаниями теории [60, 61]. В [62] рассмотрены стационарные волны произвольной амплитуды. Здесь мы не имеем возможности детально останавливаться на большом круге этих интересных работ по нелинейной акустике жидкостей с пузырьками.

Глава 7

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ЗВУК

§ 1. Введение. Общие сведения

До сих пор мы имели дело с распространением звука в однородных покоящихся средах. Вместе с тем в природе и в технике мы часто встречаемся с турбулентным движением, основные сведения о котором даны в гл. 1. Представляет большой интерес вопрос о характере распространения звука в турбулентных средах, таких, как атмосфера или море, в которых благодаря большим масштабам движения числа Рейнольдса велики и движение среды практически всегда турбулентно.

Турбулентность приводит к флуктуациям гидродинамических параметров. В атмосфере — к возникновению случайных полей пульсаций скорости потока $\boldsymbol{u}$, температуры $T_{\text{п}}$, плотности $\rho_{\text{п}}$, давления $p_{\text{п}}$, влажности e и т. д. Эти пульсации вызывают флуктуации показателя преломления n среды и скорости распространения волн (для света играют роль $p_{\text{п}}$ и $T_{\text{п}}$, для радиоволн СВЧ диапазона — $p_{\text{п}}$, e и $T_{\text{п}}$, для звука — $\boldsymbol{u}$, $T_{\text{п}}$ и e). Для наглядности можно представить, что все пространство, занятое турбулентным потоком, случайным образом заполнено слабыми неоднородностями показателя преломления в виде выпуклых и вогнутых, т. е. фокусирующих и дефокусирующих, линз самых различных масштабов, накладывающихся друг на друга.

Флуктуации n в турбулентной среде приводят к ряду интересных явлений при распространении через такую среду звуковых волн, радиоволн и света. К их числу относятся флуктуации фазы и угла прихода волн, амплитуды или уровня сигнала, рассеяние волн и другие.

Задачи распространения звука в турбулентной среде играют существенную роль в атмосферной акустике и гидроакустике; электромагнитных волн в атмосфере — в атмосферной оптике, распространении лазерного излучения, радиосвязи, астрономии. Мы обсудим лишь наиболее простые акустические задачи из всей этой большой проблемы, которую можно назвать «турбулентность и волны».

Первые работы по влиянию случайных неоднородностей атмосферы на распространение звука и электромагнитных волн были выполнены довольно давно. Еще в конце 30-х годов [1, 2] при изучении распространения звука при ветре было обращено внимание на то,

что принимаемый сигнал подвержен изменениям — замираниям или фэдингам. Средний уровень сигнала уменьшается при прохождении волной заметного расстояния и зависит от скорости ветра, что можно было отнести не только к влиянию рефракции, но и к потерям энергии за счет рассеяния. В [3, 4] интерференционным методом были проведены первые систематические измерения флуктуаций фазы и было выяснено, что они зависели от скорости ветра и частоты звука. Далее эти работы были продолжены как в экспериментальном, так и в теоретическом направлении [4—7]; в них исследованы и флуктуации уровня сигнала.

Большое значение для решения проблемы «турбулентность и волны» сыграли как развитая в эти годы статистическая теория локально изотропной турбулентности, закон «2/3» Колмогорова—Обухова (§ 7, гл. 1), так и выявление микроструктуры развитого турбулентного потока на основе непосредственных измерений в атмосфере. Эти работы способствовали дальнейшему развитию теории волн в турбулентной среде и решению ряда прикладных задач. Работы в этом направлении продолжают развиваться как в области эксперимента, так и в области теории и многообразных приложений.

В настоящее время приобретает все большее значение метод импульсного зондирования атмосферы звуковым лучом на основе наблюдения рассеяния звука на неоднородностях коэффициента преломления [8]. Теория рассеяния волн [9, 10], использующая современные представления о структуре турбулентности, открывает возможность, используя эффект рассеяния радиоволн на звуковом импульсе, дистанционно определить характеристики атмосферы. Метод рассеяния звука используется также и для изучения неоднородностей в толще морской воды, в том числе внутренних волн.

Таким образом, исследование распространения звука в среде со случайными неоднородностями является интересной задачей физической акустики и вместе с тем оказывается важным для решения *обратной задачи — из данных по акустическому зондированию* получать сведения о турбулентном и неоднородном состоянии атмосферы и океана. В этой главе мы не имеем возможности остановиться на важной задаче генерации звука турбулентным потоком; первые важные результаты в этой области были получены в [11, 12].

§ 2. Приближение геометрической акустики

Рассмотрим сначала наиболее простой случай распространения звука в среде с флуктуациями показателя преломления в *приближении геометрической акустики* [7]. Это приближение справедливо по крайней мере при выполнении двух условий. Первое состоит в том, что масштабы неоднородностей l должны быть значительно больше длины звуковой волны: $l \gg \lambda$. О втором условии будет сказано ниже.

Если не учитывать средней скорости ветра в атмосфере (которая приведет к сносу звука и появлению доплеровского сдвига в частоте), а интересоваться только влиянием пульсаций скорости и темпе-

ратуры, то распространение звуковых волн в слабо неоднородной среде может быть описано волновым уравнением для потенциала

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 - c^2(\boldsymbol{r})\,\nabla^2\varphi = 0. \qquad (2.1)$$

Здесь скорость звука c зависит от координат $\boldsymbol{r}=\{x, y, z\}$; зависимость c от времени учитывать не будем, считая, что турбулентные пульсации «заморожены», т. е. что гидродинамические характеристики среды по сравнению с периодом звуковой волны изменяются медленно.

Сами неоднородности среды будем считать слабыми, что в условиях атмосферы или моря всегда имеет место; так, в условиях атмосферы $\mu=\Delta c/c$ обычно не превышает значений 10^{-2}—10^{-4} (для моря это отношение еще меньше). Поэтому полагаем, что

$$c = c_0\,(1+\mu). \qquad (2.2)$$

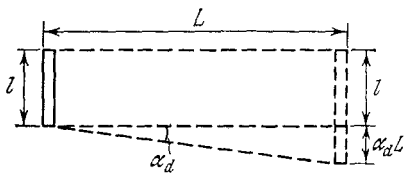


Рис. 7.1. Пояснение смысла малости дифракционной поправки $\alpha_d \ll l$.

Как уже говорилось в § 7 гл. 1, μ определяется турбулентными пульсациями векторного поля скоростей и скалярного поля температуры; вклад каждого из этих случайных полей в флуктуационные явления при распространении звука в такой среде примерно одинаков.

Решение уравнения (2.1) при условии (2.2) может быть проведено методом малых возмущений в предположении, что потенциал φ можно разложить в ряд по степеням малого параметра μ [13]:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots \qquad (2.3)$$

Этот метод, однако, можно применять лишь в случае достаточно протяженных неоднородностей l (чтобы не было заметного набега фазы, сравнимого с π), т. е. когда не только $l \gg \lambda$, но и $l \gg \sqrt{L\lambda}$. Последнее условие вытекает из следующих простых рассуждений (рис. 7.1). Если на препятствие масштаба l падает плоская волна, то для того, чтобы по прохождении пути L «тень» этого препятствия была не размыта, необходимо, чтобы дифракционное уширение, которое при малом угле дифракции $\alpha_d \approx \lambda/l$ составляет $\alpha_d L$, было мало по сравнению с l. Таким образом, $\alpha_d L \approx \lambda L/l \ll l$, откуда и следует условие малости дифракционной поправки — $l \gg \sqrt{\lambda L}$. Но величина $\sqrt{\lambda L}$ есть, как известно, радиус первой зоны Френеля, поэтому второе условие применимости геометрического приближения формулируется так: необходимо, чтобы радиус первой зоны Френеля был существенно меньше масштаба неоднородностей.

О том, насколько существенно выполнение такого условия, можно видеть из того, что даже для света с длиной волны $\lambda \approx 10^{-5}$ см в условиях турбулентной атмосферы с внутренним масштабом $l \approx \approx 1$ см, начиная с расстояния $L \approx 100$ м, условие $l \gg \sqrt{L\lambda}$ уже не выполняется.

Представим потенциал φ квазиплоской гармонической волны в виде

$$\varphi = A_0(x,\ y,\ z)\exp\{i\omega[t - S(x,\ y,\ z)/c]\}, \qquad (2.4)$$

где $S(x,\ y,\ z) = \int n\,dL$ (n — показатель преломления среды) — величина, пропорциональная фазе,— фазовая функция или *эйконал*; эйконал связан с фазой θ соотношением $\theta = (\omega/c)S = kS$. Подставим это значение φ в (2.1). Проведя дифференцирование φ по координатам и времени и приравняв действительные и мнимые части, получим два уравнения

$$\frac{n^2\lambda^2}{4\pi^2}\frac{\nabla^2 A_0}{A_0} + n^2 - (\nabla S)^2 = 0, \quad 2\nabla \ln A_0\,\nabla S + \nabla^2 S = 0. \qquad (2.5)$$

Для не слишком искривленных волновых поверхностей (заметим, что лапласиан $\nabla^2 A_0$ характеризует кривизну поверхности), т. е. для случая плавных неоднородностей, $\nabla^2 A_0/A_0$ имеет порядок, не больший $1/\lambda$; поэтому первый член при $\lambda \to 0$ (предельный переход к геометрической акустике) в первом уравнении (2.5) можно опустить, и мы получаем

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad 2\nabla \ln A_0\,\nabla S + \nabla^2 S = 0. \qquad (2.6)$$

Первое уравнение есть *уравнение эйконала*, выражающее собой *принцип Ферма*. Его смысл состоит в том, что расстояние между двумя последовательными волновыми фронтами обратно пропорционально локальному показателю преломления. Второе уравнение, связывающее фазовую и амплитудную функции, имеет смысл уравнения сохранения энергии вдоль лучевой трубки.

Вследствие пульсаций u и $T_п$ в атмосфере S, A_0 и n будут подвержены случайным изменениям. Положим, что

$$S = \bar{S} + S', \quad \ln A_0 \approx \ln \bar{A}_0 + \psi, \quad n = \bar{n} + n', \qquad (2.7)$$

где S', ψ и n' — случайные отклонения от средних значений. Подставим (2.7) в (2.6) и, пренебрегая членами второго порядка малости, такими, например, как $2\nabla\psi\nabla S'$, и принимая во внимание уравнения для средних значений величин $\ln \bar{A}_0$ и $\bar{S}$, получим

$$\nabla S' = n', \quad \nabla\psi\nabla\bar{S} = (1/2)\nabla^2 S'. \qquad (2.8)$$

Поскольку $\bar{n} \approx 1$ и, как это следует из уравнения эйконала, $\nabla\bar{S} \approx 1$, случайное изменение логарифма амплитуды ψ в точке x (для направления x вдоль луча) и случайные изменения эйконала соответственно будут

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\int_0^x \nabla^2 S'(x')\,dx', \quad S' = \int_0^x n'(x')\,dx'. \qquad (2.9)$$

Интегралы при этом берутся вдоль невозмущенного луча.

Кратко остановимся на том, как можно найти среднее квадратичное значение флуктуаций фазы для условий, когда статистиче-

ские свойства турбулентности известны. Учитываем изменение скорости звука c только за счет влияния составляющей пульсаций скорости ветра $u=u_x$ вдоль направления распространения волны x. Согласно выражению (2.9) для S', а также связи эйконала S с фазой ($\theta=\omega S/c$), для *флуктуации фазы* в точке расположения приемника $П$, находящегося на расстоянии L от излучателя, можно получить (имея в виду, что $\mu=\Delta c/c=u/c\ll 1$)

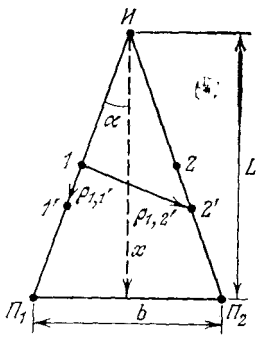


Рис. 7.2. К расчету среднего квадратичного значения флуктуаций фазы между двумя приемниками.

$$\theta(П)=\omega\int_0^L\frac{dx}{c+u}\approx-\frac{\omega}{c^2}\int_0^L u\,dx+\text{const}. \quad (2.10)$$

Считая, что $\overline{\theta}=0$, найдем $\overline{\theta^2}$. Для флуктуаций фазы после прохождения волной расстояния L получаем

$$\overline{\theta^2}\approx\left(\frac{\omega}{c^2}\right)^2\int_0^L\int_0^L\overline{u(x)\,u(x')}\,dx\,dx'. \quad (2.11)$$

Двойной интеграл может быть легко сведен к однократному. Замечая, что корреляционная функция для статистически однородных флуктуаций зависит только от разности между точками x и x', т. е. $\overline{u(x)u(x')}=B(x-x')=B(r)$, и что эта функция четная и $B(r)=B(-r)$, мы можем записать

$$\int_0^L\int_0^L B(x-x')\,dx\,dx'=2\int_0^L d\eta\int_0^{L-\eta}B(\eta)\,d\xi=2\int_0^L B(\eta)(L-\eta)\,d\eta.$$

Если радиус корреляции значительно меньше L, то окончательно имеем

$$\overline{\theta^2}\approx(2Lk^2/c^2)\int_0^\infty B(r)\,dr. \quad (2.12)$$

Отметим, что из (2.12) следует пропорциональность дисперсии флуктуаций фазы $\sigma\theta=\sqrt{\overline{\theta^2}}$ корню квадратному из проходимого волной расстояния L.

Измерения $\sqrt{\overline{\theta^2}}$ в реальных условиях (при конечных L) не приводят, однако, к постоянным значениям $\sqrt{\overline{\theta^2}}$, поскольку крупные неоднородности звуковой волны могут вносить относительно бо́льший вклад в значение $\overline{\theta^2}$, чем мелкие. Гораздо более «устойчивым» в статистическом смысле является среднее квадратичное значение разности фаз между двумя приемниками $П_1$ и $П_2$. На рис. 7.2 изображен макет звукопеленгационной установки. Звук частоты ω от излучателя $И$ принимается двумя приемниками $П_1$ и $П_2$, находящимися друг от друга на расстоянии b (база приемной системы).

Для простоты считаем, что расстояние L между центром базы и излучателем велико по сравнению с b, и тогда угол α между осью системы и направлениями $ИП_1$ и $ИП_2$ будет малым [7].

Если пространство между излучателем и приемниками заполнено случайными неоднородностями, то разность фаз $\Delta\theta=\theta(П_1)-\theta(П_2)$ сигналов в точках расположения приемников $П_1$ и $П_2$ будет флуктуировать. Естественно, что среднее значение флуктуаций $\Delta\theta$ для изотропной турбулентности будет равно нулю. Найдем среднее квадратичное значение флуктуаций разности фаз $\sigma\theta=\sqrt{\overline{[\theta(П_1)-\theta(П_2)]^2}}$ сигналов двух приемников для случая $\mu=u/c\ll 1$. Учитывая изменение скорости звука только за счет влияния пульсаций u, направленных вдоль луча $ИП_1(ИП_2)$, получим для фазы звука в точке расположения приемников, согласно (2.10),

$$\Delta\theta=\theta(П_1)-\theta(П_2)=-(\omega/c^2)\int_0^L(u_1-u_2)\,dx, \tag{2.13}$$

где значение const по левому и правому лучу считаем одинаковым. Тогда

$$\overline{(\Delta\theta)^2}=(\omega/c^2)^2\int_0^L\int_0^L\overline{\Delta u\,\Delta u'}\,dx\,dx', \tag{2.14}$$

где

$$\Delta u=u_1-u_2,\quad \Delta u'=u_{1'}-u_{2'}. \tag{2.15}$$

В силу предполагаемой изотропности поля пульсаций u, на основании закона «двух третей» $\overline{(u_1-u_{1'})^2}=C_v^2\rho_{1,1'}^{2/3}$ и того, что (как следует из этого соотношения)

$$\overline{(u_1u_{1'})}=-{}^1/_2C_v^2\rho_{1,1'}^{2/3}+\text{const}, \tag{2.16}$$

найдем

$$\overline{\Delta u\,\Delta u'}=\overline{u_1u_{1'}}+\overline{u_2u_{2'}}-\overline{u_1u_{2'}}-\overline{u_2u_{1'}}=$$
$$=-{}^1/_2C_v^2(\rho_{1,1'}^{2/3}+\rho_{2,2'}^{2/3}-\rho_{1,2'}^{2/3}-\rho_{2,1'}^{2/3})=-C_v^2\rho_{1,1'}^{2/3}+C_v^2\rho_{1,2'}^{2/3}, \tag{2.17}$$

где $\rho_{1,1'}$ и $\rho_{1,2'}$ определяются согласно рис. 7.2. Учитывая, что при малых α $\cos^2\alpha=1-\alpha^2$, $\operatorname{tg}^2\alpha=\alpha^2$, получим

$$\rho_{1,1'}^2=(x-x')^2(1+\alpha^2), \tag{2.18}$$
$$\rho_{1,2'}^2=(x-x')^2+(x+x')^2\alpha^2. \tag{2.19}$$

Подставляя $\rho_{1,1'}$ и $\rho_{1,2'}$ из (2.18) и (2.19) в (2.17) и далее в (2.14), получаем

$$\overline{(\Delta\theta)^2}=(\omega/c^2)^2C_v^2\int_0^L\int_0^L\{[(x-x')^2+\alpha^2(x+x')^2]-$$
$$-(x-x')^{2/3}(1+\alpha^2)^{1/3}\}\,dx\,dx'. \tag{2.20}$$

При малом угле α ($b\ll L$) интегрирование можно выполнить приближенно. Для среднего квадратичного значения флуктуации

разности фаз получаем следующую формулу:

$$\sigma\theta = \sqrt{\overline{(\Delta\theta)^2}} = \text{const} \cdot (\omega/c)\, C_v L^{1/2} b^{5/6}, \qquad (2.21)$$

где const имеет значение порядка единицы, а C_v — так называемая характеристика поля пульсаций скоростей, пропорциональная интенсивности турбулентных пульсаций.

Аналогичное рассмотрение можно провести и для влияния поля пульсаций температуры. При этом получается в точности такая же формула, поскольку и в этом случае используется закон «2/3», отличающийся лишь тем, что C_v заменяется на характеристику температурных пульсаций $B_т$ (см. § 7 гл. 1). Вклад полей u и $T_п$ в $\sigma\theta$ оказывается приблизительно одинаковым.

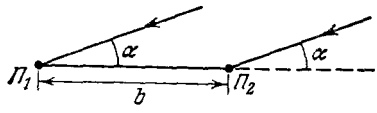


Рис. 7.3. Схема расположения базы из двух приемников, определяющих флуктуации угла прихода волны.

Проведенное рассмотрение является весьма грубым; в нем не учитывается векторный характер поля скоростей, углы α считались малыми. Подробное изложение этого круга вопросов содержится в [14].

Отметим здесь, что нам удалось получить формулу для $\sigma\theta$ в явном виде — через значение характеристики турбулентности C_v, параметров звукового поля ω, c, параметров задачи L и b при том непременном условии, что мы воспользовались конкретным видом структурной функции полей пульсаций скоростей и температур турбулентной среды. Эта функция использовалась в виде закона «2/3» Колмогорова — Обухова.

Первые эксперименты, проведенные в 1941 г. [4], в области частот звука килогерцевого диапазона и низкочастотного ультразвука $\approx$20 кГц не только подтвердили характер зависимости $\sigma\theta$ от ω, L, b, но и позволили оценить значение характеристики турбулентности C_v, т. е. использовать акустический метод для исследования атмосферной турбулентности. Это значение C_v оказалось для данных условий акустического эксперимента несколько меньшим, чем значение, определяемое методом микроанемометра, широко применяемого малоинерционного прибора для измерения скорости и направления ветра. Если при этом учесть, что в формуле (2.21) учитывались лишь флуктуации скорости и не принималось во внимание поле пульсаций температуры (а оно, как отмечалось, дает примерно такой же вклад в значение флуктуации фазы), то соответствие результатов акустического метода измерения C_v и метода микроанемометра становится еще более близким.

Нужно сказать, что хорошее совпадение результатов измерений C_v, полученных разными методами, свидетельствует о правильности основ теории и о возможности развития подобного подхода применительно к волнам другой природы, распространяющимся в турбулентной среде,— радиоволнам и свету.

Эти работы дали толчок развитию большого раздела радиофизики — «волны и турбулентность» [14—20].

Полученная формула (2.21) для $\sigma\theta$ дает возможность выяснить источник ошибок при работе звукопеленгатора. Пусть направление на источник звука составляет угол α с направлением базы b (рис. 7.3). Тогда в невозмущенном потоке разность фаз на концах базы будет

$$\theta = (2\pi b/\lambda)\cos\alpha. \tag{2.22}$$

Если теперь под влиянием турбулентности фаза получает случайное изменение $\delta\theta$, то

$$\delta\alpha \approx (\lambda/2\pi b)\,\delta\theta \sin^{-1}\alpha. \tag{2.23}$$

При значениях $\alpha \leqslant \pi/2$ имеем

$$\delta\alpha \approx (\lambda/2\pi b)\,\delta\theta. \tag{2.24}$$

Аналогичное соотношение будет иметь место для средних квадратичных ошибок:

$$\sigma\alpha \approx (\lambda/2\pi b)\,\sigma\theta, \tag{2.25}$$

или, если воспользоваться формулой для $\sigma\theta$,

$$\sigma\alpha \approx (\text{const}/2\pi)\, C_v L^{1/2} b^{-1/6}. \tag{2.26}$$

Из этой формулы следует, что $\sigma\alpha$ не зависит от длины волны звука λ и в очень малой степени зависит от базы. В рамках справедливости геометрического приближения эта формула подтверждается экспериментами.

При распространении монохроматической звуковой волны в турбулентном потоке должно несколько увеличиваться среднее значение частоты звука, а сама спектральная линия сигнала должна несколько размываться. Эти явления удается описать, используя гамильтонов подход (см. § 5 гл. 4. с. 115).

Мы уже говорили, что понятие фонона или кванта упругого возмущения, обычно используемое в физике твердого тела, можно распространить также на газы и жидкости. В результате действия возмущающих факторов (поля пульсаций скоростей) число фононов в заданном состоянии может изменяться с течением времени: фононы могут приходить и уходить из данного элемента фазового пространства. Может оказаться, что в результате действия внешних случайных нестационарных возмущений функция распределения фононов, а следовательно, и средняя энергия фонона будут изменяться со временем монотонным образом. В частности, средняя энергия может возрастать. В этом случае мы можем говорить об ускорении фононов.

Здесь имеется аналогия с известным эффектом Ферми статистического ускорения частиц. Еще в 1949 г., занимаясь проблемой происхождения космических лучей высоких энергий, он высказал идею об ускорении заряженных частиц, движущихся среди случайных магнитных полей [21]. Эта идея получила развитие и была распространена, в частности, на случай ускорения нейтральных частиц (фотонов, нейтрино) при их движении в плазме.

Основная часть задачи об ускорении фононов заключается в том, чтобы вычислить вероятность их перехода из заданного элемента фазового пространства. Для определения этой вероятности следует определить операторы рождения и уничтожения фононов, для чего необходимо корректно построить гамильтониан звукового поля на основе введения соответствующих канонических переменных. Из этого гамильтониана должны следовать уравнения движения среды.

Найдя гамильтониан для звука в турбулентной среде, можно получить кинетическое уравнение для функции распределения фононов и, используя выражение

для спектрального тензора корреляции пульсаций поля скоростей в турбулентном потоке, рассчитать ускорение фононов в турбулентной среде [22]. В результате расчета удается получить выражение для изменения (увеличения) средней частоты $\Delta\omega$ в зависимости от пройденного звуковой волной расстояния.

Уравнения геометрического приближения (2.9) дают возможность найти среднее квадратичное *флуктуации логарифма амплитуды* [23]. Согласно определению S' имеем

$$\nabla^2 S' = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c}\int_0^x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx.$$

Подставляя это выражение для лапласиана S' в (2.9) и интегрируя один раз, найдем

$$\psi = \frac{1}{2c}(u|_0 - u|_L) - \frac{1}{2c}\int_0^L (L-x')\left[\frac{\partial^2 u(x')}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x')}{\partial z^2}\right] dx', \quad (2.27)$$

откуда величина $\overline{\psi^2}$, в соответствии с (2.27), будет равна

$$\overline{\psi^2} \approx \frac{1}{4c^2}\int_0^L\int_0^L (L-x)(L-x')\overline{\left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial z^2}\right]\left[\frac{\partial^2 u(x')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u(x')}{\partial z'^2}\right]} dx\,dx'. \quad (2.28)$$

Считая турбулентность изотропной, получим

$$\overline{\psi^2} \approx \frac{1}{2c^2}\int_0^L\int_0^L (L-x)(L-x')\overline{\left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u(x')}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u(x')}{\partial z'^2}\right]} dx\,dx'. \quad (2.29)$$

Дальнейшее вычисление можно провести, если знать в явном виде корреляцию вторых производных пульсаций скорости. Результат вычисления $\sqrt{\overline{\psi^2}}$, основанный на ряде упрощающих предположений с учетом закона «двух третей», приводит к зависимости

$$\sqrt{\overline{\psi^2}} \approx L^{3/2}. \quad (2.30)$$

Существенно, что среднее квадратичное значение флуктуаций амплитуды, согласно формуле (2.30), пропорционально $L^{3/2}$.

Эксперименты, поставленные по изучению флуктуаций уровня звукового сигнала, показали [5, 6], что такая закономерность соблюдается в атмосферных условиях (приземный слой) лишь при малых L; при увеличении L зависимость $\sqrt{\overline{\psi^2}}$ от L приблизительно $\sim L$; налицо явное расхождение с теорией.

Принципиальная неточность в вычислении $\sqrt{\overline{\psi^2}}$ связана, очевидно, с использованием приближения геометрической акустики. Ясно, что расхождение с теорией может быть устранено, если решать задачу более строго, используя не геометрическую, а волновую трактовку, когда учитываются дифракционные эффекты.

§ 3. Приближенный учет дифракционных поправок. Метод плавных возмущений

Учесть дифракционные эффекты можно приближенно на основе более общих уравнений, чем уравнения геометрической акустики. Это можно сделать с помощью *метода плавных возмущений*. Идея метода в применении к задаче о рассеянии звука и света полем турбулентных неоднородностей была развита А. М. Обуховым [24]. Отметим, что аналогичный подход был ранее использован С. М. Рытовым при решении задачи о дифракции света на ультразвуке [25].

Введем комплексную функцию [13]:

$$\chi(\boldsymbol{r}) = \theta(\boldsymbol{r}) + i \ln(A/A_0), \tag{3.1}$$

где $\theta(\boldsymbol{r})$ — фаза. Воспользуемся для потенциала φ представлением $\varphi(\boldsymbol{r}, t) = A_0 \exp[i(\omega t - \chi \boldsymbol{r})]$ и подставим это значение в уравнение (2.1), т. е. в начальной стадии поступим так же, как и в § 2 при получении уравнений (2.5). Но не будем теперь переходить к пределу $\lambda \to 0$ в этих уравнениях, а найдем уравнения для комплексной функции χ. Тогда получим

$$(\nabla\chi)^2 + i\nabla^2\chi = k_0(1+\mu)^2, \quad k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c_0. \tag{3.2}$$

Заметим, что для невозмущенного звукового поля $\chi = \chi_0 = k_0 x$. Если далее положить $\chi = \chi_0 + \chi'$ и подставить это значение в (3.2), то, пренебрегая членами, в которых содержатся $(\nabla\chi')^2$, получим основное уравнение метода плавных возмущений:

$$2(\nabla\chi'\,\nabla\chi_0) + i\nabla^2\chi' = 2\mu k_0^2. \tag{3.3}$$

Оно оказывается линейным относительно возмущения комплексной фазы χ'. Так как членами $(\nabla\chi')^2$ мы пренебрегали, необходимо, чтобы на расстояниях порядка λ относительные изменения волнового поля были незначительны. В этом смысле и оправдано название этого метода как метода плавных возмущений.

Если в уравнении (3.3) опустить дифракционный член $i\nabla^2\chi'$, то мы снова возвращаемся к уравнениям (2.8).

Для учета дифракционных эффектов можно, вообще говоря, пользоваться более простым уравнением, чем (3.3):

$$2k_0 \frac{\partial\chi'}{\partial x} + i\left(\frac{\partial^2\chi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi'}{\partial z^2}\right) = 2\mu k_0^2, \tag{3.4}$$

(здесь $\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \nabla_\perp^2$ — «поперечный» лапласиан), решение которого записывается в виде

$$\chi'(x, y, z) = \frac{ik_0^2}{2\pi}\int_0^L \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[-\frac{ik_0\rho^2}{2(x-\xi)}\right](x-\xi)^{-1}\mu(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{3.5}$$

где $\rho = (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$. Для турбулентного поля $\mu(x, y, z)$ представляет собой случайную функцию координат и для вычисления $\overline{S'^2} =$

$=(\omega/c)^{-2}\overline{\theta'^2}$ и $\overline{\psi^2}=\overline{[\ln(A/A_0)]^2}$ следует решать статистическую задачу.

Одной из наиболее важных характеристик поля пульсаций $\mu(x, y, z)=\mu(M)$ служит корреляционная функция $B(M_1, M_2)=\overline{\mu(M_1)\mu(M_2)}$, которая, если случайное поле значений μ изотропно, зависит от расстояния между точками M_1 и M_2, а $\overline{\mu(x, y, z)}=0$. Сами величины корреляционных функций следует брать из эксперимента, учитывая, что при больших r $B\to 0$. В качестве B часто берут гауссовскую корреляционную функцию $B(r)=\overline{\mu^2}\times\exp(-r^2/2l_0^2)$ или экспоненциальную функцию $B(r)=\overline{\mu^2}\exp(-r/l_0)$. Более обоснованно с физической точки зрения пользоваться структурными функциями $D(r)=\overline{[\mu(r+\rho)-\mu(\rho)]^2}$, которые связаны с корреляционной функцией $B(r)$ соотношением $D(r)=2B(0)-2B(r)$.

При экспериментальном определении $D(r)$ отпадает трудность выделения среднего уровня. Использование вместо B функции D имеет еще то преимущество, что значение этой функции естественно вытекает из теории локально-изотропной турбулентности (см. § 7 гл. 1).

Как мы видели выше (§ 2), для среды со случайными неоднородностями определение $\sigma\theta$ и $\sigma\psi$ сводится к использованию уравнений для фазы и логарифма амплитуды, возведению их в квадрат, последующему усреднению и использованию функций B или D для данной турбулентной среды.

Более точная теория, основанная на методе плавных возмущений, учитывающая дифракционные эффекты, согласно уравнению (3.4) при использовании корреляционной функции гауссовского типа дает для флуктуаций эйконала $\overline{S'^2}$ и логарифма амплитуды $\overline{\psi^2}$ следующие выражения [13]:

$$\begin{aligned}&\overline{S'^2}\approx(2\pi^2)\,\overline{\mu^2}\,(lL/\lambda^2)\,(1+D_1^{-1}\operatorname{arctg}D_1),\\&\overline{\psi^2}=\overline{[\ln(A/A_0)]^2}\approx(2\pi)^2\,\overline{\mu^2}\,(lL/\lambda^2)\,(1-D_1^{-1}\operatorname{arctg}D_1).\end{aligned}\qquad(3.6)$$

Здесь $D_1=\lambda L/2l$, $S'=\int\mu\,dx$, $\ln(A/A_0)=-(1/2)\int\nabla^2S'\,dx$.

Если $L\ll L_{кр}=2\pi l^2/\lambda$ (это соответствует условию $l\gg\sqrt{\lambda L}$) и $D_1\ll 1$ (малые расстояния), то мы получаем формулы геометрического приближения:

$$\overline{S'^2}\approx(2\pi)^2\,2\overline{\mu^2}\,Ll/\lambda^2,\quad\overline{\psi^2}=\overline{[\ln(A/A_0)]^2}\approx(\pi/3)\,\overline{\mu^2}\,(L/l)^3.\qquad(3.7)$$

В другом же предельном случае ($L\gg L_{кр}$, $D_1\gg 1$) имеем

$$\overline{S'^2}\approx(2\pi)^2\,\overline{\mu^2}\,Ll/\lambda^2,\quad\overline{\psi^2}=\overline{[\ln(A/A_0)]^2}\approx(2\pi)^2\,\overline{\mu^2}L.\qquad(3.8)$$

Из сравнения формул для $\overline{S'^2}$ для этих двух предельных случаев следует, что $\overline{S'^2}$ из (3.7) отличается от $\overline{S'^2}$ из (3.8) лишь численным множителем 1/2, тогда как пропорциональность L сохраняется. С другой стороны, значения $\overline{\psi^2}$ и характер зависимости $\overline{\psi^2}$ от рас-

стояния L в случаях (3.7) и (3.8) сильно разнятся. Если в трактовке геометрической акустики $\overline{\psi^2} \sim L^3$, то с учетом дифракционных эффектов $\overline{\psi^2} \sim L$. На рис. 7.4 представлен результат эксперимента [5] по измерениям $\sqrt{\overline{\psi^2}}$ на частотах звукового диапазона. Таким образом (см. также [6]), учет дифракционных эффектов для объяснения флуктуаций амплитуды приводит к согласию эксперимента с теорией.

Пользуясь методом плавных возмущений, можно решать задачи о рассеянии волн на неоднородностях показателя преломления; об этом будет идти речь далее.

Если принять структурную функцию показателя преломления (а не пользоваться корреляционными функциями, не имеющими достаточного физического обоснования) в виде

$$\overline{[n(M_1) - n(M_2)]^2} = H^2 r^{2/3}, \qquad (3.9)$$

где H — структурная характеристика поля пульсаций n, можно рассчитать средний квадрат флуктуаций амплитуды звука, используя уравнение (3.4). Получается формула

$$\sqrt{\overline{\psi^2}} = \sqrt{\overline{[\ln(A/A_0)]^2}} = 0{,}28 H^2 k^{-7/12} L^{11/12},$$

приведенная в [14]; она хорошо согласуется с данными измерений [5, 6].

Приведенный способ учета дифракционных поправок методом плавных возмущений позволил получить удовлетворительное совпадение с экспериментами, согласно которым флуктуации среднего квадратичного значения логарифма амплитуды звука в турбулентной среде растут примерно пропорционально проходимому волной расстоянию L. Вместе с тем при больших расстояниях флуктуации волнового поля становятся значительными. Возникают, как принято говорить, *сильные флуктуации* и метод плавных возмущений уже становится неприменимым.

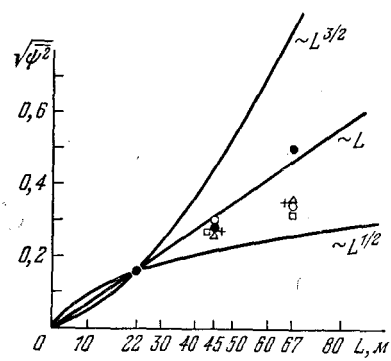


Рис. 7.4. Зависимость $\sqrt{\overline{\psi^2}}$ от расстояния L. Данные измерений на частотах $f=5000$ Гц (кружки и треугольники) и $f=3000$ Гц (квадратики, крестики, черные точки), получены в различные дни.

Теория сильных флуктуаций волнового поля в турбулентной среде получила развитие по ряду направлений. Одно из них развивалось В. И. Татарским [14] на основе использования *методов теории многократного рассеяния*, разработанного в квантовой теории поля. Другой путь, так называемый *локальный метод*, был предложен Л. А. Черновым [16]. Этим методом удается получить диффе-

ренциальное уравнение параболического типа, используемое в теории дифракции и распространения волн, решение которого дает возможность не ограничиваться только первым приближением в методе малых возмущений, но учесть приближения более высокого порядка. Условия применимости этого уравнения состоят в том, что должны выполняться неравенства $2\pi l/\lambda = kl \gg 1$ (l — масштаб неоднородности), $\alpha_p/2k \ll 1$, где α_p — коэффициент рассеяния по интенсивности, и что можно пренебречь рассеянием в направлении, обратном направлению падающей волны.

Следует отметить, что локальный метод может быть применен и к обычному волновому уравнению [26]. Метод называется локальным, поскольку предполагается, что на любом участке слабонеоднородной среды можно выбрать расстояние Δx в направлении распространяющейся волны, когда одновременно выполнены два условия: во-первых, $\Delta x \gg l$ и изменение поля на этом расстоянии мало и, во-вторых, можно ограничиться первым приближением метода малых возмущений применительно к параболическому уравнению. В локальном методе не накладываются ограничения малости на величину такого изменения поля вдоль L. Выше шла речь о распространении плоских волн. Вместе с тем в ряде задач, например в задаче об усреднении апертурой приемной акустической антенны флуктуирующего сигнала, прошедшего через турбулентную среду (если применяется фокусирующая система), приходится встречаться со сферическими волнами. Возникает, таким образом, задача о распространении сферических волн в среде со случайными неоднородностями [14, 16].

§ 4. Задача о рассеянии звука на турбулентности

На турбулентных атмосферных неоднородностях, обусловленных пульсациями скоростей и температуры, происходит рассеяние звука. Впервые задачу о рассеянии звука полем пульсаций скоростей рассмотрел в 1941 г. А. М. Обухов [9]. В его работе предполагалось, что распространение плоской звуковой гармонической волны описывается уравнением для потенциала φ в виде (в отличие от (2.1))

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2} D_t^2 \varphi = 0, \tag{4.1}$$

где $D_t = \partial/\partial t + (\boldsymbol{u}\nabla)$ — оператор полной производной, $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости потока. Считалось, что можно воспользоваться именно таким упрощенным волновым уравнением акустики движущейся среды. С точностью до членов второго порядка малости по $\mu = u/c$ уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{2}{c^2}\left(\boldsymbol{u}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{4.2}$$

Разумеется, уравнение (4.2) справедливо лишь при целом ряде предположений, в частности при условии, что характерный пространст-

венный масштаб звуковой волны значительно меньше, чем масштаб потока. Кроме того, в этом уравнении не учитываются имеющиеся в турбулентной атмосфере пульсации температуры $T_п$, которые также должны дать соответствующий вклад в рассеяние звука. Турбулентность при этом считалась «несжимаемой» и поглощением звука пренебрегалось, т. е. исходными являлись уравнения гидродинамики идеальной жидкости.

А. С. Мониным [10] получено уточненное волновое уравнение для случайно-неоднородной среды с учетом одновременного влияния полей пульсаций u и $T_п$ при тех же предположениях, о которых шла речь выше.

Будем считать, что все акустические величины, в том числе акустическая скорость v зависят от времени посредством множителя $\exp(-i\omega t)$. Турбулентность предполагаем «замороженной», хотя пульсации скорости ветра u и температуры $T_п$ зависят от времени, однако их частоты малы по сравнению с частотой звука ω. Кроме того, как и в § 3, считаем, что справедлива линейная акустика. При этих предположениях волновое уравнение для распространения звука в среде со случайными неоднородностями показателя преломления с точностью до членов первого порядка u, $T_п$ имеет вид (вывод этого уравнения можно найти в [10, 14, 15])

$$\nabla^2\Pi + k^2\Pi = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T_п}{T}\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(u_i\frac{\partial\Pi}{\partial x_j}\right). \qquad (4.3)$$

Здесь Π — величина, пропорциональная акустическому давлению p', $\Pi = p'/\rho_0 c_0^2 = p'/\gamma p_0$, $p_0 + p' = p$, где p_0 — внешнее давление $|p'/p_0| \ll 1$.

Поскольку $\Pi = \Pi_0 + \Pi_s$, где Π_0 — падающее и Π_s — рассеянное поля, для Π_0 справедливо уравнение $\nabla^2\Pi_0 + k^2\Pi_0 = 0$. При ограничении линейными членами по Π_s, u, $T_п$ из (4.3) нетрудно получить уравнение, описывающее рассеянное поле в *борновском приближении* (в приближении однократного рассеяния):

$$\nabla^2\Pi_s + k^2\Pi_s = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T_п}{T}\frac{\partial\Pi_0}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{i\omega}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(u_i\frac{\partial\Pi_0}{\partial x_j}\right). \qquad (4.4)$$

Правую часть этого уравнения можно считать источником рассеянного поля. Для больших расстояний r, таких, что $\lambda r \gg L_s^2$, где λ — длина волны звука и L_s — размер рассеивающего объема (зона дифракции Фраунгофера или дальняя зона), можно использовать известное решение уравнения (4.4) для $\Pi_s(\boldsymbol{r})$. Это решение, выраженное через соответствующую функцию Грина, имеет следующий вид:

$$\Pi_s(\boldsymbol{r}) = -\frac{A_0 e^{ikr}}{4\pi r}\,kn_j k_j \int\limits_V e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}'}\left[\frac{T_п(\boldsymbol{r}')}{T} + 2n_i\frac{u_i(\boldsymbol{r}')}{c_0}\right] d^3r'. \qquad (4.5)$$

Здесь $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - k\boldsymbol{n}$ — разность волновых векторов падающей и рассеянной волн, A_0 — амплитуда падающего поля, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ — единичный вектор в направлении рассеяния, i, j — индексы суммирования.

Выражение под интегралом в квадратных скобках представляет собой флуктуацию показателя преломления $n'(\boldsymbol{r})$. Обозначив объемный интеграл в (4.5) через G, получим

$$\Pi_s(\boldsymbol{r}) = -\frac{A_0 e^{ikr}}{4\pi r} k n_i k_j G, \tag{4.6}$$

$$G = \int_V n'(\boldsymbol{r}') \exp(i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}')\, d^3\boldsymbol{r}'. \tag{4.7}$$

В дальней зоне рассеянное поле близко к полю плоской волны и, как можно показать [14], для средней интенсивности рассеянной волны следует

$$\bar{I}_s = (\rho_0 c_0^3/2)\boldsymbol{n}\,\overline{\Pi_s(\boldsymbol{r})\,\Pi_s^*(\boldsymbol{r})}; \tag{4.8}$$

плотность потока энергии падающей волны определяется выражением

$$I_0 = \rho_0 c_0^3 A_0/2. \tag{4.9}$$

Для вычисления $\bar{I}_s$ нужно, таким образом, знать функцию корреляции $\overline{\Pi_s(\boldsymbol{r})\Pi_s^*(\boldsymbol{r})}$. В выражение для Π_s, согласно (4.5), входят функции $T_\text{п}(\boldsymbol{r})$ и $u_i(\boldsymbol{r})$ и при нахождении $\overline{\Pi_s(\boldsymbol{r})\Pi_s^*(\boldsymbol{r})}$ необходимо знать корреляции для флуктуаций $T_\text{п}$ и u_i. В случае изотропной турбулентности корреляцию между полями $T_\text{п}$ и u_i будем считать отсутствующей, а корреляции $\overline{T_\text{п}(\boldsymbol{r}_1)T_\text{п}(\boldsymbol{r}_2)}$ и $\overline{u_i(\boldsymbol{r}_1)u_j(\boldsymbol{r}_2)}$ могут быть выражены через структурные функции соответственно скалярного поля пульсаций $T_\text{п}$ и векторного поля пульсаций $\boldsymbol{u}$ (закон «2/3», см. гл. 1). В свою очередь эти структурные функции могут быть представлены для статистически изотропной турбулентности через спектральные плотности [14].

В задачах рассеяния обычно пользуются *эффективным сечением рассеяния*. Введем эффективное сечение (рассеяние из единицы рассеивающего объема V в единицу телесного угла — стерадиан) следующим образом:

$$\sigma_s(\theta_s) = \bar{I}_s r^2/I_0 V. \tag{4.10}$$

Здесь θ_s — угол рассеяния, т. е. угол между направлением падающей волны $\boldsymbol{k}$ и направлением вектора рассеянной волны $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$. Отметим, что поскольку $\cos\theta_s = (\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|)\boldsymbol{n}$, то $|\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n}| = q = 2k|\sin(\theta_s/2)|$ и в рассеяние на угол θ_s главным является вклад от тех неоднородностей, которые образуют синусоидальную дифракционную решетку, период которой $l(\theta_s)$ удовлетворяет условию Брэгга:

$$l(\theta_s) = \lambda/2\,|\sin(\theta_s/2)|. \tag{4.11}$$

На основании формул (4.6)—(4.9) и вычисления $\overline{\Pi_s(\boldsymbol{r})\Pi_s^*(\boldsymbol{r})}$, которое мы здесь не приводим (оно тщательно выполнено в [14]), можно получить, согласно (4.10), следующее выражение для эффективного сечения рассеяния:

$$\sigma_s(\theta_s) = (\pi/2)\,k^4\cos^2\theta_s\,[\Phi_T(2k\sin(\theta_s/2))\,T^{-2} + \\ + \cos^2(\theta_s/2)\,E_u(2k\sin(\theta_s/2))\,\pi^{-1}c_0^{-2}\,2k\,|\sin(\theta_s/2)|^{-2}]. \tag{4.12}$$

Здесь Φ_T и E_u — спектральные функции, соответствующие корреляционной функции показателя преломления и относящиеся к температурному полю и полю пульсаций скорости. В случае применения результатов теории локально изотропной турбулентности, когда пространственные периоды решетки $l(\theta_s)$ лежат в инерционном интервале, т. е.

$$(2\pi/L_0) < 2k \sin(\theta_s/2) < (2\pi/l_{in}) \qquad (4.13)$$

(L_0 — внешний и l_{in} — внутренний масштабы турбулентности), выражения для трехмерной спектральной плотности температурного поля $\Phi_T(\varkappa)$ и спектральной плотности энергии турбулентности $E_u(\varkappa)$ имеют вид (в системе СГС) [14]

$$\Phi_T(\varkappa) = 0{,}033 B_T^2 \varkappa^{-11/3}, \quad E_u(\varkappa) = 0{,}76 C^2 \varepsilon^{2/3} \varkappa^{-5/3}. \qquad (4.14)$$

Здесь B_T — характеристика температурного поля пульсаций, входящая в закон «двух третей», C — постоянная порядка единицы, ε — диссипация энергии единицы массы за единицу времени и $\varkappa = 2\pi/l$ — пространственный волновой вектор.

В результате вычислений получаем формулу

$$\sigma_s(\theta_s) = 0{,}38 k^{1/3} \cos^2\theta_s (2\sin(\theta_s/2))^{-11/3} [C^2 \varepsilon^{2/3} c_0^{-2} \cos^2(\theta_s/2) + 0{,}13 B_T^2 T^{-2}]. \qquad (4.15)$$

Эта формула приводит к интересным и важным выводам. Из нее следует, в частности, что рассеяние «назад» ($\theta_s = \pi$), поскольку множитель $\cos^2(\theta_s/2)$ при $\theta_s = \pi$ обращается в нуль, имеет место лишь на температурных неоднородностях $T_п$. При угле $\theta_s = \pi/2$ $\cos^2\theta_s = 0$ и, таким образом, рассеяние в этом направлении отсутствует как на поле пульсаций температуры, так и на поле пульсаций скоростей u. На рис. 7.5 приведены индикатрисы рассеяния в полярных координатах, соответствующие этой формуле. Они дают наглядные представления о рассеянном поле. Индикатриса *1* соответствует функции $f_1(\theta_s) = 10 \lg\{\cos^2\theta_s [\sin(\theta_s/2)]^{-11/3} \alpha_0^{-1}\}$ (рассеяние на $T_п$), а *2* — функции $f_2 = 10 \lg\{\cos^2\theta_s [\sin(\theta_s/2)]^{-11/3} \cos^2(\theta_s/2) \alpha_0^{-1}\}$ (рассеяние на u); при этом $f_1(\theta_s = \pi) = \alpha_0$. На рис. 7.5, таким образом, показан лишь характер зависимости σ_s от θ_s; числовые значения

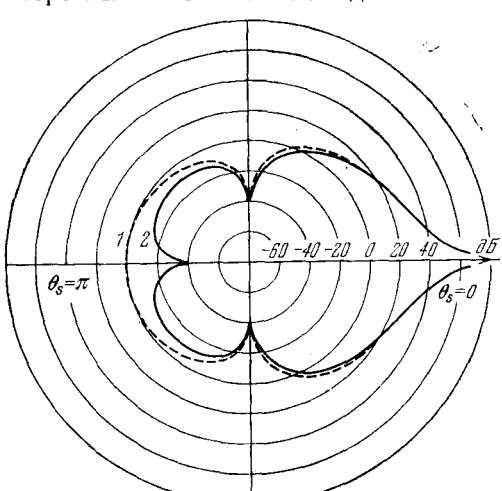


Рис. 7.5. Индикатрисы рассеяния в полярных координатах, соответствующие формуле (4.15).

при этом не даются. На самом деле рассеяние на $T_п$ значительно (на порядок) слабее, чем рассеяние на u. С этим связано наличие множителя 0,13 во втором члене (4.15); впрочем, метеорологические условия здесь играют существенную роль.

Все изложенное относилось к рассеянию звука на турбулентных неоднородностях в атмосфере. В океане также имеется турбулентное движение, поскольку гидродинамические числа Рейнольдса **Re** благодаря большим масштабам движения могут быть очень велики. Мы уже отмечали, что для условий морской среды основные представления локально изотропной теории турбулентности в довольно широких пределах выполняются. Поэтому развитая теория рассеяния может быть применима для условий моря и океана. Она с успехом была использована для вертикального зондирования как атмосферы, так и для изучения по глубине неоднородностей толщи морской среды.

§ 5. Эксперименты по рассеянию звука на турбулентных неоднородностях

Первые эксперименты по изучению рассеяния звука атмосферной турбулентностью были проведены в 1959 и 1962 гг. [8] на сравнительно высоких звуковых частотах — 10—11 кГц. Они проводились в импульсном режиме; рассеяние звука от объема V (рис. 7.6) воспринималось приемником, конструкция которого была такой же, как и излучателя (электростатические или конденсаторные излучатели $И$ и приемники $П$). Размеры их были 100×120 см^2 и ширина характеристики направленности по половинной мощности составляла несколько градусов. Расстояние от $И$ до $П$ равнялось 20—80 м (высота рассеивающего объема V над землей $\approx$12 м).

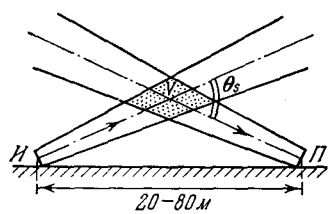


Рис. 7.6. Схема проведения измерений по рассеянию (импульсный метод) на атмосферной турбулентности (рассеяние из объема V, образующегося при пересечении характеристик направленности излучателя $И$ и приемника $П$).

Эксперименты привели к результатам, которые спустя некоторое время хорошо были объяснены теорией рассеяния, изложенной выше и приводящей к формуле (4.15). Это относится как к абсолютным значениям $\sigma_s(\theta_s)$, так и к зависимости $\sigma_s(\theta_s)$ от условий состояния атмосферы (подробнее см. [14]).

Большой шаг вперед в экспериментальном исследовании явлений рассеяния и вообще в атмосферной акустике был сделан в 1968 г. [28, 29], когда были использованы сравнительно низкие звуковые частоты — 1000 Гц и ниже, позволившие при входной мощности 0,5 кВт (196 двухваттных динамиков с диаметрами около 20 см) зондировать атмосферу до высот 1,5 км, а в дальнейшем и до 3 км. В этой установке излучатель (он же был и приемником) посылал импульс вертикально вверх. Излучение и прием производились в одной точке. Выход с усилителя (требовалось повысить

отношение сигнал/шум) подавался на записывающее устройство. Наблюдалась картина изменчивости состояния атмосферы в реальном масштабе времени. Как уже было сказано, рассеяние назад в этой системе происходит преимущественно из-за рассеяния на температурных неоднородностях; поэтому измеряется профиль B_T^2 (заметный вклад вносит также рассеяние за счет наличия водяных паров, содержание которых зависит также от T). Проносящиеся под действием ветра температурные неоднородности рассеивают звук, и запись дает хорошее представление об их характере.

По существу, мы имеем своего рода «эхолот» (сонар), используемый для измерения глубины моря. Только в случае эхолота движется судно и записываются неровности дна; в рассматриваемом же случае зондирующее устройство (которое мы будем называть *эхосонаром*) неподвижно, а мимо него движутся (проносятся) неоднородности температуры и влажности в атмосфере.

Такого рода наблюдения в определенной степени заменяют метеорологические радиозонды. С другой стороны, они дают непрерывную и длительную во времени картину состояния атмосферы (наличие внутренних волн, слоистости атмосферы и т. д.).

Имеются работы, в которых сопоставляются данные, получаемые с «эхосонара», с данными оптического зондирования атмосферы лучом лазера. Широко применяется радиолокационная техника для получения данных по рассеянию СВЧ на звуковом луче эхосонара, так называемый *радиоакустический сонар* [27—29] (радиоакустическое зондирование). Основой этого метода служит дифракция зондирующего, бегущего со скоростью света радиоимпульса на звуковом импульсе, представляющем собой дифракционную решетку. Максимум рассеяния радиоволн при этом будет в том случае, когда длина радиоволны λ_p и длина волны звука λ удовлетворяет брэгговскому условию $\lambda_p = 2\lambda \sin(\theta_s/2)$. При этом рассеянные волны складываются синфазно, происходит отражение СВЧ импульса от всей движущейся дифракционной решетки.

Система акустического зондирования может быть применена и для исследования неоднородностей показателя преломления, вызванного турбулентностью в море, в том числе для исследования внутренних волн. Используя усовершенствованный эхолот, можно «рассматривать» слабые сигналы рассеяния звука от неоднородностей морской воды (изменение плотности, температуры, скорости звука, солености [30]). Весь этот цикл работ наряду с данными, полученными другими методами, показал, что об атмосфере и об океане лишь в самом грубом приближении можно говорить как о средах, где имеется изотропная турбулентность. В действительности обе эти среды являются существенно анизотропными, главным образом слоисто-анизотропными; турбулентные неоднородности оказываются вытянутыми преимущественно в направлении потока, представляя собой образования в виде «лепешек» или «блинов» [31]. Следует думать, что такие представления об особенностях поля турбулентных пульсаций составят обширное поле дальнейших исследований по проблеме «турбулентность и волны».

Часть II

ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Глава 8

ЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 1. Основные сведения из теории упругости

Во второй части книги мы рассмотрим акустические волны в твердых телах, характеризующихся различными физическими свойствами — упругой анизотропией, пьезоэффектом, наличием носителей электрического заряда, магнитоупругостью, внутренней структурой и т. д. Однако, прежде чем переходить к изучению такого рода сложных систем, естественно ознакомиться с наиболее простым случаем — классическим идеально упругим изотропным твердым телом (диэлектриком). Под идеально упругим будем подразумевать твердое тело, в котором отсутствуют пластические деформации. Иными словами, при снятии силовой нагрузки тело приходит в первоначальное состояние (отсутствие механического гистерезиса). Феноменологически такое тело может быть описано в рамках теории упругости — хорошо разработанного раздела механики сплошных сред (см., например, [1]). Ниже приведены основные сведения из теории упругости, необходимые для понимания дальнейшего изложения. Несмотря на то, что в настоящей главе мы ограничимся рассмотрением волн бесконечно малой амплитуды в рамках линейной акустики, в целях методического единства здесь приведены и некоторые сведения из нелинейной теории упругости изотропных твердых тел.

Рассмотрим безграничное твердое тело, положение каждой точки которого до деформирования характеризуется ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}$. Пусть в результате деформирования тела некоторая точка M, описываемая радиус-вектором $\boldsymbol{r}_M$, переместится в положение M', которому соответствует радиус-вектор $\boldsymbol{r}'_M$. Смещение $\boldsymbol{u}_M$ точки M относительно первоначального положения определяется выражением $\boldsymbol{u}_M=\boldsymbol{r}'_M-\boldsymbol{r}_M$. В то же время бесконечно близкая к точке M точка N с координатами $\boldsymbol{r}_N$ в результате деформирования займет положение N', описываемое радиус-вектором $\boldsymbol{r}'_N$. Изменение расстояния между точками M и N, очевидно, может служить характеристикой процесса деформирования. Так, если до осуществления

деформирования

$$ds^2 = |\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_N|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i^2\ ^*),$$

то после деформирования

$$ds'^2 = |\boldsymbol{r}'_M - \boldsymbol{r}'_N|^2 = |\boldsymbol{r}_M + \boldsymbol{u}_M - \boldsymbol{r}_N - \boldsymbol{u}_N|^2 =$$
$$= (dx_1 + du_1)^2 + (dx_2 + du_2)^2 + (dx_3 + du_3)^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Так как *вектор смещения* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ является функцией координат x_i**), то $du_i = (\partial u_i / \partial x_k) dx_k$ и изменение расстояния определяется следующим выражением:

$$ds'^2 - ds^2 = 2u_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \qquad (1.1)$$

Тензор u_{ik} называется *тензором деформации*. Очевидно, тензор u_{ik} симметричен, т. е. $u_{ik} = u_{ki}$. Обратим внимание на то, что u_{ik} нелинейно зависит от производных вектора смещения. Поскольку такого рода нелинейность не связана с физическими свойствами тела, ее принято называть *геометрической нелинейностью*. В большинстве случаев деформации u_{ik} малы по сравнению с единицей, поэтому нелинейная добавка в выражении (1.1) представляет собой величину второго порядка малости. В линейных задачах этой добавкой пренебрегают и оперируют с линеаризованным тензором деформации $u_{ik} = {}^1/_2(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$. В таком приближении из (1.1) следует, что диагональные компоненты тензора u_{ik} — величины u_{11}, u_{22}, u_{33} — представляют собой относительные удлинения $(dx'_i - dx_i)/dx_i$ вдоль соответствующих осей, а недиагональные компоненты (при $i \neq k$) — половины углов сдвига выделенного элемента объема тела в плоскостях x_1x_2, x_2x_3 и x_1x_3. След тензора — сумма диагональных компонент u_{ii} — представляет собой относительное изменение объема тела $u_{ii} = (dV' - dV)/dV$. В соответствии со сказанным величины u_{ik} при $i = k$ называют *деформациями растяжения (сжатия)*, а при $i \neq k$ — *деформациями сдвига*.

Перейдем теперь к рассмотрению сил, возникающих в твердом теле при его деформировании и стремящихся вернуть тело в первоначальное положение. Эти силы называются *внутренними напряжениями* или *силами упругости*. Они обусловлены взаимодействием между соседними частицами тела и имеют молекулярную природу. В макроскопическом смысле эти силы являются близкодействующими; они передаются непосредственно путем контакта между соседними точками тела.

Для описания сил внутренних напряжений введем понятие тензора напряжений. С этой целью рассмотрим в упругом теле некото-

---

*) По индексам, повторяющимся дважды, производится суммирование.

**) Очевидно, координаты x_i представляют собой лагранжевы координаты, а x'_i — эйлеровы (см. гл. 1). В теории упругости обычно используются лагранжевы координаты x_i.

рый объем V, ограниченный поверхностью Π, и предположим, что этот объем испытывает силовое воздействие со стороны частиц тела, находящихся вне его. Поскольку эти силы являются близкодействующими и передаются только через поверхность Π, величина силы, действующей на элемент поверхности $d\Pi$, пропорциональна $d\Pi$; полная сила, действующая на выделенный объем V, будет выражаться через интеграл по Π. С другой стороны, полная сила, действующая на объем V, может быть представлена в виде объемного интеграла $\int \boldsymbol{F}\,dV$. Согласно векторному анализу оба представления эквивалентны, если вектор $\boldsymbol{F}$ является дивергенцией некоторого тензора второго ранга, т. е.

$$F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k. \tag{1.2}$$

При этом сила, действующая на объем V, может быть записана в виде

$$\int \partial\sigma_{ik}/\partial x_k\,dV = \oint \sigma_{ik} n_k\,d\Pi, \tag{1.3}$$

где n_k — вектор единичной внешней нормали к поверхности $d\Pi$. Тензор σ_{ik} называется *тензором напряжений*. Очевидно, величина $\sigma_{ik}n_k d\Pi$ представляет собой i-ю компоненту силы, действующей на элемент поверхности $d\Pi$ со стороны частиц, лежащих вне объема V (соответственно сила внутренних напряжений, действующая на элемент $d\Pi$ со стороны объема V по третьему закону Ньютона будет равна $-\sigma_{ik}n_k d\Pi$). Так, в прямоугольных координатах x_1, x_2, x_3 компонента σ_{ik} есть i-я компонента силы, действующей на единичную площадку, перпендикулярную к оси x_k. Можно показать [1], что тензор σ_{ik} симметричен, т. е. $\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$. Заметим, что при равномерном всестороннем сжатии тела, находящегося под давлением p, тензор напряжений имеет вид $\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}$. Знак «—» обусловлен выбором внешней нормали к поверхности Π.

Выпишем основные уравнения теории упругости. *Статическое уравнение равновесия*

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0 \tag{1.4}$$

следует из условия равенства нулю сил внутренних напряжений, действующих на каждый элемент объема ($F_i=0$). При учете сил тяжести $\rho\boldsymbol{g}$ (или любых других объемных сил) уравнение равновесия будет иметь вид

$$\partial\sigma_{ik}/\partial x_k + \rho g_i = 0; \tag{1.5}$$

здесь ρ — плотность, g_i — i-я компонента ускорения свободного падения. Приравнивая силу $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k+\rho g_i$ силе инерции, т. е. произведению массы единицы объема тела (его плотности) на ускорение $\ddot{u}_i$, получим *динамическое уравнение равновесия*, или общее (с учетом силы тяжести) *уравнение движения упругой среды*:

$$\rho\ddot{u}_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k + \rho g_i. \tag{1.6}$$

Внешние силы, приложенные непосредственно к поверхности тела (эти силы обычно и вызывают деформирование), учитываются

в граничных условиях для уравнений (1.4)—(1.6). Пусть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, равна f_i. Тогда на площадку $d\Pi$ действует сила $f_i d\Pi$. В равновесии эта сила должна компенсироваться силой внутренних напряжений, действующих со стороны объема тела — $\sigma_{ik} n_k d\Pi$. Таким образом, граничное условие, которое должно выполняться на всей поверхности тела, подверженного воздействию внешних близкодействующих сил, имеет вид

$$\sigma_{ik} n_k = f_i. \tag{1.7}$$

Перейдем теперь к определению уравнений состояния изотропного упругого тела или к установлению связи между напряжениями σ_{ik} и деформациями u_{ik}. Такая связь может быть записана феноменологически с помощью термодинамических потенциалов. В координатах недеформированного тела

$$\sigma_{ik} = (\partial \mathcal{E}/\partial u_{ik})_S = (\partial \Psi/\partial u_{ik})_T, \tag{1.8}$$

где $\mathcal{E}$ — внутренняя энергия тела, S — энтропия, Ψ — свободная энергия, отнесенные (в отличие от гидродинамики) к единице объема, T — температура. Выражения (1.8) получаются из известных термодинамических соотношений

$$d\mathcal{E} = T\,dS + \sigma_{ik}\,du_{ik}, \quad d\Psi = -S\,dT + \sigma_{ik}\,du_{ik}. \tag{1.9}$$

Поскольку распространение акустических волн сопровождается обычно адиабатическими деформациями, будем оперировать с внутренней энергией $\mathcal{E}$.

Представим внутреннюю энергию изотропного твердого тела $\mathcal{E}$ в виде ряда по степеням инвариантов тензора деформации. Нетрудно убедиться, что если в разложении $\mathcal{E}$ ограничиться членами не выше второго порядка по u_{ik}, то независимых инвариантов будет всего два, например u_{ll}^2 и u_{ik}^2. Поскольку при $u_{ik}=0$ должно быть $\sigma_{ik}=0$, то члены с первыми степенями по u_{ik} будут отсутствовать (см. (1.8)). В результате выражение для $\mathcal{E}$ примет вид

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + (\lambda/2)\,u_{ll}^2 + \mu u_{ik}^2. \tag{1.10}$$

Здесь λ и μ — постоянные Ламе, являющиеся характеристиками данного тела. В дальнейшем нас будет интересовать только та часть внутренней энергии, которая зависит от деформации — потенциальная энергия. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать $\mathcal{E}_0=0$. Дифференцируя $\mathcal{E}$ по u_{ik}, получим, согласно (1.8),

$$\sigma_{ik} = \lambda u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu u_{ik}. \tag{1.11}$$

Если произвольную деформацию u_{ik} представить в виде суммы деформаций чистого сдвига (сумма диагональных компонент равна нулю) и всестороннего сжатия:

$$u_{ik} = (u_{ik} - {}^1/_3\delta_{ik}u_{ll}) + {}^1/_3\delta_{ik}u_{ll},$$

то связь между напряжениями и деформациями можно записать также в виде

$$\sigma_{ik} = K u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\,(u_{ik} - {}^1/_3\delta_{ik}u_{ll}). \tag{1.12}$$

Величина K, связанная с постоянными Ламе соотношением $K=\lambda+{}^2/_3\mu$, называется модулем всестороннего сжатия. Величину μ называют также модулем сдвига. Наличие ненулевого значения μ говорит о том, что твердое тело, в отличие от жидкостей, наряду с объемной упругостью обладает и упругостью формы. Из условия устойчивости упругого тела (условия минимума энергии $\mathscr{E}$ при $u_{ik}=0$) следует, что постоянные K и μ всегда положительны. Если разрешить (1.11) или (1.12) относительно u_{ik}, то можно получить связь компоненты u_{ik} с компонентами σ_{ik}. Например, из (1.12) следует

$$u_{ik}=(1/9K)\,\delta_{ik}\sigma_{ll}+{}^1/_2\mu\,(\sigma_{ik}-{}^1/_3\delta_{ik}\sigma_{ll}). \qquad (1.13)$$

Выражения (1.11)—(1.13) представляют собой варианты математической записи *закона Гука*. Таким образом, изотропные твердые тела характеризуются только двумя независимыми постоянными, которые называют *модулями упругости*. Это могут быть, например, постоянные Ламе λ и μ или величины K и μ. Пользуются также другими парами модулей упругости, удобными для использования в тех или иных конкретных задачах. Это модуль Юнга E и модуль сдвига μ, а также широко используемая в теории упругости пара— модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ. Последний дает связь между относительным продольным растяжением (сжатием) упругого стержня u_{11} и его поперечным относительным сжатием (растяжением) u_{22} при приложении к стержню однородной в поперечном направлении растягивающей (сжимающей) силы f_1, приходящейся на единицу площади (однородные деформации): $u_{22}=-\sigma u_{11}$. Связь между парами K, μ и E, σ такова:

$$E=\frac{9K\mu}{3K+\mu},\quad \sigma=\frac{3K-2\mu}{2\,(3K+\mu)},\quad K=\frac{E}{3\,(1-2\sigma)},\quad \mu=\frac{E}{2\,(1+\sigma)}. \qquad (1.14)$$

Если подставить в (1.14) выражение K через λ и μ, то нетрудно получить аналогичные соотношения и между другими парами модулей упругости. Заметим, что вследствие положительности K и μ из второго равенства (1.14) следует, что $-1\leqslant\sigma\leqslant 1/2$. На самом деле коэффициент Пуассона изменяется в более узких пределах по сравнению со значениями, вытекающими из условия упругой устойчивости. А именно, всегда $0\leqslant\sigma\leqslant 1/2$. Это означает, что продольное растяжение тела сопровождается его поперечным сжатием, а не расширением. Из неравенства $\sigma\geqslant 0$ вытекает и неравенство $\lambda\geqslant 0$, поскольку $\lambda=E\sigma/(1-2\sigma)(1+\sigma)$. Таким образом, все названные упругие модули есть величины положительные.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением линейной связи между компонентами σ_{ik} и u_{ik}, учитывая только члены не выше второй степени в разложении внутренней энергии по компонентам тензора деформации u_{ik}. По этой причине упругие модули λ и μ, а также K, E, σ называют *линейными модулями* или *модулями упругости второго порядка*. Если в разложении $\mathscr{E}$ по степеням u_{ik} оставить еще и кубичные члены, то для изотропного твердого тела можно получить [1, 2]

$$\mathscr{E}=\mu u_{ik}^2+(K/2-\mu/3)\,u_{ll}^2+{}^1/_3Au_{ik}u_{il}u_{kl}+Bu_{ik}^2u_{ll}+{}^1/_3Cu_{ll}^3. \qquad (1.15)$$

Как видно, в выражении (1.15) появляются еще три постоянных коэффициента — A, B и C. Так как они стоят при кубичных членах разложения $\mathscr{E}$, их называют *модулями третьего порядка* или *нелинейными модулями упругости* (иногда — коэффициентами Ландау). Из выражения (1.15) следует, что, строго говоря, связь между напряжениями и деформациями может считаться линейной только при бесконечно малых деформациях u_{ik}. Поскольку в разложении (1.15) присутствуют пять упругих модулей, то соответствующую этому приближению нелинейную теорию упругости называют *пятиконстантной теорией* [3]. Наряду с введенными выше нелинейными модулями A, B, C в литературе используются также несколько отличающиеся от них коэффициенты Мэрнагана, названные так в честь американского физика, который одним из первых начал заниматься нелинейными проблемами теории упругости [4]. Соотношения между коэффициентами Мэрнагана и модулями A, B, C приведены в работах [2, 5], в которых можно найти также значения модулей упругости второго и третьего порядков для ряда твердых тел.

При переходе к нелинейной теории упругости необходимо, разумеется, использовать полное выражение для тензора деформации (1.1). Уравнения (1.4)—(1.6) в нелинейной теории упругости остаются в силе. За это, однако, приходится расплачиваться тем, что напряжения σ_{ik} в общем случае должны определяться по отношению к деформированной, а не к исходной поверхности, как мы делали выше. В нелинейной теории σ_{ik} называют *механическими напряжениями*, чтобы отличить их от так называемых *термодинамических напряжений* t_{ik}, определяемых в координатах недеформированного тела. Строго говоря, в выражения (1.8) и (1.9) входят именно термодинамические напряжения. Поэтому, для того чтобы замкнуть уравнения движения уравнениями состояния, необходимо использовать связь между σ_{ik} и t_{ik}. В линейном случае, однако, $\sigma_{ik}=t_{ik}$, вследствие чего в настоящей главе мы не будем делать различий между этими величинами. Более подробно о нелинейной теории упругости говорится в гл. 11, посвященной нелинейной акустике твердых тел.

§ 2. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле

Твердые тела, в отличие от жидкостей, наряду с объемной упругостью характеризуются также упругостью по отношению к сдвиговым деформациям. Поэтому картина упругих волн в твердых телах значительно богаче, чем в жидкостях. Уже в неограниченной твердой среде могут существовать не только продольные, но и поперечные волны, обусловленные сдвиговой упругостью. Наличие границ раздела приводит к появлению новых типов распространяющихся возмущений — поверхностных и граничных волн, волн в пластинах, стержнях и т. д. При описании свободных волновых движений изотропной твердой среды будем исходить из общего

уравнения движения в отсутствие объемных сил:

$$\rho\ddot{u}_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k, \quad i,\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{2.1}$$

Считая процесс распространения волн адиабатическим, что для большинства твердых тел справедливо до частот $\sim 10^{11}$—10^{12} Гц, добавим к (2.1) линеаризованное уравнение состояния (закон Гука, см. (1.11)). После подстановки (1.11) в (2.1) нетрудно получить следующее уравнение:

$$\rho\ddot{u}_i = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2},$$

которое удобно переписать в векторной форме:

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + \mu\,\Delta\boldsymbol{u}. \tag{2.2}$$

Если воспользоваться векторным тождеством:

$$\Delta\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \tag{2.3}$$

то от (2.2) легко перейти к равносильному уравнению:

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}, \tag{2.4}$$

к анализу которого мы и перейдем ниже.

Мы уже пользовались тем, что для любого кусочно-дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{u}$ по теореме Гельмгольца справедливо представление в виде суммы потенциального $\boldsymbol{u}_l$ и соленоидального (вихревого) $\boldsymbol{u}_t$ полей:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_l + \boldsymbol{u}_t, \tag{2.5}$$

где $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_l = 0$ и $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_t = 0$, причем это представление единственно. Очевидно, выражение (2.5) эквивалентно представлению вектора в виде суммы градиента некоторого скаляра φ и ротора некоторого вектора $\boldsymbol{\psi}$. При этом $\boldsymbol{u}_l = \mathrm{grad}\,\varphi$ и $\boldsymbol{u}_t = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}$.

Подстановка (2.5) в (2.4) дает

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}_l + \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_t = (\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_l - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_t,$$

откуда в силу единственности разложения вектора $\boldsymbol{u}$ на потенциальную и соленоидальную части находим

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}_l = (\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_l, \quad \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_t = -\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_t.$$

Применяя тождество (2.3) к векторам $\boldsymbol{u}_l$ и $\boldsymbol{u}_t$, получим окончательно следующие волновые уравнения для $\boldsymbol{u}_l$ и $\boldsymbol{u}_t$:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_l - c_l^2\,\Delta\boldsymbol{u}_l = 0, \tag{2.6}$$

$$\ddot{\boldsymbol{u}}_t - c_t^2\,\Delta\boldsymbol{u}_t = 0, \tag{2.7}$$

в которых через $c_l = [(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2}$ и $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$ обозначены скорости распространения потенциальных и вихревых возмущений. Эти скорости называют также продольной и поперечной скоростями звука, а соответствующие им волны — *продольными* и *поперечными*. Упо-

требляются также термины «волны сжатия — расширения» и «сдвиговые волны», так как первые связаны с изменением объема: $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_l \neq 0$, а при распространении вторых изменения объема не происходит: $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_t = 0$. В частности, для плоских волн, т. е. для волн, в которых деформации зависят только от одной из пространственных координат, например от x, имеем $u_l = u_x$ и $u_t = u_{y,z}$. Нетрудно убедиться, что в силу положительности λ и μ всегда справедливо неравенство $c_s > \sqrt{2}\, c_l$. Для гармонических полей $(\boldsymbol{u}_{l,t}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{U}_{l,t}(\boldsymbol{r}) \exp(-i\omega t))$ от уравнений (2.6) и (2.7) можно перейти к уравнениям Гельмгольца для $\boldsymbol{U}_{l,t}$:

$$\Delta \boldsymbol{U}_l + k_l^2 \boldsymbol{U}_l = 0, \quad \Delta \boldsymbol{U}_t + k_t^2 \boldsymbol{U}_t = 0,$$

где $k_l = \omega/c_l$, $k_t = \omega/c_t$ — волновые числа продольной и поперечной волн.

Заметим, что сама возможность разделения волн в твердом теле на продольные и поперечные связана с его однородностью и изотропностью. В неоднородной среде такое разделение в общем случае уже не может быть проведено [6]. То же относится и к волнам в анизотропных средах [1, 7].

Часто удобно иметь дело не с самими физическими полями, а с потенциалами, через которые эти поля выражаются с помощью дифференциальных операций. С одним из таких представлений мы уже встречались при обсуждении выражения (2.5). Перепишем его в виде $\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}$ и получим уравнения для потенциалов φ и $\boldsymbol{\psi}$. Очевидно, при выводе можно исходить непосредственно из (2.4), проводя выкладки, аналогичные сделанным выше. Более разумно, однако, сразу воспользоваться уже полученными уравнениями для $\boldsymbol{u}_l$ и $\boldsymbol{u}_t$, учитывая, что $\boldsymbol{u}_l = \operatorname{grad} \varphi$, а $\boldsymbol{u}_t = \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}$. При этом из (2.6) следует равенство

$$\operatorname{grad}(\ddot{\varphi} - c_l^2 \Delta \varphi) = 0,$$

интегрируя которое по координатам, найдем

$$\ddot{\varphi} - c_l^2 \Delta \varphi = 0. \tag{2.8}$$

Переходя к этому уравнению, мы отбросили аддитивное решение в виде некоторой функции от времени, не дающей вклада в волновое движение среды. Аналогично для векторного потенциала:

$$\operatorname{rot}(\ddot{\boldsymbol{\psi}} - c_t^2 \Delta \boldsymbol{\psi}) = 0.$$

После интегрирования получаем

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} - c_t^2 \Delta \boldsymbol{\psi} = 0. \tag{2.9}$$

Здесь мы отбросили аддитивное решение в виде суммы функции от времени и некоторого потенциального вектора. Последний обычно считают равным нулю, налагая требование соленоидальности для $\boldsymbol{\psi}$, т. е. $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$; в силу неоднозначности потенциалов это всегда можно сделать. Упрощение, достигаемое за счет введения потенциалов, состоит в уменьшении числа решаемых уравнений. Действительно,

если поля смещений описываются двумя векторными волновыми уравнениями (2.6), (2.7) и двумя условиями калибровки, то поля потенциалов — двумя волновыми уравнениями: скалярным (2.8) и векторным (2.9), дополненными одним условием калибровки $\operatorname{div}\psi=0$, аналогичным кулоновской калибровке в электродинамике. Еще бо́льшее упрощение достигается в тех случаях, когда поля обладают той или иной симметрией. Особенно просты уравнения в потенциалах для плоского движения. Пусть, например, частицы движутся в плоскости x, z. При этом отлична от нуля только y-компонента векторного потенциала $\psi_y=\psi$ и

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Анализ волновых движений сводится при этом к решению двух скалярных уравнений для φ и ψ.

§ 3. Отражение и преломление продольных и поперечных волн

Выше мы рассматривали волны в однородном безграничном пространстве. Наличие неоднородностей значительно усложняет анализ. Однако именно с неоднородными средами чаще всего приходится иметь дело. Простейшими и в то же время важными моделями неоднородностей являются *границы раздела*, описывающие резкое изменение параметров среды на малом участке пространства. В этом случае расчет значительно упрощается, так как в каждой из однородных областей можно пользоваться соответствующими волновыми уравнениями. Полученные решения «сшиваются» с помощью граничных условий, выражающих собой непрерывность напряжений и смещений на границах раздела. Для свободной поверхности граничное условие следует из условия механического равновесия, заключающегося в равенстве нулю суммы сил, действующих на поверхность. Отсюда $\sigma_{ik}n_k=0$, где n_k — вектор единичной нормали к поверхности. В случае абсолютно жесткой границы граничное условие имеет вид $u_i=0$. Для границы, допускающей скольжение, должно быть $\boldsymbol{un}=0$ и $\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=0$, где $s_i=\sigma_{ik}n_k$.

Мы рассмотрим наиболее важный случай плоских границ раздела. Отражение и преломление плоских волн в твердых телах происходят по более сложным по сравнению с жидкостью законам. Это связано с существованием в твердой среде как продольных, так и поперечных волн. Поэтому при падении на границу раздела чисто продольной или чисто поперечной волны результирующие поля, вообще говоря, содержат как продольные, так и поперечные волны. Очевидно, характер волны не меняется при нормальном падении или в случае падения под произвольным углом поперечной волны горизонтальной поляризации, вектор смещения которой параллелен границе раздела; это следует из условий симметрии задачи. Соотношения, определяющие направления отраженной и преломленной волн, также могут быть получены из соображений симметрии,

согласно которым касательные к поверхности раздела компоненты k волнового вектора $\boldsymbol{k}_{l,t}$ не должны изменяться, т. е.

$$k = \text{const}. \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) представляет собой общую запись *закона Снеллиуса*, из которой, в частности, следует, что направления отражения и преломления лежат в плоскости падения. Расписывая (3.1) для случая падения на границу раздела продольной волны, волновой вектор которой $\boldsymbol{k}_l$ составляет угол θ с нормалью (рис. 8.1, *а*), получим

$$k_l \sin\theta = k_l \sin\theta_l = k_l' \sin\theta_l' = k_t \sin\theta_t = k_t' \sin\theta_t'. \tag{3.2}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, для продольной волны

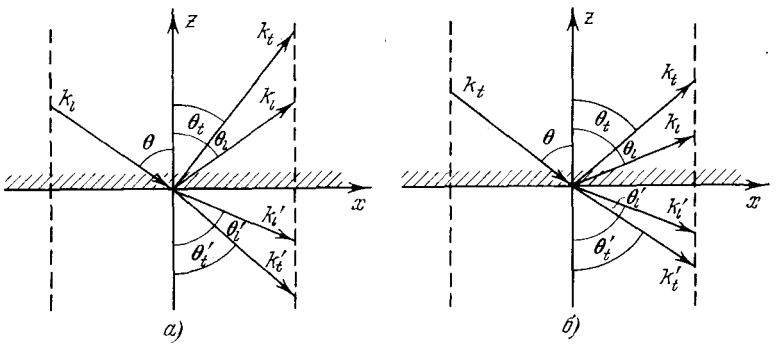


Рис. 8.1. Взаимодействие продольной (*а*) и поперечной (*б*) волн с границей раздела.

угол отражения θ_l равен углу падения θ, а угол преломления θ_l' определяется равенством

$$\sin\theta_l'/\sin\theta = k_l/k_l' = c_l'/c_l, \tag{3.3}$$

ничем не отличающимся от случая жидкости. Для образующейся на границе поперечной волны (только в этом случае можно удовлетворить граничным условиям) изменяется как угол преломления θ_t', так и угол отражения θ_t:

$$\sin\theta_t/\sin\theta = k_t/k_t, \quad \sin\theta_t'/\sin\theta = k_t/k_t'. \tag{3.4}$$

В случае падения поперечной волны вертикальной поляризации (рис. 8.1, *б*) приведенные выше выводы остаются в силе, а соответствующие выражения, связывающие угол падения с углами отражения и преломления, получаются из (3.2)—(3.4) взаимной заменой индексов l, t.

Для расчета величин коэффициентов отражения и преломления необходимо полностью решать граничную задачу. Сделаем это для важного частного случая отражения волн от свободной границы. Будем рассматривать падение продольной волны или поперечной волны, поляризованной в плоскости падения,— волны вертикальной

поляризации. При отражении поперечной волны с горизонтальной поляризацией, как уже упоминалось, трансформации волн не происходит и законы отражения и преломления принципиально не отличаются от случая жидкости. В частности, коэффициент отражения от свободной границы для смещений при этом всегда равен единице.

Пусть на границу падает гармоническая продольная волна (рис. 8.1, *а*), характеризуемая потенциалом $\varphi_{in}=\exp[i(kx-\nu_l z)]$, где $k=k_x$ и $\nu_l=(k_l^2-k^2)^{1/2}$, множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен. Отраженную продольную волну можно записать в виде $\varphi_{ref}=V_{ll}\exp[i(kx+\nu_l z)]$, где V_{ll} — коэффициент отражения продольной волны. Аналогично для отраженной поперечной волны $\psi_{ref}=V_{lt}\exp[i(kx+\nu_t z)]$, где $\nu_t=(k_t^2-k^2)^{1/2}$. Граничные условия имеют вид $\sigma_{zz}=0$, $\sigma_{xz}=0$. Выражая σ_{zz} и σ_{xz} через φ и ψ с помощью закона Гука (1.11), запишем с учетом (2.8) и (2.9)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zz}|_{z=0}&=-\mu\left[k_t^2\varphi+2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right)\right]_{z=0}=0,\\ \sigma_{xz}|_{z=0}&=-\mu\left[k_t^2\psi-2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)\right]_{z=0}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3.5)$$

Подставляя выражения $\varphi=\varphi_{in}+\varphi_{ref}$ и $\psi=\psi_{ref}$ в (3.5), получим $(k_t^2-2k^2)V_{ll}+2k\nu_t V_{lt}=-(k_t^2-2k^2)$, $2k\nu_l V_{ll}-(k_t^2-2k^2)V_{lt}=2k\nu_l$, откуда

$$V_{ll}=\frac{4k^2\nu_l\nu_t-(k_t^2-2k^2)^2}{4k^2\nu_l\nu_t+(k_t^2-2k^2)^2},\quad V_{lt}=-\frac{4k\nu_l(k_t^2-2k^2)}{4k^2\nu_l\nu_t+(k_t^2-2k^2)^2}.\qquad(3.6)$$

Аналогичные выражения для коэффициентов отражения нетрудно получить и в случае падения поперечной волны вертикальной поляризации (рис. 8.1, *б*):

$$V_{tt}=\frac{4k^2\nu_l\nu_t-(k_t^2-2k^2)^2}{4k^2\nu_l\nu_t+(k_t^2-2k^2)^2},\quad V_{tl}=\frac{4k\nu_t(k_t^2-2k^2)}{4k^2\nu_l\nu_t+(k_t^2-2k^2)^2}.\qquad(3.7)$$

От формул (3.6) и (3.7) часто переходят к записи, содержащей только углы падения *). Для этого достаточно разделить числители и знаменатели на k^4 и воспользоваться законом Снеллиуса. Мы, однако, не будем здесь останавливаться на этой простой процедуре, предоставляя ее читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Интересная особенность процессов отражения продольных и поперечных волн заключается в наличии углов падения θ, для которых $V_{ll}=V_{tt}=0$, т. е тип волны при отражении полностью трансформируется. Соответствующие углы находятся из решения уравнения $4k^2\nu_l\nu_t-(k_t^2-2k^2)^2=0$, получающегося приравниванием нулю числителей выражений для V_{ll} и V_{tt} в (3.6) и (3.7), относительно k. Это уравнение имеет не более двух корней [8], соответствующих двум

*) Необходимо помнить, что выражения (3.6) и (3.7) представляют собой коэффициенты отражения для потенциалов. Чтобы перейти непосредственно к смещениям, следует воспользоваться формулами (2.10).

возможным углам падения (по аналогии с оптикой их часто называют *углами Брюстера*). Число корней зависит от коэффициента Пуассона среды σ: при $\sigma>0{,}264$ действительные корни отсутствуют, при $\sigma\approx 0{,}264$ имеется один корень, а при $\sigma<0{,}264$ — два корня, соответствующих углам Брюстера θ_1 и θ_2. Например, для продольной волны в материале с коэффициентом Пуассона $\sigma=0{,}25$ имеем $\theta_1=60^\circ$, $\theta_2=77^\circ 13'$. Для поперечной волны в том же материале $\theta_1=30^\circ$, $\theta_2=34^\circ 19'$. Рассмотренное явление используется на практике для трансформации продольной волны в поперечную и наоборот.

Другая интересная особенность наблюдается при отражении вертикально поляризованной поперечной волны, если угол падения последней превышает так называемый критический угол $\theta_{кр}=\arccos(k_l/k_t)$. Этот случай аналогичен полному внутреннему отражению в жидкости [8]: отраженная продольная волна становится при этом *неоднородной волной*, экспоненциально убывающей в направлении положительных z, а модуль коэффициента отражения поперечной волны $|V_{tt}|$ становится равным единице.

§ 4. Поверхностные волны Рэлея

Обратимся снова к задаче о падении продольной и поперечной волн на свободную границу твердого тела. Здесь может возникнуть необычная ситуация. Как следует из формул (3.6), (3.7), отраженные волны имеют бесконечные амплитуды при

$$4k^2\nu_l\nu_t+(k_t^2-2k^2)^2=0. \tag{4.1}$$

Разделив это уравнение на k^4 и решая его относительно $\eta=k_t/k$, нетрудно показать, что на физическом листе римановой поверхности η оно имеет лишь один нетривиальный вещественный корень η_0, причем этот корень лежит между 0 и 1. Последнее означает, что падающие и отраженные волны являются неоднородными, так как их следы, или проекции волнового движения на выбранную ось — ось x, распространяются медленнее продольных и поперечных волн. Углы падения и отражения оказываются при этом комплексными, а сами волны затухают в направлении нормали к поверхности. Поскольку амплитуды отраженных волн принимают бесконечные значения при конечных амплитудах падающих волн, получающееся отраженное поле можно интерпретировать как самостоятельную *поверхностную волну* сложной структуры, существующую в твердом теле [8]. Рассматривая потенциалы отраженных волн как потенциалы искомой поверхностной волны, в соответствии с формулами (3.6) представим их в виде (отбрасывая общие знаменатели у коэффициента отражения)

$$\begin{aligned}\varphi&=A_1\left[-4k_R^2qs-(k_t^2-2k_R^2)^2\right]\exp(ik_Rx-qz),\\ \psi&=-4iA_1k_Rq\,(k_t^2-2k_R^2)\exp(ik_Rx-sz),\end{aligned} \tag{4.2}$$

где A_1 — произвольная амплитуда поверхностной волны, $q=(k_R^2-k_l^2)^{1/2}$, $s=(k_R^2-k_t^2)^{1/2}$, $k_R=k_t/\eta_0$ — действительный корень

уравнения (4.1), которое обычно записывают в форме

$$(2k^2-k_t^2)^2-4k^2(k^2-k_l^2)^{1/2}(k^2-k_t^2)^{1/2}=0. \qquad (4.3)$$

Это уравнение носит название *уравнения Рэлея*, впервые предсказавшего существование поверхностных волн в твердом теле [9], а сами эти волны называют *рэлеевскими*. Воспользовавшись (4.1), можно упростить выражение в квадратных скобках (4.2) и, сократив на $-2(2k_R^2-k_t^2)^2$, переписать φ и ψ в более простом виде:

$$\varphi=-A_1\exp(ik_Rx-qz), \quad \psi=\frac{2iA_1k_Rq}{2k_R^2-k_t^2}\exp(ik_Rx-sz). \qquad (4.4)$$

Таким образом, рэлеевская волна распространяется вдоль поверхности с фазовой скоростью $c_R=\omega/k_R$, меньшей скорости сдвиговой объемной волны. Значение c_R зависит от коэффициента Пуассона среды σ и монотонно изменяется от $0{,}87c_t$ при $\sigma=0$ до $0{,}96c_t$ при $\sigma=0{,}5$ (рис. 8.2). Амплитуды потенциалов рэлеевской волны связаны соотношением

$$\varphi/\psi=i(2k_R^2-k_t^2)/2k_Rq.$$

Переходя от потенциалов к смещениям, получим

$$u_x=A_1k_R\left[\exp(-qz)-\frac{2qs}{2k_R^2-k_t^2}\exp(-sz)\right]\exp\left[i\left(k_Rx-i\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$u_z=A_1q\left[\exp(-qz)-\frac{2k_R^2}{2k_R^2-k_t^2}\exp(-sz)\right]\exp(ik_Rx).$$

Видно, что амплитуды u_x и u_z убывают в слое толщиной $l\sim\lambda_R=2\pi/k_R$, т. е. волна оказывается существенно поверхностной. Поскольку компоненты смещений в рэлеевской волне сдвинуты по фазе на $\pi/2$, траекториями движения частиц являются эллипсы. В используемой нами системе координат (рис. 8.1) вращение частиц (относительно наблюдателя, расположенного за плоскостью рисунка) происходит против часовой стрелки при распространении волны в положительном направлении оси x.

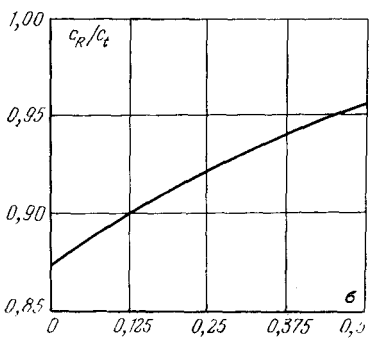


Рис. 8.2. Зависимость относительной скорости рэлеевской волны от коэффициента Пуассона среды.

Мы подошли к понятию поверхностных волн, исходя из задачи об отражении. Более прямым и строгим подходом является непосредственное отыскание решения поставленной краевой задачи в виде поверхностных волн [9—12]. Вследствие важности этого подхода для рассмотрения других типов поверхностных волн мы воспроизведем основные его черты. Задача при этом состоит в

нахождении решения волновых уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+k_l^2\varphi=0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k_t^2\psi=0,$$

затухающего по глубине тела и удовлетворяющего граничным условиям $\sigma_{zz}|_{z=0}=0$ и $\sigma_{xz}|_{z=0}=0$. Будем искать его в виде

$$\varphi=A_1\exp(ikx-\xi_l z), \quad \psi=B_1\exp(ikx-\xi_t z), \tag{4.5}$$

где A_1 и B_1 — пока не определенные комплексные константы, а $\xi_l=(k^2-k_l^2)^{1/2}$, $\xi_t=(k^2-k_t^2)^{1/2}$. Очевидно, при записи решения для поверхностных волн в виде (4.5) априорно предполагается, что $k^2>k_t^2>k_l^2$. Ниже мы увидим, что это действительно может иметь место. Непосредственной подстановкой легко проверить, что выражения (4.5) удовлетворяют волновым уравнениям. Подставляя (4.5) в граничные условия (3.5), получим соотношения между A_1 и B_1, используя которые легко найти окончательные выражения для искомых потенциалов, совпадающие с полученными ранее формулами (4.4). При этом величина $k=k_R$, удовлетворяющая записанному выше неравенству, определяется из уже знакомого нам характеристического уравнения Рэлея.

Остановимся вкратце на некоторых свойствах рэлеевских волн. Прежде всего отметим, что они имеют много общего с волнами на поверхности жидкости. Действительно, в обоих случаях частицы движутся по эллипсам, лежащим в *сагиттальной плоскости*, т. е. плоскости, проходящей через волновой вектор и нормаль к поверхности, а амплитуды смещений частиц экспоненциально убывают с глубиной *). Общность становится особенно заметной, если при решении задачи о волнах Рэлея учесть влияние силы тяжести [10] или сил поверхностного натяжения [13]. Для ультразвуковых частот влиянием силы тяжести можно пренебречь и дисперсионное уравнение для волн Рэлея приобретает вид

$$(2k^2-k_t^2)^2-4(k^2-k_l^2)^{1/2}(k^2-k_t^2)^{1/2}k^2-(\gamma_s/\mu)(k^2-k_t^2)^{1/2}k_t^2k^2=0, \tag{4.6}$$

отличающийся от (4.3) наличием дополнительного члена, обусловленного поверхностным натяжением твердого тела γ_s. Нетрудно убедиться, что в предельном случае $\mu\to 0$ (или $k_t\to\infty$), соответствующем идеальной жидкости, из (4.6) следует дисперсионное уравнение для чисто капиллярных волн в сжимаемой жидкости:

$$\omega^2=(\gamma_s/\rho)k^3(1-k_l^2/k^2)^{1/2}.$$

Отсюда при $\lambda\to\infty$ (или $k_l\to 0$) получается известное дисперсионное уравнение для капиллярных волн в несжимаемой жидкости (1.6.8):

$$\omega^2=(\gamma_s/\rho)k^3. \tag{4.7}$$

*) Влияние сдвиговой упругости у твердых тел приводит, однако, к тому, что направление вращения частиц в рэлеевской волне непосредственно на поверхности противоположно направлению вращения частиц в волне на поверхности жидкости.

В общем случае произвольного твердого тела поверхностное натяжение приводит к слабой дисперсии скорости рэлеевской волны [13], что, по-видимому, может быть использовано для экспериментальных оценок величины поверхностного натяжения твердых тел.

Поверхностный характер рэлеевских волн отчетливо проявляется в их зависимости от геометрии поверхности. Наиболее важной и простой иллюстрацией этой зависимости являются рэлеевские волны на кривых поверхностях [10], в частности волны на круговых цилиндрических поверхностях, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном к образующей [10—12, 14]. В этом случае потенциалы φ и ψ гармонических волн ищутся в виде

$$\varphi,\ \psi = A_2,\ B_2 J_p(k_{l,t} r) \exp(ip\theta)$$

для выпуклого цилиндра и

$$\varphi,\ \psi = A_2',\quad B_2' H_p^{(1)}(k_{l,t} r) \exp(ip\theta)$$

для вогнутого цилиндра, где J_p — функция Бесселя порядка p, θ — полярный угол, а угловое волновое число p связано с k очевидным соотношением $k=p/R$, где R — радиус цилиндра, $H_p^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода порядка p. Подстановка φ и ψ в граничные условия, записанные в полярных координатах, дает соответствующие дисперсионные уравнения, из которых следует, что скорости рэлеевских волн на цилиндрических поверхностях отличаются от их скорости на плоской поверхности. В частности, для гладких поверхностей, т. е. при $kR \gg 1$, справедлива приближенная формула [11]

$$k = k_R (1 - A_0/k_R R), \tag{4.8}$$

где k_R — волновое число рэлеевской волны на плоскости, $A_0 \sim 1$ — положительная константа, зависящая от коэффициента Пуассона среды. Нетрудно видеть, что для выпуклого цилиндра ($R>0$) скорость рэлеевской волны увеличивается по сравнению с ее скоростью на плоскости, а для вогнутого ($R<0$) — уменьшается. Для вогнутого цилиндра характерно также слабое затухание за счет излучения в объем среды [11, 12], не описываемое выражением (4.8). Если кривизна достаточно велика, т. е. $kR \leqslant 1$, то объемное излучение становится интенсивным и имеет место в обоих случаях. Этот факт важен для понимания процессов рассеяния рэлеевских волн на топографических неоднородностях [15—17] и, в частности, их распространения вдоль шероховатой поверхности [18—20], играющей для рэлеевских волн роль случайно неоднородной среды. В общем случае поверхностей произвольной формы приближенное аналитическое решение может быть получено при $k\rho_{min} \gg 1$, где ρ_{min} — минимальный радиус кривизны. При этом фазовая скорость рэлеевской волны зависит от двух радиусов кривизны поверхности — вдоль и поперек траектории распространения [21, 22]. Интересно, что кривизна в общем случае приводит к анизотропии скорости рэлеевской волны (свойством изотропии обладает только поверхность сферы). Поэтому будет наблюдаться отклонение вектора груп-

повой скорости от вектора фазовой скорости. Это имеет место, например, при распространении поверхностной волны под произвольным к образующей кругового цилиндра углом [22]. Если радиусы кривизны поверхности зависят от координат, то рэлеевская волна будет испытывать рефракцию, отклоняясь в область с большей кривизной аналогично световым волнам в поле тяготеющих масс. Это явление используется в так называемых топографических волноводах [23].

Рэлеевские волны, будучи наиболее распространенным типом поверхностных акустических волн, играют важную роль в сейсмических явлениях [10], так как они расходятся при распространении от источника возмущения только в двух измерениях и поэтому затухают $\sim r^{-1/2}$ — обратно пропорционально корню из проходимого волной расстояния. Волны мегагерцевого диапазона широко используются в поверхностной дефектоскопии [11, 12, 24] и в акустоэлектронных устройствах обработки сигналов [25—29]. Гиперзвуковые рэлеевские волны используются при изучении физических свойств поверхности твердого тела [30].

§ 5. Другие типы поверхностных волн

Помимо рэлеевских волн, рассмотренных в § 4, известны и другие типы поверхностных волн в твердых телах [12, 31]. Коснемся наиболее важных из них *). Прежде всего следует назвать поверхностные волны в кристаллах [32, 33]. В настоящее время строго доказано существование поверхностных волн в большинстве направлений любых срезов кристаллов [34, 35]. Анизотропия упругих свойств последних в общем случае приводит к тому, что плоская поверхностная волна имеет три компоненты смещения, а ее волновой вектор не совпадает по направлению с вектором групповой скорости **). Лишь для симметричных направлений кристалла векторы групповых и фазовых скоростей коллинеарны, а траектории частиц лежат в сагиттальной плоскости. Такие поверхностные волны, весьма схожие с рэлеевскими волнами в изотропном твердом теле, обычно называют *волнами рэлеевского типа* [32]. Типичным примером является волна, распространяющаяся в направлении Z Y-среза пьезоэлектрического кристалла ниобата лития. Заметим, что в пьезоэлектрических кристаллах поверхностная волна обычно сопровождается квазистатическим электрическим полем, что находит применение в различных акустоэлектронных устройствах обработки сигналов. Влияние пьезоэффекта приводит в ряде кристаллов к существованию чисто сдвиговых поверхностных волн [36, 37], называемых *волнами Гуляева — Блюштейна*. Эти волны, в отличие от рэлеевских, слабо неоднородны. Распространяясь со скоростью $c \approx c_t$, они спадают с глубиной на расстоянии $l \sim K_{эм}^{-2} k_t^{-1}$, где $K_{эм}$ — коэффициент электромеханической связи, характери-

*) При этом нам придется несколько выйти за рамки ограничений, сделанных в начале главы, упомянув о волнах в пьезоэлектрических кристаллах.

**) Более подробно о поверхностных волнах в кристаллах говорится в гл. 9.

зующий «силу» пьезоэффекта (обычно $l \approx 50—100\lambda_t$). По этой причине волны Гуляева — Блюштейна менее подвержены влиянию несовершенств поверхности и представляют интерес для акустоэлектронных устройств, работающих в СВЧ-диапазоне [38, 39]. Волны аналогичного вида могут существовать и в непьезоэлектрических средах при наличии внешних полей — электрического (за счет наведенного пьезоэффекта [40, 41]) и магнитного (действие силы Лоренца на электроны в металлах [42]). При этом имеется возможность управления глубиной локализации волн с помощью изменения величины прикладываемых полей.

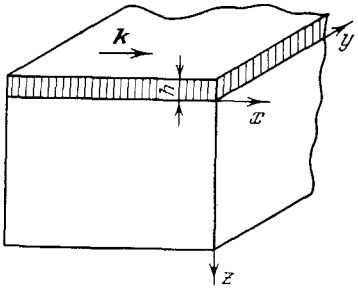


Рис. 8.3. Система «слой — полупространство».

К важной разновидности поверхностных волн относятся *волны Лява* [43, 44] в слоистой системе (рис. 8.3), состоящей из упругого полупространства и слоя, скорость поперечных волн в котором c_{t1} меньше их скорости в полупространстве c_{t2}. В такой системе могут существовать чисто сдвиговые поверхностные волны, описываемые выражениями

$$u_y = \begin{cases} A_3 \cos[s_1(h+z)] \exp(ikx), & -h < z < 0, \\ A_3 \cos(s_1 h) \exp(ikx - s_2 z), & z > 0, \end{cases}$$

где $s_1 = (k_{t1}^2 - k^2)^{1/2}$, $s_2 = (k^2 - k_{t2}^2)^{1/2}$, $k_{t1,2} = \omega / c_{t1,2}$, а волновое число k определяется из дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg}(s_1 h) = \mu_2 s_2 / \mu_1 s_1. \qquad (5.1)$$

При условии $c_{t1} < c_{t2}$ (замедляющий слой) это уравнение имеет действительные корни k_n, лежащие в пределах $k_{t2} < k_n < k_{t1}$, т. е. фазовая скорость волн Лява больше скорости поперечных волн в слое, но меньше их скорости в полупространстве. Из (5.1) также следует, что волны Лява обладают дисперсией. Это понятно, так как рассматриваемая слоистая система характеризуется размерным параметром — толщиной слоя h. Строго говоря, волны Лява не являются истинно поверхностными волнами, поскольку их существование обусловлено слоистой средой. В этом смысле они похожи на волны в приповерхностном звуковом канале в океане [8], т. е. представляют собой один из видов нормальных волн в твердой слоистой среде. Различные корни k_n дисперсионного уравнения (5.1) характеризуют соответствующие нормальные волны (моды). Число таких мод тем больше, чем больше величина $k_{t2}h$. Иногда под волной Лява понимают просто низшую моду, которая существует при всех толщинах слоя, в том числе и при $k_{t2}h \to 0$. Волны Лява, так же как и волны Рэлея, часто наблюдаются при землетрясениях, поскольку земная кора имеет слоистую структуру. В последнее время их стали использовать для создания дисперсионных линий задержки.

В системе «слой — полупространство» могут существовать и поверхностные волны, поляризованные в сагиттальной плоскости [45—47]. Такие волны называют *обобщенными волнами Лэмба* [47], так как в предельном случае $\rho_2 \to 0$, т. е., в отсутствие полупространства, они переходят в известные нормальные волны Лэмба в пластинках [11, 12, 44, 47]. При $c_{t1} < c_{t2}$ дисперсионное уравнение для обобщенных волн Лэмба, как и в случае волн Лява, имеет конечное множество корней k_n, соответствующих различным распространяющимся модам. При достаточно малой толщине слоя существует только одна мода, которая превращается в волну Рэлея при $k_{t2}h \to 0$. Следующая по порядку мода носит название *волны Сезавы*.

В отличие от волн Лява, низшая мода обобщенных волн Лэмба может существовать и в том случае, когда скорость поперечных

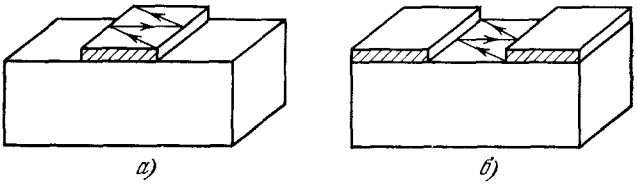


Рис. 8.4. Слоистые волноводы поверхностных волн: *а*) волновод с замедляющим слоем, *б*) волновод с ускоряющим слоем.

волн в слое больше поперечной скорости звука в полупространстве. Скорость обобщенных волн Лэмба в такой системе выше скорости волн Рэлея, распространяющихся вдоль поверхности однородной среды. Для этого случая характерно наличие верхней частоты отсечки [6], выше которой поверхностная волна излучает энергию в объем среды. Эта частота соответствует равенству скоростей обобщенной волны Лэмба и сдвиговой волны в полупространстве c_{t2}, при нарушении которого, т. е. при $c > c_{t2}$, имеет место «черенковское» излучение энергии в полупространство. В случае замедляющего слоя всегда $c < c_R < c_{t2}$ и излучение отсутствует. Обобщенные волны Лэмба широко используются в акустоэлектронике для создания *волноводов поверхностных волн*, действующих по общему принципу открытых волноводов [29, 46]. При этом употребляются как замедляющие, так и ускоряющие слои (рис. 8.4).

Кроме волн, существующих на границе твердого тела с вакуумом, известны также поверхностные волны на границе двух сред. Строго говоря, такие волны правильнее было бы назвать *граничными*. К простейшей разновидности таких волн относятся волны вертикальной поляризации, распространяющиеся вдоль границы твердого тела с жидкостью, или *волны Стоунли* [8]. Эти волны не обладают дисперсией и распространяются со скоростью, меньшей скорости звука в жидкости, спадая экспоненциально при удалении от общей границы. Отметим, что дисперсионное уравнение Стоунли имеет также комплексный корень, соответствующий отходящей ст

границы волне в жидкости и экспоненциально неоднородной волне в твердой среде [8, 12, 31]. При $\rho_ж \to 0$, где $\rho_ж$ — плотность жидкости, эта система волн вырождается в рэлеевскую волну. Таким образом, контакт с жидкостью или газом приводит к затуханию поверхностной волны за счет «черенковского» излучения из твердой среды. Подобная поверхностная волна, а также рассмотренная выше обобщенная волна Лэмба в системе с ускоряющим слоем являются примерами так называемых *волн утечки* (leaky waves) [31], существующих также в ряде направлений кристаллов и на вогнутых цилиндрических поверхностях (§ 4). Возвращаясь к волнам типа Стоунли, отметим, что они могут существовать и на границе двух твердых сред, если плотности и упругие постоянные последних удовлетворяют определенным соотношениям [12, 31, 47]. Из граничных волн с горизонтальной поляризацией можно упомянуть обобщения волн Гуляева — Блюштейна на случай двух пьезоэлектрических кристаллов, разделенных тонкой щелью (связанные волны Гуляева — Блюштейна, или *щелевые волны* [48, 49]). Существование такого типа волнового движения обусловлено связью за счет взаимного проникновения квазистатических электрических полей в кристаллы.

Целый ряд типов поверхностных волн обусловлен чисто геометрическими факторами. В работах [50, 51] показано, что на выпуклых цилиндрических поверхностях твердых тел, кроме волн рэлеевского типа, могут существовать и нерэлеевские поверхностные волны с поляризацией в сагиттальной плоскости. У этих волн продольная компонента ведет себя так же, как и смещения в рэлеевской волне, спадая с глубиной по экспоненциальному закону. Сдвиговая же часть аналогична волне типа «шепчущей галереи»; она убывает с глубиной, осциллируя. Такие волны получили наименование *волн смешанного типа* [21]. Их скорость несколько выше скорости сдвиговых волн и асимптотически приближается к ней с увеличением радиуса цилиндра. В выпуклых цилиндрах существуют чисто сдвиговые поверхностные волны, поляризованные параллельно поверхности [51]. Поскольку отражение горизонтально поляризованных сдвиговых волн аналогично отражению волн в жидкости, такие поверхностные волны, разумеется, ничем не отличаются от звуковых волн типа «шепчущей галереи», исследованных еще Рэлеем [52].

Похожая аналогия, но уже с электромагнитными волнами в металлической гребенке имеет место и для сдвиговых поверхностных волн [53, 54], распространяющихся вдоль периодически неровной границы твердого тела (рис. 8.5). Действительно, волновые уравнения и граничные условия в обоих случаях выглядят одинаково. Поэтому на основании известного решения для электромагнитных волн (см. [53, 54]) можно сразу сделать вывод, что в рассматриваемой системе может распространяться поверхностная волна, фазовая скорость которой определяется выражением

$$c = c_t [1 + (a/l)^2 \operatorname{tg}^2 (kh)]^{-1/2},$$

справедливым при $kl \ll 1$. Легко видеть, что при определенном выборе параметров a, l и h скорость поверхностной волны c может быть существенно меньше c_t.

Следует сказать о так называемых «линейных» волнах [55, 56], распространяющихся вдоль ребер упругих клиньев (рис. 8.6). Эти волны представляют новый класс волновых движений сплошной среды, сосредоточенных вблизи границ поверхностей. Упоминание о них в данном параграфе кажется нам оправданным по той причине, что, во-первых, эти волны весьма схожи с поверхностными, и, во-вторых, они еще недостаточно изучены, чтобы составить предмет самостоятельного обсуждения. Анализ этих волн весьма сложен и производится главным образом численными методами. Расчеты

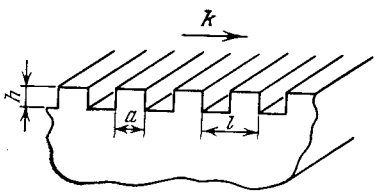


Рис. 8.5. Гребенчатая структура на поверхности твердого тела.

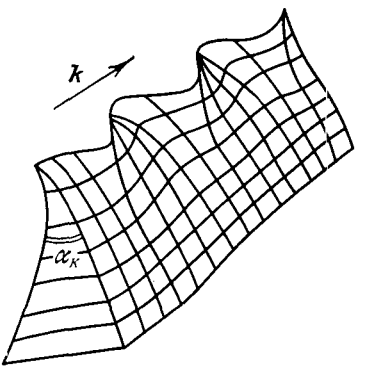


Рис. 8.6. Антисимметричные колебания ребра клина.

показывают, что произвольное поле вблизи ребра клина, как и во всяком волноводе, представимо в виде суммы мод, распространяющихся вдоль ребра со своими фазовыми скоростями. Наиболее важными с практической точки зрения представляются низшие антисимметричные моды клина (рис. 8.6). Их амплитуды быстро спадают при удалении от ребра, так что практически вся энергия волны оказывается сосредоточенной вблизи линии острия. Именно по этой причине волны подобного типа принято называть *линейными* или *клиновыми*. Эти волны бездисперсионны, так как клин характеризуется только углом раскрыва $\alpha_к$, а не линейными размерами. Скорость клиновых волн уменьшается с уменьшением $\alpha_к$ и может оказаться на порядок ниже c_t при $\alpha_к \approx 5—10°$. Физически это понятно, поскольку антисимметричные волны в остром клине схожи с антисимметричными колебаниями тонкой пластинки. Последние же, называемые также низшими антисимметричными модами Лэмба или просто изгибными волнами (подробнее см. § 6), как известно, отличаются низкой фазовой скоростью, стремящейся к нулю при уменьшении толщины пластинки [1].

Наконец, нужно упомянуть о поверхностных волнах, существование которых обусловлено механизмами нелокальности поля, связанными с микроструктурой среды [57]. В рамках классической механики сплошных сред эти волны не могут быть получены. Так, например, влияние дискретности кристаллической решетки приво-

дит к существованию в центросимметричных кристаллах слабо неоднородных чисто сдвиговых поверхностных волн [58] *) или к модификации других типов волн, в частности волн Гуляева — Блюштейна (см. [59]). Использование нелокальных моделей сплошных сред позволяет предсказать существование сильно неоднородных поверхностных волн, спадающих по амплитуде на глубине порядка межатомного расстояния в решетке [57]. Существование слабо неоднородных сдвиговых поверхностных волн может быть обусловлено также наличием адсорбированных атомов [60].

Рассмотренные типы поверхностных волн в твердых телах, разумеется, далеко не исчерпывают всё многообразие встречающихся в природе ситуаций. Особенно это относится к волнам в слоистых системах. Применительно к ним описанные слои с резкими границами должны рассматриваться как простейшие модели. То же самое можно сказать и о большинстве других механизмов, приводящих к существованию поверхностных акустических волн.

§ 6. Волны в пластинках и стержнях

Наряду с поверхностными волнами важную роль в приложениях играют волны, распространяющиеся в средах с двумя и более свободными границами. Простейшими примерами таких волн являются волны в изотропных пластинках и стержнях [1, 11, 44, 47, 61, 62] **).

Под пластинкой будем понимать упругую среду, ограниченную двумя свободными поверхностями $x=\pm b$. Поле потенциалов смещений в пластинке должно удовлетворять уравнениям (2.8), (2.9) и граничным условиям при $x=\pm b$:

$$\sigma_{xx}=0, \quad \sigma_{yx}=0, \quad \sigma_{xz}=0. \tag{6.1}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что уравнениям (2.8), (2.9) можно удовлетворить, если выбрать решение в форме [61]

$$\begin{aligned}
\varphi &= (A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\
\psi_x &= (C\cos\beta x + D\sin\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\
\psi_y &= (E\cos\beta x + F\sin\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\
\psi_z &= (G\cos\beta x + H\sin\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],
\end{aligned} \tag{6.2}$$

где α, β и γ связаны друг с другом соотношениями

$$\alpha^2+\gamma^2=\omega^2/c_l^2, \quad \beta^2+\gamma^2=\omega^2/c_t^2. \tag{6.3}$$

При этом выражения для упругих смещений в пластинках принимают вид

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}, \quad u_y=-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}+\frac{\partial\psi_x}{\partial z}, \quad u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}. \tag{6.4}$$

*) С феноменологической точки зрения [30] эти волны обусловлены изменениями силовых констант в приповерхностном атомарном слое.

**) О волнах в кристаллических пластинках можно прочитать в работах [63, 64].

В записи (6.4) учтено, что потенциалы φ и ψ не зависят от y. Если теперь подставить (6.2)—(6.4) в граничные условия (6.1) с учетом закона Гука, нетрудно получить характеристическое уравнение для нормальных волн в пластинке, левую часть которого можно представить в виде произведения четырех детерминантов:

$$\begin{vmatrix} i\gamma\cos\beta b & \beta\cos\beta b \\ \beta^2\cos\beta b & h\cos\beta b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\beta\sin\beta b & i\gamma\sin\beta b \\ -h\sin\beta b & \beta^2\sin\beta b \end{vmatrix} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} a\cos\alpha b & f\cos\beta b \\ -d\sin\alpha b & g\sin\beta b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g\cos\beta b & d\cos\alpha b \\ f\sin\beta b & a\sin\alpha b \end{vmatrix} = 0. \quad (6.5)$$

Здесь введены обозначения: $a=[(\lambda+2\mu)\alpha^2+\lambda\gamma^2]$, $d=i\cdot 2\gamma\alpha$, $f=i\cdot 2\mu\gamma\beta$, $g=\gamma^2-\beta^2$, $h=i\gamma\beta$. Уравнение (6.5), очевидно, удовлетворяется при четырех независимых решениях, когда каждый из детерминантов обращается в нуль. Последнее соответствует четырем совокупностям волновых движений, представляющим собой семейства нормальных мод пластинки. Выпишем эти семейства в последовательности, соответствующей порядку произведения детерминантов в (6.5).

Семейство I:

$$\begin{aligned} &A,\ B,\ C,\ E,\ F,\ H=0, \quad D,\ G\neq 0,\\ &u_x=0,\\ &u_y=(\beta G+i\gamma D)(\sin\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\ &u_z=0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Семейство II:

$$\begin{aligned} &A,\ B,\ D,\ E,\ F,\ G=0, \quad C,\ H\neq 0,\\ &u_x=0,\\ &u_y=(-\beta H+i\gamma C)(\cos\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\ &u_z=0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Семейство III:

$$\begin{aligned} &B,\ C,\ D,\ E,\ G,\ H=0, \quad A,\ F\neq 0,\\ &u_x=(-\alpha A\sin\alpha x-i\gamma F\sin\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\ &u_y=0,\\ &u_z=(\beta F\cos\beta x+i\gamma A\cos\alpha x)\exp[i(\gamma z-\omega t)]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Семейство IV:

$$\begin{aligned} &A,\ C,\ D,\ F,\ G,\ H=0, \quad B,\ E\neq 0,\\ &u_x=(\alpha B\cos\alpha x-i\gamma E\cos\beta x)\exp[i(\gamma z-\omega t)],\\ &u_y=0,\\ &u_z=(-\beta E\sin\beta x+i\gamma B\sin\alpha x)\exp[i(\gamma z-\omega t)]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Напомним, что дисперсионные уравнения для волн этих семейств представляют собой равенства нулю соответствующих детерминантов в (6.5).

Волны семейств I и II называют *нормальными SH-волнами* *), так как смещения у них перпендикулярны к направлению распространения и параллельны поверхностям пластинки. При этом решение вида (6.6), очевидно, представляет антисимметричные моды, а (6.7) — симметричные. Семейства III и IV соответствуют более сложным видам волнового движения. В частности, входящие в них волны содержат как продольные, так и поперечные смещения, которые все лежат в сагиттальной плоскости, т. е. в плоскости, проходящей через направление распространения и нормаль к поверхностям пластинки. Очевидно, в семействе III вектор смещения симметричен относительно плоскости $x=0$, а в семействе IV — антисимметричен. По этой причине волны этих семейств соответственно называют *продольными нормальными волнами* и *изгибными волнами*. Их также называют симметричными и антисимметричными *волнами Лэмба*, много сделавшего в исследовании этих волн.

Перейдем теперь к более подробному обсуждению некоторых типов нормальных волн в пластинках. Для антисимметричных *SH*-волн дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} i\gamma \cos \beta b & b \cos \beta b \\ \beta^2 \cos \beta b & i\gamma\beta \cos \beta b \end{vmatrix} = 0$$

имеет три решения: 1) $\beta=0$, 2) $\gamma^2+\beta^2=0$ и 3) $\cos \beta b=0$. Так как первое решение тривиальное, а второе соответствует нераспространяющейся волне, то с физической точки зрения интересно только решение 3), которое удовлетворяется последовательностью чисел

$$\beta b = (n-1/2)\pi, \quad n=1, 2, 3, \ldots \tag{6.10}$$

Аналогично для симметричных *SH*-волн

$$\beta b = q\pi, \quad q=0, 1, 2, \ldots \tag{6.11}$$

С учетом уравнений (6.3) из (6.10) и (6.11) нетрудно получить выражение для фазовых скоростей c антисимметричных и симметричных *SH*-волн

$$\frac{c}{c_t} = \left[1 - \frac{\pi^2 p^2}{(\omega b/c_t)^2}\right]^{-1/2}, \tag{6.12}$$

где $p=n-1/2$ для антисимметричных волн и $p=q$ для симметричных волн. Из уравнения (6.12) следует, что *SH*-волны в пластинке обладают дисперсией и характеризуются наличием *критических частот*, ниже которых соответствующие моды становятся нераспространяющимися. Критическая частота отсутствует только у низшей (нулевой) симметричной моды, которая существует во всем диапазоне частот от 0 до ∞. Заметим, что *SH*-волны в пластинках близки по своим свойствам к нормальным волнам в жидких волноводах, ограниченных жесткими стенками.

Волны Лэмба более сложны для анализа, так как соответствующие трансцендентные дисперсионные уравнения могут быть разре-

*) От английских слов «shear horisontal».

шены лишь численно. Для симметричных (продольных) мод дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\operatorname{tg}\beta b}{\operatorname{tg}\alpha b}=-\frac{4(\gamma b)^2(\beta b)(\alpha b)}{[(\gamma b)^2-(\beta b)^2]^2}, \tag{6.13}$$

а для антисимметричных (изгибных) — в виде

$$\frac{\operatorname{tg}\beta b}{\operatorname{tg}\alpha b}=-\frac{[(\gamma b)^2-(\beta b)^2]^2}{4(\gamma b)^2(\beta b)(\alpha b)}. \tag{6.14}$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть длина волны распространяющейся моды много больше толщины пластинки. При этом αb, $\beta b \ll 1$ и из уравнений (6.13), (6.14) нетрудно получить выражения для предельной скорости низшей симметричной (продольной) волны в пластинке

$$c_s=(2c_t/c_l)\sqrt{c_l^2-c_t^2}, \tag{6.15}$$

а также для скорости низшей антисимметричной (изгибной) моды

$$c_a=[{}^4/_3 c_t^2(\gamma b)^2(1-c_t^2/c_l^2)]^{1/2}. \tag{6.16}$$

Заметим, что выражения (6.15), (6.16) можно получить и более простым способом, если сразу считать пластинки бесконечно тонкими [1]. В другом предельном случае, при малых длинах волн, скорости обеих мод, низшей симметричной и низшей антисимметричной, стремятся к скорости рэлеевской волны c_R. Физически это вполне очевидно. Графики зависимости скоростей c_s и c_a двух указанных низших мод от величины γb изображены на рис. 8.7. Видно, что при малых γb или при низких частотах скорость изгибной моды c_a стремится к нулю.

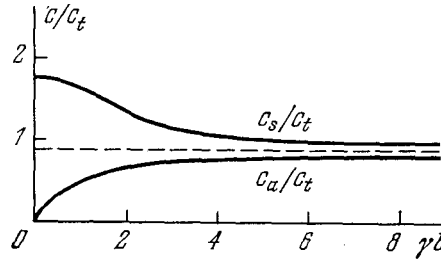


Рис. 8.7. Дисперсионные кривые для двух низших лэмбовских мод в пластинках.

Остановимся теперь вкратце на упругих волнах в стержнях. Общее решение этой задачи, аналогичное решению для пластин, в настоящее время неизвестно. Однако имеется ряд частных точных решений для некоторых случаев отношения ширины стержня к толщине и несколько приближенных решений [1, 61]. В частности, для очень тонких (по сравнению с длиной волны) стержней удобно непосредственно исходить из соответствующих приближенных уравнений движения [1]. Для случая растяжения стержня уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}=0,$$

где E — введенный ранее модуль Юнга. По этой причине продольные волны в стержнях часто называют *юнговскими*. Их фазовая

скорость, очевидно, равна $(E/\rho)^{1/2}$, т. е. она меньше скорости продольных волн в неограниченной среде. Для *изгибных волн* в таких стержнях уравнения движения срединных точек имеют вид [1]

$$\rho\Pi\ddot{x} = EI_y\,\partial^4 x/\partial z^4, \quad \rho\Pi\ddot{y} = EI_x\,\partial^4 y/\partial z^4, \tag{6.17}$$

где Π — площадь сечения стержня, а I_x и I_y — моменты инерции площади поперечного сечения стержня относительно проходящих через его плоскость осей x и y. Моменты определяются выражениями $I_x = \int y^2\,d\Pi$ и $I_y = \int x^2\,d\Pi$ аналогично обычному определению момента инерции с той разницей, что вместо элемента массы под интегралом стоит элемент поверхности $d\Pi$. Подстановка в уравнения (6.17) решений, записанных в форме

$$x \sim \exp[i(\gamma z - \omega t)], \quad y \sim \exp[i(\gamma z - \omega t)],$$

приводит к следующим соотношениям между частотой и постоянной распространения:

$$\omega = \gamma^2 (EI_y/\rho\Pi)^{1/2}, \quad \omega = \gamma^2 (EI_x/\rho\Pi)^{1/2}$$

соответственно для колебаний вдоль осей x и y. При этом фазовые скорости определяются выражениями

$$c^{(x)} = 2\gamma (EI_y/\rho\Pi)^{1/2}, \quad c^{(y)} = 2\gamma (EI_x/\rho\Pi)^{1/2}.$$

Кроме продольных и изгибных волн, в тонких стержнях могут также распространяться *крутильные волны*, удовлетворяющие уравнению [1]

$$G\partial^2\varphi'/\partial z^2 = \rho I\,\partial^2\varphi'/\partial t^2,$$

где $I = \int (x^2 + y^2)\,d\Pi$ — момент инерции сечения стержня относительно его центра инерции, G — так называемая крутильная жесткость стержня, φ' — угол кручения. Очевидно, крутильные волны бездисперсионны, а их скорость распространения равна $\sqrt{G/\rho I}$.

Глава 9

ОСНОВЫ КРИСТАЛЛОАКУСТИКИ

§ 1. Плоские упругие волны в кристаллах. Уравнение Кристоффеля. Квазипродольные и квазипоперечные волны

Изучение упругих волн в кристаллах, или, более точно, в монокристаллах, имеет фундаментальное значение для физики твердого тела и представляет собой основу многих современных научных направлений — квантовой акустики, акустоэлектроники, акустооптики и т. д. Если говорить о традиционных приложениях акустики твердого тела — ультразвуковых линиях задержки и фильтрах, то здесь использование монокристаллов позволяет существенно повысить рабочие частоты соответствующих устройств, так как затухание звука в этом случае значительно меньше, чем в изотропных телах, обычно представляющих собой поликристаллы.

Волновые явления в кристаллах, т. е. в средах с ярко выраженной анизотропией целого ряда физических свойств, характеризуются более сложными закономерностями по сравнению с изотропным случаем. Это легко показать уже на примере диэлектрических кристаллов, не обладающих пьезоэффектом или магнитоупругостью. Линеаризованное уравнение состояния кристалла (обобщенный закон Гука) в этом случае имеет вид

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{kl}, \tag{1.1}$$

где c_{ijkl} — *тензор упругих модулей*, $u_{kl} = (1/2)(\partial u_k/\partial x_l + \partial u_l/\partial x_k)$ — линеаризованный тензор деформации. Как и при рассмотрении упругих волн в изотропном теле, под c_{ijkl} будем подразумевать адиабатические значения модулей упругости. Подстановка выражения (1.1) в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_i = \partial \sigma_{ij}/\partial x_j$$

дает

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

откуда с учетом симметрии тензора c_{ijkl} по индексам k и l, вытекающей из симметрии тензора u_{kl}, получаем следующее уравнение движения:

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} \partial^2 u_l / \partial x_j \partial x_k. \tag{1.2}$$

Это уравнение можно также записать в более компактной форме $\rho\ddot{u}_i = c_{ijkl}u_{l,\,jk}$, которой мы будем в дальнейшем широко пользоваться. Будем искать решение этого уравнения в виде монохроматических плоских волн

$$u_i = u_{0i}\exp[i(k_\alpha x_\alpha - \omega t)], \tag{1.3}$$

где $u_{0i}=\text{const}$. Подставляя (1.3) в (1.2), получим

$$\rho\omega^2 u_{0i} = c_{ijkl}k_j k_k u_{0l}. \tag{1.4}$$

С помощью соотношения $u_{0i}=\delta_{il}u_{0l}$ это уравнение можно переписать в виде

$$(c_{ijkl}k_j k_k - \rho\omega^2\delta_{il})\,u_{0l} = 0. \tag{1.5}$$

Если ввести обозначение $\Gamma_{il}=c_{ijkl}n_j n_k$, где n_j — направляющие косинусы волнового вектора $\boldsymbol{k}$ или компоненты вектора волновой нормали, то (1.5) удобно переписать так:

$$(\Gamma_{il} - \rho v^2\delta_{il})\,u_{0l} = 0, \tag{1.6}$$

где $v=\omega/|\boldsymbol{k}|$ — пока не определенная фазовая скорость *). Уравнение (1.6), или, точнее, систему трех однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных u_{0l}, обычно называют *уравнением Кристоффеля*. Как известно, система однородных уравнений имеет нетривиальные решения только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов при u_{0l}, равен нулю:

$$|\Gamma_{il} - \rho v^2\delta_{il}| = 0. \tag{1.7}$$

Выражение (1.7), представляющее собой характеристическое уравнение для упругих волн в кристаллах, очевидно, определяет собственные значения симметричного тензора Γ_{il}. Из условий упругой устойчивости кристалла следует, что этот тензор, называемый также *тензором Кристоффеля*, должен быть положительно определенным [1—3]. Из этого в свою очередь вытекает, что все три собственных значения тензора Γ_{il} — величины $\rho v^2_{(m)}$ — тоже положительны. Таким образом, в любом направлении произвольного анизотропного кристалла могут распространяться три плоские волны с различными скоростями $v_{(m)}$. Подставляя поочередно каждый из корней $\rho v^2_{(m)}$ в уравнение (1.6), найдем значения соответствующих смещений $u_{0l}^{(m)}$, или собственных векторов тензора Γ_{il}. При этом в силу однородности уравнений (1.6) для каждого m определяются, конечно, только соотношения между тремя компонентами $u_{0l}^{(m)}$. Все три собственных вектора $u_{0l}^{(m)}$, соответствующие разным m, взаимно ортогональны, причем в общем случае они расположены под некоторым углом как к волновой нормали n_j, так и к плоскости, к ней перпендикулярной. По этой причине в кристаллоакустике обычно не используется представление смещений с помощью скалярного и векторного потенциалов, столь распространенное при изучении волн в изотропных твердых телах.

*) В кристаллоакустике фазовую скорость принято обозначать буквой v, чтобы не путать ее с упругими модулями c_{ijkl}.

Принята следующая классификация: если вектор смещения волны близок по направлению к волновой нормали, то волна называется *квазипродольной*; если же вектор смещения почти перпендикулярен к волновой нормали, то волна называется *квазипоперечной*. Обычно в кристаллах вдоль произвольного направления $\boldsymbol{n}$ распространяется одна квазипродольная волна с вектором смещения $\boldsymbol{u}^{(1)}$ и две квазипоперечные — с векторами смещения $\boldsymbol{u}^{(2)}$ и $\boldsymbol{u}^{(3)}$ (рис. 9.1). Лишь в особых направлениях кристаллов, соответствующих плоскостям и осям симметрии, возможно распространение так называемых *чистых волн*, векторы смещения которых либо совпадают по направлению с $\boldsymbol{k}$, либо перпендикулярны к нему. Напомним, что в изотропном твердом теле такая ситуация имеет место для любого направления распространения.

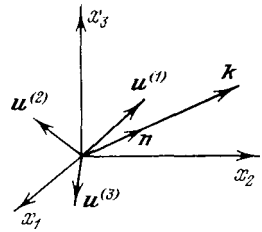


Рис. 9.1. Векторы смещений для упругих волн в кристаллах: $\boldsymbol{u}^{(1)}$ соответствует квазипродольной волне, $\boldsymbol{u}^{(2)}$ и $\boldsymbol{u}^{(3)}$ — квазипоперечным.

§ 2. Влияние симметрии упругих свойств на распространение волн. Пример расчета для кубического кристалла

Остановимся вкратце на основных упругих свойствах кристаллов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Прежде всего заметим, что из выражения для внутренней, или потенциальной энергии деформированного кристалла [3, 4]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{п}} = {}^1/_2 c_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

следует, что из-за симметрии тензора деформации u_{ij} произведение $u_{ij}u_{kl}$ не меняется при перестановке индексов i с j, k с l и пары ij с парой kl. Тензор модулей упругости c_{ijkl}, очевидно, обладает теми же свойствами. Поэтому в общем случае он имеет не $3^4=81$ различную компоненту, а только 21. Указанная симметрия позволяет пользоваться матричной записью закона Гука $\sigma_i = c_{ij}\tilde{u}_j$, где $\tilde{u}_j$ — деформация в одноиндексном обозначении; $i, j = 1, 2, \ldots, 6$, и переход от одной системы обозначений к другой осуществляется заменой пары ij на m согласно схеме

$$\begin{array}{llll} 11 \to 1 & & 33 \to 3 & 31 = 13 \to 5 \\ 22 \to 2 & 32 = 23 \to 4 & & 21 = 12 \to 6. \end{array}$$

Физическая симметрия кристалла приводит к дальнейшему уменьшению числа упругих постоянных. Рассмотрим, например, кубический кристалл и предположим, что за оси координат выбраны оси симметрии четвертого порядка. Повернем кристалл на 90° вокруг оси X_3*) так, что $X_1 \to X_2$, $X_2 \to -X_1$, $X_3 \to X_3$. Поскольку ком-

*) Здесь и далее оси системы координат, совпадающие с кристаллографическими осями, будем обозначать большими латинскими буквами.

поненты тензоров при переходе к новым координатам преобразуются, как произведения координат, получим, что $c_{2222} \to c_{1111}$. Так как рассмотренный поворот есть преобразование симметрии, то $c_{2222} = c_{1111}$. Аналогичным образом легко убедиться, что $c_{1223} \to c_{2113}$, но $c_{2113} \to -c_{1223}$. Поэтому, чтобы удовлетворить требованиям симметрии, необходимо, чтобы соблюдалось тождество $c_{1223} = c_{2113} \equiv 0$. Рассматривая преобразования симметрии относительно других осей, можно убедиться, что кубический кристалл имеет всего три независимых упругих модуля — c_{11}, c_{12}, c_{44}. Матрица c_{ij} при этом принимает вид

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{matrix}$$

Прежде чем перейти к анализу распространения волн в конкретных кристаллах, напомним основные сведения о широко распространенном в кристаллографии методе обозначений кристаллографических осей и плоскостей с помощью индексов Миллера (см., например, [5]). Метод основан на том, что положение $\boldsymbol{R}$ любого узла кристаллической решетки (рис. 9.2, *а*) выражается через три основные

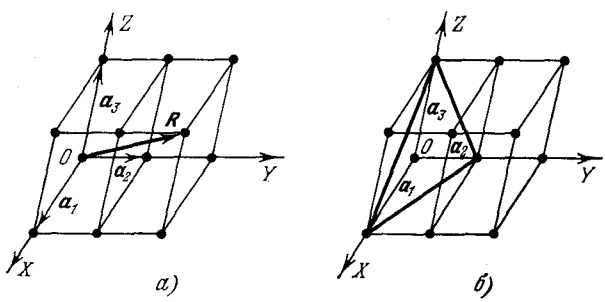


Рис. 9.2. К объяснению кристаллографических обозначений: *а*) направление [121]; *б*) плоскость (111).

трансляции $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ (не обязательно ортогональные) в виде $\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{a}_1 + n\boldsymbol{a}_2 + p\boldsymbol{a}_3$, где m, n, p — любые целые числа, называемые компонентами вектора $\boldsymbol{R}$ относительно базиса $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Ясно, что любое кристаллографическое направление, т. е. направление прямой, проходящей по крайней мере через два узла решетки, можно характеризовать узлом, лежащим в начале координат (нулевые значения m, n, p) и ближайшим узлом, пересекаемым данной прямой. Соответственно кристаллографическое направление определяется вторым узлом и обозначается символом $[mnp]$. Компоненты m, n, p в данном случае называются индексами Миллера данного кристаллографического направления. Например, кристаллографические оси координат имеют следующие индексы Миллера:

X_1—[100], X_2—[010], X_3—[001]. Если какая-либо из компонент m, n, p отрицательна, то над соответствующей цифрой ставится черточка.

Для обозначения кристаллографических плоскостей используются наименьшие ненулевые компоненты отрезков, отсекаемых рассматриваемыми плоскостями на кристаллографических осях координат (рис. 9.2, *б*),— соответственно величины m, n, p (предполагается, что плоскость находится на минимальном расстоянии от начала координат, но не проходит через него). При этом индексами Миллера данной кристаллографической плоскости называются величины $\mu=1/m$, $\nu=1/n$, $\pi=1/p$, а сама плоскость обозначается символом $(\mu\nu\pi)$. Например, координатные плоскости имеют следующие обозначения: YOZ—(100), ZOX—(010), XOY—(001).

Проанализируем теперь распространение плоских волн в кубическом кристалле. Для простоты вычислений будем рассматривать направление симметрии [110]. Такой выбор направления задается значениями $n_1=n_2=1/\sqrt{2}$, $n_3=0$. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае ненулевые компоненты тензора Кристоффеля $\Gamma_{il}=c_{ijkl}n_jn_k$ равны $\Gamma_{11}=(c_{11}+c_{44})/2$, $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}=(c_{12}+c_{44})/2$, $\Gamma_{22}=(c_{11}+c_{44})/2$, $\Gamma_{33}=c_{44}$, и уравнение (1.7) расщепляется на два уравнения:

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}-\rho v^2 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22}-\rho v^2 \end{vmatrix}=0, \tag{2.1}$$

$$\Gamma_{33}-\rho v^2=0. \tag{2.2}$$

Решение (2.1) дает $\rho v_{(1)}^2=(c_{11}+c_{12}+2c_{44})/2$, $\rho v_{(2)}^2=(c_{11}-c_{12})/2$, а из (2.2) следует $\rho v_{(3)}^2=c_{44}$. Подстановкой каждого из найденных собственных значений в (1.6) легко убедиться, что корню $\rho v_{(1)}^2$ соответствует вектор смещения, направленный вдоль оси [110], т. е. волна является чисто продольной. Корням $\rho v_{(2)}^2$ и $\rho v_{(3)}^2$ соответствуют поляризации в направлениях $[1\bar{1}0]$ и $[00\bar{1}]$, т. е. волны чисто поперечны. В отличие от случая изотропного твердого тела, скорости поперечных волн в рассматриваемом случае уже не равны друг другу, иными словами, поперечное вырождение снимается. Если формально потребовать равенства скоростей $v_{(2)}$ и $v_{(3)}$, то, как нетрудно видеть, необходимо положить

$$c_{44}=(c_{11}-c_{12})/2. \tag{2.3}$$

При этом имеем только два независимых упругих модуля, т. е. переходим к изотропному твердому телу. К условию (2.3) можно прийти и из более простых соображений [4], потребовав, чтобы модули упругости не зависели от поворотов кристалла на любой угол. Это требование выполняется, если c_{ijkl} представимы в виде $c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$, где λ и μ — уже знакомые нам упругие постоянные Ламе. Независимые модули упругости изотропного кубического кристалла выражаются через них в виде $c_{11}=2\mu+\lambda$, $c_{12}=\lambda$.

Таким образом, распространение упругих волн в кристаллах описывается относительно просто только для симметричных направлений в кристаллах. В общем случае для произвольного направле-

ния распространения и для кристаллов, менее симметричных, чем кубические, расчет волновых характеристик достаточно громоздок. В настоящее время такие расчеты, тем не менее, проделаны с помощью ЭВМ практически для всех интересных направлений и целых плоскостей кристаллов всех семи сингоний (см. [2]). Например, на рис. 9.3 изображены угловые зависимости фазовых скоростей всех трех упругих волн для плоскости (100) кубического кристалла KBr (класс $m3m$) [5]. Легко видеть, что характер этих зависимостей, описывающих анизотропию фазовых скоростей упругих волн, отражает симметрию кристалла. В частности, вполне отчетливо заметно, что ось [001] является осью симметрии четвертого порядка. Направление [110] на рис. 9.3 соответствует разобранному выше случаю.

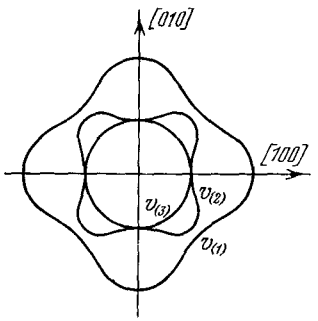


Рис. 9.3. Зависимости фазовых скоростей упругих волн для плоскости (100) кубического кристалла KBr.

Коснемся теперь некоторых особых направлений распространения упругих волн. Для плоскости (100) кубических кристаллов (рис. 9.3) такими направлениями являются [010] и [100], для которых скорости поперечных волн равны. По аналогии с кристаллооптикой такие направления называются *акустическими осями*. Вдоль них, так же как и в изотропном твердом теле, возможно распространение поперечных волн с произвольной поляризацией. Акустическими осями являются, например, оси третьего, четвертого (в том числе и уже упомянутые направления [010] и [100]) и шестого порядка в кубических кристаллах, оси Z (или C) *) в тетрагональных, гексагональных и тригональных кристаллах. Кроме того, ими могут быть и несимметричные направления, если соответствующая комбинация упругих модулей такова, что обеспечивается равенство скоростей двух квазипоперечных волн. В процессе проведения акустических экспериментов обычно стараются направлять волны вдоль направлений высокой симметрии, которыми, в частности, могут быть и акустические оси. Это связано с тем, что структуры волн в таких случаях оказываются наиболее простыми. При некоторой разориентации вектора волновой нормали относительно симметричного направления в полной мере начинают проявляться особенности, характерные для анизотропных кристаллов. Например, в случае малых отклонений волнового вектора относительно

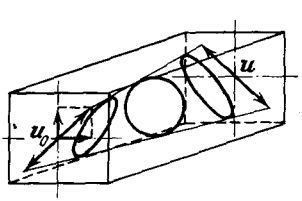


Рис. 9.4. Преобразование линейно поляризованной волны в эллиптически поляризованную и затем снова в линейно поляризованную при отклонении вектора волновой нормали от акустической оси.

*) Общепринятые кристаллографические обозначения (см., например, [5]).

акустической оси скорости двух сдвиговых волн уже не равны друг другу, и в общем случае задания начальной поляризации, соответствующей возбуждению обеих квазипоперечных волн, возможно существование колебаний с эллиптической и круговой поляризациями [6] (рис. 9.4).

§ 3. Поток энергии. Фазовая и групповая скорости

Другой характерной особенностью, проявляющейся при распространении акустических волн вдоль несимметричных направлений в кристаллах, является отклонение потока энергии волны от вектора волновой нормали. Ввиду важности этого явления остановимся на нем несколько более подробно.

Выразим сначала поток энергии через напряжения и смещения. Как известно, механическая энергия E элемента объема V, находящегося в поле акустической волны, представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий:

$$E=\frac{1}{2}\int\limits_V \rho\dot{u}_i\dot{u}_i\,dV+\frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}u_{ij}\,dV,$$

а изменение E в единицу времени:

$$\dot{E}=\int\limits_V \rho\dot{u}_i\ddot{u}_i\,dV+\frac{1}{2}\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ij}u_{ij})\,dV$$

определяет поток энергии в объем V или из него. Так как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ij}u_{ij})=\frac{\partial}{\partial t}(c_{ijkl}u_{kl}u_{ij})=2c_{ijkl}u_{kl}\dot{u}_{ij}=2\sigma_{ij}\dot{u}_{ij},$$

то

$$\dot{E}=\int\limits_V (\rho\dot{u}_i\ddot{u}_i+\sigma_{ij}\dot{u}_{ij})\,dV,$$

откуда с помощью уравнения движения $\rho\ddot{u}_i=\sigma_{ij,\,j}$ получаем

$$\dot{E}=\int\limits_V (\dot{u}_i\sigma_{ij,\,j}+\sigma_{ij}\dot{u}_{ij})\,dV. \tag{3.1}$$

Если учесть, что выражение в правой части (3.1) есть не что иное, как

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\dot{u}_i)\,dV,$$

и заменить интегрирование по объему (3.1) интегрированием по поверхности, то совершенно очевидно, что

$$\dot{E}=\int\limits_S \sigma_{ij}\dot{u}_i n_j\,dS. \tag{3.2}$$

Поскольку поверхностный интеграл в (3.2) описывает суммарный поток энергии в объем V через замкнутую поверхность S, то j-я

компонента потока из объема (вектор Умова — Пойнтинга) есть

$$P_j = -\sigma_{ij}\dot{u}_i. \tag{3.3}$$

Если через $\mathscr{E}_{\text{мех}}$ обозначить плотность механической энергии, то закон сохранения (3.2) можно, очевидно, записать и в дифференциальной форме:

$$\dot{\mathscr{E}}_{\text{мех}} + P_{j,\,j} = 0,$$

представляющей собой своего рода уравнение непрерывности для энергии.

Рассмотрим теперь плоскую волну

$$u_i = {}^1/_2 u_{0i} \exp\left[i\left(k_j x_j - \omega t\right)\right] + \text{к. с.}$$

Плотность кинетической энергии при этом

$$\mathscr{E}_{\text{к}} = {}^1/_2 \rho\omega^2 u_{0i}^2 \sin^2\left(k_j x_j - \omega t\right), \tag{3.4}$$

а плотность потенциальной энергии

$$\mathscr{E}_{\text{п}} = {}^1/_2 c_{ijkl} k_j k_k u_{0i} u_{0l} \sin^2\left(k_j x_j - \omega t\right). \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.4) и (3.5) с уравнением Кристоффеля (1.6), нетрудно получить известное волновое соотношение

$$\mathscr{E}_{\text{к}} = \mathscr{E}_{\text{п}}. \tag{3.6}$$

Среднюю по времени плотность энергии $\overline{\mathscr{E}}_{\text{мех}}$, очевидно, можно тогда записать в форме

$$\overline{\mathscr{E}}_{\text{мех}} = {}^1/_2 \rho\omega^2 u_{0i}^2.$$

Поток энергии для плоской волны, в соответствии с (3.3), имеет вид

$$P_j = -c_{ijkl} u_{kl} \dot{u}_i = \omega c_{ijkl} k_l u_{0k} u_{0i} \sin^2\left(k_j x_j - \omega t\right),$$

или после усреднения по времени

$$\overline{P}_j = {}^1/_2 \omega c_{ijkl} k_l u_{0k} u_{0i}. \tag{3.7}$$

С другой стороны, поток энергии можно представить следующим образом:

$$P_j = \mathscr{E}_{\text{мех}} v_j^{(\mathscr{E})}, \tag{3.8}$$

где $v_j^{(\mathscr{E})}$ — *скорость переноса энергии*. Из выражений (3.7) и (3.8) с учетом (3.4) и (3.6) нетрудно получить

$$v_j^{(\mathscr{E})} = c_{ijkl}\delta_{ik}/\rho v_l.$$

Заметим теперь, что групповая скорость волны $v_j^{(g)}$, описывающая распространение волнового пакета и определяемая как

$$v_j^{(g)} = \partial\omega/\partial k_j,$$

согласно уравнению (1.6), равна

$$v_j^{(g)} = c_{ijkl}\delta_{il}/\rho v_k. \tag{3.9}$$

Таким образом, в рассмотренном случае кристалла без потерь скорость переноса энергии совпадает с групповой скоростью*). Направление групповой скорости и соответственно направление переноса энергии волны, как это следует из (3.9), в общем случае не совпадает с вектором фазовой скорости. Можно показать, что совпадение возможно для направлений симметрии кристалла и для некоторых «случайных» направлений, определяемых конкретными соотношениями упругих модулей.

Подставляя в (3.9) выражение для c_{ijkl}/ρ из уравнения Кристоффеля (1.6) $c_{ijkl}/\rho = v^2\delta_{il}/n_j n_k$, получим полезное соотношение $v_j^{(g)} n_j = v$, из которого следует, что проекция групповой скорости на направление волновой нормали совпадает с модулем фазовой скорости, т. е. сама групповая скорость по абсолютной величине не меньше фазовой.

Описанное явление отклонения вектора групповой скорости от фазовой, или, что то же, несовпадение акустических лучей с направлением волновой нормали, приводит к ряду специфических эффектов, многие из которых аналогичны соответствующим эффектам в кристаллооптике [2]. Следует, однако, отметить, что с точки зрения физических проявлений анизотропии акустика кристаллов значительно богаче, чем кристаллооптика. Это понятно хотя бы из того, что упругие свойства кристаллов описываются тензором четвертого ранга, а оптические — только второго. К существенному разнообразию акустических явлений приводит и широкий количественный разброс в величинах упругих модулей даже для кристаллов одинаковой симметрии. Все эти факторы необходимо учитывать при проведении акустических экспериментов и в практических приложениях.

§ 4. Волны в пьезоэлектрических кристаллах. Коэффициент электромеханической связи

Наличие пьезоэффекта в ряде кристаллов приводит к тому, что соответствующие механические и электрические величины уже не являются независимыми. Этот факт имеет важное значение для ряда приложений, главным образом для электромагнитного возбуждения акустических волн.

Линеаризованное уравнение упругого состояния кристалла с учетом пьезоэффекта (прямого) может быть записано в виде (см., например, [4—6, 8, 9])

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{kl} - e_{kij} E_k, \tag{4.1}$$

где E_k — вектор напряженности электрического поля, e_{kij} — пьезотензор, симметричный по индексам i, j**). За счет обратного пьезо-

*) Если диссипация существенна, то групповая скорость уже не равна скорости переноса энергии; подробнее см. [7].

**) С помощью рассуждений, аналогичных изложенным в § 2, легко убедиться, что в центросимметричных кристаллах все тензоры нечетных рангов равны нулю. Таким образом, пьезоэффект возможен только в кристаллах без центра симметрии.

эффекта это уравнение оказывается связанным с уравнением состояния для индукции

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + e_{ijk} u_{jk}, \tag{4.2}$$

где ε_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости. К уравнениям (4.1) и (4.2) следует добавить механическое уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,\,j} \tag{4.3}$$

и уравнения Максвелла, которые мы здесь запишем в векторной форме:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\left(\frac{1}{c}\right)\dot{\boldsymbol{B}}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \left(\frac{1}{c}\right)\dot{\boldsymbol{D}}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0; \tag{4.4}$$

добавив к ним еще одно уравнение состояния

$$\boldsymbol{B} = \mu' \boldsymbol{H}. \tag{4.5}$$

Выписанная довольно громоздкая система уравнений (4.1) — (4.5) полностью описывает линейные механические и электромагнитные процессы в пьезоэлектриках. Можно показать [6, 9], что в общем случае в пьезоэлектрических кристаллах могут распространяться в одном направлении пять волн смешанного типа, характеризующихся как механическими переменными, так и электромагнитными. Это соответствует трем возмущенным акустическим волнам, распространяющимся со скоростями, несколько большими соответствующих скоростей без учета пьезоэффекта, и двум возмущенным электромагнитным волнам, скорости которых практически не меняются. Поскольку, однако, параметр возмущения имеет порядок $v/c \sim 10^{-5}$, где v — скорость акустической волны, а c — скорость света, то при решении акустической части задачи в большинстве практически важных случаев (но не во всех *)) волновым характером электромагнитного поля можно пренебречь, рассматривая его в *квазистатическом приближении*. При этом задача сводится к решению системы

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 \tag{4.6}; \ (4.7)$$

и уравнений (4.1) — (4.3). Из уравнения (4.6) следует, что электрическое поле должно быть потенциально, т. е.

$$E_i = -\varphi_{,\,i}. \tag{4.8}$$

Подставляя далее (4.1) в (4.3) и учитывая (4.2), получим

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{kl,\,j} - e_{kij} \varphi_{,\,kj}. \tag{4.9}$$

С другой стороны, из (4.2), (4.7) и (4.8) следует

$$\varepsilon_{ij} \varphi_{,\,ij} + e_{ijk} u_{ik,\,i} = 0. \tag{4.10}$$

Пользуясь симметрией тензора модулей упругости и пьезотензора по индексам k, l и j, k соответственно, вытекающей из симметрии

*) Например, при рассмотрении граничных явлений (§ 5).

тензора деформации, уравнения (4.9) и (4.10) можно переписать в виде

$$\rho\ddot{u}_i = c_{ijkl}u_{k,\,lj} - e_{kij}\varphi_{,\,jk}, \tag{4.11}$$

$$\varepsilon_{ij}\varphi_{,\,ij} + e_{ijk}u_{j,\,ki} = 0. \tag{4.12}$$

Таким образом, переменные в пространстве электрические поля возбуждают акустические волны, и наоборот, градиенты деформаций приводят к появлению электрических полей. Если искать решение (4.11) и (4.12) в виде плоских волн смещений и электрического потенциала, то нетрудно получить *модифицированное уравнение Кристоффеля* для смещений:

$$(\Gamma^*_{il} - \rho v^2\delta_{il})\,u_{0l} = 0, \tag{4.13}$$

где $\Gamma^*_{il} = c_{ijkl}n_jn_k + (e_{kij}n_jn_ke_{lmn}n_mn_n)/\varepsilon_{pq}n_pn_q$. Таким образом, скорости волн меняются. Как мы увидим ниже, пьезоэффект, вообще говоря, увеличивает скорость упругих волн. Заметим, что из (4.12) следует, что потенциал φ распространяется с той же скоростью, с которой распространяются упругие деформации. Симметрия угловых зависимостей фазовых скоростей упругих волн под влиянием пьезоэффекта может, разумеется, меняться. Отметим также, что в плоской волне вектор электрического поля $E_i = -\varphi_{,i}$ всегда ориентирован вдоль направления волновой нормали, так как пространственные вариации потенциала в плоской волне имеют место только в этом направлении.

С количественной стороны влияние пьезоэффекта на распространение упругих волн удобно характеризовать с помощью безразмерной величины — *коэффициента электромеханической связи* $K_{эм}$. Его можно определить следующим образом [5]. Рассмотрим задачу о статическом равновесии тонкой пьезоэлектрической пластинки толщины a с металлическими обкладками, характеризующейся наличием однородных напряжений σ_{ij}. В такой системе электрический потенциал φ, очевидно, зависит только от одной координаты z, отсчитываемой по нормали к пластинке. Поскольку в качестве независимых переменных мы будем использовать σ_{ij} и $E_i = -n_i\varphi_{,z}$, уравнения состояния пьезоэлектрического кристалла удобно записать в виде [5, 6]

$$D_i = -\varepsilon_{ij}n_j\varphi_{,\,z} + d_{ilk}\sigma_{lk}, \tag{4.14}$$

$$u_{ij} = -n_k d_{kij}\varphi_{,\,z} + s_{ijkl}\sigma_{kl}. \tag{4.15}$$

Здесь n_j — вектор единичной нормали к поверхности пластинки, направленный от нижней стороны пластинки к верхней, $s_{ijkl} = c^{-1}_{ijkl}$ — модули упругой податливости, $d_{mij} = e_{klm}c^{-1}_{klij}$ — соответствующим образом определенные пьезоэлектрические коэффициенты, или пьезомодули. Из условия статического равновесия $\sigma_{ij,\,j} = 0$ следует, что в толще пластинки механические напряжения σ_{ij} однородны и определяются усилиями $\sigma_{ij}n_j$ и $-\sigma_{ij}n_j$, приложенными к ее стенкам. Из уравнения $D_{i,\,i} = 0$ вытекает, что $\varphi_{,zz} = 0$, т. е. φ — линейная функция z, следовательно, деформации также

однородны. Пусть обкладки пластины разомкнуты. Тогда из электрических граничных условий следует, что $n_i D_i = 0$. Учитывая это, из (4.14) получим

$$\varphi_{,z} = n_i d_{ilk} \sigma_{lk} / n_i \varepsilon_{ij} n_j. \tag{4.16}$$

При этом разность потенциалов между двумя обкладками равна $U = \varphi(0) - \varphi(a) = -a\varphi_{,z}$. Подстановка (4.16) в (4.15) приводит к следующему выражению для тензора деформации:

$$u_{ij} = [s_{ijkl} - n_k d_{kij} n_j d_{ilk} / n_i \varepsilon_{ij} n_i] \sigma_{lk}. \tag{4.17}$$

Величина в квадратных скобках (4.17), очевидно, играет роль измененного из-за влияния пьезоэффекта тензора упругой податливости s_{ijkl}. Жесткость пластинки при этом увеличивается, что вполне понятно, так как работа сил, прикладываемых к обкладкам пластинки, идет теперь не только на увеличение энергии упругой деформации:

$$\mathscr{E}_{\text{п}} = {}^1/_2 \sigma_{ij} u_{ij} = {}^1/_2 \sigma_{ij} s_{ijkl} \sigma_{kl} - {}^1/_2 (\sigma_{ij} n_k d_{kij})^2 / \varepsilon_{ij} n_i n_j,$$

но и на увеличение энергии электрического поля:

$$\mathscr{E}_{\text{эл}} = {}^1/_2 \varepsilon_{ij} E_i E_j = {}^1/_2 \varepsilon_{ij} \varphi_{,z} n_i \varphi_{,z} n_j = {}^1/_2 (\sigma_{ij} n_k d_{kij})^2 / \varepsilon_{ij} n_i n_j.$$

Нетрудно видеть, что деформация уменьшается ровно настолько, чтобы связанное с этим уменьшение упругой энергии компенсировало увеличение энергии электрического поля. Величина $\mathscr{E}_{\text{эл}} / (\mathscr{E}_{\text{п}} + \mathscr{E}_{\text{эл}})$ определяет долю механической работы $A_{\text{мех}} = \mathscr{E}_{\text{п}} + \mathscr{E}_{\text{эл}}$, перешедшей в электрическую энергию. Квадратный корень из этого соотношения как раз и называется коэффициентом электромеханической связи:

$$K_{\text{эм}} = (\mathscr{E}_{\text{эл}} / A_{\text{мех}})^{1/2}.$$

Таким образом, в соответствии с вышесказанным

$$K^2_{\text{эм}} = \frac{(\sigma_{ij} n_k d_{kij})^2}{(\varepsilon_{ij} n_i n_j)(s_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl})}. \tag{4.18}$$

С помощью соотношений $s_{ijkl} = c^{-1}_{ijkl}$ и $d_{kij} = e_{klm} c^{-1}_{ijkl}$ выражение (4.18) можно переписать следующим образом:

$$K^2_{\text{эм}} = \frac{(u_{kl} n_k e_{klm})^2}{(\varepsilon_{ij} n_i n_j)(c_{ijkl} u_{ij} u_{kl})}. \tag{4.19}$$

Несмотря на то, что в выражения (4.18) и (4.19) входят величины σ_{ij} или u_{ij}, определяемый с их помощью коэффициент электромеханической связи, очевидно, не зависит от абсолютных величин σ_{ij}, u_{ij} и представляет собой характеристику материала. Будучи скаляром, величина $K_{\text{эм}}$ зависит, однако, от направлений воздействия и реакции. Численные значения $K_{\text{эм}}$ обычно достигают $\sim 0{,}1$—$0{,}3$, но для некоторых синтетических пьезоэлектриков, например для ниобата лития, $K_{\text{эм}} \approx 0{,}7$.

Вернемся теперь к уравнению (4.13), определяющему скорости упругих волн в пьезоэлектрических кристаллах. Легко заметить,

что компоненты модифицированного тензора Кристоффеля Γ^*_{il} с учетом изложенного можно переписать в виде

$$\Gamma^*_{il} = c_{ijkl} n_j n_l (1 + K^2_{\text{эм}}).$$

Так как квадраты скоростей v^2 упругих волн, распространяющихся в рассматриваемом направлении кристалла, пропорциональны Γ^*_{il}, то относительное увеличение скорости Δv, обусловленное пьезоэффектом, будет определяться выражением $2\Delta v/v_0 + (\Delta v)^2/v_0^2 = K^2_{\text{эм}}$, где v_0 — значение v без учета пьезоэффекта. Для малых $K^2_{\text{эм}}$ отсюда получаем соотношение

$$K^2_{\text{эм}} = 2\Delta v/v_0, \tag{4.20}$$

позволяющее экспериментально определять значение $K^2_{\text{эм}}$ по изменению скорости упругих волн в пьезоэлектрической среде.

§ 5. Отражение и преломление упругих волн на границах раздела

Рассмотрим отражение и преломление упругих волн в кристаллах. Чтобы не загромождать изложение деталями, связанными с учетом электрических или магнитных переменных, рассмотрим диэлектрический кристалл без пьезоэффекта и магнитоупругости. В этом случае, так же как и в изотропных средах, граничные условия выражают непрерывность напряжений и смещений на границах раздела. Закон Снеллиуса (см. § 3 гл. 8) также остается справедливым. При изучении граничных явлений в кристаллах удобно ввести понятие вектора рефракции $\boldsymbol{m}^{(q)} = \boldsymbol{n}/v_{(q)}$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор волновой нормали, индекс q обозначает тип волны. В терминах $\boldsymbol{m}$ закон Снеллиуса, очевидно, примет вид

$$m^{(q)}_{\text{кас}} = \text{const},$$

где $m^{(q)}_{\text{кас}}$ — касательная к границе раздела компонента вектора рефракции. Волны, образующиеся при отражении и преломлении, легко определить с помощью простого графического построения из секущих плоскостей и сечения поверхностей рефракции $m^{(q)}$, проходящего через проекции $m^{(q)}_{\text{кас}}$ и нормаль к границе раздела. Воспользуемся, например, построением, изображенным на рис. 9.5 для системы из изотропного тела (среда I) и кристалла (среда II) [1, 2]. Волновые векторы совокупности падающей (I), отраженных (R) и преломленных (T) волн при этом определяются точками пересечения сечения поверхностей рефракции и двух параллельных вер-

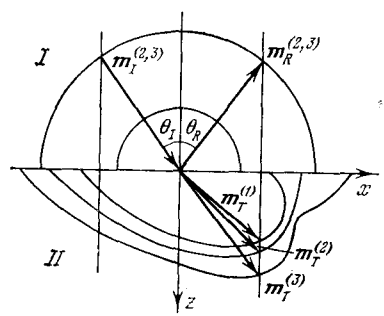


Рис. 9.5. Совокупность отраженных и преломленных волн для случая падения сдвиговых волн ($\boldsymbol{m}^{(2,3)}$) из изотропного тела на границу с кристаллом.

тикальных плоскостей, проведенных на расстояниях $m_{I\,\text{кас}}=m_I\sin\theta_I$ от плоскости $x=0$. Видно, что картина отраженных и преломленных волн даже в рассмотренном случае простых диэлектрических кристаллов достаточно разнообразна. В частности, при увеличении угла падения θ_I в принципе может возникнуть четвертая преломленная волна, определяемая пересечением секущей плоскости с поверхностью рефракции $m_T^{(1)}$. При дальнейшем увеличении θ_I пересечения с $m_T^{(1)}$ уже не наступает и соответствующая волна становится неоднородной (как и отраженная продольная волна в среде *I*). Числовые значения коэффициентов отражения и преломления могут быть определены при подстановке выражений для допускаемых законом Снеллиуса отраженных и преломленных волн в граничные условия. Подробности вычислений можно найти в монографиях [1, 6, 9—11] и приведенной там литературе.

Отметим, что из-за отклонения вектора потока энергии в кристаллах, или направления луча, от вектора волновой нормали может оказаться, что в среде *II* касательная составляющая преломленного луча будет направлена в сторону отрицательных x (если пользоваться построением рис. 9.5). Такого рода «аномальное» поведение преломленной волны характерно для акустики анизотропных сред (подробнее см. [2]).



Рис. 9.6. Поворот вектора поляризации сдвиговой волны при отражении в условиях конической рефракции.

Приведем еще один интересный пример, иллюстрирующий отличие процессов отражения упругих волн в кристаллах от изотропного случая. Пусть свободная граница кристалла расположена параллельно акустической оси, не являющейся направлением высокой симметрии. Для ряда таких осей возможна так называемая *внутренняя коническая рефракция* [2, 5, 6], заключающаяся в том, что при повороте поляризации распространяющихся вдоль них сдвиговых волн вектор Умова — Пойнтинга описывает конус (аналогичное явление известно и в кристаллооптике). Рассмотрим случай, когда волновая нормаль падающей сдвиговой волны ориентирована вдоль оси симметрии третьего порядка тригонального кристалла (ось Z), являющейся акустической осью, а вектор поляризации повернут приблизительно на 45° относительно поверхности (рис. 9.6) [12]. При этом вектор групповой скорости ориентирован под углом к поверхности и волна с ней взаимодействует. Решение соответствующей граничной задачи и экспериментальное исследование показывают [12], что вектор поляризации отраженной волны того же типа, что и падающая, поворачивается на 90° относительно первоначальной ориентации. Это соответствует тому, что нормальная составляющая вектора Умова — Пойнтинга меняет знак, т. е. поток энергии отраженной волны отходит от поверхности (рис. 9.6). Сказанное нужно иметь в виду при проведении акустических экспериментов,

так как использование изотропных представлений, согласно которым в рассматриваемом случае скользящего падения ограниченного волнового пучка влияние границы вообще не должно сказываться, может привести к тому, что полезный сигнал не будет принят.

Если один из граничащих кристаллов обладает пьезоэффектом, то наряду с механическими граничными условиями необходимо учитывать граничные условия для электромагнитного поля, заключающиеся в непрерывности касательных компонент напряженности электрического поля и нормальных компонент индукции. Построения рис. 9.5 в этом случае следует дополнить поверхностями рефракции для электромагнитных волн, которые практически стягиваются в точку из-за больших значений фазовых скоростей света. Это означает, что распространяющиеся электромагнитные волны при падении акустических волн на границу раздела возникают только в том случае, когда падение нормально (при отклонении падающей волны от нормали электромагнитные волны становятся неоднородными). Справедлива и обратная ситуация — возникновение преломленных и отраженных акустических волн в случае нормального падения электромагнитной волны. Рассмотренные явления могут быть использованы для прямого возбуждения и детектирования гиперзвука электромагнитными волнами СВЧ-диапазона. Однако эффективность такого преобразования по порядку величины равна $v/c \sim 10^{-5}$, т. е. довольно мала [9] *). Более эффективным оказывается возбуждение гиперзвука стоячими электромагнитными волнами, которое обычно осуществляется с помощью СВЧ-резонаторов [8,13].

§ 6. Поверхностные волны в кристаллах

Об основных особенностях распространения поверхностных акустических волн в кристаллах уже упоминалось в гл. 8 при обсуждении типов поверхностных волн. Здесь мы остановимся на этом более подробно, ограничившись для простоты случаем однородных кристаллов без пьезоэффекта.

Выберем систему координат с осью x_3, направленной по внешней нормали к плоской поверхности кристалла (рис. 9.7), и будем искать решения уравнения (1.2) в виде волн с прямолинейным фронтом, убывающих в направлении отрицательных x_3. Иными словами, предположим, что решения

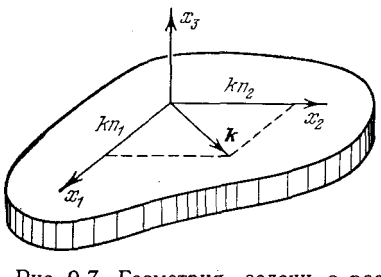


Рис. 9.7. Геометрия задачи о распространении поверхностных волн.

*) Теоретически при определенном очень малом отклонении направления падения акустической волны от нормали, при котором возбуждаемая электромагнитная волна еще не становится неоднородной, эффективность преобразования может быть порядка единицы [9]. Однако, как указывают сами авторы [9], экспериментально этот эффект нереализуем.

являются линейными комбинациями членов вида

$$u_i = u_{0i} \exp[ik(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - vt)], \tag{6.1}$$

которые удовлетворяют уравнению (1.2) и однородным граничным условиям при $x_3=0$ [14]

$$\sigma_{ij}n_j = 0. \tag{6.2}$$

Очевидно, решения (6.1) будут носить характер поверхностной волны только в том случае, если величина n_3 в каждом члене линейной комбинации будет иметь отрицательную мнимую часть, обеспечивающую необходимое убывание амплитуды. Поэтому для поверхностной волны удобно считать, что волновой вектор $\boldsymbol{k}$ имеет только поверхностные компоненты kn_1, kn_2, и рассматривать $\exp(in_3x_3)$ как амплитудные множители. Даже в том случае, когда n_3 содержит и действительную часть, формально можно считать, что волновой вектор параллелен свободной поверхности. Если теперь выражение (6.1) с заданными n_1 и n_2 подставить в (1.2), то получим то же самое характеристическое уравнение, что и в случае объемных волн:

$$|\Gamma_{ij} - \delta_{ij}\rho v^2| = 0, \tag{6.3}$$

в котором, однако, величина n_3 заранее не определена. Поскольку характеристики поверхностных волн поддаются аналитическому расчету лишь для небольшого числа высокосимметричных срезов и направлений в кристаллах [14, 15], имеет смысл сразу перейти к общей формулировке задачи, обычно используемой при численном решении. В этом случае удобно рассматривать (6.3) не как уравнение третьей степени относительно v^2 с параметром n_3, а как уравнение шестой степени относительно n_3 с параметром v^2. Так как коэффициенты перед степенями n_3 в (6.3) действительны, то в общем случае для каждого значения v это уравнение имеет три пары комплексно-сопряженных корней (в случае изотропной среды все корни чисто мнимые). Корни, лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного n_3, соответствуют волнам, нарастающим с глубиной, и поэтому должны быть отброшены. В соответствии со сказанным решение для поверхностной волны запишем в виде линейной комбинации членов (6.1), каждый из которых имеет одинаковую фазовую скорость, но различные значения n_3, равные корням уравнения (6.3):

$$u_i = \sum_{n=1}^{3} c_n u_{0i}^{(n)} \exp[ik(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3^{(n)}x_3 - vt)]. \tag{6.4}$$

Величины $u_{0i}^{(n)}$ в (6.4), разумеется, должны быть нормированными собственными векторами уравнения (1.2), соответствующими собственному значению v^2 и корням $n_3^{(n)}$. Коэффициенты c_n и значение скорости v, пока выбранное нами произвольно, определяются из граничных условий (6.2), которые можно записать в форме

$$\sigma_{3j} = c_{3jkl}u_{k,l} = 0. \tag{6.5}$$

Подстановка предполагаемого решения (6.4) в граничные условия (6.5) дает систему трех однородных уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_n. Необходимым условием существования нетривиального решения этой системы является обращение в нуль ее определителя, содержащего девять членов:

$$d_{mn} = c_{m3kl} u_{0l}^{(n)} n_l^{(n)},$$

где $n_1^{(n)} \equiv n_1, n_2^{(n)} \equiv n_2$. Поскольку величины d_{mn} полностью определяются выбранным значением v, т. е. оказываются заданными, весьма маловероятно, что определитель сразу же обратится в нуль. Поэтому в общем случае приходится подбирать последовательные значения фазовой скорости v до тех пор, пока требуемое равенство не будет выполняться с необходимой степенью точности. В рамках описанного подхода с помощью ЭВМ выполнена бóльшая часть расчетов скоростей и амплитуд поверхностных волн для различных направлений и срезов кристаллов.

Отметим, что при использованной нами постановке задачи собственные векторы $u_{0l}^{(n)}$, отвечающие выбранному значению скорости v, могут быть комплексными. В общем случае это приводит к комплексности определителя граничных условий $|d_{mn}|$. В процессе же осуществления итерационной процедуры необходимо обращать в нуль и действительную, и мнимую его части. Причем совершенно неочевидно, что действительная и мнимая части могут одновременно обратиться в нуль при одном и том же значении v. По этой причине в первых работах по поверхностным волнам в кристаллах рядом авторов (см., например, [14]) было высказано предположение, что такое совпадение оказывается случайным, так что поверхностные волны не существуют в произвольно выбранных направлениях поверхности кристалла. Однако численные расчеты и экспериментальные исследования показали, что практически во всех исследованных направлениях различных кристаллов всегда существует значение v, соответствующее поверхностной волне. Таким образом, оказывается, что действительная и мнимая части определителя граничных условий так взаимосвязаны, что обращение в нуль одной из них влечет равенство нулю другой. Не так давно этот факт был подтвержден аналитически, и тем самым были строго доказаны существование и единственность решений в виде поверхностных волн в кристаллах [16—18], в том числе и в пьезоэлектрических [18], для произвольного направления, за исключением некоторых особых направлений, в которых граничные условия могут быть удовлетворены чисто сдвиговой объемной волной. О существовании или несуществовании поверхностных волн вдоль таких особых направлений результаты [16—18] ничего не говорят. Имеются как примеры существования (например, рэлеевская волна в изотропном твердом теле или волна рэлеевского типа в направлении [100] плоскости (001) кубических кристаллов [14]), так и примеры несуществования (направление X Y-среза пьезоэлектрического кристалла триклинной симметрии, граничащего со средой с нулевой диэлектрической проницаемостью [18]). Таким образом, для большинства направлений в кристаллах

изложенная итерационная процедура расчета параметров поверхностных волн является вполне обоснованной.

Выясним некоторые характерные особенности поверхностных волн, связанные с анизотропией, опираясь на результаты численных расчетов для кубических кристаллов [14]. Как уже указывалось, матрица модулей упругости для кубических кристаллов имеет те же ненулевые компоненты, что и изотропное тело ($c_{11}=c_{22}=c_{33}$, $c_{12}=c_{13}=c_{23}$, $c_{44}=c_{55}=c_{66}$), но для последнего $c_{44}=(c_{11}-c_{12})/2$. Таким образом, величина

$$\eta=2c_{44}/(c_{11}-c_{12}),$$

называемая *фактором анизотропии*, служит критерием отличия упругих свойств кристалла от свойств изотропной среды. Рассмотрим распространение поверхностных волн на плоскости (001) кристалла никеля ($\eta=2{,}38$). Расчеты показывают, что в направлении [100] скорость поверхностной волны равна 2910 м/с, а ее амплитуды смещений лежат в сагиттальной плоскости и спадают с глубиной, осциллируя (из-за наличия действительных частей у $n_3^{(m)}$). Волны с такой структурой, напоминающие поверхностные волны Рэлея в изотропном твердом теле, обычно называют волнами рэлеевского типа. Заметим, что в этом же направлении со скоростью 3832 м/с может распространяться и чисто сдвиговая объемная волна, поляризованная параллельно плоскости поверхности. Таким образом, направление [100] в рассматриваемом случае, как уже упоминалось, является особым. При отклонении вектора $\boldsymbol{k}$ на некоторый угол θ от направления кристаллографической оси [100] в полной мере начинает сказываться влияние анизотропии. Во-первых, волна имеет все три компоненты смещений, в соответствии с (6.4), и, во-вторых, вектор групповой скорости отклоняется от вектора волновой нормали. Угловая зависимость скорости v поверхностной волны представлена на рис. 9.8. В направлении [110] «медленная» объемная волна T_2, скорость которой при этом совпадает со скоростью поверхностной волны, снова удовлетворяет граничным условиям. В эту волну вырождается поверхностная волна в данном направлении. Но при этом появляется новая поверхностная волна рэлеевского типа (обозначена крестиком на рис. 9.8), фазовая скорость которой больше скорости сдвиговой волны (подобная ситуация возможна только в кристаллах). При отклонении от направления [110] эта волна становится затухающей вследствие излучения в объем

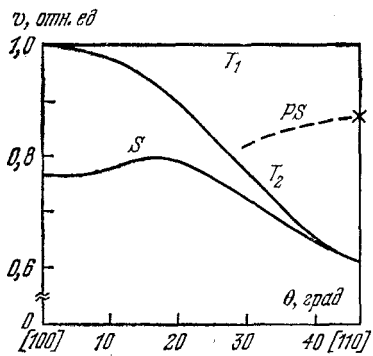


Рис. 9.8. Скорости квазипоперечных T_1 и T_2, поверхностной S и псевдоповерхностной PS волн в случае распространения вдоль плоскости (001) никеля. В волне T_2 смещение параллельно плоскости (001).

среды и, строго говоря, не является поверхностной. По этой причине волны такого типа называют волнами утечки или *псевдоповерхностными волнами* (см. гл. 8).

Для кристаллов с $\eta<1$ (например, для KCl $\eta=0{,}375$) наиболее медленной объемной волной в плоскости (001) является волна T_1 с вектором смещения, перпендикулярным этой плоскости. Такая волна, очевидно, не удовлетворяет граничным условиям и поэтому поверхностная волна всюду существует, не вырождаясь в объемную. Псевдоповерхностная волна в этом случае отсутствует, и в направлениях [100] и [110] распространяются волны рэлеевского типа. Если говорить о влиянии анизотропии на характеристики поверхностных волн вне указанных осей, то оно выражено более слабо, чем в случае $\eta>1$.

§ 7. Учет дискретности кристаллической решетки. Акустическая активность и другие эффекты, обусловленные микроструктурой

До сих пор, рассматривая распространение волн в кристаллах, мы не принимали во внимание дискретную структуру кристаллической решетки. Так можно поступать до тех пор, пока длина акустической волны λ остается много большей, чем постоянная решетки a, или до частот ~ 100 ГГц. Выше этого предела дисперсионные кривые, получаемые из уравнений классической теории упругости, уже плохо согласуются с микроскопическими расчетами, базирующимися на уравнениях динамики решетки. Поэтому, если оставаться в рамках феноменологических моделей механики сплошных сред, то уравнения состояния кристалла необходимо модернизировать для учета дискретности среды, макроскопически проявляющейся в нелокальности ее реакции на приложение переменного в пространстве внешнего воздействия. Это можно сделать с помощью так называемой *нелокальной теории упругости* [19], представляющей собой феноменологическое обобщение классической механики сплошной среды. Одно уравнение состояния элемента сплошной среды, описывающее как пространственную, так и временную нелокальность, уже приводилось нами при рассмотрении релаксационных процессов. Если не учитывать временную нелокальность (которая, в частности, ответственна за диссипацию энергии в среде), то для твердого тела нетрудно получить следующее уравнение состояния (нелокальный закон Гука):

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}) = \int_V \tilde{c}_{ijkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, u_{k,\,l}(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}', \qquad (7.1)$$

где $\tilde{c}_{ijkl}$ — ядра нелокальных упругих модулей. Вид зависимостей $\tilde{c}_{ijkl}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ определяется обычно либо экспериментально, либо путем сравнения с результатами динамической теории решетки. Из общих соображений, однако, ясно, что $\tilde{c}_{ijkl}$ заметно отличны от нуля лишь при $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\leqslant a$, т. е. a служит характерным размерным параметром среды.

Если поле u_k достаточно медленно изменяется в пространстве, то от общей интегральной связи (7.1) можно перейти к уравнению состояния в дифференциальной форме, разлагая $u_{k,l}(\boldsymbol{r}')$ в степенной ряд в окрестности точки $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$. Если в разложении ограничиться только нулевым членом ряда, то получим обычное локальное соотношение

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}) = c_{ijkl} u_{k,\,l}(\boldsymbol{r}), \tag{7.2}$$

где, очевидно,

$$c_{ijkl} = \int_V \tilde{c}_{ijkl}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}.$$

Учет последующих членов дает

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{r}) = c_{ijkl} u_{k,\,l}(\boldsymbol{r}) + b_{ijklm} u_{k,\,lm}(\boldsymbol{r}) + d_{ijklmn} u_{k,\,lmn}(\boldsymbol{r}), \ \ldots, \tag{7.3}$$

где $b_{ijklm} = \int_V \tilde{c}_{ijkl}(\boldsymbol{r})\, x_m\, d\boldsymbol{r}$, и т. д. Легко заметить, что $b_{ijklm} \sim |c|a$, $d_{ijklmn} \sim |c|a^2$ и т. д., где $|c| = \max |c_{ijkl}|$. В большинстве практически интересных случаев ряд (7.2) быстро сходится и для описания всех возникающих эффектов обычно бывает достаточно ограничиться двумя первыми неисчезающими членами. О моделях, описываемых конечным числом членов ряда (7.2), иногда говорят как о моделях *сред со слабой пространственной дисперсией*. Несмотря на то, что при обычно используемых ультразвуковых и гиперзвуковых частотах члены с высшими производными от u_k довольно малы, они приводят к качественно новым эффектам при распространении волн в кристаллах, которые вполне наблюдаемы и могут быть использованы для уточнения феноменологических уравнений состояния кристалла.

Одним из таких эффектов является *акустическая активность* [2, 5, 19—23] — акустический аналог оптической активности [24], заключающаяся в возникновении эллиптической поляризации плоских волн при их распространении в кристаллах без центра симметрии. В таких кристаллах материальные тензоры нечетных рангов отличны от нуля, в частности $b_{ijklm} \neq 0$. Для описания эффекта акустической активности в уравнении состояния (7.3) в случае нецентросимметричных кристаллов (их также называют акустически активными или гиротропными) достаточно ограничиться двумя первыми членами. При этом подстановка (7.3) в уравнение движения (1.2) дает

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} u_{l,\,jk} + b_{ijklm} u_{l,\,jkm}. \tag{7.4}$$

Представляя решение (7.4) в виде плоских волн (1.3), получим так называемое уравнение Кристоффеля для акустически активных кристаллов:

$$(c_{ijkl} n_j n_k + i b_{ijklm} n_j n_k k_m - \rho v^2 \delta_{il})\, u_{0l} = 0, \tag{7.5}$$

которое можно переписать в виде, аналогичном (1.5):

$$(\Gamma^*_{il} - \rho v^2 \delta_{il})\, u_{0l} = 0, \tag{7.6}$$

где $\Gamma^*_{il}=c_{ijkl}n_jn_k+ib_{ijklm}n_jn_km_m$ — модифицированный тензор Кристоффеля. Таким образом, влияние гиротропии приводит к появлению чисто мнимой добавки к невозмущенному тензору Кристоффеля. Так как поглощение в среде по-прежнему отсутствует, то комплексный тензор Γ^*_{il} должен быть эрмитов, т. е. мнимая его часть должна быть антисимметричной по первым двум парам индексов [5]. В этом можно убедиться и непосредственно с помощью (7.2) и (7.3). Поскольку собственные значения эрмитова тензора есть величины действительные, то, как и ранее, условие нетривиального решения уравнения (7.6)

$$|\Gamma^*_{il}-\rho v^2\delta_{il}|=0 \tag{7.7}$$

дает три действительных значения ρv^2. При этом, однако, собственные векторы u_{0l} получают мнимые добавки, означающие, что все три собственных волны будут эллиптически поляризованы (в большинстве случаев со слабой эллиптичностью $\sim ka$). Количественный расчет описанного явления для несимметричного направления распространения акустической волны можно выполнить методом возмущений, используя в качестве решения нулевого приближения в (7.6) значения ρv_0^2 и $u_{0l}^{(0)}$, полученные без учета пространственной дисперсии [5]. Для направлений высокой симметрии расчеты могут быть проделаны непосредственно [21, 22]. Например, для оси X_3 кубических кристаллов, являющейся одновременно и акустической осью, следующее из (7.7) дисперсионное уравнение для чисто поперечных волн имеет вид

$$\begin{vmatrix} c_{44}-\rho v^2 & ib_{5\,43}k_3 \\ -ib_{5\,43}k_3 & c_{44}-\rho v^2 \end{vmatrix}=0. \tag{7.8}$$

Здесь использована обычная одноиндексная форма записи b_{ijklm} по первым двум парам индексов. Решение (7.8) дает два значения фазовой скорости $v_\pm^2=(c_{44}\pm b_{5\,43}k_3)\,/\,\rho$, которым соответствуют волны круговой поляризации с противоположными направлениями вращения. Следовательно, волна с первоначально заданной линейной поляризацией при прохождении расстояния l будет поворачиваться на угол $\Phi=\frac{1}{2}\omega l(1/v_--1/v_+)$. В первом приближении по $b_{5\,43}k_3/c_{44}$ получим $\Phi=\omega^2l\rho b_{5\,43}/2c_{44}^2$. Таким образом, вдоль «симметричных» акустических осей акустическая активность выражена наиболее ярко и легче всего доступна наблюдению. По этой причине под акустической активностью часто понимают именно вращение плоскости поляризации волны при ее распространении вдоль акустических осей.

Первое непосредственное наблюдение акустической активности было осуществлено сравнительно недавно [23] (о последующих экспериментальных работах см. [5, 22]) на частотах 1,05—1,40 ГГц. При этом скорость вращения составляла 3—5 рад/см, а направление вращения было противоположным по отношению к направлению оптического вращения для того же случая.

Другим качественно новым эффектом, обусловленным влиянием дискретности решетки, является существование чисто сдвиговых

поверхностных волн в кристаллах с центром симметрии *). Эти волны, амплитуды которых спадают с глубиной $\sim ak^2$, первоначально были предсказаны с помощью динамической теории кристаллической решетки [25, 26]. Последующие расчеты, выполненные в рамках феноменологической модели [27], показали, что рассмотренные поверхностные волны могут быть описаны, если в уравнении состояния (7.2) учесть тот факт, что из-за наличия свободной границы интегрирование по нормальной координате проводится только по половине действительной оси. При этом локальные модули упругости в приповерхностном атомарном слое толщиной $\sim a$ оказываются меньшими по сравнению с модулями в объеме кристалла. Расценивая это уменьшение в смысле макроскопических поверхностных эффектов по Гиббсу [28], можно получить модифицированные граничные условия для упругих напряжений в объеме среды, отличающиеся от классической записи $\sigma_{ij}n_j=0$ дополнительными «поверхностными» членами $\sim ak$. Решение граничной задачи для уравнений (1.2) с описанными граничными условиями и приводит к существованию чисто сдвиговых поверхностных волн. Более общий случай, учитывающий также наличие начального напряженного состояния в приповерхностном атомарном слое (которое может быть описано с помощью понятия о поверхностном натяжении в смысле Гиббса) и изменение расстояния между соседними атомными плоскостями вблизи свободной границы, рассмотрен в работах [29, 30]. Причем в [30] проанализировано влияние поверхностных эффектов, связанных с дискретностью, на отражающие свойства поверхности и показано, что при падении как продольной, так и сдвиговой волн (речь идет об изотропном случае) соответствующие коэффициенты отражения получают аддитивные добавки $\sim ak$. Из-за малости этих добавок ($ak\sim 10^{-4}$ на частотах ~ 10 ГГц) влияние дискретности решетки на отражение более или менее заметно может проявиться только в исчезновении нулевого отражения при брюстеровских углах. Например, в случае падения продольной волны это имеет место для коэффициента отражения V_{ll}. При этом в общем случае существуют два рассчитываемых стандартным образом брюстеровских угла (см. гл. 8), для которых V_{ll} имеет ненулевые минимумы. Если в оптике похожее исчезновение нулевых эффектов при отражении изучалось экспериментально еще Рэлеем (см. [31]), то в кристаллоакустике такие эксперименты, по-видимому, еще не проводились. Между тем, так же как и эксперименты с гиперзвуковыми поверхностными волнами, они могли бы дать ряд полезных сведений о структуре приповерхностного атомарного слоя.

В сложных кристаллических решетках возможны и другие эффекты, связанные с микроструктурой среды. Прежде всего сюда следует отнести появление новых типов волн на очень высоких

*) Об этих волнах уже вкратце упоминалось при обсуждении типов поверхностных волн. Случай кристаллов без центра симметрии более сложен для анализа из-за влияния гиротропии. Кроме того, в них возможен пьезоэффект, в ряде случаев приводящий к существованию чисто сдвиговых поверхностных волн Гуляева — Блюштейна.

частотах ($\omega \sim 10^{13}$ Гц [32, 33]) — так называемые оптические колебания (гл. 10). Для их феноменологического описания необходим учет внутренних степеней свободы среды [19]. Отметим, что непосредственный микроскопический расчет эффектов, связанных с внутренними степенями свободы для произвольных направлений в кристаллах оказывается громоздким и требует различных упрощающих предположений, зачастую далеких от реальности. Феноменологические же нелокальные теории, занимающие промежуточное положение между классической механикой сплошных сред и атомарными моделями, значительно облегчают анализ.

Глава 10

ПОГЛОЩЕНИЕ И СКОРОСТЬ ЗВУКА В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ТЕПЛОВЫМИ ФОНОНАМИ И ДИСЛОКАЦИЯМИ. АКУСТИЧЕСКАЯ ЭМИССИЯ

§ 1. Введение. Общие сведения

В гл. 2 были обсуждены вопросы распространения звука в жидкостях и газах, рассмотрены явления поглощения и дисперсии звука, а также основы релаксационной теории. Для твердых тел эти задачи значительно сложнее, хотя и для жидкостей, когда они гетерофазны или находятся в турбулентном движении, эти задачи трудны и здесь имеются свои нерешенные проблемы (гл. 6, 7).

Строение твердых тел чрезвычайно разнообразно; в них могут распространяться различные типы упругих волн, которые взаимодействуют между собой. Если твердое тело имеет ограниченные размеры, то, кроме объемных, возникают еще различные типы поверхностных волн, о чем шла речь в гл. 8.

Наиболее простой случай, который поддается теоретическому рассмотрению, это задача о распространении упругих волн в изотропном твердом диэлектрике без примесей и дефектов. Формально к вопросу о поглощении звука в таком диэлектрике можно подойти феноменологически, основываясь на методе определения потерь энергии звука за счет действия диссипативных сил — внутреннего трения (вязкости) и теплопроводности, как это было сделано для жидкости в гл. 2. Проводя подобные рассуждения, можно получить формулы для коэффициентов поглощения плоских продольных и поперечных гармонических волн $\alpha_{l,t}$ такого же вида, как формула (2.2.12) [1]. О таком макроскопическом подходе для определения $\alpha_{l,t}$ будет идти речь в § 2.

Полученные таким методом выражения для коэффициента поглощения α дают в некоторых случаях правильный порядок величины, но, как правило, α все же не совпадает с экспериментальными данными; зависимость α от частоты Ω ($\alpha \sim \Omega^2$) обычно, в особенности при относительно высоких ультразвуковых частотах и низких температурах, не подтверждается.

Большое развитие теория поглощения звука в твердых телах получила после важной работы Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румера [2] (1937 г.), которые впервые решили задачу о нахождении α для кристаллического диэлектрика при низких температурах и высоких частотах. Они положили в основу теории представление о трехфонон-

ных взаимодействиях: например, звуковой фонон, взаимодействуя с тепловым фононом, поглощается им и в результате взаимодействия рождается третий фонон. Эта теория, основанная на квантово-механическом подходе, соответствует случаю, когда $\Omega\tau \gg 1$ (где τ — время жизни теплового фонона) или длина волны звука Λ значительно меньше длины свободного пробега теплового фонона l_Φ.

Другой предельный случай $\Omega\tau \ll 1$ — сравнительно низкие ультразвуковые частоты и относительно высокие (например, комнатные) температуры — был рассмотрен в фундаментальной работе А. И. Ахиезера [3] в 1938 г. Это рассмотрение основано на макроскопическом подходе с использованием кинетического уравнения Больцмана.

Разработанные методы генерации и приема гиперзвуковых частот [4, 5] позволили провести измерения α в зависимости от частоты и от температуры в ряде кристаллических диэлектриков. Первые измерения такого рода с использованием метода Баранского (см. гл. 2) проведены Боммелем и Дрансфельдом [6] и Якобсеном [7] в кристаллах кварца на частотах порядка 10^9 Гц и температурах от гелиевых до комнатных. Эти измерения в основном подтвердили теорию Ландау и Румера, но были обнаружены и расхождения. Так, например, если по теории Ландау — Румера поглощаться должны только поперечные волны, то эксперимент показал, что продольные волны испытывают примерно такое же поглощение.

Экспериментальные работы по гиперзвуку получили далее большое развитие. Эти работы дали важный метод исследования фононного спектра твердых тел зондированием узкополосным гиперзвуковым сигналом. Следует вообще сказать, что понятие фононов в физике твердого тела — одно из основных, а кинетика фононных систем важна для построения теории твердых тел. В то же время фононные системы изучены значительно слабее, чем системы из таких квазичастиц, как электроны, дырки и экситоны. Такое положение сложилось, с одной стороны, из-за большой практической важности проводящих возбуждений (к которым было привлечено большее внимание, чем к фононам), а с другой — из-за трудностей в генерации и особенно в приеме волн гиперзвуковых частот [8].

Существенное значение для развития физики фононов имело также и то обстоятельство, что гиперзвуковые частоты находят большое практическое применение в линиях задержки радиолокационных сигналов, в фильтрах и различных элементах обработки радиосигналов.

Развитие теорий Ландау — Румера и Ахиезера шло дальше в направлении выяснения причин расхождения теории Ландау — Румера для L-волн, учета анизотропии, уточнения правил отбора при трехфононных взаимодействиях, вычисления дисперсии звука. Получили объяснение роль дефектов в кристаллах диэлектриков и роль оптических ветвей в поглощении звука; была развита теория поглощения и дисперсии для поверхностных звуковых волн. В развитии теорий как Ландау — Румера, так и Ахиезера большую роль сыграли работы Саймонса, Вудруфа и Эренрайха, Мариса, Херрин-

га, Гуревича и ряда других авторов (см. обзор Мариса [9], а также [4, 5, 10]).

Большое значение в понимании процессов поглощения и дисперсии сыграли попытки объяснить характер поведения поглощения в промежуточной области между предельными случаями $\Omega\tau \gg 1$ и $\Omega\tau \ll 1$.

Отметим, что в кристаллических диэлектриках наличие дефектов (например, дефектов внедрения при нейтронном облучении образца или легировании образца примесями) приводит в ряде случаев к уменьшению α при комнатных температурах, что может иметь значение для практических приложений.

Наличие дефектов в виде дислокаций приводит к ряду интересных явлений при распространении ультразвуковых волн в кристаллах, в том числе к ряду резонансных и релаксационных явлений, к так называемому дислокационному поглощению и дисперсии [11—14]. Вопросов воздействия интенсивных звуковых и ультразвуковых колебаний на такие процессы в кристаллах металлов, как диффузия, циклическое деформационное упрочнение и усталость, мы не будем касаться и ограничимся лишь линейной задачей о дислокационном поглощении звука. Поскольку в параграфе о дислокационном поглощении речь идет о дислокациях и их влиянии на распространение звука, здесь же кратко затронут вопрос об акустической эмиссии — явлении излучения звука при движении и аннигиляции дислокаций, зарождении и развитии трещин от микро- до макроскопических масштабов. Акустическая эмиссия в последнее время находит большое практическое применение, однако теория явления пока недостаточно развита.

§ 2. Поглощение звука в изотропных диэлектриках

Рассмотрим задачу о нахождении коэффициента поглощения звука α в изотропном диэлектрике. Задача эта решается аналогично тому, как она решалась в гл. 2, когда речь шла о нахождении α для плоской гармонической волны, распространяющейся в газе или жидкости (см. вывод формулы (2.2.12)). Удобнее это сделать, пользуясь определением коэффициента поглощения согласно (2.2.3): $\alpha = |\overline{\dot{E}}|/2c\overline{E}$. Для $\overline{E}$ имеем

$$\overline{E} = \rho \int \overline{\dot{u}^2}\, dV, \tag{2.1}$$

где при рассмотрении гармонической продольной волны $u = u_x = u_0 \cos(kx - \Omega t)$, $u_y = u_z = 0$ — смещения в такой волне, распространяющейся по направлению оси x.

При этом уже из простых соображений ясно, что коэффициенты поглощения для продольных α_l и поперечных α_t волн должны различаться. Действительно, в продольной волне, как указывалось в § 2 гл. 2, деформация представляет собой комбинацию изотропного сжатия и сдвига, тогда как в поперечной волне деформация состоит из чистого сдвига. В соответствии с этим в продольной волне, кроме

поглощения за счет вязкости или внутреннего трения, может происходить выравнивание температуры между областями сжатия и разрежения. Следовательно, к потерям на внутреннее трение должны добавляться потери на теплопроводность. Таким образом, коэффициент поглощения α_l будет функцией η, η' и $\varkappa$, тогда как α_t должен быть функцией только η. Для нахождения α_l по формуле (2.2.3) заметим, что, согласно термодинамике,

$$\dot{E} = -(\partial E/\partial S)_p \dot{S} = -T\dot{S}, \tag{2.2}$$

и, принимая во внимание (1.2.12) и (2.2), а также то, что мы рассматриваем изотропное твердое тело, имеем

$$\dot{E} = -(\varkappa/T)\int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int (\dot{u}_{ik} - (1/3)\delta_{ik}\dot{u}_{ll})^2 dV - \eta' \int \dot{u}_{ll}^2 dV. \tag{2.3}$$

Теперь следует найти $\nabla T = \partial \Delta T/\partial x$ — градиент изменения температуры $\Delta T = T - T_0$ в звуковой волне. Условие адиабатичности при распространении звука состоит в том, что с точностью до членов первого порядка по тензору деформации

$$S(T_0) = S(T) + K\beta u_{ll}, \tag{2.4}$$

где T_0 — некоторая заданная температура, а тело находится при температуре T, мало отличающейся от T_0; β — коэффициент теплового расширения. Это выражение получается, если во внутренней энергии тела, согласно (8.1.10), учесть еще член $K\beta(T - T_0)u_{ll}$, рассматривая деформацию тела с учетом изменения температуры. В (2.4) величина K — модуль объемного или всестороннего сжатия (модуль объемной упругости), связанной со сжимаемостью $\varkappa$ соотношением $\varkappa = K^{-1}$.

При малой разности температур ΔT между участками сжатия и разрежения $S(T) - S(T_0)$ можно разложить в ряд по этой разности. С точностью до членов первого порядка малости имеем

$$S(T) - S(T_0) = (T - T_0)(\partial S/\partial T_0)_V = (C_V/T)(T - T_0), \tag{2.5}$$

откуда

$$\Delta T = T - T_0 = -(T\beta K/C_V)\, u_{ii}.$$

Так как скорость продольных волн c_l определяется формулой (см. гл. 8) $c_l = \sqrt{(K + 4\mu)/3\rho}$, откуда

$$K = (c_l^2 - 4c_t^2/3)\,\rho, \tag{2.6}$$

то

$$\Delta T = -(T\beta\rho/C_p)\left(c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2\right). \tag{2.7}$$

Можно показать [1], что адиабатическое K и изотермическое $K_{из}$ значения модуля всестороннего сжатия, связанные соотношением

$$K_{из} = (C_V/C_p)\,K, \tag{2.8}$$

мало отличаются друг от друга, и это различие мы далее часто принимать во внимание не будем, если не будет сделано специальных

оговорок. Поэтому для твердых диэлектриков $C_V \approx C_p \approx C$. Определив ΔT, можно теперь вычислить первый член в выражении (2.2), в котором

$$\int (\nabla T)^2 dV = \int (\partial \Delta T/\partial x)^2 dV. \qquad (2.9)$$

Теперь, пользуясь выражением для $u_x(x,t)$ и проводя усреднение за период звука, находим, согласно (2.1), $\overline{E}$, а по (2.9) и (2.3) определяем $\overline{|\vec{E}|}$. В результате этих вычислений получаем, что

$$\alpha_l = \frac{\Omega^2}{2\rho c_l^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \eta'\right) + \frac{\varkappa T \beta \rho^2 c_l^2}{C_p}\left(1 - \frac{4c_t^2}{3c_l^2}\right)^2\right]. \qquad (2.10)$$

Для поперечных волн, распространение которых происходит по оси x, смещения в волне будут $u_x = 0$ $u_y = u_{y0}\cos(kx - \Omega t)$, $u_z = u_{z0}\cos(kx - \Omega t)$, и в тензоре деформации u_{ik} не равными нулю будут компоненты

$$u_{xy} = -{}^1/_2 u_{0y} k \sin(kx - \Omega t), \quad u_{xz} = -{}^1/_2 u_{0z} k \sin(kx - \Omega t). \qquad (2.11)$$

Вычисления дают для коэффициента поглощения поперечных волн

$$\alpha_t = \eta \Omega^2 / 2\rho c_t^3. \qquad (2.12)$$

Подобное рассмотрение можно провести и для анизотропного кристаллического диэлектрика [10].

Проведем теперь обсуждение полученных формул для α_l и α_t. В гл. 2 мы отмечали, что формула для α (2.2.12) хорошо подтверждается в эксперименте как для жидкостей, так и для газов с соответствующими для них значениями коэффициентов η, η', $\varkappa$ и значениями других параметров, входящих в эту формулу. При наличии релаксационных процессов теория также удовлетворительно описывает экспериментальные данные, по крайней мере для случая одного времени релаксации.

Не так обстоит дело в акустике твердых тел. Даже для изотропных диэлектриков формулы для α_l и α_t далеко не всегда находятся в согласии с экспериментом. Не подтверждается в большом числе случаев и квадратичная зависимость α от частоты, следующая из полученных формул; на высоких звуковых частотах в ряде диэлектриков наблюдается линейная зависимость α от частоты Ω. На низких звуковых частотах зависимость от Ω вообще может отсутствовать. При низких температурах наблюдаются особенности в поведении α, о которых будет идти речь в § 4. Тем более осторожно следует применять формулы (2.10) и (2.12) для твердых тел — недиэлектриков. Все эти отклонения от изложенной теории в поведении α объясняются, с одной стороны, чрезвычайно большим разнообразием исследуемых образцов твердых тел (диэлектрики, металлы, полупроводники, кристаллы и аморфные тела), с другой стороны — их предысторией, методом получения (ковка, плавление, кристаллизация), наличием в кристаллах примесей, дислокаций и дефектов, сложного состава (например, сплавы металлов) и т. д. Кроме того, в формулы (2.10) и (2.12) входят значения величин вязкостей η и η',

которые нельзя измерить так просто, как для газов и жидкостей. В таблицах физических величин (см., например, [15]) η и η' для твердых тел вообще не приводятся; имеются лишь данные по *внутреннему трению*. В принципе существует связь между внутренним трением и вязкостью. Однако многие авторы в понятие внутреннего трения включают различного рода потери, которые к определению вязкости не имеют прямого отношения. Например, при измерениях внутреннего трения в образцах твердых тел резонансным методом иногда используют общее понятие добротности Q, с которым мы имели дело в гл. 2 и 6, когда занимались колебаниями пузырьков.

В заключение этого параграфа кратко остановимся на поглощении рэлеевских поверхностных волн [16]. Поскольку структура рэлеевской волны (см. гл. 8) представляет собой комбинацию волновых фронтов продольной и поперечной неоднородных волн, то волновые числа k_l, k_t и k_R в упругой среде с малыми потерями на длине волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} k_l &= k_l' + ik_l'' = k_l'(1 + i\alpha_l'), \\ k_t &= k_t' + ik_t'' = k_t'(1 + i\alpha_t'), \\ k_R &= k_R' + ik_R'' = k_R'(1 + i\alpha_R'), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\alpha_l' = k_l''/k_l'$, $\alpha_t' = k_t''/k_t'$, $\alpha_R' = k_R''/k_R'$ — малые вещественные поправки, численно равные деленным на 2π коэффициентам затухания на длине волны. Подставляя значения k_l, k_t и k_R в характеристическое уравнение Рэлея (8.4.3) и приравнивая нулю действительную и мнимую части, можно получить выражение для коэффициента поглощения рэлеевской волны α_R, выраженное комбинацией α_l и α_t, которое мы здесь не приводим (см. [16]). Отметим только, что, как правило, α_R оказывается при прочих равных условиях несколько больше, чем коэффициент поглощения для поперечной волны α_t.

§ 3. Некоторые сведения о колебаниях кристаллической решетки и фононах

Для более детального рассмотрения поглощения звука в идеальном бездефектном диэлектрическом кристалле необходимо использовать основные представления о динамике решетки такого кристалла [17, 18].

Тепловое движение в твердом теле — это колебания атомов относительно своего положения равновесия; его удобно описывать в виде газа квазичастиц — *фононов*. Тепловые фононы, или дебаевские кванты упругой энергии, каждый из которых представляет собой упругую плоскую гармоническую волну с энергией $\hbar\omega$ (ω — частота теплового фонона), и квазиимпульсом $\hbar\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ — волновой вектор) имеют широкий спектр энергий, или частот (его часто называют *фононным спектром*). Наинизшие частоты фононов или соответственно наибольшие длины упругих волн, определяются размерами образца, наивысшие частоты — расстоянием между соседними атомами (параметром решетки a). При $\lambda \sim a$ (λ — длина волны

теплового фонона) фононный спектр естественно обрывается. На рис. 10.1 показан спектр фононов $Z(\omega)$, следующий из теории теплоемкости Дебая (штриховая кривая), и экспериментально полученный спектр для Li [19] (сплошная кривая). Изрезанность спектра Li связана с тем, что в упрощенной теории Дебая не учитывается анизотропия кристалла (подробнее см. [19]).

На рис. 10.2 показано, как проявляются тепловые колебания решетки на низких частотах спектра, когда длины тепловых упругих волн сравнимы с размерами образца (образец — брусок кристалла сегнетовой соли среза X-45° с размерами $4{,}7\times0{,}5\times0{,}7$ см³) [20].

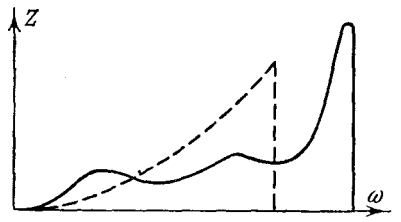


Рис. 10.1. Идеализированный дебаевский спектр (или плотность фононных состояний) (штриховая кривая) и спектр для Li, измеренный экспериментально [19].

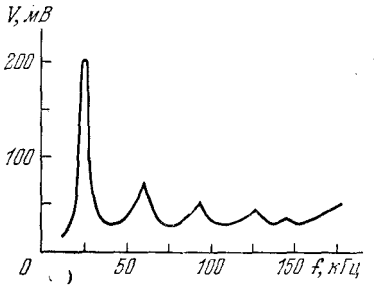


Рис. 10.2. Спектр тепловых шумов пьезобруска сегнетовой соли среза X-45°, характеризующий низкочастотный спектр фононов.

Дебаевские продольные волны, имеющиеся в образце, благодаря пьезоэлектрическому эффекту создают переменные напряжения V на металлических обкладках образца. Таким образом, на электрической стороне воспроизводится спектр частот f этих волн. В спектре всегда найдутся такие частоты, при которых на длине образца укладывается нечетное число половин длин дебаевских волн. В этом случае возникают резкие резонансные выбросы электрического напряжения. Для того чтобы эти выбросы обнаружить, нужно подсоединить обкладки образца к специальному усилителю, предназначенному для исследования тепловых шумов, и выход с этого усилителя подать на спектроанализатор.

Напомним основные предположения, которые сделал в своей теории Дебай. Они состоят в том, что упругий спектр обрезается на частотах $\omega_{max}=\omega_D$, что можно приближенно экстраполировать линейную зависимость ω от $\boldsymbol{k}$ на высокие частоты, и, наконец, что можно принять распределение осцилляторов по частотам в соответствии с формулой Планка. Поскольку для N атомов в решетке кристалла имеется $3N$ осцилляторов (степеней свободы), спектр фононов должен быть ограничен *частотой Дебая* ω_D так, чтобы общее число осцилляторов было равно $3N$, т. е. $\int_0^{\omega_D} Z(\omega)d\omega=3N$, где

$Z(\omega)$ — число осцилляторов в интервале $d\omega$. Заметим, что теория Дебая относится к случаю, когда в элементарной ячейке кристалла содержится один атом. Важной величиной является так называемая *характеристическая температура Дебая* θ_D, которая определяется выражением $\hbar\omega_D = k_Б\theta_D$, где $k_Б$ — постоянная Больцмана. θ_D может быть рассчитана по данным для упругих постоянных соответствующего кристалла. Отметим, что температура Дебая θ_D указывает на степень жесткости и звукопроводности кристалла. Чем выше θ_D, тем более звукопроводен кристалл; например, для кварца $\theta_D \approx 400$ К, а для такого кристалла, как Pb, $\theta_D \approx 100$ К. Отметим также, что чем больше для кристалла θ_D, тем он более «линеен» (гл. 11).

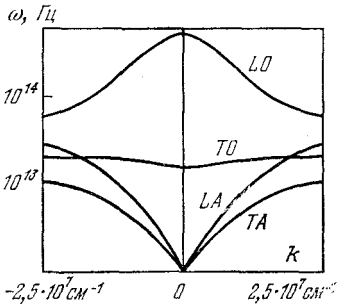


Рис. 10.3. Дисперсионная кривая для фононов, распространяющихся в флуориде натрия [9]. Две поперечные акустические ветви соответствуют направлению [100].

В курсах по динамике решетки кристаллов [21, 22] подробно показывается, что колебания двухатомного кристалла (т. е. кристалла, в элементарной ячейке которого находятся два атома различной массы m и M) состоят из двух семейств ветвей колебаний, или мод. Наиболее высокочастотные представляют собой *оптические ветви* (для продольных колебаний обозначим их через *LO* и для поперечных — через *TO*). В оптических ветвях колеблющиеся атомы m и M при $\boldsymbol{k} \approx 0$ испытывают смещения друг относительно друга при неизменном расстоянии между атомами с одинаковыми массами.

Когда же расстояния при колебаниях между одинаковыми атомами изменяются, то колебания более низкочастотны (начиная с нулевых частот); такие ветви колебаний называют *акустическими* (*LA* — продольная, *TA* — поперечная акустическая ветвь). Короче говоря, акустические дебаевские колебания представляют собой смещения элементарной ячейки как целого, тогда как оптические колебания (при $\boldsymbol{k} \approx 0$) отвечают деформациям внутри ячейки, когда ее центр тяжести почти неподвижен. В качестве примера на рис. 10.3 приведена экспериментальная зависимость ω от $\boldsymbol{k}$ (дисперсионная кривая) [9]. Измерения [23] проводились методами рассеяния медленных нейтронов при низких температурах $T = 219$ К в флуориде натрия (NaF_2). На рис. 10.3 мы обратим внимание на то, что как акустические, так и оптические ветви обладают дисперсией, и что для акустических ветвей при близких к нулю $\boldsymbol{k}$ имеется прямая пропорциональность между ω и $\boldsymbol{k}$. Отметим также, что хотя частоты оптических колебаний и лежат значительно выше акустических, они все же могут пересекаться (на приведенной диаграмме при $k \approx 2\cdot10^7$ см$^{-1}$). Для более сложных ячеек, состоящих из большого числа атомов, область пересечения *TO*- и *LA*- колебаний может быть более четко выраженной и при меньших $\boldsymbol{k}$. Впрочем, и для срав-

нительно простых кристаллов, например для кристалла TiO_2, разрешенные зоны для акустических и оптических фононов пересекаются в весьма широком интервале частот. Этот эффект может иметь значение в теории поглощения звука, так как оптические колебания также вносят вклад в α [24] (подробнее см. § 5).

Представление о нормальных тепловых колебаниях решетки как о газе невзаимодействующих фононов оказывается недостаточным, чтобы правильно объяснить такие коллективные кинетические явления, как теплопроводность, тепловое расширение твердых тел и поглощение звука. Для такого объяснения в физике твердого тела (об этом на макроскопическом языке шла речь в гл. 8, когда говорилось о модулях третьего порядка и об ангармоничности решетки) учитываются процессы *фонон-фононного взаимодействия* — фононы испытывают неупругие соударения между собой; при столкновении двух фононов может рождаться третий фонон (*процесс слияния*) или, наоборот, фонон может распадаться на два фонона (*распадный процесс*) *). Соответствующие диаграммы так называемых *трехфононных процессов* нами приводились в гл. 4. Могут происходить процессы слияния и распада большего числа фононов, чем три, например в процессе могут участвовать четыре фонона. Четырехфононный процесс соответствует при макроскопическом описании уже модулям четвертого порядка (члены четвертого порядка в разложении внутренней энергии по компонентам тензора деформации).

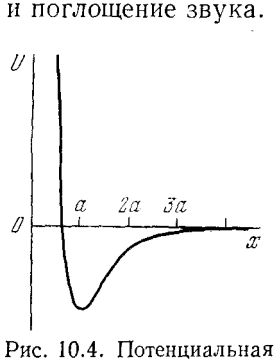


Рис. 10.4. Потенциальная энергия $U(x)$ взаимодействия атомов линейной цепочки. Равновесное состояние приближенно определяется минимумом кривой.

Ангармоничность решетки атомов вызывается асимметрией потенциальной ямы взаимодействия. На рис. 10.4 показана схема зависимости потенциальной энергии взаимодействия от расстояния между двумя нейтральными атомами в решетке. Именно ангармоничность решетки диэлектрического кристалла приводит к микроскопическому описанию затухания в нем звука, к правильному объяснению процесса теплопроводности с конечным сопротивлением передачи тепла, а также к объяснению теплового расширения твердых тел.

Напомним еще, что тепловые фононы в равновесном состоянии твердого тела подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Например, функция распределения фононов n_1 с волновыми векторами $\boldsymbol{k}_1$ и поляризацией J_1 имеет вид

$$n_1(\boldsymbol{k}_1, J_1) = \left\{\exp\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k}_1, J_1)}{k_Б T} - 1\right\}^{-1}. \qquad (3.1)$$

Для дальнейшего полезно отметить порядки величин, относящиеся к тепловым и звуковым фононам. Среднее значение частоты

*) Более детально об этом будет идти речь в гл. 11.

$\bar{\omega}$ тепловых фононов определяется из выражения

$$\hbar\bar{\omega} \approx k_{\text{Б}} T, \tag{3.2}$$

справедливого при $\hbar\omega_D \gg k_{\text{Б}} T$, где ω_D — максимальная частота в спектре. Заметим, что при более высоких значениях T основной группой фононов, участвующих в кинетических процессах, будет группа, соответствующая максимальной плотности фононных состояний в спектре фононов. Эксперимент показывает, что ниже $T \approx 10$ К тепловые фононы практически не вносят заметного вклада в поглощение звука, а даже при этой температуре $\bar{\omega} \approx 1{,}31 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$.

Следует отметить, что наивысшее значение полученных в настоящее время искусственным образом звуковых частот Ω составляет около 100 ГГц. *Методом тепловых импульсов* при низких температурах удается несколько продвинуться в сторону еще более высоких частот. При этом используется нагревание импульсом света от лазера продолжительностью 10—100 нс, импульсом тока или СВЧ-излучения тонкой ($\approx 10^{-7}$ см) соединенной с кристаллом металлической пленки размером порядка 1 мм^2, что позволяет получить широкополосный звуковой импульс (некогерентные фононы). В использовании этого метода имеются, однако, существенные трудности. Они связаны как с некогерентностью излучаемого поля фононов, так и с трудностью их детектирования [8]. Таким образом, звуковые частоты Ω, которые сейчас возможно получать, в общем при температурах выше 40—50 К существенно ниже, чем среднее значение частоты тепловых фононов, несмотря на большие успехи эксперимента. Иными словами, обычно

$$\Omega \ll \bar{\omega} \approx k_{\text{Б}} T/\hbar. \tag{3.3}$$

Среднее время жизни тепловых фононов τ (или средняя длина $l_{\text{ф}}$ свободного пробега) обычно подсчитывается по формуле для теплопроводности $\varkappa$:

$$\varkappa = Cc^2\tau/3, \tag{3.4}$$

где c — средняя скорость фононов, C — теплоемкость решетки. Порядок величины τ таков, что, например, для кварца при температуре $T \approx 10$ К $\tau \approx 10^{-7}$ с, а при 80 К $\tau \approx 3 \cdot 10^{-11}$ с. Таким образом, условие $\Omega\tau = 1$ для кварца выполняется приблизительно при 40 К на 1 ГГц, а на 10 ГГц — при 80 К. Это значит, что условие $\Omega\tau \gg 1$, которое мы далее будем использовать в теории Ландау — Румера, соответствует случаю $T \ll \theta_D$.

При столкновениях фононов должны выполняться определенные условия сохранения. Если сохраняется энергия и квазиимпульс фононов:

$$\hbar\Omega \pm \hbar\omega_1 = \hbar\omega_2, \quad \hbar\boldsymbol{k} \pm \hbar\boldsymbol{k}_1 = \hbar\boldsymbol{k}_2, \tag{3.5}$$

то процессы называют *нормальными* или N-процессами.

В теории теплопроводности показывается, что такими процессами нельзя объяснить конечное значение теплового сопротивления; тепло при одних только N-процессах могло бы распространяться и

без наличия градиента температуры, и оно распространялось бы по образцу диэлектрика со скоростью звука. Пайерлс [25] объяснил эту трудность тем, что благодаря периодической структуре кристалла имеются также так называемые *процессы переброса* (U-процессы), при которых сохраняется энергия, но закон сохранения квазиимпульса видоизменяется; он выполняется лишь с точностью до вектора обратной решетки $\boldsymbol{g}$:

$$\hbar\Omega \pm \hbar\omega_1 = \hbar\omega_2, \quad \hbar\boldsymbol{k} \pm \hbar\boldsymbol{k}_1 = \hbar\boldsymbol{k}_2 + \hbar\boldsymbol{g}.$$

U-процессы оказываются существенными при распространении акустических волн не слишком высоких частот в кристаллических диэлектриках при относительно высоких, например комнатных, температурах, когда $\Omega\tau \ll 1$. Кроме N- и U-процессов, в кристаллах с примесями или точечными дефектами могут быть также процессы, связанные с упругим рассеянием звука на дефектах; такие процессы, следуя [9], будем называть E-процессами. В E-процессах участвуют два фонона; для них выполняется закон сохранения энергии $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2$. Частота не изменяется, но изменяется волновой вектор и (возможно) поляризация. Таким образом, в этих процессах закон сохранения квазиимпульса не выполняется, но число фононов сохраняется. E-процессы вместе с U- или N-процессами могут играть определенную роль в поглощении и дисперсии звука ультразвуковых частот.

§ 4. Взаимодействие звуковых волн с тепловыми фононами. Микроскопическое рассмотрение. Низкие температуры и гиперзвуковые частоты

Теперь, после того как мы напомнили основные необходимые нам сведения о фононах и их взаимодействиях, можно перейти к нахождению поглощения ультразвуковых волн в диэлектрических кристаллах. Ниже мы будем следовать работе Мариса [9] и в основном использовать его обозначения.

Можно найти коэффициент поглощения звука, если определить скорость, с которой убывает число фононов звуковой моды. Например, в результате столкновения звукового и теплового фононов звуковой фонон исчезает и образуется третий фонон. Такого рода процессы с макроскопической точки зрения вызываются ангармоничностью колебаний кристаллической решетки.

В гл. 2, когда речь шла о релаксационной теории, мы пользовались уравнением релаксации (2.4.7):

$$\dot{\xi} = -(\xi - \xi_0)/\tau,$$

где ξ и ξ_0 — некоторое релаксирующее значение какого-либо параметра, например концентрации примеси, являющегося функцией плотности, и его равновесное значение (которое само есть функция плотности) и τ — время релаксации. Если через образец диэлектрического кристалла пустить звук, то к числу $n(\boldsymbol{k}, J)$ тепловых равновесных фононов $\boldsymbol{k}$, J-й моды (здесь $\boldsymbol{k}$ — волновой вектор звуковой

волны и J — ее индекс поляризации) добавятся звуковые фононы этой моды и полное число фононов $\boldsymbol{k}$, J-й моды будет $N(\boldsymbol{k}, J)$.

Поглощение звука представляет собой кинетический релаксационный процесс. В рассматриваемом случае роль ξ будет играть величина $N(\boldsymbol{k}, J)$; величина $n(\boldsymbol{k}, J)$ эквивалентна ξ_0, и уравнение, связывающее $N(\boldsymbol{k}, J)$, $n(\boldsymbol{k}, J)$ и τ, будет иметь вид уравнения релаксации для $N(\boldsymbol{k}, J)$:

$$dN(\boldsymbol{k}, J)/dt = -[N(\boldsymbol{k}, J) - n(\boldsymbol{k}, J)]/\tau(\boldsymbol{k}, J). \qquad (4.1)$$

Зная время релаксации $\tau(\boldsymbol{k}, J)$, можно определить пространственный коэффициент поглощения α по амплитуде; он связан с τ соотношением

$$\alpha = [2\tau(\boldsymbol{k}, J)\, c(\boldsymbol{k}, J)]^{-1}. \qquad (4.2)$$

Таким образом, задача нахождения α сводится к определению $\tau(\boldsymbol{k}, J)$, что в свою очередь сводится к вычислению $dN(\boldsymbol{k}, J)/dt$. Для нахождения $dN(\boldsymbol{k}, J)/dt$ нужно вычислить вероятность перехода кристалла в единицу времени из некоторого начального состояния $|\psi_i\rangle$ с энергией E_i в какое-то конечное состояние $\langle\psi_f|$ с энергией E_f, в котором число звуковых фононов убывает или возрастает из-за взаимодействия с тепловыми фононами. Предположим, что главный вклад дают те переходы, в которых $N(\boldsymbol{k})$ изменяется только на единицу (первый порядок теории возмущений; переходы с изменением числа фононов на два будут относиться ко второму порядку теории возмущений и т. д.). Вычисление $dN(\boldsymbol{k}, J)/dt$ производится по хорошо известным правилам квантовомеханической теории возмущений применительно к набору гармонических осцилляторов. При чисто гармонических колебаниях решетки, т.е. когда отсутствуют взаимодействия фононов, никаких релаксационных процессов, конечно, происходить не будет и поглощение звука будет отсутствовать. Однако из-за ангармонических эффектов появляется некоторая добавка $\mathcal{H}_{\text{int}}$ к гамильтониану гармонического кристалла, которую можно при определенных условиях рассматривать как малое возмущение. Тогда, согласно основному соотношению теории возмущений [26],

$$dN(\boldsymbol{k}, J)/dt = 2\pi \sum_f{}^{+} |\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\text{int}}|\psi_i\rangle|^2 \delta(E_i - E_f) - \\ - 2\pi \sum_f{}^{-} |\langle\psi_f|\mathcal{H}_{\text{int}}|\psi_i\rangle|^2 \delta(E_i - E_f). \qquad (4.3)$$

Знаки $+$ и $-$ у сумм означают суммирование по всем конечным состояниям $\langle\psi_f|$, имеющим в ветви $\boldsymbol{k}$, J число фононов, соответственно больше или меньше на единицу, чем $N(\boldsymbol{k}, J)$, т. е. $N(\boldsymbol{k}, J)+1$ и $N(\boldsymbol{k}, J)-1$.

Для дальнейшего вычисления $dN(\boldsymbol{k}, J)/dt$ нужно определить явное выражение для $\mathcal{H}_{\text{int}}$. Это выражение, как и необходимые вычисления, мы здесь приводить не будем, отсылая читателя к работам [2, 4, 5, 9], где они подробно описаны. Отметим лишь, что в выражение для $\mathcal{H}_{\text{int}}$ входят операторы рождения и уничтожения

фононов и параметры, связанные с ангармоничностью решетки через модули третьего и более высокого (если это необходимо) порядка. Вычисления с учетом (4.1) — (4.3) приводят к такому выражению для коэффициента поглощения, если принять во внимание только трехфононные взаимодействия:

$$\alpha = \frac{\pi\hbar}{8N\Omega c(\boldsymbol{k}, J)} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 \\ j_1 j_2}} \frac{1}{\omega_1\omega_2} \{ |\Phi(\boldsymbol{k}, J; \boldsymbol{k}_1, j_1; -\boldsymbol{k}_2, j_2)|^2 \times \times (n_1 - n_2)\,\delta(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\,\delta(\Omega + \omega_1 - \omega_2)\}. \quad (4.4)$$

Здесь N — число ячеек кристалла, n_1 и n_2 определяются распределением Бозе — Эйнштейна (3.1), ω_1 и ω_2 — частоты тепловых фононов, близкие по значению друг к другу, Ω — частота звука, $\Phi(\boldsymbol{k}, J; \boldsymbol{k}_1, j_1; -\boldsymbol{k}_2, j_2)$ — некоторая функция, характеризующая параметры ангармонической связи кристалла. Наличие дельта-функций $\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)$ и $\delta(\Omega+\omega_1-\omega_2)$ в (4.4) означает необходимость выполнения законов сохранения энергии и квазиимпульса кристаллической решетки (3.6).

В выражении (4.4) учтен только вклад в поглощение от столкновений, в которых звуковой фонон $\boldsymbol{k}$, J сливается с тепловым фононом $\boldsymbol{k}_1$, j_1, порождая третий тепловой фонон $\boldsymbol{k}_2$, j_2 (j_1, j_2 — индексы поляризации тепловых фононов). Здесь пренебрегается вкладом в поглощение от столкновений, в которых звуковой фонон $\boldsymbol{k}$, J распадается на два других фонона $\boldsymbol{k}_1$, j_1 и $\boldsymbol{k}_2$, j_2, поскольку такой распадный процесс, как нетрудно показать, дает существенно меньший вклад в поглощение. Подобным же образом можно рассмотреть четырехфононные процессы, роль которых в некоторых случаях, например в нахождении закона дисперсии, оказывается заметной. Отметим, что можно получить общее выражение для $\mathcal{H}_{\text{int}}$ и Φ для сложной ячейки, состоящей из нескольких атомов [9].

Заметим также, что зависимость коэффициента поглощения от амплитуды звука в проведенном рассмотрении не учитывается, т. е. рассматривается линейная теория поглощения. По этому поводу следует сделать следующее замечание. Сам по себе трехфононный процесс представляет собой (так же, как и его феноменологическая трактовка в теории упругости, основанная на введении в рассмотрение модулей третьего порядка) нелинейное явление. Однако метод рассмотрения задачи как при $\Omega\tau \gg 1$, так и при $\Omega\tau \ll 1$ ведется в первом порядке теории возмущений, что не дает возможности найти зависимость α от амплитуды исходного звукового сигнала (см. по этому поводу [10]). По этой причине настоящая глава предшествует главе о нелинейных явлениях при распространении волн конечной амплитуды в твердых телах (гл. 11), где, как и в гл. 3, для простого случая изотропной среды вопрос о нелинейном коэффициенте поглощения обсуждается.

Метод теории возмущений при нахождении α для поглощения, вызванного трехфононным взаимодействием, впервые был развит Ландау и Румером еще в 1937 г. [2] задолго до того, как были осу-

ществлены первые эксперименты по измерению зависимости α от Ω и T при гиперзвуковых частотах и низких температурах.

Этот метод при соответствующем развитии дает возможность определить также дисперсию звука и учесть анизотропию кристалла, что в [2] не обсуждалось. На языке фононов дисперсия звука получает наглядное истолкнование. Если взаимодействия фононов нет (не учитывается ангармоничность), то фазовая скорость звука

$$c(\boldsymbol{k}, J)=\Omega(\boldsymbol{k}, J)/2\pi|\boldsymbol{k}|. \qquad (4.5)$$

(В (4.5) и далее в этом и следующем параграфах вместо обычно применяемого волнового вектора $|\boldsymbol{k}|=\Omega/c$, следуя [9], мы пишем $2\pi|\boldsymbol{k}|$.) При неупругом столкновении звукового и теплового фононов энергия начального состояния кристалла получит, по сравнению с ее значением при отсутствии взаимодействия фононов, поправку; в частности, энергия может увеличиться, следовательно, возникнет изменение Ω и, соответственно по (4.5), изменение фазовой скорости звука $c(\boldsymbol{k}, J)$. Эта поправка может быть вычислена, так же как и α, стандартными методами теории возмущений. Мы здесь не приводим получающегося громоздкого выражения для дисперсии скорости звука.

Перейдем к обсуждению формулы (4.4) для α, полученной в рамках трехфононного взаимодействия. Прежде всего отметим, что эта формула получена на основе микроскопического подхода (фононные представления, квантовомеханическое рассмотрение). Пределы применимости такого рассмотрения состоят в том, что длина свободного пробега фонона $l_\text{ф}=c\tau$ должна быть значительно больше длины звуковой волны Λ; $l_\text{ф}\gg\Lambda$, т. е. $\Omega\tau\gg 1$.

Это означает, что на пути свободного пробега теплового фонона $l_\text{ф}$ укладывается много длин звуковых волн; происходит непосредственное взаимодействие звукового и теплового фононов. В рассматриваемом случае это означает также, что энергия и импульс теплового фонона могут быть определены достаточно точно, и они при изменении энергии и импульса на величину поглощенного звукового кванта не попадают в область квантовомеханической неопределенности.

Если время жизни теплового фонона $\tau(\boldsymbol{k}, j)$, то неопределенность по энергии такого фонона будет $\hbar/\tau(\boldsymbol{k}, j)$. Поскольку энергия звукового фонона равна $\hbar\Omega$, то это значит, что $\hbar/\tau\ll\hbar\Omega$, откуда, кстати, и следует условие $\Omega\tau\gg 1$, указанное выше.

Это условие может быть выполнено при высоких звуковых частотах гигагерцевого диапазона и при достаточно низких температурах. При этих условиях процессы переброса (U-процессы) оказываются несущественными и в чистых (без примесей и дислокаций) диэлектриках основной вклад в α и в дисперсию скорости вносят N-процессы.

Отметим, что во всем проведенном выше рассмотрении взаимодействие между самими тепловыми фононами явным образом не учитывается, непосредственно учитывается только взаимодействие между звуковыми и тепловыми фононами.

Итак, рассматриваем случай: звуковой фонон (Ω) + тепловой фонон (ω_1) = тепловой фонон (ω_2). Обращаясь к формуле (4.4), проведем обсуждение ее для случая изотропного диэлектрика. Мы уже обращали внимание на то, что пределы применимости этой формулы соответствуют случаю $\Omega\tau \gg 1$. Однако более тонкие рассуждения, с учетом необходимости выполнения соотношения неопределенности энергия — время, показывают, что эти формулы справедливы при $\Omega\tau \to \infty$ (уже при $\Omega\tau \approx 100$ наблюдается отклонение от положенных в основу вывода этой формулы предположений).

Отметим еще раз условия, когда выражением (4.4) можно пользоваться. Эти условия таковы: 1. $\Omega \ll \omega_1, \omega_2, \Omega\tau \to \infty$. 2. $\omega_1 \approx \omega_2$. 3. $\Omega \ll k_Б T/\hbar$, $n_1 \approx n_2$. Эти условия позволяют в (4.4) заменить $n_1 - n_2$ на $n_1(n_1+1)\hbar\Omega/k_Б T$. Действительно, на основании третьего условия $\exp(\hbar\Omega/k_Б T)$ можно разложить в ряд, ограничившись первым членом $\hbar\Omega/k_Б T$. Если далее принять во внимание, что $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$ и условие $n_1 \approx n_2$, то получается указанная выше замена. Кроме того, поскольку $\omega_1 \approx \omega_2$, то в (4.4) $1/\omega_1\omega_2$ можно заменить на $1/\omega_1^2$. В рассматриваемом случае при низких температурах U-процессы слабо выражены, $\boldsymbol{k}$ очень мало и волновые векторы $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ лежат в основном внутри первой зоны Бриллюэна, и, таким образом, выполняется закон сохранения квазиимпульса: $\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_2$. Для изотропного диэлектрика можно поэтому записать (4.4) в виде

$$\alpha = \frac{\pi (k_Б T)^{-1} \hbar^2}{8Nc(\boldsymbol{k}, J)} \times$$

$$\times \sum_{\substack{\boldsymbol{k}_1 \\ j_1, j_2}} \frac{1}{\omega_1^2} |\Phi(\boldsymbol{k}, J; \boldsymbol{k}_1, j_1; -\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1, j_2)|^2 n_1 (n_1+1) \delta(\Omega + \omega_1 - \omega_2), \quad (4.6)$$

где суммирование производится по всем направлениям $\boldsymbol{k}_1$, причем его, очевидно, можно заменить интегрированием.

Выражение для $\Phi(\boldsymbol{k}, J; \boldsymbol{k}_1, j_1; -\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1, j_2)$ при $j_1 = j_2$, т. е. когда тепловые фононы «1» и «2» имеют одинаковую поляризацию, может быть упрощено и представлено через симметризованную комбинацию констант Грюнайзена γ_s, характеризующую «усредненную» ангармоничность решетки диэлектрика, в виде [9]

$$\Phi(\boldsymbol{k}, J; \boldsymbol{k}_1, j_1; -\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1, j_1) = -4\pi i k \gamma_2(\boldsymbol{k}_1, j_1) \omega_1^2 M^{-1/2} \quad (4.7)$$

(M — масса элементарной ячейки). Заметим, что поскольку k мало, то

$$\omega_2 = \omega(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}, j_1) = \omega(\boldsymbol{k}_1, j_1) + \boldsymbol{k}\, \partial\omega(\boldsymbol{k}_1, j_1)/\partial \boldsymbol{k}_1 \approx \omega_1 + 2\pi k \boldsymbol{v}_1, \quad (4.8)$$

где $\boldsymbol{v}_1 \equiv \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_1, j_1)$ — групповая скорость фонона $\boldsymbol{k}_1, j_1$. Тензор констант Грюнайзена, через который выражается γ_s,

$$\gamma_s(\boldsymbol{k}_1, j_1) = \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1, \gamma_1) e_\alpha(\boldsymbol{k}, J) k_\beta k^{-1}, \quad (4.9)$$

определяется как

$$\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}_1, j_1) \equiv -\frac{1}{\omega(\boldsymbol{k}_1, j_1)} \frac{\partial\omega(\boldsymbol{k}_1, j_1)}{\partial u_{\alpha\beta}}.$$

Выражение (4.7) даже для изотропного диэлектрика все же оказывается достаточно сложным. Хотя мы рассматриваем случай низких температур и U-процессы не принимаем во внимание, ограничиваясь только акустической ветвью и имея дело лишь с N-процессами, все же требование выполнения законов сохранения энергии и квазиимпульса (3.5), а также необходимость знания модулей третьего порядка (а они пока известны не для многих кристаллов), делает задачу обычно трудно разрешимой.

Необходимость выполнения законов сохранения (3.5) приводит к тому, что между звуковым фононом и тепловыми фононами, а они могут быть продольными (L) и поперечными (T) (в последнем случае еще возможны два типа поляризации), не все взаимодействия могут иметь место.

Вообще говоря, выполнение условий сохранения (3.5), справедливых как для процессов слияния (знак +), так и для процессов распада (знак —), предполагает когерентность фононов. Учет конечности времени жизни фононов несколько расширяет возможные разрешенные взаимодействия или, как часто говорят, делает правила отбора менее строгими. Более подробно о правилах отбора см. [9, 10] и гл. 11.

Укажем два наиболее важных типа взаимодействий. Это

$$L+L \to L, \tag{4.10}$$

$$T+L \to L. \tag{4.11}$$

При вычислении коэффициента поглощения $\alpha_{LL,\,L}$, обязанного взаимодействию (4.10), оказывается, что наибольший вклад в $\alpha_{LL,\,L}$ дает такой процесс, когда все три продольных фонона движутся в одном направлении. Для этого случая коэффициент Грюнайзена

$$\gamma_s(\boldsymbol{k}_1,\ j_1) = -(c_{111}+3c_{11})/2c_{11} \tag{4.12}$$

и

$$\alpha_{LL,\,L} = \frac{\pi^3\hbar\Omega}{240\rho c_l^6}\left(\frac{k_\text{Б}T}{\hbar}\right)^4\left(\frac{c_{111}+3c_{11}}{c_{11}}\right)^2, \tag{4.13}$$

где c_{11} и c_{111} — упругие модули второго и третьего порядка в принятых нами сокращенных обозначениях Браггера (см. § 2 гл. 9). Напомним, что для изотропного твердого тела имеется (§ 1 гл. 8) два независимых упругих модуля второго порядка и три модуля третьего порядка. В сокращенных обозначениях (см. гл. 9), если за эти три модуля выбрать c_{111}, c_{112}, c_{123}, то имеется такая связь:

$$\begin{aligned}
&c_{111} = c_{222} = c_{333},\\
&c_{112} = c_{113} = c_{122} = c_{133} = c_{223} = c_{233},\\
&c_{144} = c_{255} = c_{366} = {}^1/_2\,(c_{112}-c_{123}),\\
&c_{155} = c_{166} = c_{244} = c_{266} = c_{344} = c_{355} = {}^1/_4\,(c_{111}-c_{112}).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Для процесса (4.11)

$$\alpha_{TL,\,L} = \frac{\pi^3\hbar\Omega}{240\rho c_t c_l^5}\left(\frac{k_\text{Б}T}{\hbar}\right)^4\left(\frac{c_{111}-c_{112}+3c_{11}-c_{12}}{c_{11}}\right)^2\frac{c_{11}-c_{44}}{c_{11}}. \tag{4.15}$$

Эта формула впервые была получена в работе Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румера [2]. Значения c_{111}, c_{112} даны в [27, 28]. Имеются расчеты α и для других типов взаимодействий [9]; например, показывается, что процесс $T+T\to T$ приводит к результату $\alpha_{TT,\,T}\to 0$, рассчитано значение $\alpha_{LT,\,L}$ и т. д. Учет анизотропии кристалла сильно усложняет задачу (в том числе нахождение правил отбора), и, за исключением некоторых случаев, точные аналитические выражения для α получить не удается. Оказывается возможным найти правила отбора, используя метод геометрических построений [29, 9, 10]. В работах [9, 10] детально обсуждаются дисперсия скорости звука и

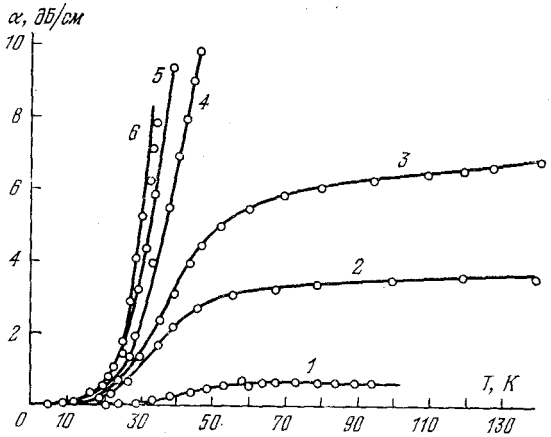


Рис. 10.5. Поглощение L-волн в кварце (вдоль оси X) в зависимости от температуры при различных частотах [7]; кривая *1* — 0,5 ГГц, *2*—1, *3*—1,44, *4*—3,9, *5*—9,4 и *6*—24.

ее роль в поглощении, обсуждается вклад в поглощение распадных процессов, роль четырехфононных процессов и т. д.

Проведенное рассмотрение относилось к случаю $\Omega\tau\to\infty$. В действительности же это условие не выполняется для диапазона частот, который может быть достигнут в экспериментах; реально имеет место условие $\Omega\tau\gg 1$. Не приходится удивляться, что ряд выводов, полученных при таком рассмотрении, не совпадает с данными эксперимента.

В основном, однако, теория Ландау — Румера и ее дальнейшее развитие нашли экспериментально хорошее подтверждение. На рис. 10.5 приведены измеренные [7] зависимости поглощения продольных волн в кварце от температуры при различных значениях частот. Видно, что поглощение начинает резко падать при $T\leqslant 50$ К, причем с повышением частоты крутизна спада заметно растет. Оба этих эффекта находятся в согласии с теорией.

Укажем на ряд отклонений данных эксперимента от теории, соответствующей случаю $\Omega\tau\to\infty$. Так, во-первых, согласно эксперименту α_l и α_t примерно одинаковы [30—32], тогда как теория дает для α_l весьма малое значение, поскольку взаимодействие

$L+L\to L$ может быть только коллинеарным. Зависимость α от температуры (при понижении температуры) значительно более крутая, чем от T^4; она доходит до T^9 [30, 34]. Наконец, зависимость α от частоты оказывается несколько более слабой, чем линейная [31—34].

Причины этих расхождений теории с экспериментом изучались рядом авторов. В работах Саймонса [35, 36] и Мариса [31, 32] рассматривался случай, когда $\Omega\tau\gg 1$ и учитывалось соотношение неопределенностей энергия — время, т. е. рассматривалась не дираковская дельта-функция, а «размазанная» функция (механизм, аналогичный «параметрическому захвату», см. § 3 гл. 4).

В этих работах предполагается, что закон сохранения энергии при столкновении фононов выполняется с точностью $\hbar/\tau_1+\hbar/\tau_2$ и

$$\delta(\Omega+\omega_1-\omega_2)\to\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12}^2+(\Omega+\omega_1-\omega_2)^2},\quad \Gamma_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right). \tag{4.16}$$

Проводя вычисления (4.4) с такой «размазанной» дельта-функцией с выбором постоянной Грюнайзена в виде

$$\gamma_s^2(LL,\ L)=\left(\frac{c_{111}+3c_{11}}{2c_{11}}\right)^2 \tag{4.17}$$

(что оправдано по причине того, что при минимальном угле между Ω и ω_1 функция Γ_{12} должна иметь наименьшее значение), можно найти коэффициент поглощения $\alpha_{LL,\ L}$. Этот коэффициент дается выражением

$$\alpha_{LL,\ L}=\frac{\pi^2\hbar\Omega}{120\rho c_l^6}\left(\frac{k_\text{Б}T}{\hbar}\right)^4\left(\frac{c_{111}+3c_{11}}{c_{11}}\right)^2\operatorname{tg}^{-1}(2\Omega\tau). \tag{4.18}$$

В пределе при $\Omega\tau\to\infty$ эта формула переходит в (4.13).

Выражение (4.18) для $\alpha_{LL,\ L}$ дает тот же порядок величины, что и формула (4.11) для $\alpha_{TL,\ L}$.

Более детально эти тонкие вопросы изложены в [9], где рассматриваются при $\Omega\tau\gg 1$ также влияние дисперсии, анизотропии и причина более крутой зависимости α от T.

§ 5. Взаимодействие звуковых волн с тепловыми фононами. Макроскопическое рассмотрение. Высокие (комнатные) температуры и ультразвуковые частоты

Содержание § 4 относилось к высоким гиперзвуковым частотам ($\Omega\geqslant 10^9$ Гц) и низким температурам; поглощение звука рассматривалось как результат непосредственного взаимодействия звукового и теплового фононов.

Как подойти к решению задачи о нахождении α и $\Delta c/c$ для другого крайнего случая — низких ультразвуковых частот и высоких температур (для большинства веществ это температуры >50 К), т. е. когда выполняется неравенство $\Omega\tau\ll 1$ ($\Lambda\gg l_\Phi$). Решение этой задачи впервые было получено А. И. Ахиезером [3].

Рассмотрение здесь основано на использовании кинетического уравнения Больцмана для газа фононов. Фононный газ в идеальном

диэлектрике находится в состоянии термодинамического равновесия, и распределение фононов по энергиям представляет собой распределение Бозе — Эйнштейна. Звуковая волна рассматривается как внешняя вынуждающая сила, действующая на систему тепловых фононов и нарушающая ее термодинамическое равновесие; связь между этой силой и системой фононов осуществляется через зависимость частоты тепловых фононов от переменной (происходящей с частотой звука) деформации, вызываемой звуком. В результате переменной деформации система тепловых фононов выводится из состояния равновесия и стремится далее вернуться к этому состоянию за счет столкновений между тепловыми фононами; действует механизм релаксации. Как при всяком релаксационном процессе, сопровождающем распространение звука, возникает поглощение звука и его дисперсия. Таким образом, здесь, как и при рассмотрении в § 4 случая $\Omega\tau \gg 1$, происходит взаимодействие звукового фонона с тепловым фононом, но не непосредственно, а со всем ансамблем тепловых фононов; последние же взаимодействуют между собой, уменьшая отклонение от термодинамического равновесия, вызванного звуком.

Для того чтобы, основываясь на этой идее, провести расчет коэффициента поглощения звука (подробно см. [9, 10]), нужно найти связь между напряжениями, деформациями и мгновенным числом тепловых фононов $N(\boldsymbol{k}', j)$ моды $\boldsymbol{k}', j$. Эту связь можно найти следующим образом: запишем энергию $\mathcal{E}_\text{ф}$ фононов в единичном объеме (V — объем всего кристалла) в виде

$$\mathcal{E}_\text{ф} = V^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}', j} [N(\boldsymbol{k}', j) + 1/2] \hbar\omega(\boldsymbol{k}', j). \tag{5.1}$$

Определим нулевую деформацию как состояние кристалла, в котором отсутствуют внутренние напряжения ($\sigma_{ij}=0$), а распределение фононов $\boldsymbol{k}'$, j-й моды описывается равновесной планковской функцией $n(\boldsymbol{k}', j)$. Таким образом, если

$$N(\boldsymbol{k}', j) = \exp[\hbar\omega(\boldsymbol{k}', j)/k_\text{Б}T - 1]^{-1} = n(\boldsymbol{k}', j)$$

и $\sigma_{ij}=0$, то $u_{ij}=0$. Здесь $\hbar\omega(\boldsymbol{k}', j)/2$ — энергия нулевых колебаний решетки при абсолютном нуле температуры, $\omega(\boldsymbol{k}', j)$ — частота тепловых фононов с волновым вектором $\boldsymbol{k}'$ и индексом поляризации j.

Тензор напряжений σ_{ik} определяется (см. (8.1.8)) соотношением

$$\sigma_{ij} = \partial\mathcal{E}/\partial u_{ij} = \partial(\mathcal{E}_\text{ф} + \mathcal{E}_\text{п})/\partial u_{ij}, \tag{5.2}$$

где $\mathcal{E}_\text{п}$ — механическая потенциальная энергия, зависящая от деформации, которую запишем в виде *)

$$\mathcal{E}_\text{п} = c^m_{ij} u_{ij} + {}^1/_2 c^m_{ijkl} u_{ij} u_{kl} + \ldots \tag{5.3}$$

Согласно (5.2) имеем

$$\sigma_{ij} = c^m_{ij} + c^m_{ijkl} u_{kl} + \frac{1}{V} \sum_{\boldsymbol{k}' j} \left[N(\boldsymbol{k}' j) + \frac{1}{2} \right] \hbar \frac{\partial\omega(\boldsymbol{k}' j)}{\partial u_{ij}} + \ldots, \tag{5.4}$$

*) В данном случае, очевидно, линейный по u_{ij} член разложения $\mathcal{E}_\text{п}$ отличен от нуля (ср. с выражением (8.1.10)).

где мы пренебрегли второй производной от ω по компонентам тензора деформации; заметим, что производные берутся при $u_{ij}=0$. Из (5.4) следует тогда, что

$$c_{ij}^{m}=-\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}',\,j}\left[n(\boldsymbol{k}',\ j)+\frac{1}{2}\right]\hbar\frac{\partial\omega(\boldsymbol{k}',\ j)}{\partial u_{ij}}. \tag{5.5}$$

Теперь (5.4) запишется в виде

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}^{m}u_{kl}+\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}',\,j}[N(\boldsymbol{k}',\ j)-n(\boldsymbol{k}',\ j)]\hbar\frac{\partial\omega(\boldsymbol{k}',\ j)}{\partial u_{ij}}. \tag{5.6}$$

Величину $N(\boldsymbol{k}',\ j)-n(\boldsymbol{k}',\ j)$ (неравновесную добавку) обозначим через $\Delta N(\boldsymbol{k}',\ j)$. Мы получили искомую связь между тензором напряжений, деформациями и величиной $\Delta N(\boldsymbol{k}',\ j)$ — отклонением в распределении фононов от его равновесного значения.

Теперь пустим через нашу фононную систему звук. Для смещения в звуковой волне u_i уравнения движения запишутся в виде (§ 1 гл. 8)

$$\rho\partial^2u_i/\partial t^2=\partial\sigma_{ij}/\partial x_j. \tag{5.7}$$

В (5.6) тензор деформации определим в пренебрежении квадратичным членом $(\partial u_l/\partial x_i)\ (\partial u_l/\partial x_j)$ (см. (8.1.1)), т. е.

$$u_{ij}=(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)/2. \tag{5.8}$$

Будем искать решение системы уравнений (5.6) — (5.8) в виде плоской гармонической волны

$$u_i=u_0e_i'(\boldsymbol{k},\ J)\exp[i(2\pi\boldsymbol{kx}-\Omega't)], \tag{5.9}$$

$$N(\boldsymbol{k}',\ j)=n(\boldsymbol{k}',\ j)+\Delta N(\boldsymbol{k}',\ j)\exp[i(2\pi\boldsymbol{kx}-\Omega't)], \tag{5.10}$$

где e_i' — компоненты вектора поляризации; e_i' и ΔN не зависят от t и $\boldsymbol{x}$.

Подставляя (5.9) и (5.10) в указанную систему уравнений, составляя детерминант при коэффициентах поляризации e_i' и приравнивая его нулю, можно найти Ω'. Находя же мнимую часть волнового числа

$$\alpha=-\operatorname{Im}[\Omega'/c(\boldsymbol{k},\ J)], \tag{5.11}$$

получим (индекс «l» у k здесь означает декартову компоненту)

$$\alpha=\left[\frac{\pi\hbar e_i(\boldsymbol{k},\ J)\,k_l}{\rho V\Omega'c(\boldsymbol{k},\ J)}\right]\sum_{\boldsymbol{k}',\,j}\frac{\partial\omega(\boldsymbol{k}',\ j)}{\partial u_{il}}\operatorname{Re}\left[\frac{\Delta N(\boldsymbol{k}',\ j)}{u_0}\right], \tag{5.12}$$

а также поправку к скорости звука Δc, которую мы здесь не приводим [9].

Имея в виду определение коэффициента и тензора Грюнайзена по (4.9), выражение (5.12) запишем в виде

$$\alpha=-\frac{\hbar}{2\rho Vc^2(\boldsymbol{k},\ J)}\sum_{\boldsymbol{k}',\,j}\gamma_s(\boldsymbol{k}',\ j)\,\omega(\boldsymbol{k}',\ j)\operatorname{Re}\left[\frac{\Delta N(\boldsymbol{k}',\ j)}{u_0}\right]. \tag{5.13}$$

Таким образом, задача нахождения α состоит теперь в том, чтобы найти неравновесную добавку $\Delta N(\boldsymbol{k}', j)$, возникающую под действием звука. Для этого можно воспользоваться *кинетическим уравнением Больцмана*. Это уравнение для неравновесной функции распределения $N(\boldsymbol{k}', j)$ применительно к нашей фононной системе имеет вид

$$\frac{\partial N(\boldsymbol{k}', j)}{\partial t} + v_i(\boldsymbol{k}', j)\frac{\partial N(\boldsymbol{k}', j)}{\partial x_i} - \\ - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial \omega(\boldsymbol{k}', j)}{\partial u_{ij}}\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial N(\boldsymbol{k}', j)}{\partial k_k} = \left(\frac{\partial N(\boldsymbol{k}', j)}{\partial t}\right)_{\text{столк}}, \quad (5.14)$$

где v_i — скорость фонона (групповая скорость); $(\partial N(\boldsymbol{k}', j)/\partial t)_{\text{столк}}$ — так называемый *интеграл столкновений*, определяющий изменение $N(\boldsymbol{k}', j)$ вследствие взаимодействия частиц друг с другом; $\boldsymbol{v}\partial N/\partial \boldsymbol{x}$ означает изменение функции распределения из-за прихода и ухода частиц в элемент объема $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{k}'$ в результате движения частиц, а третий член в левой части (5.14) — в результате действия внешней силы.

С учетом (5.9) и (5.10) уравнение (5.14) сводится к выражению

$$(\partial N(\boldsymbol{k}', j)/\partial t)_{\text{столк}} = \{-i\Delta N(\boldsymbol{k}', j)[\Omega - 2\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}', j)] + \\ + 4\pi^2 u_0 (k_\text{Б}T)^{-1}\hbar\omega(\boldsymbol{k}', j)\, n(\boldsymbol{k}', j)[n(\boldsymbol{k}', j)+1]\gamma_s(\boldsymbol{k}', j)\, k \times \\ \times [\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}', j)]\}\exp[i(2\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \Omega t)], \quad (5.15)$$

где Ω' мы заменили на Ω, считая возникающую поправку к частоте звука малой и полагая, что фононы не меняют своей поляризации.

Можно показать, что если в уравнении Больцмана отбросить столкновительный член, то звуковая волна не будет испытывать поглощения и $\alpha = 0$, как и должно быть.

В рассматриваемом случае $\Omega\tau \ll 1$, как показано в ряде теоретических работ, в бездефектных диэлектриках основной вклад в поглощение звука вносят U-процессы. Если τ_U — среднее время между U-процессами удовлетворяет неравенству $\Omega\tau_U \ll 1$, но имеет конечное значение (случай $\Omega\tau_U \to 0$ не приводит к поглощению звука — процесс настолько медленный, что восстановление равновесия полностью следует за изменением деформации в волне), то вычисление α можно на основе уравнения (5.15) провести следующим образом. Это можно сделать (формальное решение) путем разложения функции распределения фононов в ряд по собственным функциям интеграла столкновений [37, 38]; этот метод не требует каких-либо предположений о форме интеграла столкновений в уравнении Больцмана.

Другой путь решения задачи состоит в принятии упрощающих предположений при расчете интеграла столкновений [39]. При $\Omega\tau_U \to 0$

$$N(\boldsymbol{k}', j) = N_U(\boldsymbol{k}', j) = \{\exp(\hbar\omega(\boldsymbol{k}', j)/k_\text{Б}T_l) - 1\}^{-1}. \quad (5.16)$$

При $\Omega\tau_U$ конечном, но $\ll 1$ предполагается, что $N(\boldsymbol{k}, j)$ релаксирует к (5.16) и, таким образом,

$$[\partial N(\boldsymbol{k}', j)/\partial t]_{\text{столк}} = -[N(\boldsymbol{k}', j) - N_U(\boldsymbol{k}', j)]/\tau_U, \quad (5.17)$$

где τ_U не зависит от $\boldsymbol{k}'$, j.

Полагая

$$T_i = T + \Delta T_0 \exp\left[i\left(2\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \Omega t\right)\right] \tag{5.18}$$

и подставляя это значение локальной температуры с использованием (5.17) в уравнение Больцмана (5.15), получаем для добавки к неравновесному распределению $\Delta N(\boldsymbol{k}', j)$ выражение

$$\Delta N(\boldsymbol{k}', j) = \frac{(\hbar\omega(\boldsymbol{k}', j)/k_{\text{Б}}T)\, n(\boldsymbol{k}', j)\,[n(\boldsymbol{k}', j)+1]}{1 - i\tau_U\,[\Omega - 2\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}', j)]} \times$$

$$\times \left\{2\pi i u_0 k \gamma_s(\boldsymbol{k}', j)\,[1 + 2\pi i \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}', j)\,\tau_U] + \frac{\Delta T_0}{T}\right\}. \tag{5.19}$$

Используя теперь выражение (5.13) для α, а также выражение для удельной теплоемкости единицы объема

$$C = \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial T}\sum_{\boldsymbol{k}', j}\left[n(\boldsymbol{k}', j) + \frac{1}{2}\right]\hbar\omega(\boldsymbol{k}', j),$$

получим в первом приближении по $\Omega\tau_U \ll 1$

$$\alpha = \frac{CT\Omega^2\tau_U}{2\rho c^3(\boldsymbol{k}, J)}\left\{\overline{\gamma_s(\boldsymbol{k}', j)^2} - \overline{\gamma_s(\boldsymbol{k}', j)}^2\right\} +$$

$$+ \frac{CT\tau_U}{2\rho c^3(\boldsymbol{k}, J)}\,\overline{\gamma_s(\boldsymbol{k}', j)}^2\,\overline{[2\pi \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}', j)]^2}. \tag{5.20}$$

Полученная формула состоит, как и (2.10), из двух членов: первый характеризует потери на внутреннее трение, а второй — потери на теплопроводность. Обратим внимание на то, что коэффициент поглощения из-за потерь на внутреннее трение пропорционален квадрату частоты звука, квадрату параметра ангармоничности (коэффициент Грюнайзена) и температуре T. Второй член пропорционален T, $\overline{\gamma_s(\boldsymbol{k}', j)}^2$ и зависит от $\boldsymbol{k}$ и групповой скорости $\boldsymbol{v}$. Заметим, что поскольку $\tau_U \sim T^{-1}$, то α оказывается не зависящим от температуры, что подтверждается экспериментально [6].

Как в этом, так и в предыдущем параграфах были даны основные представления о теории решеточного поглощения звука в чистых или идеальных диэлектриках, т. е. в диэлектриках без дислокаций, без примесей и точечных дефектов в виде вакансий и внедрений. Это поглощение, как мы видели, вызывается ангармоничностью решетки и объясняется при $\Omega\tau \gg 1$ трехфонноным взаимодействием *(механизм Ландау — Румера)*; при $\Omega\tau \ll 1$ поглощение объясняется *механизмом Ахиезера*. Здесь следует подчеркнуть два обстоятельства. С одной стороны, важен вопрос о том, каково взаимоотношение этих двух теорий и как должна видоизменяться теория поглощения звука для случая $\Omega\tau \sim 1$, т. е. для промежуточного случая. Другой вопрос — это вопрос о том, как определяется α для реальных диэлектрических кристаллов, имеющих примеси или точечные дефекты. Оба эти вопроса являются предметом пристального внимания как теоретиков, так и экспериментаторов.

Остановимся сначала на первом из них. В [40] было показано, что и для $\Omega\tau \gg 1$ оказывается возможным применение метода кинетического уравнения Больцмана, хотя, как об этом говорилось в

начале параграфа, этот метод имеет пределы применимости при выполнении условия $\Omega\tau \ll 1$. Полученное кинетическим методом выражение для α совпало с результатом, вытекающим из применения метода трехфононного взаимодействия. В дальнейшем оказалось, что точка зрения ряда авторов на то, что два подхода для двух предельных случаев $\Omega\tau \gg 1$ и $\Omega\tau \ll 1$ не могут быть едиными, требует уточнения. Выяснилось, что условия $\lambda = 2\pi c/\omega < l_{\phi} = \tau c \ll \Lambda = 2\pi c/\Omega$, которые определяют применимость кинетического уравнения, можно смягчить и тем самым снять ограничение на величину $\Omega\tau$ [9,10]. Если выполняется неравенство $\hbar\Omega \ll k_{\text{Б}}T$, что имеет место всегда (по крайней мере при существующих экспериментальных возможностях) для случая монохроматического цуга звуковых волн, поскольку $\Omega \leqslant 10^{11}$ Гц, а $\overline{\omega} \sim 10^{12}$—$10^{13}$ (т. е. $\lambda \ll \Lambda$), то поглощение α при любых $\Omega\tau$ можно рассматривать на основе кинетического уравнения, если учесть, что функция распределения $N(\boldsymbol{k}', j)$, кроме зависимости от $\boldsymbol{k}$, t, имеет также зависимость от координат $\boldsymbol{r}$. Можно показать [41], что при любых $\Omega\tau$ поглощение звука описывается единым выражением типа ахиезеровского, но с резонансным знаменателем: резонансные слагаемые при $\Omega\tau \to \infty$ соответствуют переходам Ландау — Румера. В промежуточной области дело обстоит сложнее — ни тот, ни другой механизм по отдельности не определяют поглощения звука, так что зависимости α от T и Ω должны определяться из анализа общего выражения для α.

Сделаем несколько замечаний по второму вопросу — о роли примесей и точечных дефектов в диэлектрических кристаллах в поглощении звука. Это тем более важно, так как на практике приходится иметь дело с реальными кристаллами, почти всегда содержащими большое количество дефектов структуры. В этом случае картина по сравнению с «матрицей» (идеальным кристаллом) существенно усложняется.

Под словом «примесь» мы будем понимать просто дефект массы, т. е. ограничимся рассмотрением простых примесей замещения, не содержащих внутренних степеней свободы. Короче говоря, обсудим лишь изотопическую модель дефекта, считая изменение силовых постоянных незначительным. Обычно в теории превалирует именно такая постановка задачи, либо малое изменение силовых постоянных учитывается в рамках теории возмущений.

Хорошо известно, что внедрение примесей в кристаллическую решетку может привести к значительному изменению колебательных свойств кристалла [17]. Наличие примесей сказывается как на спектральных характеристиках, так и на характеристиках рассеяния квазичастиц. В том случае, когда концентрация примесей невелика, а массы примесных атомов отличаются от массы атомов решетки незначительно (так, что не возникают локальные и квазилокальные колебания), то можно считать, что фононный спектр примесного кристалла в целом подобен спектру матрицы. Тогда фононные состояния хорошо определены и их можно характеризовать соответствующим образом перенормированным законом дисперг-

сии и конечным временем жизни. Как правило, в этом случае можно ограничиться лишь исследованием характеристик рассеяния в системе фононов, поскольку незначительная перенормировка в спектре не приводит к существенным эффектам.

В рамках указанной модели вопрос о поглощении акустических волн в примесных кристаллах исследовался в ряде теоретических и экспериментальных работ [41—49]. Был выявлен ряд качественно новых по сравнению с матрицей особенностей в поглощении звука в примесных кристаллах.

Во-первых, при внедрении примесей определенного сорта коэффициент поглощения уменьшается по сравнению с матрицей. Во-вторых, поглощение продольных и поперечных акустических волн существенно по-разному реагирует на наличие примесей в кристаллах. В-третьих, появляется ряд специфических зависимостей на частотных и температурных характеристиках коэффициента поглощения, причем разных для продольного и поперечного звука.

Наличие примесей сказывается на поглощении акустических волн двояким образом. Во-первых, примеси непосредственно рассеивают звуковую волну; во-вторых, они рассеивают тепловые фононы и тем самым изменяют их вклад в поглощение звука [43]. Если первый эффект незначителен, то второй оказывается существенным, если фононы чаще рассеиваются на примесях, нежели друг на друге. Как мы уже знаем, в соответствии с теорией Ахиезера $\alpha \sim \Omega^2\tau$, где τ — некоторое среднее время жизни фононов. Тогда, казалось бы, коэффициент поглощения должен уменьшаться при внедрении примесей, так как это уменьшило бы время жизни фононов. Действительно, если время релаксации фононов в матрице τ_f, а время релаксации фононов при рассеянии на примесях τ_0, то в соответствии с правилом Маттиссена (см. [19]) полное время будет иметь вид

$$\tau^{-1} = \tau_f^{-1} + \tau_0^{-1}, \quad \alpha \sim \Omega^2\tau_0\tau_f/(\tau_0 + \tau_f).$$

Следовательно, при увеличении концентрации примесей поглощение должно уменьшаться и в пределе $\Omega\tau_0 \to 0$, $\alpha \to 0$. Однако было показано [44], что роль примесей не сводится только к появлению дополнительного канала рассеяния тепловых фононов и что такая простая трактовка ведет к противоречию с экспериментальными результатами. А именно: для проверки столь интересного факта, как уменьшение поглощения, в работе [47] было исследовано поглощение продольного звука частоты 649 МГц в германий-кремниевом сплаве при 300 К. Для направления распространения [100] поглощение в $Ge_{0,03}$ $Si_{0,97}$ было только на 13% меньше, чем в чистом кремнии. Изменение в τ может быть определено независимо по измерению теплопроводности $\varkappa$ при использовании приближенного выражения $\varkappa = Cc^2\tau/3$. Теплопроводность сплава была в 8,5 раза меньше, чем в чистом кремнии, и, таким образом, τ, определенное этим методом, явно не подходило для объяснения ультразвуковых экспериментов.

Для объяснения этих разногласий в работе [44] был рассмотрен вопрос о поглощении акустических волн в кристалле, содержащем столь большое количество примесей, что выполнялось условие: $\tau_0 \ll \tau_f$; $\Omega\tau_0 \ll \Omega\tau_f \ll 1$. Оказалось, что в этом случае поглощение продольного звука вовсе не зависит от τ_0. Физической основой для этого результата послужили следующие соображения.

Так как рассеяние фононов на примесях является почти упругим, то оно само по себе не в состоянии привести систему фононов к полному термодинамическому равновесию, после того как она была возмущена звуковой волной. Таким образом, когда выполнено условие $\tau_0 \ll \tau_f$, мы можем рассматривать релаксацию фононов к состоянию термодинамического равновесия в два этапа.

1. Группы фононов, принадлежащие одной изоэнергетической поверхности, приходят к взаимному равновесию за время $\sim\tau_0$.

2. Эти различные группы фононов приходят в равновесие за время $\sim\tau_f$, завершая восстановление полного термодинамического равновесия.

Поскольку первый этап происходит очень быстро ($\tau_0 \ll \tau_f$), основной вклад в поглощение продольного звука дает второй этап, и, таким образом, поглощение не зависит от τ_0.

Так как поперечный звук не изменяет полной энергии фононной системы, то для того, чтобы система пришла в равновесие, достаточно только упругих процессов, т. е. первого этапа.

Таким образом, основной вывод заключается в том, что продольные волны относительно нечувствительны к наличию примесей в кристалле (возможные вариации коэффициента поглощения звука связаны с перенормировкой упругих модулей и плотности кристалла), в то время как для поперечного звука $\alpha \to 0$ при $\Omega\tau_0 \to 0$. Отметим, что, как замечено в [24], этот вывод справедлив в тех случаях, когда времена фонон-фононной релаксации изменяются слабо при внедрении примесей. Однако это не всегда так. Экспериментальные результаты [49] свидетельствуют о том, что τ_f сильно зависит от концентрации примесей. В этом случае неоправданным будет вывод об относительной нечувствительности поглощения продольных волн к наличию примесей в кристалле.

Таким образом, можно считать, что основные качественные особенности поглощения акустических волн в примесных диэлектрических кристаллах, наблюдаемые в ряде экспериментов, находят объяснение в рамках сравнительно простых теоретических моделей. Однако так обстоит дело в случае кристаллов достаточно простой структуры. Действительно, все перечисленные работы относятся, по существу, к кристаллам с простой элементарной ячейкой. Дело в том, что непосредственное взаимодействие акустической волны с оптическими фононами, как правило, детально не анализируется, хотя обобщение, например, теории Ахиезера на этот случай известно [9]. В сравнительно простых кристаллах ролью оптических фононов в поглощении звука действительно можно пренебречь даже в области температур, где заселенности оптических мод немалы. Это связано с тем, что времена релаксации для оптических фононов

в идеальных кристаллах меньше соответствующих времен для акустических фононов, и они не вносят сколько-нибудь существенного вклада в поглощение; нарушение равновесия в системе оптических фононов, возникающее при прохождении звуковой волны, невелико.

Все же иногда влияние оптических фононов следует учитывать. Так, в работе [23] предполагается, что наличие ряда низколежащих оптических ветвей в рутиле (TiO_2) является причиной интенсивного взаимодействия между акустическими и оптическими фононами, что приводит к эффективной релаксации фононного распределения в системе акустических фононов и сравнительно малой величине коэффициента поглощения звука в рутиле. Таким образом, оптическим фононам отводится роль дополнительного канала релаксации активных в поглощении звука акустических фононов. Прямое поглощение звука из-за взаимодействия с системой оптических фононов при этом не учитывается.

Однако, как показано в [24], существуют кристаллы, в которых, по-видимому, в широкой области температур, за исключением самых низких, непосредственным взаимодействием исходной акустической волны с оптическими фононами пренебрегать нельзя. К таким кристаллам следует отнести сложные кристаллы с большим количеством атомов на элементарную ячейку, например кристаллы типа алюмоиттриевого граната ($Y_3Al_5O_{12}$, 160 атомов в элементарной ячейке). Наличие большого количества низколежащих оптических ветвей приводит к резкому возрастанию плотности колебательных состояний кристалла, начиная с энергий, соответствующих оптическим фононам. Вероятно, уже при температурах жидкого азота непосредственное влияние оптических фононов на поглощение звука в таких кристаллах должно быть значительным, а при более высоких температурах и доминирующим. Практически этот вопрос, которому посвящена работа [24], является важным, открывая пути для поиска кристаллов с малым α при комнатных температурах.

§ 6. Дислокационное поглощение и дисперсия звука. Акустическая эмиссия

В конце § 5 мы обращали внимание на то, что если в реальном кристалле имеются точечные дефекты, то они могут играть существенную роль в поглощении звуковых волн, причем влияние точечных дефектов на распространение звука может иметь место не только на высоких ультразвуковых или гиперзвуковых частотах, о чем шла речь в предыдущем параграфе, но и на низких частотах. На частотах $\Omega \leqslant 1$Гц в объемно центрированных кубических кристаллах, например в карбонильном железе, наблюдается так называемая релаксация Снука — пик внутреннего трения, вызываемая атомами внедрения (углерод, азот), растворенными в кристалле [12]; имеются и другие низкочастотные релаксационные процессы. Реальные кристаллы наряду с точечными дефектами имеют также

линейные дефекты, так называемые *дислокации*, представляющие собой линии, вдоль которых нарушено правильное расположение атомных плоскостей. Эти нарушения совершенства решетки кристалла имеют макроскопические размеры (порядка 10^{-3}—10^{-6} см) и чрезвычайно разнообразны по своему геометрическому виду, числу их в единице объема кристалла и размерам, энергетическим свойствам, типам взаимодействия между собой и т. д. Они играют определяющую роль в таких важнейших физико-механических свойствах кристаллов, как упругость, пластичность и прочность. При распространении звука в кристаллах дислокации под действием переменных напряжений в акустической волне испытывают специфические воздействия, в результате которых, в частности, возникают *явления поглощения и дисперсии* звука. Изучение дислокационного поглощения и дисперсии акустическими методами, с одной стороны, представляет собой один из весьма полезных методов исследования самой дислокационной структуры кристаллов в зависимости от тех или иных физических условий, а с другой стороны представляет собственно акустический интерес. Напомним, что одним из факторов, мотивировавших необходимость введения понятия дислокаций, явились работы Френкеля и Конторовой (см., например, [50]), в которых была впервые предложена модель дислокации, называемая в настоящее время их именем. В этих работах, в частности, приближенно было рассчитано, что для того, чтобы сдвинуть верхний ряд атомов вдоль нижнего ряда (рис. 10.6), нужно приложить скалывающее статическое усилие, величина которого имеет порядок $\sigma_{ск}=(b/a)\,\mu/2\pi$, где μ — модуль сдвига, а величины a и b (близкие по значению) обозначены на рисунке *). Для таких металлов, как медь и серебро, $\sigma_{ск}\approx\mu/30$. Однако экспериментальное значение величины $\sigma_{ск}$ оказалось на много порядков ниже ($\sigma_{ск}\approx$ $\approx 10^{-4}$—$10^{-5}\mu$ — реальный предел текучести). Такое большое различие было в дальнейшем объяснено теорией дисклокаций. Заметим, что для бездислокационных кристаллов, обладающих большим значением скалывающего напряжения (тонкие кристаллические волокна или «усы»), указанное теоретическое значение $\sigma_{ск}$ близко к экспериментальному. Изучение дислокаций в настоящее время занимает обширную область физики кристаллов; теория дислокаций подробно изложена в ряде учебных пособий и монографий [1, 17, 51—55].

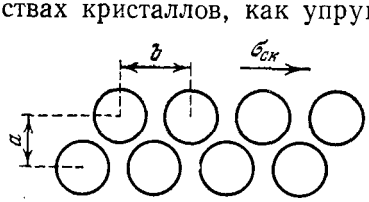


Рис. 10.6. Скалывающее напряжение при скольжении двух слоев атомов.

Имеется целый ряд характерных типов дислокаций, из которых наиболее простыми и важными являются так называемые краевая и винтовая дислокации.

*) Здесь и ниже мы будем иногда пользоваться безындексными обозначениями для напряжений и деформаций, понимая под σ и u одну из компонент σ_{ij} и u_{ij}.

На рис. 10.7, *а* схематически показано строение идеального кристалла в виде параллельных атомных плоскостей. Когда одна из плоскостей в кристалле обрывается внутри него, край этой плоскости образует так называемую *краевую дислокацию* (рис. 10.7, *б*). На рис. 10.7, *в* дана схема *винтовой дислокации*, когда внутри кристалла не оканчивается ни одна из атомных плоскостей; эти плоскости приблизительно параллельны и кристалл представляется в виде одной плоскости, которая образует винтовую поверхность. Когда эта поверхность выходит на внешнюю плоскость кристалла, дислокация обрывается, возникающая ступенька имеет толщину атомного слоя. Дислокации могут представлять собой сложные кривые, которые либо замкнуты в виде петель, либо разветвляются,

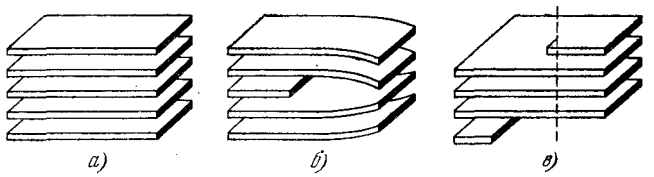


Рис. 10.7. Схема, поясняющая краевую и винтовую дислокации: *а*) идеальный кристалл в виде семейства атомных плоскостей; *б*) кристалл с краевой дислокацией; *в*) кристалл с винтовой дислокацией.

но должны выходить на поверхность кристалла. Такие дислокации образуют ряды или сетки и разделяют кристалл на отдельные пространственные ячейки в виде решетки. Дислокации закрепляются на точечных дефектах (относительно слабые закрепления, которые могут отрываться под действием звуковой волны) и в точках пересечения сеток (сильные закрепления), в которых отрыва дислокации под действием не слишком интенсивного звука не происходит.

С удалением от дислокаций сопутствующие им локальные упругие напряжения убывают; сами дислокации относительно легко могут двигаться в кристалле в плоскостях скольжения, вызывая *пластическую деформацию*. Этому движению, однако, препятствует связь между атомами, взаимодействие с другими соседними дислокациями и примесные атомы. В ряде случаев при больших деформациях возникает значительное число дислокаций. При распространении звука в кристалле упругие напряжения в плоскостях скольжения вызывают колебания дислокаций. При этих колебаниях имеют место взаимодействия с тепловыми фононами, за счет чего часть энергии звука теряется; возникают *дислокационное поглощение и дисперсия звука* дополнительно к решеточному поглощению, рассмотренному в предыдущих параграфах этой главы.

В настоящее время принято различать три механизма, лежащие в основе взаимодействия звука с дислокациями. Это — *струнный механизм, гистерезисный механизм и релаксационный механизм*. На рис. 10.8 [54] схематически представлена модель, иллюстрирующая выгибание закрепленной дислокационной линии — «струны», в зависимости от механического напряжения σ, действую-

щего на дислокацию в плоскости скольжения. На этом рисунке $l_п$— длина петли ($l_п \approx 10^{-3}$—10^{-6} см, т. е. от сотен до тысяч атомных расстояний), возникающей из-за закрепления дислокации на примесных атомах, и L_c— длина, определяемая пересечением сетки дислокаций. При увеличении напряжения σ линии петель выгибаются, при некоторых σ возникает отрыв и на закреплениях сеткой происходит *размножение дислокаций* путем так называемого *механизма Франка — Рида.*

При приложенных переменных напряжениях, имеющихся в звуковой волне, кроме деформации, вызванной упругими силами, появляется добавочная дислокационная деформация. В приведенной струнной модели, впервые предложенной Келером [55] и усовершенствованной Гранато и Люкке [54, 56], в случае динамических деформаций (звук) из-за демпфирования колебаний петли (струна в вязкой среде) возникает фазовый сдвиг между напряжением и деформацией. Следовательно, возникает поглощение звука и изменение его скорости (в теории дислокаций дисперсию скорости принято называть дефектом модуля). Это поглощение имеет резонансный характер и максимально в области резонансной частоты Ω_0, зависящей от длины петли. Предполагается, что потери при колебаниях пропорциональны скорости движения петель.

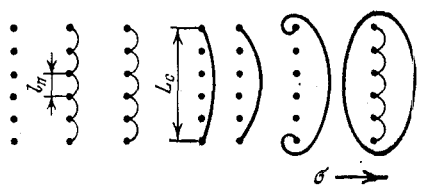


Рис. 10.8. Стадии выгибания (и отрыва от точек закрепления) дислокационной линии под действием приложенного напряжения σ.

Описанная «струнная» модель движения дислокаций сильно упрощена. В ней не учитывается статистическое распределение дислокаций по длинам их петель, да и простая аналогия между колебаниями струны и движениями дислокации является грубой идеализацией. Имеются трудности в определении понятия дислокационного натяжения, связанные с энергетикой отрыва дислокаций от точек закрепления, учетом взаимодействия между отдельными дислокациями и т. д. Одно из наиболее серьезных критических замечаний состоит в том, что эта модель дается на уровне представлений об упругости сплошной среды, тогда как наиболее точные результаты, естественно, следует ожидать от микроскопической модели. Тем не менее струнная модель пока представляется одной из наиболее ценных в теории дислокационного поглощения звука.

Приведём, следуя [54, 56], пример расчета поглощения и дисперсии звука для струнной модели. Для такого расчета исходим из уравнения движения, которое запишем в виде

$$\partial^2\sigma/\partial x^2 - \rho\,\partial^2 u/\partial t^2 = 0, \qquad (6.1)$$

причем считаем, что деформация

$$u = u_e + u_d, \qquad (6.2)$$

где u_e — упругая деформация, подчиняющаяся закону Гука ($u_e = \sigma/\mu$, μ — модуль сдвига), и u_d — дислокационная деформация. В теории дислокаций показывается, что дислокационная деформация от петли длиной $l_п$ в кубе единичных размеров, равна $\bar{\xi} l b$, где

$$\bar{\xi} = l^{-1} \int_0^{l_п} \xi(y)\, dy \qquad (6.3)$$

— среднее смещение дислокации, y — направление вдоль линии дислокации (рис. 10.9), $|\boldsymbol{b}|$ — абсолютное значение так называемого вектора сдвига, или *вектора Бюргерса*. Этот вектор представляет собой вектор ($\overrightarrow{FA} = \boldsymbol{b}$ на рис. 10.10), который следует провести для замыкания концов *контура Бюргерса* данной дислокации. Контур



Рис. 10.9. Дислокационная петля длины $l_п$.

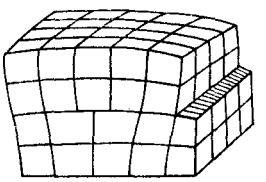


Рис. 10.10. Расположение атомов в кристалле с краевой дислокацией. Атомы схематически представлены в виде кубиков. $\overrightarrow{FA} = \boldsymbol{b}$ — вектор Бюргерса; точки — центры кубиков. *ABCDEF* — контур Бюргерса.

же Бюргерса представляет собой кривую (*ABCDEF* на рис. 10.10), проведенную в идеальном кристалле вокруг линии дислокации. В случае краевой дислокации $\boldsymbol{b}$ соответствует дополнительному межплоскостному расстоянию, связанному с лишней плоскостью; он направлен перпендикулярно к линии дислокации кристалла. В случае винтовой дислокации $\boldsymbol{b}$ представляет собой шаг винта; он параллелен линии дислокации.

Если через $\tilde{L}$ обозначить общую длину дислокационных движущихся линий в единице объема, то

$$u_d = (\tilde{L} b / l_п) \int_0^{l_п} \xi(y)\, dy. \qquad (6.4)$$

Величину $\tilde{L}$ [м$^{-2}$] называют плотностью дислокаций. Когда все дислокации параллельны, $\tilde{L}$ есть число дислокационных линий, проходящих через единичный плоский слой толщины $l_п$, перпендикулярный к дислокациям: $\tilde{L} = N l_п$, где N — число линий дислокаций (принимаем для упрощения распределение по длинам для одной системы скольжения в виде дельта-функции, что, конечно, представляет собой сильную идеализацию).

Уравнение колебаний закрепленной дислокационной петли будет

$$A \partial^2\xi/\partial t^2 + B\, \partial\xi/\partial t - C\, \partial^2\xi/\partial y^2 = b\sigma. \qquad (6.5)$$

Здесь $\xi=\xi(x, y, t)$ и граничные условия в точках закрепления $\xi(x, 0, t)=\xi(x, l, t)=0$ (рис. 10.9), $A=\rho b^2$— эффективная масса на единицу длины. Второй член в (6.5) представляет собой силу сопротивления на единицу длины; эта сила считается пропорциональной скорости, третий член присутствует за счет натяжения изогнутой дислокации. Правая часть $b\sigma$ есть внешняя сила, приходящаяся на единицу длины и создающая сдвиговое напряжение. Величина C в (6.5) дается выражением

$$C=2\mu b^2/\pi(1-\sigma_{\text{п}}), \tag{6.6}$$

где $\sigma_{\text{п}}$— коэффициент Пуассона.

Уравнения (6.1) — (6.5) сводятся к системе уравнений

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}=\frac{\tilde{L}\rho b}{l_{\text{п}}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^{l_{\text{п}}}\xi(y)\,dy,$$
$$A\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+B\frac{\partial\xi}{\partial t}-C\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=b\sigma \tag{6.7}$$

с выписанными выше граничными условиями для ξ. При наличии звука частоты Ω ищем решения, для которых σ представляет собой периодическую функцию времени, не зависящую от y. Считая, что дислокационные линии перпендикулярны к направлению распространения звука, запишем σ в виде

$$\sigma=\sigma_0\exp(-\alpha x)\exp[i\Omega(t-x/c)]. \tag{6.8}$$

Решение (связь между σ и ξ) получается в виде ряда, который мы здесь выписывать не будем и ограничимся лишь первым членом, так как он вносит основной вклад в результат; этот член имеет вид

$$\xi=\frac{4b\sigma}{\pi A}\frac{\sin\pi y}{l_{\text{п}}}\frac{\exp[i(\Omega t-\delta_0)]}{[(\Omega_0^2-\Omega^2)^2+(\Omega d)^2]^{1/2}}, \tag{6.9}$$

где

$$d=B/A,\quad \Omega_0=(\pi/l_{\text{п}})(C/A)^{1/2},\quad \operatorname{tg}\delta_0=\Omega d/(\Omega_0^2-\Omega^2). \tag{6.10}$$

Поглощение $\alpha(\Omega)$ и скорость $c(\Omega)$ при этом даются выражениями

$$\alpha(\Omega)=\frac{\Omega}{2c}\frac{\tilde{L}}{\pi}\Delta_0\tilde{\eta}^2\frac{\Omega d}{(\Omega_0^2-\Omega^2)^2+(\Omega d)^2}, \tag{6.11}$$

$$c(\Omega)=c_0\left[1-\frac{\tilde{L}}{2\pi}\Delta_0\tilde{\eta}^2\frac{\Omega_0^2-\Omega^2}{(\Omega_0^2-\Omega^2)^2+(\Omega d)^2}\right], \tag{6.12}$$

$$c_0=(\mu/\rho)^{1/2},\quad \tilde{\eta}^2=\pi^2C/A,\quad \Delta_0=8\mu^2b^2/\pi^3C. \tag{6.13}$$

Если выразить потери звуковой энергии не через α, а через декремент затухания Δ (для частоты $f=\Omega/2\pi$), связанный с α известным соотношением

$$\Delta=\delta W/2W=\alpha(\Omega)\,2\pi c/\Omega \tag{6.14}$$

(W — энергия, запасенная за период, и δW — потери энергии за период), то из (6.11) получим

$$\Delta = \frac{\Delta_0 \tilde{L} l_{\text{п}}^2}{D} \frac{\Omega/\Omega_0}{[1-(\Omega/\Omega_0)^2]^2 + (\Omega/\Omega_0)^2/D^2}, \tag{6.15}$$

где введено обозначение $D=\Omega_0/d$ — коэффициент демпфирования и учтено соотношение $\tilde{\eta}=l_{\text{п}}\Omega_0$. Зависимость декремента Δ от Ω приведена на рис. 10.11. Из этого рисунка видно, что при малом демпфировании (это соответствует $D \gg 1$) Δ пропорционально Ω вплоть до

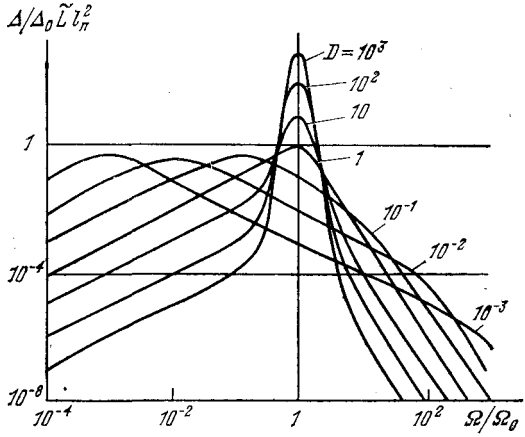


Рис. 10.11. Декремент $\Delta/\Delta_0\tilde{L}l_{\text{п}}^2$ в зависимости от частоты при различных значениях постоянной демпфирования D (длины петель $l_{\text{п}}$ одинаковы).

резонансного значения Ω_0. При подходе к резонансу (острота максимума зависит от степени демпфирования) Δ пропорциональна Ω^{-1} и при удалении от резонанса $\Delta \sim \Omega^{-3}$. Напомним, что резонансное значение частоты равно

$$\Omega_0 = (\pi^2 C/l^2 A)^{1/2}. \tag{6.16}$$

Рассматриваемые потери имеют место (при типичных параметрах задачи) в диапазоне частот порядка десятков мегагерц и выше, что согласуется с экспериментом.

Если ввести время релаксации $\tau = Bl_{\text{п}}^2/\pi^2 C$, то нетрудно убедиться, что при $\Omega^2/\Omega_0^2 < 1$ и при $\Omega^2\tau^2 \geqslant 1$ резонанс сильно демпфирован (это, по-видимому, обычно имеет место для металлов высокой чистоты); выражение (6.15) переходит в

$$\Delta = \Delta_0 \tilde{L} l_{\text{п}}^2 \Omega\tau/(1+\Omega^2\tau^2). \tag{6.17}$$

Как видно, выражение (6.17) для Δ имеет вид релаксационной кривой. Для очень низких частот, когда $\Omega^2/\Omega_0^2 \ll 1$ и $\Omega^2\tau^2 \ll 1$,

$$\Delta = \Delta_0 \tilde{L} B l_{\text{п}}^4 \Omega/\pi^2 C, \tag{6.18}$$

т. е. декремент пропорционален Ω и $l_{\text{п}}^4$.

Полученные формулы для рассмотренных величин (выражения (6.11) — (6.18)) проверялись многими авторами экспериментально, а приведенный путь расчета Δ (или α/Ω и $c(\Omega)$) уточнялся. Трудность экспериментальной проверки теории, основанной на струнной модели движения дислокаций в поле звуковой волны, состоит в том, что в теорию входит много параметров ($l_п$, b, B, A, C, $\tilde{L}$ и т. д.), определить более или менее точные значения которых представляет значительные трудности. Так, для того чтобы согласовать данные для $\Delta(\Omega)$, получающиеся из теории, с экспериментальными результатами, приходится задавать средние значения для плотности дислокаций $\tilde{L} \approx 10^6 — 10^7$ см$^{-2}$, $B \approx 10^{-3} — 10^{-5}$, $l_п \approx 10^{-3} — 10^{-6}$ и т. д. Эти значения не могут быть точно измерены. Качественный характер приведенных теоретических зависимостей, тем не менее, оправдывается на эксперименте. Хотя в саму теорию заложено много упрощающих предположений, описанная модель колебаний закрепленной дислокации, имеющей вид струны в вязкой среде, в общих чертах, по-видимому, следует считать правильной.

Рассмотрение закрепленной дислокации относилось к случаю, когда амплитуда ее колебаний была мала и отрыва дислокации от ее точек закрепления на пересечении сеток не происходило. При достаточно больших деформациях и в случае облегчения возможности отрыва дислокации такой отрыв происходит и тогда возникает поглощение, которое зависит от амплитуды деформации.

Можно показать в этом случае, используя формулы (6.4) — (6.13), что для низких частот (включая килогерцевый диапазон) связь между дислокационным сдвиговым напряжением и дислокационной деформацией практически не зависит от частоты; дислокационная деформация прямо пропорциональна приложенному напряжению и зависит от длины петли. Поскольку при некотором σ возникает процесс отрыва (рис. 10.8), в результате чего меняется длина петли $l_п$, дислокационная деформация нелинейна. Теорию амплитудно-зависимого внутреннего трения, основанную на учете отрыва дислокаций от точек закрепления, в литературе принято называть *гистерезисной теорией*.

Остановимся теперь кратко на третьем механизме взаимодействия звука с дислокациями, который, как это экспериментально установлено, имеет чисто дислокационное происхождение и релаксационную природу. Речь идет о пиках внутреннего трения (главным образом в гранецентрированных кристаллах металлов таких, как медь, свинец, серебро, платина, никель) при температурах обычно около одной трети температуры Дебая θ_D и ниже, называемых *пиками Бордони* (в честь итальянского ученого, открывшего их в 1954 г. [57]) и играющих в изучении дислокационной структуры кристаллов металлов важную роль. Бордони изучал внутреннее трение в наклепанных образцах ряда гранецентрированных кристаллов металлов на частотах 10—40 кГц в интервале от 4 К до комнатной температуры и обнаружил пик внутреннего трения. В дальнейшем, вследствие важности обнаруженного явления,

появилось большое количество экспериментальных работ. На рис. 10.12 в качестве примера, характерного для поведения пика Бордони, представлены экспериментальные результаты полученные [58] методом изгибных колебаний на частоте 1100 Гц (по измерению внутреннего трения в поликристаллической меди в зависимости от степени деформации). Многочисленные эксперименты показали, что пик Бордони имеется как в монокристаллах, так и в поликристаллах; в хорошо отожженных образцах пик пропадает, а

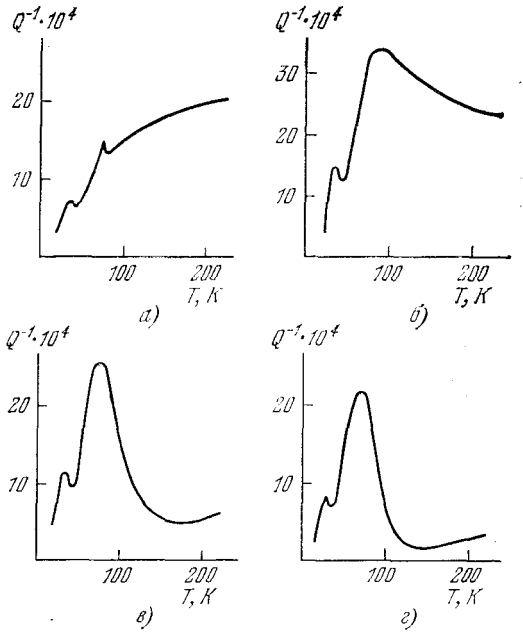


Рис. 10.12. Пики внутреннего трения (пики Бордони) в поликристаллической меди [58] при различной холодной деформации: *а*) 0,1%, *б*) 0,5%, *в*) 2,2%, *г*) 8,4%.

после деформации в холодном состоянии вновь появляется. Это обстоятельство свидетельствует о том, что наблюдаемый пик внутреннего трения вызывается движением дислокаций. Ни примеси, ни границы зерен на появление пика влияния не оказывают. Природа пика связана с дефектами, возникающими в самом процессе деформации. Высота пика резко возрастает до деформаций порядка 2—3%, после чего при дальнейшем увеличении деформации она не меняется (происходит своего рода насыщение). Имеется ряд характерных зависимостей от температуры образца. Чем выше частота звуковых колебаний, тем выше температура, при которой наблюдается пик Бордони; эта температура мало зависит как от количества примесей, так и от величины деформации. Амплитуда колебаний мало влияет на высоту пика и на температуру его появления. Как видно из рис. 10.12, имеется обычно дополнительный пик меньшей высоты.

Такое большое число особенностей, характерных для поведения пика Бордони, привело к тому, что до настоящего времени не построено удовлетворительной теории, которая объясняла бы все свойства этого пика. Несомненным является только то, что пики имеют дислокационную природу; имеется вполне удовлетворительная качественная теория [59, 60] пиков Бордони. Что же касается количественного описания этих пиков, то здесь предстоит еще большая теоретическая работа.

Одним из перспективных направлений развития теории пиков Бордони является так называемая *теория дислокационных перегибов*. В [59] сделано предположение, что пик Бордони вызывается релаксационным процессом и возникает вследствие термически активируемого движения дислокаций, дислокационной релаксации.

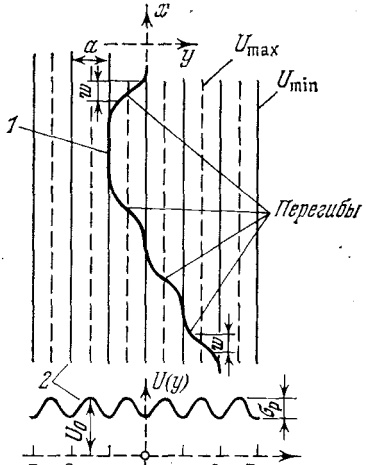


Рис. 10.13. Схематическое представление формы линии дислокации (*1*), возникающей под действием напряжения Пайерлса σ_P (без соблюдения масштаба, поскольку $w > a$ и $U_0 \gg \sigma_P$). $U(y)$ — потенциальный рельеф Пайерлса (*2*).

Предполагается, что пики Бордони вызываются движением дислокаций через *барьеры Пайерлса*, имеющиеся в решетке кристалла. На рис. 10.13 изображено расположение так называемых долин (области U_{min}) и барьеров (области U_{max}) Пайерлса для дислокации. На этом же рисунке изображена потенциальная энергия дислокации. Выражение

$$U(y) = U_0 (1 - \cos 2\pi y/a)$$

представляет собой потенциал Пайерлса; U_0 — высота потенциального барьера. На дислокации, лежащей в произвольном направлении в плоскости скольжения (обычно она представляет собой плоскость наиболее плотной упаковки атомов — вдоль этого направления потенциальная энергия на единицу длины имеет минимум), будут образовываться перегибы, ширина которых порядка 10—50 атомных расстояний. На качественном уровне объяснить механизм релаксации, который был бы ответственным за образование пиков Бордони, можно следующим образом. Для того чтобы переместить дислокацию, расположенную вдоль направления плотной упаковки в ее плоскости скольжения, на одно межатомное расстояние (без учета тепловых флуктуаций), необходимо приложить напряжение сдвига σ_P (напряжение, или сила Пайерлса). За счет теплового движения, при температуре T дислокация, образуя перегибы, будет периодически переходить из одной потенциальной ямы в другую (рис. 10.13); это могут быть или боковые движения перегибов (они происходят при меньших напряжениях), или образование новых перегибов.

Если частота звука Ω больше частоты образования пары перегибов в линии дислокации $\Omega_п$, то возникновение перегиба не приводит к дополнительной деформации и к потерям энергии звука. Если $\Omega \ll \Omega_п$, то перегибы находятся в состоянии теплового равновесия и потерь энергии звука также не происходит; потери возникают при $\Omega \approx \Omega_п$.

Количественная теория, основанная на описанной идее, разрабатывалась рядом авторов; подробное ее изложение содержится в [59, 60] и особенно в [61]. В настоящее время, однако, еще не представляется возможным достаточно полно объяснить все разнообразные особенности поведения пиков Бордони.

Остановимся кратко на весьма интересном и важном явлении — так называемой акустической эмиссии, поскольку это явление в значительной степени связано с дислокациями.

Акустической эмиссией принято называть излучение акустических волн, сопровождающее некоторые виды необратимых превращений в твердом теле. Различают три основных типа механизмов этой эмиссии: 1) механизмы, связанные с пластической деформацией (движение дислокаций, скольжение границ доменов в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках и т. п.); 2) фазовые переходы, в частности мартенситные превращения в стали; 3) образование и развитие трещин.

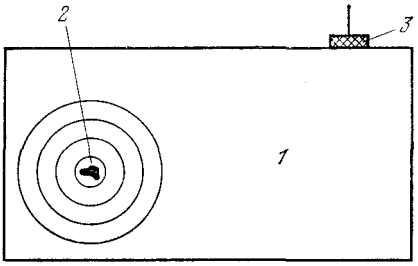


Рис. 10.14. Схема наблюдения акустической эмиссии: *1* — образец, *2* — источник, *3* — приемник звука.

Несмотря на то, что с различными проявлениями акустической эмиссии исследователям пришлось столкнуться уже довольно давно, первые систематические эксперименты, посвященные ее изучению, были проделаны немецким ученым Кайзером лишь в 1950 г. (см. [62, 63]). Опишем кратко основные черты акустической эмиссии. Схема эксперимента по наблюдению эмиссии весьма проста (рис. 10.14). Волны, возбуждаемые развивающимся дефектом (источником эмиссии), претерпевая различные изменения на границах образца и на других статических неоднородностях, достигают приемника звука (чаще всего это пьезоэлектрический преобразователь), электрический сигнал с которого обычно поступает на схему обработки. Снимаемый с пьезопреобразователя сигнал имеет вид случайной последовательности радиоимпульсов, соответствующих отдельным событиям — вспышкам акустической эмиссии. Центральная частота радиоимпульсов определяется в основном резонансными свойствами преобразователя. Простейший принцип обработки сигнала эмиссии, применяемый в большинстве существующих методик, состоит в следующем: радиоимпульс после усиления попадает на пороговое устройство, выделяющее его на фоне посторонних шумов.

Это же пороговое устройство формирует из радиоимпульса последовательность видеоимпульсов счета (рис. 10.15), которые затем поступают на счетные устройства. Ясно, что такая схема обработки использует лишь небольшую часть информации, заключенной в последовательности импульсов акустической эмиссии. В частности, используется информация о *полном числе вспышек эмиссии*, которое пропорционально числу импульсов счета N, и о числе вспышек, приходящихся на единицу времени ($\sim \dot{N}$) — *скорости эмиссии*. Тем не менее и с помощью данной простейшей схемы удается сделать ряд важных физических наблюдений.

Рассмотрим, например, типичную зависимость числа импульсов счета N и скорости $\dot{N}$ от деформации при пластическом деформировании образца (рис. 10.16). Видно, что максимум скорости (интенсивности) акустической эмиссии приходится на начало пластического течения материала. Качественно такое поведение вполне понятно, так как именно в этот момент имеет место наибольшая активность ускоренного перемещения скоплений дислокаций. С другой стороны, известно, что элементарными актами, вызывающими излучение при пластическом деформировании, чаще всего и служат процессы ускоренного движения (торможения) дислокаций. Кроме

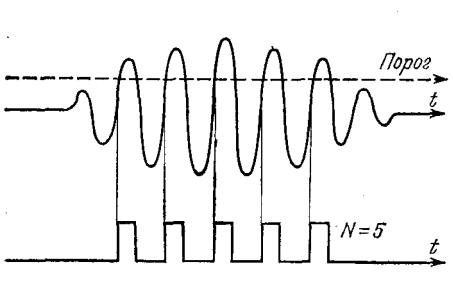


Рис. 10.15. Формирование импульсов счета акустической эмиссии.

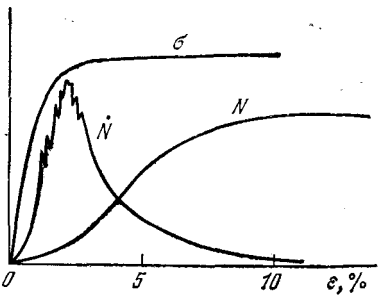


Рис. 10.16. Закономерности акустической эмиссии при пластическом деформировании образца.

того, в ряде случаев существенную роль могут играть аннигиляция дислокаций разных знаков, сопровождающаяся излучением звука, прохождение дислокаций через неоднородности и выход их на поверхность (разновидности переходного излучения) [65].

Последовательной теории акустической эмиссии при пластическом деформировании, которая могла бы связать статистические характеристики излучаемого акустического поля с параметрами деформирования для различных материалов, в настоящее время не существует. Тем не менее закономерности элементарных актов излучения, сопровождающего различные виды движения отдельных дислокаций и их скоплений, в том числе и упомянутые выше процессы, достаточно хорошо изучены [52, 65, 66]. Согласно этим работам при описании создаваемых движущимися дислокациями звуковых полей удобнее пользоваться вектором колебательной скорости $v_i=\dot{u}_i$, а не вектором смещений u_i. С учетом сказанного излучение, создаваемое системой произвольно движущихся дислокаций, может быть описано с помощью следующего неоднородного уравнения, вытекающего из основных уравнений кристаллоакустики (см. гл. 9):

$$\rho\ddot{v}_i(\boldsymbol{r},\ t)-c_{iklm}v_{m,\,kl}(\boldsymbol{r},\ t)=f_i(\boldsymbol{r},\ t). \qquad (6.19)$$

Здесь вектор $f_i(\boldsymbol{r},\ t)=c_{iklm}j_{lm,k}(\boldsymbol{r},\ t)$ играет роль объемной силы, $j_{lm}(\boldsymbol{r},\ t)$ — компоненты *тензора плотности потока дислокаций*, пропорциональные скоростям дислокационных линий V_p и их векторам Бюргерса $\boldsymbol{b}$ [52]. Например, для системы из N параллель-

ных дислокаций, пересекающих перпендикулярную к ним единичную площадку, $j_{lm}=Ne_{lkp}\tau_k b_m V_p$, где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к линии дислокации, e_{lkp} — тензор Леви-Чивита. Отметим, что тензор j_{lm} определяет скорость локальной пластической деформации среды. Поле напряжений, зависящих от времени, определяется соотношением

$$\sigma_{ik}(\boldsymbol{r},\ t)=c_{iklm}\int\limits_{-\infty}^{t}[v_{m,\,l}(\boldsymbol{r},\ t')+j_{lm}(\boldsymbol{r},\ t')]\,dt', \qquad (6.20)$$

которое отличается от закона Гука (9.1.1) в областях локализации дислокационных потоков. Уравнения (6.19) и (6.20) должны быть дополнены условиями излучения, и если рассматривается ограниченное тело,— соответствующими граничными условиями. В частности, для свободной поверхности (с учетом (6.20)) должно быть

$$\sigma_{ik}(\boldsymbol{r},\ t)\,n_k=0. \qquad (6.21)$$

Решение краевой задачи (6.19) — (6.21) может быть записано стандартным образом с помощью соответствующей функции Грина $G_{ij}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ t-t')$ или динамического тензора Грина

$$v_i(\boldsymbol{r},\ t)=\int\limits_{-\infty}^{t}dt'\int d^3r'G_{ij}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ t-t')\,f_j(\boldsymbol{r}',\ t'). \qquad (6.22)$$

Выражение для $G_{ij}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ t-t')$ в случае неограниченной изотропной среды имеет вид

$$G_{ij}(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{4\pi\rho}\sum_{m=l,\ t}^{(-)}\left\{t\Theta\left(t-\frac{r}{c_m}\right)\frac{3n_in_j-\delta_{ij}}{r^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{c_m^2r}\,\delta\left(t-\frac{r}{c_m}\right)\left[(n_in_j-\delta_{ij})+\frac{c_m-c_t}{c_l-c_t}\,\delta_{ij}\right]\right\},$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хэвисайда, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$, а знак «—» у суммы означает, что берется разность слагаемых с $m=l$ и $m=t$: $\sum\limits_{m=l,\ t}^{(-)}a^{(m)}=a^{(l)}-a^{(t)}$. Для упругого полупространства со свободной границей даже более простая, чем $G_{ij}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ t-t')$, функция $G_{ij}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ \omega)$, представляющая собой спектральную плотность функции $G_{ij}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}',\ t-t')$, имеет только интегральное (спектральное) представление в $\boldsymbol{k}$-пространстве и в координатном пространстве относительно просто выражается в квадратурах лишь в дальней зоне (см. также § 4 гл. 12).

Из выражения (6.22) видно, что акустическое поле $v_i(\boldsymbol{r},\ t)$ полностью определяется законом движения скоплений дислокаций $f_i(\boldsymbol{r},\ t)$. В дальней зоне, т. е. для расстояний r, много больших характерной длины излучаемых волн $\lambda\sim c_{l,\,t}L^{(d)}/V$, где $L^{(d)}$ — размер участка с движущимися дислокациями, а V — их характерная скорость, и при условии $j_{kk}=0$, означающем, что движение дислокаций не сопровождается нарушением сплошности среды, поле

излучения определяется выражением [52]

$$v_i(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{c_t^2}{2\pi r}\sum_{m=l,\,t}\frac{\Phi_{iks}^{(m)}(\boldsymbol{n})}{c_m^3}\ddot{D}_{ks}\left(t-\frac{r}{c_m}\right). \tag{6.23}$$

Здесь индекс m принимает значения l и t, соответствующие продольным и поперечным волнам, $\Phi_{iks}^{(l)}(\boldsymbol{n})=n_in_kn_s$, $\Phi_{iks}^{(t)}(\boldsymbol{n})=$ $=(1/2)\ (\delta_{ik}n_s+\delta_{is}n_k)-n_in_kn_s$. Тензор $D_{ks}=S_kb_s$, где $\boldsymbol{S}$ — вектор, перпендикулярный к дислокационной петле и численно равный площади петли, называется *тензором дислокационного момента* рассматриваемой области. Можно показать, что тензор D_{ks} связан с тензором j_{ks} соотношением

$$\dot{D}_{ks}(t)=-\int d^3r j_{ks}(\boldsymbol{r},\ t). \tag{6.24}$$

Таким образом, излучение системы дислокаций, движущихся в неограниченной среде, в соответствии с (6.23) отлично от нуля лишь в том случае, если вторая производная по времени от их дислокационного момента не равна нулю. Согласно соотношению (6.24) и определению тензора j_{ks} это означает, что дислокации должны двигаться с переменной скоростью. Отметим, что с подобным условием, известным также из электродинамики (тормозное излучение), приходится встречаться и при рассмотрении излучения движущихся лазерных пучков постоянной интенсивности (§ 7 гл. 13).

В случае аннигиляции двух дислокаций противоположных знаков, движущихся до слияния равномерно, скорость каждой из них можно представить в виде $V(t)=\Theta(-t)V$, где $\Theta(\xi)$ — функция Хэвисайда, описывающая факт аннигиляции при $t\geqslant 0$. Вычислив с помощью этого выражения значение $\ddot{D}_{ks}$, можно по формуле (6.23) рассчитать сопровождающее аннигиляцию звуковое излучение.

Более сложным образом описывается излучение при выходе дислокаций на поверхность. Изменение тензора j_{ks} со временем здесь нужно учитывать не только в уравнении движения (6.19), но и в граничных условиях (6.20), (6.21). Значительные неудобства связаны также со сложностью записи тензора Грина G_{ij} для полупространства. Расчеты показывают, что при выходе на поверхность винтовой дислокации возникающее излучение не отличается от излучения, сопровождающего аннигиляцию двух дислокаций противоположных знаков — рассматриваемой дислокации и ее зеркального изображения. При выходе на поверхность краевой дислокации наряду с объемными волнами излучаются и поверхностные (рэлеевские) волны. Более подробно об этих вопросах можно прочитать в работе [66] и приведенной в ней литературе (об экспериментальных исследованиях описанных механизмов излучения звука движущимися дислокациями см. [52, 67, 68]).

В хрупких материалах процесс нагружения и соответственно деформирования твердого тела обычно сопровождается возникновением микротрещин, которые в этом случае являются основными источниками акустической эмиссии на начальных стадиях разрушения. Возникновение трещины в упруго напряженном теле означает,

что в соответствующей области твердого тела образуется новая поверхность, свободная от напряжений, которая определенным образом смещается в пространстве, стремясь к положению статического равновесия. Этот процесс перехода к равновесному состоянию сопровождается довольно интенсивным звуковым излучением с широкой полосой частот — от инфразвука до 2—3 МГц [63]. Наиболее важная особенность акустической эмиссии при росте трещин состоит в том, что с увеличением скорости докритического роста трещины, что является предвестником полного макроскопического разрушения тела, интенсивность эмиссии резко возрастает и продолжает увеличиваться вплоть до разрушения. Использование акустической эмиссии в качестве метода контроля позволяет заблаговременно уменьшить нагрузку на объект. Например, в случае циклических нагрузок, распространенных на практике, типичная зависимость скорости акустической эмиссии $\dot{N}$ от числа циклов нагрузки имеет вид, изображенный на рис. 10.17. Точка *1* на рис. 10.17 соответствует появлению видимой трещины в испытуемом образце.

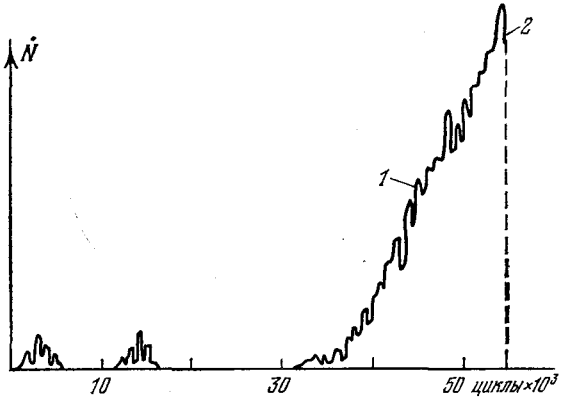


Рис. 10.17. Зависимость скорости акустической эмиссии от числа циклов нагрузки при росте усталостной трещины.

Скорость акустической эмиссии при этом составляет примерно половину от максимума, соответствующего полному разрушению (образованию магистральной трещины) — точка *2*. Аналогичный вид имеет и зависимость скорости эмиссии от времени нагружения при статической нагрузке. Величина статической нагрузки при этом, разумеется, должна быть меньше критического значения, при котором наступает мгновенное разрушение. Так же, как и в предыдущем примере, скорость акустической эмиссии в этом случае растет вплоть до полного разрушения. Схожесть поведения эмиссии в обоих случаях объясняется действием общего для них механизма усталостного разрушения.

Аналогично случаю пластического деформирования, акустическая эмиссия при хрупком разрушении изучена пока только для

элементарных процессов образования и развития трещин (см. [69—75]). При этом предполагается, что твердое тело подвержено воздействию внешних статических или динамических усилий, под влиянием которых и происходит движение трещины, сопровождающееся излучением. На берегах трещины и на свободной поверхности тела должны выполняться граничные условия отсутствия нормальных напряжений. Начальные условия обычно считаются нулевыми. Исходную задачу об излучении трещины в упруго напряженной среде удобно представить в виде суперпозиции двух задач (что можно сделать в линейной постановке) — задачи о напряженном теле без трещины, которая в данном случае не представляет интереса, и задачи о ненапряженном теле с трещиной (с ней мы и будем иметь дело), к берегам которой прикладываются некоторые усилия, определяемые из условия обращения в нуль выражения $\sigma_{ij}n_j$ для суммы двух упомянутых задач. Напряжения σ_{ij}, действующие на берегах трещины во второй задаче, таким образом, равны по величине и противоположны по знаку напряжениям, которые были бы на месте локализации трещины в ее отсутствие. Для описания процесса излучения звука трещинами можно использовать *принцип Гюйгенса для твердых тел*, математическая запись которого для гармонических во времени внешних полей в случае трещин, не меняющих своей длины (будем рассматривать для определенности двумерный случай), имеет вид

$$u_m(\boldsymbol{r}, \omega) = \int\limits_{\mathscr{L}} [n_j \sigma_{ij} G_{im}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \omega) - n_j c_{ijkl} u_i(\boldsymbol{r}', \omega) G_{lm,k}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \omega)] d\mathscr{L}. \tag{6.25}$$

Здесь точка наблюдения $\boldsymbol{r}$ лежит внутри замкнутого контура $\mathscr{L}$, n_j— внешняя нормаль к контуру, $G_{im}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \omega)$ — функция Грина. Если трещина расположена в глубине упругого полупространства, то контур $\mathscr{L}$ проходит по бесконечной полуокружности, по поверхности полупространства и по берегам разреза, проходящего вдоль кривой, совпадающей со срединной поверхностью трещины. Так как вследствие условий излучения интеграл по бесконечной полуокружности обращается в нуль, интегрирование в (6.25) фактически проводится только по берегам разреза, проходящего через трещину, и вдоль границы полупространства. Заметим, кроме того, что из-за граничных условий на свободной поверхности первое слагаемое в (6.25) при интегрировании вдоль свободной поверхности исчезает. Если же в качестве G_{im} использовать функцию Грина для полупространства, то выражение (6.25) еще более упростится и сведется к интегралу только по берегам разреза. Как мы уже говорили, величины σ_{ij} на поверхности трещины определяются значениями внешних прикладываемых к телу усилий, т. е. они известны. Значения же u_i на берегах разреза, описывающие динамику раскрытия трещины, при этом должны быть определены каким-либо образом по известным σ_{ij}. Решению этой сложной задачи динамики тре-

щин посвящена обширная литература (см., например, [76]), на которой мы здесь не будем останавливаться. Заметим, однако, что определить u_i можно, в частности, и с помощью решения интегрального уравнения, получаемого из (6.25) при стремлении точки наблюдения $\boldsymbol{r}$ к поверхности трещины. Когда значения u_i определены, вычисление полей всех волн, возбуждаемых трещиной, в том числе и поверхностных волн, может быть осуществлено посредством интегрирования (6.25) и взятия обратного преобразования Фурье. Заметим, что контур $\mathscr{L}$ не обязательно проводить по обоим берегам разреза, проходящего через плоскость трещины. Для трещин, находящихся в неограниченной среде, его можно провести вдоль одного из берегов разреза, после чего замкнуть бесконечной полуокружностью. За счет разумного выбора функций Грина при этом получаются те или иные упрощения в вычислениях. Подробнее об этих вопросах можно прочитать в работе [72], в которой также описаны особенности вычислений для случая распространяющихся трещин.

Расчеты показывают, что при воздействии нормальных растягивающих напряжений $\sigma(t)=\sigma_0\Theta(t)$ (где $\Theta(t)$ — функция Хэвисайда, моделирующая процесс мгновенного образования трещины) на разрез сплошности постоянной длины $2l$, находящийся в неограниченном теле, излучаются продольные и поперечные цилиндрические волны, характеризующиеся соответственно радиальными и тангенциальными смещениями u_r и u_θ (в полярной системе координат r, θ с углом θ, отсчитываемым от направления нормали к трещине). Приближенные выражения для спектральных плотностей $u_r(r, \theta, \omega)$ и $u_\theta(r, \theta, \omega)$, справедливые в дальней зоне, при этом имеют вид [72]

$$u_r(r, \theta, \omega)=\frac{i\sigma_0 l^2 e^{i\frac{\omega}{c_l}l}\cdot\sin\frac{\omega}{c_l}l}{\pi^2\rho c_l^3\frac{\omega}{c_l}l}\frac{\sin\left(\frac{\omega}{c_l}l\sin\theta\right)}{\frac{\omega}{c_l}l\sin\theta}\times$$

$$\times\left(2\frac{c_t^2}{c_l^2}\sin^2\theta-1\right)\left(-\frac{2\pi i}{\frac{\omega}{c_l}r}\right)^{1/2}e^{i\frac{\omega}{c_l}r},\qquad(6.26)$$

$$u_\theta(r, \theta, \omega)=$$

$$=-\frac{i\sigma_0 l^2 e^{i\frac{\omega}{c_l}l}\cdot\sin\frac{\omega}{c_l}l}{\pi^2\rho c_l^2 c_t\frac{\omega}{c_l}l}\frac{\sin\left(\frac{\omega}{c_t}l\sin\theta\right)}{\frac{\omega}{c_t}l\sin\theta}\sin 2\theta\left(-\frac{2\pi i}{\frac{\omega}{c_t}r}\right)e^{i\frac{\omega}{c_t}r}.$$

Из (6.26) следует, что в рассматриваемом случае излучение обладает направленностью, зависящей от длины трещины. Если трещина начинает самопроизвольно расти (это возможно при условии, что действующие в окрестности трещины статические напряжения σ_0 превышают *критическое напряжение разрыва* для трещины данной длины [76]), то в окружающее пространство также излучаются

продольные и поперечные волны. Для модели трещины, растущей от нуля симметрично в обе стороны при постоянных значениях скорости V, меньших скорости рэлеевской волны, выражения для спектральных плотностей $u_r(r, \theta, \omega)$ и $u_\theta(r, \theta, \omega)$ принимают вид

$$u_r(r, \theta, \omega) =$$

$$= -\frac{i \cdot 2\sigma_0 V^2}{\pi^2 \rho c_l^3} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{V^2}{c_l^2} \sin^2\theta - 1\right)^{-2} \left(2\frac{c_l^2}{c_t^2} \sin^2\theta - 1\right) \left(-\frac{2\pi i}{\frac{\omega}{c_l} r}\right)^{1/2} e^{i\frac{\omega}{c_l} r}, \tag{6.27}$$

$$u_\theta(r, \theta, \omega) = \frac{i \cdot 2\sigma_0 V^2}{\pi^2 \rho c_l^2 c_t} \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{V^2}{c_t^2} \sin^2\theta - 1\right)^{-2} \sin 2\theta \left(-\frac{2\pi i}{\frac{\omega}{c_t} r}\right)^{1/2} e^{i\frac{\omega}{c_t} r}.$$

Таким образом, в отличие от отдельно движущихся дислокаций, распространяющаяся трещина излучает и в том случае, когда ее вершины движутся с постоянными дозвуковыми скоростями. Направленность излучения при этом выражена слабо. Если формально предположить, что скорость V может быть больше c_l или c_t, то появляется еще один механизм излучения, аналогичный черенковскому [72]. Однако поскольку при обычных режимах статического нагружения скорость V не может превышать скорости рэлеевской волны [76], такая возможность является чисто умозрительной. Если распространяющаяся трещина проходит вблизи какой-либо неоднородности, например другой трещины меньшего размера, то в дополнение к излучению, описываемому выражениями (6.27), появляется переходное излучение движущейся трещины [73]. При образовании трещин на поверхности твердого тела наряду с объемными волнами весьма эффективно возбуждаются и волны Рэлея, также обладающие направленностью излучения. Соответствующие вопросы рассмотрены в работах [74, 75].

Описанные закономерности излучения звука при некоторых элементарных актах движения твердого тела, разумеется, дают лишь весьма поверхностное представление о полной картине явления. В целом акустическая эмиссия оказывается сложным физическим процессом, тесно связанным с движением дислокаций, кинетикой разрушения *) и т. д., причем зачастую она оказывает сильное обратное влияние на вызвавшие ее процессы. Например, акустическое излучение, возбуждаемое движущейся трещиной, оказывает воздействие на закон движения самой трещины [71]. То же самое, по-видимому, можно сказать и о движении дислокаций. Трудность интерпретации регистрируемых сигналов акустической эмиссии в реальных, т. е. в ограниченных, образцах усугубляется также весьма сложной структурой излучаемого волнового поля, поскольку при ней могут возбуждаться любые типы волн, которые существуют

*) О некоторых попытках установления связи параметров акустической эмиссии с кинетикой разрушения можно прочитать в [63, 64].

в твердом теле, в том числе поверхностные волны и волны в пластинках. Указанные факторы являются причиной того, что теоретическое изучение акустической эмиссии еще далеко до завершения [77].

Практические применения акустической эмиссии чрезвычайно разнообразны. Однако главной областью применения акустической эмиссии в настоящее время является неразрушающий и оперативный контроль инженерных конструкций и сооружений. Основным достоинством методов неразрушающего контроля с использованием акустической эмиссии, делающих их особенно ценными, является тот факт, что эта эмиссия сопровождает только развивающиеся, т. е. наиболее опасные дефекты. Другая привлекательная сторона применения акустической эмиссии связана с тем, что источником звука, и притом довольно мощного, в этом случае являются сами дефекты, благодаря чему задача обнаружения и локализации дефекта (источника акустической эмиссии) значительно облегчается [63, 64]. В частности, для этой цели могут использоваться методы, ранее развитые в сейсмологии, например метод триангуляции. Большая практическая ценность акустической эмиссии вызвала резкий всплеск активности исследований в этом направлении, главным образом экспериментальных, в результате чего за относительно короткий период времени методы контроля, основанные на акустической эмиссии, получили широкое распространение в тех областях, где выход изделия из строя влечет за собой катастрофическое разрушение. К наиболее важным областям использования акустической эмиссии относятся ядерная энергетика, морской и воздушный транспорт, трубопроводы. Разумеется, весьма велико значение ее и для чисто физических исследований, так как сигналы эмиссии могут дать важные сведения о динамике дислокаций, закономерностях движения трещин, кинетике разрушения и т. д.

Глава 11

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Введение. Общие замечания

В гл. 3 и 4 мы познакомились с нелинейными явлениями в газах и жидкостях при распространении в них акустических волн конечной амплитуды. Эти явления были связаны с нелинейностью уравнений движения и состояния. Как мы уже обращали внимание в гл. 8, в теории упругости изотропного твердого тела также имеют место подобного рода нелинейности. По этой причине распространение упругих волн в твердых телах должно приводить к явлениям, аналогичным изученным в гл. 3 и 4: генерации гармоник, взаимодействию волн, нелинейному поглощению и т. д. Вместе с тем, поскольку в твердых телах могут существовать несколько типов волн (продольные, поперечные, поверхностные), нелинейные эффекты здесь более многообразны. Качественно новые нелинейные явления можно наблюдать, если от изотропных диэлектриков перейти к случаю анизотропных кристаллов, кристаллов, обладающих пьезоэффектом, и в особенности полупроводниковых и ряда магнитоупорядоченных кристаллов.

В этой главе мы сначала рассмотрим наиболее простые задачи, относящиеся к распространению звуковых волн в изотропных твердых диэлектриках.

Нужно иметь в виду, что конечные деформации в волне невелики и максимальные напряжения имеют порядок нескольких Н/см^2, тогда как напряжения, при которых возникают остаточные деформации, начинаются пластические течения для таких металлов, как никель, сталь и т. д., порядка тысяч Н/см^2. Таким образом, изменения параметров среды лежат, как это принято говорить, в упругой области, когда остаточные деформации и напряжения отсутствуют.

Во-первых, весь этот круг задач интересен с акустической точки зрения, поскольку в твердых телах проявляются новые особенности распространения упругих волн. Во-вторых, он представляет большой интерес для физики твердого тела; методы нелинейной акустики дают возможность изучать тонкие вопросы взаимодействия тепловых фононов, моделируя эти взаимодействия на искусственно полученных когерентных фононах. Как мы видели в гл. 10, ангармоничность решетки, которую можно исследовать, изучая нелинейные акустические эффекты, играет важную роль в таких кинетиче-

ских явлениях, как теплопроводность и поглощение звука в твердых телах. Кроме того, о большом значении этой части физической акустики можно судить по многочисленным техническим приложениям.

После появления работы Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румера [1], о которой мы подробно говорили в гл. 10, выяснилась роль ангармоничности решетки в поглощении звука. Позднее З. А. Гольдбергом была сделана важная работа [2] по исследованию распространения плоских волн конечной амплитуды в изотропном твердом теле. Однако первые эксперименты на когерентных фононах, доказывающие явление трехфононного взаимодействия, в частности генерацию гармоник в волнах конечной амплитуды, были выполнены только в 1962 г. [3—6]. Вслед за ними появилась серия экспериментальных и теоретических работ по изучению решеточной нелинейности методами нелинейной акустики, а также ряда нелинейных акустических эффектов — сначала в изотропных твердых телах, затем в монокристаллах диэлектриков и металлов. Сюда относятся исследования взаимодействий волн конечной амплитуды, в том числе комбинационное рассеяние звука на звуке [7—11], генерация гармоник в волнах Рэлея [12—14], нелинейные резонансы в акустических резонаторах с большой добротностью [15—18], выяснение роли остаточных напряжений в распространении волн конечной амплитуды [19, 20], влияния поглощения [21] и т. д.

Изучение нелинейных акустических явлений в кристаллах привело к обнаружению ряда новых нелинейных эффектов [22], к которым можно отнести генерацию запрещенных (с точки зрения классической нелинейной теории упругости) гармоник в сдвиговой волне, нелинейные поляризационные эффекты, акустические нелинейные явления в пьезополупроводниках, в частности влияние так называемой концентрационной или токовой нелинейности (см., например, гл. 12). В настоящей же главе мы ограничимся изучением влияния на волны конечной амплитуды только решеточной нелинейности. Мы рассмотрим здесь также кратко экспериментальные методы изучения нелинейных акустических явлений в твердых телах.

§ 2. Основные сведения из нелинейной теории упругости

С методами феноменологического описания нелинейного поведения изотропных твердых тел мы уже познакомились в гл. 8. В частности, приводилось выражение для внутренней энергии изотропного твердого тела с точностью до членов третьего порядка по степеням тензора деформации. Ниже мы рассмотрим эти вопросы более подробно, касаясь в основном тех аспектов нелинейной теории упругости, которые имеют непосредственные приложения к волновым задачам. Имея в виду потребности дальнейшего изложения, начнем обсуждение с более общего случая пьезоэлектрического кристалла. При этом в качестве термодинамического потенциала, определяющего вид нелинейных уравнений состояния, удобно выб-

рать так называемую *электрическую энтальпию Гиббса* H, которую можно записать в виде ряда по степеням полевых переменных [22]:

$$\rho_0 H = {}^1/_2 c_{ijkl} u_{ij} u_{kl} + {}^1/_6 c_{ijkl,qr} u_{ij} u_{kl} u_{qr} - {}^1/_2 \varepsilon_{mn} E_m E_n - {}^1/_6 \varepsilon_{mnp} E_m E_n E_p - e_{mij} E_m u_{ij} - {}^1/_2 e_{mijkl} E_m u_{ij} u_{kl} - {}^1/_2 f_{mnij} E_m E_n u_{ij} + \ldots \quad (2.1)$$

При этом мы не будем делать различий между изотермическими и адиабатическими значениями коэффициентов разложения (2.1), так как обычно они отличаются не более чем на 2—3%. Здесь ρ_0— плотность кристалла до деформирования, c_{ijkl} и $c_{ijkl,qr}$— упругие модули второго и третьего порядков, ε_{mn} и ε_{mnp} — коэффициенты линейной и нелинейной диэлектрической проницаемости, e_{mij} и e_{mijkl}— линейные и нелинейные пьезокоэффициенты, f_{mnij}— коэффициенты электрострикции, u_{ij}— тензор деформации, E_m— вектор напряженности электрического поля. Уравнения состояния для *термодинамических напряжений* t_{ij} и электрической индукции D_m легко получить посредством дифференцирования потенциала H:

$$t_{ij} = \rho_0 \partial H / \partial u_{ij}, \quad D_m = -\rho_0 \partial H / \partial E_m. \quad (2.2)$$

Необходимость введения термодинамических напряжений t_{ij} в нелинейной теории упругости [23, 24] связана с тем, что обычно используемые механические напряжения σ_{ij} определяются по отношению к площади деформированного тела, в то время как деформация — по отношению к недеформированному состоянию. Для устранения этого несоответствия в термодинамике и вводится симметричный тензор t_{ij}, определяемый по отношению к площади первоначально недеформированного тела. Очевидно, в линейном приближении $t_{ij} = \sigma_{ij}$, однако при описании нелинейных эффектов разницу между t_{ij} и σ_{ij} необходимо учитывать.

Подстановка (2.1) в (2.2) дает с точностью до квадратичных членов

$$t_{ij} = [c_{ijkl} + {}^1/_2 (c_{ijkl,qr} u_{qr} - e_{pijkl} E_p)] u_{kl} - [e_{nij} + {}^1/_2 (e_{nijqr} u_{qr} + f_{npij} E_p)] E_n, \quad (2.3)$$

$$D_m = [e_{mkl} + {}^1/_2 (e_{mkl,qr} u_{qr} + f_{mpkl} E_p)] u_{kl} + [\varepsilon_{mn} + {}^1/_2 (f_{mnqr} u_{qr} + \varepsilon_{mnp} E_p)] E_p.$$

Нетрудно видеть, что величины в квадратных скобках в данной записи имеют смысл модифицированных линейных модулей (гл. 9).

Нелинейные акустические эффекты в твердых телах принято подразделять на *статические* (распространение волн при воздействии на кристалл постоянных механических или электрических возмущений) и *динамические* (генерация гармоник, или искажение формы волны, и взаимодействие волн). При описании нелинейных акустических свойств кристаллов принято различать следующие три состояния среды [23]: 1) *недеформированное (естественное) состояние* — координаты x_i— лагранжевы координаты (см. также гл. 1); 2) *начальное деформированное равновесное состояние* (при воздей-

ствии внешних статических возмущений) — координаты X_i; 3) *состояние в данный момент* (характеризующее распространение звука) — координаты x'_i. В зависимости от того, какая из переменных x', X или x считается независимой, уравнения движения имеют различный вид. В частности, в переменных естественного состояния, в которых вектор смещения определяется выражением $u_i=x'_i-x_i$, а тензор деформации $u_{ij}=1/2[\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i+(\partial u_k\partial/x_i)\,(\partial u_k/\partial x_j)]$, для закона сохранения массы (уравнения непрерывности) имеем

$$\rho_0/\rho = J = \det|J_{ij}|, \tag{2.4}$$

где $J_{ij}=\partial x'_i/\partial x_j$ — матрица преобразования от переменных x_i к переменным x'_i, ρ — плотность среды в деформированном состоянии. Выражая в механическом уравнении движения $\rho\ddot{u}_i=\sigma_{ij,j}$ величины ρ и σ_{ij} через ρ_0 и t_{ij} в соответствии с формулой (2.4) и соотношением, связывающим механические и термодинамические напряжения (см., например [23]): $\sigma_{jk}=(1/J)x'_{k,\,r}x'_{j,\,q}t_{qr}$, где запятая означает дифференцирование по x_i, получим

$$\rho_0\ddot{u}_i = P_{ij,\,j}, \tag{2.5}$$

где $P_{ij}=x'_{i,\,q}t_{jq}$ — так называемый *тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа*. Этот тензор, очевидно, не симметричен. Можно показать [23, 24], что он «сопряжен» градиентам смещений, т. е. $(1/\rho_0)P_{ij}=\partial H/\partial(\partial u_i/\partial x_j)$ (см. также [5]), в то время как тензор термодинамических напряжений t_{ij} «сопряжен» компонентам тензора деформации (см. первое соотношение (2.2)).

Уравнения движения для электромагнитного поля (уравнения Максвелла) в квазистатическом приближении, но с учетом движения частиц среды, как известно, сводятся к выражениям

$$\partial D_i^{(0)}/\partial x'_i = 0, \tag{2.6}$$

$$E_i^{(0)} = -\partial\varphi/\partial x'_i, \tag{2.7}$$

в которых индексы «0» означают, что соответствующие переменные определены в координатах x'_i, в то время как E_i и D_i, входящие в уравнения состояния (2.3) — в координатах x_i. Связь между ними дается формулами [24]

$$D_i^{(0)} = \frac{1}{J}\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}D_j, \quad E_i = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}E_j^{(0)}. \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) уравнения (2.6) и (2.7) нетрудно преобразовать к виду

$$\partial D_i/\partial x_i = 0, \tag{2.9}$$

$$E_i = -\partial\varphi/\partial x_i, \tag{2.10}$$

т. е. уравнения электростатики не меняются при переходе к координатам x_i.

Выписанная система уравнений, включающая уравнения движения (2.5), (2.9), (2.10) и уравнения состояния (2.3), полностью описывает нелинейные акустические эффекты в пьезокристаллах в квазистатическом приближении.

В качестве первого примера, иллюстрирующего использование этих уравнений, рассмотрим статический нелинейный эффект — распространение волн малой амплитуды в непьезоэлектрическом кристалле, к которому приложено постоянное во времени и однородное в пространстве внешнее механическое напряжение [23]. Для этого разложим величину $P_{ij}(x_i)$ в степенной ряд по $u_{k,\,l}=\partial(x'_k-X_k)/\partial x_l$ в окрестности начального состояния:

$$P_{ij}(x_i)-\tilde{P}_{ij}(X)=\tilde{A}_{ijkl}u_{k,\,l}. \tag{2.11}$$

Здесь и далее знак «$\sim$» будет означать, что соответствующая величина берется в начальном состоянии. Подставляя соотношение (2.11) в уравнение (2.5), можно получить линеаризованное относительно u_i уравнение движения в естественных координатах:

$$\rho_0\ddot{u}_i=\tilde{A}_{ijkl}\partial^2u_k/\partial x_l\,\partial x_j. \tag{2.12}$$

Для перехода к уравнению относительно начальных координат обе части (2.12) следует умножить на $\tilde{\rho}/\rho_0=1/\tilde{J}$ и сделать подстановку $\partial/\partial x_j=(\partial X_s/\partial x_j)\,\partial/\partial X_s$. При этом уравнение (2.12) принимает вид

$$\tilde{\rho}\ddot{u}_i=\tilde{B}_{ismr}\partial^2u_m/\partial X_s\,\partial X_r, \tag{2.13}$$

где

$$\tilde{B}_{ismr}=\frac{1}{\tilde{J}}\,\tilde{A}_{imkj}\frac{\partial X_r}{\partial x_j}\frac{\partial X_s}{\partial x_k}=\delta_{im}\,\tilde{\sigma}_{sr}+\tilde{c}_{ismr}. \tag{2.14}$$

В выражении (2.14) через $\tilde{c}_{ismr}$ обозначены коэффициенты, стоящие перед компонентами линеаризованного тензора деформаций $u_{st}=\frac{1}{2}(\partial u_s/\partial X_t+\partial u_t/\partial X_s)$ в разложении тензора механических напряжений в окрестности начального состояния

$$\sigma_{ij}=\tilde{\sigma}_{ij}\left(1-\frac{\partial u_r}{\partial X_r}\right)+\tilde{\sigma}_{is}\frac{\partial u_j}{\partial X_s}+\tilde{\sigma}_{js}\frac{\partial u_i}{\partial X_s}+\tilde{c}_{ijst}u_{st}.$$

Легко видеть, что по своей форме уравнение (2.13) совпадает с обычным линейным волновым уравнением, описывающим распространение упругих волн в кристаллах. Разница состоит лишь в том, что при ненулевых начальных напряжениях $\tilde{\sigma}_{sr}$ величины $\tilde{B}_{ismr}$, вообще говоря, оказываются менее симметричными по сравнению с линейными упругими модулями недеформированного кристалла. Физически это вполне очевидно. В случае гармонических плоских волн от уравнения (2.13) можно перейти к уравнению типа Кристоффеля, в котором роль тензора Кристоффеля будет играть тензор $\tilde{B}_{ismr}n_sn_r$. Собственные значения этого тензора $\tilde{\rho}c^2$ определяют значения скоростей $c^{(m)}$ акустических волн в однородно нагруженном кристалле.

Легко понять, что измерение зависимостей скоростей $c^{(m)}$ от значений приложенных внешних сил может использоваться для экспериментального определения упругих модулей третьего порядка, соответствующих естественному состоянию среды (см. уравнение (2.3)), которые, очевидно, входят в величины $\tilde{c}_{ismr}$. Чтобы

получить искомую связь, следует воспользоваться разложением термодинамических напряжений в окрестности начального состояния

$$t_{km} = \tilde{t}_{km} + \tilde{c}^0_{kmpq}(u_{pq} - \tilde{u}_{pq}) + \ldots, \qquad (2.15)$$

где тензоры t_{km}, $\tilde{t}_{km}$ и u_{pq}, $\tilde{u}_{pq}$ обычным образом определяются в естественных координатах [23, 24], и учесть соотношение

$$\tilde{c}_{ismr} = \frac{1}{\tilde{J}} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_s}{\partial x_k} \frac{\partial X_m}{\partial x_p} \frac{\partial X_r}{\partial x_q} \tilde{c}^0_{jkpq}.$$

Сравнивая выражение (2.15) с уравнением состояния (2.3), можно связать величины $\tilde{c}^0_{ismr}$ и, следовательно, $\tilde{c}_{ismr}$ с модулями упругости второго и третьего порядков и значениями прикладываемых механических напряжений. Мы, однако, не будем на этом останавливаться, отсылая читателя к специальной литературе по экспериментальному определению модулей упругости третьего порядка [7, 22—28]. Об измерении нелинейных пьезоэлектрических коэффициентов можно прочитать в работе [29].

Отметим, что изменения скоростей акустических волн при внешних воздействиях, обычно пропорциональные величине воздействия, могут использоваться и в практических целях: например, для измерения давления, деформаций, напряженности электрического поля; для анализа распределения механических напряжений в среде и т. п. Этим вопросам посвящена обширная литература (см., например, [30, 31]). Точность измерений можно повысить, если использовать закономерности поляризационных эффектов для акустических волн в кристаллах, подверженных статическим внешним воздействиям, в частности возникновение эллиптической поляризации у сдвиговой волны при ее распространении вдоль акустической оси. Подробнее об этом можно прочитать в монографиях [28, 32].

§ 3. Взаимодействие упругих волн конечной амплитуды в изотропном твердом теле

Перейдем теперь к динамическим нелинейным эффектам, начав с более простого случая изотропных твердых тел. Будем считать, что статическое воздействие отсутствует, вследствие чего можно оперировать с переменными естественного состояния. Проанализируем сначала случай, когда акустические волны конечной амплитуды распространяются в одном и том же направлении *(коллинеарное взаимодействие)*. Для этого мы должны исходить из уравнения движения (2.5) и уравнения для внутренней энергии изотропного твердого тела, упругие свойства которого определяются пятью модулями упругости — уравнение (8.1.15). Тензор P_{ik} при этом можно выразить либо через термодинамические напряжения t_{ik}, либо определить непосредственно путем дифференцирования термодинамического потенциала (8.1.15) по градиентам вектора смещений (см. § 2).

$$P_{ik} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial (\partial u_i / \partial x_k)}$$

Дифференцируя, получим

$$P_{ik}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)-\left(K-\frac{2\mu}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\delta_{ik}+$$
$$+\left(\mu+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(K-\frac{2\mu}{3}+B\right)\left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\right)^2\delta_{ik}+2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]+$$
$$+\frac{A}{4}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+B\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\delta_{ik}+2\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)+C\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2\delta_{ik}. \quad (3.1)$$

Из уравнений (2.5) и (3.1) найдем

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\left(K+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l\,\partial x_i}=\mathcal{F}_i, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{F}_i$ — компонента объемной «нелинейной» силы, представляющая собой величину второго порядка малости относительно градиентов смещений:

$$\mathcal{F}_i=\left(\mu+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l\,\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)+$$
$$+\left(K+\frac{\mu}{3}+\frac{A}{4}+B\right)\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\,\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right)-$$
$$-\left(K+\frac{2\mu}{3}+B\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\left(\frac{A}{4}+B\right)\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\,\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)+$$
$$+(B+2C)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (3.3)$$

Воспользуемся теперь методом последовательных приближений, представляя смещение в виде

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''+\ldots$$

($\boldsymbol{u}'$— первое приближение, $\boldsymbol{u}''$— второе приближение; $\boldsymbol{u}''\ll\boldsymbol{u}'$). Подставляяя $\boldsymbol{u}$ в (3.2), получим уравнение первого приближения:

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i'}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k^2}-\left(K+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 u_l'}{\partial x_l\,\partial x_i}=0, \quad (3.4)$$

и уравнения второго приближения:

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i''}{\partial t^2}-\mu\frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_k^2}-\left(K+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 u_l''}{\partial x_l\,\partial x_i}=\mathcal{F}_i(\boldsymbol{u}'), \quad (3.5)$$

где $\mathcal{F}_i(\boldsymbol{u}')$— объемная сила, вызванная смещениями первого приближения.

Уравнения (3.4) — обычные однородные уравнения движения, определяющие величины u_i'. Уравнения же второго приближения (3.5) дают нам возможность исследовать, как под действием упругой волны конечной амплитуды происходит (и происходит ли вообще) генерация гармоник продольной и поперечной волн.

Пусть в твердом теле имеется плоская волна, распространяющаяся по оси x, вектор смещения которой

$$\boldsymbol{u}(x, t) = \boldsymbol{i}u_1(x, t) + \boldsymbol{j}u_2(x, t) + \boldsymbol{k}u_3(x, t). \tag{3.6}$$

Индексы 1, 2, 3 соответствуют смещениям по осям x, y, z.

Из уравнений (3.4) следует тогда, что уравнения первого приближения будут представлять собой три волновых уравнения, одно для продольной волны L со скоростью распространения $c_l = \sqrt{\left(K + \frac{4}{3}\mu\right)/\rho_0}$ и два для поперечных волн T с различными поляризациями и скоростью $c_t = \sqrt{\mu/\rho_0}$. Эти волны соответствуют линейной акустической задаче; они не взаимодействуют между собой.

Для второго приближения при заданном условии будем иметь уравнения [2]

$$\frac{\partial^2 u_1''}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x^2} = \beta_l \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2}\frac{\partial u_1'}{\partial x} + \beta_t\left(\frac{\partial^2 u_2'}{\partial x^2}\frac{\partial u_2'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2}\frac{\partial u_3'}{\partial x}\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 u_2''}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_2''}{\partial x^2} = \beta_t\left(\frac{\partial^2 u_2'}{\partial x^2}\frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2}\frac{\partial u_2'}{\partial x}\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 u_3''}{\partial t^2} - c_t^2 \frac{\partial^2 u_3''}{\partial x^2} = \beta_t\left(\frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2}\frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2}\frac{\partial u_3'}{\partial x}\right), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} &c_l^2 = (K + 4\mu/3)/\rho_0, \quad c_t^2 = \mu/\rho_0, \\ &\beta_l = 3c_l + (2A + 6B + 2C)/\rho_0, \\ &\beta_t = c_t^2 + (A/2 + B)/\rho_0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Рассмотрим теперь различные случаи.

1. Пусть в первом приближении имеется только одна продольная волна. При этом система уравнений (3.7) — (3.9) перейдет в одно уравнение (так как $u_1' \neq 0$, $u_2' = u_3' = 0$):

$$\frac{\partial^2 u_1''}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x^2} = \beta_l \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2}\frac{\partial u_1'}{\partial x}. \tag{3.11}$$

Решение этого уравнения для нулевого начального условия имеет вид (если при $x=0$ $u_1'(0, t) = u_0 \cos \omega t$)

$$u_1'' = \frac{\beta_l}{c_l^2}\frac{xk_l^2u_0^2}{8}\cos[2(\omega t - k_l x)], \tag{3.12}$$

где $k_l = \omega/c_l$. Для скорости смещения (колебательной скорости) будем иметь

$$v_1'' = -\frac{\beta_l}{c_l^2}\frac{\omega}{4c_l^2}xv_0^2\sin[2(\omega t - k_l x)]. \tag{3.13}$$

Здесь $v_0 = \omega u_0$. Сравним это выражение с (3.1.27); находим, что

$$\Gamma = \beta_l/c_l^2 = 3 + (2A + 6B + 2C)/\rho_0 c_l^2. \tag{3.14}$$

Таким образом, для твердых тел нелинейным параметром вместо γ будет величина Γ. Отметим, что значение Γ для твердых тел (ме-

таллы, щелочно-галлоидные кристаллы) колеблется от 3 до 14 (порядок тот же, что и для жидкостей). Но скорость c_l в твердых телах больше, чем в жидкостях, и поэтому при прочих равных условиях амплитуда гармоники в твердых телах по крайней мере на порядок меньше, чем в жидкостях.

2. Пусть теперь в первом приближении имеется только поперечная волна, поляризованная в направлении оси z: $u_1'=u_2'=0$, $u_3'\neq 0$. Из уравнений (3.7) — (3.9) следует тогда, что

$$\partial^2 u_3''/\partial t^2 - c_t^2 \partial^2 u_3''/\partial x^2 = 0, \tag{3.15}$$

т. е. что u_3'' удовлетворяет однородному волновому уравнению. Поскольку, однако, при $x=0$ $u_3'(0, t)=0$, отсюда тождественно следует $u_3''=0$. Таким образом, при распространении плоской поперечной волны в изотропном твердом теле гармоники такой волны не образуются. Физический смысл этого будет оговорен ниже. Заметим, что полученный результат позволяет утверждать, что в изотропном твердом теле две коллинеарные поперечные волны с различными частотами также не взаимодействуют между собой. Однако в рассматриваемом случае, согласно уравнению (3.7), поперечная волна вызывает во втором приближении появление продольной волны:

$$\frac{\partial^2 u_1''}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x^2} = \beta_t \frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2} \frac{\partial u_3'}{\partial x}. \tag{3.16}$$

Если смещения u_3' заданы на границе $x=0$ при $t=0$ в виде синусоидальной поперечной волны:

$$u_3'(0, t) = u_{3\,0}' \cos \omega t, \tag{3.17}$$

то решение уравнений первого приближения будет

$$u_3'(x, t) = u_{3\,0}' \cos(\omega t - k_t x), \tag{3.18}$$

где $k_t=\omega/c_t$. Подставляя (3.18) в (3.16) и принимая во внимание, что $u_1''(0)=0$, найдем

$$u_1'' = \frac{(\beta_t + c_l^2 - c_t^2)\,\omega u_{3\,0}'^2}{4c_l^3[(c_l/c_t)^2-1]} \sin[(k_t - k_t)x] \cos[2\omega t - (k_t + k_t)x]. \tag{3.19}$$

Как видно из этого выражения, амплитуда появившейся второй гармоники испытывает биения в пространстве с пространственным периодом

$$\Delta x = \pi c_t/\omega\,(a-1) = \lambda_t/2\,(a-1), \tag{3.20}$$

где $a=c_l/c_t$. Такие пространственные биения происходят из-за *квазидисперсии*, состоящей в том, что c_l и c_t различны; синхронизм между поперечной волной первого приближения и генерируемой продольной волной второго приближения (вторая гармоника продольной волны) отсутствует.

3. Рассмотрим теперь случай, когда в первом приближении одновременно имеются и продольная, и поперечная волны. Такая ситуация обычно и реализуется в экспериментах с пьезокварцевой

пластинкой. Здесь возникают: гармоники продольной волны, продольная сложная волна, вызванная поперечной волной, и поперечная сложная волна (она имеет пространственную модуляцию с периодом порядка длины продольной волны). Подробнее с этим случаем можно познакомиться в [5].

При выводе формул, описывающих генерацию гармоник, нами не учитывалось поглощение звука. Если его учесть, то для амплитуды гармоники получим [21]

$$U_1''=U_{2\omega}(x)=-\frac{\Gamma}{8}k_l^2u_0\,\frac{\exp(-2\alpha_\omega x)-\exp(-\alpha_{2\omega}x)}{2\alpha_\omega-\alpha_{2\omega}}, \qquad (3.21)$$

где α_ω и $\alpha_{2\omega}$ — коэффициенты поглощения первой и второй гармоник продольных волн. Как видно из этой формулы, линейный рост амплитуды второй гармоники с расстоянием x имеет место только при малых x, при которых (3.21) переходит в (3.12). На расстоянии $x_{ст}=(\ln 2)/2\alpha_\omega$ вторая гармоника достигает максимума и при дальнейшем увеличении x начинает убывать.

Подобным же образом рассматривается задача о генерации звука комбинационных частот — суммарной и разностной $\omega_1\pm\omega_2$, возникающих при коллинеарном распространении гармонических волн конечной амплитуды. Приведем для справок получающиеся формулы, поскольку они часто используются в экспериментальных исследованиях:

$$U''_{\omega_1\pm\omega_2}=-\frac{\Gamma}{8}k^{(l)}_{\omega_1}k^{(l)}_{\omega_2}u_{\omega_1^0}u_{\omega_2^0}\,\frac{\exp(-\alpha_{\omega_1}\mp\alpha_{\omega_2})x-\exp(-\alpha_{\omega_1\pm\omega_2}x)}{\alpha_{\omega_1}\pm\alpha_{\omega_2}-\alpha_{\omega_1\pm\omega_2}}. \qquad (3.22)$$

В отличие от газов и жидкостей, в твердых телах, поскольку в них могут распространяться два типа объемных волн — продольные и поперечные, кроме коллинеарного взаимодействия, которое мы до сих пор рассматривали, возможны *взаимодействия при пересечении волн*, или ограниченных звуковых пучков, под углом, значительно бóльшим угла параметрического захвата (см. гл. 4, а также гл. 10).

Запишем уравнения сохранения энергии и квазиимпульса фононов — условия синхронизма или резонансные условия, с которыми мы имели дело в гл. 4 и 10:

$$\omega_1\pm\omega_2=\omega_3, \qquad (3.23)$$

$$\boldsymbol{k}_1\pm\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_3. \qquad (3.24)$$

Второе из этих условий можно записать, согласно рис. 4.1, в виде

$$|\boldsymbol{k}_3|^2=|\boldsymbol{k}_1|^2+|\boldsymbol{k}_2|^2\pm 2|\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}_2|\cos\alpha. \qquad (3.25)$$

Угол рассеяния γ, под которым направлен волновой вектор рассеянной волны $\boldsymbol{k}_3$, находится из условий (3.23) и (3.24). Он определяется выражением

$$\operatorname{tg}\gamma=bc_1c_2^{-1}\sin\alpha/(1+bc_1c_2^{-1}\cos\alpha), \qquad (3.26)$$

где $b=\omega_2/\omega_1$, а c_1 и c_2 — скорости распространения волн 1 и 2.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда имеется взаимодействие типа $L(\omega_1)+T(\omega_2)\to L(\omega_1+\omega_2)$. Тогда из (3.23), (3.26) и (3.25) нетрудно найти, что

$$\cos\alpha = 1/a + (b/2a)(1-a^2), \tag{3.27}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = ab\sin\alpha/(1+ab\cos\alpha), \tag{3.28}$$

где $a=c_l/c_t$. Поскольку $-1<\cos\alpha<1$, то рассмотренное взаимодействие возможно лишь в том случае, когда для отношения частот b выполняется условие $0<b<2/(a-1)$. Подобным же образом можно рассмотреть и другие разрешенные типы взаимодействия плоских волн, или фононов.

Отметим, что проведенные рассуждения дают возможность лишь установить, возможен ли данный тип взаимодействия, а также определить угол рассеяния, и не решают вопроса об амплитуде рассеянной волны. Для нахождения интенсивности рассеяния необходимо решать задачу о вероятности взаимодействия фононов. Эта задача без учета поглощения решалась в [7] для случая коллимированных пучков и источников рассеянного поля, имеющихся только в области пересечения пучков. Рассмотрение показывает, что амплитуда смещения в рассеянной волне оказывается пропорциональной k^3 (вспомним, что рост амплитуды второй гармоники $\sim k^2$), т. е. что рассеяние оказывается особенно сильным в области высоких частот. Другой важный вывод состоит в том, что рассеяние оказывается тем эффективнее, чем ближе по частоте взаимодействующие волны. Это состоит в согласии с тем известным фактом, что ультразвуковые волны, частоты которых значительно ниже частоты, где число тепловых дебаевских фононов максимально (10^{12}—10^{13} Гц), непосредственно не взаимодействуют с тепловыми фононами и что в этом случае действует механизм Ахиезера, о чем подробно говорилось в гл. 10. Более подробное рассмотрение теории комбинационного рассеяния см. в [7] и [5].

В гл. 10 мы коротко останавливались на тех условиях синхронизма, выполнение которых возможно для L- и T-волн. Сделаем здесь еще несколько замечаний по этому поводу.

Отметим, что, например, взаимодействие $T(\omega_1)+T(\omega_2)\to\to T(\omega_1+\omega_2)$ разрешено согласно условиям синхронизма; однако во втором приближении, как было показано ранее, вторая гармоника сдвиговой волны при этом не генерируется. Не будет поэтому и генерации комбинационных частот. Таким образом, могут встречаться случаи, когда, несмотря на выполнение условий синхронизма, взаимодействия волн не будет. Таким образом, условия (3.23) и (3.24) являются необходимыми, но отнюдь не достаточными. Анализ показывает, что наряду с разрешенными коллинеарными взаимодействиями $L(\omega_1)+L(\omega_2)\to L(\omega_1\pm\omega_2)$ разрешенными являются еще такие неколлинеарные взаимодействия:

$$\begin{gathered} L(\omega_1)+T(\omega_2)\to T(\omega_1-\omega_2),\ T(\omega_1)+T(\omega_2)\to L(\omega_1+\omega_2),\\ L(\omega_1)+L(\omega_2)\to T(\omega_1-\omega_2),\ L(\omega_1)+T(\omega_2)\to L(\omega_1-\omega_2),\\ L(\omega_1)+T(\omega_2)\to L(\omega_1+\omega_2). \end{gathered} \tag{3.29}$$

Заметим, что мы пока имели дело только с одними акустическими волнами и рассматривали только фонон-фононные взаимодействия. Значительно более разнообразны взаимодействия звуковых волн с волнами другой физической природы. Имеются взаимодействия фонон-электронные, фонон-фотонные, фонон-магнонные, но о них мы будем говорить в гл. 12—14.

§ 4. Нелинейные акустические эффекты в кристаллах

По сравнению со случаем изотропных твердых тел нелинейная акустика кристаллов отличается бо́льшей сложностью и многообразием, что объясняется как анизотропией упругих свойств кристаллов, так и возможностью взаимодействия акустических волн с полями другой физической природы. Мы кратко опишем основные нелинейные эффекты, акцентируя внимание на тех из них, которые характерны именно для кристаллов и не встречаются в изотропных твердых телах. При этом из соображений простоты будем ограничиваться рассмотрением непьезоэлектрических кристаллов, за исключением тех ситуаций, когда наличие пьезоэффекта принципиально необходимо для осуществления тех или иных взаимодействий, например акустической волны с электрическим полем. Будем, кроме того, считать, что статические воздействия на кристалл отсутствуют, и можно использовать для его описания переменные естественного состояния (§ 2). Тогда из уравнения движения (2.5) и уравнения состояния (2.3) нетрудно получить следующее нелинейное волновое уравнение:

$$\rho_0 \ddot{u}_i = (c_{ijkl} + c^*_{ijklqr} u_{q,\,r})\, u_{k,\,jl}, \tag{4.1}$$

где $c^*_{ijklqr} = c_{ijklqr} + c_{ijlq}\delta_{kr} + c_{iltq}\delta_{jk} + c_{iktq}\delta_{jr}$.

Поскольку нелинейности кристаллов обычно малы, а их геометрические размеры ограничены, в большинстве случаев при решении уравнения (4.1), так же как и в случае изотропных твердых тел, достаточно ограничиться *приближением заданного поля*. При этом, полагая, что решение имеет вид

$$u_i = u'_i + u''_i + \ldots, \tag{4.2}$$

где u'_i — решение первого приближения, получим после подстановки (4.2) в (4.1) линейное однородное уравнение для поля первого приближения:

$$\rho_0 \ddot{u}'_i - c_{ijkl} u'_{k,\,jl} = 0$$

и линейное неоднородное уравнение для поля второго приближения:

$$\rho_0 \ddot{u}''_i - c_{ijkl} u''_{k,\,jl} = c^*_{ijklqr} u'_{q,\,r} u'_{k,\,jl}. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) описывает процессы генерации второй гармоники и взаимодействия акустических волн в непьезоэлектрических кристаллах. В частности, для описания генерации второй гармоники положим, что решение первого приближения имеет вид собственной

волны (см. гл. 9):

$$u_k' = u_0 p_k^{(m)} \cos(\omega t - k_q^{(m)} x_q), \qquad (4.4)$$

где $p_k^{(m)}$ — единичный вектор поляризации волны, определяемый из решения уравнения Кристоффеля (9.1.6) для собственного значения $\rho_0 c_{(m)}^2$, $m=1, 2, 3$. Подстановка (4.4) в (4.3) дает

$$\rho_0 \ddot{u}_i'' - c_{ijkl} u_{k,\,lj}'' = {}^1/_2 u_0^2 k_{(m)}^3 N_i^{(m)} \sin[2(\omega t - k_q^{(m)} x_q)], \qquad (4.5)$$

где $N_i^{(m)} = c_{ijklqr}^* p_k^{(m)} p_q^{(m)} n_j n_l n_r$ — так называемый *вектор вынуждающей силы*. В своих основных чертах (4.5) напоминает уравнение, описывающее генерацию второй гармоники в изотропных твердых телах. Аналогично изотропному случаю (см. (3.12)), решение уравнения (4.5), отвечающее нулевым начальным условиям, в случае синхронизма отражает линейное возрастание амплитуды второй гармоники n-й поляризации ($n=1, 2, 3$) с расстоянием [32]

$$u_n'' = {}^1/_8 k_{(m)}^2 \Gamma_{(mn)} x u_0^2 \cos[2(\omega t - k_{(m)} x)]. \qquad (4.6)$$

В выражении (4.6) через u_n'' обозначены компоненты вектора смещений второй гармоники в системе координат, связанной с главными осями тензора Кристоффеля Γ_{ik}, x — координата, отсчитываемая вдоль направления вектора $\boldsymbol{n}$, который, вообще говоря, не совпадает с осями указанной координатной системы, $\Gamma_{(mn)} = p_{mi} N_i^{(m)} / \rho_0 c_{(n)}^2$ — нелинейный параметр, описывающий эффективность генерации, p_{mi} — матрица, составленная из единичных собственных векторов $p_i^{(m)}$ тензора Кристоффеля. Индекс n в $\Gamma_{(mn)}$ соответствует поляризации гармоники, а m — поляризации волны основной частоты. Например, в случае генерации второй гармоники продольной волны, распространяющейся вдоль основных осей кубических кристаллов, $\Gamma_{(mn)} = \Gamma_{(11)} = \Gamma = 3 + c_{111}/c_{11}$.

Характерной особенностью генерации гармоник в кристаллах оказывается то, что нелинейный параметр $\Gamma_{(mn)}$ является существенно анизотропной величиной. Кроме того, в кристаллах возможна генерация второй гармоники сдвиговых волн. Напомним, что в изотропных телах (§ 3) симметрия тензора упругих модулей третьего порядка запрещает генерацию второй сдвиговой гармоники, по крайней мере в совершенных материалах. Для некоторых направлений в кристаллах генерация вторых гармоник сопровождается интересными *поляризационными эффектами*, связанными с тем, что условия синхронизма могут выполняться для обеих квазипоперечных волн ортогональных поляризаций [33]. Такими направлениями, очевидно, являются акустические оси. Например, для оси симметрии третьего порядка тригональных кристаллов (кварц, ниобат лития), являющейся акустической осью, компоненты вектора вынуждающей силы $N_i^{(T)}$ имеют вид

$$N_x^{(T)} = c_{444} \sin 2\varphi, \quad N_y^{(T)} = c_{444} \cos 2\varphi,$$

где φ — угол между осью z и вектором смещения сдвиговой волны. Легко видеть, что при повороте вектора смещения в основной волне на угол φ вектор смещения волны удвоенной частоты поворачивается

на $\pi/2-2\varphi$. В какой-то мере это напоминает явление внутренней конической рефракции (см. § 5 гл. 9), при которой вектор потока энергии также поворачивается на двойной угол. Подобное сходство объясняется тем, что оба эффекта квадратичны по амплитудам волн (подробнее см. [34]).

Генерацией сдвиговых гармоник в кристаллах объясняется и возможный в них особый тип нелинейного искажения формы упругой волны [35] *). Как известно, в изотропных твердых телах распространение волны в нелинейной среде сопровождается укручением ее фронта и в конечном итоге превращением волны в пилообразную. На языке фурье-представлений это означает, что ее спектр обогащается высшими гармониками. В кристаллах наряду с

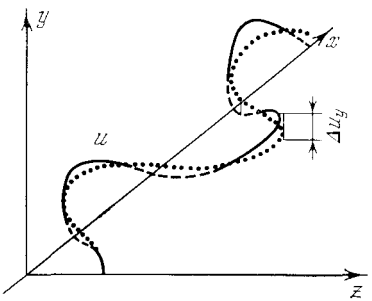


Рис. 11.1. Искажение формы сдвиговой волны в кристалле, связанное с генерацией гармоник ортогональной поляризации. Точками обозначен отрезок косинусоиды, лежащий в плоскости $y=0$, сплошной и штриховыми кривыми обозначены участки профиля волны, лежащие соответственно выше и ниже плоскости $y=0$.

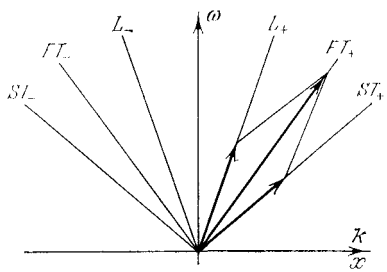


Рис. 11.2. Дисперсионная диаграмма, иллюстрирующая типы коллинеарных взаимодействий акустических волн в кристаллах.

описанным классическим типом нелинейных искажений изменение формы волны может быть связано и с генерацией гармоник, векторы смещения которых ортогональны смещению основной волны. Такая ситуация может иметь место в уже рассмотренном случае генерации сдвиговых гармоник при распространении волны вдоль осей симметрии третьего порядка тригональных кристаллов. Например, при ориентации вектора поляризации основной волны вдоль оси z (угол φ равен нулю) поляризация гармоники, как видно из выражения для вынуждающей силы $N_i^{(T)}$, оказывается ориентированной вдоль оси y. Появление гармоники с ортогональной поляризацией сказывается в том, что профиль смещений в сдвиговой волне выходит из плоскости $y=0$ и приобретает вид «ломаной спирали» (рис. 11.1).

Чрезвычайно многообразны явления, возникающие при взаимодействии в кристаллах акустических волн различных частот.

*) В работе [35] имеются неточности в графической интерпретации этого вопроса.

В этом легко убедиться хотя бы на примере коллинеарных взаимодействий, в результате которых генерируются волны суммарной или разностной частот. Если в случае изотропного твердого тела условия синхронизма разрешают коллинеарные взаимодействия только для волн одного типа, то в кристаллах, благодаря наличию трех скоростей упругих волн, возможны 10 типов коллинеарных взаимодействий, причем каждый из них реализуется в трех вариантах [32].

Проиллюстрируем сказанное с помощью дисперсионной диаграммы, на которой отложим линии, соответствующие фазовым скоростям продольной L, быстрой сдвиговой FT и медленной сдвиговой ST волн в кристаллах (рис. 11.2), распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси x (индексы «+» и «—»). Рассмотрим один из десяти возможных типов взаимодействий — для волн L_+, FT_+ и ST_+. Очевидно, что возможны следующие варианты взаимодействия этих волн.

1. $FT_+ = L_+ + ST_+$, $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$, $|\boldsymbol{k}_3| = |\boldsymbol{k}_2| + |\boldsymbol{k}_1|$. Нетрудно показать, что соотношение частот двух взаимодействующих волн ω_2/ω_1 должно при этом удовлетворять условию

$$\omega_2/\omega_1 = c_L (c_{FT} - c_{ST})/c_{ST} (c_L - c_{FT}).$$

Аналогично для двух других вариантов

2. $ST_+ = FT_+ + L_+$, $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$, $|\boldsymbol{k}_3| = |\boldsymbol{k}_2| - |\boldsymbol{k}_1|$:

$$\omega_2/\omega_1 = c_{FT} (c_L - c_{ST})/c_L (c_{FT} - c_{ST}).$$

3. $L_+ = FT_+ + ST_+$, $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$, $|\boldsymbol{k}_3| = |\boldsymbol{k}_2| - |\boldsymbol{k}_1|$:

$$\omega_2/\omega_1 = c_{FT} (c_L - c_T)/c_T (c_L - c_{FT}).$$

Другие типы коллинеарных взаимодействий реализуются для волн, распространяющихся как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси x. Некоторые из них наблюдались экспериментально в работе [36].

Неколлинеарные взаимодействия акустических волн в кристаллах также отличаются бóльшим разнообразием по сравнению со случаем изотропных твердых тел. Так, если в изотропной среде возможно пять типов неколлинеарных взаимодействий, как это мы видели в § 3, то в кристаллах их число достигает 21. Из них в 13 случаях возбуждаются волны разностной частоты и в 8 случаях — суммарной [32, 37]. Кроме того, в случае достаточно сильной анизотропии возможны еще три типа взаимодействий с образованием волн разностной частоты. При этом обе взаимодействующие и рассеянная волны принадлежат к одной дисперсионной ветви *). Последнее весьма схоже со случаем преломления акустической волны на границе двух сильно анизотропных кристаллов, где возможно образование двух преломленных волн, также принадлежащих одной дисперсионной ветви (§ 5 гл. 9).

Большой интерес для приложений представляют взаимодействия акустических волн с квазистатическими электрическими по-

*) На возможность таких взаимодействий впервые указал В. Е. Лямов [32].

лями в кристаллах. Механизмы такого взаимодействия могут быть различными. В частности, в пьезоэлектрических кристаллах главную роль играет *нелинейный пьезоэффект* (см. уравнения (2.3)). Не вдаваясь в детали расчета, поясним основные черты взаимодействия звука и электрического поля с помощью дисперсионных диаграмм (рис. 11.3). На рис. 11.3, *а* изображен процесс *встречного взаимодействия* двух однотипных акустических волн с одинаковыми частотами ω *(вырожденное взаимодействие)*. При этом результирующий электрический сигнал частоты 2ω постоянен в пространстве ($k_3=0$), и, следовательно, не удовлетворяет дисперсионному уравнению *(несинхронный процесс)*. По этой причине он может существовать только во время взаимодействия двух встречных волн. Диаграмма на рис. 11.3, *а* иллюстрирует и другой процесс, а именно взаимодействие поля удвоенной частоты с одной из акустических волн (с волновым числом k или $-k$). При этом происходит *генерация «обратной» волны* (знак волнового числа меняется на противоположный) или, как часто говорят, имеет место *обращение волнового фронта*.

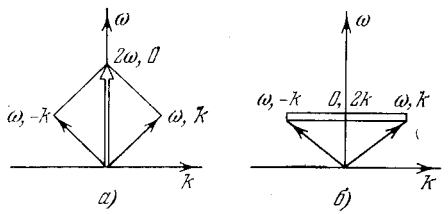


Рис. 11.3. Типы взаимодействий акустических волн в кристалле с электрическим полем.

Эффект обращения волны в пьезокристалле полезно пояснить и непосредственно, без использования дисперсионных диаграмм. В самом деле, как следует из уравнений состояния (2.3), выражение для упругих напряжений в этом случае содержит нелинейный член $\delta t_{ij}=e_{ijklm}\,u_{kl}E_m$, где e_{ijklm}— постоянные нелинейного пьезоэффекта. Если $u_{kl}\sim\sin(kx-\omega t)$ и $E_m\sim\sin 2\omega t$, то из элементарной тригонометрии следует, что в δt_{ij} имеется слагаемое, пропорциональное $\cos(kx+\omega t)$. Очевидно, оно и вызывает генерацию обратной волны. Впервые указанный эффект был предсказан в [38]. Как выяснилось впоследствии, именно генерацией обратной волны обусловлено явление «двухимпульсного» *электроакустического эха* (более принято понятие *«фононного эха»*), наблюдаемого в монокристаллах и кристаллических порошках [39—46]. Например, при подаче на кристалл $LiNbO_3$ импульса продольной акустической волны с частотой 550 МГц и после приложения к нему через время $\tau_и$ импульса электрического поля на частоте 1100 МГц появляется серия эхо-сигналов, если время $\tau_и$ удовлетворяет условию $\tau_и\approx(2n+1)\,L/c$, $n=0, 1, 2, \ldots$, где L — длина кристалла, c — скорость звука [43]. Первые эхо-сигналы появляются вскоре после действия поля, однако сигнал максимальной амплитуды (истинное эхо) наблюдается в момент времени $t=2\tau$. Амплитуды сигналов эха пропорциональны произведению амплитуд задающих импульсов в соответствии с параметрической природой процесса. Явление фононного эха наблюдалось во многих работах для различных типов волн и в разных кристаллах и порошках. В частности, эхо на по-

верхностных волнах в $LiNbO_3$ наблюдалось в работе [44]. Причина образования фононного эха в монокристаллах заключается в согласовании фаз акустических волн в пакете после обращения их во времени электрическим полем накачки. Если речь идет об эхо в порошках, то здесь его причиной является, по-видимому, согласование фаз колебаний отдельных частиц порошка после приложения импульса накачки [45].

На рис. 11.3, *б* изображен другой возможный процесс, происходящий при встречном взаимодействии акустических волн: $\omega-\omega=0$ и $k-(-k)=2k$. В этом случае результирующий электрический сигнал постоянен во времени, но изменяется в пространстве с периодом π/k. Очевидно, описанный процесс может использоваться для *запоминания акустических сигналов*. Рассмотренные несинхронные взаимодействия представляют интерес для разработки нелинейных устройств обработки данных. Подробнее об этом будет говориться в гл. 12. Там же будут рассмотрены нелинейные акустические эффекты для объемных и поверхностных волн в пьезополупроводниковых кристаллах, в которых основным механизмом взаимодействия является *токовая нелинейность* электронной плазмы полупроводника. По порядку величины токовая нелинейность обычно намного превосходит упругую, пьезоэлектрическую и стрикционную нелинейности, поэтому интерес к исследованию нелинейных эффектов в пьезополупроводниках, в частности различных видов волновых взаимодействий [47, 48], в настоящее время достаточно велик.

В заключение обсудим некоторые особенности нелинейных акустических эффектов, сопровождающих структурные фазовые переходы в кристаллах [22]. Как известно, степень симметрии структуры принято характеризовать с помощью *параметра порядка* η — величины, тождественно равной нулю в высокосимметричной фазе и отличной от нуля в низкосимметричной фазе (например, в ферромагнетике роль параметра порядка играет намагниченность). Л. Д. Ландау и И. М. Халатников предположили, что вблизи точки фазового перехода $T=T_c$ в изотропном случае термодинамический потенциал Φ, например внутренняя энергия, может быть представлен в виде разложения (см., например, [49])

$$\Phi(u, \eta)=\Phi_0(u)+\gamma_p(T, u)\,\eta^2+\beta_p(u)\,\eta^4+\ldots, \qquad (4.7)$$

где для простоты записи опущены тензорные индексы. Коэффициент γ_p в (4.7) линейно зависит от температуры $\gamma_p=\gamma_{p0}(T-T_c)$, а коэффициент β_p от температуры не зависит. При этом параметр порядка η удовлетворяет следующему кинетическому уравнению:

$$\dot{\eta}=-L_к\,\partial\Phi/\partial\eta, \qquad (4.8)$$

описывающему релаксацию η к равновесному значению. Здесь $L_к$ — феноменологический кинетический коэффициент. Для описания распространения звука уравнения (4.7) и (4.8) нужно дополнить механическим уравнением движения $\rho\ddot{u}_i=\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ и учесть связь σ_{ik} и Φ. Совместное решение этих уравнений в линейном

приближении позволяет получить выражение для волнового числа звука, в которое входит *время релаксации параметра порядка* ниже температуры фазового перехода

$$\tau = [L_к \gamma_{p0} (T_c - T)]^{-1}. \qquad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что τ быстро растет при $T \to T_c$. Рост τ в свою очередь приводит к резкому увеличению затухания звука α (в низкочастотном пределе $\alpha \sim \omega^2\tau$) и к дисперсии фазовой скорости.

Отметим, что коэффициент поглощения имеет максимум при температуре, близкой, но несколько меньшей T_c. При $T > T_c$ параметр порядка в рамках используемой модели равен нулю и аномалии в затухании отсутствуют. Похожим образом ведет себя и приращение фазовой скорости Δv (в низкочастотном пределе $\Delta v \sim \omega^2\tau^2$). Многочисленные эксперименты по измерению линейного поглощения и дисперсии звука в окрестности фазовых переходов в кристаллах в основных чертах подтверждают результаты изложенной простейшей теории, однако при $T > T_c$ обычно наблюдается значительное избыточное затухание, не предсказываемое теорией. Для объяснения этих отклонений было предложено несколько уточненных вариантов релаксационной модели Ландау и Халатникова, основные сведения о которых можно почерпнуть в обзоре [49].

Особый интерес представляет распространение звука в тех направлениях кристалла, в которых при фазовом переходе на изменениях волновых характеристик существенно сказывается изменение или обращение в нуль некоторых как линейных, так и нелинейных упругих модулей, связанное с изменением структуры кристалла. Характер этих изменений зависит от того, является ли связь деформаций с параметром порядка в высокосимметричной фазе линейной или квадратичной. В первом случае соответствующие модули второго и третьего порядков стремятся к нулю в точке фазового перехода, причем по довольно сложному закону. В случае квадратичной зависимости при переходе в высокосимметричную фазу модули упругости второго порядка должны испытывать скачок, а модули третьего порядка — оставаться неизменными. Эксперименты по наблюдению вторых гармоник, однако, показывают, что эффективность их генерации резко возрастает вблизи точки фазового перехода [50]. Этот факт не может быть объяснен на основе простой релаксационной теории. Улучшить положение можно, если включить в рассмотрение *пространственные флуктуации параметра порядка* в окрестности точки фазового перехода (см. [22]), которые можно описать посредством введения в разложение термодинамического потенциала (4.7) добавочного члена $(\mathrm{grad}\,\eta)^2$. Учет пространственных флуктуаций дает возрастание модулей упругости третьего порядка по закону $(T - T_c)^{\varkappa}$, где $\varkappa = -(1/2 - 3/2)$ — *критический индекс*, значение которого определяется симметрией кристалла. Однако и флуктуационные поправки не приводят к полному согласию с экспериментами, которые показывают, что наблюдаемые критические индексы обычно больше теоретически предсказываемых. Таким образом, необходимы дальнейшие уточнения теоретических

представлений о природе структурных фазовых переходов. Изучение нелинейных акустических эффектов при фазовых переходах, безусловно, может способствовать прогрессу в этой области.

§ 5. Экспериментальные методы исследования нелинейных явлений в твердых телах и некоторые результаты этих исследований

Разнообразие экспериментальных методов исследования акустических нелинейных явлений в твердых телах настолько велико, а заслуживающие внимания интересные научные результаты настолько многочисленны, что нам придется лишь очень кратко остановиться на этих вопросах.

Как уже было отмечено в § 1, первые эксперименты по обнаружению нелинейных явлений в твердых телах были выполнены в [3, 4] и относились к наблюдению гармоник в продольной волне. Эти измерения, так же как и подобные измерения в жидкостях, о которых шла речь в гл. 3, проводились спектральным методом. На рис. 11.4 приведена кривая зависимости амплитуды (напряжение V_2 на приемной кварцевой пластинке) второй гармоники — 10 МГц — от расстояния до излучателя в магниево-алюминиевом сплаве при напряжении на излучателе (кварцевая пластинка X-среза) 1000 В. Измерения проводились импульсным методом; особые предосторожности были предприняты, чтобы резонансный усилитель не перегружался прямым сигналом — 5 МГц. Для этого во входной цепи усилителя, настроенного на частоту второй гармоники, необходимо поставить фильтр-пробку на эту частоту и использовать приемную пластинку, имеющую резонанс на второй гармонике. Измерения проводились на образцах различной длины (до 50 см) при сохранении условий эксперимента неизменными. Как видно из рис. 11.4, импульсы второй гармоники по мере прохождения волной расстояния от излучателя возрастают, достигают максимума (расстояние стабилизации, определяемое выражением $x_{ст}=(\ln 2)/2\alpha_\omega$) и затем, вследствие преобладающего влияния диссипативных процессов, убывают. Расчетная интенсивность звука в этих экспериментах составляла около 1 Вт/см^2, амплитуда звукового давления около 6 атм и амплитуда колебательной скорости около 1,7 см/с.

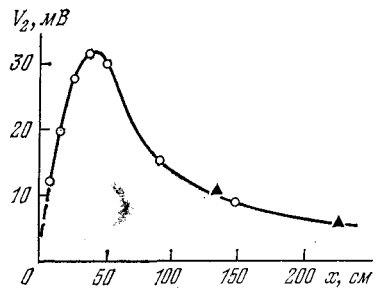


Рис. 11.4. Зависимость амплитуды второй гармоники продольной волны в магниево-алюминиевом сплаве от расстояния до излучателя.

Подобного рода эксперименты по наблюдению и измерению гармоник (второй и более высоких номеров) в продольной волне, а также волн комбинационных частот при коллинеарном распро-

странении проводились далее во многих изотропных твердых телах и кристаллах на различных частотах — вплоть до гигагерцевых частот. Спектральный метод наблюдения гармоник и комбинационных частот, по-видимому, является наиболее точным и чувствительным.

Измерение содержания гармоник в твердых телах дает в принципе возможность определения адиабатических модулей третьего порядка. Знание этих модулей необходимо в ряде задач физики твердого тела; эти модули, как и модули более высокого порядка, начинают играть все возрастающую роль в техническом материаловедении. Об особенностях определения этих модулей и об их численных значениях для большого числа кристаллов и изотропных твердых тел можно прочитать в [5, 6, 22]. Поскольку рэлеевские поверхностные волны не обладают дисперсией, а интенсивность их может быть получена достаточной, измерение амплитуд гармоник и комбинационных частот таких волн, возникающих из-за решеточной нелинейности, может быть осуществлено без особых трудностей [12—14].

В работе [51] спектральным методом в изотропном твердом теле была обнаружена генерация второй сдвиговой гармоники в сдвиговой волне конечной амплитуды, которой не должно было бы быть согласно пятиконстантной нелинейной теории упругости. Эта гармоника при прочих равных условиях оказывается существенно (на порядок и более) меньшей по амплитуде, чем гармоника продольной волны, но наблюдать ее несложно. В ряде случаев, в особенности если образец представляет собой кристалл с выраженными пластическими свойствами и на него оказывается локальное воздействие (например, приложение сосредоточенной силы), а также в случае, когда поперечный звук распространяется вдоль плоскости легкого скольжения, эффект генерации такой запрещенной гармоники значительно возрастает.

Далее было выяснено, что сдвиговая гармоника возникает вследствие появления асимметрии упругих свойств в направлениях смещений в поперечной волне («запрет» на генерацию второй сдвиговой гармоники при этом снимается). В случае однородного изотропного твердого тела члены с четными степенями сдвиговых деформаций в обобщенном законе Гука отсутствуют, тогда как при наличии остаточных деформаций и напряжений в таких телах (которые уже не могут считаться однородными и изотропными) такие члены появляются. В кристаллах же, как об этом говорилось в § 4, генерация сдвиговых гармоник может происходить из-за анизотропии упругих свойств по различным направлениям.

В [52, 53] теория генерации сдвиговых гармоник строится на основании модели, в которой учитывается смещение дислокаций в поле упругой волны. Следует обратить внимание на то, что исследование поведения «запрещенной» сдвиговой гармоники в принципе может дать полезные сведения о несовершенстве структуры твердых тел — о дефектах в кристаллах, наличии остаточных деформаций и напряжений.

В [19] рассчитаны амплитуды сдвиговых гармоник в твердом теле, где имеются случайные и периодические изменения внутренних напряжений. Дальнейшие исследования показали, что эффект генерации сдвиговых гармоник представляет интерес для контроля усталостных изменений материалов, находящихся под циклической нагрузкой; сдвиговые гармоники оказываются значительно чувствительнее к внутренним напряжениям, чем продольные гармоники. В [54] показано, что изменение сдвиговой гармоники начиналось с числа циклов, составляющих около 10% от числа циклов, при которых металлический образец разрушался. Продольная гармоника изменялась лишь непосредственно перед разрушением.

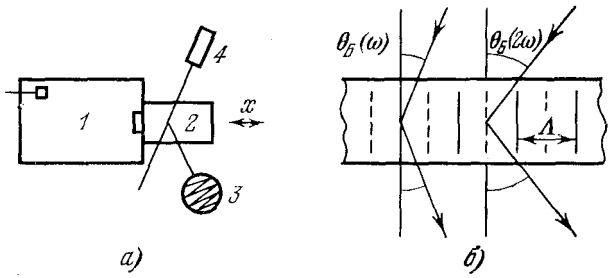


Рис. 11.5. Схема экспериментальной установки (*а*) и пояснение принципа наблюдения генерации гармоник акустических волн оптическим методом (*б*).

На частотах СВЧ диапазона представляют интерес оптические методы изучения нелинейных акустических явлений в твердых прозрачных телах. На рис. 11.5, *а* изображена схема установки для исследования генерации гармоник продольных волн в кристалле кварца [55]. Свет от неподвижного гелий-неонового лазера *4* падает на исследуемый прозрачный кристалл *2*, который может передвигаться вдоль направления распространения звука, сохраняя угол падения света неизменным (используется брэгговская дифракция света на ультразвуке). Этот свет дифрагирует на продольной ультразвуковой волне (использовались частоты от 500 МГц и выше; применялся импульсный метод) под углом $\theta_Б$, удовлетворяющим условию Брэгга $\sin\theta_Б=\lambda/2\Lambda$, где λ — длина волны света и Λ — длина волны звука (рис. 11.5, *б*). Поскольку угол $\theta_Б$ зависит от Λ, возникающие при распространении ультразвуковой волны гармоники могут быть исследованы независимо, если производить измерения под углами $\theta_Б(\omega)$, $\theta_Б(2\omega)$, . . . Изменение амплитуды гармоники с расстоянием находится путем передвижения резонатора *1* с кристаллом *2* относительно неподвижных источников света *4* и фотоумножителя *3*. При малом отношении интенсивностей дифрагированного света к падающему, интенсивность дифрагированного света прямо пропорциональна интенсивности падающего света I_0 и не зависит от частоты акустических гармоник ($U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — амплитуды смещения звука основной частоты и второй гармоники),

Поэтому такой метод дает прямое определение относительной интенсивности гармоник и отпадают многие трудности, связанные с настройкой и калибровкой преобразователей. На рис. 11.6 представлены результаты измерения содержания гармоник при распространении продольной волны основной частоты $f=62$ МГц в кристалле кварца по оси Z в зависимости от расстояния. Как видно, амплитуда второй гармоники достигает (при электрической мощности в импульсе 1—10 Вт) около 20% от амплитуды основной частоты, т. е. форма волны существенно искажена (L_0— расстояние образования разрыва).

В § 4 шла речь о нелинейных поляризационных эффектах в кристаллах. Экспериментальные исследования таких эффектов достаточно своеобразны и сложны, поскольку эксперименты со сдвиговыми волнами часто требуют особых приемов осуществления акустического контакта с образцом, а изменение поляризации излучателя относительно приемника связано с определенными трудностями.

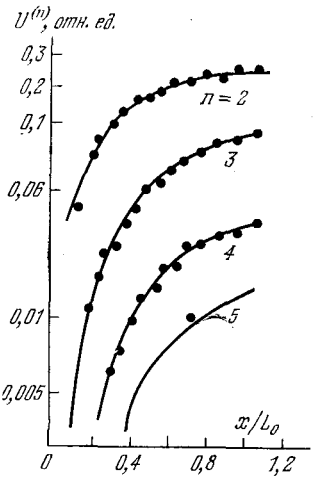


Рис. 11.6. Зависимость амплитуд $U^{(n)}$ второй и высших гармоник продольной волны, распространяющейся вдоль оси Z кристалла кварца, от расстояния до излучателя.

Коллинеарное взаимодействие волн применяется для исследования поведения нелинейных свойств твердых тел, подвергнутых тем или иным физико-механическим воздействиям. Нелинейные свойства в значительной степени отражают, как мы уже отмечали выше, структурные характеристики этих тел.

Одним из интересных применений является нелинейный акустический метод исследования фазовых переходов второго рода в пьезоэлектрических и сегнетоэлектрических кристаллах. В § 4 кратко говорилось о теории таких переходов. Экспериментальные методы и результаты исследований поведения амплитуд комбинационных частот при фазовых переходах второго рода описаны в [50, 56—58].

Исследования фазовых переходов в кристаллах пьезо- и сегнетоэлектриков методами нелинейной акустики могут дать ряд полезных данных для понимания физических процессов, происходящих вблизи температуры Кюри. Эти методы оказываются более чувствительными к изменению параметров перехода, чем обычные линейные методы, при помощи которых измеряется скорость и поглощение звука. На рис. 11.7 в качестве примера показано поведение продольной волны суммарной частоты в зависимости от близости температуры образца KH_2PO_4 в точке Кюри $T_C=-151°C$. Через образец вдоль оси Z пропускаются две волны с частотами: $f_1=\omega_1/2\pi=8{,}5$ МГц и $f_2=\omega_2/2\pi=22$ МГц; измеряется амплитуда волны суммарной частоты, которая определяется формулой (3.22).

Из рис. 11.7 видно, что волна суммарной частоты сильно растет по амплитуде при $T \approx T_C$ (ср. с выводами § 4).

Такое аномальное поведение, по-видимому, объясняется взаимодействием звуковой волны с пространственно-неоднородными флуктуациями параметра порядка, нарастающими вблизи перехода. Подробнее об этом можно прочитать в обзоре [22]. При вынужденных колебаниях нелинейных резонаторов, если одна из возникающих в результате нелинейности частот совпадает с одной из собственных частот, можно ожидать возникновения особенностей нелинейных резонансов [15—18].

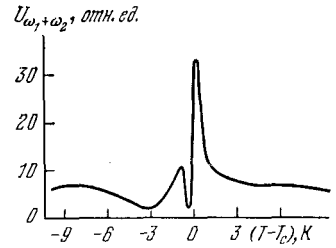


Рис. 11.7. Зависимость амплитуды продольной волны суммарной частоты в кристалле KH_2PO_4 (распространение вдоль оси Z) от температуры: $T_C = -151°C$ — температура Кюри.

На рис. 11.8 приведена блок-схема для наблюдения явления «детектирования» модулированного акустического сигнала нелинейной упругостью резонатора, выполненного в виде металлического стержня. Модуляционный метод изучения нелинейностей в образцах из твердых стержней с большой акустической добротностью весьма чувствителен и позволяет наблюдать нелинейное взаимодействие упругих волн при таких интенсивностях звука и ультразвука, которые еще недавно относили исключительно к области линейной акустики.

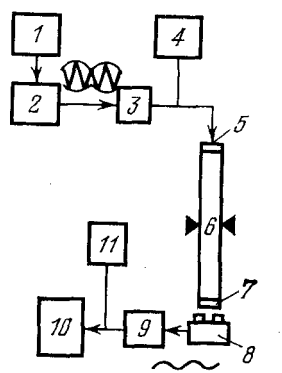


Рис. 11.8. Блок-схема установки для наблюдения «детектирования» модулированного акустического сигнала в нелинейном стержневом резонаторе.

На приведенной блок-схеме: *1* — низкочастотный модулятор-генератор с большой стабильностью частоты. Сигнал с модулятора подается на генератор высокой частоты *2*. Модулированный сигнал далее проходит через фильтр-пробку *3*, настроенный на частоту модуляции. После этого фильтра сигнал подается на пьезопреобразователь *5* (кварцевая пластинка X-среза), прикрепленный к стержню *6*. В стержне распространяются компоненты спектра модулированного сигнала ω, $\omega \pm \Omega$ и т. д. В результате нелинейного взаимодействия этих компонент спектра между собой выделяется низкая частота — частота модуляции, т. е. происходит детектирование на нелинейной упругости стержня. Если частота модуляции совпадает с одной из собственных частот стержня, имеет место резонанс. На блок-схеме *7* — ферромагнитная тонкая пластинка, приклеенная к стержню (если этот стержень немагнитен), *8* — бесконтактный магнитоэлектрический приемник, *9* — усилитель, *10* — осциллограф, *4* и *11* — вольтметры. При большой добротности стержня детектированный сигнал достаточно велик.

Амплитуда акустически детектированного сигнала зависит не только от совпадения частоты модуляции с собственной частотой стержня, но в случае, если затухание несущей частоты на длине стержня мало, также и от этой несущей частоты.

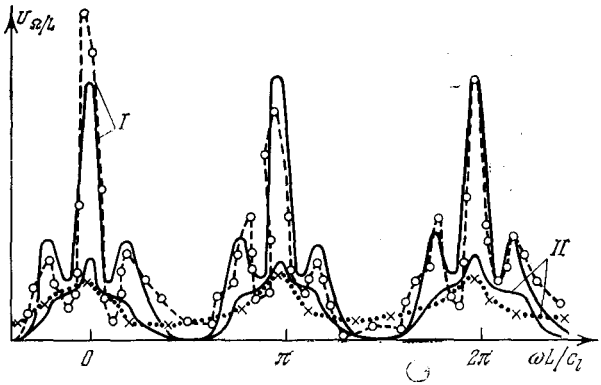


Рис. 11.9. Зависимость амплитуды продольных колебаний на частоте Ω для двух алюминиевых стержней от несущей частоты.

На рис. 11.9 показаны расчетные зависимости амплитуд продольных колебаний стержня длины L на частоте Ω от несущей частоты для двух алюминиевых стержней, $L=25$ см (кривая I) и $L=75$ см (кривая II), штриховая и пунктирная кривые — экспериментальные результаты ($\alpha=2\cdot10^{-3}$ 1/см).

Виден характерный тройной «резонанс». Он связан с тем, что в спектре излучения есть три частоты — несущая и две боковые: максимумы соответствуют условию, когда стержень, кроме резонанса на частоте Ω, резонирует еще и на несущей или боковых частотах.

Приведенные здесь результаты соответствуют акустическому числу Рейнольдса $\mathbf{Re}_{ак}=u_0k_1^2/\alpha_\omega\approx0{,}05$ (здесь u_0— амплитуда смещения, k_1— волновое число основной волны, α_ω— коэффициент затухания). Обнаружение нелинейных эффектов при такой малой нелинейности оказывается возможным благодаря резонансному методу измерений и высокой добротности стержня (около 10^5). Подобные измерения были сделаны и на стоячих поперечных волнах. Изложенная методика благодаря своей простоте и высокой чувствительности находит применение для изучения нелинейных свойств твердых тел и измерения модулей упругости третьего порядка [5, 6, 22].

Пока мы имели дело с нелинейным искажением и взаимодействием волн, распространяющихся в одном направлении. Сделаем теперь несколько замечаний по экспериментальной методике исследования взаимодействий волн, пересекающихся под углами, при которых возможно *комбинационное рассеяние звука на звуке.*

На рис. 11.10 показана схема эксперимента по наблюдению рассеяния звука на звуке [9—11]. На пьезокварцевую пластинку

$И_1$ подается напряжение от генератора $Г_1$ импульсов с частотой повторения импульсов 50 Гц и частотой заполнения импульсов (несущей частотой) ω_1. Пусть пластинка излучает в образец, имеющий вид кругового диска, поперечные ультразвуковые волны с частотой ω_1. На пластинку $И_2$ с генератора $Г_2$ подается напряжение частоты ω_2, и она излучает непрерывно поперечные волны. Волны от излучателей $И_1$ и $И_2$ пересекаются под углом α и между ними в области пересечения пучков происходит взаимодействие. Из законов сохранения импульса и энергии следует (§ 3), что в данном случае возможен такой угол рассеяния γ, под которым может свободно распространяться рассеянная продольная волна (в рассматриваемом случае будет осуществляться взаимодействие $T(\omega_1)+T(\omega_2)\to L(\omega_1+\omega_2)$, одно из разрешенных взаимодействий (3.29). Два «поперечных» фонона аннигилируют, в результате чего рождается «продольный» фонон суммарной частоты. Опыт показывает, что такой тип взаимодействия действительно существует и хорошо наблюдается. Пластинка $П$ принимает продольную волну суммарной частоты $L(\omega_1+\omega_2)$, электрический сигнал от которой через фильтр-пробки $Ф_1$ и $Ф_2$ для частот ω_1 и ω_2 соответственно и усилитель $У$ поступают на осциллограф (буквами $М$ и $В_1$, $В_2$ обозначены импульсный модулятор и вольтметры). Конечно, амплитуда этой волны очень мала по сравнению с амплитудами исходных волн $T(\omega_1)$ и $T(\omega_2)$, поэтому на опыте приходится встречаться с трудностями при ее обнаружении. Однако амплитуда волны $L(\omega_1+\omega_2)$ быстро увеличивается с ростом ω_1 и ω_2 и с ростом области взаимодействия волн этих частот, о чем шла речь в § 3 этой главы.

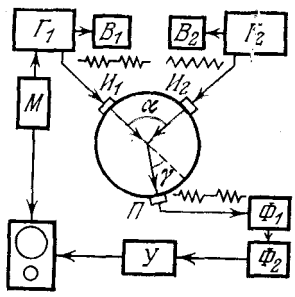


Рис. 11.10. Схема экспериментальной установки по наблюдению рассеяния звука на звуке.

Глава 12

АКУСТОЭЛЕКТРОНИКА

§ 1. Общие сведения

Акустоэлектроника — относительно новая область физической акустики и электроники. Она объединяет как фундаментальные вопросы акустики твердого тела, так и их многочисленные приложения, главным образом к системам обработки сигналов и физике твердого тела. Как самостоятельное направление акустоэлектроника оформилась к концу 60-х годов, хотя отдельные работы, посвященные различным аспектам применения акустических волн (главным образом объемных) в электронике, в частности в линиях задержки и электромеханических фильтрах, появлялись и раньше [1—3]. В этих традиционных приложениях использовались, однако, лишь два свойства акустических волн — малая скорость, составляющая лишь $\sim 10^{-5}$ от скорости электромагнитных волн, и относительно низкое затухание на длину волны. Лишь с появлением эффективных методов возбуждения высокочастотных (от 10 МГц до 3 ГГц) поверхностных акустических волн (ПАВ), в особенности с изобретением встречно-штыревого преобразователя, позволяющего эффективно возбуждать и принимать ПАВ в пьезоэлектрических кристаллах, стало возможным говорить об акустоэлектронике в том широком смысле, в котором она понимается сейчас. Последнее обусловлено следующими особенностями устройств на ПАВ. Во-первых, это те же малая скорость и затухание поверхностных волн; во-вторых, интегральность исполнения большинства устройств на ПАВ, позволяющая использовать для их изготовления готовую технологию, разработанную ранее для интегральных микросхем; в третьих, доступность тракта ПАВ, энергия которых сосредоточена вблизи поверхности, и связанная с этим возможность эффективного управления характеристиками этих волн с помощью всевозможных электрических и механических внешних воздействий. Наконец, многие акустоэлектронные устройства обладают поистине уникальными свойствами. Если еще учесть их хорошую воспроизводимость, высокую надежность, то всеобщий интерес к акустоэлектронике станет вполне понятным. Литература по акустоэлектронике весьма обширна. Ей посвящено свыше пяти тысяч оригинальных статей, множество обзоров (см., например, [4—8]), несколько монографий [9—14] и специальных выпусков журналов [15], [16]. Мы, разумеется, не будем пытаться осветить все

связанные с ней вопросы, а остановимся лишь на тех, которые представляются узловыми или практически наиболее важными.

Прежде чем переходить к более подробному изложению, перечислим основные достижения акустоэлектроники на настоящий момент. Среди устройств обработки сигналов прежде всего следует назвать полосовые фильтры промежуточных частот на ПАВ. Благодаря возможности получения практически любой частотной характеристики в рамках одноступенчатого технологического процесса миниатюрные фильтры на ПАВ быстро завоевали популярность среди разработчиков радиоаппаратуры и заняли видное место в радиолокационных системах, вычислительной технике, телевидении и т. д. Другими важными устройствами стали резонаторы и резонаторные фильтры на ПАВ, позволившие поднять уровень рабочих частот стабилизированных ими генераторов до гигагерцевого диапазона. Заметную роль в аппаратуре специального назначения играют согласованные фильтры на ПАВ для баркеровских сигналов, иначе называемые устройствами кодирования и декодирования. Широко развились и интегральные аналоги традиционных ультразвуковых линий задержки — линии задержки на ПАВ. Использование ПАВ позволило довольно просто реализовать так называемые искусственные дисперсионные структуры с любым законом дисперсии, которые сейчас с успехом используются при создании согласованных фильтров для частотно-модулированных сигналов, так называемых фильтров сжатия импульсов.

Все перечисленные устройства просты в исполнении и, следовательно, достаточно надежны. Их основными элементами являются тонкие металлические электроды, нанесенные на гладкую поверхность пьезоэлектриков и в некоторых случаях рассеивающие неоднородности типа канавок, вытравленных на той же рабочей поверхности кристалла. В соответствии с терминологией, принятой в электронике, такие устройства часто называют *пассивными*. К *активным* относятся устройства усиления ультразвуковых волн, в том числе и ПАВ, за счет передачи энергии дрейфующих электронов волне, различные устройства, использующие параметрическую накачку, генераторы и т. д. В особую группу объединяются устройства, принцип действия которых основан на нелинейном взаимодействии волн между собой или с электрическими, магнитными и механическими полями. Сюда относятся устройства свертки и корреляции, записи и считывания оптических и акустических изображений, различного вида датчики давления, электрического и магнитного полей, акустические модуляторы лазерных пучков *) и т. д.

Если говорить о применении акустоэлектроники к физике твердого тела, то здесь следует назвать использование развитых в ней методов для определения различных параметров твердых тел — для измерения концентраций и подвижностей носителей заряда в

*) Последние обычно выделяются в отдельную область — акустооптику. Более подробно об этом говорится в гл. 13.

полупроводниках и металлах, для оценок параметров приповерхностного слоя, констант взаимодействия и т. д. Важную роль акустоэлектронные методы в последнее время играют и в экспериментальных исследованиях фазовых переходов, в том числе в тонких пленках.

Следует отметить, что далеко не все возможности акустоэлектроники в полной мере реализованы. В частности, усилители, использующие взаимодействие звука с электронами (благодаря такого рода взаимодействию возник сам термин «акустоэлектроника»), пока уступают по своим показателям устройствам на интегральных микросхемах. Устройства нелинейной обработки сигналов также нуждаются в совершенствовании. Но если говорить об акустоэлектронике в целом, то можно не сомневаться, что уже сейчас она занимает видное место в современной радиофизике и физике твердого тела. В следующих параграфах, в значительной степени посвященных прикладным вопросам, мы обсудим физические основы функционирования главных структурных элементов и поясним принципы действия основных акустоэлектронных устройств.

§ 2. Возбуждение и детектирование поверхностных волн. Встречно-штыревой преобразователь

До сих пор в этой книге мы мало интересовались вопросами возбуждения и приема звука *), рассматривая акустические волны как нечто заданное. Однако в акустоэлектронике поверхностных волн вопросы возбуждения и приема играют основополагающую роль, так как от этого зависят эффективность и избирательные свойства соответствующих устройств. Поэтому мы кратко обсудим основные методы возбуждения и приема ПАВ, главным образом рэлеевского типа.

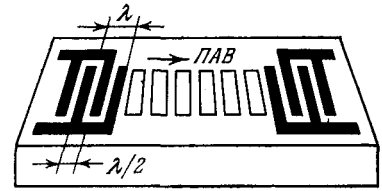


Рис. 12.1. Линия задержки на ПАВ с двумя встречно-штыревыми преобразователями.

В устройствах на ПАВ, использующих пьезокристаллические подложки, для возбуждения и приема чаще всего применяется *встречно-штыревой, или электродный преобразователь*, впервые подробно описанный в 1965 г. Уайтом и Волтмером [17] (см. также [4—22]). Типичная *линия задержки* на ПАВ с передающим и приемным встречно-штыревыми преобразователями (ВШП) изображена на рис. 12.1. При подаче на электроды любого из преобразователей электрического напряжения, изменяющегося с частотой ω, в прилегающих к электродам участках кристалла за счет пьезоэффекта возникают механические напряжения, приводящие к возбуждению

*) Исключение составляет §6 гл. 10, посвященный излучению движущихся немонохроматических источников, в том числе дислокаций и трещин.

как объемных, так и поверхностных волн. Если штыри расположены периодически, то при $\omega=\omega_0=2\pi v/d$ или при $\lambda=d$ (где d — период, или расстояние, между двумя ближайшими штырями одной полярности; v и λ — скорость и длина ПАВ) поверхностные волны, излученные отдельными штырями в обе стороны, складываются в фазе и, следовательно, возбуждаются наиболее интенсивно. На аналогичном принципе основана и работа ВШП в режиме приема. Если пренебречь влиянием конечной ширины штырей, то *частотную характеристику* периодического ВШП можно представить как характеристику эквидистантной антенной решетки. Очевидно, что количество N элементов решетки при этом соответствует числу пар штырей. Амплитуда $A(\omega)$ поверхностной волны, излученной ВШП, будет иметь вид

$$A(\omega)=A_0\{1+\exp(i\omega\, d/v)+\ldots+\exp[i(N-1)\,\omega\, d/v]\}, \quad (2.1)$$

где A_0— амплитуда волны, возбуждаемой парой штырей. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии и учитывая соотношения $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ и $\omega_0=2\pi v/d$, выражению (2.1) можно придать вид

$$A(\omega)=NA_0\exp(iN\pi\Delta\omega/\omega_0)\,\frac{\sin(N\pi\Delta\omega/\omega_0)}{N\sin(\pi\Delta\omega/\omega_0)}.$$

Для модуля нормированной частотной характеристики $a(\omega)=A(\omega)/NA_0$ получим

$$|a(\omega)|=\left|\frac{\sin(N\pi\Delta\omega/\omega_0)}{N\sin(\pi\Delta\omega/\omega_0)}\right|. \quad (2.2)$$

Для больших N имеем

$$|a(\omega)|=\left|\frac{\sin(N\pi\Delta\omega/\omega_0)}{N\pi\Delta\omega/\omega_0}\right|.$$

Относительная *полоса пропускания* по уровню 3 дБ при этом определяется выражением $2\Delta\omega/\omega_0\approx 1/N$, а добротность $Q_{ак}\approx N$.

Для анализа эффективности возбуждения ПАВ встречно-штыревым преобразователем удобно воспользоваться эквивалентной электрической схемой, справедливой в окрестности резонансной частоты ω_0 (рис. 12.2). Здесь C_0— статическая емкость электродов решетки, C_s и L_s— эквивалентные емкость и индуктивность, описывающие резонансные свойства ВШП, R_0— *сопротивление излучения*, определяющее мощность $P_{ак}=|I|^2R_0/2$ излучаемых ВШП поверхностных волн; I — электрический ток, протекающий через ВШП. На центральной частоте преобразователя ω_0 импеданс последовательной цепи, состоящей из C_s и L_s, равен нулю, и полный импеданс определяется только сопротивлением излучения R_0 и емкостью C_0. В указанном приближении эта схема не отличается от хорошо известной эквивалентной схемы преобразователя объемных волн [3]. Параметры эквивалентной схемы встречно-штыревого

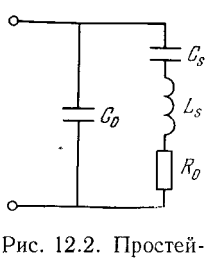


Рис. 12.2. Простейшая эквивалентная схема встречно-штыревого преобразователя.

преобразователя, а именно, величины C_0, C_s, L_s и R_0, могут быть определены как экспериментальным путем, так и в результате решения соответствующей весьма сложной краевой задачи. Необходимые для этого уравнения можно найти в гл. 9.

Теории ВШП посвящено большое число работ, многие из которых отражены в монографиях [8—14, 22]. Мы ограничимся лишь кратким качественным обсуждением этого вопроса.

В частности, расчеты показывают, что величина статической емкости ВШП C_0 определяется выражением

$$C_0 = F\varepsilon_p bN, \tag{2.3}$$

где b — длина электродов ВШП, ε_p — эффективная диэлектрическая проницаемость кристалла, представляющая собой комбинацию из компонент тензора диэлектрической проницаемости, $F(l/m)$ — безразмерная функция отношения ширины электродов l к расстоянию между соседними электродами $m=d/2$ [9, 11]. Для сопротивления излучения имеет место следующая зависимость:

$$R_0 = [\mathscr{L}\omega_0\varepsilon_p bK^2_{\text{эм}}N^2]^{-1}, \tag{2.4}$$

где $K_{\text{эм}} \approx (2\Delta v/v)^{1/2}$ — коэффициент электромеханической связи в выбранном направлении поверхности кристалла, Δv — разность скоростей ПАВ на свободной и металлизированной поверхностях, $\mathscr{L}(l/m)$ — безразмерная функция от l/m. Обратная пропорциональность сопротивления излучения величине N^2 отражает тот очевидный факт, что в приближении слабой электромеханической связи $K^2_{\text{эм}}N \ll 1$ (а именно в этом приближении получена формула (2.4)) мощность возбуждаемых поверхностных волн пропорциональна N^2. Величины L_s и C_s определяются из соотношений (см. (2.2))

$$L_s \approx R_0 N/\omega_0, \quad C_s \approx 1/R_0 N\omega_0. \tag{2.5}$$

Сравнивая выражения (2.3) — (2.5), нетрудно получить следующее полезное соотношение: $K^2_{\text{эм}} \approx C_s/(C_s+C_0)$.

Для обеспечения полного преобразования мощности электрического сигнала, поступающего от генератора, в мощность излучаемых акустических волн, необходимо осуществить электрическое согласование ВШП с внутренним сопротивлением генератора $R_{\text{г}}$, в роли которого обычно выступает коаксиальная линия передачи с волновым сопротивлением 50 Ом. Для этого нужно удовлетворить известному равенству $R_0 = R_{\text{г}}$, что можно сделать, например, за счет изменения величин b и N, и компенсировать статическую емкость C_0 включаемой параллельно или последовательно с ВШП внешней индуктивностью L_0. При выполнении указанных условий эффективность преобразования η, определяемая как отношение мощности возбуждаемых акустических волн $P_{\text{ак}}$ к подводимой на ВШП электрической мощности $P_{\text{эл}}$, в принципе может достигать единицы.

Так как включение согласующей индуктивности приводит к некоторому сужению результирующей полосы частот эффективной работы ВШП, желательно подобрать величину N таким образом,

чтобы ширина полосы была максимально возможной. Например, при параллельном включении согласующей индуктивности, удовлетворяющей условию $\omega_0 L_0 = 1/\omega_0 C_0$, относительная полоса пропускания электрической цепи, образуемой элементами L_0, C_0 и R_0, определяется выражением $(2\Delta\omega/\omega_0)_{эл} = 1/Q_{эл}$, где $Q_{эл} = \omega_0 C_0 R_0$. Величину $Q_{эл}$ принято называть *электрической добротностью* согласованного ВШП. С учетом выражений (2.3) и (2.4) получаем $(2\Delta\omega/\omega_0)_{эл} \sim K^2_{эм} N$, т. е. с ростом числа электродных пар полоса электрической цепи увеличивается. Полоса же пропускания, определяемая резонансными свойствами ВШП (ее часто называют «акустической» полосой, в отличие от «электрической» полосы, определяемой контуром L_0, C_0, R_0), как мы видели выше, равна $1/Q_{ак} = 1/N$. Таким образом, при малых N полоса пропускания согласованного ВШП определяется электрической полосой, а при больших N — акустической. Очевидно, что существует некоторое оптимальное число пар электродов $N_{опт}$, определяемое из условия $(2\Delta\omega/\omega_0)_{эл} = (2\Delta\omega/\omega_0)_{ак}$, которое обеспечивает максимальную полосу эффективной работы согласованного ВШП в выбранном направлении и материале. Легко видеть, что $N_{опт} \sim \sqrt{1/K^2_{эм}}$. Более точное выражение имеет вид [9, 11] $N_{опт} \approx \sqrt{\pi/4K^2_{эм}}$. Например, для возбуждения ПАВ в направлении X Y-среза кристаллического кварца $K^2_{эм} \approx 0{,}0018$ и $N_{опт} \approx 18$, а для направления Z Y-среза кристалла ниобата лития (YZ—$LiNbO_3$) $K^2_{эм} \approx 0{,}05$ и $N_{опт} \approx 4$.

Следует помнить, что величина N определяет не только значение полосы пропускания ВШП, но и влияет на условие электрического согласования через R_0. Поэтому после определения $N_{опт}$ необходимо обеспечить выполнение равенства $R_0 \approx R_г$ с помощью выбора длины электродов b. Так, для рассмотренного выше случая кристаллического кварца соответствующее значение длины $b_{опт} \approx 19\lambda$, а для YZ—$LiNbO_3$ $b_{опт} \approx 108\lambda$. Чрезмерное уменьшение b нежелательно, так как это приводит к уменьшению прожекторной зоны и к увеличению дифракционной расходимости возбуждаемой поверхностной волны. Такая ситуация может иметь место для очень слабых пьезоэлектриков, например для кристалла окиси бериллия [11]. Для этого кристалла $N_{опт} \approx 256$ и $b_{опт} \approx 1\lambda$. Чтобы избежать этих нежелательных явлений, в ряде случаев приходится прибегать к использованию согласующего трансформатора.

Если при возбуждении ПАВ не преследовать цель получения эффективного преобразования в максимально широкой полосе частот, то можно обойтись и без согласующей индуктивности, уменьшая сопротивление излучения R_0 не за счет увеличения b, а путем увеличения N. Так как $R_0 \sim 1/(\omega_0 K^2_{эм} b N^2)$, а $(1/\omega_0 C_0) \sim (1/\omega_0 b N)$, то при достаточно больших N, а именно, при $K^2_{эм} N \leqslant 1$, значение R_0 становится сравнимым с $1/\omega_0 C_0$ и эффективность преобразования существенно возрастает, достигая нескольких десятков процентов. Для оценок порядка величины η преобразователя, работающего без согласующей индуктивности, можно пользоваться простой формулой, полученной с помощью линейной аппроксимации полной за-

висимости $\eta(N)$ в окрестности точки перегиба и справедливой при $R_0 \gg R_г$, т. е. для не очень длинных электродов:

$$\eta \approx BK^2_{эм}N. \qquad (2.6)$$

Здесь $B(l/m)$ — безразмерная функция от l/m, имеющая максимум, равный четырем, при $l/m=1/2$, и обращающаяся в нуль при $l/m=0$ и $l/m=1$. Из выражения (2.6) следует, что в рассмотренном приближении η не зависит ни от $R_г$, ни от длины электродов b, и для получения достаточно эффективного преобразования необходимо только увеличивать значение N.

Например, в случае ПАВ, распространяющейся в направлении оси X Y-среза кристалла кварца, для эффективного возбуждения ($\eta \sim 1$) необходимо $N \sim 140$. Для направления Z Y-среза кристалла $LiNbO_3$ должно быть $N \sim 5$, что близко к значению $N_{опт}$, обеспечивающему максимальную полосу работы ВШП в согласованном режиме (см. выше). Это говорит о том, что в сильных пьезоэлектриках отсутствие согласующей индуктивности не приводит к значительному ухудшению эффективности преобразования.

Следует напомнить, что все приведенные выше соотношения являются приближенными. Особенно это относится к сильным пьезоэлектрикам, в которых существенную роль играет неучтенное в (2.1)—(2.5) взаимное влияние электродов друг на друга, переизлучение и рассеяние энергии. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в работах [19—22] и приведенной там библиографии.

Технология нанесения встречно-штыревых преобразователей на поверхность обычно опирается на фотолитографические методы. Место расположения преобразователя вначале покрывается тонкой металлической пленкой (например, путем вакуумного напыления). Затем на пленку наносится фоторезист, на который через фотомаску экспонируется рельеф преобразователя. После этого в результате травления получается нужная структура. С помощью оптических методов засветки фоторезиста удается получить минимальную ширину штырей ~ 1 мкм (ограничение за счет дифракционных искажений), что соответствует основной частоте ВШП порядка 1—2 ГГц. Для изготовления более высокочастотных преобразователей пригодны методы электронной или рентгенолитографии.

Сказанное относилось к возбуждению и приему ПАВ непосредственно на поверхности пьезоэлектрического звукопровода, являющегося одновременно и средой распространения волны, и устройством преобразования электрической энергии в механическую. Именно этот способ из-за своей высокой технологичности и возможности построения планарных устройств получил наибольшее распространение в акустоэлектронике. В ряде случаев, однако, использование дорогостоящих пьезокристаллов нецелесообразно и необходимы (особенно в исследовательских целях) другие методы возбуждения высокочастотных поверхностных волн.

К наиболее известным методам возбуждения и приема ПАВ в непьезоэлектриках относится так называемый *метод клина* (рис. 12.3, *а*), принцип действия которого заключается в перекачке

энергии объемной волны в энергию связанной с ней волны утечки на границе подложки и клина. Последняя затем преобразуется в рэлеевскую волну [23]. Пусть в клине возбуждается продольная объемная волна с длиной λ_V. Если угол клина θ несколько больше $\theta_{кр}$, где $\theta_{кр}$ удовлетворяет равенству $\lambda_V/\sin\theta_{кр}=\lambda$, т. е. длина следа объемной волны в клине близка к длине рэлеевской волны в подложке, то эффективность перекачки оказывается максимальной и при соответствующей длине L основания клина ($L\,\mathrm{Im}\,k\sim 1$) теоретически может достигать около 80%. Более простая трактовка процесса возбуждения ПАВ методом клина, базирующаяся на приближении заданного поля, состоит в рассмотрении нижней плоскости клина как периодической системы механических напряжений, создаваемых падающей волной [24]. В этом приближении эффективность максимальна при $\theta=\theta_{кр}$.

Эффективный метод возбуждения и детектирования ПАВ был предложен А. Г. Соколинским [24]. Он заключается в создании

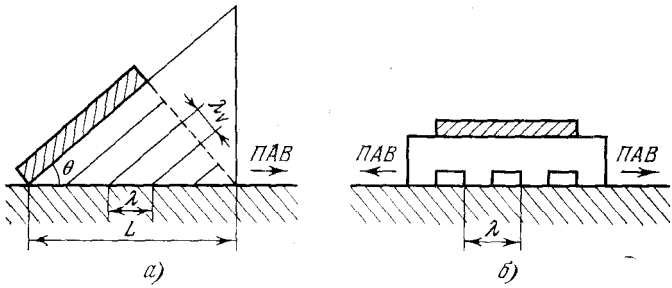


Рис. 12.3. Возбуждение и детектирование ПАВ с помощью клина (*а*) и гребенки (*б*).

пространственно периодических нагрузок на поверхности с помощью находящейся с ней в акустическом контакте металлической гребенки (рис. 12.3, *б*). В силу симметрии устройства, как и в случае ВШП, поверхностные волны излучаются в обе стороны от гребенки. Описанные выше преобразователи благодаря своей мобильности удобны для экспериментальных исследований с поверхностными волнами. К их недостаткам следует отнести прежде всего плохую технологичность.

В некоторой степени свободен от этого метод, предложенный Хэмфрисом и Эшем [25], в котором используется рассеяние объемных волн в поверхностные и обратно на периодических неоднородностях, обычно в виде канавок, вытравленных на поверхности (рис. 12.4). Такой метод оказывается достаточно технологичным и может быть использован даже в пьезоэлектриках для возбуждения поверхностных волн гигагерцевого диапазона (вплоть до 10 ГГц [26]). При этом он обладает определенным преимуществом перед ВШП — малой чувствительностью к дефектам изготовления. Подробное исследование этого метода проводилось теоретически и экспериментально в работе [27] и теоретически в работах [28—30].

Перспективным для экспериментов в физике твердого тела является возбуждение ПАВ модулированным по интенсивности лазерным излучением. Основным преимуществом этого способа является его бесконтактность и возможность широкой перестройки частоты за счет изменения частоты модуляции лазерного пучка. Основным механизмом возбуждения обычно оказывается тепловое расширение среды при поглощении в ней светового излучения — так называемый термооптический механизм. Эффективность возбуждения может быть значительно увеличена, если засветку сделать пространственно периодической. Экспериментально описанный способ исследовался в работах [31, 32] для импульсной засветки и в работе [33] для случая гармонической модуляции лазерного излучения. Теоретически этот вопрос изучался в работе [34]. (Подробнее о термооптическом возбуждении говорится в § 7 гл. 13.)

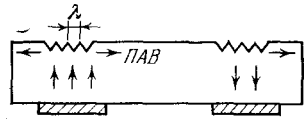


Рис. 12.4. Возбуждение и прием ПАВ за счет рассеяния на периодических неоднородностях.

§ 3. Линии задержки и фильтры, использующие встречно-штыревые преобразователи

Простейшая линия задержки, состоящая из пьезокристаллической подложки с двумя нанесенными на нее встречно-штыревыми преобразователями (см. рис. 12.1), уже рассматривалась нами. При подаче на любой из одинаковых преобразователей радиоимпульса с частотой заполнения, равной центральной частоте преобразователей, на выходе появится электрический сигнал, который будет задержан на время τ пробега поверхностной волны от передающего преобразователя до приемного. При этом, однако, не весь излучаемый сигнал будет принят вследствие *двунаправленности излучателя* и из-за наличия отражений от приемного преобразователя. Так, если поверхностная волна попадает на приемный ВШП, согласованный с электрической нагрузкой, то только половина падающей энергии будет принята. Четверть отразится и четверть пройдет через преобразователь.

Сказанное легко пояснить с помощью *матриц рассеяния* S, сопоставляемых каждому ВШП [8]. Для этого рассмотрим ВШП как устройство с тремя входами — двумя акустическими, которые обозначим индексами 1 и 2, и одним электрическим, обозначаемым индексом 3. Напомним, что матрица рассеяния связывает амплитуду сигнала, приходящего на какой-либо из входов, с амплитудами всех выходящих сигналов. Из симметрии ВШП следует, что энергия, падающая на согласованный электрический вход 3, распределяется поровну между двумя акустическими входами 1 и 2 (двунаправленность). Из обратимости ВШП следует, что и, наоборот, два акустических сигнала одинаковой амплитуды и фазы, приходящие на входы 1 и 2, дадут на выходе 3 электрический сигнал удвоенной мощности. Отсюда следует, что в общем случае для несогласован-

ного электрического входа матрица рассеяния должна иметь вид

$$S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \pm s_{13} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} \\ \pm s_{13} & s_{13} & s_{33} \end{bmatrix}. \qquad (3.1)$$

Поскольку внутри преобразователя энергия не исчезает и не накапливается, матрица S должна быть унитарной, т. е.

$$SS^*=I. \qquad (3.2)$$

При согласованном электрическом входе ($s_{33}=0$) из (3.1) и (3.2) вытекает

$$2|s_{13}|^2=1,\ |s_{11}|^2+|s_{12}|^2+|s_{13}|^2=1,\ s_{13}(s_{11}^*\pm s_{12}^*)=0, \qquad (3.3)$$

откуда нетрудно получить

$$|s_{13}|^2=1/2,\ |s_{11}|^2+|s_{12}|^2=1/2,\ |s_{11}|^2=|s_{12}|^2=1/4. \qquad (3.4)$$

Если входным сигналом является сигнал акустический, приходящий на вход 2 с амплитудой a_2, то для выходных сигналов получим $b_1=s_{12}a_2$, $b_2=s_{11}a_2$, $b_3=s_{13}a_2$. Из соотношений (3.4) как раз и следует, что $b_1^2=a_2^2/4$, $b_2^2=a_2^2/4$, $b_3^2=a_2^2/2$. Если еще учесть, что при возбуждении ПАВ половина излучаемой мощности теряется из-за акустического излучения в противоположном направлении, то очевидно, что общие *вносимые потери* в линии (без учета потерь на распространение ПАВ) для первого снимаемого с ВШП выходного электрического сигнала составляют 6 дБ. Отраженный сигнал, испытав вторичное отражение на передающем ВШП, очевидно, также будет принят на выходе как *ложный эхо-импульс*, причем его амплитуда будет только на 12 дБ ниже амплитуды основного задержанного сигнала. Так как обычно ложные эхо-импульсы не желательны, необходимо принимать меры по снижению их уровня. Это может быть достигнуто, например, при помощи рассогласования ВШП по электрическим выходам. Однако при этом возрастают общие потери для основного задержанного сигнала. Аналогичный эффект достигается и в том случае, если нанести на подложку звукопоглощающую пленку или использовать материалы с большим затуханием ПАВ.

Более эффективным средством борьбы с описанными ложными сигналами, называемыми также *сигналами трехкратного прохождения*, является использование однонаправленных ВШП [9]. Последние представляют собой систему из двух обычных ВШП, расположенных последовательно вдоль направления распространения ПАВ и смещенных друг относительно друга на расстояние $(n+1/4)\lambda$, где $n=1, 2\ldots$ Если высокочастотные напряжения, подаваемые на каждую из секций, сдвинуты по фазе на $\pm\pi/2$, то система становится однонаправленной, так как в зависимости от знака фазового сдвига поверхностные волны, возбуждаемые отдельными ВШП, будут складываться в фазе при распространении в одну сторону и в противофазе — в другую. То же самое можно сказать и о работе однонаправленных ВШП в режиме приема. Почти вся посту-

пающая на ВШП энергия ПАВ преобразуется в этом случае в энергию электрического сигнала, а коэффициенты отражения и прохождения ПАВ через ВШП весьма малы. В результате в линии с двумя однонаправленными ВШП достигается почти полное подавление сигналов тройного прохождения и, кроме того, значительно снижаются полные вносимые потери. Основным недостатком однонаправленных ВШП является необходимость использования фазовращателей, что приводит к усложнению конструкции устройства. Существуют и другие методы борьбы с ложными эхо-импульсами (см., например, [35, 36]).

Частотная характеристика линии задержки на ПАВ в отсутствие ложных отражений практически полностью определяется встречно-штыревыми преобразователями. Зависимость затухания ПАВ от частоты обычно менее существенна. Тем не менее в высококачественных линиях задержки она должна приниматься во внимание, если времена задержки достаточно велики (~100 мкс и выше). Типичные значения времен задержки в малогабаритных устройствах на ПАВ ограничены размерами кристаллических подложек и составляют 1—20 мкс *). Вблизи нижней границы этого диапазона линии задержки на ПАВ можно использовать как *полосовые фильтры* **), частотные характеристики которых определяются произведением двух ВШП. Если оба ВШП одинаковы, то результирующая частотная характеристика будет иметь максимум на центральной частоте ВШП, а относительная полоса пропускания будет равна $1/2N$, где N — число пар электродов в каждом ВШП. Если резонансные частоты ВШП отличаются, то получающееся устройство эквивалентно радиотехническому фильтру из двух расстроенных контуров.

Гораздо более широкие перспективы реализации практически любых частотных характеристик открывает возможность использования апериодических ВШП с амплитудным взвешиванием вклада каждого электрода (например, в результате изменения его длины). Сказанное легко понять, если воспользоваться предложенной в работе [37] простой моделью, в которой ВШП представляется в виде набора бесконечно тонких (дельтаобразных) источников. Тогда *импульсную характеристику неэквидистантного преобразователя со взвешиванием* можно представить в форме (приемный ВШП считается широкополосным)

$$h(t) = \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n A_n \delta(t - t_n), \qquad (3.5)$$

где A_n — амплитуды излучаемых каждым электродом импульсов, пропорциональные величине перекрытия соседних электродов, t_n — время задержки импульса от n-го электрода на выходе ВШП. Об-

*) При необходимости время задержки может быть значительно увеличено за счет использования сложных траекторий лучей ПАВ (см., например, обзор [7]).

**) Постоянная задержка τ, как известно, не играет существенной роли в процессе фильтрации.

щее число импульсов в последовательности, очевидно, равно $2N+1$. Частотная характеристика ВШП, или его *передаточная функция* $H(\omega)$ определяется как преобразование Фурье от (3.5):

$$H(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} (-1)^n A_n \exp(-i\omega t_n).$$

Если $t_n = nT_0$ ($T_0 = d/2v$ — задержка между соседними электродами), т. е. преобразователь периодический с периодом d, то

$$H(\omega) \approx T_0^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp[-i(\omega - \omega_0)t]\, dt, \qquad (3.6)$$

где $\omega_0 = \pi/T_0 = 2\pi v/d$ — центральная частота преобразователя. Таким образом, частотная характеристика эквидистантного преобразователя представляет собой преобразование Фурье от закона взвешивания электродов. В частности, для преобразователя без взвешивания ($A(t) = \text{const}$), полагая пределы интегрирования от $-T$ до T, где $T = NT_0 = Nd/2v$, из (3.6) нетрудно получить выражение (2.2) для модуля частотной характеристики ВШП в случае больших N. Ясно, что в рамках используемой модели весь процесс синтеза заданной частотной характеристики $H(\omega)$ состоит в определении закона взвешивания, т. е. в вычислении обратного преобразования Фурье от $H(\omega)$.

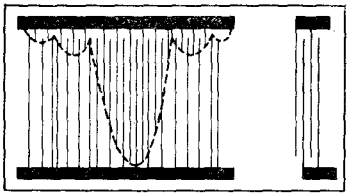


Рис. 12.5. Полосовой фильтр на ПАВ с прямоугольной частотной характеристикой.

На рис. 12.5 изображен полосовой фильтр на ПАВ с частотной характеристикой, близкой к прямоугольной. Функция взвешивания на одном из ВШП при этом имеет форму $\sin x/x$. Отметим, однако, что описанным способом можно синтезировать только симметричные частотные характеристики, поскольку в этом случае соответствующее преобразование Фурье дает вещественные функции $A(t)$. В противном случае $A(t)$ содержит неустранимую мнимую часть, которую невозможно реализовать с помощью простого взвешивания эквидистантных электродов. При этом целесообразны иные методы синтеза, например с использованием апериодических ВШП.

Выше рассматривался один из простейших способов взвешивания (или аподизации) электродов ВШП — посредством изменения перекрытия. Основной его недостаток в том, что при прохождении поверхностной волны через штыри различной длины ее фазовый фронт вследствие изменения скорости на металлизированной поверхности перестает быть плоским. В результате частотная характеристика фильтра искажается. Один из эффективных методов борьбы с этим явлением состоит в использовании «холостых» электродов, не соединенных с источником электрического напряжения. Возможно также раздельное питание электродов постоянной длины через вспомогательную встречно-штыревую систему со взве-

шиванием последней за счет перекрытия. Эта вспомогательная система располагается параллельно рабочим электродам, и связь между ними осуществляется через межэлектродные емкости — так называемое емкостное взвешивание электродов [9].

Если величину взвешивания электродов A_n поддерживать постоянной, но изменять расстояние между электродами, то нетрудно получить так называемый *дисперсионный фильтр*, или *фильтр сжатия импульсов*, временная задержка τ в котором будет зависеть от частоты сигнала (рис. 12.6). Такие фильтры используются при обработке частотно-модулированных сигналов различных видов. Например, в случае линейного частотно-модулированного сигнала с крутизной девиационной характеристики γ_d время t_n в выражении для импульсной характеристики (3.5) должно меняться по закону [11]

$$t_n = -f_0/\gamma_d + [(f_0/\gamma_d)^2 + n/\gamma_d]^{1/2},$$

где $f_0 = \omega_0/2\pi$ — центральная частота. При этом фильтр обладает требуемой линейной частотной характеристикой и квадратичной фазовой. При подаче линейного частотно-модулированного сигнала на согласованный с ним дисперсионный фильтр на выходе фильтра будет формироваться узкий импульс большой амплитуды. С другой стороны, импульсная характеристика рассматриваемого фильтра представляет собой линейный частотно-модулированный сигнал.



Рис. 12.6. Дисперсионный фильтр на ПАВ с апериодическим ВШП.

Если отдельные группы штырей располагать на некотором рас-

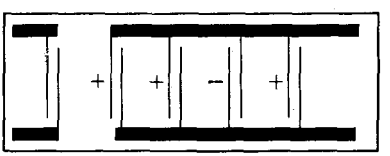


Рис. 12.7. Согласованный фильтр для фазоманипулированных сигналов.

стоянии друг от друга и определенным образом менять их полярность (рис. 12.7), то импульсная характеристика получившегося фильтра будет представлять собой последовательность радиоимпульсов, начальные фазы которых принимают значения «0» или «π» в зависимости от заданного кода. Получающийся сигнал принято называть фазоманипулированным или баркеровским. Ясно, что при его подаче обратно на рассмотренную систему штырей, которая, очевидно, согласована с рассматриваемым сигналом, все импульсы просуммируются в фазе и на выходе будет принят один результирующий импульс большой амплитуды. Подобные устройства в настоящее время широко используются в *системах кодирования и декодирования*.

Наряду с описанными основными типами фильтров на ПАВ, использующих избирательные свойства встречно-штыревых преобра-

зователей, существует множество их модификаций, предназначенных для выполнения тех или иных конкретных функций. Подробнее об этом можно прочитать в обзорах и монографиях [4, 7, 9—16, 37].

§ 4. Рассеяние поверхностных волн. Резонаторы и фильтры на основе отражательных структур

Важную роль в акустоэлектронике играют взаимодействия ПАВ с различного вида неоднородностями подложки, в частности рассеяние на периодических и квазипериодических совокупностях неоднородностей поверхности, представляющих собой *дифракционные решетки* для ПАВ. Еще в 1967 г. [38] было предложено использовать периодические решетки в качестве *распределенных отражателей* ПАВ при создании многоотводных линий задержки. Позднее были разработаны более сложные структуры, у которых

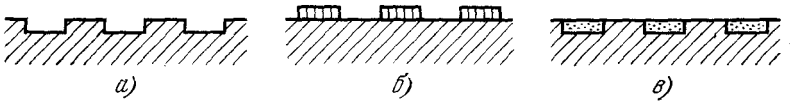


Рис. 12.8. Типы рассеивателей ПАВ: *а*) канавки, *б*) металлические или диэлектрические полоски, *в*) неоднородности, получаемые внедрением примесей.

отражательная способность изменялась по желаемому закону, позволяя формировать требуемую амплитудно-частотную характеристику решетки и создавать высококачественные полосовые фильтры [39] и фильтры сжатия частотно-модулированных импульсов [40]. В настоящее время одним из наиболее важных приложений дифракционных решеток ПАВ, работающих в режиме отражения, стали резонаторы на поверхностных волнах [41], в которых решетки выполняют ту же роль, что и зеркала в интерферометре Фабри — Перо. Периодические решетки пока являются единственным средством, обеспечивающим высокий коэффициент отражения ПАВ, практически приближающийся к единице.

Физическая природа рассеивателей поверхностной волны может быть различной. Они могут использовать изменение геометрии поверхности (канавки); локальное «закорачивание» электрического поля на поверхности пьезоэлектриков или инерционную нагрузку, действие которой добавляется к геометрическому и электрическому факторам (металлические или диэлектрические полоски на поверхности твердого тела); введение примесей в подложку с помощью ионной имплантации или диффузии и т. д. На рис. 12.8 изображены периодические решетки, сформированные рассеивателями описанных выше типов.

Первые работы, в которых исследовалось рассеяние ПАВ на различных дефектах поверхности, были выполнены в конце 50-х годов [42, 43] применительно к нуждам сейсмологии и ультразвуковой поверхностной дефектоскопии. С появлением акустоэлектронных устройств активность исследований в этой области значи-

тельно увеличилась (см., например, [44—47]) и были получены многочисленные данные для различных видов рассеивателей.

С целью пояснения физики процесса рассмотрим рассеяние рэлеевской волны на одиночной неоднородности типа канавки на поверхности твердого тела. Неоднородности подобного рода, называемые топографическими, широко распространены на практике вследствие высокого качества основанных на них устройств и простоты изготовления. Пусть на канавку падает нормально гармоническая рэлеевская волна (рис. 12.9), амплитуды смещения которой равны $u_i^{(0)}(\boldsymbol{x})$. Полное поле смещений u_i в упругом полупространстве должно удовлетворять уравнению движения (9.1.2) и однородным граничным условиям на свободной поверхности

$$\sigma_{nn}=\sigma_{nt}=0, \qquad (4.1)$$

где $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{t}$ — единичные векторы нормали и касательной к поверхности. Причину рассеяния рэлеевской волны на канавке можно пояснить тем, что в областях с большой кривизной поверхности (по сравнению с волновым числом) поле одной падающей волны не может удовлетворить граничным условиям (4.1). В результате этого появляется отраженная рэлеевская волна, а в глубь среды излучаются продольные и поперечные объемные волны. Если рассеивающее препятствие достаточно мало, т. е. функция $f(x_1)$, описывающая форму препятствия, удовлетворяет условиям $|f(x_1)k|\ll 1$ и $|f'(x_1)|\ll 1$, то в большинстве случаев рассеянные поля могут быть рассчитаны с помощью первого (борновского) приближения теории возмущений.

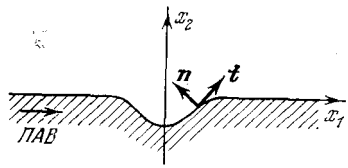


Рис. 12.9. Геометрия задачи о рассеянии ПАВ на топографической неоднородности.

Воспроизведем основные идеи расчетов, опираясь на работу [45], в которой наличие свободной границы учитывается путем введения зависящих от координат упругих констант

$$c_{ijkl}(\boldsymbol{x})=c_{ijkl}\Theta[x_2-f(x_1)], \qquad (4.2)$$

где $\Theta(x_2)$ — ступенчатая функция Хэвисайда. При малых $f(x_1)$ выражение (4.2) может быть разложено в степенной ряд по $f(x_1)$, коэффициентами которого будут производные от соответствующих обобщенных функций:

$$c_{ijkl}(\boldsymbol{x})=c_{ijkl}\Theta(x_2)-f(x_1)\,c_{ijkl}\,\delta(x_2)-\ldots \qquad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в уравнение движения (граничные условия (4.1) при этом удовлетворяются автоматически), получим следующее уравнение для гармонического во времени вектора смещений $u_k(\boldsymbol{x})$:

$$L_{ik}^0(\boldsymbol{x})\,u_k(\boldsymbol{x})=-V_{ik}(\boldsymbol{x})\,u_k(\boldsymbol{x}), \qquad (4.4)$$

где

$$L_{ik}^{(0)}(\boldsymbol{x})=\omega^2\delta_{ik}+\rho^{-1}(\partial c_{ijkl}^{(0)}/\partial x_j)\,\partial/\partial x_l+\rho^{-1}c_{ijkl}^{(0)}\partial^2/\partial x_j\partial x_l$$

— невозмущенный оператор, соответствующий однородному полупространству, $c^{(0)}_{ijkl}=c_{ijkl}\Theta(x_2)$, $V_{ik}(\boldsymbol{x})$ — описывающий препятствие оператор возмущения, связанный с последующими членами ряда (4.3). Его мы для краткости не будем выписывать. С помощью тензора Грина G_{jk}, удовлетворяющего уравнению

$$L^{(0)}_{ik}(\boldsymbol{x})\,G_{jk}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}')=\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{4.5}$$

(см., например, [48]), выражение (4.4) можно привести к эквивалентному интегродифференциальному уравнению:

$$u_i(\boldsymbol{x})=u^{(0)}_i(\boldsymbol{x})-\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}')\,V_{jl}(\boldsymbol{x}')\,u_l(\boldsymbol{x}')\,|_{x_2=0}\,dx'_1, \tag{4.6}$$

где компоненты $u^{(0)}_i(\boldsymbol{x})$ представляют собой решение (4.4) без правой части и описывают рэлеевскую волну, распространяющуюся вдоль свободной поверхности $x_2=0$. Борновское приближение к решению $u_i(\boldsymbol{x})$ получается, если в интеграл (4.6) вместо $u_l(\boldsymbol{x}')$ подставить $u^{(0)}_l(\boldsymbol{x}')$. При этом величины $(V_{jl}u^{(0)}_l)|_{x_2=0}$ под интегралом имеют смысл поверхностных нагрузок, и вычисление рассеянных полей в полупространстве сводится к известной задаче Лэмба о возбуждении упругих волн в ограниченной твердой среде [48]. Чтобы не допускать превышения точности, в выражении для $V_{jl}(\boldsymbol{x})$ следует также ограничиться только членами первого порядка по f и f'. Последующие итерации уравнения (4.6) (одновременно с удержанием членов более высокого порядка в $V_{jl}(\boldsymbol{x})$) в принципе позволяют определить и все высшие (постборновские) приближения. Однако для решения этой задачи уже требуются численные методы, так как определяемый из (4.5) тензор Грина G_{jk} даже для изотропного полупространства представим лишь в виде интегралов, которые могут быть вычислены аналитически только для больших расстояний от источника рассеяния. Ряд полезных заключений об эффектах высших порядков можно, тем не менее, сделать на основании общих закономерностей рассеяния поверхностных волн [49, 50].

Первые подробные расчеты рассеяния ПАВ рэлеевского типа на топографических неоднородностях в рамках первого приближения теории возмущений были проделаны Туаном с сотрудниками (см. [44]) для изотропного твердого тела. При этом были получены аналитические выражения для коэффициентов отражения рэлеевской волны и для диаграмм рассеяния в объем среды. Рассеяние рэлеевских волн на неоднородностях типа канавок и полосок при наклонном падении впервые рассматривалось в работах [46, 51].

Наибольший интерес с точки зрения приложений рассеяния ПАВ в акустоэлектронике представляют *отражательные решетки*, базовыми элементами которых являются рассмотренные выше элементарные рассеиватели. В случае нормального падения ПАВ на решетку ее период d, или расстояние между центрами двух соседних рассеивателей, выбирается равным $\lambda/2$, где λ — длина ПАВ.

При этом поля́, рассеянные каждой неоднородностью в обратном направлении, складываются в фазе (брэгговское отражение) и при достаточно протяженных решетках наступает почти полное отражение ПАВ. В этом случае главным источником потерь при отражении оказывается рассеяние в объем среды. К счастью, как раз при $d \approx \lambda/2$ потери на объемное рассеяние минимальны, так как для объемных волн, излучаемых по нормали к поверхности, элементарные рассеиватели решетки действуют в противофазе.

Коэффициент отражения ПАВ от решетки можно рассчитать матричным методом [41, 52], автоматически учитывающим *многократные перерассеяния* ПАВ на элементах решетки. Каждому рассеивателю при этом сопоставляется четырехкомпонентная матрица рассеяния (излучение в объем среды не учитывается). Затем с помощью каскадного перемножения матриц, соответствующих отдельным рассеивателям, определяется общий коэффициент отражения. Благодаря простоте и наглядности матричного метода с его помощью были впервые получены все основные результаты по теории распределенных отражателей ПАВ [41]. В частности, было показано, что модуль коэффициента отражения от решетки выражается формулой

$$R = \mathrm{th}\,(N\Gamma), \tag{4.7}$$

где N — число канавок в решетке, а Γ — модуль коэффициента отражения от одиночной канавки, который может быть рассчитан с помощью выражения (4.6). Если канавка имеет прямоугольный профиль (при этом (4.6) справедливо лишь в борновском приближении), то $\Gamma = 2c \sin(kl)\, h/\lambda$, где h и l — соответственно высота и ширина канавки, а c — безразмерная постоянная, зависящая от упругих свойств среды. Например, для канавки, вытравленной перпендикулярно к направлению Z Y-среза кристалла ниобата лития (расчет в квазиизотропном приближении) значение c равно 0,34. Из (4.7) видно, что при $N\Gamma \to \infty$ имеет место $R \to 1$, а при $N\Gamma \ll 1$ выражение для R приобретает вид $R = N\Gamma$. В последнем предельном случае многократное рассеяние не играет роли и суммарная отраженная волна представляет собой сумму волн, отраженных каждой канавкой решетки.

Более строгий метод анализа отражательных решеток, основанный на известном в интегральной оптике *методе связанных мод*, был развит в [29, 30, 53]. В работах [54, 55] для расчета рассеяния ПАВ на решетке использовался *модифицированный метод возмущений*, основанный на специальном выборе нулевого приближения к решению. При этом, в частности, была решена задача об отражении рэлеевской волны от решетки при наклонном падении с учетом многократного рассеяния [55].

Простейшим и в то же время наиболее важным для практики устройством, использующим отражение ПАВ от периодических решеток, являются *резонаторы* на ПАВ, образованные двумя отражательными решетками. Типичная конструкция такого резо-

натора представлена на рис. 12.10. Основное преимущество резонаторов на ПАВ перед обычными кристаллическими резонаторами на объемных волнах состоит в том, что изготовление последних для частот свыше 30 МГц вызывает значительные технологические трудности. В то же время изготовление резонаторов на ПАВ, работающих на частотах до 1—2 ГГц, является довольно несложным делом и может быть осуществлено с помощью фотолитографии. Это позволяет использовать резонаторы на ПАВ в качестве высокостабильных эталонов частоты, узкополосных фильтров гигагерцевого диапазона, высококачественных фильтров на основе связанных резонаторов и т. д.

Центральная частота резонатора на ПАВ определяется из обычного условия для интерферометров типа Фабри — Перо,

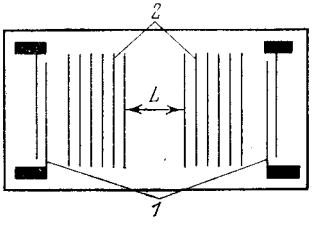


Рис. 12.10. Резонатор на ПАВ: *1* — встречно-штыревые преобразователи, *2* — отражательные решетки.

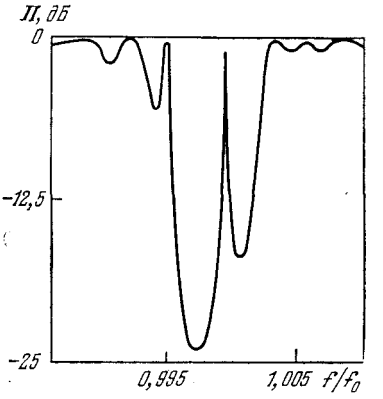


Рис. 12.11. Характеристика пропускания резонатора на ПАВ [41]: $f_0=v/2d=68{,}5$ МГц, $N=200$, $h/\lambda=0{,}014$.

состоящего в том, чтобы в эффективной длине резонансной полости $L_{эфф}=L+2p_п$, где $p_п\approx\lambda/4\Gamma$ — глубина проникновения ПАВ в решетку, укладывалось целое число полуволн. При этом частотный интервал между двумя соседними резонансами полости определяется выражением $\Delta f=v/2L_{эфф}$, где v — скорость ПАВ. Поскольку сами отражательные решетки также обладают резонансными свойствами, так как относительная полоса заграждения решетки пропорциональна $1/N$, то из всех резонансов полости реально существуют один или два. Эти особенности резонатора на ПАВ весьма наглядно иллюстрируются рис. 12.11, на котором изображена типичная характеристика пропускания резонатора с отражателями в виде системы канавок [41] для случая достаточно длинной резонансной полости ($L=101d$). Видно, что потери пропускания П близки к нулю вне полосы заграждения решетки и достигают значительной величины внутри этой полосы, за исключением частот двух попадающих в нее резонансов полости. Побочный резонанс, очевидно, может быть выведен из полосы заграждения за счет сокращения длины резонансной полости или путем уменьшения полос заграждения решеток.

Добротность Q резонаторов на поверхностных волнах определяется суммарными потерями ПАВ согласно выражению

$$Q^{-1} = \sum_i Q_i^{-1},$$

где Q_i — добротности, обусловленные i-ми механизмами потерь. К этим механизмам относятся потери распространения, вызванные термоупругим и вязкостным затуханием ПАВ в материале подложки и возбуждением звуковых волн в воздухе, находящемся в контакте с подложкой; дифракционные потери; потери за счет пропускания ПАВ отражательными решетками и потери, обусловленные рассеянием в объем среды. Добротность, определяемую только термоупругими и вязкостными потерями, принято называть *добротностью материала* Q_m. Она, очевидно, является предельно достижимой добротностью резонатора. Например, для подложек из YZ-$LiNbO_3$ и ST-кварца величины Q_m на частоте 100 МГц соответственно равны 10^5 и $6 \cdot 10^4$ [56]. Дифракционные потери не играют существенной роли в резонаторах на ПАВ, поскольку они легко могут быть сделаны пренебрежимо малыми за счет увеличения ширины пучка ПАВ. Потери пропускания ПАВ отражательными решетками также чрезвычайно малы при достаточно большом числе рассеивателей, например при $N\Gamma = 3$—5. Потери на объемное рассеяние оказываются наиболее серьезной причиной ограничения добротности резонаторов на ПАВ; однако они могут быть значительно снижены за счет уменьшения величины h/λ, или глубины канавок при соответствующем увеличении их числа. Именно при очень малых h/λ ($\sim 10^{-2}$) были достигнуты значения добротностей в несколько десятков тысяч, что на используемых частотах приближалось к добротностям материала [57, 58]. Отметим, что наиболее высокодобротные резонаторы на ПАВ, изготовленные к настоящему времени [55—58], имели отражательные решетки в виде канавок. Решетки такого типа обладают наименьшими дисперсионными искажениями, а качество поверхностей канавок, обычно получаемых методом ионного травления, оказывается очень высоким. Резонаторы, имеющие решетки из отражающих металлических или диэлектрических полосок, характеризуются существенно меньшими значениями добротностей, что связано, во-первых, с наличием довольно сильной дисперсии, вызываемой полосками, которая приводит к искажениям фронта поверхностной волны при ее прохождении через решетку. Кроме того, в протяженных металлических полосках, расположенных на поверхности пьезоэлектриков, имеют место омические потери, также снижающие добротность резонаторов.

Другим важным применением рассеивающих структур ПАВ являются дисперсионные фильтры, образованные канавками. Хотя для создания дисперсионных фильтров могут использоваться и апериодические встречно-штыревые преобразователи (§ 3), устройства на основе рассеивающих структур обладают более высокими показателями, так как они свободны от целого ряда искажений

поля ПАВ [40]. Например, *коэффициент сжатия частотно-модулированных импульсов*, представляющий собой произведение полосы пропускания фильтра на изменение длительности задержки, у фильтров с отражательными решетками оказывается значительно выше, чем у фильтров с апериодическими ВШП, и к настоящему времени достигает десятков тысяч.

Типичный дисперсионный фильтр с отражательными решетками изображен на рис. 12.12. Принцип действия его основан на изменении времени задержки с частотой. Расчет передаточных характеристик таких фильтров в принципе ничем не отличается от случая фильтров с ВШП. Многократные отражения, которые в данном случае нежелательны, и другие эффекты высших порядков обычно оказываются малыми, и ими можно либо пренебречь, либо компенсировать их с помощью простых эмпирических приемов [40]. Потери за счет излучения объемных волн не играют в дисперсионных фильтрах значительной роли, поскольку в большинстве случаев они не приводят к ухудшению передаточной функции устройства, а влияют лишь на общие вносимые потери складывающиеся, в основном из потерь прохождения поверхностной волны через решетки.

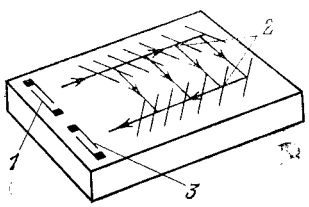


Рис. 12.12. Дисперсионный фильтр на ПАВ с отражательными решетками: *1* — входной ВШП, *2* — отражательные решетки, *3* — выходной ВШП.

Рассеивающие структуры ПАВ могут с успехом применяться и для создания полосовых фильтров. Однако работ, посвященных этому вопросу, относительно немного (см. обзор [40]). По-видимому, это объясняется тем, что полосовые фильтры на отражательных решетках не имеют существенных преимуществ перед устройствами на ВШП (см. § 3) и могут конкурировать с последними лишь в тех случаях, когда условия эксплуатации накладывают какие-либо ограничения на выбор материалов подложек или к характеристикам фильтров предъявляются повышенные требования. Отметим, что привлекательной особенностью всех приборов с отражательными решетками является то, что в принципе они не требуют пьезоэлектрических подложек. Это позволяет с большей свободой подходить к выбору материала подложек для удовлетворения различных специфических требований, например обеспечения высокой температурной стабильности.

§ 5. Усиление звука дрейфом носителей в пьезополупроводниках и слоистых структурах

Ранее мы ограничивались в основном случаем диэлектрических материалов. Наличие свободных носителей заряда приводит к ряду новых важных для практики акустических эффектов, в частности к *дополнительному (акустоэлектронному) поглощению* или *усилению звуковых волн*. Ниже мы кратко обсудим основные черты

этих явлений на примере пьезополупроводниковых кристаллов, в которых взаимодействие звука с носителями (электронами проводимости и дырками) осуществляется в основном через пьезоэффект. Другие механизмы взаимодействия, в том числе связь через деформационный потенциал, при этом гораздо менее существенны, по крайней мере для частот ниже 10^{11} Гц.

Теоретически взаимодействие звука со свободными носителями заряда *(акустоэлектронное взаимодействие)* наиболее просто описывается в двух предельных случаях соотношения волнового числа звука k и длины свободного пробега носителей l_e: $kl_e \ll 1$ и $kl_e \gg 1$. В первом случае звуковую волну можно рассматривать как классический объект, создающий возмущения плотности электронного газа (гидродинамическая модель), во втором необходимо квантовое рассмотрение отдельных *электрон-фононных взаимодействий*. Поскольку неравенство $kl_e \ll 1$ обычно выполняется вплоть до частот $\sim 10^{10}$ Гц, в дальнейшем изложении мы ограничимся гидродинамическим приближением. Для упрощения выкладок будем также считать, что акустическая волна распространяется в одном из симметричных направлений пьезополупроводникового кристалла и вследствие этого является либо чисто продольной, либо чисто поперечной.

Поскольку электрическое поле, сопровождающее упругую волну в неограниченном пьезоэлектрике, направлено вдоль вектора волновой нормали (в дальнейшем будем считать, что последний ориентирован вдоль оси x), то задачу можно рассматривать как одномерную [59]. При этом уравнения состояния пьезокристалла (§ 4 гл. 9) удобно записать в виде (опуская векторные и тензорные индексы)

$$\sigma = cu' - eE, \tag{5.1}$$

$$D = eu' + \varepsilon E, \tag{5.2}$$

где σ, $u' = \partial u/\partial x$, E и D — упругое напряжение, деформация, напряженность электрического поля и индукция, u — механическое смещение, а c, e и ε — соответствующие данному направлению и типу волны компоненты модулей упругости, пьезомодулей и диэлектрической проницаемости. Например, в случае распространения сдвиговой волны в базисной плоскости кристаллов CdS или ZnO (с поляризацией вдоль гексагональной оси) $c = c_{1313}$, $e = e_{113}$. К уравнениям (5.1) и (5.2) следует добавить механическое уравнение движения

$$\rho \ddot{u} = \partial\sigma/\partial x, \tag{5.3}$$

уравнение для индукции (уравнение Пуассона)

$$\partial D/\partial x = -qn, \tag{5.4}$$

уравнение непрерывности для плотности заряда свободных электронов *)

$$\partial j/\partial x = q\dot{n} \tag{5.5}$$

*) Мы предполагаем, что рассматривается собственный полупроводник n-типа. Однако результаты справедливы и для подвижных дырок.

и уравнение для тока

$$j = q\,(n_0 + \tilde{n})\,\mu E + q\mathscr{D}\,\partial n/\partial x, \qquad (5.6)$$

где ρ — плотность кристалла, q — заряд электрона, μ и $\mathscr{D}$ — подвижность и коэффициент диффузии, $n = n_0 + \tilde{n}$ — концентрация электронов, n_0 — концентрация в отсутствие звуковой волны.

Предположим теперь, что в направлении x к кристаллу приложено внешнее постоянное электрическое поле E_0, создающее в нем дрейф электронов (рис. 12.13). Тогда полное электрическое поле можно представить в виде $E = E_0 + \tilde{E}$. Такой же вид, очевидно, примет и выражение для индукции $D = D_0 + \tilde{D}$ и т. д. Решение системы (5.1) — (5.6) будем искать в виде плоских волн, полагая, что все переменные представимы в форме

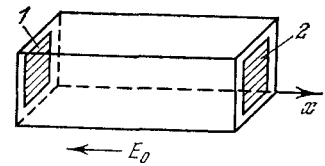


Рис. 12.13. Распространение звуковой волны в пьезополупроводниковом кристалле при наличии дрейфа носителей: *1* — акустический вход, *2*— акустический выход.

$$y^{(m)} = A^{(m)} \exp\left[i\,(kx - \omega t)\right]. \qquad (5.7)$$

Подставляя выражения вида (5.7) в уравнения (5.1) — (5.6) и пренебрегая нелинейным членом $\sim \tilde{n}\tilde{E}$ в (5.6), что можно сделать для малых интенсивностей звука, придем к системе шести линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных $A^{(m)}$, где $m = 1, 2, \ldots, 6$. Приравнивая нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение для распространяющихся в пьезополупроводнике акустических волн. В приближении слабой электромеханической связи $K^2_{\text{эм}} = e^2/c\varepsilon \ll 1$ дисперсионное уравнение приобретает особенно простой вид:

$$k = k(\omega) = \frac{\omega}{v_0}\left[1 - \frac{K^2_{\text{эм}}}{2}\left(1 - \frac{\omega_c/\omega\gamma}{\omega_c/\omega\gamma + \omega/\omega_D\gamma - i}\right)\right], \qquad (5.8)$$

где введены следующие обозначения: $\omega_c = n_0 q\mu/\varepsilon$ — *частота релаксации проводимости*, $\omega_D = v_0^2/\mathscr{D}$ — *частота диффузии электронов*, $\gamma = 1 + \mu E_0/v_0 = 1 - v_d/v_0$ — *параметр дрейфа*, $v_0 = (c/\rho)^{1/2}$ — скорость звука в пренебрежении пьезоэффектом, v_d — *скорость дрейфа электронов*. Очевидно, зависимость $k(\omega)$ имеет типично релаксационный характер. Разделяя действительную и мнимую части (5.8), нетрудно получить выражения для скорости v и затухания α звука:

$$v = v_0\left\{1 + \frac{K^2_{\text{эм}}}{2}\,\frac{1 + (\omega_c/\gamma^2\omega_D)\,[1 + \omega^2/\omega_c\omega_D]}{1 + (\omega_c^2/\gamma^2\omega^2)[1 + (\omega^2/\omega_c\omega_D)^2]^2}\right\}, \qquad (5.9)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{v_0}\,\frac{K^2_{\text{эм}}}{2}\,\frac{\omega_c/\gamma\omega}{1 + (\omega_c^2/\gamma^2\omega^2)[1 + (\omega^2/\omega_c\omega_D)^2]^2}. \qquad (5.10)$$

Выражения (5.9) и (5.10) были впервые получены в работах Хатсона и Уайта [60] и Уайта [61] (см. также обзоры [59, 62, 63]).

Наиболее интересными в (5.9) и (5.10) представляются зависимости v и α от параметра дрейфа γ (рис. 12.14 и 12.15). При $\gamma = 0$

скорость v имеет минимум, близкий к v_0, что легко пояснить с помощью понятия об эффективной частоте звука $\gamma\omega$, распространяющегося в движущейся среде (доплеровское смещение частоты). В самом деле, при $\gamma=0$ эффективная частота равна нулю и электроны успевают прийти в равновесие со звуковой волной, экранируя сопровождающее ее электрическое поле. При $|\gamma|\gg 1$ эффективная частота достаточно велика. Поэтому пьезоэффект не компенсируется и скорость волны близка к значению $v_0(1+K^2_{эм}/2)$, как в случае пьезодиэлектрика.

Зависимость затухания от γ также можно пояснить с помощью понятия об эффективной частоте, если, кроме того, воспользоваться представлением о волнах с отрицательной энергией [59,

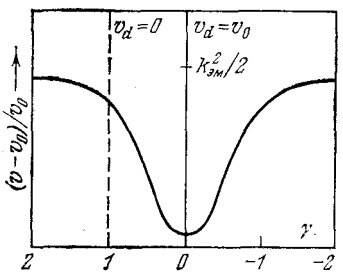


Рис. 12.14. Зависимость скорости звуковых волн в пьезополупроводнике от параметра дрейфа.

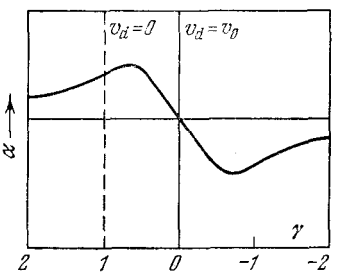


Рис. 12.15. Зависимость затухания (усиления) звука в пьезополупроводнике от параметра дрейфа.

64,65]. При $\gamma<0$ эффективная частота отрицательна, что в данном случае говорит об отрицательности энергии волны. Этому как раз соответствует тот факт, что имеющееся при $\gamma>0$ электронное затухание ($\alpha>0$) сменяется на усиление ($\alpha<0$) при $\gamma<0$, т. е. при $v_d>v_0$. Нулевое значение α при $\gamma=0$ говорит о том, что в этом случае электроны, успевая отрелаксировать, экранируют пьезоэффект и не взаимодействуют со звуком. С микроскопической точки зрения электронное поглощение и усиление звука объясняются передачей энергии и импульса от фононов к электронам и наоборот. Максимумы усиления и затухания (рис. 12.14 и 12.15) достигаются при $|\gamma|=(\omega_c/\omega)+(\omega/\omega_D)$.

Несколько иной подход к изучению взаимодействия акустических волн со свободными носителями был развит Блёткьером и Куэйтом [64] (см. также [65]), которые исходили из представления о связанных волнах колебаний решетки и пространственного заряда, по аналогии с теорией электромагнитных усилителей бегущей волны. При этом были получены аналогичные результаты.

В проведенном рассмотрении мы использовали наиболее простую модель, в которой предполагалось, что акустическая волна меняет плотность n лишь у электронов проводимости. Однако, как показали Хатсон и Уайт [60], звук нарушает распределение электронов также на донорных и акцепторных уровнях в энергетической

щели. Следовательно, только часть пространственного заряда, создаваемого волной, будет подвижна. Поэтому выражение (5.6) для плотности тока следует заменить на

$$j = q(n_0 + f\tilde{n})\mu E + qDf\,\partial n/\partial x,$$

где f — в простейших случаях действительное число, лежащее в пределах от 0 до 1. Его часто называют *фактором ловушек*. Отмеченный эффект уменьшает эффективность взаимодействия звуковой волны с электронами и снижает коэффициент усиления (или затухания) звука. Кроме того, зависимость α от γ перестает быть антисимметричной [59].

Экспериментально эффект усиления звука дрейфом носителей впервые наблюдался в кристалле CdS [66], в котором электроны проводимости создавались путем его подсветки ртутной лампой. Дрейфовое напряжение прикладывалось к торцевым плоскостям кристалла посредством омических контактов. При изменении напряженности ускоряющего поля от —200 В/см до 1600 В/см наблюдалось затухание и усиление звука (при $E_0 > 700$ В/см), зависимости которых от E_0 были в полуколичественном согласии с расчетами по формуле (5.10). На частоте 45 МГц было получено максимальное усиление около 70 дБ/см (при $E_0 = 1100$ В/см и $\omega_c/\omega = 1{,}2$). Длина образца CdS составляла 7 мм. В описанном эксперименте во избежание перегрева образца за счет рассеяния свободных электронов на колебаниях решетки (омических потерь), не учтенного в теории, дрейфовое электрическое поле подавалось в виде импульсов длительностью 5 мкс, следующих с большой скважностью, т. е. усилитель мог работать только в импульсном режиме. Другой характерной особенностью было наличие высокого уровня собственных шумов усилителя, генерирующихся вследствие асимметрии уровней усиления и затухания относительно направления распространения волны (рис. 12.15). Эти недостатки снижают ценность описанного устройства как усилителя электрических сигналов.

Более перспективным оказывается *усиление поверхностных волн*. Одно из преимуществ состоит в том, что взаимодействие ПАВ с носителями может происходить в тонком приповерхностном слое ($\sim\lambda$), в результате чего перегрев снижается и возможна работа усилителя в непрерывном режиме. Известно два основных конструктивных варианта: усилители ПАВ на монолитном пьезополупроводнике [67, 68] и усилители на базе слоистой структуры из пьезодиэлектрика и полупроводника, предложенные Ю. В. Гуляевым и В. И. Пустовойтом [69] *). В последнем случае взаимодействие электронов полупроводника с ПАВ, распространяющейся в основном в диэлектрике, осуществляется посредством экспоненциально спадающего электрического поля волны, проникающего в полупроводник. Описанная слоистая система обладает рядом до-

*) Статья [69] была также одной из первых работ, в которых шла речь об использовании ПАВ для обработки сигналов.

стоинств, одно из которых состоит в том, что оказывается возможным сочетать сильные пьезоэлектрики типа ниобата лития с «хорошими» полупроводниками (обладающими большими μ) и получать высокие коэффициенты усиления. Ниже речь будет идти только об усилителях, использующих слоистую структуру.

Одна из наиболее популярных разновидностей усилителей подобного типа, так называемая система с воздушным зазором [70], представлена на рис. 12.16. Теория усиления и электронного затухания ПАВ в слоистых структурах с принципиальной стороны не отличается от случая объемных волн и характеризуется лишь бо́льшей усложненностью, связанной с необходимостью учета граничных условий на свободных поверхностях полупроводника и пьезоэлектрика [70—72]. Усиление в этом случае также наступает при $\gamma<0$, т. е. при $v_d>v_0$, где под v_d понимается скорость дрейфа электронов в полупроводнике, а через v_0 обозначена скорость ПАВ в пренебрежении пьезоэффектом. Если не учитывать влияние диффузии, то выражение для коэффициента усиления ПАВ на единицу длины в слоистой системе «пьезоэлектрик—воздушный зазор—полупроводник» можно записать в виде [70, 72]

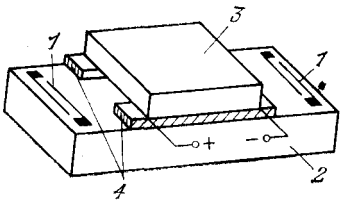


Рис. 12.16. Усиление ПАВ в слоистой системе «пьезоэлектрик — воздушный зазор— полупроводник»: *1* — ВШП, *2* — пьезоэлектрическая подложка, *3* — полупроводник, в качестве которого часто используется тонкая полупроводниковая пленка, нанесенная на твердую основу, *4* — разделительные прокладки.

$$G_0 = -\frac{54{,}6}{\lambda}\frac{K^2_{эм}}{2}\frac{\gamma\,(\sigma_e d/\varepsilon_0)\exp(-2kh_з)}{\gamma^2+(M\sigma d/\varepsilon_0)^2}, \qquad (5.11)$$

где $K^2_{эм}=2\Delta v/v_0$ — коэффициент электромеханической связи в рассматриваемом направлении распространения ПАВ, λ — длина волны ПАВ, $\sigma_e=\mu n_0$ — проводимость полупроводника, d — толщина потока электронов в полупроводнике, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, $h_з$ — толщина воздушного зазора, M — безразмерная функция от $kh_з$, возрастающая $\sim\mathrm{th}\,(kh_з)$ при $kh_з\to\infty$.

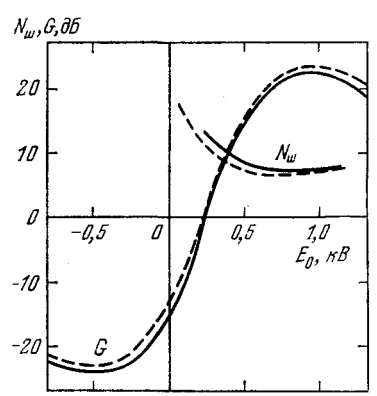


Рис. 12.17. Коэффициенты шума и усиления сигнала усилителя с воздушным зазором на основе кремния и ниобата лития [72]. Сплошные кривые — теория, штриховые — эксперимент.

Зависимости коэффициента усиления G усилителя (длиной 5 мм) на основе кремния и ниобата лития [72] от дрейфового напряжения E_0 для частоты 140 МГц изображены на рис. 12.17. На этом же рисунке приведены расчетные и экспериментальные значения ко-

эффициента шума усилителя $N_ш$. При этом $h_з=0{,}13$ мкм, $d=0{,}56$ мкм, $\mu=800$ см^2/(В·с), $\sigma d=2{,}5\cdot10^{-6}$ С, ловушками захвачено 10% электронов. Видно, что экспериментальные результаты прекрасно согласуются с теоретическими. Это говорит о правильном понимании принципов работы устройства и о его высоком качестве. Следует, однако, заметить, что даже для достаточно хороших материалов типичные значения коэффициента шума усилителей ПАВ составляют 8—10 дБ, что несколько хуже соответствующих показателей у транзисторных усилителей. Уровень диссипируемой мощности в усилителях ПАВ также оказывается выше, а к. п. д.— ниже, чем у транзисторных усилителей. По этим причинам акустоэлектронные усилители пока не могут конкурировать с последними. Однако, по мере того как характеристики усилителей ПАВ будут улучшаться, они, по-видимому, смогут найти разнообразные применения. О достижениях в этом направлении можно прочитать в статьях [73—76].

§ 6. Волновые взаимодействия, обусловленные токовой нелинейностью. Акустоэлектрический эффект

В § 5 мы пренебрегали нелинейным членом $\tilde{n}\tilde{E}$ в уравнении для тока (5.6). В результате выражения для коэффициентов электронного поглощения и усиления получились не зависящими от амплитуды звуковой волны. На самом деле подобная зависимость экспериментально наблюдается, например, в ограничении коэффициента усиления при больших интенсивностях звука или в явлении насыщения. Величина $q\mu\tilde{n}\tilde{E}$, которую обычно называют *токовой*, а также *концентрационной нелинейностью* *), ответственна и за описание ряда других эффектов, связанных с нелинейными взаимодействиями волн, в том числе параметрических взаимодействий и акустоэлектрического эффекта.

Нелинейные теории для акустических волн в пьезополупроводниках развивались многими авторами (см., например, [77—81]). При этом удалось достичь хорошего понимания многочисленных тонких эффектов, сопутствующих процессам усиления, генерации и параметрического взаимодействия звуковых волн. Мы не имеем возможности подробно остановиться на этих интересных, но довольно сложных теориях. Ниже будут обсуждены лишь два простейших нелинейных эффекта — генерация второй гармоники [79, 80, 82] и *акустоэлектрический эффект* [83]. Несмотря на простоту, эти два эффекта дают представление о нелинейных явлениях в полупроводнике, по крайней мере в тех случаях, когда амплитуды звуковых полей могут считаться малыми.

Для анализа этих эффектов от системы уравнений (5.1) — (5.6) удобно перейти к системе двух уравнений относительно σ и D [82].

*) Наряду с токовым механизмом в полупроводнике действуют и другие (решеточные) механизмы нелинейности [77] (см. также гл. 11). Однако они обычно на 2—3 порядка слабее.

Если решение последней искать методом последовательных приближений, т. е. в виде $\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\ldots$ и $D=D_1+D_2+\ldots$, где $\sigma_1=A_1\exp[i(k_1x-\omega t)]$ и $D_1=B_1\exp[i(k_1x-\omega t)]$ — решение линейного приближения, то для σ_2 и D_2 получится следующая система уравнений, описывающая процессы коллинеарных трехволновых взаимодействий:

$$\frac{\partial^2\sigma_2}{\partial x^2}-\frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sigma_2^2+\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{1/2}K_{\text{эм}}D_2\right]=0,$$

$$-\frac{\partial D_2}{\partial t}-\omega_c\left[D_2-\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/2}K_{\text{эм}}\sigma_2\right]+D\frac{\partial^2 D_2}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{\mu}{2\varepsilon}\left(\frac{\partial D_1}{\partial x}+\frac{\partial D_1^*}{\partial x}\right)\left[D_1-\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/2}K_{\text{эм}}\sigma_1\right]. \qquad (6.1)$$

Поскольку квадратичный (нелинейный) член во втором уравнении (6.1) имеет компоненты с различными временными зависимостями, соответствующими процессам $\omega_1+\omega_2$ и $\omega_1-\omega_2$, система (6.1) описывает оба интересующих нас эффекта.

При $\omega_1=\omega_2=\omega$ член с частотой 2ω ответствен за генерацию второй гармоники акустической волны. Соответствующее решение σ_2 определяется при этом в виде суммы общего решения однородной системы, отвечающей уравнениям (6.1), т. е. линейного приближения, и частного решения неоднородной системы:

$$\sigma_2=C\exp[i(k_2x-2\omega t)]+\frac{4\mathrm{Re}(k_1)F_R\exp[i(2k_1x-2\omega t)]}{k_2^2-4k_1^2}, \qquad (6.2)$$

где C — постоянная, зависящая от начальных условий, $k_2=k(2\omega)$, а F_R определяется выражением

$$F_R=\frac{\omega}{v_0}\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{1/2}\frac{K_{\text{эм}}\{\mu/2\varepsilon)\,k_1B_1[B_1-(\varepsilon/c)K_{\text{эм}}A_1]\}}{i\cdot 2\omega+\omega_c+4k_1^2D}.$$

Отметим, что решение (6.2), описывающее поле второй гармоники волны, можно обобщить на случай присутствия внешнего дрейфового поля, а также захвата части носителей на ловушках. Для этого нужно величины ω_c, ω_D и A_1 заменить на $\omega_c'=\omega_c/\gamma$, $\omega_D'=\omega_D\gamma/f$ и $A_1'=A_1f/\gamma^{1/2}$, где γ — параметр дрейфа, а f — действительный фактор захвата (ловушек).

Анализ выражения (6.2) в общем случае громоздок, поэтому приведем только результат для амплитуды второй гармоники A_2 величины σ_2 при малых x и начальном условии $A_2|_{x=0}=0$ [82]:

$$A_2=\Gamma A_1^2x, \qquad (6.3)$$

где

$$\Gamma=\frac{|F_R|}{A_1^2}=\frac{\mu K_{\text{эм}}^3\,\mathrm{Re}(k_1)}{4v_0(c\varepsilon)^{1/2}}\frac{\omega_c/\omega}{\{1+[\omega_c/\omega+\omega/\omega_D]^2\}}\left\{\frac{1+(\omega/\omega_D)^2}{1+[\omega_c/2\omega+2\omega/\omega_D]^2}\right\}^{1/2}$$

— нелинейный параметр, характеризующий эффективность генерации гармоники. Сравнивая выражение для Γ с формулой (5.10), нетрудно убедиться, что область изменения Γ на оси частот практически совпадает с областью электронного затухания. Это и не-

удивительно, так как в обоих случаях процессы зависят от эффективности акустоэлектронного взаимодействия, носящего релаксационный характер. При возрастании x амплитуда второй гармоники ведет себя по-разному, в зависимости от того, насколько сильно сказывается влияние электронного затухания и дисперсии. При $\omega/\omega_D \ll 1$ влиянием дисперсии можно пренебречь, и амплитуда A_2 достигает максимума при определенном $x=x_{ст}$. Дальнейшее увеличение x характеризуется тем, что экспоненциальное затухание преобладает над линейным ростом и значение A_2 постепенно уменьшается до нуля. В случае $\omega/\omega_D \gg 1$ влияние дисперсии становится более существенным и в зависимости $A_2(x)$ появляются осцилляции [82].

Обратимся теперь к разностному процессу $\omega_1-\omega_2$. При $\omega_1=\omega_2=\omega$ соответствующий постоянный нелинейный член в (6.1) описывает *появление акустоэлектрического тока*

$$j_{аэ} = \mathrm{Re}\left[\frac{\mu}{2\varepsilon}\frac{\partial D_1^*}{\partial x}\left(D_1 - \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/2} K_{эм}\sigma_1\right)\right], \qquad (6.4)$$

или *акустоэлектрический эффект*, являющийся твердотельным аналогом акустического течения в жидкости. Пользуясь линейной связью между амплитудами индукции B_1 и упругого напряжения A_1, выражениями для акустоэлектронного затухания α_1 (см. (5.10)) и интенсивности $I_1=v_0A_1^2/c$ основной гармоники акустической волны, приведем формулу (6.4) к выражению

$$j_{аэ} = -2\mu\alpha_1 I_1/v_0, \qquad (6.5)$$

называемому *соотношением Вайнрайха* [59, 83]. Таким образом, при $\alpha_1>0$ (затухание) ток $j_{аэ}$ представляет собой поток электронов, движущихся в направлении распространения звуковой волны. Энергетическая трактовка состоит в том, что звуковая волна передает свой импульс и энергию электронному газу. При $\alpha_1<0$ (усиление), наоборот, электроны передают энергию и импульс волне, в результате чего первоначальный дрейфовый поток замедляется и дрейфовый ток уменьшается на величину $j_{аэ}$, направленную против распространения звуковой волны. Этот факт приводит к зависящему от интенсивности уменьшению усиления звука при $|\gamma|<(\omega_c/\omega)+(\omega/\omega_D)$, т. е. при малых надкритичностях (рис. 12.15). Пропорциональность акустоэлектрического тока интенсивности звуковой волны и электронному затуханию с успехом используется в измерительных целях [84].

Нелинейные явления для поверхностных волн независимо от вызывающих их механизмов нелинейности в основных чертах схожи с аналогичными явлениями для объемных волн [85—87]. Здесь, однако, появляется и ряд новых эффектов, обусловленных неоднородностью поля ПАВ по глубине. В частности, в пьезополупроводниковых кристаллах и слоистых структурах «пьезоэлектрик — полупроводник», наряду с рассмотренным выше *продольным акустотоком*, для поверхностных волн, вследствие наличия нормальной к поверхности компоненты электрического поля, су-

ществует и акустоэлектрический ток, перпендикулярный к поверхности кристалла и к направлению распространения волны, или *поперечный акустоток* [87]. При этом соотношение Вайнрайха качественно выполняется для обоих токов. К другим интересным нелинейным эффектам относятся генерация объемных волн при взаимодействии встречных ПАВ и генерация ПАВ при взаимодействии объемных и поверхностных волн [88, 89]. Подчеркнем, что в результате концентрации энергии ПАВ в тонком приповерхностном слое $\sim\lambda$ все нелинейные эффекты выражены значительно сильнее, чем в случае объемных волн. Этот факт используется при создании целого класса нелинейных устройств на ПАВ, предназначенных для обработки сигналов. Обсуждению принципов работы некоторых из них посвящен § 7.

§ 7. Нелинейные акустоэлектронные устройства на поверхностных волнах

На процесс усиления звука нелинейность оказывает вредное влияние, приводя к уменьшению коэффициента усиления и вследствие этого к ограничению динамического диапазона усилителей. Но нелинейные явления могут быть обращены и на пользу в устройствах обработки сигналов, использующих различные взаимодействия акустических волн с электрическими и механическими полями и между собой. Вследствие своей высокой эффективности в большинстве устройств используется токовый механизм нелинейности, обусловленный взаимодействием звуковой волны с электронами. В настоящее время [70] наиболее существенным применением не только нелинейных акустоэлектронных явлений, но и взаимодействий звука с электронами вообще являются *конвольверы на ПАВ*, или *устройства свертки и корреляции*, принцип действия которых основан на встречном взаимодействии двух поверхностных волн (рис. 12.18). Конструкция типичного конвольвера, использующего токовый механизм нелинейности полупроводника, в сущности не отличается от конструкции усилителя ПАВ на основе слоистых структур (ср. рис. 12.16). Если на входы *1* и *2* такого устройства подаются амплитудно-модулированные электрические сигналы с частотами заполнения ω_1 и ω_2 (обычно $\omega_1=\omega_2=\omega$ — см. ниже), то в пьезоэлектрике возбуждаются две встречные поверхностные волны, временные множители которых удобно записать в виде

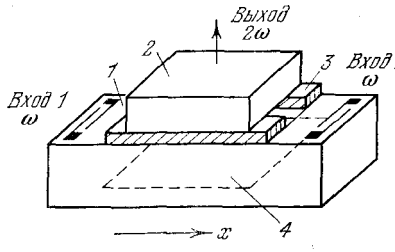


Рис. 12.18. Акустоэлектронный конвольвер на базе слоистой системы с воздушным зазором: *1* — пьезоэлектрик, *2* — полупроводник, *3* — разделительные прокладки, *4* — заземленный электрод.

$$A_1(t-x/v)\exp[i\omega_1(t-x/v)],\ A_2[t+(x-L)/v]\exp\{i\omega_2[t-(x-L)/v]\},$$

где L — расстояние между входами *1* и *2*. Сопровождающие эти волны неоднородные электростатические поля $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$, проникая в полупроводник, создают там, в соответствии с уравнением (5.6), нелинейные составляющие тока на частотах $\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1$ и $2\omega_2$. В произвольной точке полупроводника ток на частотах $\omega_1 \pm \omega_2$, который и будет нас интересовать, определяется выражением

$$j_{нл} = q\mu (\tilde{n}_1 \tilde{E}_2 + \tilde{n}_2 \tilde{E}_1). \qquad (7.1)$$

Из (7.1) ясно, что вследствие симметрии задачи вклад в нелинейный ток $j_{нл}$ будут давать только поперечные составляющие полей $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_2$, направленные перпендикулярно к поверхности, поэтому использование поверхностных волн в данном случае принципиально. На частотах $\omega_1 \pm \omega_2$ нелинейный ток $j_{нл}$ в свою очередь создает в рассматриваемой системе электрический потенциал, который может использоваться для регистрации сигналов встречного взаимодействия ПАВ. В частности, на частоте $\omega_1 + \omega_2$ электрический потенциал принимает вид

$$\varphi = CA_1 (t - x/v)\, A_2 (t - (x - L)/v) \exp \{i [(\omega_1 + \omega_2)\, t - (\omega_1 - \omega_2)\, x/v]\}, \qquad (7.2)$$

где C — комплексная константа, учитывающая эффективность нелинейного взаимодействия и электрический импеданс слоистой системы. Суммарный потенциал со всех точек поверхности полупроводника, который в дальнейшем будем обозначать через U, очевидно, зависит от фазовых соотношений между потенциалами в отдельных точках. В случае пространственной зависимости вида (7.2) наибольший электрический сигнал может быть зарегистрирован с помощью обычного встречно-штыревого преобразователя с периодом $d = \pi/k_3$, где $k_3 = (\omega_1 - \omega_2)/v$. В вырожденном случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, или $k_3 = 0$, представляющем наибольший интерес для приложений, поле φ не зависит от x и для его регистрации может использоваться простой конденсаторный съем с помощью двух сплошных металлических пластин (рис. 12.18). Суммарное напряжение на выходе устройства будет при этом определяться интегрированием (7.2) по длине l_m металлической пластины:

$$U(t) = C \exp(2i\omega t) \int_0^{l_m} A_1 \left(t - \frac{x}{v}\right) A_2 \left(t + \frac{x - L}{v}\right) dx. \qquad (7.3)$$

Детальная теория устройств описанного типа, позволяющая рассчитать константу C в зависимости от различных факторов, была развита в работах [90, 91].

Если пространственная протяженность модулирующих импульсов A_1 и A_2 меньше длины пластины l_m, то пределы интегрирования в (7.3) можно считать бесконечными. Если, кроме того, сделать очевидную замену переменных $\tau = t - x/v$, означающую переход к системе координат, связанной с волной, распространяющейся

вправо, то выражение (7.3) можно переписать в виде

$$U = M \exp(2i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau)\, A_2(2t - \tau - T)\, d\tau, \qquad (7.4)$$

где $T = L/v$ — время задержки волны, соответствующее ее прохождению между двумя входами, M — перенормированная константа взаимодействия. Выражение (7.4) весьма близко к *интегралу свертки* и отличается от последнего тем, что выходной сигнал в (7.4) задержан на время T, которое мы в дальнейшем не будем выписывать, и является функцией от $2t$ (т. е. сжат по времени в два раза), поскольку относительная скорость двух встречных ПАВ равна $2v$. Последнее, впрочем, несущественно для обработки сигналов. Выбирая величину A_2 таким образом, чтобы $A_2(\tau) = G(-\tau)$, можно реализовать так называемую *функцию корреляции*

$$U \sim \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau)\, G(\tau - 2t)\, d\tau. \qquad (7.5)$$

Вычисление корреляционных функций, особенно *функций автокорреляции*, соответствующих $G(\tau) = A_1(\tau)$, играет важную роль в процессах *оптимальной обработки сигналов* (см., например, [11, 92]). При этом в роли функции $A_1(\tau)$ обычно выступает принимаемый сигнал.

Простейшими устройствами, осуществляющими операцию (7.5), являются пассивные фильтры различных типов, в том числе и фильтры на ПАВ, описанные в §§ 3 и 4. В таких фильтрах роль функции $G(\tau)$ выполняет импульсная характеристика фильтра $h(-\tau) = A_1(\tau)$, определяемая выбранной геометрией электродов или рассеивающих неоднородностей. Преимущество конвольвера перед пассивными фильтрами заключается в том, что вследствие возможности оперативного управления видом функции $G(\tau)$ за счет приложения опорного электрического сигнала он представляет собой *адаптивное устройство*, нужное для многих приложений.

Полные вносимые потери П конвольвера, учитывающие как эффективность нелинейного преобразования, так и потери на возбуждение и детектирование ПАВ, очевидно, зависят от уровня опорного сигнала $G(\tau)$. Их принято измерять в размерных единицах — децибелах на милливатт (сокращенно дБм):

$$\text{П} = 10 \lg (P_3 / P_{1э} P_{2э}),$$

где P_3 — мощность сигнала свертки, $P_{1э}$ и $P_{2э}$ — мощности входных электрических сигналов. Определенная таким образом величина П, как нетрудно видеть, представляет *вносимые потери устройства* при мощности опорного сигнала, равной 1 мВт. Для удобства описания эффективности нелинейного преобразования, кроме величины П, вводят еще *внутренние потери*

$$\text{П}_{\text{вн}} = 10 \lg (P_3 / P_{1a} P_{2a}),$$

где P_{1a} и P_{2a} — мощности взаимодействующих акустических волн. Типичные значения $\Pi_{вн}$ для устройств на базе слоистых структур типа «пьезоэлектрик — воздушный зазор — полупроводник» в настоящее время составляют — (40—60) дБм. Для конвольверов, использующих упругий или пьезоэлектрический механизмы нелинейности $\Pi_{вн}=-(60—80)$ дБм. Эффективность нелинейного взаимодействия может быть существенно повышена, если использовать узкие пучки или волноводы ПАВ. В этом случае при постоянной входной электрической мощности интенсивность ПАВ возрастает пропорционально $1/H_{п}$, где $H_{п}$ — ширина пучка, и соответственно $P_{з}$ увеличивается $\sim 1/H_{п}^{2}$. Для уменьшения $H_{п}$, кроме волноводов ПАВ, могут применяться также многополосковые ответвители [93].

Одним из недостатков, препятствующих использованию конвольверов в системах помехоустойчивого радиоприема, является необходимость подачи опорного сигнала одновременно с принимаемым, время прихода которого, вообще говоря, неизвестно *). В принципе эта трудность может быть преодолена за счет использования многоканального приемного устройства, каждый из каналов которого рассчитан на определенное время прихода. Но совершенно ясно, что такой вариант далеко не лучший. Более существенного прогресса здесь удается достичь, используя возможность *запоминания акустических сигналов* на центрах захвата электронов в полупроводнике [94, 95].

Для пояснения принципа запоминания обратимся снова к выражению (7.1), описывающему взаимодействие двух встречных ПАВ, но будем теперь интересоваться током на разностной частоте $\omega_1—\omega_2$. Электрический потенциал будет при этом определяться выражением типа (7.2), в котором, однако, скобки $(\omega_1+\omega_2)$ и $(\omega_1—\omega_2)$ поменяются местами. При $\omega_1=\omega_2=\omega$ это даст постоянный во времени потенциал, который будет промодулирован в пространстве с волновым числом $k_з=2\omega/v=2k$. Возникшее постоянное поле создаст на центрах захвата электрический заряд (соответствующий форме электрического сигнала), который при снятии поля, т. е. после прохождения двух ПАВ, будет рассасываться за счет диффузионных процессов. Время запоминания пространственного заряда, или *длительность акустической памяти*, очевидно, будет определяться временем релаксации заряда для центров захвата в полупроводнике. Типичные времена запоминания колеблются от нескольких сотен микросекунд до нескольких миллисекунд при комнатных температурах [6]. Этого вполне достаточно для многих приложений. Дополнительное охлаждение полупроводника позволяет увеличить память до многих часов и даже дней.

Запомненный сигнал может быть считан в виде ПАВ при подаче на центральный электрод электрического импульса на удвоенной частоте. При этом в обе стороны от центрального электрода будут распространяться две поверхностные волны удвоенной частоты.

*) Это общий недостаток приемных систем с адаптивной корреляционной обработкой [92].

Запоминание акустических сигналов может осуществляться не только в результате встречного взаимодействия двух ПАВ [95, 96], но и при взаимодействии одной поверхностной волны частоты ω с электрическим полем частоты ω, подаваемым на центральный электрод [94]. В этом случае на поверхности полупроводника возникает постоянный пространственный заряд, которому соответствует волновой вектор $k_з=\omega/v=k$. Запомненный сигнал при этом может быть считан с выходной пластины в виде электрического напряжения при подаче ПАВ частоты ω с одного из ВШП. Формы считываемых сигналов в обоих вариантах записи представляют собой функции свертки или корреляции огибающих запомненного сигнала G со считывающим A. Например, при записи за счет взаимодействия ПАВ с полем частоты ω форма выходного сигнала при подаче считывающей ПАВ слева определяется выражением

$$U = Y \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} G(-x/v)\, A(t-x/v)\, dx,$$

которое после замены $\tau=t-x/v$ сводится к корреляционной функции считывающего сигнала A и запомненного сигнала G:

$$U \sim \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau)\, G(\tau-t)\, d\tau. \qquad (7.6)$$

При подаче считывающей ПАВ на другой ВШП, производя замену $\tau=t+x/v$, получим функцию свертки запомненного сигнала со считывающим:

$$U \sim \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\, A(t-\tau)\, d\tau. \qquad (7.7)$$

Заметим, что если в качестве считывающих сигналов подавать короткие, дельтаобразные импульсы, то выражение (7.7) будет описывать первоначально запомненный сигнал, а (7.6) — первоначальный сигнал, обращенный во времени. Иными словами, выходные сигналы в этом случае будут представлять собой импульсные характеристики, аналогичные импульсным характеристикам соответствующих пассивных фильтров.

Конвольвер с памятью, как и любой пассивный фильтр, может обрабатывать принимаемые сигналы независимо от времени их прихода (но, разумеется, в пределах длительности памяти). К сожалению, эффективность таких устройств, использующих два последовательных акта нелинейного взаимодействия, или *четырехволновые процессы*, пока еще довольно мала. В лучших образцах $П_{вн}$ составляет 90 дБм. При существенном повышении эффективности можно надеяться, что корреляторы с памятью найдут широкие применения в адаптивных системах помехоустойчивого радиоприема.

Среди других возможных применений нелинейных устройств на ПАВ следует назвать *системы считывания оптических изображе-*

ний, которые могут быть реализованы на основе конвольверов [70, 97, 98]. Принцип действия таких устройств легко пояснить на их простейшей разновидности, базирующейся на уже знакомой нам конструкции слоистого полупроводникового конвольвера (рис. 12.18).

Предположим, что на поверхность полупроводниковой пластины с помощью объектива спроецировано одномерное оптическое изображение, модулирующее равновесную плотность свободных носителей по закону $n_0(x)$. Тогда, в соответствии с общей теорией полупроводникового конвольвера и выражением (7.3), при подаче на встречно-штыревые преобразователи двух электрических сигналов с частотами ω результирующий сигнал свертки будет иметь вид

$$U = P \exp(2i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} A_1(t - x/v)\, A_2[t + (x - L)/v]\, n_0(x)\, dx.$$

Пусть теперь один из сигналов, например A_1, имеет форму дельта-функции $A_1(t) = \delta(t)$, а другой — $A_2(t)$ представляет собой длинный единичный прямоугольный импульс. В результате выходной сигнал примет вид

$$U = P \exp(2i\omega t)\, n_0(vt),$$

т. е. на временной развертке со скоростью v будет отображаться оптическое изображение $n_0(vt)$. Если «сканирующий» дельта-импульс ПАВ достаточно узок и по поперечной координате вдоль поверхности, то, осуществляя каким-либо образом перемещение пучка ПАВ вдоль этой координаты, можно реализовать считывание двумерных изображений. Это представляет интерес для создания плоских передающих телевизионных трубок. О других возможных приложениях нелинейных устройств на ПАВ к обработке сигналов можно прочитать в обзоре [99].

Разумеется, кроме использования в радиофизических системах, нелинейные акустоэлектронные устройства могут применяться и в чисто физических исследованиях свойств кристаллов, особенно полупроводников, например для измерения плотности поверхностных состояний [91] или времен релаксации поверхностного заряда на ловушках [95, 96]. В последнем случае измерение зависимости амплитуды сигнала памяти от времени задержки считывающего импульса, которая, вообще говоря, отличается от экспоненциальной, позволяет оценить энергетическую структуру поверхностных состояний полупроводника.

Глава 13

АКУСТООПТИКА

§ 1. Введение

Во второй главе мы уже обсуждали явление взаимодействия света со звуком, приводящее к рассеянию звука на дебаевских волнах в жидкости. В настоящей главе мы рассмотрим этот вопрос подробнее.

Современные представления о природе взаимодействия света со звуком сложились под влиянием пионерских работ Л. И. Мандельштама и Л. Бриллюэна (см. [1]), которыми впервые было предсказано существование тонкой структуры рэлеевской линии рассеяния. Эти работы послужили стимулом к открытию в 1932 г. Дебаем и Сирсом и независимо от них Люка и Бикаром (см. [2]) явления дифракции света на ультразвуковых волнах в жидкости. С тех пор было опубликовано большое число как теоретических, так и экспериментальных работ (см. монографию [1] и обзоры [3—5]), посвященных различным аспектам рассеяния света на звуке, в том числе и изучению с его помощью тепловых возбуждений в жидкостях и твердых телах. В результате этих исследований было получено много физически важных результатов. В частности, удалось экспериментально обнаружить сверхстоксово поглощение и дисперсию звука в жидкостях.

В 60-х годах появление мощных источников когерентного света — лазеров — способствовало ускоренному развитию акустооптических исследований. Был установлен ряд новых экспериментальных закономерностей, например открыто стимулированное рассеяние света на тепловых акустических колебаниях — вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна. Потребности лазерной техники стимулировали развитие акустических методов управления лазерным излучением и акустооптической обработки сигналов [4—7]. Широкий размах получили работы по визуализации звуковых полей [8] и акустической голографии [9, 10]. В последнее время к этим областям прибавились также акустооптика жидких кристаллов, лазерная генерация звука [11] и фотоакустическая спектроскопия [12].

Все эти явления, о которых пойдет речь, мы будем называть *акустооптическими*. Акустооптика понимается здесь в широком смысле как направление в физической акустике, изучающее любые взаимодействия света со звуком, в том числе и через посредство

теплового расширения среды при поглощении света (термооптический механизм лазерной генерации звука и фотоакустическая спектроскопия). Включение обсуждения двух последних явлений в данную главу позволяет составить более цельное впечатление о взаимопроникновении оптики и акустики. При таком широком взгляде на акустооптику следовало бы упомянуть и об интенсивно развивающихся в последнее время оптических методах регистрации и возбуждения терагерцевых фононов (см., например, [13]). Однако вследствие выраженной квантовой природы этих эффектов они здесь не рассматриваются.

§ 2. Дифракция света на звуке. Раман-натовский и брэгговский режимы

Дифракцию, или *рассеяние света на звуке* феноменологически можно описать, если в уравнениях состояния среды учесть нелинейные перекрестные члены, отвечающие электромагнитному полю и упругим деформациям. Электромагнитная и акустическая волны должны при этом удовлетворять соответственно уравнениям Максвелла и механическому уравнению движения. Единственный перекрестный член, отвечающий за взаимодействие, появляется в уравнении состояния для индукции, которое будет теперь выглядеть следующим образом (см. также (11.2.3)):

$$D_i = (\varepsilon^0_{ij} + f_{ijkl}u_{kl})\,E_j + e_{ijk}u_{jk}, \tag{2.1}$$

где ε^0_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости, f_{ijkl} — тензор электрострикции, e_{ijk} — пьезомодули. Член $f_{ijkl}u_{kl}$ можно рассматривать как изменение $\delta\varepsilon_{ij}$ диэлектрической проницаемости, вызванное звуковой волной. Величину $\delta\varepsilon_{ij}$ часто записывают через связанные с f_{ijkl} *фотоупругие коэффициенты* p_{klmn}: $\delta\varepsilon_{ij} = -\varepsilon^0_{ik}\varepsilon^0_{jl}p_{klmn}u_{mn}$. О свойствах симметрии тензоров f_{ijkl} и p_{ijkl} можно прочитать, например, в монографиях [4, 14].

При обсуждении теории мы ограничимся случаем изотропных твердых тел или жидкостей *). При этом пьезоэффект отсутствует и из уравнений Максвелла и соотношения (2.1) нетрудно получить волновое уравнение для электрического поля [4]:

$$\Delta E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon E). \tag{2.2}$$

Величину ε здесь нельзя выносить из-под знака дифференцирования, так как она меняется под действием акустической волны. Дальнейшее упрощение будет состоять в том, что электромагнитную волну мы будем считать слабой, а акустическую — достаточно интенсивной. При этом изменение интенсивности звука, обусловленное взаимодействием со светом за счет механизма электрострикции

*) В случае жидкостей в тензорах f_{ijkl} и p_{ijkl} отличны от нуля только диагональные компоненты.

(см. также (11.2.3)),

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{kl} - {}^1/_2 f_{ijkl} E_k E_l \qquad (2.3)$$

пренебрежимо мало и можно пользоваться приближением заданного звукового поля.

Решение поставленной задачи может быть получено различными методами, например с использованием функции Грина [5] (как это обычно делается при анализе рассеяния звука на звуке [15]) или с помощью непосредственного исследования дифференциального уравнения (2.2) с учетом краевых условий на границах пересекающихся пучков. Отдавая дань традиции [1, 3–6, 16–19], будем придерживаться последнего пути, предполагая, что модулируемую звуком диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon(x, t)$ можно представить в виде волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon \sin(\Omega t - Kx + \delta_p), \qquad (2.4)$$

где Ω и K — частота и волновое число звука, δ_p — постоянный фазовый сдвиг. В соответствии с теоремой Флоке решение для E будем искать в виде

$$E = \exp[i(\omega t - n_0 k (z\cos\theta + x\sin\theta))] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(z) \exp[in(\Omega t - Kx)], \qquad (2.5)$$

где ω и k — частота и волновое число световой волны, $\Phi_n(z)$ — медленно изменяющиеся функции, $n_0 = \varepsilon_0^{1/2}$ — средний коэффициент преломления среды, θ — угол падения света, отсчитываемый от нормали к звуковому пучку ширины L (рис. 13.1). Из выражения (2.5) следует, что n-й член суммы, или, что то же, n-й дифракционный порядок сдвинут по частоте на величину $n\Omega$ относительно частоты падающего света ω. С точки зрения нелинейного преобразования частоты этот факт вполне очевиден. Более простая (кинематическая) его трактовка состоит в том, что перемещение волновых фронтов звуковой волны приводит к доплеровским сдвигам частоты рассеянного света, причем значениям $n \geqslant 2$ соответствует многократное рассеяние.

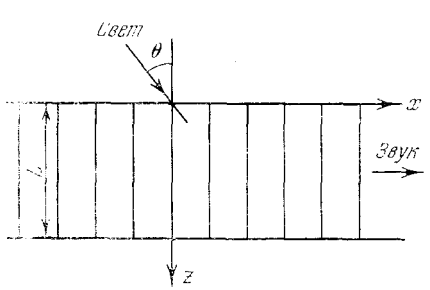


Рис. 13.1. Падение плоской электромагнитной волны на двумерный звуковой пучок.

Подставляя выражения (2.4) и (2.5) в волновое уравнение (2.2), для граничного условия $\Phi_0|_{z=0} = 1$ и $\Phi_n|_{z=0} = 0$ нетрудно получить следующую систему связанных укороченных уравнений относительно Φ_n, описывающую перераспределение энергии падающего света между нулевым и высшими дифракционными

порядками (для $\delta_p = 0$):

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \frac{v}{2L}[\Phi_{n-1} - \Phi_{n+1}] = i\frac{nQ}{2L}(n - 2\alpha)\,\Phi_n. \qquad (2.6)$$

Здесь $v = (1/2)(\delta\varepsilon/\varepsilon_0)kn_0L$, $\alpha = -n_0(k/K)\sin\theta$, $Q = K^2L/n_0k$.

Система уравнений (2.6) впервые была получена индийскими физиками Раманом и Натом в 1935 г. Полное решение этой системы получить сложно. Поэтому анализ проводят в двух предельных случаях: $Q \ll 1$ и $Q \gg 1$, интересуясь в основном малыми значениями коэффициента перед Φ_n в правой части (2.6), так как именно при этом условии происходит наиболее эффективная перекачка энергии из нулевого порядка в дифракционные.

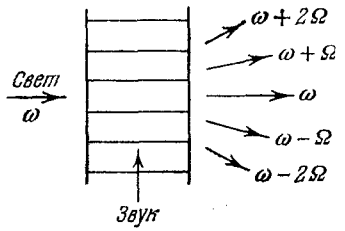


Рис. 13.2. Дифракция Рамана — Ната.

Рассмотрим сначала случай $Q \ll 1$. Поскольку число дифракционных порядков n, которые нужно учитывать, обычно не превышает десятка, первое слагаемое в правой части (2.6) пренебрежимо мало вследствие малости Q. Это, однако, не относится ко второму слагаемому $\sim\alpha$, которое даже для малых углов θ может быть достаточно большим из-за большой величины k/K при $Q \ll 1$, что в большинстве случаев отвечает частотному диапазону $\Omega/2\pi \leqslant 100$ МГц. В результате систему уравнений (2.6) можно переписать в несколько более простой форме:

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \frac{v}{2L}[\Phi_{n-1} - \Phi_{n+1}] = -i\frac{nQ\alpha}{L}\Phi_n,$$

которая допускает точное решение [16]:

$$\Phi_n = \exp\left(-i\frac{nQ\alpha z}{2L}\right) J_n\left[\frac{2v}{Q\alpha}\sin\frac{Q\alpha z}{2L}\right].$$

Здесь J_n — функции Бесселя n-го порядка. Полагая $z = L$, для нормированных интенсивностей дифракционных порядков $I_n = |\Phi_n|^2$ получим

$$I_n = J_n^2\left[v\frac{\sin(Q\alpha/2)}{Q\alpha/2}\right]. \qquad (2.7)$$

При нормальном падении света на звуковой пучок значение α равно нулю и из (2.7) следует

$$I_n = J_n^2(v), \qquad (2.8)$$

т. е. интенсивность падающего света довольно равномерно распределяется по дифракционным порядкам (рис. 13.2). Описанный режим дифракции при $Q \ll 1$ получил наименование *раман-натовского*.

Обсудим теперь случай $Q \gg 1$. Как нетрудно видеть, нулевые значения правой части уравнения (2.6) при этом могут иметь место

для $n-2\alpha=0$. В частности, для $n=\pm 1$ отсюда следует $\alpha=\pm 1/2$. Более высокие значения n, как будет видно из дальнейшего, в данном режиме дифракции можно не учитывать. При $\alpha=1/2$ система (2.6) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}-\frac{v}{2L}\Phi_1=0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}+\frac{v}{2L}\Phi_0=0. \tag{2.9}$$

Решение (2.9) дает следующие значения нормированных интенсивностей I_0 и I_1:

$$I_0=\cos^2(v/2), \quad I_1=\sin^2(v/2). \tag{2.10}$$

Таким образом, из (2.10) следует, что при $v=\pi$ энергия полностью перекачивается в первый дифракционный порядок. Это подтверждает высказанное выше предположение о возможности ограничения в (2.6) значениями $n\leqslant 1$. Более точные расчеты, выполненные численными методами [16], показывают, что почти полная перекачка (98%) достигается уже при $Q=15$. Выражая α через угол θ, нетрудно убедиться, что условиям $\alpha=\pm 1/2$ соответствует формула

$$2n_0 k \sin\theta = K, \tag{2.11}$$

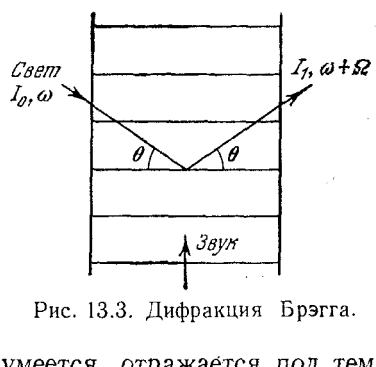


Рис. 13.3. Дифракция Брэгга.

представляющая собой известное *условие брэгговского рассеяния*. Дифрагированный луч при этом, разумеется, отражается под тем же углом θ относительно нормали к волновому вектору звука (рис. 13.3). Такой режим дифракции принято называть *брэгговским*. Он характерен для высокочастотных акустических волн и(или) для широких звуковых пучков. Вообще же, говоря о границах реализации раман-натовского и брэгговского режимов, следует отметить, что условия $Q\ll 1$ и $Q\gg 1$, использованные в приведенном анализе, оказываются слишком сильными. Численные расчеты показывают, что дифракция принимает раман-натовский характер уже при $Q\leqslant 0{,}5$ и брэгговский — при $Q\geqslant 10$. О различных аналитических подходах к исследованию дифракции света на звуке при этих условиях можно прочитать в работах [17—19].

С точки зрения квантовой теории рассеяние света на звуке можно рассматривать как неупругое столкновение фотонов с фононами, при котором происходит либо уничтожение фотона и рождение фонона (рассеяние с понижением частоты, или *стоксово рассеяние*), либо уничтожение фонона и рождение фотона (рассеяние с повышением частоты, или *антистоксово рассеяние*). При этом законы сохранения энергии и импульса фотонов и фононов имеют вид

$$\hbar\omega \pm \hbar\Omega = \hbar\omega', \quad \hbar\boldsymbol{k} \pm \hbar\boldsymbol{K} = \hbar\boldsymbol{k}'. \tag{2.12}$$

Поскольку $\Omega \ll \omega$, то $\omega \approx \omega'$ и $k \approx k'$. Но тогда из второго уравнения (2.12) следует условие (2.11) брэгговского рассеяния. Это естественно, так как соотношения (2.12) выполняются для плоских волн.

§ 3. Дифракция света на поверхностных акустических волнах

Особенности дифракции света на поверхностных акустических волнах (ПАВ) состоят в том, что связь между упругим и электромагнитным полями осуществляется в этом случае не только через механизм фотоупругости, но и за счет искажений поверхности, сопровождающих распространение ПАВ [20, 21]. Кроме того, при этом возможна дифракция как при прохождении света сквозь поверхность кристалла, так и при отражении от нее. Из-за резкого спадания амплитуд ПАВ с глубиной дифракция в большинстве случаев носит раман-натовский характер (вплоть до частот ~ 1 ГГц) даже для плоских фронтов ПАВ. В частности, при нормальном падении света на поверхность с распространяющейся вдоль нее поверхностной волной углы θ', определяющие первые дифракционные порядки, как для прохождения, так и для отражения определяются из выражения $\sin\theta' = \lambda/\Lambda$, как и в случае объемных волн, где λ — длина волны света в среде или в вакууме, Λ — длина ПАВ.

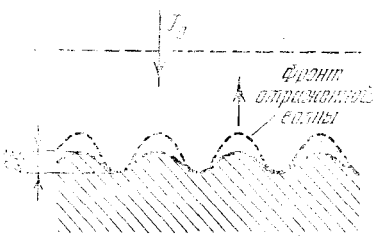


Рис. 13.4. Отражение плоской световой волны от волнистой поверхности.

Расчет интенсивностей дифракционных порядков в случае дифракции на ПАВ более сложен. Это связано с тем, что необходимо учитывать влияние обоих механизмов рассеяния света на ПАВ [6, 20]. Однако если поверхность идеально отражающая (например, металлическая), то влияние волнистости превалирует и расчет упрощается. В самом деле, если плоская световая волна интенсивности I_0 отражается от волнистой поверхности (рис. 13.4), то фронт отраженной волны также становится волнистым с амплитудой, в два раза превышающей амплитуду рельефа поверхности, равную амплитуде нормальной составляющей ПАВ [20]. Тогда в соответствии с теорией Рамана и Ната (см. (2.8)) и с учетом того, что параметр v в (2.8) представляет собой изменение фазы света, проходящего через звуковой пучок, можно записать выражение для интенсивностей дифракционных порядков света, отраженного от поверхности с распространяющейся вдоль нее ПАВ:

$$I_n/I_0 = J_n^2(2\xi k); \tag{3.1}$$

здесь J_n — функция Бесселя порядка n, ξ — амплитуда возвышений поверхности, k — волновое число света. Формула (3.1) качественно описывает дифракцию и на оптически прозрачных телах,

но, чтобы получить правильные количественные оценки, в этом случае необходимо учитывать также изменения фазы, обусловленные фотоупругим механизмом. Можно показать, (см., например, [6]), что вклады искаженной поверхности и фотоупругости, вообще говоря, оказываются одного порядка и их соотношение определяется только оптическими и фотоупругими свойствами среды, так что для конкретных сред оно может оказаться различным. Например, эксперимент показывает, что для рэлеевской волны, распространяющейся вдоль направления X Y-среза кристаллического кварца, как для отраженного, так и для прошедшего света влияние волнистости более существенно [22]. Теория дифракции света на поверхностных волнах, учитывающая оба механизма, изложена в монографии [21].

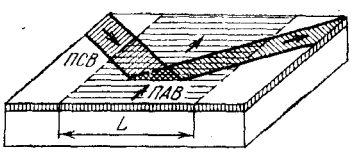


Рис. 13.5. Брэгговская дифракция поверхностных световых волн на поверхностных акустических волнах.

Если интересоваться случаем падения узкого светового пучка, в частности лазерного, то можно показать, что в условиях скользящего падения света на поверхность дифракция очень похожа на случай объемных волн. По этой причине описанный процесс иногда называют *объемной дифракцией на ПАВ* [21]. Особенности, отличающие ее от чисто объемного случая, состоят в том, что изменения диэлектрической проницаемости, обусловленные звуковой волной, неоднородны по глубине, а наличие свободной поверхности приводит к отражению дифрагированных пучков в объем среды.

Следствием неоднородности звукового поля оказывается то, что вблизи поверхности преимущественным является раман-натовский режим дифракции, а в более глубоком слое, где изменение показателя преломления с глубиной не столь значительно, реализуются промежуточный и брэгговский режимы.

Особого внимания с точки зрения приложений заслуживает дифракция поверхностных световых волн (ПСВ) на пучке ПАВ [21]. Поскольку поверхностные световые волны могут существовать только в слоистых структурах, поверхность кристалла должна быть покрыта пленкой, образующей для них волновод. Одна из простейших конструкций, в которых возможно наблюдение дифракции поверхности световых волн на ПАВ, представлена на рис. 13.5. Если толщина пленки много меньше длины ПАВ, то деформации в ней можно считать однородными и дифракционный процесс весьма схож с процессом дифракции света на объемных волнах, являясь его планарным аналогом. Режимы дифракции здесь также можно характеризовать с помощью параметра

$$Q=K^2L/n_0k.$$

В частности, при $Q\gg1$ осуществляется брэгговский режим дифракции поверхностных световых волн на ПАВ, широко используемый в устройствах интегральной оптики.

§ 4. Рассеяние Мандельштама — Бриллюэна на тепловых колебаниях

Рассеяние света на тепловых акустических колебаниях [1, 3, 4] в принципе ничем не отличается от рассеяния на когерентных звуковых волнах. Однако его математическое описание несколько более сложно, так как тепловые возбуждения обладают широким спектром частот и волновых векторов, в результате чего рассеяние происходит во всех направлениях. Так же, как и в случае когерентных световых волн, при рассеянии на тепловых колебаниях наблюдается смещение частот дифрагированного света. Это смещение впервые было предсказано Мандельштамом и Бриллюэном именно для рассеяния на звуковых волнах теплового происхождения, что и послужило причиной называть его *мандельштам-бриллюэновским рассеянием* (МБР), в отличие от рассеяния на неподвижных неоднородностях — *рэлеевского рассеяния*, происходящего без сдвига частоты [1]. В экспериментах с жидкостями обычно наблюдаются две смещенные линии мандельштам-бриллюэновского рассеяния: стоксова линия, имеющая более низкую частоту по сравнению с частотой падающего света (см. также § 2), и антистоксова линия, характеризующаяся более высокой частотой. Для твердых кристаллических тел как правило наблюдаются три стоксовы и три антистоксовы компоненты в соответствии с тремя типами акустических волн в кристалле — одной квазипродольной и двумя квазипоперечными. При наличии свободной поверхности в результате рассеяния на тепловых поверхностных волнах в спектре рассеянного света могут появиться и дополнительные линии.

Так как частоты тепловых колебаний при исследованиях мандельштам-бриллюэновского рассеяния обычно находятся в пределах гиперзвукового диапазона, для него характерен брэгговский режим дифракции. При этом частоты рассеянного света равны

$$\omega' = \omega \pm \Omega_j(\boldsymbol{K}) \tag{4.1}$$

и угол θ определяется из соотношения (2.11), которое для рассматриваемого случая удобно переписать в виде

$$2v_j(\boldsymbol{K}) \sin\theta/\Omega_j(\boldsymbol{K}) = c/n_0\omega. \tag{4.2}$$

В выражении (4.1) знаки «+» и «—» соответствуют двум возможным направлениям распространения тепловых мод, характеризуемых индексом поляризации j (квазипродольная и квазипоперечные моды), v_j — фазовая скорость j-й моды, c — скорость света в вакууме, $\boldsymbol{K}$ — волновой вектор звука. Из (4.1) и (4.2) легко получить выражение для относительного сдвига частоты:

$$(\omega' - \omega)/\omega = \pm \Omega_j(\boldsymbol{K})/\omega = \pm (2n_0/c)\, v_j(\boldsymbol{K}) \sin\theta = \pm (2n_0/c)\, v_j(\boldsymbol{K}) \sin(\varphi/2),$$

в котором через $\varphi = 2\theta$ обозначен угол рассеяния. Нетрудно видеть, что по положению дублетов мандельштам-бриллюэновского

рассеяния в эксперименте можно определить скорость звука в заданном направлении.

Кроме значений частот ω', большой интерес с точки зрения интерпретации экспериментальных данных представляют спектральные распределения интенсивностей дублетов. Для их расчета нужно знать автокорреляционную функцию для рассеянного света

$$\overline{\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{K},\ t+\tau)\,\boldsymbol{E}_s^*(\boldsymbol{K},\ t)} = \lim_{\tilde{T}\to\infty}(2\tilde{T})^{-1}\int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}}\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{K},\ t+\tau)\,\boldsymbol{E}_s^*(\boldsymbol{K},\ t)\,dt, \quad (4.3)$$

по которой с помощью преобразования Фурье, в соответствии с теоремой Винера — Хинчина, легко определить и интересующее нас спектральное распределение интенсивности $S(\boldsymbol{K},\ \omega')$. Так как рассеянное электрическое поле $\boldsymbol{E}_s$ пропорционально деформациям, вызванным звуковыми волнами, то автокорреляционная функция (4.3), очевидно, будет пропорциональна автокорреляционной функции для упругих смещений в кристалле. Последнюю же можно записать в форме

$$\overline{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{K},\ j,\ t+\tau)\,\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{K},\ j,\ t)} = \overline{|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K},\ j)|^2}\exp[\pm i\Omega_j(\boldsymbol{K})\tau]\exp[-\Gamma_j(\boldsymbol{K})\tau], \quad (4.4)$$

где $\boldsymbol{U}$ — амплитуды звуковых колебаний, Γ_j — временное затухание звуковых волн, или, на квантовом языке, обратное время жизни фононов. В рамках классического описания, справедливого при $\hbar\Omega_j(\boldsymbol{K})\ll k_\text{Б}T$, средняя энергия одной моды ($k_\text{Б}$ — постоянная Больцмана)

$$\overline{E_j(\boldsymbol{K})} = \rho\,\Omega_j^2(K)\,\overline{|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K},\ j)|^2}\,(2(2\pi)^3/V)$$

равна $k_\text{Б}T$, откуда следует, что

$$\overline{|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{K},\ j)|^2} = Vk_\text{Б}T/[2(2\pi)^3\rho\Omega_j^2(\boldsymbol{K})], \quad (4.5)$$

где V — объем кристалла. Учитывая (4.4) и (4.5) в выражении для автокорреляционной функции рассеянного света (4.3) и вычисляя фурье-образ (подробнее об этом можно прочитать, например, в монографии [4]), нетрудно получить формулу для нормированной функции спектрального распределения интенсивности рассеянного света

$$S(\boldsymbol{K},\ \omega') = \sum_j \frac{|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K},\ j)|^2}{\Omega_j^2(\boldsymbol{K})}\left\{\frac{\Gamma_j(\boldsymbol{K})}{[\omega'-(\omega-\Omega_j(\boldsymbol{K}))]^2+\Gamma_j^2(\boldsymbol{K})} + \frac{\Gamma_j(\boldsymbol{K})}{[\omega'-(\omega+\Omega_j(\boldsymbol{K}))]^2+\Gamma_j^2(\boldsymbol{K})}\right\}\left\{2\pi\sum_j\frac{|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K},\ j)|^2}{\Omega_j^2(\boldsymbol{K})}\right\}^{-1}, \quad (4.6)$$

где $\boldsymbol{M}$ — вектор, определяющий направление рассеяния и зависящий от упругооптических коэффициентов среды. Первое слагаемое в фигурных скобках (4.6) соответствует стоксовым компонентам

рассеяния, а второе — антистоксовым. Напомним, что в случае неограниченного кристалла имеется три дублета, отвечающие трем значениям индекса j. Легко заметить, что обе компоненты мандельштам-бриллюэновского рассеяния имеют лоренцеву форму с характерной шириной $\Gamma_j(\boldsymbol{K})$, пропорциональной временному затуханию акустических волн или обратному времени жизни фононов. Интересно отметить, что в рамках классического рассмотрения, с помощью которого получено выражение (4.6), интенсивности стоксовой и антистоксовой компонент одинаковы. При $\hbar\Omega_j \geqslant k_{\text{Б}}T$ классическое рассмотрение перестает быть справедливым и необходимо использовать квантовый подход. Обычно это имеет место для $T \leqslant 3$ К. Анализ показывает, что в квантовой области интенсивности стоксовой и антистоксовой компонент перестают быть равными. А именно, интенсивность стоксовой (низкочастотной) линии при $T \to 0$ не зависит от температуры *), а интенсивность антистоксовой линии стремится к нулю. Это объясняется тем, что процесс создания фонона за счет уничтожения фотона возможен и в отсутствие фононов, т. е. при низких температурах, в то время как рождение фотонов в результате уничтожения фононов, очевидно, невозможно без их наличия.

§ 5. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна

С появлением лазеров стало возможным проводить эксперименты с мощными пучками когерентного света. При этом было обнаружено (Чиао, Таунс и Стойчев [23]), что при превышении интенсивностью света некоторого порогового значения наблюдается увеличение стоксовой линии в спектре мандельштам-бриллюэновского рассеяния, сопровождающееся генерацией мощной звуковой волны. Описанное явление, ранее предсказанное теоретически (см. обзор [24]) и представляющее собой одну из разновидностей процессов параметрического усиления, получило наименование *вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна* (ВМБР). Теория его, как макроскопическая, так и квантовая, развивалась многими авторами [3, 4, 24].

Наиболее прост для анализа коллинеарный случай, соответствующий углам рассеяния 0 и 180°. При этом возбуждаемая звуковая волна распространяется в направлении падающего светового пучка. Поскольку в изотропных средах вследствие условий синхронизма реализуется только второй случай или случай обратного рассеяния света, он и будет рассматриваться ниже.

Пусть интенсивная световая волна падает на кристалл длины L в направлении оси x:

$$E_{\text{п}} = {}^1/_2 E_{0\text{п}} \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к. с.} \qquad (5.1)$$

Волну, рассеянную в обратном направлении, в соответствии с

*) Имеется в виду ненормированная интенсивность.

теорией брэгговского рассеяния можно записать в виде

$$E_p = {}^1/_2 E_{0p} \exp[i(\omega' t + k' x)] + \text{к. с.}, \qquad (5.2)$$

а вызвавшую рассеяние акустическую волну с деформацией $\tilde{u}$, вид которой не будем конкретизировать,— в форме

$$\tilde{u} = (1/2)\,\tilde{u}_0 \exp[i(\Omega t - Kx)] + \text{к. с.} \qquad (5.3)$$

При этом для частот и волновых чисел всех трех волн выполняются обычные соотношения синхронизма

$$\omega = \omega' + \Omega, \quad k = -k' + K.$$

Так как мы здесь имеем дело с мощной электромагнитной волной, необходимо учесть ее воздействие на звук. В непьезоэлектрических кристаллах это воздействие описывается электрострикционным членом в уравнении состояния (2.3), в котором теперь следует считать $E_i = E_{in} + E_{ip}$. Подстановка (5.1) и (5.2) в (2.3) приводит к тому, что упругие напряжения, а следовательно, и деформации будут содержать члены с суммарными и разностными частотами. Интересующий нас член с частотой Ω и волновым числом K имеет вид

$$\delta\tilde{u}' = (1/2)\,aE_{0n}E^*_{0p} \exp[i(\Omega t - Kx)] + \text{к. с.},$$

где a — постоянная. Рассматривая деформацию $\delta\tilde{u}'$ как заданную, нетрудно получить волновое уравнение для звука (для определенности будем считать его продольным)

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2(\delta\tilde{u}')}{\partial x^2}, \qquad (5.4)$$

где c_l — скорость продольной акустической волны. Выражение в правой части (5.4), таким образом, представляет вынуждающую силу, за счет которой и происходит генерация звука. Полагая далее, что амплитуда падающей световой волны, или волны накачки, постоянна *), а амплитуды деформации $\tilde{u}_0$ и рассеянного света E_{0p} являются медленными функциями x, с учетом выписанного выше выражения для $\delta\tilde{u}'$, получим из (5.4) укороченное уравнение для $\tilde{u}_0$ в приближении заданного поля накачки:

$$\partial u_0/\partial x = i\,(a/2)\,KE_{0n}E^*_{0p}. \qquad (5.5)$$

Здесь a — введенная выше постоянная, зависящая от коэффициентов электрострикции. Уравнение, описывающее воздействие упругих деформаций на распространение электромагнитной волны, уже выписывалось нами в § 2 (см. (2.2)) при описании дифракции света на звуке в приближении неизменной амплитуды звука. Поскольку оно не меняется и при учете изменения амплитуды звука, мы непосредственно воспользуемся соответствующим брэгговскому

*) Это можно сделать вследствие большой интенсивности падающего света. Об учете изменения E_{0n} см., например, [1].

режиму укороченным уравнением (второе уравнение (2.9)), которое с учетом используемых здесь обозначений можно переписать в виде

$$\partial E^*_{0p}/\partial x = i\,(b/2)\,k' E^*_{0n}\tilde{u}_0, \tag{5.6}$$

где b — постоянная, зависящая от коэффициентов электрострикции. Из (5.5) и (5.6) легко получить линейное уравнение для $\tilde{u}_0$

$$\partial^2\tilde{u}_0/\partial x^2 = -(1/4)\,abKk' E_{0n}E^*_{0n}\tilde{u}_0 \tag{5.7}$$

и аналогичное уравнение для E^*_{0p}, которое мы не будем выписывать. Общее решение (5.7) имеет вид

$$\tilde{u}_0(x) = A\exp(i\Gamma x) + B\exp(-i\Gamma x), \tag{5.8}$$

где $\Gamma = (Kk')^{1/2}(ab/2c)^{1/2}(4\pi I)^{1/2}$, $I = cE_{0n}E^*_{0n}/8\pi$ — интенсивность падающего излучения, c — скорость света в вакууме, A и B — постоянные, определяемые из граничных условий. Последние состоят в равенстве нулю амплитуды рассеянного света на противоположном торце кристалла $E^*_{0p}(L)=0$. Тогда из (5.5) и (5.8) следует

$$\tilde{u}_0(x) = \tilde{u}_0(0)\cos[\Gamma(x-L)]/\cos(\Gamma L). \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в (5.5) и учитывая выражение для Γ, получим для амплитуды рассеянного света

$$E^*_{0p} = i\left(\frac{k'}{K}\right)^{1/2}\left(\frac{b}{ac}\right)^{1/2}\left(\frac{E^*_{0n}}{E_{0n}}\right)^{1/2}\tilde{u}_0\frac{\sin[\Gamma(x-L)]}{\cos(\Gamma L)}. \tag{5.10}$$

Из формул (5.9) и (5.10) следует, что как звук, так и рассеянный свет усиливаются при распространении *), причем усиление происходит в противоположных направлениях (рис. 13.6). Хотя согласно (5.9) и (5.10) усиление имеет место при любых интенсивностях накачки, на самом деле этого не происходит, так как в проведенном анализе не были учтены акустические и оптические потери. Учет этих потерь, в частности акустических ($\exp(-\alpha_l x)$), приводит к тому, что величину Γ в решении $\exp(i\Gamma x)$ следует заменить на

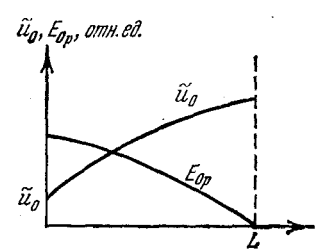


Рис. 13.6. Пространственные изменения амплитуд звука и рассеянного света при вынужденном мандельштам-бриллюэновском рассеянии (обратное рассеяние).

$$\Gamma' = i\alpha_l/2 \mp i\,(\alpha_l^2/4 - \Gamma^2)^{1/2}.$$

В результате усиление будет иметь место только в том случае, когда интенсивность волны накачки превысит некоторое пороговое значение, соответствующее равенству $2\Gamma=\alpha_l$. Интересно отметить (см. (5.9) и (5.10)), что при $\Gamma L=\pi/2$ (или, с учетом затухания, при

*) Если падающая световая волна не плоская, а, например, представляет собой расходящийся пучок, то наряду с усилением происходит и обращение формы волнового фронта рассеянной световой волны (пучок становится сходящимся). Подробнее об этом явлении и его применениях можно прочитать в статье [25].

$\mathrm{Re}(\Gamma' L)=\pi/2$) величины $\tilde{u}_0(x)$ и $E_{0p}(x)$ обращаются в бесконечность. Это означает, что они могут иметь конечные значения, при $\tilde{u}_0(0)=0$, т. е. возможна генерация звука и рассеянного света (временная неустойчивость). Обратим внимание, что генерация в данном случае происходит в отсутствие резонатора, так как обратная связь осуществляется рассеянной в обратном направлении световой волной.

Остановимся вкратце на случае рассеяния света в прямом направлении, который может быть реализован в кристаллах. Можно показать [1], что при этом обе волны экспоненциально нарастают в прямом направлении, как изображено на рис. 13.7 (пространственная неустойчивость). Генерация в этом случае возможна только тогда, когда среда помещается в резонатор.

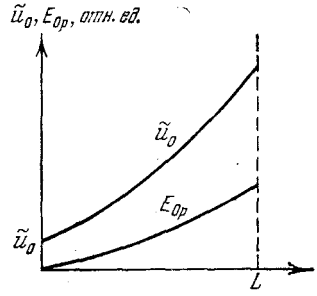


Рис. 13.7. Пространственные изменения амплитуд звука и рассеянного света при вынужденном мандельштам-бриллюэновском рассеянии (прямое рассеяние).

Таким образом, с помощью вынужденного мандельштам-бриллюэновского рассеяния можно генерировать довольно интенсивные гиперзвуковые волны (вплоть до частот $\sim 10^{11}$ Гц). Это представляет значительный интерес для экспериментальных исследований, так как возбуждение столь высокочастотного звука обычными методами затруднительно и во многих случаях невозможно. Однако эффективность генерации звука при этом относительно невелика. Например, при мощности падающей световой волны 10^6 МВт/см^2 интенсивность генерируемого звука с частотой 60 ГГц составляла ~ 1 кВт/см^2 [23]. Тем не менее вследствие наличия мощных лазеров (как в приведенном выше примере) такой метод генерации мощных акустических волн успешно используется в гиперзвуковых исследованиях, в частности при изучении нелинейных явлений.

§ 6. Акустооптика жидких кристаллов

Внимание, уделяемое в последнее время изучению акустооптических свойств жидких кристаллов, обусловлено целым рядом уникальных свойств последних — прежде всего значительной оптической анизотропией и малой вязкостью жидких кристаллов, в особенности находящихся в нематической фазе [26—32]. Указанные свойства приводят к тому, что даже при относительно слабых акустооптических возмущениях на границе жидкокристаллического слоя градиенты скорости, связанные с вязкими волнами в жидких кристаллах, достигают больших значений, что существенно сказывается на изменении ориентации молекул. Это в свою очередь вызывает эффективную модуляцию света, проходящего через жид-

кокристаллическую ячейку. Среди других возможных применений акустооптических взаимодействий в жидких кристаллах, главным образом холестерических, следует назвать их использование для визуализации звуковых полей, в частности для восстановления акустических голограмм [8—10, 26]. Существенный интерес представляет также наличие в смектических кристаллах долговременной памяти [32], которая может применяться для записи акустических сигналов.

Типичная конфигурация жидкокристаллической ячейки, используемой в качестве акустооптических затворов и модуляторов света [26—31], приведена на рис. 13.8. Поверхности прозрачных пластин обычно обрабатываются таким образом, что в отсутствие внешнего воздействия молекулы жидких кристаллов ориентируются по нормали к поверхности — гомеотропная ориентация. При механическом воздействии на одну из прозрачных пластин, например на нижнюю, в ней могут возбуждаться объемные акустические волны как сдвиговой, так и продольной поляризаций, а также поверхностные акустические волны. В результате в прилегающем к пластине слое жидкого кристалла возбуждаются звуковые и вязкие волны, приводящие к изменению показателя преломления кристалла. Механизм воздействия звуковых волн на показатель преломления — через изменение плотности — в данном случае ничем не отличается от обычного фотоупругого механизма в жидкости (§ 2) и вызывает дифракционные эффекты того же порядка. Вязкие же волны приводят к изменению ориентации молекул жидких кристаллов, т. е. к эффекту, характерному для твердых тел. В нематических жидких кристаллах, например в кристаллах МББА, влияние вязких волн оказывается гораздо более существенным [26, 29]. Поэтому при теоретическом рассмотрении звуковыми возмущениями в них обычно пренебрегают. Изменение ориентации молекул, или, что то же, ориентации оптической оси жидких кристаллов сказывается на прохождении через слой жидких кристаллов необыкновенных лучей, которые в данном случае и образуют дифракционную картину

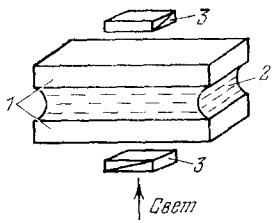


Рис. 13.8. Жидкокристаллическая ячейка: *1* — оптически прозрачные пластинки, *2* — слой жидкого кристалла, *3* — скрещенные поляроиды.

Согласно феноменологическим расчетам, выполненным для случая воздействия на слой жидких кристаллов стоячих поверхностных акустических волн типа Гуляева — Блюштейна [27], дифрагированное поле при этом имеет несколько максимумов различной интенсивности, что напоминает дифракцию Рамана — Ната. Воздействие на нематический жидкий кристалл поверхностной волны рэлеевского типа анализировалось в работе [29] также с учетом только сдвиговых колебаний. Определялась так называемая «средняя прозрачность», или средняя интенсивность прошедшего света (нормированная по отношению к падающему) для системы, состоя-

щей из слоя жидких кристаллов и двух скрещенных николей, не пропускающей свет в отсутствие возмущения. Согласно проведенным оценкам для частоты 6 МГц и амплитуды смещений на границе $\sim 10^{-6}$ см (интенсивность волны ~ 1 Вт/см^2 вблизи границы) средняя прозрачность оказалась равной $\sim 10^{-8}$. На низких частотах (~ 10 кГц), когда колебания пластины можно было рассматривать как ее поступательные перемещения, средняя прозрачность при тех же мощностях механических колебаний (амплитуды смещений $\sim 10^{-4}$ см) составила $\sim 10^{-3}$. Отметим, что переменная составляющая проходящего света в низкочастотном режиме и при умеренных модулирующих мощностях изменялась с двойной частотой механических колебаний [27], что отражает зависимость коэффициента преломления от интенсивности последних.

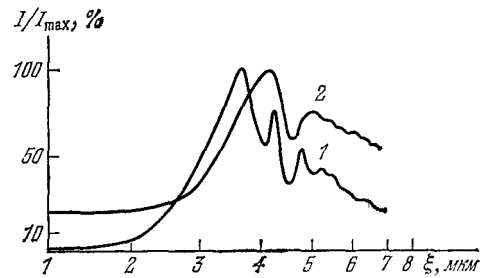


Рис. 13.9. Зависимости переменной (*1*) и постоянной (*2*) составляющих света, прошедшего через жидкокристаллическую ячейку со скрещенными поляроидами, от амплитуды смещения одной из пластин [30].

Экспериментально этот эффект наблюдался в работе [30]. Кривые для интенсивностей постоянной и переменной составляющих света, прошедшего через слой жидкого кристалла и два скрещенных николя, от амплитуды смещений пластины, полученные в этой работе, приведены на рис. 13.9. В отсутствие возбуждения и при очень малых колебаниях фотоприемник на выходе системы регистрировал слабую высокочастотную составляющую, связанную с шумами лазерного излучения. При превышении амплитудой смещений ξ некоторого значения $\xi_п$ (на частоте 296 Гц $\xi_п = 1{,}2$ мкм) в прошедшем свете наблюдалась составляющая с удвоенной частотой модуляции, величина которой возрастала с ростом ξ. По достижении максимума спектральный состав переменной составляющей прошедшего света менялся, что можно было наблюдать по искажению профилей осциллограмм. Для постоянной составляющей наблюдалась во многом аналогичная картина. Таким образом, зависимости переменной (на двойной частоте) и постоянной составляющих света, прошедшего через ячейку, при достаточно больших ξ оказываются существенно нелинейными и характеризуются резкими максимумами. Последующие исследования [31] показали, что наличие максимумов постоянной составляющей и составляющей с двойной частотой объясняется перекачкой энергии прошедшего света в гармоники с более высокими номерами. Этот факт, по-видимому, может представлять интерес с точки зрения создания нелинейных акустооптических устройств на жидких кристаллах.

Весьма перспективным представляется использование жидких кристаллов для визуализации акустических полей [8, 26]. С этой целью обычно применяется эффект селективного отражения света

от жидких кристаллов, находящихся в холестерической фазе. Как известно, в этой фазе жидкий кристалл обладает спиральной структурой, шаг которой и определяет частоту отраженного света в соответствии с брэгговским условием. Кристалл, освещенный белым светом, при этом кажется окрашенным, причем цвет окраски существенно зависит от температуры, которая определяет период спиральной структуры. Например, при изменении температуры на 2 °С цвет отраженного света может измениться от красного до голубого — полный цветовой переход. Если холестерический жидкий кристалл привести в контакт со средой, в которой распространяются акустические волны, например поверхностные, то в результате поглощения последних в кристалле устанавливается стационарное распределение температуры, соответствующее распределению интенсивности звукового поля. Получившуюся картину — изображение звукового поля — легко наблюдать при освещении жидкого кристалла белым светом.

Основная трудность, стоящая на пути использования жидких кристаллов в качестве индикаторов звука, состоит в больших временах установления звуковых изображений в известных образцах кристаллов (обычно они составляют несколько секунд). Это препятствует применениям жидких кристаллов для визуализации быстро изменяющихся акустических полей. То же самое можно сказать и относительно использования жидкокристаллических ячеек в качестве акустооптических модуляторов, поскольку максимальные частоты модуляции обратно пропорциональны временам релаксации. Существенный прогресс в этой области, очевидно, связан с поиском новых быстрорелаксирующих жидких кристаллов. Это, однако, не относится к области использования жидких кристаллов в качестве запоминающих устройств [32], где большие времена релаксации, наоборот, желательны.

§ 7. Некоторые применения акустооптических взаимодействий

1. Измерения параметров акустических полей. Использование акустооптических взаимодействий для измерения параметров акустических полей является одной из наиболее важных областей их применений [1—8]. Причиной тому, наряду с универсальностью и бесконтактностью, служит то обстоятельство, что с их помощью можно определять практически все параметры звука — длину волны, интенсивность, поглощение и т. д. Много важных экспериментальных результатов, касающихся распространения и взаимодействия когерентных и тепловых акустических волн в различных средах, получено именно оптическими методами *). Конкретные способы и методики акустооптических измерений довольно многообразны, однако все они базируются на закономерностях дифракции света на звуке (§§ 2—4). Например, в случае раман-натовской дифракции длину звуковой волны можно определить по доплеров-

*) Частично мы с этим уже встречались в гл. 11.

скому сдвигу частот или по углам отклонения дифракционных максимумов света в соответствии с выражением (2.5), а амплитуду смещений — по их относительным интенсивностям (см. (2.7) и (2.8)). Поглощение проще всего оценить путем сканирования узким световым пучком вдоль направления распространения звуковой волны. Вполне очевидны и основные принципы измерений при брэгговской дифракции — формулы (2.10) и (2.11). Об измерениях параметров акустических фононов методом рассеяния Мандельштама — Бриллюэна уже говорилось в § 4.

Главным недостатком акустооптических методов измерения параметров является тот факт, что они ограничены главным образом

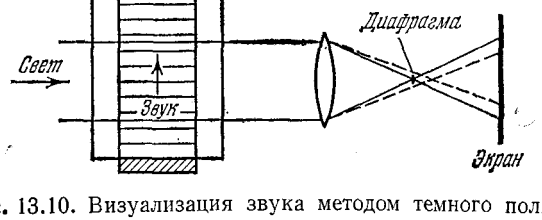


Рис. 13.10. Визуализация звука методом темного поля.

оптически прозрачными средами. Исключение составляет случай поверхностных волн (§ 3), измерение параметров которых может производиться в отраженном свете и условие оптической прозрачности не является обязательным. Более подробно о методах и приборах акустооптических измерений можно прочитать в цитированной выше литературе.

2. Визуализация звуковых полей. Задача визуализации акустических полей часто возникает при исследовании закономерностей излучения, дифракции и нелинейных взаимодействий звуковых волн, а также в различных практических приложениях — медицинской диагностике, неразрушающем контроле, подводном звуковидении, сейсморазведке и т. д. К простейшим способам визуализации относится так называемый *шлирен-метод*, или *метод темного поля* (см., например, [8]), использующий раман-натовскую дифракцию света на звуке (рис. 13.10). В такой системе в отсутствие звукового поля экран остается темным, а при распространении звука появляются светлые детали, соответствующие дифракционным максимумам. Расстояния от ультразвукового пучка до линзы и от линзы до экрана обычно выбираются равными удвоенному фокусному расстоянию линзы. При этом на экране получается перевернутое неувеличенное изображение «проекции» звукового поля.

В качестве примера приведем визуализацию шлирен-методом звукового поля в системе, состоящей из жидкости (воды) и прямоугольного стеклянного стержня, в котором возбуждался ограниченный пучок поперечных ультразвуковых волн [33, 34]. В качестве излучателя применялась пьезокварцевая пластинка Y-среза (частота 2,9 МГц); использовались как непрерывный, так и импульсный режимы. Из приведенных в [33, 34] фотографий следует, что в воде визуализируется звуковое поле, представляющее собой совокупность «лучей», уходящих от стержня. На рис. 13.11 схематически показана получающаяся при этом картина в случае

импульсного режима излучения. Элементарное объяснение полученной картины звукового поля в жидкости заключается в том, что в рассматриваемом стержне наряду с поперечными волнами всегда присутствует компонента продольных волн; это является следствием как частичной генерации продольных волн кварцевой пластинкой Y-среза, так и краевых эффектов, имеющих место на границе стержня. Таким образом, вдоль плоской границы стержня, помещенного в воду, бегут «источники звука», связанные с поперечными и продольными волнами, распространяющимися со скоростями c_t и c_l (то обстоятельство, что между границей пучка и поверхностью стержня продольные и поперечные волны не визуализируются, связано с малостью соответствующих фотоупругих постоянных стекла по сравнению с водой). Интерференцией волн, излучаемых указанными источниками в воду, и объясняется появление наблюдаемых «боковых лучей». Отметим, что если одновременно пучок продольных и поперечных волн одной и той же частоты и интенсивности заполняет все сечение стержня, то наблюдаемая картина «боковых лучей» становится значительно более отчетливой; это соответствует высказанному предположению.

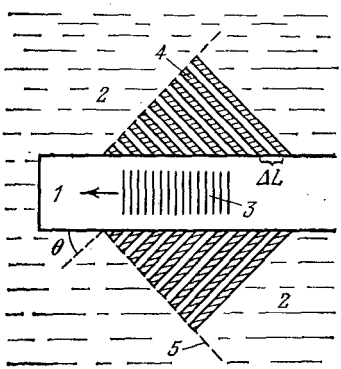


Рис. 13.11. Схематическая картина визуализируемого звукового поля при возбуждении поперечных волн в твердом стержне, находящемся в жидкой среде: *1* — стеклянный стержень, *2* — вода, *3* — ультразвуковой пучок поперечных волн, *4* — «боковые лучи», *5* — фронт «бокового излучения», θ — угол, образуемый нормалью к фронту и поверхностью стержня.

На рис. 13.12 представлено геометрическое построение, поясняющее описанную выше специфическую интерференционную картину в воде [35]. На этом рисунке LL' — поверхность стержня, соприкасающаяся с водой, $OB=c_t\tau$ и $OA=c_l\tau$—расстояния, проходимые соответственно поперечными и продольными источниками вдоль LL' от точки O за время τ, $OP=OQ=c_ж\tau$ — расстояния от этой точки, проходимые возникающей волной в воде со скоростью звука в воде $c_ж$. Нетрудно сделать вывод, что $\angle POQ=\angle BNA=\beta$ (MM' является биссектрисой угла BNA). Из треугольников ANB и MNB видно, что $\beta=\beta_t-\beta_l$, откуда угол θ, под которым вследствие интерференции распространяется (по отношению к поверхности стержня LL') результирующий фронт в воде MM', будет равен $\theta=90°-(\beta_l+\beta_t)/2$. Для условий эксперимента [33, 34] $c_t=3{,}8\cdot10^5$ см/с, $c_l=5{,}97\cdot10^5$ см/с, $c_ж=1{,}48\cdot10^5$ см/с. Это соответствует углу $\theta=71°25'$, что согласуется с результатом эксперимента, который дает $\theta=72°30'\pm3°$.

То обстоятельство, что визуализируемое звуковое поле в воде имеет вид «лучиков» с пространственным периодом

$$\Delta L=\frac{\lambda_l\lambda_t}{|\lambda_t-\lambda_l|}\sin\theta\approx\frac{\lambda_l\lambda_t}{|\lambda_t-\lambda_l|},$$

где λ_l и λ_t — соответственно длины продольных и поперечных волн в стекле, объясняется пространственными биениями, происходящими из-за различия скоростей распространения c_l и c_t.

Особого упоминания заслуживает *метод прямой визуализации* ультразвуковых излучателей или рассеивателей с помощью брэгговской дифракции света, предложенный Корпелем (см., например, [9, 10, 36]). Этот метод занимает как бы промежуточное положение между классическими методами визуализации и акустической голографией, будучи весьма близким к последней. Ввиду важности и оригинальности метода поясним его на простом примере (рис. 13.13). Пусть точечный источник O излучает когерентный свет, а

точечный источник S — звук. Если углы пересечения φ между лучами света и фронтами звуковых волн удовлетворяют условию брэгговского отражения ($\sin\varphi=\lambda/2\Lambda$), то отраженные световые лучи пересекутся в точке S', которая представляет собой мнимое

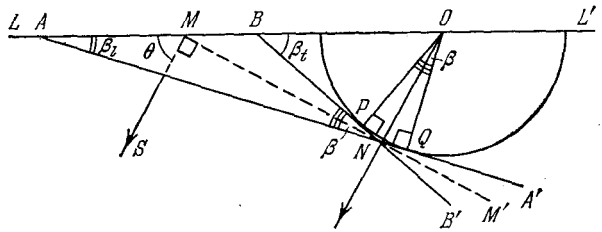


Рис. 13.12. Геометрическое построение, поясняющее наблюдаемую волновую картину (рис. 13.11) как результат интерференции волн в жидкости.

изображение источника звука S. Если источник не точечный, то его оптическое изображение будет уменьшенным в Λ/λ раз.

Существует и множество других акустооптических методов визуализации звука, в частности методы, использующие оптическое сканирование и отражение белого света от жидких кристаллов (§ 6). Подробнее об этом можно прочитать в обстоятельных обзорах [8, 36, 37].

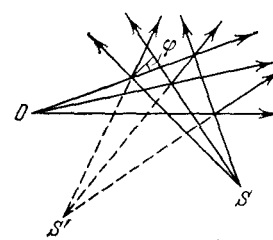


Рис. 13.13. Схема прямой визуализации источников звука по методу Корпеля.

3. Восстановление акустических голограмм. Как известно, классическая схема голографического процесса, например, в оптике, включает два этапа: запись интерференционной картины, образованной предметным и опорным пучками на каком-либо *квадратичном* (реагирующем на интенсивность) *приемнике излучения* (фотопластинка, термопластик, жидкий кристалл) — *создание голограммы*, и считывание записанной интерференционной картины с помощью опорного пучка с целью получения видимого трехмерного изображения предмета — *восстановление голограммы*. В отличие от оптики, в акустике возможны и *линейные приемники* (например, микрофоны, пьезопреобразователи и т. п.), сохраняющие информацию как об амплитуде, так и о фазе волны. Поэтому в акустической голографии наряду с классической схемой записи и считывания возможен и другой способ голографирования — *без опорного пучка* [9, 10, 38—40]. Восстановление акустических голограмм при этом может осуществляться различными методами. В частности, широкие возможности открывает использование для этой цели быстродействующих ЭВМ.

Мы ограничимся рассмотрением описанной выше классической схемы голографии, так как именно в этом случае для восстановления акустических голограмм широко применяются оптические методы. В качестве квадратичного приемника акустического излу-

чения, так же как и в оптике, могут служить фотопластинки, термопластические пленки, жидкокристаллические слои и т. п. Однако по целому ряду причин, в частности из-за высокой чувствительности и малой инерционности, чаще всего используется для этой цели свободная поверхность жидкости [38—40].

Простейшее голографическое устройство, основанное на этом принципе записи, изображено на рис. 13.14. В целях упрощения при пояснении принципа работы устройства опорную и предметную волны будем считать плоскими [39]. Предположим также, что направление падения предметной волны, так же как и опорной, составляет угол θ с нормалью к поверхности жидкости. Пусть поле смещений опорной волны на поверхности жидкости $x=0$ описывается выражением



Рис. 13.14. Схема акустической голографии, использующая изменение поверхностного рельефа жидкости: *1* — объект, *2* — предметный звуковой пучок, *3* — опорный звуковой пучок, *4* — звуковой генератор.

$$u_0 = \exp\left[i\left(\Omega t + Kz\sin\theta\right)\right],$$

а поле предметной волны —

$$u_{\text{п}} = A\exp\left[i\left(\Omega t - Kz\sin\theta + \varphi_s\right)\right], \tag{7.1}$$

где $A=A(z)$ и $\varphi_s=\varphi_s(z)$ — величины, определяемые рассеивающим объектом. В результате действия радиационного давления, создаваемого предметной и опорной волнами, поверхность жидкости получает постоянное смещение ξ (рис. 13.14), которое в первом приближении определяется выражением

$$\xi = aA\cos\left(2Kz\sin\theta - \varphi_s\right) + bA,$$

где a и b — постоянные, зависящие от акустических параметров жидкости и величины поверхностного натяжения. Таким образом, в результате интерференции опорного и предметного пучков на свободной границе жидкости создается поверхностный рельеф — *акустическая голограмма* — с зашифрованной в нем информацией о рассеивающем объекте. Если на сформированный рельеф направить когерентный световой пучок, то в отраженном свете будут присутствовать дифракционные максимумы различных порядков. Полагая, что поле (след) падающей световой волны на поверхности жидкости имеет вид

$$E_{in} = \exp\left[i\left(\omega t + kz\sin\beta\right)\right]$$

и рассматривая для простоты поверхностный рельеф как статическую фазовую дифракционную решетку, для отраженного света получим соотношение

$$E_{\text{ref}} \sim \exp\left(i\left(\omega t + kz\sin\beta + kaA\cos\left(2Kz\sin\theta - \varphi_s\right)\right)\right],$$

которое с учетом тождества

$$\exp(i\rho\cos\delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\rho)\exp(in\delta)$$

можно переписать в виде

$$E_{\text{ref}} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kaA)\exp\{i[\omega t + kz(\sin\beta + 2n(K/k)\sin\theta) - n\varphi_s]\}.$$

Полученное выражение представляет собой сумму дифрагированных плоских волн (дифракционных порядков), распространяющихся относительно оси x под углами $\delta_n = \arcsin[\sin\beta + 2n(K/k)\sin\theta]$. Эти волны, как можно видеть, дают действительное и мнимое изображения объекта. Чтобы убедиться в этом, будем считать, что все дифракционные порядки, кроме первого, отсекаются с помощью ножевой диафрагмы. Тогда с учетом того, что в случае малых kaA справедливо соотношение $J_1(kaA) \approx kaA/2$, для E_{ref} получим

$$E_{\text{ref}} \sim i(kaA/2)\exp(-i\varphi_s)\exp[i(\omega t + kz\sin\delta_{+1})] + \\ + i(kaA/2)\exp(i\varphi_s)\exp[i(\omega t + kz\sin\delta_{-1})]. \qquad (7.2)$$

Сравнение (7.2) с выражением для поля предметной волны (7.1) показывает, что первый член в (7.2) соответствует действительному изображению предмета, а второй — мнимому. Угловое расхождение между двумя изображениями приблизительно равно $4(K/k) \times \times \sin\theta/\cos\beta$.

Заметим, что отношение $\mu_s = K/k$ определяет наклон всех дифрагированных лучей (см. выражение для δ_n). Так как для звукового диапазона частот $\mu_s^{-1} \sim 10^3$, то расстояние от голограммы до изображения объекта сильно увеличится (во столько же раз). Само изображение при этом исказится, так как его продольные размеры также увеличатся в μ_s^{-1} раз. Такое искажение в принципе может быть скомпенсировано, если размеры голограммы уменьшить в m_s раз, например путем фоторепродуцирования (это равносильно уменьшению длины звуковой волны). В этом случае поперечные размеры предмета уменьшатся также в m_s раз, а продольные — в $m_s^2\mu_s$. Легко видеть, что неискаженное изображение предмета в принципе может быть получено при $m_s = \mu_s^{-1}$. Однако сформированное таким образом изображение оказывается настолько малым, что с ним неудобно работать. Поэтому предпочтительнее избрать компромиссное решение $1 < m_s < \mu_s^{-1}$, отвечающее умеренным размерам изображения и приемлемым искажениям [40]. К сожалению, при фоторепродуцировании теряется одно из основных преимуществ, присущих рассмотренной схеме голографического процесса, использующей изменение рельефа водной поверхности — *получение изображений в реальном времени*. По этой причине акустическое голографирование часто производится без коррекции искажений, связанных с различными длинами световых и акустических волн.

4. Оптическая генерация звука и фотоакустическая спектроскопия. Об одном из методов оптической генерации высокочастотного звука (методе вынужденного рассеяния Мандельштама — Брил-

люэна) уже говорилось в § 5. Ниже мы остановимся на *тепловой или термооптической генерации звука*, осуществляемой за счет теплового расширения среды при поглощении в ней оптического излучения. Частота генерируемого звука при этом определяется частотой амплитудной модуляции падающей световой волны; обычно она существенно меньше, чем в случае вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна. Отметим, что тепловой механизм играет преобладающую роль при малых интенсивностях падающего света [11]. По этой причине он оказывается наиболее распространенным в природе и технике. С практической точки зрения основные достоинства термооптической генерации звука заключаются в бесконтактности и возможности широкого управления параметрами акустического сигнала. Эти факторы оказываются важными для целей экспериментальной физики и техники связи.

Процесс термооптической генерации описывается механическим уравнением движения, уравнением состояния с учетом тепловых эффектов и уравнением теплового баланса, учитывающим ввод тепловой энергии, выделившейся в среде при поглощении света *). В случае жидкости в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью (которые обычно несущественны) эта система может быть сведена к линеаризованному волновому уравнению для звукового давления с правой частью, описывающей действие термооптического источника (см., например, [11]):

$$\Delta p - \frac{1}{c_{\text{ж}}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\varkappa}{C_p}\frac{\partial Q_t}{\partial t}. \qquad (7.3)$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент объемного теплового расширения среды, C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $Q_t = -\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ — функция, описывающая плотность тепловой энергии, выделяющейся в среде за единицу времени, $\boldsymbol{F}$ — интенсивность поглощаемого светового излучения.

При рассмотрении конкретных задач, в частности о возбуждении звуковых импульсов на границе раздела вода — воздух, уравнение (7.3) должно быть дополнено граничными и начальными условиями. Анализ различных интересных для практики ситуаций проводился во многих работах (см., например, [41, 42]). В частности, при падении квазимонохроматического светового пучка с интенсивностью

$$I(x, y, t) = I(x, y)[1 + m\cos\Omega t], \quad t \geqslant 0,$$

на свободную границу жидкости (рис. 13.15) функция Q_t имеет вид [41]

$$Q_t(\boldsymbol{r}, t) = \tilde{Q}_t(\boldsymbol{r})(1 + m\cos\Omega t),$$

где $\tilde{Q}_t = A^{(T)}\,\mu I(x, y)\exp(-\mu z)$, $z \geqslant 0$. Здесь m — индекс модуляции, Ω — частота модуляции падающего света, $A^{(T)}$ — коэффициент

*) Эта энергия, очевидно, должна быть достаточно мала.

прохождения света из воздуха в жидкость, μ — коэффициент поглощения света в жидкости.

Для установившегося режима (генерация монохроматического звука) получается следующее выражение, описывающее амплитуду и угловое распределение звукового поля в дальней зоне:

$$p(\boldsymbol{r}_0) = A^{(T)} \frac{m\varkappa c}{2\pi C_p r_0} W \frac{\mu K^2 \cos\theta}{\mu^2 + K^2 \cos^2\theta} f(\theta,\ \varphi), \qquad (7.4)$$

где p — амплитуда звукового давления, $\boldsymbol{r}_0$ — радиус-вектор точки наблюдения, W — мощность падающего света (в частности, мощность лазера), $K=\Omega/c_{\text{ж}}$, θ — угол между осью z и вектором $\boldsymbol{r}_0$ (см. рис. 13.15), φ — угол между осью x и проекцией $\boldsymbol{r}_0$ на плоскость x, y, величина $f(\theta, \varphi)$ определяется формулой

$$f(\theta,\ \varphi) = W^{-1} \iint I(x,\ y) \exp\left[-iK \sin\theta\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right] dx\, dy.$$

Диаграмма направленности термооптического излучателя, очевидно, представляет собой произведение двух последних сомножителей в (7.4). Для распределения интенсивности света $I(x, y)$ по гауссову закону $I(x, y)=I_0\exp[-(x^2+y^2)/a^2]$ выражение для $f(\theta, \varphi)$ принимает вид

$$f(\theta,\ \varphi) = \exp\left(-K^2a^2 \sin^2\theta/4\right). \qquad (7.5)$$

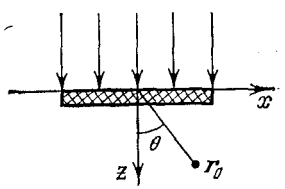


Рис. 13.15. Геометрия задачи термооптического возбуждения звука.

Из (7.4) и (7.5) следует, что при узких гауссовых световых пучках ($Ka \ll 1$) диаграмма направленности имеет максимум при $\theta=0$, если $K\mu^{-1} \leqslant 1$, или при $\theta=\arccos(\mu/K)$, если $K\mu^{-1} > 1$. В пределе $K\mu^{-1} \ll 1$ диаграмма принимает вид, характерный для излучения диполя (рис. 13.16, *а*), что физически вполне очевидно. В другом предельном случае $K\mu^{-1} \gg 1$ звук излучается практически вдоль поверхности (рис. 13.16, *б*). Для широких световых пучков ($Ka \gg 1$)

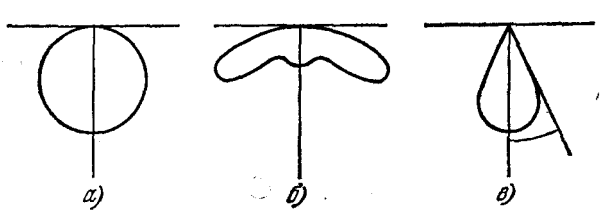


Рис. 13.16. Диаграммы направленности звука, излучаемого термооптическим источником [11].

излучение становится узконаправленным с максимумом в направлении оси лазерного пучка (рис. 13.16, *в*). Угловая расходимость излучаемого звука при этом пропорциональна $1/Ka$, как и в любом плоском излучателе. Отмеченные закономерности, разумеется, не являются спецификой гауссова распределения интенсивности па-

дающего света. Поэтому в основных чертах они справедливы для любых ограниченных световых пучков.

Пользуясь формулой (7.4), нетрудно рассчитать *эффективность термооптической генерации* η, определяемую как отношение полной мощности излучаемого звука к мощности падающего света [41]. В частности, для широкого светового пучка ($Ka \gg 1$) с гауссовым профилем распределения интенсивности эффективность определяется выражением

$$\eta = \frac{c_ж}{\rho}\left[\frac{A^{(T)} m \varkappa \mu K}{2C_p(\mu^2+K^2)}\right]^2 I_0,$$

где ρ — плотность жидкости. Таким образом, величина η пропорциональна интенсивности падающего света. Как и следовало ожидать, максимальная эффективность η_{max} достигается при условии $K=\mu$. Оценки показывают, что для воды $\eta_{max} \approx 5 \cdot 10^{-12} I_0$, где I_0 берется в Вт/см^2. Таким образом, при наличии мощных лазеров термооптическая генерация звука оказывается перспективной не только для экспериментальных исследований, но и для вполне практических целей. Вопросы, связанные с влиянием различных природных факторов, в том числе поверхностного волнения и неоднородности жидкости, на процесс генерации, обсуждались в работах [43—45]. Излучение звука движущимися вдоль поверхности световыми пучками анализировалось в статьях [46—48]. Имеющиеся экспериментальные результаты по термооптической генерации звука в жидкости достаточно полно отражены в обзоре [11].

Остановимся теперь вкратце на термооптической генерации акустических волн в твердом теле *). Основные особенности, отличающие этот случай, заключаются в том, что, кроме объемных продольных волн термооптический источник в твердом теле возбуждает объемные сдвиговые, а также поверхностные волны [49]. Возбуждение последних наиболее эффективно в том случае, когда характерный размер светового пучка близок к длине поверхностной волны. С увеличением ширины пучка эффективность возбуждения объемных сдвиговых и поверхностных волн резко падает и в объем излучаются в основном продольные волны, как и в случае жидкости.

Заметим, что облучение поверхности именно светом, очевидно, не принципиально, так как тепловое расширение может быть вызвано передачей энергии к среде от любых видов излучений и частиц — потоков электронов, протонов и т. п. Генерируемые при этом звуковые волны могут использоваться для регистрации частиц. В частности, большой интерес представляет возможность регистрации нейтрино с помощью системы акустических приемников, охватывающей протяженную акваторию Мирового океана — Международный проект ДЮМАНД. Связанные с этим исследования сейчас широко проводятся (см., например, [50, 51]).

*) Об экспериментальных работах говорилось в гл. 12 при обсуждении методов возбуждения поверхностных волн.

Большую практическую ценность представляет использование термооптической генерации звука для исследования оптических спектров поглощения различных веществ. С этой целью исследуемое вещество обычно помещают в замкнутый объем, открытый для света,— фотоакустическую ячейку (рис. 13.17). Подвергая исследуемый объект воздействию амплитудно-модулированного светового излучения, перестраиваемого по несущей частоте, например, с помощью монохроматора, о спектрах поглощения можно судить по уровню колебаний микрофона, находящегося внутри замкнутого объема. Характерные размеры объема обычно много меньше длины волны возбуждаемого звука, поэтому место расположения микрофона не существенно. Впервые эта идея была осуществлена Беллом для замкнутого объема газа еще в 1881 г. (см. обзор [11]) и с тех пор с успехом применялась для изучения спектров поглощения различных газов. В подобном методе, впрочем, не было особой необходимости, так как газовые спектры легко поддаются исследованию обычными фотометрическими методами. Лишь в

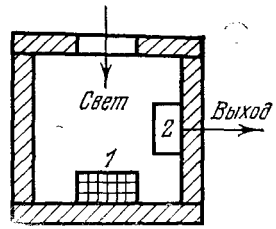


Рис. 13.17. Фотоакустическая ячейка: *1*— исследуемый образец, *2* — микрофон.

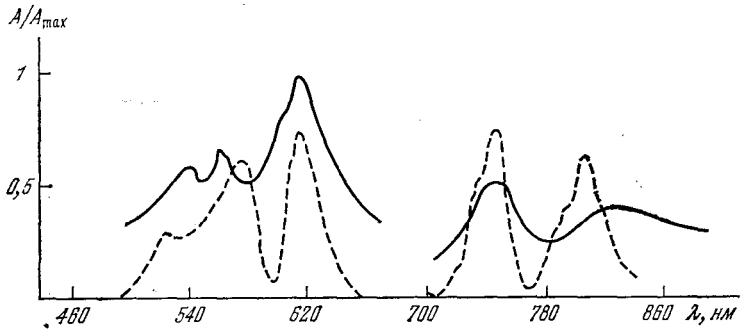


Рис. 13.18. Спектры поглощения кристалла $NdCl_3$ [12]: сплошная линия — фотоакустический спектр $NdCl_3$ (порошок), штриховая линия — спектр, полученный фотометрическим методом.

последнее время в связи с потребностями биологии и химии описанный метод спектрального анализа, получивший наименование *фотоакустическая спектроскопия* (ФАС), стал интенсивно развиваться применительно к исследованиям спектров жидкостей и твердых тел [12, 52—54]. В этой области преимущество ФАС перед традиционными методами спектрального анализа состоит в том, что она позволяет исследовать оптически непрозрачные вещества, в том числе порошки и живые ткани.

Кроме чисто спектроскопических исследований, с помощью фотоакустической спектроскопии можно изучать тепловые свойства твердых тел и порошков, а также проводить измерения спектров излучения источников света [12]. В последнем случае в качестве поглощающего свет объекта — детектора излучения — используют вещество с широким спектром поглощения, например угольный порошок. Теоретический анализ изменения давления в ячейке при поглощении света проводился в работах [53, 54]. Об экспериментальных работах, посвященных измерениям спектров поглощения различных веществ, можно прочитать в статье [12]. В тех случаях, когда вещества оптически прозрачны, спектры, измеренные с помощью фотоакустической спектроскопии, оказываются весьма похожими на спектры, измеренные классическими методами. В этом легко убедиться из рис. 13.18, на котором изображены спектры поглощения, снятые методом фотоакустической спектроскопии и фотометрическим методом для кристалла $NdCl_3$ [12]. Видно, что результаты, полученные обоими способами, хорошо согласуются между собой, за исключением областей слабого поглощения. Наличие фона, характерного для фотоакустической спектроскопии, объясняется переотражениями проходящего через объект света на стенках ячейки.

5. Управление лазерным излучением и акустооптические процессоры. Акустическое воздействие на параметры лазерного излучения, в частности амплитудная или частотная модуляция, обычно осуществляется посредством дифракции света на звуке как в раман-натовском, так и в брэгговском режимах [5—7, 19]. При этом используется пространственное разделение световых лучей, соответствующих различным дифракционным порядкам. Согласно формулам (2.8) и (2.10), в обоих режимах может быть обеспечена 100%-ная амплитудная модуляция как дифрагированного, так и прошедшего света (в последнем случае требуется определенный выбор параметра v). Эффективность модуляции, характеризующая уровень управляющей акустической мощности, зависит от упругооптических коэффициентов используемых материалов. Анализ показывает, что для кристаллов с высоким акустооптическим качеством (TeO_2, As_2S_3 и др.*)) при прочих равных условиях требуются меньшие управляющие мощности, чем в лучших электрооптических модуляторах [6]. Совершенно новые возможности открывает модуляция лазерного излучения поверхностными акустическими волнами [21]. Высокая концентрация энергии поверхностной волны вблизи границы делает модуляцию достаточно эффективной даже при использовании материалов с невысоким упругооптическим качеством.

В ряде приложений, например в проекционном телевидении, необходимы устройства управляемого отклонения, или сканирования, светового пучка — *дефлекторы*. Управление величиной угла

*) Об особенностях акустооптического взаимодействия в анизотропных кристаллах см. [55].

отклонения с помощью звукового воздействия может быть осуществлено за счет изменения частоты управляющей акустической волны. Для более низких частот звука в целях отклонения светового пучка может использоваться и обычная рефракция света на неоднородности коэффициента преломления, создаваемой стоячей звуковой волной (так называемые *градиентные дефлекторы*). В этом случае величина угла отклонения пропорциональна мощности волны [6].

Способность ультразвуковых волн отклонять световые пучки может быть использована и для обработки сигналов. Предложено много разновидностей предназначенных для этого устройств — *акустооптических процессоров* [5—7, 21, 56], которые способны осуществлять фильтрацию сигналов, в том числе их сжатие во времени, вычисление функций свертки и корреляции, анализ спектра и т. д. Следует, однако, отметить, что области применения акустооптических процессоров пока ограничены вследствие их недостаточной конкурентоспособности (по параметрам и технологичности) с существующими, например, акустоэлектронными устройствами.

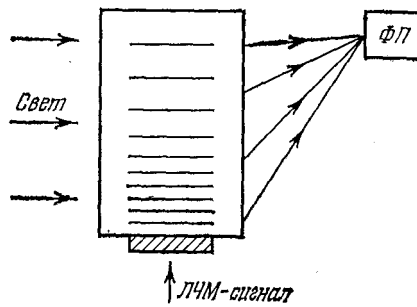


Рис. 13.19. Акустооптический фильтр сжатия ЛЧМ-сигналов.

Например, сжатие ЛЧМ-сигнала во времени может быть осуществлено с помощью устройства, изображенного на рис. 13.19. Принцип действия его основан на том, что углы рассеяния света, прошедшего через различные участки звукового поля, обратно пропорциональны длине волны звука. Поэтому весь дифрагированный свет практически одновременно попадает на вход фотоприемника, что и влечет за собой сжатие ЛЧМ-сигнала. Коэффициенты сжатия для устройств подобного типа составляют ~100 [6, 56]. Для сравнения вспомним, что в акустоэлектронных фильтрах с апериодическими отражательными решетками (см. § 4 гл. 12) этот параметр достигает нескольких десятков тысяч. Используя нелинейность характеристики фотоприемника, можно получить функцию свертки двух противоположно направленных акустических сигналов [57]. Для этого на кристалл нужно направить пучок света и выделить с фотоприемника дифрагированный световой сигнал на двойной частоте. Согласно [57] вносимые потери устройства, использующего дифракцию на поверхностных акустических волнах, составляли 44 дБм, что вполне сопоставимо с эффективностью акустоэлектронных устройств свертки на основе токовой нелинейности (см. § 7 гл. 12). Для повышения конкурентоспособности акустооптических процессоров необходимы дальнейшие поиски материалов с высокими фотоупругими свойствами. Определенные возможности здесь открывает использование взаимодействия света с волнами пространственного заряда, сопровождающего распро-

странение акустических волн в пьезополупроводниках [58]. Такое взаимодействие наиболее эффективно для инфракрасного диапазона частот света, где оно превалирует над обычным механизмом фотоупругости.

6. Акустолюминесценция кристаллов. Недавно было обнаружено новое нелинейное акустооптическое явление [59] — акустическая волна сверхпороговой интенсивности может вызвать свечение кристалла. Это явление было названо *акустолюминесценцией*, поскольку энергия, необходимая для возбуждения люминесценции,

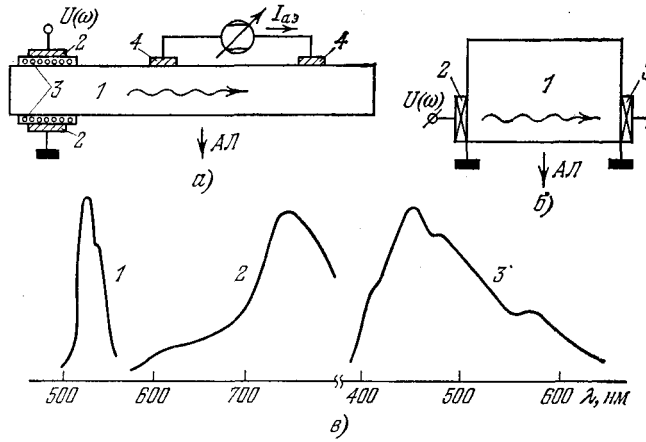


Рис. 13.20. Схемы экспериментов по изучению акустолюминесценции (*АЛ*) кристаллов CdS(*а*), NaCl (*б*) и спектры акустолюминесценции (*в*) для двух образцов CdS — кривые *1* и *2* и образца NaCl — кривая *3*. На схеме (*а*): *1* — образец CdS, *2* — металлические электроды, *3* — тефлоновая пленка, *4* — индиевые контакты съема акустоэлектрического тока. На схеме (*б*): *1* — образец NaCl, *2* и *3* — пьезопреобразователи.

подводится к кристаллу акустической волной *). Схема эксперимента и вид спектров люминесценции приведены на рис. 13.20, взятом из работы [61]. В пластине пьезоэлектрического кристалла CdS (*1*, рис. 13.20, *а*) ультразвук возбуждался за счет собственного пьезоэффекта при приложении к электродам *2* напряжения $U(\omega)$ от генератора. Между кристаллом и электродами были вставлены диэлектрические тефлоновые пленки *3* толщиной 5 мкм, которые предотвращали инжекцию носителей заряда из электродов в кристалл. Нанесенные на пластину омические электроды *4* позволяли регистрировать акустоэлектрический ток $I_{аэ}$ (см. § 6 гл. 12), возникающий при освещении полупроводникового кристалла CdS. По величине $I_{аэ}$ можно было рассчитать интенсивность ультразвука. В случае непьезоэлектрических кристаллов (рис. 13.20, *б*) ультразвук возбуждался внешними пьезопреобразователями *2*, *3*. Спектры акустолюминесценции кристаллов CdS (*1*, *2*) и щелочно-галоидного кристалла NaCl (*3*) показаны на рис. 13.20, *в*.

*) Явление акустолюминесценции было предсказано в теоретической работе [60].

Согласно [51] механизм описанной акустолюминесценции является собственно дефектным. Он заключается в том, что ультразвук сверхпороговой интенсивности ($\geqslant 1$ Вт/см^2 для CdS и $\geqslant 10$ Вт/см^2 для NaCl) генерирует в кристалле оптически активные точечные дефекты типа вакансий и межузельных атомов. Например, для CdS это будут доноры в запрещенной зоне — межузельный Cd и вакансия S, а также акцепторы в валентной зоне — межузельная S и вакансия Cd. Излучательные переходы электронов из доноров (или зоны проводимости) на акцепторы (или в валентную зону) как раз и дают излучение акустолюминесценции. Собственно дефектный механизм акустолюминесценции косвенно подтверждается в ряде экспериментов по исследованию влияния ультразвука сверхпороговой интенсивности на акустоэлектронные свойства CdS, а также на уменьшение электромеханической связи, на спектры отражения и пропускания CdS, на спектры фотолюминесценции донорно-акцепторных пар и др. Прямым подтверждением является наблюдаемое на опыте размножение дислокаций в CdS, NaCl и KCl при нагружении кристаллов ультразвуком сверхпороговой интенсивности *). Генерация точечных дефектов при этом производится движущимися в поле ультразвука дислокациями.

Еще одной разновидностью люминесценции кристаллов является так называемая акустоинжекционная люминесценция. Она возникает при распространении пьезоактивной ультразвуковой волны вдоль металлизированной поверхности пьезоэлектрика. Нормальная к поверхности составляющая сопровождающего звук электрического поля, которая не обращается в нуль, приводит к инжекции носителей заряда из металлического покрытия в кристалл. Если металлизация выполнена так, что возможна инжекция электронов и дырок (металлизация индием или галлием кристаллов CdS), то ультразвук будет инжектировать электроны и дырки из такого покрытия в кристалл, так как пьезоэлектрическое поле знакопеременно. Излучательная рекомбинация этих электронов и дырок и дает излучение акустоинжекционной люминесценции. В экспериментах акустоинжекционная люминесценция наблюдалась в CdS, металлизированном In и In — Ga.

С практической точки зрения акустоинжекционная люминесценция перспективна для создания различных оптоэлектронных и акустоэлектронных устройств. С научной стороны интересна собственно дефектная акустолюминесценция, с использованием которой можно по-новому изучать свойства точечных дефектов в кристаллах.

---

*) О размножении дислокаций см. также § 6 гл. 10.

Глава 14

ВОЛНЫ В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ

§ 1. Основные сведения о магнитоупорядоченных кристаллах

В настоящей главе мы кратко рассмотрим некоторые особенности распространения волн в магнитоупорядоченных кристаллах. Интерес к этой проблеме связан, во-первых, с тем, что изучение магнитных и упругих колебаний атомов в таких кристаллах представляет собой физическую основу многочисленных методов возбуждения звука магнитным полем. Во-вторых, некоторые свойства различных типов волн в магнитоупорядоченных кристаллах перспективны для использования в устройствах обработки сигналов. Хотя главное внимание ниже мы уделим квазиакустическим волнам, т. е. волнам, переносящим в основном механическую энергию, будут затронуты и основы теории спиновых волн. Ознакомление с особенностями этого специфического вида волнового движения в магнитоупорядоченных кристаллах необходимо для понимания свойств акустических колебаний.

Характерной чертой магнитоупорядоченных кристаллов, отличающей их от кристаллов диа- и парамагнетиков, является наличие у них упорядоченной ориентации магнитных моментов атомов, приводящей к существованию постоянного магнитного момента даже в отсутствие внешнего магнитного поля [1—8]. Это обусловлено тем, что между атомами такого кристалла, которые, как и атомы парамагнетиков, обладают собственными магнитными моментами (последние имеют в основном спиновую природу), существует сильное обменное взаимодействие. В состояние магнитной упорядоченности в принципе может перейти любой парамагнитный кристалл, если значение энергии обменного взаимодействия превышает среднюю энергию теплового движения $k_{\text{Б}}T$.

Все магнитоупорядоченные кристаллы принято подразделять на три группы — *ферромагнетики*, *антиферромагнетики* и *ферримагнетики* (или *ферриты*). Ферромагнетики обладают наиболее простой структурой, так как магнитные моменты всех атомов ориентированы параллельно (рис. 14.1, *а*). Величина магнитного момента кристалла при этом равна арифметической сумме магнитных моментов атомов. Структура антиферромагнетиков сложнее. В простейшем случае магнитные моменты соседних атомов в них ориентированы антипараллельно друг другу и суммарный магнитный момент кристалла равен нулю (рис. 14.1, *б*) (обычно имеющийся остаточный магнитный момент обусловлен слабыми

силами необменного происхождения, вызывающими незначительные отклонения моментов атомов от антипараллельности). Антиферромагнитную структуру можно рассматривать как совокупность двух вложенных друг в друга одинаковых *магнитных подрешеток* с противоположно направленными магнитными моментами. Ферримагнетики по своей структуре сходны с антиферромагнетиками, но отличаются от последних тем, что их магнитные подрешетки состоят из атомов разных сортов и характеризуются различными магнитными моментами, так что суммарный момент у них существенно отличен от нуля и по порядку величины сравним с моментами подрешеток (рис. 14.1, *в*).

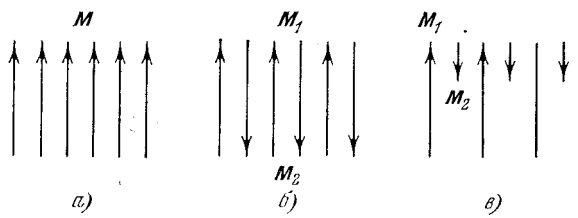


Рис. 14.1. Типы магнитных структур.

Энергия обменного взаимодействия $E_{об}$ по порядку величины равна $\xi q^2/a \sim 10^{-20}$ Дж, где q — заряд электрона, a — постоянная решетки, характеризующая расстояние между соседними атомами, $\xi \sim 10^{-1}$ — степень перекрытия волновых функций взаимодействующих атомов. Сопоставляя данное значение обменной энергии с энергией теплового движения $k_Б T$, получим оценку температуры перехода кристалла в магнитоупорядоченное состояние ~ 1000 °С, согласующуюся с данными экспериментов. В случае ферромагнетиков температуру перехода называют *температурой Кюри* T_c, а в случае антиферромагнетиков — *температурой Нееля* T_N.

Кроме обменных взаимодействий, вносящих основной вклад в упорядочение ориентаций магнитных моментов атомов, важную роль в физике магнитоупорядоченных кристаллов играют и взаимодействия иной природы. Одним из них является магнитное взаимодействие между атомами с отличными от нуля магнитными моментами — так называемое *диполь-дипольное взаимодействие*, или *магнитное дипольное взаимодействие*. Величину связанной с ним энергии можно оценить выражением $E_д \sim \mu_Б^2/a^3$, где $\mu_Б = q\hbar/2mc$ — магнетон Бора, по порядку величины совпадающий с магнитным моментом атома. С учетом того, что $\hbar/2ma$ близко к скорости движения v электрона по орбите, выражение для $E_д$ можно переписать в виде $E_д \sim (v/c)^2 E_{эл} \sim 10^{-4} E_{эл}$, где $E_{эл} \sim q^2/a$ — энергия электростатического взаимодействия. Таким образом, энергия магнитного дипольного взаимодействия, которое из-за наличия множителя $(v/c)^2$ принято называть релятивистским, на три порядка меньше энергии обменного взаимодействия $E_{об} \sim 10^{-1} E_{эл}$. Несмотря на это, магнитное дипольное взаимодействие ответственно за ряд

свойств магнитоупорядоченных кристаллов. В частности, оно вносит существенный вклад в установление направления спонтанного магнитного момента кристалла относительно кристаллической решетки, так как энергия $E_д$ зависит от ориентации магнитных моментов атомов относительно прямой, проходящей через их центры (отметим, что обменная энергия практически не зависит от взаимной ориентации магнитных моментов атомов и кристаллической решетки). В результате этого магнитные моменты атомов — спины, оставаясь параллельными вследствие действия обменных сил, стремятся ориентироваться относительно кристаллической решетки таким образом, чтобы энергия $E_д$ была минимальной, т. е. кристалл обладает так называемой *магнитокристаллической*, или *магнитной анизотропией*. Направление, вдоль которого спонтанно ориентируются спины атомов, называется направлением или осью легкого намагничивания (их может быть несколько), а соответствующий тип магнитной анизотропии называется *анизотропией типа «легкая ось»*.

Возможны и более сложные типы анизотропии, в частности *анизотропия типа «легкая плоскость»*. В последнем случае направления легкого намагничивания образуют плоскость, расположенную перпендикулярно к оси анизотропии. Другим типом взаимодействия, который также играет важную роль в формировании магнитокристаллической анизотропии, является *спин-орбитальное взаимодействие*, которое, как и магнитное дипольное взаимодействие, пропорционально $(v/c)^2$, т. е. относится к релятивистским. Обусловленную перечисленными механизмами часть полной энергии магнитоупорядоченного кристалла, зависящую от направления, принято называть *энергией магнитной анизотропии* w_a. Именно энергией w_a в значительной степени определяется магнитоупругое взаимодействие, или магнитострикция.

С феноменологической точки зрения магнитоупорядоченные кристаллы описываются с помощью *вектора намагниченности* $\boldsymbol{M}$, представляющего собой магнитный момент единицы объема кристалла, и так называемого *эффективного магнитного поля* $\boldsymbol{H}_{эфф}$, моделирующего все силы, действующие на магнитный момент со стороны других атомов (в том числе немагнитные обменные силы) и со стороны внешнего поля. Если учитывать только обменные силы, то эффективное поле можно представить в виде

$$\boldsymbol{H}_{эфф} = \boldsymbol{H}^{(e)} + \boldsymbol{H}_{об} = \boldsymbol{H}^{(e)} + \lambda_W \boldsymbol{M},$$

где $\boldsymbol{H}^{(e)}$ — внешнее магнитное поле, а $\boldsymbol{H}_{об} = \lambda_W \boldsymbol{M}$ — так называемое *обменное*, или *молекулярное поле*, λ_W — постоянная Вейсса, пропорциональная энергии обменного взаимодействия. Порядок величины $\boldsymbol{H}_{об}$ легко оценить, приравнивая энергию атома, на который действует поле $\boldsymbol{H}_{об}$, к энергии теплового движения при температуре перехода кристалла, например ферромагнетика, в магнитоупорядоченное состояние $\mu_Б H_{об} \approx k_Б T_c$. Полагая $T_c \sim 1000$ °C, получаем $H_{об} \sim 10^7$ Э, т. е. обменное, а значит, и эффективное поля оказываются очень большими.

§ 2. Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках

Существование *спиновых волн* (открыты Блохом в 1930 г.) в магнитоупорядоченных однодоменных кристаллах (обычно наличие доменов в таких кристаллах снимается внешним магнитным полем) обусловлено характерной для них сильной корреляцией между ориентациями спинов отдельных атомов, благодаря чему изменение ориентации спина в одной точке пространства распространяется в другие области в виде волн (рис. 14.2). С феноменологической

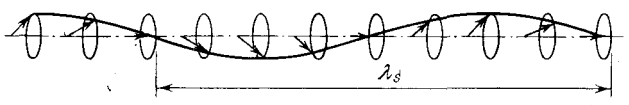


Рис. 14.2. Спиновые волны в линейной цепочке атомов.

точки зрения спиновые волны можно описывать с помощью вектора намагниченности, или, что то же, плотности магнитного момента $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)$. Уравнение движения для плотности магнитного момента, определяющее его изменение со временем, имеет следующий вид (см., например, [1]):

$$\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)/\partial t = g[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t) \times \boldsymbol{H}_{\text{эфф}}(\boldsymbol{r}, t)]. \qquad (2.1)$$

Здесь $g=2\mu_{\text{Б}}/\hbar$ — так называемое гиромагнитное отношение, $\mu_{\text{Б}}$ — магнетон Бора, $\boldsymbol{H}_{\text{эфф}}$ — эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент, которое формально можно ввести с помощью функциональной производной от *полной магнитной энергии* $W_{\text{м}}$ магнитоупорядоченного кристалла по вектору намагниченности

$$\boldsymbol{H}_{\text{эфф}} = -\delta W_{\text{м}}/\delta \boldsymbol{M}. \qquad (2.2)$$

Если внешнее магнитное поле постоянно и обменная связь между атомами в кристалле отсутствует (случай парамагнетика), т. е. $\boldsymbol{H}_{\text{об}}=0$, то уравнение (3.1) будет описывать вращение (прецессию) вектора намагниченности $\boldsymbol{M}$ относительно направления внешнего поля $\boldsymbol{H}_0^{(e)}$ с частотой $\omega_0=gH_0^{(e)}$, которая называется *частотой магнитного резонанса*. Модуль вектора $\boldsymbol{M}$ и его проекция на направление магнитного поля при этом сохраняются, что соответствует сохранению магнитной энергии $W_{\text{м}}^{(0)}=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{H}_0^{(e)}$.

При наличии обменной связи между атомами в кристалле, а именно этот случай и будет нас интересовать, необходимо полностью выписать выражение для $\boldsymbol{H}_{\text{эфф}}$, что мы проделаем для случая ферромагнитных кристаллов. При изложении этого вопроса мы будем следовать монографии [1], по возможности придерживаясь принятых там обозначений.

Рассмотрим сначала случай ферромагнетика. Выражение для магнитной энергии при этом можно записать в виде

$$W_{\text{м}} = \int_V \{F(\boldsymbol{M}, \partial M_i/\partial x_k) + 1/8\pi\,(\boldsymbol{H}^{(m)})^2 - \boldsymbol{M}\boldsymbol{H}_0^{(e)}\}\, d\boldsymbol{r}, \qquad (2.3)$$

где величина $F(\boldsymbol{M}, \partial M_i/\partial x_k)$ под интегралом описывает плотность энергии обменного, магнитного дипольного и спин-орбитального взаимодействий, второй член характеризует только энергию магнитного дипольного взаимодействия (величина $\boldsymbol{H}^{(m)}$ представляет собой поле, создаваемое магнитными моментами атомов — так называемое поле размагничивания), а третий член — энергию ферромагнетика в стороннем постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0^{(e)}$. Функция F имеет вид

$$F\left(\boldsymbol{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial x_k} + w_a(\boldsymbol{M}) + f(M^2), \qquad (2.4)$$

где $\alpha_{ik} \sim T_c a^2/\mu_B M$ — *обменные постоянные*, $f(M^2)$ — некоторая функция от M^2, отвечающая в основном энергии обменного взаимодействия, $w_a(\boldsymbol{M})$ — плотность энергии магнитной анизотропии. Для одноосных ферромагнетиков $w_a(\boldsymbol{M}) = -(1/2)\beta(\boldsymbol{Mn})^2$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси анизотропии, а β — постоянная, которая может быть как положительной, так и отрицательной. В случае $\beta > 0$ ферромагнетик обладает анизотропией типа «легкая ось» (энергия $W_м$ минимальна при $\boldsymbol{M} \| \boldsymbol{n}$), а в случае $\beta < 0$ — «легкая плоскость» (энергия $W_м$ минимальна при $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{n}$) (см., например, [6]). Заметим, что выражения (2.3) и (2.4) для магнитной энергии ферромагнетика, строго говоря, справедливы только для статических полей. Однако ими можно пользоваться и тогда, когда величины $\boldsymbol{H}^{(m)}$ и $\boldsymbol{M}$ медленно изменяются со временем. При этом в уравнениях Максвелла удобно перейти к приближению магнитостатики:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^{(m)} = 0, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{H}^{(m)} + 4\pi \boldsymbol{M}) = 0. \qquad (2.5)$$

Из (2.2) — (2.4) можно получить выражение для эффективного магнитного поля

$$\boldsymbol{H}_{эфф} = \boldsymbol{H}^{(i)} - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{M}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial(\partial \boldsymbol{M}/\partial x_k)},$$

откуда

$$\boldsymbol{H}_{эфф} = \boldsymbol{H}^{(i)} - \frac{\partial w_a}{\partial \boldsymbol{M}} - 2\boldsymbol{M}f'(M^2) + \alpha_{ik}\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad (2.6)$$

где $\boldsymbol{H}^{(i)} = \boldsymbol{H}^{(m)} + \boldsymbol{H}_0^{(e)}$ — магнитное поле внутри кристалла.

Интересуясь малыми колебаниями плотности магнитного момента $\boldsymbol{M}$ и магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(i)}$ относительно равновесных значений $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0^{(i)}$, представим их в виде

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{H}_0^{(i)} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t). \qquad (2.7)$$

Будем искать решения для $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t)$ в виде плоских гармонических волн:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{m}(\omega, \boldsymbol{k}) \exp[i(\boldsymbol{kr} - \omega t)], \\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{h}(\omega, \boldsymbol{k}) \exp[i(\boldsymbol{kr} - \omega t)]. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Подстановка (2.8) в (2.7), (2.6) и (2.1) позволяет получить следующее линейное соотношение между компонентами $\boldsymbol{m}(\omega, \boldsymbol{k})$

и $\boldsymbol{h}(\omega, \boldsymbol{k})$:

$$m_i(\omega, \boldsymbol{k}) = \varkappa_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) h_j(\omega, \boldsymbol{k}), \tag{2.9}$$

где тензор $\varkappa_{ij}$, называемый *тензором высокочастотной магнитной восприимчивости ферромагнетика*, зависит от g, $\boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{H}_0^{(i)}$, α_{ij}, β и взаимной ориентации векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{M}_0$. Подстановка (2.7), (2.8) с учетом (2.9) в (2.5) позволяет получить дисперсионное уравнение для спиновой волны

$$k^2 + 4\pi k_i k_j \varkappa_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = 0. \tag{2.10}$$

Раскрывая $\varkappa_{ij}(\omega, k)$, можно показать, что при $\alpha k^2 \gg 1$, где α — максимальное значение α_{ij} (это соответствует частотам $\sim 10^{11}$ Гц), выражение (2.10) существенно упрощается:

$$\omega(\boldsymbol{k}) \approx g M_0 \alpha_{ij} k_i k_j \tag{2.11}$$

и в изотропном случае принимает вид

$$\omega(\boldsymbol{k}) \approx (g M_0 \alpha / a^2)(ak)^2 \approx g H_{об} (ak)^2, \tag{2.12}$$

где a — постоянная решетки.

Схематическое изображение дисперсионной зависимости для спиновых волн, соответствующей уравнению (2.10), представлено на рис. 14.3. Видно, что при малых k частота ω мало отличается от $\omega(0)$, которую называют *частотой ферромагнитного резонанса*. С возрастанием k значение ω растет квадратичным образом согласно формулам (2.11) и (2.12). Отметим, что волны с векторами $\boldsymbol{k}$, соответствующими области $\omega \sim \omega(0)$, в литературе часто называют *магнитостатическими* [9, 10]. Свойства их сильно зависят от состояния границ кристалла.

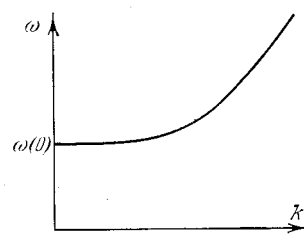


Рис. 14.3. Дисперсионная зависимость для спиновых волн в ферромагнетике.

Отметим, что для спиновых волн (тепловых или когерентных) на квантовом языке употребляют термин *магнон* — квант магнитной энергии, подобно тому как для дебаевских волн и когерентных акустических волн используется термин фонон — квант упругой энергии. Магноны, так же как и фононы, подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна и вносят свой вклад в теплоемкость и теплопроводность магнитоупорядоченных кристаллов.

Затухание спиновых волн происходит как в результате взаимодействий волн между собой, так и с дефектами и тепловыми колебаниями кристаллической решетки. Многочисленные механизмы затухания могут быть учтены феноменологически. Для этого в уравнение для намагниченности (2.1) нужно добавить аддитивный релаксационный член $\boldsymbol{R}$, который, в частности, можно задать в форме [1]

$$\boldsymbol{R} = \tau_1^{-1} \boldsymbol{H}_{эфф} - \tau_2^{-1} [\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_{эфф}]], \tag{2.13}$$

где τ_1 и τ_2 — константы с размерностью времени. Решая уравнение (2.1) с учетом (2.13) для одноосного ферромагнетика в случае, когда магнитное поле направлено вдоль оси легкого намагничивания, можно показать, что вектор $\boldsymbol{M}$ прецессирует с затуханием, приближаясь к своему равновесному значению $\boldsymbol{M}_0$. Параллельная по отношению к внешнему магнитному полю и перпендикулярная составляющие добавки $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_0$ релаксируют при этом с различными временными декрементами — соответственно $1/T_1 \sim 1/\tau_1$ и $1/T_2 \sim 1/\tau_1 + 1/\tau_2$. Величины T_1 и T_2 называют *продольным* и *поперечным временами релаксации намагниченности*.

Нетрудно получить линейное соотношение между $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{m}$ с учетом диссипации, по форме совпадающее с (2.9). Однако величины $\varkappa_{ij}$ в этом соотношении получат комплексные добавки в знаменателях. В результате функция $\omega(\boldsymbol{k})$, согласно (2.10), тоже станет комплексной, причем действительная часть $\omega(k)$ будет описывать частоту, а мнимая — временное затухание.

Остановимся теперь вкратце на распространении спиновых волн в антиферромагнетиках. Магнитная энергия антиферромагнетика может быть записана в виде, аналогичном (2.3), однако соответствующие плотности энергии будут теперь зависеть от магнитных моментов подрешеток $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$. Для некоторых антиферромагнетиков к величине w_a нужно добавить дополнительное слагаемое $w_D = d([\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2]\boldsymbol{n})$, впервые введенное И. Е. Дзялошинским. Здесь d — константа того же порядка, что и β. Наличие энергии w_D приводит к тому, что в отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты подрешеток $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ ориентированы не точно противоположно друг другу и полный момент антиферромагнетика отличен от нуля. По этой причине такие среды называют *антиферромагнетиками со слабым ферромагнетизмом*. Поскольку, однако, энергия w_D, так же как и $E_д$, имеет не обменную, а релятивистскую природу, этот остаточный магнитный момент очень мал. Тем не менее в ряде случаев (§ 5) его роль значительна.

Для феноменологического описания спиновых волн в антиферромагнетиках необходимо использовать уравнения движения намагниченности для каждой из подрешеток. В простейшем случае таких уравнений будет два:

$$\partial \boldsymbol{M}_1/\partial t = g[\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{H}^{(1)}_{эфф}], \quad \partial \boldsymbol{M}_2/\partial t = g[\boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{H}^{(2)}_{эфф}], \tag{2.14}$$

где $\boldsymbol{H}^{(1)}_{эфф}$ и $\boldsymbol{H}^{(2)}_{эфф}$ — эффективные магнитные поля, действующие на магнитные моменты $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ и определяемые с помощью соотношений

$$\boldsymbol{H}^{(1)}_{эфф} = -\delta W_м/\delta \boldsymbol{M}_1, \quad \boldsymbol{H}^{(2)}_{эфф} = -\delta W_м/\delta \boldsymbol{M}_2. \tag{2.15}$$

Поступая далее аналогично случаю ферромагнетиков, можно получить по форме совпадающее с (2.9) линейное соотношение между компонентами суммарного переменного магнитного момента антиферромагнетика $\boldsymbol{m}(\omega, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{m}_1(\omega, \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{m}_2(\omega, \boldsymbol{k})$ и магнитного поля $\boldsymbol{h}(\omega, \boldsymbol{k})$. Тензор $\varkappa_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ будет теперь, однако, иметь другой вид. Спектр спиновых волн в антиферромагнетиках можно определить

по известным $\varkappa_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ из общего дисперсионного уравнения (2.10), которое справедливо как для ферро-, так и для антиферромагнетиков. В отличие от ферромагнетиков, в антиферромагнетиках заданному волновому вектору $\boldsymbol{k}$ соответствует не одна, а две частоты, т. е. имеются две ветви спиновых волн. Другое отличие проявляется в том, что для больших волновых чисел частоты обеих спиновых волн пропорциональны не квадрату волнового вектора, а его первой степени.

§ 3. Магнитоупругие волны

Рассматривая распространение спиновых волн в § 3, мы не учитывали их связи с упругими волнами в кристалле. Такая связь, однако, часто оказывается существенной и приводит к ряду интересных физических эффектов, в частности к существованию магнитоупругих волн, т. е. волн, переносящих как магнитную, так и механическую энергию [1—7].

Для феноменологического описания *магнитоупругого взаимодействия* необходимо ввести в рассмотрение плотность полной потенциальной энергии магнитоупорядоченного кристалла $\mathscr{E}_{\text{полн}}$. Последняя может быть представлена в виде суммы плотностей магнитной энергии $\mathscr{E}_{\text{м}}$, механической энергии $\mathscr{E}$ и так называемой магнитоупругой энергии $\mathscr{E}_{\text{му}}$. Именно энергия $\mathscr{E}_{\text{му}}$ характеризует связь между магнитными и механическими колебаниями кристалла. Если ограничиться рассмотрением линейных волновых явлений, то обычно достаточно принять во внимание только первый член разложения магнитоупругой энергии по степеням тензора деформации и вектора намагниченности. При этом в случае ферромагнетика $\mathscr{E}_{\text{му}}$ принимает вид

$$\mathscr{E}_{\text{му}} = b_{ijkl} u_{ij} M_k M_l, \tag{3.1}$$

где b_{ijkl} — тензор магнитоупругих постоянных. Эти постоянные отвечают за линейную магнитоупругую связь, или линейную магнитострикцию. Часто в литературе используется несколько иное определение магнитоупругих постоянных $\tilde{b}_{ijkl} = M^2 b_{ijkl}$. При этом, очевидно, $\mathscr{E}_{\text{му}} = \tilde{b}_{ijkl} u_{ij} (M_k/M)(M_l/M)$.

Дифференцируя $\mathscr{E}_{\text{полн}}$ по компонентам тензора деформации, можно получить уравнение состояния для механических напряжений σ_{ij}, в которое, кроме деформаций, теперь войдут компоненты вектора намагниченности. Вычисляя функциональную производную от полной потенциальной энергии по вектору намагниченности, можно получить выражение для эффективного поля $\boldsymbol{H}_{\text{эфф}}$, в которое наряду с вектором намагниченности войдут и деформации. К этим уравнениям нужно добавить уравнение движения намагниченности (2.1), механическое уравнение движения (8.2.1) и уравнения Максвелла в магнитостатическом приближении (2.5). Полагая далее, что смещения $\boldsymbol{u}$, а также малые отклонения магнитного момента $\boldsymbol{m}$ и поля $\boldsymbol{h}$ относительно положений равновесия $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0^{(i)}$ распространяются в пространстве в виде плоских волн $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{h} \sim \exp[i(\boldsymbol{kr}-$

$-\omega t]$), из названных уравнений можно получить законы дисперсии для связанных магнитных и упругих возмущений.

Не вдаваясь в подробности соответствующих довольно громоздких вычислений, приведем сразу конечные результаты, ограничившись для простоты случаем одноосного кубического ферромагнетика, изотропного относительно своих упругих свойств. Такой ферромагнетик имеет всего две независимые магнитоупругие постоянные: $l=b_{1111}$ и $f=b_{2323}$ [3]. Будем, кроме того, предполагать, что возмущения распространяются вдоль оси анизотропии (ось z), вдоль которой направлено и внешнее магнитное поле. При этом линеаризованные уравнения для циркулярных компонент $m^{\pm}=m_x \pm i m_y$ и $u^{\pm}=u_x \pm i u_y$ и компоненты u_z векторов $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{u}$ имеют вид [1—3]

$$\begin{aligned} &[\omega \mp \omega_s(\boldsymbol{k})]\, m^{\pm} = \pm\, ikfgM_0^2 u^{\pm}, \\ &[\omega^2 - \omega_t^2(\boldsymbol{k})]\, u^{\pm} = -\, ikf\,(M_0/\rho_0)\, m^{\pm}, \\ &[\omega^2 - \omega_l^2(\boldsymbol{k})]\, u_z = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\omega_s(\boldsymbol{k})=gM_0(\beta+\alpha k^2)$ — частота (дисперсионное уравнение) спиновой волны, а $\omega_l(\boldsymbol{k})=c_l k$ и $\omega_t(\boldsymbol{k})=c_t k$ — частоты продольных и поперечных упругих волн.

Таким образом, вдоль оси анизотропии могут распространяться продольная и циркулярно поляризованные поперечные волны. Из третьего уравнения (3.2) видно, что фазовая скорость волн продольных смещений совпадает с c_l. Это говорит о том, что в выбранном направлении продольные волны практически не взаимодействуют со спиновыми. Что касается поперечных волн, то из первых двух уравнений (3.2) нетрудно получить два дисперсионных уравнения:

$$\begin{aligned} &[\omega^2 - \omega_t^2(\boldsymbol{k})]\,[\omega - \omega_s(\boldsymbol{k})] - \eta g M_0 \omega_t^2(\boldsymbol{k}) = 0, \\ &[\omega^2 - \omega_t^2(\boldsymbol{k})]\,[\omega + \omega_s(\boldsymbol{k})] + \eta g M_0 \omega_t^2(\boldsymbol{k}) = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\eta=f^2M_0^2/\rho_0 c_t^2 \sim 10^{-5}-10^{-4}$ — малый параметр, определяющий связь между упругими и спиновыми волнами. Если $\eta=0$, то уравнения (3.3) дают частоты (дисперсионные уравнения) двух поперечных и спиновых волн. При $\eta \neq 0$ анализ (3.3) удобно провести в следующей последовательности. Пусть $|\omega_s(\boldsymbol{k})-\omega_t(\boldsymbol{k})| \gg \eta\omega_t(\boldsymbol{k})$. Тогда, пользуясь малостью η, нетрудно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_t(\boldsymbol{k}) \left[1 - \frac{1}{2}\,\eta \frac{gM_0}{\omega_s(\boldsymbol{k}) \pm \omega_t(\boldsymbol{k})}\right], \\ \omega &= \omega_s(\boldsymbol{k}) \left[1 + \eta \frac{gM_0\omega_t^2(\boldsymbol{k})}{\omega_s(\boldsymbol{k})\,(\omega_s^2(\boldsymbol{k}) - \omega_t^2(\boldsymbol{k}))}\right], \end{aligned} \tag{3.4}$$

которые определяют частоты, или дисперсионные уравнения магнитоупругих волн соответственно с правой и левой круговыми поляризациями. За счет разности этих частот при заданном $\boldsymbol{k}$, очевидно, возможно вращение плоскости поляризации линейно поляризован-

ной поперечной волны [2, 3] *). Из уравнений (3.4) видно, что в рассмотренном случае левополяризованная волна сильнее взаимодействует со спиновой, чем правополяризованная (знак «+» в (3.4)).

Пусть теперь $\omega_s(\boldsymbol{k}) \sim \omega_t(\boldsymbol{k})$. Тогда нетрудно показать, что разность частот левых круговых волн и ω_s и ω_t пропорциональна $\eta^{1/2}$, в отличие от рассмотренного выше случая, когда имеет место пропорциональность первой степени η. Поскольку $\eta \ll 1$, связь упругих волн со спиновыми при $\omega_s \sim \omega_t$ наиболее ярко выражена. По этой причине область частот и волновых векторов, лежащих в окрестности точки $\omega_s(\boldsymbol{k}_0) = \omega_t(\boldsymbol{k}_0)$, называется областью *магнитоакустического резонанса.*

Дисперсионные кривые для всех типов волн, распространяющихся вдоль оси анизотропии ферромагнетика в магнитостатическом приближении изображены на рис. 14.4. Видно, что в данном случае имеется четыре дисперсионные ветви, что и следовало ожидать в соответствии с общими представлениями о связанных волнах. Ветвь *1* отвечает невзаимодействующей со спиновой системой продольной звуковой волне, а ветвь *3* — поперечной магнитоупругой волне с правой круговой поляризацией, слабо взаимодействующей со спиновой волной. Кривые *2* и *4* при $k > k_0$ отвечают взаимодействующим поперечной магнитоупругой волне с левой круговой поляризацией и спиновой волне. При $k < k_0$ ситуация меняется на обратную — ветвь *2* соответствует спиновой волне, а ветвь *4* — звуковой. Волны *2* и *4* часто называют *связанными магнитоупругими волнами.* Подчеркнем еще раз, что каждая из распространяющихся волн характеризуется при этом как упругими смещениями, так и магнитными моментами, причем, как следует из (3.2), доля «магнитной части» в упругой волне и доля «механической части» в спиновой особенно значительны (одного порядка) при $\omega_s(\boldsymbol{k}) \sim \omega_t(\boldsymbol{k})$, т. е. в области магнитоакустического резонанса. Таким образом, возбуждение звука с помощью магнитных колебаний и, наоборот, спиновых волн посредством механических колебаний наиболее эффективно при $\omega_s(\boldsymbol{k}) \sim \omega_t(\boldsymbol{k})$. Частот магнитоакустического резонанса, очевидно, две. Одна из них, низшая, практически совпадает с $\omega(0)$ и для типичных параметров, используемых в эксперименте, составляет ~ 10 ГГц. Вторая частота лежит в области частот, близких к предельным частотам колебаний кристаллической решетки. Таким образом, явление магнитоакустического резонанса может быть использовано для генерации гиперзвука.

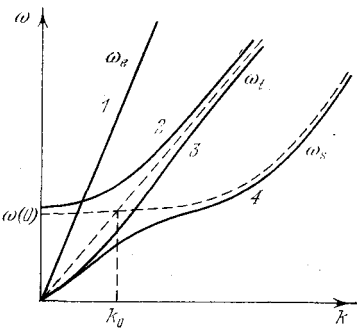


Рис. 14.4. Дисперсионные кривые магнитоупругих волн в ферромагнетике.

*) В ряде случаев возможны и чистые линейно поляризованные магнитоупругие волны (см. [3]).

Практически это осуществляется следующим образом. В ферромагнитном материале с помощью СВЧ резонатора возбуждается спиновая волна, которую на гиперзвуковых частотах возбудить проще, чем звуковую. Если напряженность постоянного магнитного поля уменьшается в направлении распространения, то значение k спиновой волны будет расти и в соответствии с рис. 14.4 волна из спиновой в конце концов превратится в звуковую. Подобным же образом можно осуществить и прием гиперзвуковой волны [11, 12].

Как и в случае немагнитных диэлектриков, вдоль границ магнитоупорядоченных кристаллов могут распространяться *поверхностные магнитоупругие волны* [13—16], в том числе волны рэлеевского типа [13, 14], чисто сдвиговые магнитоупругие волны [15], аналогичные волнам Гуляева — Блюштейна в пьезоэлектриках, и чисто сдвиговые волны, распространяющиеся вдоль границы между двумя кристаллами [16]. В последнее время поверхностные магнитоупругие волны начинают использоваться в устройствах обработки сигналов.

§ 4. Затухание магнитоупругих волн

Затухание магнитоупругих волн представляет собой сложный процесс. Он определяется взаимодействиями волн двух подсистем — упругой и магнитной, причем в общем случае необходимо учитывать как взаимодействия внутри каждой подсистемы — фонон-фононные, магнон-магнонные взаимодействия, так и взаимодействия между двумя подсистемами [2]. Однако в пределах широкого диапазона температур взаимодействия внутри каждой из подсистем выражены значительно сильнее, чем взаимодействия между подсистемами. Поэтому при феноменологическом описании затухания магнитоупругих волн можно пользоваться приближением, в котором затухание за счет магнон-фононных взаимодействий не учитывается. Для простоты будем, кроме того, считать, что в релаксационном члене (2.13) отсутствует слагаемое, описывающее изменение величины магнитного момента, т. е. $1/\tau_1=0$. Затухание упругих волн будем описывать с помощью изотропного тензора вязкости

$$\eta_{iklm} = (\eta_l - 2\eta_t)\,\delta_{ik}\,\delta_{lm} + \eta_t\,(\delta_{il}\,\delta_{km} + \delta_{im}\,\delta_{kl}).$$

Если считать, что магнитоупругая волна распространяется вдоль оси анизотропии, то от дисперсионных уравнений (3.3) для рассмотренных выше циркулярно поляризованных поперечных волн можно перейти к более общим дисперсионным уравнениям, учитывающим диссипативные процессы [1]:

$$\begin{aligned}
&[\omega^2 - \omega_t^2(1 - i\delta_t)]\,[\omega - \omega_s(1 - i\delta_s)] - \\
&\qquad - \eta g M_0 \omega_t^2\,[1 - i\delta_s(1 + (\omega_s - \omega)/2fgM_0)] = 0, \\
&[\omega^2 - \omega_t^2(1 - i\delta_t)]\,[\omega + \omega_s(1 + i\delta_s)] - \\
&\qquad - \eta g M_0 \omega_t^2\,[1 + i\delta_s(1 + (\omega_s + \omega)/2fgM_0)] = 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\delta_s = \frac{1}{gM_0\tau_2}$, $\delta_t = \frac{\omega}{\rho_0 c_t}\eta_t - \delta_s f\frac{M_0}{\rho_0 c_t^2}$. Как уже отмечалось в § 3, продольная волна, распространяющаяся вдоль оси анизотропии, не взаимодействует со спиновой подсистемой, поэтому для нее временной декремент затухания γ_l определяется так же, как и в чисто упругом случае, т. е.

$$\gamma_l = \delta_l\omega_l/2, \tag{4.2}$$

где $\delta_l = \omega\eta_l/\rho_0 c_l^2$. Для определения декрементов затухания магнитоупругих волн необходимо найти мнимые части корней дисперсионных уравнений (4.1) при заданном значении волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Так же, как и в § 3, при решении этих уравнений целесообразно различать два случая соотношений между частотами $\omega_s(\boldsymbol{k})$ и $\omega_t(\boldsymbol{k})$. В частности, при $\omega_s(\boldsymbol{k})\sim\omega_t(\boldsymbol{k})$, т. е. в окрестности магнитоакустического резонанса, для частот связанных магнитоупругих волн, отмеченных цифрами *2* и *4* на рис. 14.4, можно получить

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_s - \frac{i}{2}\omega_s(\delta_s+\delta_t) - \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[2gM_0\eta\omega_s(1-i\delta_s) - \omega_s^2(\delta_t-\delta_s)^2\right]^{1/2}, \\ \omega_4 &= \omega_s - \frac{i}{2}\omega_s(\delta_s+\delta_t) + \\ &\quad +\frac{1}{2}\left[2gM_0\eta\omega_s(1-i\delta_s) - \omega_s^2(\delta_t-\delta_s)^2\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что в случае достаточно сильной связи между магнитной и упругой подсистемами, а именно, при $\eta \gg (\delta_t - \delta_s)^2$, декременты затухания магнитоупругих волн равны и определяются выражениями $\gamma_2 = \gamma_4 = \omega_s(\delta_s+\delta_t)/2$. Если же связь мала по сравнению с затуханием, т. е. $\eta \ll (\delta_t - \delta_s)^2$, то $\gamma_2 = \omega_s\delta_s$ и $\gamma_4 = \omega_t\delta_t$. Интересно рассмотреть случай, когда решеточные потери значительно меньше потерь в спиновой системе, т. е. $\delta_t \leqslant \eta\delta_s$. Вдали от резонанса для декрементов поперечной волны с левой круговой поляризацией γ_{1t} и спиновой волны γ_{1s} имеем

$$\gamma_{1t} = (1/2)\eta\delta_s\omega_t gM_0\frac{\omega_s}{(\omega_t-\omega_s)^2}, \quad \gamma_s = \delta_s\omega_s,$$

а при резонансе — $\gamma_2 = \gamma_4 = \delta_s\omega_s/2$. Таким образом, при $\delta_t \leqslant \eta\delta_s$ затухание звука в окрестности магнитоакустического резонанса возрастает в $1/\eta$ раз, т. е. *на несколько порядков*. Если выполняется обратное соотношение — $\delta_s \leqslant \eta\delta_t$, то $\gamma_2 = \gamma_4 = \delta_t\omega_s/2$ и в $1/\eta$ раз увеличивается затухание спиновой волны. Экспериментально увеличение поглощения звука вблизи резонанса наблюдалось во многих работах (см., например, [3, 17, 18, 19].

§ 5. Нелинейные эффекты

Количественное описание нелинейных эффектов в магнитоупорядоченных кристаллах может быть получено, если в разложении полной энергии W учесть члены третьего порядка малости по поле-

вым переменным. Последние и будут в основном определять как волновые взаимодействия внутри каждой из подсистем, магнитной и упругой, так и взаимодействия между волнами разных подсистем. Выше уже отмечалось, что эти взаимодействия играют важную роль в процессах затухания магнитоупругих волн. Кроме того, они представляют существенный интерес для различных практических приложений [8]. Мы остановимся здесь на нелинейных эффектах в упругой подсистеме, т. е. будем интересоваться главным образом квазиакустическими волнами [20—22]. Поскольку, однако, упругая и спиновая подсистемы являются связанными, нелинейные свойства упругой подсистемы, тем не менее, существенно зависят от «магнитной» нелинейности и зачастую именно нелинейные свойства магнитной подсистемы оказывают определяющее влияние на нелинейное поведение упругих волн. Подобная ситуация, в частности, имеет место для антиферромагнетиков с анизотропией типа «легкая плоскость», например, для кристаллов гематита (α—Fe_2O_3) [23, 24].

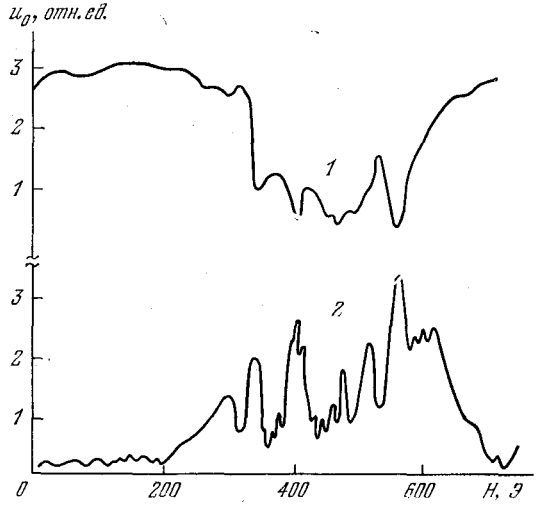


Рис. 14.5. Амплитуда первого прошедшего через кристалл звукового импульса (*1*) и амплитуда импульса второй гармоники (*2*) в зависимости от величины магнитного поля [25].

Особенностью этих кристаллов, делающей их полезными для различных практических применений, является то, что нелинейность, вносимая магнитной подсистемой в упругую, в них очень велика [24]. Ситуация здесь как качественно, так и количественно аналогична случаю токовой нелинейности в пьезополупроводниках, рассмотренной в гл. 12. Различие состоит в том, что в антиферромагнетиках эквивалентные упругие модули велики в области частот, начиная от нуля и кончая гигагерцевым диапазоном, в то время как электронная подсистема дает существенный вклад в упругую нелинейность только в окрестности частоты релаксации проводимости. Можно показать [24], что в антиферромагнетиках обуслов-

ленная магнитной подсистемой нелинейная добавка в разложении тензора напряжений σ_{ij} по степеням деформаций пропорциональна величине

$$\Delta c_{\text{нл}} = \tilde{b}^3 (H_E/M_0)^2 (\omega_{s0}/g)^{-4},$$

которая и определяет значения эквивалентных нелинейных упругих модулей. Здесь $\boldsymbol{H}_E$ — так называемое эффективное поле межподрешеточного обменного взаимодействия, $M_0 = |\boldsymbol{M}_{10}| = |\boldsymbol{M}_{20}|$, а ω_{s0} — частота антиферромагнитного резонанса, при малых внешних полях $H^{(e)}$ пропорциональная величине $(H^{(e)}H_D)^{1/2}$, где H_D — поле Дзялошинского (§ 2). Значение $\Delta c_{\text{нл}}$ для антиферромагнетиков типа α—Fe_2O_3 настолько велико, что обусловленные магнитной подсистемой нелинейные упругие модули в диапазоне значений внешнего магнитного поля $H^{(e)}$ (около 1 кЭ) на 2—3 порядка превосходят соответствующие решеточные нелинейные модули.

Описанная выше сильная нелинейность упругой подсистемы имеет место в широком диапазоне частот, т. е. носит нерезонансный характер. Столь же сильное увеличение нелинейных свойств упругой подсистемы, обусловленное влиянием спиновой подсистемы, существует в кристаллах железо-иттриевого граната и марганец-цинковой шпинели в окрестности магнитоакустического резонанса [25]. На рис. 14.5 представлена наблюдавшаяся в работе [25] зависимость амплитуды первого прошедшего через кристалл импульса сдвиговой упругой волны, распространяющейся вдоль направления [001] кристалла железо-иттриевого граната, и амплитуды второй гармоники упругой волны от слабого внешнего магнитного поля $H^{(e)}$. Частота волны составляла 30 МГц. Видно, что в окрестности резонанса, сильно уширенного вследствие малости $H^{(e)}$, наблюдается увеличение как поглощения звука, так и амплитуды второй гармоники акустической волны. Оба этих эффекта обусловлены сильной связью, существующей между упругой и магнитной подсистемами вблизи резонанса (в данном случае имеется более полная аналогия с акустоэлектронными поглощением и нелинейностью). На рис. 14.6 показана зависимость эффективного нелинейного параметра Г для генерации второй гармоники от величины магнитного поля, рассчитанная по экспериментальным зависимостям рис. 14.5 с учетом затухания основной волны. Видно, что в окрестности резонанса значение Г возрастает на 2—3 порядка по сравнению с величиной нелинейного параметра вдали от резонанса Γ_0. Качественно похожие результаты наблюдались и для марганец-цинковой шпинели.

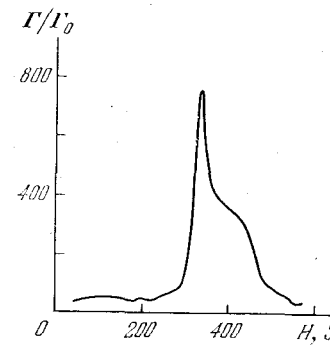


Рис. 14.6. Зависимость величины нелинейного параметра для генерации второй сдвиговой гармоники в железо-иттриевом гранате от величины прикладываемого магнитного поля [25].

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика.— М.; Л.: Физматгиз, ч. I, II, 1963.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ.— М.: Мир, 1973.
4. *Лэмб Х.* Гидродинамика: Пер. с англ.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
5. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
6. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1967.
7. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости.— М.: Наука, 1977.
8. *Стокер Дж.* Волны на воде: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1959.
9. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях: Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.
10. *Филлипс О.* Динамика верхнего слоя океана: Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
11. *Красильников В. А., Павлов В. И.*— Изв. АН СССР: сер. физ. атм. и океана, 1976, т. 12, с. 424.
12. *Колмогоров А. Н.*— ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 249; т. 32, с. 19.
13. *Обухов А. М.*— ДАН СССР, 1941, т. 32, с. 22; Изв. АН СССР: сер. геогр. и геофиз., 1941, т. 5, с. 453; 1949, т. 13, с. 58.
14. *Обухов А. М., Яглом А. М.*— ПММ, 1951, т. 15, с. 3.
15. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика.— М.: Наука, 1965; ч. I, 1967, ч. II.
16. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
17. Турбулентность, принципы и применения / Под ред. В. В. Струминского.— М.: Мир, 1980.
18. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности: Пер. с англ./ Под ред. А. М. Обухова.— М.: ИЛ, 1955.
19. *Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцев С. С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1976.
20. Атмосферная турбулентность: Сб. статей / Под ред. В. И. Татарского.— Труды ин-та физики атмосферы АН СССР, 1962, № 4.
21. *Обухов А. М.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1978, т. 19, с. 109.
22. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применения / Под ред. А. М. Обухова — М.: Наука, 1981.
23. *Монин А. С.*— УФН, 1978, т. 125, с. 97.
24. *Рабинович М. И.*— УФН, 1978, т. 125, с. 123.

К главе 2

1. *Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П.* Молекулярная акустика.— М.: Наука, 1964.
2. Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ./ Под ред. И. Г. Михайлова.— М.: Мир, 1968, т. 2, ч. А.
3. *Matheson A. J.* Molecular acoustics.— L.: Wiley, 1971.
4. *Stokes G. G.*— Cambridge Transactions, 1845, v. 8, p. 287.
5. *Рэлей.* Теория звука: Пер. с англ. /Под ред. С. М. Рытова.— М.: Гостехиздат, 1955.

6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
7. *Неклепаев Н.*— ЖРФХО, 1911, т. 43, с. 101.
8. *Pierce G. W.*— Proc. Amer. Acad. Boston, 1925, v. 60, p. 117.
9. *Kneser A. J.*— Ann. d. Phys. (5), 1931, v. 11, p. 761.
10. *Biquard P.*— Comt. rend., 1931, v. 193, p. 226; 1933, v. 197, p. 309.
11. *Hinsch B.*— Acustica, 1961, v. 11, p. 230.
12. *Bazulin P.*— Sow. Phys., 1935, v. 8, p. 354.
13. *Баранский К. Н.*— Кристаллография, 1957, т. 2, с. 299.
14. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. В. Леманова. — М.: Мир, 1972.
15. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1975.
16. *Мандельштам Л. И.*— ЖРФХО, 1926, т. 58, с. 381.
17. *Brillouin L.*— Ann. de Phys., 1922, v. 17, p. 88.
18. *Landau L., Placzek G.*— Sow. Phys., 1934, т. 5, с. 172.
19. *Gross E.*— Z. Phys., 1930, v. 63, p. 687.
20. *Ландсберг Г. С.* Вступ. статья к кн. К. Кольрауша «Спектры комбинационного рассеяния». Избр. труды.— М.: изд-во АН СССР, 1958, с. 355.
21. *Gross E.*— Nature, 1930, v. 126, p. 201, 400, 603.
22. *Фабелинский И. Л.* Молекулярное рассеяние света.— М.: Наука, 1965, с. 317.
23. *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.*— ЖЭТФ, 1937, т. 7, с. 438.
24. *Леонтович М. А.*— Изв. АН СССР: сер. физ., 1936, т. 5, с. 633.
25. *Леонтович М. А.*— ЖЭТФ, 1936, т. 6, с. 561.
26. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.
27. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— 2-е изд., перераб.— М.: Наука, 1979, с. 32.
28. *Гинзбург В. Л.*— Акуст. ж., 1955, т. 1, с. 31.
29. *Гинзбург В. Л., Мейман Н. Н.*— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 243.
30. *Крылов В. В.* — Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1982, т. 23, с. 42.
31. *Корнфельд М. И.* Упругость и прочность жидкостей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
32. *Mason W. P.*— Amer. Soc. Mech. Eng., 1947, v. 69, p. 359.
33. *Моор Р., Мак-Скимин Г.*— В кн.: Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ./Под ред. И. Л. Фабелинского.— М.: Мир, 1973, т. 6, с. 203.
34. *Barlow A. J., Lamb J., Matheson A. J.*— Proc. Roy. Soc. Lond. A, 1966, v. 292, p. 322.
35. *Старунов В. С., Тиганов Е. В., Фабелинский И. Л.*— Письма в ЖЭТФ, 1967, т. 5, с. 317.
36. *Баранский К. Н., Север Г. А., Величкина Т. С.*— Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 52.
37. *Кривохижа С. В., Фабелинский И. Л.*— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 3.
38. *Михайлов И. Г., Гуревич С. Б.*— ЖЭТФ, 1949, т. 19, с. 173.
39. *Михайлов И. Г.*— Распространение ультразвуковых волн в жидкостях.— Л.: Гостехиздат, 1949.
40. *Михайлов И. Г.*— Вестн. ЛГУ: сер. физ. и хим., 1947, № 3, с. 5.
41. *Шахпаронов М. И., Шорошев Ю. Г., Алиев С. С.* и др.— Письма в ЖЭТФ, 1968, т. 7, с. 401.
42. *Гладков С. М., Коротеев Н. И.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 213.
43. *Исакович М. А.*— ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 386.
44. *Исакович М. А., Чабан И. А.*— ЖЭТФ, 1966, т. 50, с. 1343.
45. *Чабан И. А.*— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 228.
46. *Бердыев А. А., Мухамедов В. А., Троицкий В. М., Хемраев Б.*— Акуст. ж., 1981, т. 27, с. 481.
47. *Михайлов И. Г., Громаковский Д. Г., Маринин В. Б.* и др.— ДАН, СССР, 1982, т. 266, с. 335.

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ./Под ред. А. Б. Шабата.— М.: Мир, 1977.
4. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях: Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.
5. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
6. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн.— М.: Наука, 1979.
7. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
8. *Beyer R. T.* Nonlinear Acoustics — U. S. Government printing office, Naval See Systems Command, U. S. A., 1975.
9. Мощные ультразвуковые поля/Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Наука, 1968.
10. *Заремба Л. К.* Теоретические основы нелинейной акустики: Учебное пособие.— Таганрог: Изд. Таганрогск. радиотехнич. ин-та, 1976.
11. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика.— Л.: Судостроение, 1981.
12. *Riemann B.*— Götting. Abhandl., 1860, v. 8. (Русский перевод: *Риман Б.* Сочинения.— М.: Гостехиздат, 1948.)
13. *Мясников Л. Л.*— ЖТФ, 1938, т. 8, с. 1846.
14. *Заремба Л. К., Красильников В. А., Шкловская-Корди В. В.*— ДАН СССР, 1956, т. 109, с. 485, с. 731; Акуст. ж., 1957, т. 3, с. 29; J. Acoust. Soc. Amer., 1957, v. 29, p. 642.
15. *Буров В. А., Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1958, т. 118, с. 920.
16. *Буров В. А., Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1959, т. 124, с. 571.
17. *Шутилов В. А.* Основы физики ультразвука.— Изд. Ленинградск. ун-та, 1980.
18. *Burgers J. M.*— Adv. Mech., 1948, v. 1. (Русский перевод.— В сб.: «Проблемы механики»/Под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана.— М.: ИЛ, 1955.)
19. *Hopf E.*— Comm. Pure Appl. Math., 1950, v. 3, p. 201.
20. *Солуян С. И., Хохлов Р. В.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1961, № 3, с. 52.
21. *Blackstok D. T.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1964, v. 36, p. 534.
22. *Fay R. D.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1931, v. 3, p. 222.
23. *Заремба Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг.*— ДАН СССР, 1970, т. 192, с. 548; *Krasilnikov V. A., Thai-Thanh-Long, Zarembo L. K.*— Nature, 1970, v. 227, p. 1128.
24. *Crapper G. D.*— J. Fluid Mech., 1957, v. 2, p. 532.
25. *Korteweg D. J.*, de *Vries G.*— Phil. Mag., 1895, (5), v. 39, p. 422.
26. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применения/Под ред. А. М. Обухова.— М.: Наука, 1981.
27. *Островский Л. А.*— ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1235.
28. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
29. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975, гл. 5 (написанная В. Е. Захаровым), с. 226.
30. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи /Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
31. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.*— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 240.
32. *Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1961, № 3, с. 52.
33. *Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1962, № 4, с. 54.
34. *Заболотская Е. А., Хохлов Р. В.*— Акуст. ж., 1969, т. 9, с. 54.
35. *Кузнецов В. П.*— Акуст. ж., 1970, т. 16, с. 155.

36. *Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В.*— В кн.: Труды VIII Всесоюзн. акуст. конф. Секция М.— М. 1973, с. 21.
37. *Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А.* Нелинейная теория звуковых пучков.— М.: Наука, 1982.

К главе 4

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.
2. *Westervelt P. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1975, v. 57, p. 1352; 1976, v. 59, p. 760.
3. *Fenlon F. H.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 51, p. 284.
4. *Красильников В. А., Тагунов Е. Я.*— Вестн. Моск. ун-та; сер. физ. астрон., 1978, т. 19, с. 99.
5. *Буров В. А., Красильников В. А., Тагунов Е. Я.*— Ibid., с. 53.
6. *Moffet M. B., Konrad W. L., Carlton L. F.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 63(4), p. 1048.
7. *Westervelt P. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1957, v. 29, p. 199.
8. *Dean L. W.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1960, v. 34, p. 1039.
9. *Lanvstad V., Tjötta S.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1960, v. 34, p. 1645; 1963, v. 35, p. 929.
10. *Зверев В. А., Калачев А. И.*— Акуст. ж., 1968, т. 14, с. 214; 1969, т. 15, с. 369.
11. *Beyer R. T.* Nonlinear Acoustics.— U. S. Government printing office, Naval See Systems Command, USA, 1975.
12. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
13. *Эйхенвальд А. А.*— УФН, 1934, т. 14, с. 554.
14. *Заремба Л. К.*— Акуст. журн., 1967, т. 13, с. 298.
15. *Заремба Л. К.*— Акуст. журн., 1970, т. 16, с. 58.
16. *Воронина Л. С., Заремба Л. К.*— Акуст. журн., 1975, т. 21, с. 378.
17. *Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В.*— Акуст. журн., 1977, т. 23, с. 756.
18. *Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В.*— В кн.: Материалы симпозиума «Нелинейные волны деформации», Таллин, 1978, т. 2, с. 82.
19. *Канер В. В., Карабутов А. А., Руденко О. В.*— В кн.: Нелинейная акустика.— Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1980, с. 98.
20. *Канер В. В., Руденко О. В.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1978, т. 19, с. 78.
21. *Westervelt P. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1960, v. 32, p. 934.
22. *Westervelt P. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1963, v. 35, p. 539.
23. *Зверев В. А., Калачев А. И.*, Акуст. ж., 1958, т. 4, с. 321.
24. *Bellen J. L., Beyer R. T.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, v. 34, p. 1051.
25. *Berktay H. O.* J. Sound. Vibr., 1965, v. 2, p. 435.
26. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика.— Л.: Судостроение, 1981.
27. *Заремба Л. К.*— УФН, 1979, т. 128, с. 713.
28. *Заремба Л. К.* Теоретические основы нелинейной акустики: Учебное пособие.— Таганрог: Изд. Таганрогск. радиотехнич. ин-та, 1976.
29. *Наугольных К. А., Островский Л. А., Сутин А. М.*— В кн.: Нелинейная акустика.— Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1980, с. 9.
30. *Muir T. G.*— In: 1974 Ultrasonic Symp. Proc. Milwaukee, Wisk, USA. —N. Y., 1974, p. 603.
31. *Наугольных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.*— Акуст. ж., 1963, т. 9, с. 192.
32. *Заремба Л. К., Красильников В. А.*— В кн.: Труды VI Междунар. симп. по нелин. акустике.— М.: Изд-во МГУ, 1976, ч. 1, с. 290.
33. *Заремба Л. К.*— Акуст. ж., 1961, т. 7, с. 189.
34. *Руденко О. В., Чиркин А. С.*— Акуст. ж., 1974, т. 20, с. 290.
35. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1966.
36. *Ахманов С. А., Чиркин А. С.* Статистические явления в нелинейной оптике.— М.: Изд-во МГУ, 1971.
37. *Pernet D. F., Payne R. C.*— J. Sound. Vibr., 1971, v. 17, p. 383.
38. *Руденко О. В., Чиркин А. С.*— ДАН СССР, 1974, т. 214, с. 1045.
39. *Руденко О. В., Чиркин А. С.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1903.

40. *Ахиезер А. И.*— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 1318.
41. *Ландау Л. Д., Румер Ю. Б.*— В кн.: Сб. трудов акад. Л. Д. Ландау.— М.: Наука, 1969, т. I, с. 227.
42. *Красильников В. А., Руденко О. В., Чиркин А. С.*— Акуст. ж., 1975, т. 21, с. 124.
43. *Кузнецов В. П.*— Акуст. ж., 1970, т. 16, с. 155.
44. *Буров В. А., Красильников В. А., Тагунов Е. Я.*— В кн.: Программа и тезисы 4-й Всесоюзн. конф. по методике и технике ультразвуковой спектроскопии.— Вильнюс, 1980, с. 33.
45. *Павлов В. И.*— Акуст. ж., 1976, т. 22, с. 580.
46. *Наугольных К. А., Рыбак С. А* — Акуст. ж., 1976, т. 22, с. 735.
47. *Westervelt P. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v. 59, p. 760.
48. *Захаров В. Е., Сагдеев Р. З.*— ДАН СССР, 1970, т. 192, с. 297.
49. *Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.*— ДАН СССР, 1973, т. 208, с. 794.
50. *Наугольных К. А., Рыбак С. А.*— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 78.
51. *Гурбатов С. Н., Дубков А. А., Малахов А. Н.*— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 456.
52. *Гурбатов С. Н., Саичев А. И.*— В кн.: Нелинейная акустика.— Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1980, с. 108.

К главе 5

1. *Westervelt P. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1951, v. 23, p. 312.
2. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
3. *Шутилов В. А.* Основы физики ультразвука.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
4. *Островский Л. А.*— Акуст. ж., 1968, т. 14, с. 82.
5. *Hertz G., Mende H.*— Z. Physik, 1939, B. 134, S. 354.
6. *Rayleigh.*— Phil. Mag., 1905, v. 10, p. 364.
7. *Гольдберг З. А., Наугольных К. А.*— Акуст. ж., 1963, т. 9, с. 28.
8. *Yosioka K., Kawasima Y.*— Acustica, 1955, v. 5, p. 167.
9. *Алексеев В. Н.*— Акуст. ж., 1983, т. 29, с. 129.
10. *Горьков Л. П.*— ДАН СССР, 1965, т. 140, с. 88.
11. *Компанеец А. С.*— Теоретическая физика.— М.: Гостехиздат, 1957, с. 125.
12. *King L. V.*— Proc. Roy. Soc., 1936, v. 153 A, p. 1.
13. *Whymark R. R.*— Ultrasonics, 1975, v. 13, p. 251.
14. *Bjerkness C. A.*— Compt. rend., 1867, v. 84, p. 1222, 1309, 1446, 1493.
15. *Казанцев В. Ф.*— ДАН СССР, 1959, т. 129, с. 64.
16. *König W.*— Z. Phys. Chem. Unterr., 1895, v. 8, p. 191.
17. *Широкова Н. А.*— В кн.: Физические основы ультразвуковой технологии /Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Наука, 1970, с. 641.
18. *Тимошенко В. И.*— Акуст. ж., 1970, т. 16, с. 570.
19. *Миронов М. А.*— Акуст. ж., 1976, т. 22, с. 941.
20. *Eckart C.*— Phys. Rev., 1948, v. 73, p. 68.
21. *Рэлей.* Теория звука: Пер. с англ. /Под ред. С. М. Рытова.— М.: Гостехиздат, 1955.
22. *Schlichting H.*— Phys. Z., 1932, v. 33, p. 327.
23. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя: Пер. с нем.— М.: ИЛ, 1956.
24. *Заремба Л. К.*— В кн.: Физика и техника мощного ультразвука /Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Наука, 1968, с. 87.
25. *Ниборг В.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова.— М.: Мир, 1969, т. 2, ч. Б, с. 302.
26. *Заремба Л. К., Шкловская-Корди В. В.*— Акуст. ж., 1957, т. 3, с. 373.

К главе 6

1. *Rayleigh.*— Phil. Mag., 1917, v. 34, p. 94.
2. *Noltingk B. E., Neppiras E. A.*— Proc. Phys. Soc. Lond., 1950, v. 63B, p. 675; 1951, v. 64B, p. 1032.
3. *Акуличев В. А.*— В кн.: Мощные ультразвуковые поля /Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Наука, 1968, с. 131.
4. *Флинн Г.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. Л. Д. Розенберга — М.: Мир, 1967, т. 1, ч. Б, с. 7.

5. *Перник А. Д.* Проблемы кавитации.— Л.: Судостроение, 1966.
6. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1960, с. 462.
7. *Minnaert M.*— Phil. Mag., 1933, v. 16, p. 235.
8. *Macedo J. C., Jang M. J.*— J. Appl. Phys., 1972, v. 11, p. 1124.
9. *Хабеев Н. С.*— Акуст. ж., 1975, т. 21, с. 815.
10. *Devin C.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1959, v. 31, p. 1654.
11. *Hsieh D.-Y., Plesset M. S.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1961, v. 33, p. 206.
12. *Neppiras E. A.*— Ultrasonics, 1980, v. 18, p. 201.
13. *Eller A. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1965, v. 37, p. 493.
14. *Eller A. J.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1975, v. 57, p. 1, 1374.
15. *Gould R. K.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v. 56, p. 1740.
16. *Plesset M. S., Zwick S. A.*— J. Appl. Phys., 1954, v. 25, p. 493.
17. *Trammel G. T.*— J. Appl. Phys., 1962, v. 33, p. 1662.
18. *Алексеев В. Н.*— Акуст. ж., 1975, т. 21, с. 497.
19. *Акуличев В. А.*— Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях.— М.: Наука, 1978.
20. *Акуличев В. А., Алексеев В. Н., Юшин В. П.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 801.
21. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика.— М.: Наука, 1964.
23. *Алексеев В. Н., Юшин В. П.*— Вопросы судостроения: сер. акустика.— М.: Изд. ЦНИИ «Румб», 1979, № 12, с. 59.
24. *Розова Г. А., Юшин В. П.*— В кн. Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах.— Новосибирск: Наука, 1977, с. 380.
25. *Акуличев В. А., Гребенник В. Г., Жуков В. А.*— ДАН СССР, 1974, т. 216, с. 517.
26. *Plesset M. S.*— Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., 1966, v. A260, p. 240.
27. *Корнфельд М., Суворов Л.*— J. Appl. Phys., 1944, v. 15, p. 495.
28. *Корнфельд М.* Упругость и прочность жидкостей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
29. *Plesset M. S., Mitchell T. P.*— Quart. Appl. Math., 1956, v. 13, p. 419.
30. *Брантон И. Х.*— В кн.: Неустановившиеся течения с большими скоростями.— М.: Наука, 1973, с. 139.
31. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1953.
32. *Розенберг Л. Д.*— В кн.: Мощные ультразвуковые поля /Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Наука, 1968, с. 221.
33. *Сиротюк М. Г.*— Ibid., с. 167.
34. *Алексеев В. Н., Юшин В. П.*— В кн.: Тезисы докл. 2-й Всесоюзн. симп. по акустогидродинамике и акустооптике.— Суздаль, 1980, с. 39.
35. *Юшин В. П.*— В кн.: Тезисы докл. Всесоюзн. конф. по взаимодействию ультразвука с биологической средой.— М.: 1983, с. 46.
36. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А., Сутин А. М.*— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 423.
37. *Заремба Л. К., Красильников В. А.*— Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
38. *Кикучи Е.* Ультразвуковые преобразователи: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.
39. *Панов А. П.*— В кн.: Научные труды МИСиС.— М.: 1981, № 132, с. 82.
40. Fry F. J.— In: Ultrasound: Its applications in medicine and biology /Ed. F. J. Fry.— Ney York — Amsterdam: Elsevier, 1978, Pt 2, p. 689.
41. *Гаврилов Л. Р., Цирульников Е. М.* Фокусированный ультразвук в физиологии и медицине.— Л.: Наука, 1980.
42. *Зельдович Я. Б.*— ЖЭТФ, 1942, т. 12, с. 525.
43. *Neppiras E. A.*— Physics Reports: A Rev. Sect. of Phys.Lett., 1980, v. 61, p. 163.
44. Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics /Ed. W. Lauterborn. Proc. First Int. Conf. Göttingen, FRG, 1979.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1980.
45. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля.— М.: Наука, 1978.
46. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: Пер. с англ. /Под ред. В. И. Татарского.— М.: Мир, 1981, ч. 1, ч. 2.
47. *Foldy L. L.*— Phys. Rev., 1945, v. 40, p. 107.

48. Физические основы подводной акустики: Пер. с англ. /Под ред. В. И. Мясищева.— М.: Сов. радио, 1955.
49. *Lovik A.*— In: Cavitation and Inhomogeneties in Underwater Acoustics. /Ed. W. Lauterborn. Proc. First Int. Conf. Göttingen, FRG, 1979.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1980, p. 211.
50. *Бергман Л.* Ультразвук: Пер. с нем. /Под ред. В. С. Григорьева и Л. Д. Розенберга.— М.: ИЛ, 1956.
51. *Алексеев В. Н.* К теории паровых пузырьков в звуковом поле. Канд. дисс.— М.: Акуст. ин-т АН СССР, 1979.
52. *Алексеев В. Н., Юшин В. П.*— В кн.: Вопросы судостроения: сер. акуст.— М.: Изд. ЦНИИ «Румб», 1979, с. 69.
53. *Waterman P. C., Truel R.*— J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 512.
54. *Кобелев Ю. А., Островский Л. А.*— В кн.: Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования.— Горький: Изд. ИПФ АН СССР, 1980, с. 143.
55. *Остроумов Г. А., Дружинин Г. А., Крячко В. М., Токман А. С.*— В кн.: Тезисы докл. 6-го Междунар. симп. по нелинейной акустике.— М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 166.
56. *Остроумов Г. А., Дружинин Г. А., Крячко В. М., Токман А. С.*— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах.— Новосибирск: Изд. ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 12.
57. *Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р.*— Ibid., с. 17.
58. *Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 681.
59. *Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.*— Изв. АН СССР: Механика жидкости и газа, 1972, № 5, с. 71.
60. *Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.*— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 194.
61. *Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.*— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах.— Новосибирск: Изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 32.
62. *Гончаров Г. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А.*— ПМТФ, 1976, № 6, с. 90.

К главе 7

1. *Dahl H., Devic O.*— Nature, 1937, v. 139, p. 550.
2. *Sieg H.*— Elektrische Nachr. Techn., 1940, v. 17, p. 193.
3. *Бовшеверов В. М., Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 44.
4. *Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1945, т. 46, с. 108; 1953, т. 88, с. 657.
5. *Красильников В. А., Иванов-Шиц К. М.*— ДАН СССР, 1949, т. 67, с. 639; Вестн. Моск. ун-та; сер. физ. астрон., 1950, с. 57.
6. *Сучков Б. А.*— Акуст. ж., 1958, т. 4, с. 85.
7. *Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1945, т. 47, с. 486; Изв. АН СССР: сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, с. 33.
8. *Каллистратова М. А.*— ДАН СССР, 1959, т. 125, с. 69.
9. *Обухов А. М.*— ДАН СССР, 1941, т. 30, с. 611.
10. *Монин А. С.*— Акуст. ж., 1961, т. 7, с. 457.
11. *Lighthill M. J.*— Proc. Roy. Soc. London, 1952, v. 211 A, p. 564.
12. *Lighthill M. J.*— Ibid., 1954, v. 222 A, p. 1.
13. *Красильников В. А., Обухов А. М.*— Акуст. ж., 1956, т. 2, с. 107.
14. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
15. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. II.— М.: Наука, 1967.
16. *Чернов Л. А.* Волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1977.
17. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля.— М.: Наука, 1978.
18. *Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И.*— УФН, 1970, т. 102, с. 3.
19. Атмосферная турбулентность: Труды Ин-та физики атмосферы АН СССР.— М.: 1962, № 4.

20. Некоторые проблемы современной физики атмосферы: Труды Ин-та физики атмосферы АН СССР.— М.: Наука, 1981.
21. *Ферми Э.* Научные труды.— М.: Наука, 1972, т. 2, с. 439.
22. *Красильников В. А., Павлов В. И.*— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1797.
23. *Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1947, т. 58, с. 1353.
24. *Обухов А. М.*— Изв. АН СССР: сер. геофиз., 1953, с. 155.
25. *Рытов С. М.*— Изв. АН СССР: сер. физ., 1937, с. 223.
26. *Алексеев В. Н., Фролов В. М.*— Акуст. ж., 1972, т. 18, с. 506.
27. *McAllister L. G.*— Atmos. Terr. Phys., 1968, v. 30, p. 1439.
28. *Brown E. H., Hall F. F. Jr.*— Rev. Geoph. and Space Phys., 1978, v. 16, p. 47.
29. *Бовшеверов В. М.*— В кн.: Некоторые проблемы современной физики атмосферы: Труды Ин-та физики атмосферы АН СССР.— М.: Наука, 1981, с. 26.
30. *Proni J. R., Apel J. R.*— J. Geoph. Res., 1975, v. 8, p. 1147.
31. *Сазонтов А. Г.*— Изв. АН СССР: сер. физ. атмосф. и океана, 1979, т. 15, с. 820.

К главе 8

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
2. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1948.
4. *Murnahan F. D.* Finite deformation of an elastic solid.— N. Y.: J. Wiley, 1951.
5. *Заремба Л. К., Красильников В. А.*— УФН, 1970, т. 102, с. 549.
6. *Завадский В. Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах.— М.: Наука, 1972.
7. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1975.
8. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1975.
9. *Rayleigh.*— Proc. London Math. Soc., 1885, v. 17, p. 4.
10. *Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F.*— Elastic waves in layered media.— N. Y.: McGraw-Hill, 1957.
11. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике.— М.: Наука, 1966.
12. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах.— М.: Наука, 1981.
13. *Красильников В. А., Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 408.
14. *Викторов И. А.*— Акуст. ж., 1974, т. 20, с. 199.
15. *Бреховских Л. М.*— Акуст. ж., 1959, т. 5, с. 282.
16. *Kane J., Spence J.*— Geophysics, 1963, v. 28, p. 715.
17. *Parekh J. P., Tuan H. S.*— J. Appl. Phys., 1977, v. 48, p. 994.
18. *Уразаков Е. И., Фальковский Л. А.*— ЖЭТФ, 1972, т. 63, с. 2297.
19. *Maradudin A. A., Mills D. L.*— Annales of Physics, 1976, v. 100, p. 262.
20. *Крылов В. В., Лямов В. Е.*— ЖТФ, 1979, т. 49, с. 2514.
21. *Бабич В. М., Молотков И. А.*— В кн.: Итоги науки и техники. Т. 10. Механика деформируемого тела.— М.: ВИНИТИ, 1977, с. 5.
22. *Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 754.
23. *Morrison J. A.*— J. Math. Phys., 1975, v. 17, p. 958.
24. *Выборнов Б. И.* Ультразвуковая дефектоскопия.— М.: Металлургия, 1974.
25. *Кайно Г., Шоу Дж.*— УФН, 1974, т. 113, с. 157.
26. *Дрансфельд К., Зальцманн Е.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова.— М.: Мир, 1974, т. 7, с. 250.
27. *Каринский С. С.* Устройства обработки сигналов на ультразвуковых поверхностных волнах.— М.: Сов. радио, 1975.
28. *Лямов В. Е., Сулейманов С. Х.*— В кн.: Упругие поверхностные волны.— Новосибирск: Наука, 1974, с. 22.
29. Поверхностные акустические волны — устройства и применения.— ТИИЭР, 1976, т. 64, № 5 (тематический выпуск).
30. *Красильников В. А., Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 732.

31. *Викторов И. А.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 1.
32. *Фарнелл Дж.*— В кн.: Физическая акустика./Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ. /Под ред. И. Л. Фабелинского.— М.: Мир, 1973, т. 6, с. 132.
33. *Кессених Г. Г., Шувалов Л. А.*— Кристаллография, 1978, т. 23, с. 1134.
34. *Lothe J., Barnett D. M.*— J. Appl. Phys., 1976, v. 47, p. 428.
35. *Любимов В. Н., Альшиц В. И., Лоте Е.*— Кристаллография, 1980, т. 25, с. 330.
36. *Гуляев Ю. В.*— Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, с. 63.
37. *Bleustein J. L.*— Appl. Phys. Lett., 1968, v. 13, p. 412.
38. *Морозов А. И., Земляницын М. А.*— В кн.: Упругие поверхностные волны.— Новосибирск: Наука, 1974, с. 64.
39. *Анисимкин В. И., Морозов А. И.*— Письма в ЖТФ, 1976, т. 2, с. 426.
40. *Gulyaev Yu. V., Plessky V. P.*— Physics Lett., 1976, v. 56A, p. 491.
41. *Бурлак Г. Н., Коцаренко Н. Я., Кошевая С. В.*— ФТТ, 1976, т. 18, с. 1222.
42. *Викторов И. А.*— ДАН СССР, 1975, т. 221, с. 1060.
43. *Ляв А.* Математическая теория упругости.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.
44. *Новацкий В.* Теория упругости.— М.: Мир, 1975.
45. *Богданов С. В., Левин М. Д., Яковкин И. Б.*— Акуст. ж., 1969, т. 15, с. 12.
46. *Tiersten H. F.*— J. Appl. Phys., 1969, v. 40, p. 770.
47. *Auld B. A.*— Acoustic fields and waves in solids.— N. Y.: J. Wiley, 1973.
48. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.*— Акуст. ж., 1977, т. 23, с. 716.
49. *Балакирев М. К., Горчаков А. В.*— ФТТ, 1977, т. 19, с. 613.
50. *Бреховских Л. М.*— Акуст. ж., 1966, т. 12, с. 374.
51. *Бреховских Л. М.*— Акуст. ж., 1967, т. 13, с. 541.
52. *Рэлей.* Теория звука: Пер. с англ. /Под ред. С. М. Рытова.— М.: Гостехиздат, 1955, т. 2.
53. *Auld B. A., Gagnepain J. J., Tan M.*— Electron Lett., 1976, v. 12, p. 650.
54. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.*— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, с. 220.
55. *Lagasse P. E., Mason I. M., Ash E. A.*— IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics, 1973, v. 20, p. 143.
56. *Datta S., Hunsinger B. J.*— Phys. Rev., 1977, v. 16B, p. 4224.
57. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975.
58. *Aldredge G. P.*— Phys. Lett., 1972, v. 41A, p. 281.
59. *Вужва А. Д.*— ФТТ, 1979, т. 21, с. 2157.
60. *Masri P., Dobrzynsky L.*— J. Phys. Chem. Solids, 1973, v. 34, p. 847.
61. *Микер Т., Мейтцлер А.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Мир, 1966, т. 1, ч. А, с. 140.
62. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев: Наукова думка, 1981.
63. *Боровков О. В., Кучеров И. Я.*— Укр. физ. ж., 1972, т. 17, с. 1980.
64. *Бурлий П. В., Ильин П. П., Кучеров И. Я.*— Укр. физ. ж., 1978, т. 23, с. 1756.

К главе 9

1. *Федоров Ф. И.* Теория распространения упругих волн в кристаллах.— М.: Наука, 1965.
2. *Александров К. С.*— В кн.: Проблемы современной кристаллографии.— М.: Наука, 1975, с. 327.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
4. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов: Пер. с англ. /Под ред. Л. А. Шувалова.— М.: Мир, 1967.
5. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики.— М.: Наука, 1979.
6. *Лямов В. Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
7. *Элайсез М., Гарсиа-Молинер Ф.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. В. В. Леманова.— М.: Мир, 1973, т. 5, с. 192.

8. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1975.
9. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах.— Новосибирск: Наука, 1982.
10. *Musgrave M. J. P.* Crystal Acoustics.— San Francisko: Acad. Press, 1970.
11. *Auld B. A.* Acoustic fields and waves in solids.— N. Y.: J. Wiley, 1973.
12. *Кошкина Е. Н., Лямов В. Е., Маматова Т. А.*— Кристаллография, 1978, т. 23, с. 1274.
13. *Баранский К. Н.*— ДАН СССР, 1957, т. 114, с. 517.
14. *Фарнелл Дж.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ. /Под ред. И. Л. Фабелинского.— М.: Мир, 1973, т. 6, с. 139.
15. *Currie P. K.*— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1979, v. 32, p. 163.
16. *Lothe J., Barnett D. M.*— J. Appl. Phys., 1976, v. 47, p. 428.
17. *Альшиц В. Н., Лоте Е.*— Кристаллография, 1978, т. 23, с. 901.
18. *Lothe J., Barnett D. M.*— Wave motion, 1979, v. 1, p. 107.
19. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975.
20. *Андронов А. А.*— Изв. вузов: сер. радиофизика, 1960, т. 3, с. 645.
21. *Portigal D. L., Burstein E.*— Phys. Rev., 1968, v. 170, p. 673.
22. *Вужва А. Д., Лямов В. Е.*— Кристаллография, 1977, т. 22, с. 131.
23. *Pine A. S.*— Phys. Rev., B, 1971, v. 2, p. 2049.
24. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979.
25. *Aldredge G. P.*— Phys. Lett., 1972, v. 41A, p. 281.
26. *Гельфгат И. М.*— ФТТ, 1977, т. 19, с. 1711.
27. *Крылов В. В.*— Кристаллография, 1982, т. 27, с. 791.
28. *Бенсон Г., Юн К.*— В кн.: Межфазовая граница газ — твердое тело /Под ред. Э. Флада.— М.: Мир, 1970, с. 172.
29. *Красильников В. А., Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 732.
30. *Красильников В. А., Крылов В. В.*— В кн.: Материалы XI Всесоюзн. конф. по акустоэлектронике и квантовой акустике.— Душанбе: Дониш, 1981, ч. II, с. 160.
31. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.— М.: Наука, 1972, с. 392.
32. *Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж.* Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении.— М.: Мир, 1965.
33. *Косевич А. М.* Основы механики кристаллической решетки.— М.: Наука, 1972.

К главе 10

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости.— М.: Наука, 1965.
2. *Landau L., Rumer G.*— Phys. Z. (USSR), 1937, Bd. 11, S. 18 (перевод: Ландау Л. Д. Собр. тр.— М.: Наука, 1969, т. I, с. 237).
3. *Ахиезер А. И.*— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 1318.
4. *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела.— М.: Мир, 1972.
5. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1975.
6. *Böttmel H. E., Dransfeld K.*— Phys. Rev. Lett., 1959, v. 2, p. 298; 1960, v. 117, p. 1245.
7. *Jacobsen E. H.*— In: Quantum Electron. Symp. Proc. High. View.— N. Y., 1959, p. 468.
8. Новости физики твердого тела. Вып. 5. Физика фононов больших энергий. Сб. статей (пер. с англ.).— М.: Мир, 1976.
9. *Maris H. J.*— In: Phys. Acoustics /Ed. W. P. Mason a. R. N. Thruston.— N. Y.; L.: Acad. Press, 1971, v. 8, p. 280.
10. *Гуревич В. Л.* Кинетика фононных систем.— М.: Наука, 1980.
11. *Рейсленд Дж.* Физика фононов: Пер. с англ. /Под ред. Г. С. Жданова.— М.: Мир, 1975.
12. *Новик А., Берри Б.* Релаксационные явления в кристаллах: Пер. с англ. /Под ред. Э. М. Надгорного и Я. М. Сойфера.— М.: Атомиздат, 1975.

13. Влияние дефектов на свойства твердых тел.— В кн. Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. Э. М. Надгорного.— М.: Мир, 1969, т. 3, ч. А.
14. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела.— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. Л. Г. Меркулова, Л. Д. Розенберга, В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1969, 1970, т. 4, ч. А и Б.
15. Таблицы физических величин. Справочник под ред. И. К. Кикоина.— М.: Атомиздат, 1976.
16. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах.— М.: Наука, 1981.
17. *Косевич А. М.* Физическая механика реальных кристаллов.— Киев: Наукова думка, 1981.
18. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела.— М.: Наука, 1978.
19. *Займан Дж.* Электроны и фононы: Пер. с англ. /Под ред. В. Л. Бонч-Бруевича.— М.: ИЛ, 1962.
20. *Гончаров К. В., Красильников В. А.*— Изв. АН СССР: сер. физ., 1956, т. 20, с. 231.
21. *Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж.* Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении.— М.: Мир, 1965.
22. *Лейбфрид Г.* Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов.— М.; Л.: Физматгиз, 1963.
23. *Pomerantz M.*— Phys. Rev. 1973, v. B8, p. 5828.
24. *Гуляев Ю. В., Козорезов А. Г., Красильников М. В.*— ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 243.
25. *Пайерлс Р.* Квантовая теория твердых тел.— М.: ИЛ, 1956.
26. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Квантовая механика, ч. I — М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
27. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.*— УФН, 1970, т. 102, с. 549.
28. *Зарембо Л. К., Красильников В. А., Сердобольская О. Ю.*— В кн.: Нелинейная акустика.— Горький, Изд. ИПФ АН СССР, 1980, с. 189.
29. *Herring C.*— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 954.
30. *De Klerk J.*— Phys. Rev., 1965, v. A139, p. 1635.
31. *Maris H. J.*— Nature, 1963, v. 198, p. 876.
32. *Maris H. J.*— Phil. Mag. 1964, v. 9, p. 901.
33. *Cicarello I. S., Dransfeld K.*— Phys. Rev., 1964, v. A134, p. 1517.
34. *Nava R., Arzt R., Ciccarello I. S., Dransfeld K.*— Phys. Rev., 1964, v. A134, p. 581.
35. *Simons S.*— Proc. Phys. Soc. London, 1963, v. 82, p. 401.
36. *Simons S.*— Proc. Phys. Soc. London, 1964, v. 83, p. 74.
37. *Maris H. J.*— Phys. Rev. 1969, v. 188, p. 1303.
38. *Maris H. J.*— Phys. Rev. 1969, v. 188, p. 1308.
39. *Woodruff T., Erenreich H.*— Phys. Rev., 1961, v. 123, p. 1553.
40. *Simons S.*— Proc. Phys. Soc., 1967, v. 91, p. 759.
41. *Логачев Ю. А., Мойжес Б. Я.*— ФТТ, 1973, т. 15, с. 2888.
42. *Miller P. B.*— Phys. Rev., 1965, v. 137, p. 1937.
43. *Гуревич Л. Э., Шкловский Б. И.*— ЖЭТФ, 1967, т. 63, с. 1726.
44. *Maris H. J.*— Phys. Rev., 1968, v. 775, p. 1077.
45. *Гуляев Ю. В., Козорезов А. Г.*— ЖЭТФ, 1982, т. 82, с. 1551.
46. *Fitzgerald T., Chick B. B., Truell R.*— J. Appl. Phys., 1964, v. 35, p. 1639.
47. *Keller K. R.*,— J. Appl. Phys., 1967, v. 38, p. 3777.
48. *Ахматов А. Н., Газизова Г. А., Иванов С. Н.* и др.— ФТТ, 1977, т. 19, с. 308.
49. *Гуляев Ю. В., Иванов С. Н., Козорезов А. Г.* и др.— ЖЭТФ, 1983, т. 84, с. 672.
50. *Френкель Я. И., Конторова Т. А.*— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 1349.
51. *Коттрелл А.* Дислокации и пластическое течение в кристаллах.— М.: Металлургиздат, 1958.
52. *Косевич А. М.* Дислокации в теории упругости.— Киев: Наукова думка, 1978.
53. *Халл Д.* Введение в дислокации: Пер. с англ. /Под ред. В. Н. Быкова.— М.: Атомиздат, 1968.

54. *Гранато А., Люкке К.*— В кн.: Ультразвуковые методы исследования дислокаций: Пер. с англ. /Под ред. Л. Г. Меркулова.— М.: ИЛ, 1963, с. 27.
55. *Kochler J. S.*— In: Imperfections in Nearly Perfect Crystals.— N. Y., 1952, p. 197.
56. *Гранато А., Люкке К.* Струнная модель дислокации и дислокационное поглощение звука. См. [14], ч. А, с. 261.
57. *Bordoni P. G.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1954, v. 26, p. 495.
58. *Нидлетт Д.* Пик Бордони в гранецентрированных кубических металлах. См. [13], с. 99.
59. *Зегер А., Донт Г., Пфафф Ф.* Механизм низкотемпературной механической релаксации в деформированных кристаллах. См. [54], с. 75.
60. *Зегер А., Шиллер П.* Перегибы на дислокациях и их влияние на внутреннее трение в кристаллах. См. [54], с. 428.
61. *Лоте Дж.* Аспекты теории подвижности дислокаций и внутреннего трения. См. [14], с. 119.
62. *Drouillard T. F.* Accoustic emission. A bibliography with abstracts.— N. Y ; L.: IFI /Plenum, 1979.
63. *Грешников В. А., Дробот Ю. Б.* Акустическая эмиссия.— М.: Изд. стандартов, 1976.
64. *Артюхов В. И., Вакар К. Б., Макаров В. И.* и др. Акустическая эмиссия и ее применение для неразрушающего контроля в ядерной энергетике/Под ред. К. Б. Вакара.— М.: Атомиздат, 1980.
65. *Бойко В. С., Нацик В. Д.* Элементарные дислокационные механизмы акустической эмиссии.— В кн.: Элементарные процессы пластической деформации кристаллов.— Киев: Наукова думка, 1978, с. 159.
66. *Нацик В. Д., Чишко К. А.*— Акуст. ж., 1982, т. 28, с. 381.
67. *Бойко В. С., Гарбер Р. И., Кившик В. Ф., Кривенко Л. Ф.*— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 708.
68. *Бойко В. С., Кривенко Л. Ф.*— ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 255.
69. *Маслов Л. А.*— ПМТФ, 1976, № 2, с. 160.
70. *Achenbach J. D., Harris J. G.*— J. Appl. Mech., 1979, v. 46, p. 107.
71. *Rose L. R. F.*— Int. J. Fracture, 1981, v. 17, p. 45.
72. *Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1983, т. 29, с. 790.
73. *Красильников В. А., Крылов В. В.*— В кн.: Материалы XII Всесоюзн. конф. по акустоэлектронике и квантовой акустике. Ч. 2.— Саратов, 1983, с. 341.
74. *Крылов В. В., Пономарев Е. П.*— Ibid., с. 343.
75. *Крылов В. В., Пономарев Е. П.*— В кн.: X Всесоюзн. акустическая конф. Доклады, Секция Н.— М., 1983, с. 85.
76. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.
77. *Lord A. E. J.*— In: Phys. Acoust. /Ed. W. P. Mason, R. N. Thurston.— N. Y.: Acad. Press, 1981, v. 15, p. 295.

К главе 11

1. *Landau L., Rumer G.*— Phys. Z. (USSR), 1937, Bd. 11, S. 18. (Перевод: *Ландау Л. Д.* Собр. тр.— М.: Наука, 1969, т. I, с. 237.)
2. *Гольдберг З. А.*— Акуст. ж., 1960, т. 4, с. 307.
3. *Красильников В. А., Гедройц А. А.*— Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, 1962, № 2, с. 92.
4. *Гедройц А. А., Красильников В. А.*— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1592.
5. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
6. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.*— УФН, 1970, т. 102, с. 549.
7. *Jones G. L., Kobett D. R.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1963, v. 35, p. 5.
8. *Rollings F. R.*— Appl. Phys. Lett., 1963, v. 2, p. 147.
9. *Rollings F. R., Taylor L. H., Todd P. H.*— Phys. Rev., 1964, v. 136, p. 597.
10. *Гунь-Сю Фэнь, Зарембо Л. К., Красильников В. А.*— Акуст. ж., 1965, т. 11, с. 112.
11. *Гунь-Сю Фэнь, Зарембо Л. К., Красильников В. А.*— ЖЭТФ, 1965, т. 48, с. 1598.
12. *Rischbieter F.*— Acoustics, 1965/1966, v. 16, p. 75; Acoustics, 1967, v. 18, p. 109.

13. *Lopen P. O.*— J. Appl. Phys., 1968, v. 39, p. 5400.
14. *Красильников В. А., Лямов В. Е., Солодов И. Ю.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. и астрон., 1970, № 4, с. 470.
15. *Заремба Л. К., Красильников В. А., Случ В. Н., Сухаревская О. Ю.*— Акуст. ж., 1966, т. 12, с. 486.
16. *Сухаревская О. Ю.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. и астрон., 1967, № 2, с. 96.
17. *Заремба Л. К.*— Акуст. ж., 1970, т. 12, с. 486.
18. *Заремба Л. К., Сердобольская О. Ю.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. и астрон., 1970, № 1, с. 62.
19. *Заремба Л. К., Прохоров В. М.*— Акуст. ж., 1975, т. 21, с. 198.
20. *Заремба Л. К., Шкловская-Корди В. В.*— ФТТ, 1970, т. 12, с. 3649.
21. *Полякова А. Л.*— ФТТ, 1964, т. 6, с. 65.
22. *Заремба Л. К., Красильников В. А., Сердобольская О. Ю.* Нелинейная акустика кристаллов и некоторые ее приложения.— В кн.: Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования.— Горький: Изд. ИПФ, 1980, с. 189.
23. *Терстон Р.* Распространение волн в жидкостях и твердых телах.— В кн.: Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона.— М.: Мир, 1966, т. I, ч. А, с. 13.
24. *Thurston R. N.*— In: Handbuch der Physik, v. VI, a/4/Ed. C. Truesdell.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1974, p. 110.
25. *Seeger A., Buck O.*— Zs. Naturforsch., 1960, Bd. 15a, S. 1056.
26. *Bateman T. B., Mason W. P., McSkimin H. J.*,— J. Appl. Phys., 1961, v. 32, p. 928.
27. *Nakagawa Y., Yamanouchi K., Shibayama K.*— J. Appl. Phys., 1973, v. 44, p. 3969.
28. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость.— Киев: Наукова думка, 1977.
29. *Коробов А. И., Лямов В. Е.*— ФТТ, 1975, т. 17, с. 1448.
30. *Nalamwar A. L., Epstein M.*— J. Appl. Phys., 1976, v. 47, p. 43.
31. *Ридер, Каллен.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 226.
32. *Лямов В. Е.* Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах.— М.: Изд-во МГУ, 1983.
33. *Ермилин К. К., Красильников В. А., Лямов В. Е., Прохоров В. М.*— ФТТ, 1973, т. 15, с. 2251.
34. *Бражкин Ю. А., Лямов В. Е.*— ФТТ, 1980, т. 22, с. 2520.
35. *Лямов В. Е.*— ФТТ, 1981, т. 23, с. 1483.
36. *Бражкин Ю. А., Коробов А. И., Красильников В. А., Лямов В. Е.*— ФТТ, 1976, т. 18, с. 1746.
37. *Ермилин К. К., Лямов В. Е., Пятаков П. А.*— ФТТ, 1973, т. 15, с. 3226.
38. *Чабан А. А.*— ФТТ, 1967, т. 9, с. 3334.
39. *Попов С. Н., Крайник Н. Н.*— ФТТ, 1970, т. 64, с. 3022.
40. *Кессель А. Р., Сафин И. А., Гольдман А. М.*— ФТТ, 1970, т. 12, с. 3070.
41. *Копвиллем У. Х., Смоляков Б. П., Шаринов Р. З.*— Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 558.
42. *Shiren N. S., Melcher R. L., Gatrod D. K., Kazyaka T. C.*— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 819.
43. *Юшин Н. К., Леманов В. В., Агишев Б. А.*— ФТТ, 1974, т. 16, с. 2789.
44. *Бондаренко В. С., Соболев Б. В., Бочков Б. Г., Зуев В. Е.*— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 317.
45. *Korpel A.*— *J. Appl. Phys.*, 1978, v. 49, p. 6125.
46. *Левин В. М., Чернозатонский Л. А.*— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 142.
47. *Левин В. М., Пустовойт В. И.*— ФТТ, 1976, т. 18, с. 3023.
48. *Ермилин К. К., Лямов В. Е., Фильчаков И. Б.*— ФТТ, 1981, т. 23, с. 292.
49. *Гарланд К.*— В кн.: Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона.— М.: Мир, 1974, т. 7, с. 61.
50. *Заремба Л. К., Красильников В. А., Сердобольская О. Ю., Сериков В. И.*— ФТТ, 1974, т. 16, с. 3578.
51. *Гедройц А. А., Заремба Л. К., Красильников В. А.*— ДАН СССР, 1983, т. 150, с. 515.
52. *Hikata A., Elbaum C.*— Phys. Rev., 1966, v. 144, p. 469.

53. *Труэл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.
54. *Ермилин К. К., Заремба Л. К., Красильников В. А.* и др.— ФММ, 1974, т. 38, с. 880.
55. *Richardson B. A., Thompson R. B., Wilkinson C. D.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, v. 44, p. 1608.
56. *Самулёнис В. И., Кунигелис В. Ф., Гиршковичус М. Н.*— ЖЭТФ, 1972, т. 61, с. 1941.
57. *Заграй Н. П., Заремба Л. К., Сердобольская О. Ю.*— ФТТ, 1977, т. 19, с. 1333.
58. *Заграй Н. П., Сандлер Ю. М., Сердобольская О. Ю.*— ФТТ, 1981, т. 23, с. 379.

К главе 12

1. *Мэзон У.*— В кн.: Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. Л. Д. Розенберга, т. I, ч. А.— М.: Мир, 1966, с. 566.
2. *Мей Дж.*— Ibid., с. 489.
3. *Мэзон У.* Ibid., с. 398.
4. *Уайт* — ТИИЭР, 1970, т. 58, с. 68.
5. *Кайно Г., Шоу Дж.*— УФН, 1974, т. 113, с. 157.
6. *Лямов В. Е.*— В кн.: Ультразвук. Маленькая энциклопедия.— М.: Сов. энц., 1979, с. 42.
7. *Мейнс, Пейдж* — ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 81.
8. *Дрансфельд К., Зальцманн Е.*— В кн.: Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ./Под ред. И. Г. Михайлова — М.: Мир, 1974, т. 7, с. 250.
9. *Морозов А. И., Проклов В. В., Станковский Б. А.* Пьезоэлектрические преобразователи для радиоэлектронных устройств.— М.: Радио и связь, 1981.
10. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов: Пер. с франц./Под ред. В. В. Леманова.— М.: Наука, 1982.
11. *Каринский С. С.* Устройства обработки сигналов на ультразвуковых поверхностных волнах.— М.: Сов. радио, 1975.
12. *Речицкий В. И.* Акустоэлектронные компоненты.— М.: Сов. радио, 1980.
13. Поверхностные акустические волны /Под ред. А. Олинера.— М.: Мир, 1981.
14. Фильтры на поверхностных акустических волнах. Расчет, технология и применение/Под ред. Г. Мэттьюза.— М.: Радио и связь, 1981.
15. Special issue on microwave acoustic signal processing.— IEEE Trans.: Son. Ultrason, 1973, v. 20, № 2.
16. Поверхностные акустические волны — устройства и применения.— ТИИЭР, 1976, т. 64, № 5 (спец. выпуск).
17. *White R., Voltmer F.*— Appl. Phys. Lett., 1965, v. 7, p. 314.
18. *Coquin G. A., Tiersten H. F.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 41, p. 921.
19. *Горышник Л. Л., Кондратьев С. Н.*— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, с. 151.
20. *Гилинский И. А., Попов В. В.*— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, с. 392.
21. *Бирюков С. В., Горышник Л. Л.*— ЖТФ, 1980, т. 50, с. 1647.
22. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах.— Новосибирск: Наука, 1982.
23. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П., Тен Ю. А.*— В кн.: Материалы XI Всесоюзн. конф. по акустоэлектронике и квантовой акустике.— Душанбе: Дониш, 1981, ч. 1, с. 106.
24. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике.— М.: Наука, 1966.
25. *Hamphryes R. F., Ach E. A.*— Electron. Lett., 1969, v. 5, p. 175.
26. *Yamanishi M., Ameda M., Kawamura T.* et al.— Electron. Lett., 1976, v. 12, p. 317.
27. *Ахромеева И. Д., Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1977, т. 23, с. 510.
28. *Лапин А. Д.*— Акуст. ж., 1978, т. 24, с. 703.
29. *Гуляев Ю. В., Плесский В. П.*— ФТТ, 1979, т. 21, с. 3470.

30. *Гуляев Ю. В., Курач Т. Н., Плесский В. П.*— Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 563.
31. *Lee R. E., White R. M.*— Appl. Phys. Lett., 1968, v. 12, p. 12.
32. *Ledbetter H. M., Moulder J. C.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1979, v. 65, p. 840.
33. *Ash E. A., Dieulessaint E., Rakouth H.*— Electron. Lett., 1980, v. 16, p. 470.
34. *Крылов В. В., Павлов В. И.*— В кн.: Материалы XI Всесоюзн. конф. по акустоэлектронике и квантовой акустике.— Душанбе: Дониш, 1981, ч. 1, с. 200.
35. *Lewis M. P.*— Electron. Lett., 1972, v. 8, p. 553.
36. *Пасхин В. М., Сандлер М. С., Свешников Б. В.*— ЖТФ, 1981, т. 51, с. 2595.
37. *Танкрилл, Холланд.*— ТИИЭР, 1971, т. 59, с. 62.
38. *Tseng C. C.*— J. Appl. Phys., 1967, v. 38, p. 4281.
39. *Melngailis J., Smith J. M., Cafarella J. H.*— In: IEEE Ultrason. Symp. Proc.— Boston, Mass, 1972, p. 221.
40. *Уильямсон.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 159.
41. *Белл, Ли.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 171.
42. *Бреховских Л. М.*— Акуст. ж., 1959, т. 5, с. 282.
43. *Gilbert F., Knopoff L.*— J. Geophys. Research, 1960, v. 65, p. 3437.
44. *Parekh J. P., Tuan H. S.*— J. Appl. Phys., 1977, v. 48, p. 994.
45. *Maradudin A. A., Mills D. L.*— Ann. Physics, 1976, v. 100, p. 262.
46. *Бирюков С. В., Горышник Л. Л.*— Акуст. ж., 1977, т. 23, с. 461.
47. *Simons D. A.*— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 63, p. 1592.
48. *Graff K. F.* Wave motion in elastic solids.— Oxford: Clarendon Press, 1975.
49. *Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 214.
50. *Крылов В. В.*— Акуст. ж., 1981, т. 27, с. 261.
51. *Бирюков С. В.*— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 494.
52. *Li R. C. M., Melngailis J.*— IEEE Trans. Son. Ultrason, 1975, v. 22, p. 189.
53. *Tuan H. S., Parekh J. P.*— IEEE Trans. Son. Ultrason., 1977, v. 24, p. 384.
54. *Лапин А. Д.*— Акуст. ж., 1980, т. 26, с. 104.
55. *Лапин А. Д.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 766.
56. *Li R. C. M., Alusow J. A., Williamson R. C.*— In: IEEE Ultrason. Symp. Proc.— Los Angeles, Ca., 1975, p. 279.
57. *Li R. C. M., Alusow J. A.*— Electron. Lett., 1977, v. 13, p. 520.
58. *Tanski W. J.*— IEEE Trans. Son. Ultrason., 1979, v. 26, p. 93.
59. *Мак-Фи Дж.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. /Под ред. Л. Г. Меркулова и Л. Д. Розенберга.— М.: Мир, 1969, т. 4, ч. А, с. 12.
60. *Hutson A. R., White D. L.*— J. Appl. Phys., 1962, v. 33, p. 40.
61. *White D. L.*— J. Appl. Phys., 1962, v. 33, p. 2547.
62. *Пустовойт В. И.*— УФН, 1969, т. 97, с. 257.
63. *Lemanov V. V., Ilisavsky Yu. V.*— Ferroelectrics, 1982, v. 42, p. 77.
64. *Blotakjaer K., Quate C. P.*— Proc. IEEE, 1964, v. 52, p. 360.
65. *Стил М., Вюраль Б.* Взаимодействие волн в плазме твердого тела.— М.: Атомиздат, 1973.
66. *Hutson A. R., McFee J. H., White D. L.*— Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 237.
67. *White R. M., Voltmer F. W.*— Appl. Phys. Lett., 1966, v. 8, p. 40.
68. *Викторов И. А.*— Акуст. ж., 1966, т. 12, с. 251.
69. *Гуляев Ю. В., Пустовойт В. И.*— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 2251.
70. *Кайно.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 188.
71. *Guéret P.*— J. Appl. Phys., 1971, v. 42, p. 3040.
72. *Kino G. S., Coldren L. A.*— Appl. Phys. Lett. 1973, v. 22, p. 50.
73. *Coldren L. A., Kino G. S.*— Appl. Phys. Lett., 1973, v. 23, p. 117.
74. *Богданов С. В., Боярский А. М., Левин М. Д., Яковкин И. Б.*— ФТП, 1973, т. 7, с. 1604.
75. *Колдрен, Шоу.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 30.
76. *Yamanouchi K., Shibayama K.*— Japan J. Appl. Phys., 1977, v. 16, p. 492.
77. *Красильников В. А., Лямов В. Е.*— Акуст. ж., 1973, т. 19, с. 801.
78. *Гуревич В. Л.*— ФТТ, 1963, т. 5, с. 1222.
79. *Tell B.*— Phys. Rev., 1964, v. 136, p. 772.
80. *Mauro R., Wang W. C.*— Phys. Rev., 1970, v. 1B, p. 638.
81. *Гуляев Ю. В.*— ФТТ, 1970, т. 12, с. 415.

82. *Можаев В. Г., Солодов И. Ю.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. и астрон., 1980, т. 21, с. 46.
83. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела. Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1975.
84. *Morozov A. I., Zemlyanitsin M. A., Anisimkin V. I.*— Phys. Stat. Sol., 1972, v. 14, p. 339.
85. *Красильников В. А., Лямов В. Е., Солодов И. Ю.*— Изв. АН СССР, 1971, т. 35, с. 944.
86. *Гуляев Ю. В., Денисенко В. В.*— ФТТ, 1972, т. 14, с. 1475.
87. *Гуляев Ю. В., Карабанов А. Ю., Кмита А. М.* и др.— ФТТ, 1970, т. 12, с. 2595.
88. *Пятаков П. А., Лямов В. Е.*— ФТТ, 1975, т. 17, с. 752.
89. *Padmor T. C., Stegeman G. I.*— J. Appl. Phys., 1976, v. 47, p. 1209.
90. *Otto O. W.*— J. Appl. Phys., 1974, v. 45, p. 4373.
91. *Gautier H., Kino G. S.*— IEEE Trans.: Son. Ultrason., 1977, v. 24, p. 23.
92. *Финкельштейн М. И.* Основы радиолокации.— М.: Сов. радио, 1973.
93. *Дефрануль, Марфельд.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 218.
94. *Bers A., Cafarella J. H.*— Appl. Phys. Lett., 1974, v. 25, p. 133.
95. *Коршак Б. А., Лямов В. Е., Солодов И. Ю.*— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 438.
96. *Коршак Б. А., Лямов В. Е., Солодов И. Ю.*— Микроэлектроника, 1977, т. 6, с. 331.
97. *Quate C. F.*— IEEE Trans.: Son. Ultrason., 1974, v. 21, p. 283.
98. *Luukkala M., Merilainen P.*— Electron. Lett., 1974, v. 10, p. 80.
99. *Коршак Б. А., Лямов В. Е., Солодов И. Ю., Еленский В. Г.*— Зарубежная радиоэлектроника, 1981, № 1, с. 58.

К главе 13

1. *Фабелинский И. Л.* Молекулярное рассеяние света.— М.: Наука, 1965.
2. *Береман Л.* Ультразвук и его применение в науке и технике: Пер. с нем. /Под ред. В. С. Григорьева и Л. Д. Розенберга.— М.: ИЛ, 1956.
3. *Флери П.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ. /Под ред. И. Л. Фабелинского.— М.: Мир, 1973, т. 6, с. 13.
4. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1975.
5. *Дамон Р., Мэлони В., Мак-Магон Д.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова.— М.: Мир, 1974, т. 7, с. 311.
6. *Гуляев Ю. В., Проклов В. В., Шкердин Г. Н.*— УФН, 1978, т. 124, с. 61.
7. *Левин В. М., Пустовойт В. И.*— В кн.: Ультразвук. Маленькая энциклопедия.— М.: Сов. энц., 1979, с. 31.
8. *Хейран М. Е.*— ТИИЭР, 1979, т. 67, с. 10.
9. *Ахмед М., Ван К., Мидерелл А.*— Ibid., с. 25.
10. Акустическая голография: Пер. с англ.— Л.: Судостроение, 1975.
11. *Лямшев Л. М., Седов Л. В.*— Акуст. ж., 1981, т. 27, с. 5.
12. *Лямов В. Е., Мадвалиев К., Шихлинская Р. Э.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 427.
13. *Renk K. F.*— In: Ultrason. Symp. Proc., New Orleans, La., 1979, p. 427.
14. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов: Пер. с англ. /Под ред. Л. А. Шувалова.— М.: Мир, 1967.
15. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику.— М.: Наука, 1966.
16. *Klein W. R., Cook B. D.*— IEEE Trans. Son. Ultrason., 1967, v. 14, p. 123.
17. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики.— М.: Наука, 1973.
18. *Рытов С. М.*— Изв. АН СССР сер. физич., 1937, № 2, с. 222.
19. *Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.* Методы модуляции и сканирования света.— М.: Наука, 1970.
20. *Дрансфельд К., Зальцманн Е.*— В кн.: Физическая акустика /Под ред. У. Мэзона и Р. Терстона: Пер. с англ. /Под ред. И. Г. Михайлова.— М.: Мир, 1974, т. 7, с. 250.

21. *Яковкин И. Б., Петров Д. В.* Дифракция света на акустических поверхностных волнах.— Новосибирск: Наука, 1979.
22. *Salzmann E., Weismann D.*— J. Appl. Phys., 1969, v. 40, p. 3408.
23. *Chiao R. Y., Townes C. H., Stoicheff B. P.*— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 592.
24. *Старунов В. С., Фабелинский И. Л.*— УФН, 1969, т. 98, с. 441.
25. *Зельдович Б. Я., Носач О. Ю., Поповичев В. И.* и др.— Вестн. Моск. ун-та, сер. физ. астрон., 1978, т. 19, с. 137.
26. *Капустин А. П.* Экспериментальные исследования жидких кристаллов.— М.: Наука, 1978.
27. *Кондратенко В. К., Фарзтдинов М. М., Чувыров А. Н.*— ФТТ, 1975, т. 17, с. 795.
28. *Bartolino R., Bertolotti M., Scudieri F.* et al.— J. Appl. Phys., 1975, v. 46, p. 1928.
29. *Кожевников Е. Н., Чабан И. А.*— Акуст. ж., 1975, т. 21, с. 900.
30. *Королев Ю. Н., Яковенко Г. Н.*— Акуст. ж., 1977, т. 23, с. 783.
31. *Свет В. Д., Яковенко Г. Н.*— Акуст. ж., 1980, т. 25, с. 151.
32. *Капустина О. А., Лупанов В. Н., Чилая Г. С.*— Акуст. ж., 1978, т. 24, с. 136.
33. *Макаров В. И.*— Акуст. ж., 1972, т. 18, с. 325.
34. *Макаров В. И.*— Акуст. ж., 1974, т. 20, с. 794.
35. *Буров В. А., Красильников В. А., Павлов В. И.*— Акуст. ж., 1982, т. 28, с. 324.
36. *Ахмед М., Уэйд Г.*— ТИИЭР, 1979, т. 67, с. 170.
37. *Грегуш П.* Звуковидение: Пер. с англ. /Под ред. В. Д. Света.— М.: Мир, 1982.
38. *Мюллер.*— В кн.: Применения голографии: Пер. с англ.— М., Мир, 1973, с. 44.
39. *Олдридж.*— В кн.: Методы неразрушающих испытаний: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972, с. 153.
40. *Свет В. Д.*— В кн.: Ультразвук. Маленькая энциклопедия.— М.:Сов. энц., 1979, с. 89.
41. *Божков А. И., Бункин Ф. В.*— Квантовая электроника, 1975, т. 2, с. 1763.
42. *Карабутов А. А., Руденко О. В., Черепецкая Е. Б.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 383.
43. *Божков А. И., Бункин Ф. В., Гырдев Л. Л.*— Квантовая электроника, 1976, т. 3, с. 1494.
44 *Касоев С. Г., Лисовская М. Г., Лямшев Л. М., Седов Л. В.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 401.
45. *Лямшев Л. М., Седов Л. В.*— Акуст. ж., 1978, т. 24, с. 906.
46. *Божков А. И., Коломенский Ал. А.*— Квантовая электроника, 1978, т. 5, с. 2577.
47. *Лямшев Л. М., Седов Л. В.*— Акуст. ж., 1979, т. 25, с. 906.
48. *Красильников В. А., Павлов В. И.*— Доклады АН СССР, 1981, т. 256, с. 370.
49. *Крылов В. В., Павлов В. И.*— Акуст. ж., 1982, т. 28, с. 836.
50. *Аскарьян Г. А., Долгошеин Б. А.*— Письма в ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 617.
51. *Голубничий П. И., Калюжный Г. С., Корчиков С. Д.* и др.— Письма в ЖТФ, 1981, т. 7, с. 272.
52. *Rosencwaig A.*— Physics Today, 1975, v. 28, p. 23.
53. *Rosencwaig A., Gersho A.*— J. Appl. Phys., 1976, v. 47, p. 64.
54. *Nordhaus O., Pelzl J.*— Appl. Phys., 1981, v. 25, p. 221.
55. *Леманов В. В., Шакин О. В.*— ФТТ, 1972, т. 14, с. 229.
56. *Свет В. Д.*— Оптические методы обработки сигналов.— М.: Энергия, 1971.
57. *Лин, Уайт, Уилкинсон.*— ТИИЭР, 1976, т. 64, с. 258.
58. *Проклов В. В., Шкердин Г. Н., Гуляев Ю. В.*— ФТП, 1974, т. 6, с. 1915.
59. *Островский И. В., Рожко А. Х., Лысенко В. Н.*— Письма в ЖТФ, 1979, т. 5, с. 910.
60. *Гуляев Ю. В.*— ФТТ, 1967, т. 9, с. 431.
61. *Островский И. В.*— Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 34, с. 463.

1. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны.— М.: Наука, 1967.
2. *Такер Дж., Рэмптон В.* Гиперзвук в физике твердого тела: Пер. с англ./ Под ред. И. Г. Михайлова и В. А. Шутилова.— М.: Мир, 1976.
3. *Ле-Кроу Р., Комсток Р.*— В кн.: Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ. / Под ред. И. Л. Фабелинского — М.: Мир, 1968, т. 3, ч. Б, с. 156.
4. *Штраусс В.*— В кн.: Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ./ Под ред. Л. Г. Меркулова и В. А. Шутилова — М.: Мир, 1970, т. 4, ч. Б, с. 247.
5. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела: Пер. с англ./ Под ред. А. А. Гусева — М.: Наука, 1978.
6. *Смоленский Г. А., Леманов В. В.* Ферриты и их техническое применение.— Л.: Наука, 1975.
7. *Яковлев Ю. М., Генделев С. Ш.* Монокристаллы ферритов в радиоэлектронике.— М.: Сов. радио, 1975.
8. *Моносов Я. А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс.— М.: Наука, 1971.
9. *Damon R. W., Eshbach J. R.*—J. Phys. Chem. Solids, 1961, v. 19, p. 308.
10. *Miller N. D. J.*—Phys. Stat. Sol. (a), 1977, v. 43, p. 593.
11. *Гончаров К. В., Красильников В. А., Участкин В. И.*— ФТТ, 1967, т. 9, с. 3384.
12. *Auld B. A.*—In: Appl. Solid State Science.—Acad. Press.: N.Y.: 1971, v. 2, p. 2.
13. *Scott R. Q., Mills D. L.*—Phys. Rev. B, 1977, v. 15, p. 3545.
14. *Гончаров К. В., Маматова Т. А., Иванец А. А.*— Вестн. Моск. ун-та: сер. физ. астрон., 1977, т. 18, с. 62.
15. *Parekh J. P.*—Electron. Lett., 1970, v. 6, p. 430.
16. *Camley R. E., Maradudin A. A.*—Appl. Phys. Lett., 1981, v. 38, p. 610.
17. *Леманов В. В., Павленко А. В., Гришмановский А. И.*— ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 712.
18. *Гришмановский А. И., Юшин Н. К., Богданов В. Л.* и др.— ФТТ, 1971, т. 13, с. 1833.
19. *Ганн В. В., Зазунов Л. Г.*— ФТТ, 1973, т. 15, с. 671.
20. *Давыдов Л. Н., Спольник З. А.*— ФТТ, 1974, т. 16, с. 1710.
21. *Полякова А. Л.*— Акуст. ж., 1976, т. 22, с. 427.
22. *Мирсаев И. Ф., Николаев В. В., Талуц Г. Г.*— ФММ, 1978, т. 45, с. 490.
23. *Дикштейн И. Е., Тарасенко В. В., Шавров Б. Г.*— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 816.
24. *Ожогин В. И., Преображенский В. Л.*— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 988.
25. *Заремба Л. К., Карпачев С. Н.*— В кн.: Материалы XII Всесоюзн. конф. по акустоэлектронике и квантовой акустике. Ч. 2.— Саратов, 1983, с. 50.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ *)

Адиабата Пуассона 11
Акустическая голография 357
— левитация 130
Акустические оси 218, 226, 233
— ветви колебаний 243
Акустолюминесценция 366
Акустооптические дефлекторы 364
— процессоры 365

Взаимодействие акустоэлектронное 325
— встречное 295, 333
— вырожденное 295, 334
— трехволновое 89
— фонон-фононное 244
Вектор смещения 189
Волны вязкие 20, 56
— гравитационно-капиллярные 26
— Гуляева — Блюштейна 203
— изгибные 210
— клиновые 207
— крутильные 212
— Лэмба 210
— Лэмба обобщенные 205
— Лява 204
— магнитостатические 373
— нормальные продольные 210
— — *SH* 210
— простые 68
— стационарные 70
— Стоунли 205
— температурные 20
— ударные 12
— утечки 206, 231
— щелевые 206
— юнговские 211
Выпрямленная теплопередача 151

Генерация обратной волны 295

Давление звуковое 34
— ланжевеновское 120
— рэлеевское 121

Закон Гука 192
— — обобщенный 213
Запоминание акустических сигналов 295, 336

Излучение звука дислокациями 272
— — трещинами 276

Магноны 373
Магнитоакустический резонанс 377
Механизм Ахиезера 257
— Ландау — Румера 257
Модули упругости 192, 215, 282

Односторонняя диффузия 146
Оптические ветви колебаний 243
Отражательные решетки ПАВ 320

Пики Бордони 268

Рассеяние звука на звуке 93, 290
Резонаторы на ПАВ 321
Решение Римана 66

Сила Бьёркнеса 133
Скорость звука адиабатическая 11, 36
высокочастотная 47
Скорость колебательная 34
Солитон 84
Соотношение Вайнрайха 332
Соотношения Крамерса — Кронига 54
— Мэнли — Роу 100

Тензор деформации 189
— напряжений 190
— — Пиолы — Кирхгофа 283
— термодинамических напряжений 193, 282
Термооптическая генерация звука 359

Углы Брюстера 199, 234
Уравнение Бернулли 17
— Больцмана кинетическое 256
— Бюргерса 77
— Герца — Кнудсена 149
— Дайсона 163
— движения упругой среды 190, 194, 213
— Кельвина — Фойгта 49
— Кортевега — де Вриза 83
— Навье — Стокса 14, 19
— непрерывности 10, 13
— Нолтинга — Непайреса 141
— переноса тепла 16
— Рэлея 140, 200
— Хохлова — Заболотской 87
— эйконала 173
— Эйлера 9, 13
Условия синхронизма 89, 289
Устройства свертки и корреляции 333
— считывания оптических изображений 337

Фильтры дисперсионные 317, 323
— полосовые 315
Флуктуации амплитуды 178
— фазы 174
Формула Кёнига 133
— Кинга 130
— Миннаерта 144
— Стокса — Кирхгофа 41
Фотоакустическая спектроскопия 363

Электроакустическое эхо 295
Эффективное магнитное поле 370

*) Настоящий предметный указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. Термины и понятия, отраженные в оглавлении, в указатель не включены.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

ЧАСТЬ I. ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Глава 1. **Некоторые вопросы гидродинамики** 9
§ 1. Идеальная жидкость 9
§ 2. Вязкая и теплопроводящая жидкость 14
§ 3. Примеры точных решений 17
§ 4. Законы подобия. Безразмерные числа в гидродинамике 21
§ 5. Приближенные решения уравнений вязкой жидкости при больших и малых числах Рейнольдса. Пограничный слой 23
§ 6. Волны на поверхности жидкости 25
§ 7. Турбулентное движение жидкости. Закон «двух третей» 27

Глава 2. **Звуковые волны в газах и жидкостях. Релаксационная теория** 34
§ 1. Звуковые волны бесконечно малой амплитуды в идеальной среде 34
§ 2. Скорость звука и поглощение в газах и жидкостях 36
§ 3. Дисперсия и поглощение звука. Экспериментальные исследования 41
§ 4. Релаксация объемной вязкости 47
§ 5. Релаксация сдвиговой вязкости в жидкостях 55
§ 6. Акустическая спектроскопия 60

Глава 3. **Основы нелинейной акустики газов и жидкостей** 65
§ 1. Плоская волна конечной амплитуды в газе и жидкости в отсутствие диссипации 65
§ 2. Экспериментальные методы исследования 72
§ 3. Плоская нелинейная волна в среде с диссипацией 76
§ 4. Нелинейные плоские волны в среде с дисперсией 80
§ 5. Сферические и цилиндрические нелинейные волны 85
§ 6. Ограниченные пучки 87

Глава 4. **Взаимодействия нелинейных акустических волн. Параметрические антенны** 89
§ 1. Взаимодействие нелинейных волн 89
§ 2. Стоячие нелинейные волны и резонаторы 94
§ 3. Параметрические процессы в нелинейных волнах. Параметрическая излучающая и приемная антенны 99
§ 4. Статистические явления при распространении нелинейных акустических волн 108
§ 5. Поглощение звука шумом. Акустическая турбулентность . . . 110

Глава 5. **Радиационное давление. Акустические течения** 118
§ 1. Радиационное давление. Общие сведения 118
§ 2. Радиационная сила давления звука на взвешенные сферические частицы 126
§ 3. Взаимодействие двух сферических частиц в звуковом поле . . . 132
§ 4. Акустические течения 135

Глава 6. **Акустическая кавитация. Распространение звука в среде с пузырьками** 138
§ 1. Общие сведения 138
§ 2. Динамика одиночного газового пузырька в акустическом поле 139
§ 3. *Динамика одиночного парового пузырька* 147
§ 4. Асимметричное захлопывание кавитационных пузырьков в жидкости 152
§ 5. Кавитационная область и пороги кавитации 155
§ 6. Распространение звука в среде с пузырьками 160

Глава 7. **Турбулентность и звук** 170
§ 1. Введение. Общие сведения 170
§ 2. Приближение геометрической акустики 171
§ 3. Приближенный учет дифракционных поправок. Метод плавных возмущений 179
§ 4. Задача о рассеянии звука на турбулентности 182
§ 5. Эксперименты по рассеянию звука на турбулентных неоднородностях 186

ЧАСТЬ II. **ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ**

Глава 8. ***Линейная акустика изотропных твердых тел*** 188
§ 1. Основные сведения из теории упругости 188
§ 2. Продольные и поперечные волны в изотропном твердом теле . . . 193
§ 3. Отражение и преломление продольных и поперечных волн . . . 196
§ 4. Поверхностные волны Рэлея 199
§ 5. Другие типы поверхностных волн 203
§ 6. Волны в пластинках и стержнях 208

Глава 9. **Основы кристаллоакустики** 213
§ 1. Плоские упругие волны в кристаллах. Уравнение Кристоффеля. Квазипродольные и квазипоперечные волны 213
§ 2. Влияние симметрии упругих свойств на распространение волн. Пример расчета для кубического кристалла 215
§ 3. *Поток энергии. Фазовая и групповая скорости* 219
§ 4. Волны в пьезоэлектрических кристаллах. Коэффициент электромеханической связи 221
§ 5. Отражение и преломление упругих волн на границах раздела 225
§ 6. Поверхностные волны в кристаллах 227
§ 7. Учет дискретности кристаллической решетки. Акустическая активность и другие эффекты, обусловленные микроструктурой . . . 231

Глава 10. **Поглощение и скорость звука в твердых телах. Взаимодействие с тепловыми фононами и дислокациями. Акустическая эмиссия** 236
§ 1. Введение. *Общие сведения* 236
§ 2. Поглощение звука в изотропных диэлектриках 238
§ 3. Некоторые сведения о колебаниях кристаллической решетки и фононах 241
§ 4. Взаимодействие звуковых волн с тепловыми фононами. Микроскопическое рассмотрение. Низкие температуры и гиперзвуковые частоты 246
§ 5. Взаимодействие звуковых волн с тепловыми фононами. Макроскопическое рассмотрение. Высокие (комнатные) температуры и ультразвуковые частоты 253
§ 6. Дислокационное поглощение и дисперсия звука. Акустическая эмиссия 261

Глава 11. **Нелинейная акустика твердого тела** 280
§ 1. Введение. Общие замечания 280
§ 2. Основные сведения из нелинейной теории упругости 281

§ 3. Взаимодействие упругих волн конечной амплитуды в изотропном твердом теле . . . 285
§ 4. Нелинейные акустические эффекты в кристаллах . . . 291
§ 5. Экспериментальные методы исследования нелинейных явлений в твердых телах и некоторые результаты этих исследований . . . 298

Глава 12. **Акустоэлектроника** . . . 305
§ 1. Общие сведения . . . 305
§ 2. Возбуждение и детектирование поверхностных волн. Встречно-штыревой преобразователь . . . 307
§ 3. Линии задержки и фильтры, использующие встречно-штыревые преобразователи . . . 313
§ 4. Рассеяние поверхностных волн. Резонаторы и фильтры на основе отражательных структур . . . 318
§ 5. Усиление звука дрейфом носителей в пьезополупроводниках и слоистых структурах . . . 324
§ 6. Волновые взаимодействия, обусловленные токовой нелинейностью. Акустоэлектрический эффект . . . 330
§ 7. Нелинейные акустоэлектронные устройства на поверхностных волнах . . . 333

Глава 13. **Акустооптика** . . . 339
§ 1. Введение . . . 339
§ 2. Дифракция света на звуке. Раман-натовский и брэгговский режимы . . . 340
§ 3. Дифракция света на поверхностных акустических волнах . . . 344
§ 4. Рассеяние Мандельштама — Бриллюэна на тепловых колебаниях . . . 346
§ 5. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна . . . 348
§ 6. Акустооптика жидких кристаллов . . . 351
§ 7. Некоторые применения акустооптических взаимодействий . . . 354

Глава 14. **Волны в магнитоупорядоченных кристаллах** . . . 368
§ 1. Основные сведения о магнитоупорядоченных кристаллах . . . 368
§ 2. Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках . . . 371
§ 3. Магнитоупругие волны . . . 375
§ 4. Затухание магнитоупругих волн . . . 378
§ 5. Нелинейные эффекты . . . 379

Литература . . . 382

Предметный указатель . . . 400