

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Книг, посвященных основаниям механики, на русском языке не так много, хотя интерес читателя к этой теме огромен. Книга «Вариационные принципы механики» Корнелиуса Ланцоша должна привлечь читателей своеобразным изложением, в котором автор главное внимание уделил не формальной стороне вопроса, а наглядности, целостности и взаимному проникновению и влиянию идей и понятий. Некоторые неожиданные интерпретации, предложенные автором, могут показаться интересными также и специалистам, так как основой для книги послужили лекции, которые читались автором в университетской аспирантуре.

Книгу с удовольствием прочтут все математически образованные читатели, интересующиеся основаниями механики и физики.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Из предисловия автора	11
Предисловие ко второму изданию	14
ВВЕДЕНИЕ	
1. Вариационные методы в механике	15
2. Формализм Эйлера и Лагранжа	16
3. Формализм Гамильтона	17
4. Вариационное исчисление	18
5. Сравнение векторного и вариационного методов в механике	18
6. Математическая оценка вариационных принципов	19
7. Философская оценка вариационного подхода в механике	21
ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	
1. Характерные черты методов аналитической механики	25
2. Обобщенные координаты	29
3. Пространство конфигураций	34
4. Отображение пространства самого на себя	35
5. Кинетическая энергия и риманова геометрия	39
6. Голономные и неголономные механические системы	46
7. Обобщенная сила и силовая функция	49
8. Склерономные и реономные системы. Закон сохранения энергии	54
ГЛАВА II. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	
1. Общие свойства задач на экстремум	56
2. Стационарное значение функции	60
3. Вторая вариация	62
4. Взаимосвязь стационарных и экстремальных значений	64
5. Дополнительные условия. Метод неопределенных множителей Лагранжа	65
6. Неголономные дополнительные условия	71
7. Стационарное значение определенного интеграла	72
8. Основные операции вариационного исчисления	76

9. Коммутативные свойства операции варьирования	79
10. Вывод условия стационарности определенного интеграла методами вариационного исчисления	80
11. Дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа в случае n степеней свободы	83
12. Варьирование при наличии дополнительных условий	86
13. Неголономные условия	88
14. Изопериметрические условия	89
15. Вариационное исчисление и граничные условия. Задача об упругом стержне	92

ГЛАВА III. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Принцип виртуальных перемещений для обратимых перемещений	97
2. Равновесие твердого тела	101
3. Эквивалентность двух систем сил	103
4. Задачи о равновесии при наличии дополнительных условий	104
5. Физическая интерпретация метода неопределенных множителей Лагранжа	107
6. Неравенство Фурье	110

ГЛАВА IV. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1. Сила инерции	112
2. Роль принципа Даламбера в механике	116
3. Закон сохранения энергии как следствие принципа Даламбера	118
4. Фиктивные силы при ускоренном движении систем отсчета. Гипотеза Эйнштейна об эквивалентности	120
5. Фиктивные силы во вращающейся системе отсчета	124
6. Динамика твердого тела. Движение центра масс	127
7. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера	129
8. Принцип наименьшего принуждения Гаусса	130

ГЛАВА V. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

1. Принцип Гамильтона	136
2. Уравнения движения Лагранжа и их инвариантность относительно точечных преобразований	140
3. Теорема о сохранении энергии как следствие принципа Гамильтона	145
4. Циклические (игнорируемые) координаты и их исключение	151
5. Бессилловая механика Герца	157
6. Время как циклическая переменная; принцип Якоби; принцип наименьшего действия	159
7. Принцип Якоби и риманова геометрия	165
8. Дополнительные условия: физический смысл неопределенных множителей Лагранжа	168
9. Неголономные дополнительные условия и полигенные силы	174
10. Малые колебания около положения равновесия	175

ГЛАВА VI. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

1. Дуальное преобразование Лежандра	190
-------------------------------------	-----

2. Преобразование Лежандра в применении к функции Лагранжа	193
3. Преобразование уравнений движения Лагранжа	195
4. Канонический интеграл	197
5. Фазовое пространство и фазовая жидкость	202
6. Теорема сохранения энергии как следствие канонических уравнений	205
7. Теорема Лиувилля	207
8. Интегральные инварианты, теорема Гельмгольца о циркуляции	209
9. Исключение циклических переменных	214
10. Параметрическая форма канонических уравнений	216
ГЛАВА VII. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	
1. Преобразования координат как метод решения задач механики	225
2. Точечные преобразования Лагранжа	227
3. Преобразования Матье и Ли	233
4. Канонические преобразования общего типа	237
5. Билинейная дифференциальная форма	240
6. Скобки Лагранжа и Пуассона	245
7. Бесконечно малые канонические преобразования	250
8. Движение фазовой жидкости как непрерывное выполнение канонических преобразований	253
9. Главная функция Гамильтона и движение фазовой жидкости	256
ГЛАВА VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ	
1. Важная роль производящей функции в задаче о движении	264
2. Теория преобразований Якоби	266
3. Решение уравнения в частных производных методом разделения переменных	275
4. Метод Делоне для разделения переменных с периодических системах	279
5. Роль дифференциального уравнения в частных производных в теориях Гамильтона и Якоби	291
6. Построение главной функции Гамильтона при помощи полного интеграла Якоби	299
7. Геометрическое решение уравнения в частных производных. Оптико-механическая аналогия Гамильтона	302
8. Значение уравнения в частных производных Гамильтона в теории распространения волн	315
9. Геометризация динамики. Неримановы геометрии. Метрическая интерпретация уравнения в частных производных Гамильтона	319
ГЛАВА IX. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА	
1. Историческое введение	331
2. Релятивистская кинематика	334
3. Четырехмерное пространство Минковского	341
4. Преобразования Лоренца	344
5. Механика одной частицы	356
6. Гамильтонова формулировка динамики частицы	361

7. Потенциальная энергия V	362
8. Релятивистская формулировка ньютоновой скалярной теории гравитации	364
9. Движение заряженной частицы	365
10. Геодезические линии в четырехмерном мире	371
11. Орбиты планет в теории тяготения Эйнштейна	372
12. Гравитационное искривление световых лучей	378
13. Гравитационное красное смещение спектральных линий	381
ГЛАВА X. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР	384
Приложение	396
Библиография	399
Дополнительная библиография	400
Указатель	401

	Указатель
Аберрация света 338	Гаусс 392
- хроматическая 312	Гельмгольц 393
Амплитудная функция 317	Геодезические линии 134, 166, 371
Аналогия оптико-механическая 305	Геометрическая интерпретация задач динамики 330
Аппель 394	Геометрия нериманова 320, 322, 328, 329
Аристотель 385	Геометрия риманова 42
Бернулли 386	Герц 393
Бор 275, 394	Гессиан 191
Борн 395	Гравитационная теория Эйнштейна 372
де Бройль 290, 316, 318	Гравитационное искривление световых лучей 378
Бюргерс 279	- красное смещение 381
Вариационное исчисление 18	Гравитационный радиус Солнца 378
Вариация 18, 60, 61	Граничный член 92, 146
- вторая 63, 64	Гюйгенс 307
- определенного интеграла 80	Даламбер 388
- первая 61	Действие 17, 18, 27, 28
- функции 77	Делоне 281, 393
Варьирование 77	Дисперсия 312
- коммутативные свойства 78	Допплера эффект 338, 381
- при дополнительных условиях 65, 70, 85	Задача вариационная свободная 65
- - фиксированных граничных значениях 78, 81	- - с дополнительными условиями 65, 70, 85
Вектор 41	- динамики 25
Величины инвариантные 332	- Кеплера 277
- ковариантные 41, 143, 332	- об упругом стержне 92
Виртуальное перемещение 61	
Время собственное 360	
Галилей 385	
Гамильтон 391	

- равновесия при дополнительных условиях 104
- Закон движения Ньютона основной 25
- - - третий 19, 25
- Зеемана эффект 279, 289
- Импульс 18
- обобщенный 146
- сопряженный 199
- Инвариантное свойство метрической геометрии 326
- Инвариантность уравнений Лагранжа 141, 142, 143
- Инварианты интегральные 209
- Интеграл полный 268, 279
- Канонические уравнения, см. уравнения канонические
- Канонический интеграл 197, 199, 218
- Квантовые условия Зоммерфельда—Вильсона 290
- Кватернионы 345
- Кинематика релятивистская 334
- Кинематические условия 45
- Кинетическая энергия, см. Энергия кинетическая
- Кинетический фокус 310
- Кинетическое взаимодействие 156
- Колебания малые 175
- нормальные 187, 189
- Координаты обобщенные 29, 32, 34
- сферические 40
- циклические (игнорируемые) 151, 214
- Лагранж 390
- Лейбниц 387
- Ли 393
- Линейный элемент 40, 44, 166
- - Шварцшильда 373, 377
- Линии геодезические 134, 371
- Майер 385
- Мах 384
- Метод неопределенных множителей Лагранжа 66, 90
- - - интерпретация 107, 168
- разделения переменных 275
- Механика аналитическая 16, 19
- векторная 16, 19
- Герца 157, 158
- релятивистская 331
- - одной частицы 356, 361
- Минковский 42, 333, 341
- Мировая линия 141, 356
- Многообразие двумерное 42
- одномерное 42
- Мопертюи 388
- Неравенство Фурье 110
- Ньютон 387
- Обобщенные координаты, см. Координаты обобщенные
- направляющие косинусы 323
- Оптико-механическая аналогия 305
- Парадокс часов 339
- Параметры макроскопические 157
- микроскопические 157
- Переменные действия 283, 291
- кинематические 117
- пассивные 193
- угловые 284, 285, 291
- Перемещения виртуальные 61
- обратимые 98, 110
- Преобразование координат точечное 37, 142
- Лежандра 190, 192, 193
- линейного интеграла в поверхностный 244
- уравнений Лагранжа 195
- Преобразования канонические 225
- - бесконечно малые 251, 253
- - общего типа 237
- контактные 234
- Лоренца 344
- - бесконечно малые 355, 369
- Матье и Ли 233, 237
- реономные 232, 239
- склерономные 231, 239
- точечные Лагранжа 227
- Принцип 27
- виртуальных перемещений 98, 99

- Гамильтона 18, 136, 139
- Гюйгенса 307
- Даламбера 114
- инвариантности 143
- наименьшего времени
 - распространения, см. Принцип Ферма
- Принцип наименьшего действия
 - (Эйлера—Лагранжа) 17, 18, 165
 - - принуждения (Гаусса) 130, 132
 - общей относительности 333
 - Ферма 22, 162, 163, 309
 - Якоби 162
 - - и риманова геометрия 165
- Пространство конфигурации 34, 44
 - - расширенное 141
 - Минковского 341
 - состояний 203
 - фазовое 202, 205
 - - расширенное 217, 231
 - функциональное 74
- Пуанкаре 393
- Пуассон 393
- Равновесие нейтральное 188
 - неустойчивое 188
 - твердого тела 101
 - устойчивое 188, 189
- Раус 393
- Релятивистская кинематика 334
 - механика заряженной частицы 365
 - - одной частицы 356, 361
 - формулировка теории гравитации 364
- Риманова геометрия 42, 166
- Свойства пространства метрические 35
 - - топологические 35
- Связь голономная 47, 49
 - неголономная 47, 49
 - различных принципов 222
 - реономная 54
 - склерономная 54
- Сила 18
 - инерции 112

- - Даламбера 124
- фиктивная 121
- Эйлера 127
- Эйнштейна 123
- эффективная 114
- Силовая функция 19, 20, 26, 51
- Силы консервативные 52
 - моногенные 53
 - обобщенные 50
 - полигенные 53
- Система сил 26
 - - голономная 47
 - - консервативная 19
 - - неголономная 47
 - - реономная 120, 149
 - - склерономная 120, 147
- Системы эквивалентные 103
- Скобки Лагранжа 246
- Пуассона 248
- Скорость 43
- Сложение скоростей 337
- Сохранение энергии 55, 118, 120, 145, 148, 206, 207, 368
- Спектр нормальных колебаний 187
- Стационарное значение 59, 60, 62
 - - определенного интеграла 72, 80
- Степени свободы 32
- Тензор 41, 42
 - кривизны 43
 - метрический 42
- Теорема Гельмгольца о циркуляции 209, 213
 - Лиувилля 208, 255
- Теория относительности общая 23, 333, 334
 - - специальная 332
- Стокса 244
- Томсон 393
- Уравнение амплитудное 317
 - волновое Френеля 317, 329
- Гамильтона—Якоби 263, 270, 273, 274, 291, 319
 - характеристическое 181
- Шредингера 317

- Уравнения канонические 196
- - в параметрической форме 216, 220
- Эйлера 129
- Эйлера—Лагранжа 76, 82
- Условия граничные естественные 93
- - наложенные извне 93
- дополнительные 65, 168
- - неголономные 71, 88, 174
- изопериметрические 89
- стационарности определенного интеграла 80
- Фазовая жидкость 202, 205, 206
- - движение 254, 256
- Фазовое пространство, см.
- Пространство фазовое
- Фигуры Лиссажу 187, 189, 287
- Физо 331
- Форма дифференциальная
- билинейная 241, 245
- - квадратичная 41
- Формализм Гамильтона 18
- Эйлера и Лагранжа 17
- Фуко 126, 313
- Функция амплитудная 317
- Гамильтона 150, 194, 249
- Функция Гамильтона главная 256, 301, 322
- - обобщенная 220, 232
- - построение 299, 301
- Лагранжа 138, 193
- производящая 238
- - видоизмененная 239
- характеристическая 257
- Фурье 313
- Циркуляция 209, 214, 243
- Центр масс 127
- Частица свободная 19
- Черный спутник Сириуса 382
- Шредингер 317
- Эйлер 389
- Эйнштейн 9, 123, 290, 332
- Экстремум 63, 64, 65
- Энергии сохранение, см. Сохранение энергии
- Энергия кинетическая 19, 43
- полная 55, 149, 160, 358
- потенциальная 52, 55, 362, 388
- Якоби 391

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Вариационные принципы механики всегда вызывали весьма повышенный интерес, причем характер этого интереса менялся. В XVIII веке механиков и философов волновало то обстоятельство, что телеологический финализм, который, как им казалось, заложен в этих принципах, оказывался в какой-то мере эквивалентным причинному (ньютонову) описанию явлений. В XIX веке интерес сосредоточился на мощном математическом формализме, связанном с этими принципами, и на их внутреннем родстве с проблемой преобразований в механике. В последней четверти XIX и первой половине XX века особое внимание привлекли эвристические возможности этих принципов (особенно в теории относительности и квантовой физике) и их место в физической картине мира.

Исключительная общность вариационных принципов механики, возможность сравнительно простого их обобщения на многочисленные (немеханические) области физики, их связь с законами сохранения и группами Ли ставит эти принципы в центральное положение при решении многих фундаментальных проблем физики. Это может показаться удивительным, ибо классическая (аналитическая) механика, в которой эти принципы играют основную роль, является, строго говоря, существенно приближенной физической теорией. И тем не менее классическая механика остается в настоящее время и сохранится навсегда как эталон ясности и последовательности идей для всех математических теорий физических (и не только физических) явлений природы.

Бряд ли будет ошибкой сказать, что классическая механика в ее гамильтоновой и лагранжевой формах еще долгое время будет играть важную и вдохновляющую роль в создании новых физических теорий. Не существует правил для отыскания путей в дебрях природы. Творческий разум руко-

водствуется обобщением результатов эксперимента, аналогиями и перенесением так или иначе переработанных старых понятий в новые представления. Именно здесь гибкость и универсальность математической формы вариационных принципов механики приходит на помощь исследователю. Из вариационных принципов в столь общем их понимании нельзя вывести физическую картину мира, но они могут служить путеводной нитью для нахождения верных путей в сложных лабиринтах событий и процессов природы.

Вариационные принципы механики не только выражают в простой инвариантной форме уравнения движения и уравнения многих полей, но и заключают в себе синтез континуального и дискретного аспектов движения и являются выражением обобщенного принципа причинности в физике. Они находят применения в широком (и все более расширяющемся) круге вопросов самых разнообразных областей современной земной и космической механики.

Наконец, в науке есть своя эстетика, и красота логической стройности вариационных принципов механики не может не восхищать математиков, физиков, механиков.

Сказанного, вероятно, достаточно для того, чтобы объяснить факт выхода в свет очень большого и все еще растущего числа статей и книг, посвященных вариационным принципам механики. Различие точек зрения и подходов авторов этих работ позволяет лучше и глубже понять как математическую структуру вариационных принципов механики, так и их место и роль в физике. Поэтому появление в русском переводе книги известного математика К. Ланцоша, посвященной этим принципам, является вполне обоснованным. Весьма любопытен подход автора к проблеме вариационных принципов (см. его предисловие и введение). Читателю будет интересно сравнить точку зрения Ланцоша с иными точками зрения, представленными, например, в работах Синга¹, Голдстейна² и других авторов.

Читатель, безусловно, найдет много полезного и интересного в своеобразной книге Ланцоша. Ее большим достоинст-

¹ Синг Дж. Л., Классическая динамика, Физматгиз, М., 1963.

² Голдстейн Г., Классическая механика, ГТТИ, М., 1957; см. также список дополнительной литературы на русском языке, помещенный в конце книги.

вом является наглядность и почти скульптурная отчетливость изложения многих вопросов. К сожалению, в книге отсутствует теорема Э. Нётер, без которой вряд ли возможно изложение вариационных принципов механики, рассматриваемых не только как некоторый частный раздел аналитической механики; естественно, что из сферы внимания автора, по существу говоря, выпала теория поля.

Переводчик и редактор стремились сохранить особенности стиля автора даже там, где это оказалось связанным с сохранением некоторых недостаточно строгих его рассуждений и выводов.

К приложенной в конце книги небольшой библиографии мною добавлено несколько работ на русском языке, которые могут оказаться полезными для читателя, интересующегося вариационными принципами механики.

Л. Полак

*Was du ererbt von deinen Vätern hast,
Erwirb es, um es zu besitzen.*

GOETHE

*Посвящается
Альберту Эйнштейну*

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение ряда лет автор читал двухсеместровый курс лекций по вариационным принципам механики для аспирантов Purdue University и всякий раз, когда ему приходилось сталкиваться с основными принципами и методами аналитической механики, он ощущал чувство необычайного подъема. Вряд ли существует еще какая-либо из точных наук, где абстрактные математические рассуждения и конкретные физические доводы так прекрасно гармонируют и дополняют друг друга. Не случайно принципы механики производили огромное впечатление на многих выдающихся математиков и физиков. Не случайно также, что в европейских университетах с давних пор курс теоретической механики обязательно входит в план обучения любого будущего математика и физика. Аналитическая механика — это гораздо большее, чем просто эффективный метод решения динамических задач, с которыми приходится встречаться в физике и технике. Для того чтобы подчеркнуть важность теоретической механики, нет необходимости ссылаться на гироскопы, как бы ни были важны они в физике и технике — само существование общих принципов механики служит ее оправданием.

Настоящую книгу о вариационных принципах механики не следует рассматривать как изложение, конкурирующее с обычными учебниками. Не сомневаясь в превосходном качестве методов изложения, принятых в них и носящих в основном технический и формальный характер, автор все же считает, что существует потребность в монографиях, которые показали бы самый остов точных наук в элементарном изложении и с некоторым философским уклоном.

Многие современные научные сочинения написаны неким полумистическим языком как бы специально для того, чтобы создать у читателя тягостное ощущение постоянного присутствия какого-то супермена. Данная книга выполнена в скромном стиле и предназначена для обычных читателей. Опираясь на свой опыт, автор считает, что одним из существ-

веннейших недостатков современной системы высшего образования является то, что целый ряд фундаментальных, но кажущихся простыми, понятий относят к числу «элементарных» и излагают их в тот период, когда студенческий ум еще недостаточно созрел для того, чтобы постичь их истинный смысл. Плоды этой ошибки можно наблюдать ежедневно. Студент, знакомый с мельчайшими подробностями устройства аппаратуры для расщепления атома, зачастую оказывается совершенно смущенным идеями о связи между массой и весом или между тяготеющей и инертной массой. В механике, одной из наук, лежащих в фундаменте естествознания, подобная путаница особенно бросается в глаза.

Для философски искушенного ума различие между действительным и виртуальным перемещениями кажется совершенно очевидным и не нуждается в дальнейших пояснениях. Но современный студент — это что угодно, но только не философский ум. Для него это различие совсем не очевидно, более того, чтобы постичь смысл понятия «виртуальное перемещение», ему приходится в течение долгого времени оперировать с ним, применяя его к ряду знакомых ситуаций. Поэтому автор счел наилучшим введением в приложения вариационного исчисления самостоятельный вывод студентом ряда известных результатов векторной механики из принципа виртуальных перемещений. Попутно студент замечает, что ранее не связанные и более или менее аксиоматически введенные свойства сил и моментов оказываются вытекающими из одного всеобъемлющего принципа. У него возникает интерес, побуждающий двигаться дальше, за пределы статике. Здесь в его поле зрения попадает принцип Даламбера, показывающий, что тот же самый принцип виртуальных перемещений может служить для получения уравнений движения в сколь угодно сложной динамической задаче.

Автор сознает, что изложение можно было бы значительно сократить, если начать непосредственно с уравнений движения Лагранжа, а затем перейти к теории Гамильтона. Такая последовательность была бы оправданной, если бы целью книги было первое ознакомление студента с определенным формализмом и методом составления дифференциальных уравнений, отвечающих любой заданной динамической задаче, а также с определенными «рецептами», которые могли бы помочь в решении этих уравнений. Но

именно этого автор *не хотел* делать. За великими теориями Эйлера и Лагранжа, Гамильтона и Якоби скрывается необычайное богатство философского содержания, которое совершенно исчезает при чисто формальном изложении, но которое не может не быть источником величайшего интеллектуального наслаждения для человека, любящего математику. Дать студенту возможность открыть для себя скрытую красоту этих теорий — в этом заключалась одна из главных задач автора. Для этого ему пришлось вести читателя вдоль всего пути исторического развития с самого его начала, а также включить задачи, позволяющие студенту освоить новые понятия и идеи. Эти задачи, сами по себе простые, были выбраны так, чтобы проиллюстрировать соответствующие общие принципы.

Как видно из оглавления, в эту книгу не включен важный раздел — теория возмущений уравнений динамики. Кроме того, первоначально планировавшуюся главу о релятивистской механике пришлось опустить из-за недостатка места¹. Однако даже имеющийся материал вполне может составить содержание двухсеместрового аспирантского курса по три часа каждую неделю; он достаточен для студента-математика, физика или инженера, который не собирается специализироваться в области механики, а хочет лишь составить себе представление о ее основных принципах.

Автор приносит свои извинения за то, что он не везде ссылается на оригинальные работы. Ему пришлось иметь дело с этим предметом в течение многих лет, так что зачастую трудно было указать, откуда он почерпнул тот или иной материал. В первую очередь он обязан книге Уиттекера «Аналитическая динамика», статье Нордгейма в *Handbuch der Physik*, статье Пранджа в *Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften* — все они включены в библиографию и рекомендованы для дальнейшего чтения.

Автор глубоко благодарен профессору Дж. Л. Сингу за ту тщательность, с которой он просмотрел рукопись и указал автору на многие слабые места в его изложении. В некоторых случаях различие в точках зрения было лишь кажущимся, однако в ряде мест оказалось возможным дать более точные формулировки, что должно существенно облегчить чтение.

¹ Эта глава добавлена во втором издании. — *Прим. ред.*

Корни вариационных принципов механики уходят в глубь эпохи либерализма, начавшейся с Декарта и окончившейся с французской революцией, эпохи, в которую жили Лейбниц, Спиноза, Гёте и Иоганн Себастьян Бах. Это был единственный период во всей истории Европы со времен древних греков, когда люди мыслили в масштабах Вселенной. Если автор сумел передать хотя бы частицу этого космического духа, то его усилия вполне вознаграждены.

Лос-Анжелос, май 1949

Корнелиус Ланцош

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Помимо приложения, в котором дается более простой вывод перехода от лагранжевой к гамильтоновой форме механики, это издание отличается от предыдущего лишь добавлением новой главы о релятивистской механике.

Автор благодарен дирекции Университетского издательства в Торонто, которая предоставила ему возможность дополнить свою книгу этим материалом, относящимся к одному из наиболее поразительных открытий человеческого гения. В этой главе в очень сжатой форме, но последовательно изложены все основные идеи, принципы и результаты Эйнштейна, относящиеся к кинематике и динамике одной частицы. Общая теория преобразований Лоренца изложена при помощи гамильтоновых кватернионов. Они так удачно подходят для этой цели, что вряд ли найдется другой математический аппарат, столь же простой и компактный. Уравнения поля общей теории относительности, естественно, не вошли в эту книгу, однако здесь подробно рассматриваются динамические аспекты гравитационной теории Эйнштейна, в том числе три решающих эксперимента по проверке теории, поскольку они не выходят за рамки лагранжевой и гамильтоновой форм динамики.

Автор надеется, что добавление этой главы увеличит полезность книги и привлечет к ней новых друзей помимо той большой армии читателей, которые сочли для себя полезным изучение этого введения в одну из величайших глав естествознания и нашли в нем источник вдохновения.

К. Л.

Дублин, Ирландия, июль 1962

ВВЕДЕНИЕ

1. Вариационные методы в механике. С тех пор как Ньютон заложил прочный фундамент динамики, сформулировав основные законы движения, механика развивалась по двум основным направлениям. Одна ветвь, которую мы будем называть «векторной механикой»¹, исходит непосредственно из ньютоновых законов движения. Задача заключается в выявлении всех сил, действующих на каждую данную частицу, после чего движение однозначно определяется, если действующие силы известны в каждый момент времени. Анализ и синтез сил и моментов составляет, таким образом, основу векторной механики.

В то время как Ньютон предложил действие силы измерять ее импульсом, великий философ и универсал Лейбниц, современник Ньютона, ратовал за другую величину *vis viva*, или живую силу, считая именно ее правильным мерилom динамического действия силы. Эта *vis viva* Лейбница совпадает — с точностью до несущественного множителя 2 — с величиной, которую мы сегодня называем «кинетической энергией». В то же время он заменил «силу» Ньютона «работой силы». Эта «работа силы» была впоследствии заменена еще более фундаментальной величиной — «силовой функцией». Таким образом, Лейбниц является основателем второй ветви механики, обычно называемой «аналитической механикой»², в которой изучение равновесия и движения во всех случаях исходит из двух основных величин, «кинетической энергии» и «силовой функции», причем последняя часто заменяется «потенциальной энергией».

¹ Применение этого термина не обязательно означает, что используются именно векторные методы.

² См. замечание относительно терминологии в конце п. 1 гл. I.

Поскольку движение по своей природе — явление *направленное*, кажется удивительным, что для определения движения достаточно двух скалярных величин. Теорема о сохранении энергии, устанавливающая, что сумма кинетической и потенциальной энергий остается неизменной в процессе движения, дает лишь *одно* уравнение, в то время как для определения движения одной частицы требуется *три* уравнения; в случае механической системы, состоящей из двух или более частиц, эта разница становится еще большей. И тем не менее эти два фундаментальных скаляра действительно содержат в себе полную динамику наиболее сложных материальных систем, при том, однако, условии что эти скаляры кладутся в основу некоторого *принципа* а не просто *уравнения*.

2. Формализм Эйлера и Лагранжа. Для того чтобы понять, как это происходит, рассмотрим частицу, находящуюся в точке P_1 в момент времени t_1 . Предположим, что нам известна ее скорость в этот момент. Пусть нам также известно, что через некоторый заданный промежуток времени частица окажется в некоторой точке P_2 . Хотя траектория частицы нам неизвестна, ее можно найти чисто математическим путем при условии, что кинетическая и потенциальная энергии частицы заданы как функции возможных скоростей и возможных положений частицы.

Эйлер и Лагранж первые открыли в точном виде принцип наименьшего действия, заключающийся в следующем. Соединим точки P_1 и P_2 *произвольной* пробной траекторией. По всей вероятности, эта траектория, в качестве которой может быть выбрана любая непрерывная кривая, не совпадает с действительной траекторией, избранной для движения природой. Однако мы можем постепенно *исправлять* наше пробное решение и прийти в конце концов к некоторой кривой, которую можно считать действительной траекторией движения.

С этой целью позволим частице двигаться вдоль пробной траектории в соответствии с законом сохранения энергии. Сумма кинетической и потенциальной энергий сохраняется постоянной и равной тому значению энергии E , которым обладало действительное движение в момент времени t_1 .

Это ограничение определяет скорость в каждой точке нашей траектории и определяет таким образом все движение. Траекторию можно выбрать произвольно, но после того, как выбор сделан, закон сохранения энергии определяет движение однозначно.

В частности, можно вычислить время, за которое частица достигнет произвольной заданной точки на нашем фиктивном пути, и, следовательно, интеграл по времени от *vis viva*, т.е. от удвоенной кинетической энергии, распространенный на весь интервал пути от P_1 до P_2 . Этот интеграл по времени называется «действием». Он имеет определенное значение для нашей пробной траектории, равно как и для любой другой пробной траектории, соединяющей точки P_1 и P_2 и проходимой с тем же значением постоянной энергии E .

Значение «действия» меняется от одной траектории к другой. Для одних траекторий оно оказывается большим, для других меньшим. Математически можно себе представить, что испробованы *все* возможные траектории. Среди них должна найтись одна определенная траектория (по крайней мере, если точки P_1 и P_2 не слишком далеки друг от друга), для которой это действие принимает минимальное значение. Принцип наименьшего действия утверждает, что *именно эта траектория и избирается природой в качестве действительной траектории движения*.

Мы описали механизм применения принципа для одной частицы. Его можно обобщить, однако, на любое число частиц и на сколь угодно сложные механические системы.

3. Формализм Гамильтона. В механике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых силовая функция зависит не только от положения частиц, но и от времени. Для подобных систем закон сохранения энергии не выполняется и принцип Эйлера — Лагранжа не применим, однако применим принцип Гамильтона.

В подходе Гамильтона мы также исходим из заданных начальной и конечной точек P_1 и P_2 , однако в этом случае пробное движение ничем не ограничивается. Не только траектория выбирается произвольным образом, лишь бы она удовлетворяла естественным условиям непрерывности, но и процесс протекания движения во времени находится

в нашем распоряжении. Потребуем теперь лишь, чтобы наши пробные движения начинались и кончались в те же самые моменты времени t_1 и t_2 , что и действительное движение. (Это условие не выполняется в формализме Эйлера — Лагранжа, потому что теорема о сохранении энергии ограничивает движение, и время, затрачиваемое на переход из P_1 в P_2 вдоль пробной траектории, вообще говоря, отличается от времени при движении вдоль действительной траектории.)

Характерной величиной, используемой в этом случае в качестве меры действия и не имеющей, к сожалению, общепринятого названия, является интеграл по времени от разности между кинетической и потенциальной энергиями.

Принцип наименьшего действия в формулировке Гамильтона утверждает, что *действительным движением, реализующимся в природе, является то, для которого это действие принимает наименьшее значение*¹.

Можно показать, что в случае «консервативных» систем, т. е. систем, удовлетворяющих закону сохранения энергии, принцип Эйлера — Лагранжа является следствием принципа Гамильтона. Вместе с тем последний остается справедливым и для неконсервативных систем.

4. Вариационное исчисление. Математическая задача минимизации некоторого интеграла связана с особой ветвью математики, называемой «вариационным исчислением». Из математической теории следует, что окончательный результат можно получить, не рассматривая бесконечного множества возможных пробных траекторий. Свой математический эксперимент мы можем ограничить такими траекториями, которые *бесконечно близки* к действительной траектории. Пробная траектория, отличающаяся от действительной произвольным образом, но на бесконечно малую величину, называется «вариацией» действительной траектории. Вариационное исчисление исследует изменения значения интеграла, вызванные подобными бесконечно малыми вариациями траекторий.

¹ Строго говоря, речь идет о стационарном значении. — *Прим. ред.*

5. Сравнение векторного и вариационного методов в механике. Векторная и вариационная механики — это два различных математических описания одной и той же совокупности явлений природы. Теория Ньютона базируется на двух основных векторах: на «импульсе» и на «силе»; вариационная теория, основанная Эйлером и Лагранжем, базируется на двух скалярных величинах: на «кинетической энергии» и «силовой функции». Помимо математической целесообразности возникает вопрос об эквивалентности этих двух теорий. В случае *свободных* частиц, движение которых не ограничено заданными «связями», эти два способа описания приводят к аналогичным результатам. Однако для систем со связями аналитический подход оказывается более экономичным и простым. Заданные связи учитываются здесь естественным путем, так как рассматриваются движения системы лишь вдоль таких траекторий, которые не противоречат связям. При векторном подходе нужно учитывать силы, поддерживающие связи, а потому приходится вводить различные гипотезы относительно этих сил. Третий закон движения Ньютона («действие равно противодействию») не охватывает всех случаев. Он оправдывается лишь в динамике твердого тела.

С другой стороны, ньютонов подход не ограничивает природы действующих сил. В вариационном же методе предполагается, что действующие силы получаются из скалярной величины — «силовой функции». Силы типа трения, не имеющие силовой функции, оказываются вне области применимости вариационных принципов, в то время как ньютонова схема охватывает их без каких бы то ни было затруднений.

Происхождение подобных сил связано с межмолекулярными процессами, которыми пренебрегают при макроскопическом описании движения. Если к макроскопическим параметрам механической системы добавить еще и микроскопические параметры, то силы, не имеющие силовой функции, по всей вероятности, не возникли бы.

6. Математическая оценка вариационных принципов. Множество элементарных задач физики и техники решаются методами векторной механики и не требуют применения аналитических методов. Однако во всех более сложных задачах становится заметным превосходство вариационных

методов. Это превосходство связано с полной свободой в выборе системы координат рассматриваемой задачи. Векторным методам решения легко поддаются лишь те задачи, которые могут быть рассмотрены в прямоугольных системах отсчета, потому что изображение векторов в криволинейных координатах — затруднительная задача, если только не пользоваться сложными методами тензорного исчисления. Хотя необычайная важность инвариантов и ковариантов во всех явлениях природы была открыта лишь недавно и во времена Эйлера и Лагранжа была еще неизвестна, оказалось, что вариационный подход к механике предвосхитил это направление развития, так как принцип инвариантности удовлетворяется в нем автоматически. Мы обладаем полной свободой при выборе координат именно потому, что выкладки и результирующие уравнения остаются справедливыми в произвольной системе координат. Математическая и философская оценки вариационных методов исходят в основном из этой свободы выбора и связанной с ней возможностью произвольных преобразований координат. Это намного облегчает составление дифференциальных уравнений движения, а также их решение. Если мы попадаем на особый тип координат, называемых «циклическими» или «игнорируемыми», то сразу же возможно частичное интегрирование основных дифференциальных уравнений. Если *все* координаты циклические, то задача решается полностью. Поэтому всю задачу решения дифференциальных уравнений движения можно сформулировать как задачу о преобразовании координат, т. е. вместо того чтобы пытаться непосредственно проинтегрировать дифференциальные уравнения движения, можно стремиться получить как можно больше циклических координат. В механике Эйлера и Лагранжа мы находим нужные циклические координаты более или менее случайно, потому что систематического метода их выделения нет. Однако дальнейшее развитие теории, проведенное Гамильтоном и Якоби, чрезвычайно расширило первоначальные возможности путем введения «канонических уравнений» с их значительно более широкими возможностями с точки зрения преобразований. Здесь уже можно получить *полный* набор циклических координат путем решения лишь одного дифференциального уравнения в частных производных.

Хотя реально решение этого дифференциального уравнения возможно только для ограниченного класса задач, оказывается, что многие важные задачи теоретической физики принадлежат именно к этому классу. Поэтому наиболее развитая форма аналитической механики остается не только эстетически и логически наиболее удовлетворительной, но и практически важной, потому что она дает ключ к решению многих задач динамики, недоступных элементарным методам ¹.

7. Философская оценка вариационного подхода в механике. Хотя в наши дни существует молчаливое соглашение о том, что в научных трактатах следует избегать философских дискуссий, для вариационных принципов механики может быть сделано исключение, отчасти потому, что эти принципы были открыты в век, настроенный в высшей степени философски, а отчасти из-за того, что вариационный метод неоднократно оказывался в центре философских споров и недоразумений.

Действительно, идея о расширении существующей реальности путем включения «пробных» возможностей с последующим выделением одной из них при помощи условия, что она соответствует минимуму некоторой величины, как-будто вводит *целенаправленность* в поток природных явлений. Это находится в противоречии с обычным *причинным* описанием событий. Однако нас не должно удивлять, что для более универсального подхода, характерного для XVII и XVIII веков, эти две формы мышления не обязательно казались противоречивыми. Основным лейтмотивом всего этого периода была кажущаяся предустановленная гармония между «разумом» и «миром». Великие открытия в области высшей математики и их непосредственное применение к явлениям природы наполняли философов того времени неколебимой уверенностью в существенно интеллектуальной структуре мироздания. Поэтому *deus intellectua-*

¹ В этой книге не обсуждаются другие методы интегрирования, которые не основаны на теории преобразований. Читатель, желающий с ними познакомиться, отсылается к учебникам, указанным в библиографии.

lis¹ был основной темой философии Лейбница не в меньшей степени, чем Спинозы. И хотя у Лейбница были сильны телеологические тенденции, его деятельность оказала не малое влияние на развитие вариационных методов². Это не покажется удивительным, если вспомнить, что чисто эстетический и логический интерес к задачам на максимум и минимум дал самый мощный толчок развитию исчисления бесконечно малых и что вывод законов геометрической оптики, сделанный Ферма на основе его «принципа наименьшего времени распространения», произвел неотразимое впечатление на философски настроенных ученых того времени. И не вина великих философов в том, что дилетантское злоупотребление этими тенденциями в теологических целях у Мопертюи и ему подобных привели к дискредитации всего направления.

Трезвый, практичный, прозаический девятнадцатый век, наследниками которого мы являемся, счел все спекулятивные тенденции и интерпретации «метафизическими» и ограничил свою программу чистым описанием явлений природы. В его философии математика играет роль стенографии, экономного, удобного языка для выражения существующих закономерностей. Поэтому не удивительно и вполне соответствует «позитивистскому» духу девятнадцатого столетия следующая оценка аналитической механики, встречающаяся у одного из сторонников этого направления Э. Маха («The Science of Mechanics», Open Court, 1893, p. 480): «Нельзя ждать фундаментальных результатов от этой ветви механики. Напротив, нужно совершенно покончить с открытиями различных принципов, прежде чем можно будет поставить вопрос об основах аналитической механики, единственной целью которой является совершенство *практического* искусства в решении задач. Тот, кто неправильно оценит эту ситуацию, никогда не сможет постичь сущность великих работ Лагранжа, дающих здесь по существу тот же эффект *экономии*». (Курсив в оригинале.) Согласно такой философии, вариационные принципы механики — не более,

¹ Интеллектуальный дух.

² См. очень интересную историческую работу А. Кнезера: K n e z e r A., Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart (Leipzig; Teubner, 1928).

чем другая математическая формулировка законов Ньютона, не содержащая ничего принципиально нового.

Однако философские направления появлялись и исчезали, а последнее слово в философии, конечно, не сказано. В наши дни мы явились свидетелями по крайней мере одного фундаментального открытия, имеющего беспрецедентное значение, — эйнштейновской общей теории относительности, открытия, ставшего возможным благодаря глубоким математическим и философским рассуждениям. Это открытие базируется на таких доводах, которые позитивист не позволил бы назвать «метафизическими», и все же они позволили проникнуть в сердце предмета, чего никогда нельзя было бы сделать простым экспериментированием и сухой регистрацией фактов. Общая теория относительности снова вызвала к жизни дух великих космических теоретиков древней Греции и восемнадцатого столетия.

В свете открытий теории относительности вариационные основы механики заслуживают большего, чем чисто формальной оценки. Это далеко не просто другая формулировка ньютоновых законов движения. Преимущества вариационного метода можно сформулировать в следующих пунктах.

1. Принцип относительности требует, чтобы законы природы формулировались в инвариантной форме, т. е. чтобы они не зависели от какой-либо специальной системы отсчета. Методы вариационного исчисления автоматически удовлетворяют этому требованию, потому что минимум скалярной величины не зависит от координат, в которых эта величина измеряется. В то время как ньютоновы уравнения не удовлетворяют принципу относительности, принцип наименьшего действия остается справедливым, с тем лишь дополнением, что основная величина «действия» должна быть приведена в соответствие с требованием инвариантности.

2. Общая теория относительности показала, что материя не может быть отделена от поля и в действительности порождается полем. Поэтому основные уравнения физики должны иметь вид уравнений в частных, а не в обыкновенных производных. В то время как картина ньютоновых частиц едва ли может быть приведена в согласие с концепцией поля, вариационные методы не ограничены механикой ча-

стиц и могут быть распространены на механику непрерывных сред.

3. Если основное «действие» в вариационном принципе выбрано инвариантным относительно любых координатных преобразований, то принцип общей относительности удовлетворяется автоматически. Поскольку риманова дифференциальная геометрия доставляет нам подобные инварианты, можно без затруднений составить требуемые уравнения поля. Современная математика не дает какого-либо другого метода, при помощи которого можно было бы сформулировать ковариантную и в то же время совместную систему уравнений поля. Следовательно, в свете теории относительности применение вариационного исчисления при изучении законов природы не представляется случайным.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. Характерные черты методов аналитической механики.

Аналитическая форма механики, развитая Эйлером и Лагранжем, существенно отличается по своим методам и принципам от механики векторной. Основным законом механики, сформулированный Ньютоном: «произведение массы на ускорение равно движущей силе», — непосредственно применим лишь к одной частице. Он был выведен при изучении движения частиц в поле тяготения Земли, а затем применен к движению планет под воздействием Солнца. В обоих случаях движущееся тело могло рассматриваться как «материальная точка» или «частица», т. е. можно было считать массу сосредоточенной в одной точке. Таким образом, задача динамики формулировалась в следующем виде: «Частица, которая может свободно перемещаться в пространстве, находится под действием заданной силы. Описать движение в любой момент времени». Из закона Ньютона получалось дифференциальное уравнение движения, и решение задачи динамики сводилось к интегрированию этого уравнения.

Если частица не является свободной, а связана с другими частицами, как, например, в твердом теле или в жидкости, то уравнение Ньютона следует применять осторожно. Необходимо сначала выделить одну частицу и определить силы, которые на нее действуют со стороны остальных, окружающих ее частиц. Каждая частица является независимым объектом и подчиняется закону движения свободной частицы.

Этот анализ сил зачастую является затруднительным. Так как природа сил взаимодействия заранее неизвестна, приходится вводить дополнительные постулаты. Ньютон полагал, что принцип «действие равно противодействию», известный как его третий закон движения, будет достаточен для всех проблем динамики. Это, однако, не так. Даже в динамике твердого тела пришлось ввести дополнительное предположение о том, что внутренние силы являются цен-

тральными. В более сложных случаях ньютонов подход не всегда приводит к однозначному решению задачи.

Аналитический подход к задаче о движении совсем иной. Частица уже больше не является изолированным объектом, а представляет собой часть «системы». Под «механической системой» понимается совокупность частиц, взаимодействующих между собой. Отдельная частица не играет роли; изучается поведение системы как целого. Например, допустим, что в задаче о движении планет нас интересует движение лишь какой-то одной из них. Однако задачу нельзя решить в таком ограниченном виде. Источником силы, действующей на данную планету, в основном является Солнце. Но в какой-то степени эта сила обусловлена действием других планет, и потому она не может быть определена, если не известно движение остальных частей системы. Поэтому целесообразно рассматривать задачу динамики системы *в целом*, не разбивая эту систему на части.

Преимущества такого объединенного изучения еще более существенны с точки зрения анализа сил. В векторной механике каждая частица рассматривается отдельно и действующие силы должны быть определены независимо для каждой частицы. При аналитическом же подходе достаточно знать одну-единственную функцию, зависящую от положения движущихся частиц. Эта «силовая функция» содержит в неявном виде все силы, действующие на частицы системы; их можно получить из этой функции простым дифференцированием.

Еще одно существенное различие между двумя методами связано с понятием «дополнительных условий». Часто случается, что между частицами движущейся системы имеются кинематические соотношения, которые могут быть сформулированы *a priori*. Например, возможности движения частиц твердого тела ограничены его «жесткостью»; это означает, что расстояние между любыми двумя точками не может изменяться. Природа подобных кинематических условий не ясна *a priori*, ибо своим возникновением они обязаны действию каких-то значительных сил. Аналитический метод обладает, однако, тем преимуществом, что он не требует знания этих сил и позволяет обойтись лишь кинематическими условиями как таковыми. Мы можем написать уравнения движения для твердого тела, не зная, какие силы

обуславливают его жесткость. Аналогично нам не нужно детально знать силы взаимодействия между частицами жидкости; достаточно знания того экспериментального факта, что в жидкости возникают весьма значительные силы, препятствующие изменению ее объема, в то время как силы, препятствующие изменению ее формы при сохранении объема, невелики. Исходя из этого, мы можем заменить неизвестные внутренние силы кинематическими условиями о том, что в процессе движения объем любой части жидкости должен сохраняться.

Если учесть, что задание таких априорных кинематических условий намного проще, чем детальное изучение сил, необходимых для удовлетворения этих условий, то станет очевидным громадное преимущество аналитического подхода по сравнению с векторным.

Однако более фундаментальным, чем все эти особенности, является наличие в аналитической механике *объединяющего принципа*, который является кульминационным пунктом аналитического подхода. Движение достаточно сложной механической системы описывается большим числом — иногда даже бесконечным числом — отдельных дифференциальных уравнений. Вариационные принципы аналитической механики образуют единую основу, из которой следуют все эти уравнения. За всеми этими уравнениями скрывается общий *принцип*, заключающий в себе смысл всей этой совокупности уравнений. Вводится одна фундаментальная величина «действие»; принцип, согласно которому эта величина должна иметь стационарное значение, приводит к полной системе дифференциальных уравнений. Более того, установление этого принципа не связано с какой-либо специальной системой координат. Поэтому и аналитические уравнения движения также инвариантны относительно любых преобразований координат.

Замечание относительно терминологии. Прилагательное «аналитическая» в выражении «аналитическая механика» не имеет ничего общего с философским процессом анализа; оно происходит от математического термина «анализ» и указывает на приложение методов исчисления бесконечно малых к тем или иным проблемам чистой или прикладной математики. Во французской и немецкой литературе термин «аналитическая механика» относится лишь к абстрактной математической трактовке проблем механики методами Эйлера, Лагранжа и Гамильтона; в английской же, и особенно в американской 2В*

литературе, этим же термином часто называют и элементарные приложения анализа к задачам обычной векторной механики. Термин «механика» включает в себя «статику» и «динамику», причем первая имеет дело с *равновесием* частицы и систем частиц, а вторая изучает их *движение*. (Отдельным разделом механики является «механика сплошной среды», включающая в себя гидромеханику и теорию упругости. Она основана главным образом на уравнениях в частных производных, а не на обыкновенных дифференциальных уравнениях. Эти вопросы не входят в настоящую книгу.)

Резюме. Сформулируем теперь четыре основных пункта, по которым имеется различие между векторной и аналитической механикой:

1. Векторная механика выделяет отдельную частицу и рассматривает ее изолированно от остальных; аналитическая механика рассматривает систему как целое.

2. В векторной механике действующая сила вычисляется отдельно для каждой движущейся частицы; в аналитической механике рассматривается одна-единственная функция — силовая функция (или потенциальная энергия). Эта функция содержит в себе всю необходимую информацию о действующих силах.

3. Если на механическую систему наложены известные эмпирически определяемые кинематические условия, выполнение которых обеспечивается за счет действия достаточно больших сил, то векторная механика должна рассматривать эти силы. Аналитическая же механика исходит из самих кинематических условий и не требует знания сил, обеспечивающих выполнение этих условий.

4. В аналитическом методе полная система уравнений движения может быть получена из одного объединенного принципа, содержащего в неявном виде все эти уравнения. Этот принцип заключается в нахождении минимума определенной величины, называемой «действием». Так как принцип минимума не связан с той или иной системой отсчета, то уравнения аналитической механики справедливы в любой системе координат. Это позволяет выбирать координаты в соответствии с особенностями рассматриваемой задачи.

2. Обобщенные координаты. При элементарном векторном подходе к механике абстрактная концепция «координат» не является деталью всей картины. Сам метод по существу является существенно геометрическим.

Векторные методы чрезвычайно полезны в задачах статики. Однако в динамике число задач, которые могут быть решены чисто векторными методами, сравнительно невелико. При решении большинства сложных задач геометрический подход векторной механики оказывается несостоятельным и вынужден уступать дорогу более абстрактному аналитическому подходу. При таком аналитическом обосновании механики понятие координат в наиболее общем смысле занимает центральное место.

Аналитическая механика является чисто математической наукой. Все производится путем вычислений в абстрактной сфере математических величин. Физический мир переводится на язык математических соотношений, и этот перевод совершается при помощи координат. Координаты устанавливают взаимоднозначное соответствие между точками физического пространства и числами. После установления этого соответствия мы можем оперировать с координатами как с алгебраическими величинами, забывая об их физическом значении. Конечный результат подобных математических вычислений затем переводится обратно в мир физических реальностей.

За столетие, прошедшее от Ферма и Декарта до Эйлера и Лагранжа, произошло необычайно бурное развитие методов высшей математики. Одним из наиболее важных изменений было обобщение первоначальной идеи Декарта о координатах. Ясно, что введение системы из трех взаимно перпендикулярных осей, с определением длины, ширины и высоты относительно них, является всего лишь *одним* из способов установления взаимоднозначного соответствия между точками пространства и числами. Другие способы могут также хорошо служить для этой цели. Например, вместо прямоугольных координат x, y, z можно взять сферические координаты r, θ, φ . Одна из характерных особенностей аналитических методов механики заключается именно в том, что мы не накладываем никаких условий на природу координат, переводящих данное физическое явление в абстрактную математическую схему.

функций t . При некотором искусстве можно выбрать систему координат так, чтобы новая задача решалась гораздо легче старой. Полная свобода в выборе системы отсчета позволяет выбрать координаты так, чтобы они были особенно удобны для данной задачи. Например, в задаче о движении планеты, т. е. материальной частицы, вращающейся вокруг неподвижного притягивающего центра, сферические координаты гораздо лучше соответствуют условиям задачи, чем прямоугольные.

Преимущество обобщенных координат становится более очевидным, если рассматриваются механические системы с наложенными на них кинематическими условиями. Эти условия математически выражаются определенными функциональными соотношениями между координатами. Например, расстояние между двумя атомами, образующими молекулу, определяется равновесием внутримолекулярных сил. С точки зрения динамики такая система может рассматриваться как состоящая из двух частиц с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 , и частицы находятся на постоянном расстоянии a одна от другой. Это приводит к условию

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = a^2, \quad (1.2.5)$$

вследствие которого 6 координат $x_1, \dots, z_2$ не могут быть выбраны независимо. Достаточно задать 5 координат; шестая определится из условия (1.2.5). Очевидно, однако, что нецелесообразно рассматривать одну из координат как зависимую переменную, поскольку соотношение (1.2.5) симметрично относительно всех координат. Более естественно ввести три прямоугольные координаты центра масс системы и два угла, определяющих направление оси двухатомной молекулы. 6 прямоугольных координат $x_1, \dots, z_2$ можно выразить через эти 5 параметров.

В качестве второго примера рассмотрим твердое тело, которое может состоять из любого числа частиц. Но, независимо от числа частиц, достаточно задать три координаты центра масс и три угла, определяющих поворот тела относительно системы неподвижных осей. Эти 6 параметров полностью определяют положение тела. Координаты любой из его частиц могут быть выражены через эти 6 параметров.

В общем случае, когда на механическую систему из N частиц наложено m независимых кинематических условий,

конфигурация этой системы может быть однозначно задана с помощью

$$n = 3N - m \quad (1.2.6)$$

независимых параметров

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \quad (1.2.7)$$

причем прямоугольные координаты всех частиц могут быть записаны как функции переменных (1.2.7):

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n), \\ &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ z_N &= f_{3N}(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Число n не может меняться для данной механической системы и является ее характерной константой. Меньшее количество параметров недостаточно для описания системы, большего же количества не требуется. О системе, для однозначного определения конфигурации которой необходимо и достаточно задать n параметров, говорят, что она обладает « n степенями свободы»; сами n параметров $q_1, \dots, q_n$ называются «обобщенными координатами» системы. Число частиц, образующих механическую систему, а также их координаты несущественны при аналитическом методе исследования, важны лишь обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ и некоторые определенные функции от них. Твердое тело может состоять из бесконечного количества частиц, а с точки зрения механики — это система, имеющая не более чем 6 независимых координат.

Примеры.

Одна степень свободы. Поршень,двигающийся вверх и вниз. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

Две степени свободы. Частица, перемещающаяся по заданной поверхности.

Три степени свободы. Частица, перемещающаяся в пространстве. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки (волчок).

Четыре степени свободы. Двойная звезда, плоскость вращения которой не поворачивается.

Пять степеней свободы. Две частицы, удерживаемые на определенном расстоянии друг от друга.

Шесть степеней свободы. Две планеты, вращающиеся вокруг неподвижного Солнца. Твердое тело, свободно перемещающееся в пространстве.

Обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ не обязательно должны иметь геометрический смысл. Необходимо, однако, чтобы функции (1.2.8) были ограничены, однозначны, непрерывны и дифференцируемы и чтобы якобиан по крайней мере одной комбинации из n функций был отличен от нуля. Эти условия могут нарушаться в некоторых особых точках, которые нужно исключить из исследования. Например, преобразование (1.2.3) от прямоугольных к сферическим координатам удовлетворяет общим условиям регулярности, однако следует иметь в виду, что при $r = 0$ и $\theta = 0$ якобиан преобразования обращается в нуль.

Кроме этих ограничений «в малом» следует обратить внимание и на ограничения «в большом». Нужно, чтобы диапазон непрерывного изменения переменных $q_1, q_2, \dots, q_n$ допускал изменение первоначальных прямоугольных координат в достаточно широких пределах, не ограничивая их более, чем этого требуют наложенные кинематические условия. (Например, преобразование (1.2.3) гарантирует изменение x, y и z от $-\infty$ до $+\infty$ при r , меняющемся от 0 до ∞ , θ — от 0 до π , а φ — от 0 до 2π .) Однако эти условия очень редко осложняют исследование, так как даже если и нельзя охватить весь диапазон движения, то все же остается возможность изучить характерную его часть.

Не всегда имеет смысл исключать все кинематические условия задачи путем введения соответствующих обобщенных координат. Иногда удобнее исключить только часть условий, сохранив остальные в виде дополнительных условий. Поэтому наиболее общая формулировка задачи о механической системе с наложенными на нее кинематическими условиями выглядит следующим образом. Имеется система уравнений (1.2.8) и, кроме того, m уравнений вида

$$\varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0, \quad (i = 1, \dots, m); \quad (1.2.9)$$

число степеней свободы при этом равно

$$n' = n - m.$$

Резюме. Проблемы изучения движения аналитическими методами требуют обобщения первоначальной концепции декартовых координат. В качестве системы координат может быть выбрана любая совокупность параметров, характеризующая положение механической системы. Эти параметры называются обобщенными координатами системы.

3. Пространство конфигураций. Одним из наиболее важных понятий, используемых при абстрактном аналитическом решении задач механики, является понятие о пространстве конфигураций. Подобно тому, как трем величинам x, y, z ставится в соответствие точка трехмерного пространства, можно рассматривать n величин $q_1, q_2, \dots, q_n$ как прямоугольные координаты «точки» P в n -мерном пространстве. Аналогично обобщаются понятия «кривой» и движения точки вдоль кривой. Вместо системы уравнений для обычного трехмерного пространства

$$\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \\ z &= h(t) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

теперь пишется система

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(t), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_n &= q_n(t). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Эти уравнения представляют собой решение задачи динамики. Им соответствует геометрическая картина, в которой точка P n -мерного пространства движется по некоторой кривой в этом пространстве.

Этот геометрический образ очень помогает нашему мышлению. Независимо от количества частиц, входящих в данную механическую систему, и от сложности соотношений между ними система в целом изображается одной точкой многомерного пространства, называемого «пространством конфигураций». Например, положение твердого тела, со-

стоящего из бесконечного количества материальных точек, изображается одной точкой в 6-мерном пространстве. Это 6-мерное пространство, конечно, не является физической реальностью для данного твердого тела. Оно просто *скоррелировано* с твердым телом в смысле взаимно однозначного соответствия: различные положения тела «отображаются» на различные точки 6-мерного пространства и, наоборот, разные точки 6-мерного пространства могут быть физически интерпретированы как разные положения твердого тела. Для краткости мы будем называть точку пространства конфигураций, изображающую положение механической системы, «C-точкой», а кривую, описываемую этой точкой в процессе движения системы, — «C-кривой».

Построенная нами картина пространства конфигураций нуждается в дальнейших уточнениях. Мы основывались в своих рассуждениях на аналитической геометрии n -мерного евклидова пространства и соответственно считали n обобщенных координат механической системы прямоугольными координатами в этом пространстве. Если же заменить аналитическую геометрию дифференциальной, как это будет сделано в п. 5 этой главы, то можно получить картину, гораздо лучше отображающую геометрическую структуру пространства конфигураций. Однако и наша первая схема может быть весьма полезной. Продемонстрируем это на следующем примере.

Положение свободной частицы в пространстве можно определить с помощью сферических координат (r, θ, φ) . Если принять эти величины за *прямоугольные* координаты точки, то построенное таким образом пространство будет сильно отличаться по своим геометрическим свойствам от реального пространства. Прямые линии перейдут в кривые, углы и расстояния изменятся. Однако ряд важных характеристик пространства при этом преобразовании сохранится. Точка перейдет в точку, окрестность точки преобразуется в окрестность, кривая останется кривой, смежные кривые останутся смежными. Непрерывность и дифференцируемость кривых также сохранятся. Для операций вариационного исчисления важны именно такие «топологические» свойства пространства, в то время как «метрические» свойства — расстояния, углы, площади и т. п. — не играют роли. Поэтому даже упрощенная картина пространства конфигура-

Дифференцирование уравнений (1.4.3) дает

$$\begin{aligned} d\bar{q}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} dq_n, \\ &\vdots \\ d\bar{q}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial q_n} dq_n. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Отсюда видно, что независимо от вида функциональных соотношений между двумя системами координат связь между их дифференциалами всегда линейна.

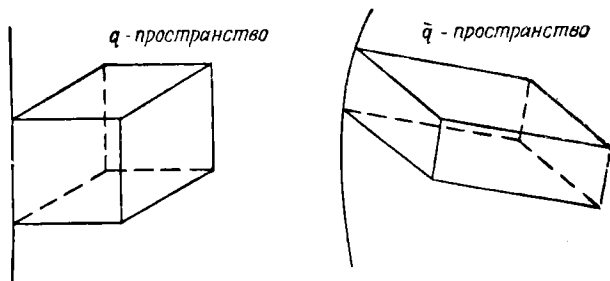


Рис. 1.

С этим «преобразованием координат» можно связать определенную геометрическую картину. Пусть q_i так же, как и $\bar{q}_i$, — прямоугольные координаты в n -мерном пространстве. Будем рассматривать точки в q -пространстве и точки в $\bar{q}$ -пространстве. Некоторой точке P в q -пространстве соответствует определенная точка $\bar{P}$ в $\bar{q}$ -пространстве. Поэтому преобразование вида (1.4.3) называется «точечным преобразованием». В некоторой области точки q -пространства находятся во взаимно однозначном соответствии с точками $\bar{q}$ -пространства. Мы имеем, таким образом, «отображение» n -мерного пространства самого на себя. Это отображение не только удовлетворяет обычным требованиям взаимно однозначного соответствия. Сохраняется непрерывность. Окрестность точки P отображается в окрестность точки $\bar{P}$ и наоборот. Можно утверждать даже большее. Прямая линия в q -пространстве не остается прямой в $\bar{q}$ -пространстве. Однако по мере уменьшения размеров области соотношения

все более и более приближаются к линейным. В бесконечно малой окрестности точки P прямые линии переходят в прямые, а параллельные линии — в параллельные, хотя длины и углы не сохраняются. Малый параллелепипед в окрестности точки P отображается в малый параллелепипед в окрестности точки $\bar{P}$. Якобиан Δ является как раз детерминантом системы линейных уравнений (1.4.4). Геометрически этот детерминант равен отношению объема $\bar{\tau}$ нового параллелепипеда к объему τ первоначального. Отличие Δ от нуля эквивалентно требованию, чтобы полная окрестность P отображалась в полную окрестность $\bar{P}$, что действительно необходимо для существования взаимно однозначного соответствия. Если Δ равен нулю, то n -мерная область в окрестности P отображается в область меньшего числа измерений в окрестности $\bar{P}$, в результате для некоторых точек окрестности $\bar{P}$ нет соответствующих отображений, а для других точек таких отображений бесконечное множество.

Физической моделью подобного отображения пространства самого на себя является *движение жидкости*. Если пометить частицы жидкости и зафиксировать их положения в два различных момента времени, то соответствующие положения этих частиц и дадут отображение пространства самого на себя. Если выделить в жидкости малый параллелепипед, то, несмотря на искажения его углов и длин при движении жидкости, он будет оставаться параллелепипедом. Если к тому же жидкость несжимаема, то объем этого параллелепипеда будет сохраняться. Аналитически движение такой жидкости соответствует преобразованию координат с якобианом, всюду равным единице.

Резюме. Ввиду произвола в выборе координат одна система обобщенных координат может быть заменена другой. Это «преобразование координат» может мыслиться геометрически как отображение n -мерного пространства самого на себя. Отображение не сохраняет углов и расстояний. Прямые линии преобразуются в кривые, однако в бесконечно малой области, в окрестности некоторой точки, отображение «выпрямляется»: прямые линии переходят в прямые, параллельные — в параллельные, и сохраняется отношение объемов.

5. Кинетическая энергия и риманова геометрия¹. Использование произвольных обобщенных координат для описания движения механической системы является одной из существенных черт аналитической механики. Структура уравнений аналитической механики такова, что они могут быть записаны в виде, не зависящем от применяемых координат. Это свойство общих уравнений движения связывает аналитическую механику с одним из крупнейших достижений математики девятнадцатого века — теорией инвариантов и ковариантов. Эта теория окончательно созрела в наши дни, когда теория относительности Эйнштейна показала, как законы природы связаны с проблемами инвариантности. В основе теории относительности лежит требование, чтобы *формулировки законов природы не зависели от какой-либо специальной системы координат*. Математическое решение этой проблемы показало, что между законами, управляющими материей, и римановым основанием геометрии, существует глубокая внутренняя связь. Согласно общей теории относительности Эйнштейна, истинная геометрия природы не евклидова, а более общая — риманова; эта геометрия связывает пространство и время в единое четырехмерное многообразие.

Сделанное Декартом открытие, что геометрия допускает аналитическую трактовку, явилось существенной вехой в истории развития этой науки. Однако геометрия Декарта предполагала евклидову структуру пространства. Для введения прямоугольной системы координат необходимо принять постулаты конгруэнтности и постулат о параллельных прямых.

Второй вехой в развитии геометрии явилась геометрия Римана, которая выросла из замечательных работ Гаусса, касающихся геометрии поверхностей. В основе геометрии Римана лежит одна-единственная дифференциальная ве-

¹ Первым, кто обратил внимание на существование связи между динамикой и геометрией искривленных пространств, был Якоби (1845) (ср. гл. V, пункт «Принцип Якоби»). Более поздние исследования связаны с именами Липке, Бервальда и Франка, Эйзенхарта и других. Наиболее исчерпывающее исследование этого вопроса, основанное на последовательном использовании тензорного исчисления, произведено Дж. Л. Сингом в работе «Тензорные методы в динамике», ИЛ, М., 1947.

личина, называемая «линейный элемент» $\overline{ds}^1$. Эта величина означает *расстояние между двумя соседними точками пространства, выраженное через координаты и их дифференциалы*. Рассмотрим для примера бесконечно малое расстояние $\overline{ds}$ между двумя точками P и P_1 с координатами x, y, z и $x + dx, y + dy, z + dz$. Согласно теореме Пифагора,

$$\overline{ds}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.5.1)$$

Это выражение есть следствие постулатов Евклида и определения координат x, y, z .

Предположим теперь, что мы ничего не знаем ни о каких постулатах, и примем (1.5.1) без доказательства как определение линейного элемента. Зная, кроме того, что переменные x, y, z изменяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, мы можем отсюда вывести все положения евклидовой геометрии, включая и интерпретацию x, y, z как прямоугольных координат. Аналогично, если квадрат линейного элемента задать в виде

$$\overline{ds}^2 = dx^2 + x^2 dy^2 + x^2 \sin^2 y dz^2, \quad (1.5.2)$$

где x меняется² от 0 до ∞ , y — от 0 до π , z — от 0 до 2π , то геометрия, определяемая этим линейным элементом, будет снова евклидова, но три переменные x, y, z будут уже иметь смысл *сферических координат*, ранее обозначавшихся через r, θ, φ . Все это содержится в одном дифференциальном выражении (1.5.2), дополненном граничными условиями.

В общем случае, если обозначить через x_1, x_2, x_3 (вместо x, y, z) произвольные «криволинейные» координаты с коор-

¹ Чертой над символом мы будем обозначать, как это часто делается, неинтегрируемые дифференциалы, которые нельзя рассматривать как бесконечно малое изменение какой-то величины. В то время как dq_k или dt означает « d от q_k » или « d от t », $\overline{ds}$ следует рассматривать как бесконечно малое выражение, а не как « d от s ». Действительно, если бы $\overline{ds}$ был интегрируемый дифференциал, было бы невозможно найти кратчайшее расстояние между двумя точками, так как длина всех кривых между этими точками была бы одинакова и зависела лишь от положения самих точек.

² Нужно еще добавить граничное условие, что точки $(x, y, 0)$ и $(x, y, 2\pi)$ должны совпадать при всех x и y .

динатными линиями, уже не прямыми, как в декартовой схеме, а в виде произвольных кривых, то квадрат линейного элемента запишется в следующем общем виде:

$$\begin{aligned} \overline{ds^2} = & (g_{11} dx_1 + g_{12} dx_2 + g_{13} dx_3) dx_1 + \\ & + (g_{21} dx_1 + g_{22} dx_2 + g_{23} dx_3) dx_2 + \\ & + (g_{31} dx_1 + g_{32} dx_2 + g_{33} dx_3) dx_3. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Выражение такого рода называется «квадратичной дифференциальной формой» переменных x_1, x_2, x_3 . «Коэффициенты» этой суммы $g_{11}, \dots, g_{33}$ — не постоянные величины, а функции трех переменных x_1, x_2, x_3 . Сумма (1.5.3) может быть записана в более компактной форме:

$$\overline{ds^2} = \sum_{i, k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k. \quad (1.5.4)$$

Так как члены $g_{ik} dx_i dx_k$ и $g_{ki} dx_i dx_k$ можно собрать в один член, то число независимых членов квадратичной формы не 9, а 6. Чтобы форма сохранила симметричный вид, можно вместо уменьшения числа членов в ней наложить на коэффициенты следующее условие:

$$g_{ki} = g_{ik}. \quad (1.5.5)$$

В абсолютном исчислении (тензорном), которое систематически развивает коварианты и инварианты римановой геометрии, величины g_{ik} образуют «тензор». Величина $\overline{ds^2}$ имеет абсолютное значение, потому что расстояние между двумя точками не зависит от системы координат. Она является «абсолютной», «инвариантной» величиной, не зависящей от системы отсчета. Тензор определяется компонентами инвариантной дифференциальной формы. Например, инвариантная дифференциальная форма первого порядка

$$\overline{dw} = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n \quad (1.5.6)$$

определяет вектор. Величины $F_1, F_2, \dots, F_n$ называют «компонентами» вектора. Они зависят от системы отсчета и являются поэтому «ковариантными» величинами. Дифференциальная форма в целом, однако, инвариантна. Мы имеем здесь абстрактное, чисто аналитическое определение век-

тора, которое полностью обходится без традиционной картинки «стрелы». Дифференциальная форма второго порядка определяет тензор второго ранга и т. д.

Тензор g_{ik} , лежащий в основе геометрии, называется «метрическим тензором». Он позволяет строить геометрию пространства не только трех, но и любого числа измерений. Геометрия n -мерного пространства определится, если ввести линейный элемент в виде

$$ds^2 = \sum_{i, k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k \quad (1.5.7)$$

с дополнительным условием

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (1.5.8)$$

которое делает метрический тензор симметричным. Эйнштейн и Минковский показали, что геометрия реальной природы включает пространство и время, образуя таким образом четырехмерный мир с переменными x , y , z и t .

Величины g_{ik} в общем случае не являются постоянными; а представляют собой функции переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Они оказываются константами только в случае прямоугольных и в более общем случае косоугольных координат. Для криволинейных координат значения меняются от точки к точке. Они зависят от *двух* индексов i и k и образуют двумерное многообразие, в то время как компоненты вектора, например, образуют одномерное многообразие.

Аналитическое построение геометрии, не зависящее от какой-либо специальной системы отсчета, является лишь *одним из* достоинств римановой геометрии. Более фундаментальным открытием Римана является то, что определение (1.5.7) линейного элемента образует не только новый, но и гораздо более *общий* базис для построения геометрии, чем старый базис евклидовых постулатов. Только в том случае, когда g_{ik} принадлежат к некоторому *определенному классу функций*, получается геометрия евклидова типа. В общем же случае возникает новый тип геометрии, характеризуемый следующими двумя фундаментальными свойствами:

1. Свойства пространства меняются от точки к точке, но только *непрерывным* образом.

2. Для *бесконечно малых* областей справедлива евклидова геометрия, хотя она не справедлива для больших областей.

Риман показал, как при помощи дифференцирования можно получить характеристическую величину — «тензор кривизны», определяющий вид геометрии. Если все компоненты тензора кривизны равны нулю, то геометрия евклидова, в противном случае — неевклидова.

Когда специальная теория относительности Эйнштейна и Минковского, объединив время и пространство, показала, что геометрия природы имеет скорее четыре, а не три измерения, то это была еще геометрия евклидова типа. Лишь общая теория относительности Эйнштейна продемонстрировала, что линейный элемент с постоянными коэффициентами должен быть заменен римановым линейным элементом, содержащим десять функций g_{ik} четырех координат x, y, z, t .

Таинственная сила всемирного тяготения была интерпретирована как чисто геометрическое явление — следствие римановой структуры пространственно-временного континуума.

Абстрактные построения римановой геометрии были использованы не только в теории относительности, но и в аналитической механике. Понятие римановой геометрии и методы тензорного исчисления оказались естественным оружием при операциях по преобразованию координат, встречающихся при аналитической трактовке задач динамики.

Геометрия входит в царство механики в связи с инертными свойствами массы. Эти свойства отражены в левой части уравнения Ньютона в форме «массы, умноженной на ускорение» или «скорости изменения импульса». Аналитическая механика показала, что в действительности фундаментальной величиной, характеризующей инерцию массы, является не импульс, а кинетическая энергия. Кинетическая энергия — это скалярная величина, определенная как $mv^2/2$ для одной частицы и как

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (1.5.9)$$

для системы частиц; v здесь скорость частицы, определяемая выражением

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}. \quad (1.5.10)$$

Таким образом, кинетическая энергия частицы явно связана с линейным элементом $\overline{ds}$ и поэтому зависит от геометрии пространства.

Определим теперь линейный элемент $3N$ -мерного пространства уравнением

$$\overline{ds}^2 = 2T dt^2 = \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 dt^2 = \sum_{i=1}^N m_i (dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2). \quad (1.5.11)$$

После этого кинетическая энергия может быть записана в виде

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (1.5.12)$$

где

$$m = 1. \quad (1.5.13)$$

Это означает, что *вместо кинетической энергии всей системы можно рассматривать кинетическую энергию одной частицы с массой 1*. Эта воображаемая частица является точкой $3N$ -мерного пространства конфигураций, символизирующей состояние механической системы. Вся система в целом изображается в этом пространстве в виде одной точки. Поэтому мы сможем применить к любой механической системе механику свободной частицы, поместив эту частицу в пространство с соответствующим числом измерений и соответствующей геометрией.

Форма записи линейного элемента (1.5.11) показывает, что $3N$ -мерное пространство конфигураций N свободных частиц имеет евклидову структуру, а величины

$$\sqrt{m} x_i, \sqrt{m} y_i, \sqrt{m} z_i \quad (1.5.14)$$

следует считать прямоугольными координатами этого пространства. При замене прямоугольных координат (1.5.14) произвольными криволинейными координатами в соответствии с уравнениями (1.2.4) геометрия остается евклидовой, хотя линейный элемент и задается уже в более общей римановой форме (1.5.7) (с $n = 3N$).

Рассмотрим теперь механическую систему, на координаты которой *наложены данные кинематические условия*. Можно поступить двумя способами. Во-первых, можно использовать прежнее пространство конфигураций $3N$ измерений, ограничив возможности свободного перемещения S -точки имеющимися кинематическими условиями, записанными в виде

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, z_N) &= 0, \\ . &. \\ f_m(x_1, \dots, z_N) &= 0. \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

Геометрически каждое из этих уравнений представляет собой гиперповерхность в пространстве $3N$ измерений. C -точка должна находиться в области пересечения всех этих гиперповерхностей, т. е. в подпространстве с числом измерений, равным $n = 3N - m$. Это подпространство является уже не плоским евклидовым, а искривленным римановым пространством.

Второй способ решения той же самой задачи заключается в том, что мы с самого начала выражаем прямоугольные координаты частиц через n параметров $q_1, \dots, q_n$, подобно тому как это сделано в (1.2.8). Эти параметры являются теперь криволинейными координатами n -мерного пространства. Чтобы построить линейный элемент получившегося пространства, нужно взять дифференциалы от обеих частей каждого из уравнений (1.2.8) и подставить их в выражение (1.5.11). В результате получим линейный элемент вида

$$\overline{ds}^2 = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k, \quad (1.5.16)$$

где a_{ik} — известные функции от q_i . Линейный элемент (1.5.16) уже является существенно римановым не только потому, что q_i — криволинейные координаты, но и потому, что геометрия пространства конфигураций сохранила евклидову структуру первоначального $3N$ -мерного пространства только в бесконечно малых областях. Например, движение идеально сбалансированного волчка (т. е. волчка, вращающегося вокруг своего центра тяжести) можно рассматривать как перемещение S -точки в некотором римановом про-

пространстве трех измерений, происходящее по кратчайшему пути. Аналогично, изучение движения двухатомной молекулы сводится к задаче о нахождении кратчайшего пути в соответствующем пятимерном римановом пространстве и т. д. *Механическая задача сводится к задаче дифференциальной геометрии.*

Отметим, что при первом способе рассуждений n -мерное пространство конфигураций рассматривается как часть $3N$ -мерного евклидова пространства. При втором же способе пространство конфигураций рассматривается само по себе, а не как часть пространства большего числа измерений.

Резюме. Возможность введения произвольных координатных систем и инвариантность уравнений механики относительно преобразований координат тесно связывают аналитическую механику с идеями и методами римановой геометрии. Движение произвольной механической системы может рассматриваться как движение свободной частицы в соответствующем n -мерном пространстве с определенной римановой структурой. Кинетическая энергия системы определяет риманов линейный элемент пространства конфигураций.

6. Голономные и неголономные механические системы.

Кинематические связи не всегда имеют вид соотношений между координатами частиц. Случается, что имеют место условия более общей природы, которые можно записать лишь в дифференциальной форме. Характерным примером является шар, катящийся по столу. Шар, свободно перемещающийся в пространстве, имеет шесть степеней свободы. Если же он движется по плоскости, то высота центра тяжести остается постоянной, что уменьшает число степеней свободы до пяти. Мы можем описать положение шара двумя прямоугольными координатами x и y точки контакта шара с плоскостью и тремя углами α , β и γ , которые фиксируют положение шара относительно системы неподвижных осей. Если шар может двигаться с проскальзыванием, то он действительно имеет все пять степеней свободы. Однако если он вынужден катиться без скольжения, то мгновенная скорость

в точке касания должна равняться нулю и мгновенная ось вращения должна проходить через точку касания. Если мгновенная ось вращения все время находится в плоскости стола, то мы имеем «чистое качение», в противном случае — «качение» с «верчением». В случае чистого качения число степеней свободы уменьшается до двух. Если путь точки контакта определен заданием x и y как функций времени t , то положение шара этим самым однозначно определено в любой момент времени. Может показаться, что углы α , β , γ могут быть заданы как функции x и y . Это, однако, невозможно. Дифференциалы α , β , γ выражаются через дифференциалы x и y , но эти соотношения неинтегрируемы. Их нельзя заменить эквивалентными конечными соотношениями между координатами. Действительно, представим себе, что качение шара начинается с какого-то определенного положения и заканчивается при некотором фиксированном значении x и y . Если шар двигался двумя различными путями, то и конечные положения его окажутся повернутыми относительно друг друга; а если бы α , β , γ можно было задать в виде функций x и y , то конечные положения шара в обоих случаях совпадали бы.

Подобные кинематические связи, которые могут быть заданы только в виде соотношений между дифференциалами координат, были названы Герцем «неголономными», в отличие от обычных «голономных» связей. Кинематическая связь вида

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (1.6.1)$$

является голономной, хотя из (1.6.1) и следует при помощи дифференцирования, что

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} dq_n = 0. \quad (1.6.2)$$

Если же мы начнем с дифференциального соотношения вида

$$A_1 dq_1 + \dots + A_n dq_n = 0 \quad (1.6.3)$$

(A_k — заданные функции величин q_k), то его можно перевести в соотношение (1.6.1) лишь при выполнении определенных условий интегрируемости. Единственным исключением является случай $n = 2$, потому что дифференциальные соотношения между двумя переменными всегда интегрируемы.

При помощи одних дифференцирований и исключений переменных всегда можно определить, является ли данная совокупность дифференциальных условий голономной или нет. Покажем, как это делается, на простейшем примере одного соотношения между тремя переменными; обобщение на случай большего количества уравнений и переменных следует автоматически. Сначала запишем заданное условие в виде:

$$dq_3 = B_1 dq_1 + B_2 dq_2. \quad (1.6.4)$$

Если эта связь допускает конечное соотношение между q_1 , q_2 , q_3 , то должно иметь место равенство

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} = \frac{\partial B_2}{\partial q_1} \quad (1.6.5)$$

или, точнее, поскольку B_1 и B_2 могут зависеть неявно от q_3 ,

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} + \frac{\partial B_1}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial q_2} = \frac{\partial B_2}{\partial q_1} + \frac{\partial B_2}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial q_1}. \quad (1.6.6)$$

Величины $\partial q_3 / \partial q_1$ и $\partial q_3 / \partial q_2$ известны из (1.6.4); поэтому

$$\frac{\partial B_1}{\partial q_2} + \frac{\partial B_1}{\partial q_3} B_2 = \frac{\partial B_2}{\partial q_1} + \frac{\partial B_2}{\partial q_3} B_1. \quad (1.6.7)$$

Это равенство должно выполняться при любых q_1 и q_2 , т. е. оно должно быть тождеством. Если это имеет место, то выражение (1.6.4) интегрируемо, в противном случае — нет. Может случиться, однако, что q_3 не выпадает из результирующего уравнения (1.6.7), а выражается через q_1 и q_2 . Тогда следует проверить, будут ли частные производные от q_3 по q_1 и q_2 равны B_1 и B_2 , как это должно быть согласно (1.6.4). Если будут, то мы тем самым доказали, что данная связь голономна, и заменили ее дифференциальное выражение конечным. В случае более чем двух независимых переменных все условия интегрируемости

$$\frac{\partial B_i}{\partial q_k} = \frac{\partial B_k}{\partial q_i} \quad (1.6.8)$$

должны быть исследованы подобным же образом. Если задана целая система независимых дифференциальных соотношений, то следует сначала их разрешить относительно некоторых зависимых дифференциалов, а затем аналогично предыдущему проверить условия интегрируемости.

Задача. Исследовать интегрируемость следующего дифференциального соотношения

$$x dz + (y^2 - x^2 - z) dx + (z - y^2 - xy) dy = 0. \quad (1.6.9)$$

(Это условие голономно и может быть заменено конечным соотношением

$$z = x^2 - xy + y^2.) \quad (1.6.10)$$

Голономные кинематические связи можно использовать двумя путями. Во-первых, при наличии m уравнений с n переменными можно исключить часть переменных и свести задачу к $n - m$ независимым переменным. Во-вторых, можно оперировать с полным числом переменных, сохраняя заданные соотношения в качестве дополнительных условий.

Неголономные связи допускают лишь *второй* способ решения. Уменьшение числа переменных здесь невозможно и приходится оперировать с большим количеством переменных, чем того требует число степеней свободы системы. Пространство конфигураций в этом случае является частью пространства большего числа измерений, но не образует в нем определенного подпространства, потому что кинематические условия в каждой точке порождают пучок направлений, но эти пучки не имеют огибающей поверхности.

С точки зрения вариационных принципов механики голономные и неголономные связи различаются очень сильно. Хотя уравнения механики и могут быть написаны в случае неголономных связей, но эти уравнения нельзя получить из общего принципа, приравнявая нулю вариацию от определенной величины (гл. II, п. 13).

Резюме. Кинематические условия не всегда имеют вид конечных соотношений между координатами, иначе говоря, не всегда являются «голономными». Может случиться, что связи представимы лишь в виде соотношений между дифференциалами от координат. Такие связи называют «неголономными». Подобные связи возникают, например, при качении твердого тела без скольжения по некоторой поверхности.

7. Обобщенная сила и силовая функция. Левая и правая части уравнения движения Ньютона отражают соответственно два принципиально различных аспекта задач механики. В левой части отражены инертные свойства массы. В аналитической механике эти свойства находят свое выражение в понятии кинетической энергии. Правая часть уравнения — «движущая сила» — описывает динамическое поведение внешнего поля в его воздействии на частицу. Хотя мы склонны считать силу за некую первичную и не-

сводимую величину, аналитические методы механики приводят к выводу, что на самом деле основную роль играет не сила, а производимая ею *работа*, в то время как сама сила есть вторичная величина, получаемая из работы.

Предположим, что на каждую частицу системы с массой m_i и прямоугольными координатами x_i, y_i, z_i действует сила F_i , имеющая компоненты

$$X_i, Y_i, Z_i. \quad (1.7.1)$$

Эти силы появляются либо за счет внешнего поля, либо в результате взаимодействия частиц. Сюда, однако, не включаются силы, которые обеспечивают выполнение кинематических связей; аналитические методы механики не требуют знания этих сил.

Изменим координаты каждой частицы на бесконечно малую величину dx_i, dy_i, dz_i . Полная работа всех рассматриваемых сил равна

$$\overline{d\omega} = \sum_{i=1}^N (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i). \quad (1.7.2)$$

Если теперь заменить прямоугольные координаты обобщенными в соответствии с уравнениями (1.2.8), то дифференциалы dx_i, dy_i, dz_i выразятся через dq_i , а бесконечно малая работа $\overline{d\omega}$ запишется в виде линейной дифференциальной формы от переменных q_i :

$$\overline{d\omega} = F_1 dq_1 + F_2 dq_2 + \dots + F_n dq_n. \quad (1.7.3)$$

Эта дифференциальная форма играет первостепенную роль в образовании понятия силы в аналитической механике. Исходные силы, действующие на частицы, несущественны; важны лишь коэффициенты

$$F_1, F_2, \dots, F_n \quad (1.7.4)$$

дифференциальной формы (1.7.3). Величины (1.7.4) полностью определяют динамическое действие всех сил; они являются компонентами вектора, причем вектора в n -мерном пространстве конфигураций. Мы будем называть этот вектор «обобщенной силой», а величины F_i — «компонентами обобщенной силы».

Подобно тому как движение механической системы можно заменить движением одной частицы в некотором n -мерном римановом пространстве, причем инерция всей системы входит в кинетическую энергию этой воображаемой частицы, так и динамическое действие всех сил может быть представлено с помощью одного вектора, действующего на эту частицу. Этот вектор имеет n компонент в соответствии с числом измерений пространства конфигураций. Компоненты вектора определяются аналитически как коэффициенты инвариантной дифференциальной формы первого порядка, которая выражает полную работу всех действующих сил при произвольном бесконечно малом изменении положения системы.

Теперь силы, действующие на механическую систему, автоматически распадаются на две категории. В общем случае мы ничего не сможем сказать о величине $\overline{dw}$, кроме того, что она является дифференциальной формой первого порядка. Однако возможно также, что $\overline{dw}$ окажется полным дифференциалом некоторой функции. В большинстве задач осуществляется именно эта возможность.

Предположим, что бесконечно малая работа $\overline{dw}$ является полным дифференциалом некоторой функции, так что черта над dw может быть опущена. Эта функция называется «силовой» и обычно обозначается буквой U . Поэтому положим

$$\overline{dw} = dU, \quad (1.7.5)$$

где

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (1.7.6)$$

Отсюда имеем

$$\sum F_i dq_i = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i, \quad (1.7.7)$$

откуда

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (1.7.8)$$

На практике обычно пользуются величиной, которая отличается от силовой функции знаком. Эту величину обозначают через V :

$$V = -U. \quad (1.7.9)$$

Смысл замены знака состоит в том, что с точки зрения закона сохранения энергии V может быть интерпретирована как «потенциальная энергия» системы. Уравнения (1.7.8) можно теперь переписать в виде:

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (1.7.10)$$

где V — функция координат

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (1.7.11)$$

Силы, имеющие потенциал, замечательны с двух точек зрения. Во-первых, они удовлетворяют закону сохранения энергии; по этой причине они называются «консервативными силами». Во-вторых, несмотря на то что обобщенная сила имеет n компонент, все эти компоненты могут быть вычислены из *одной скалярной функции* U . Для применения к механике вариационных методов важно только последнее свойство, а то, что при этом сохраняется энергия системы, несущественно.

Определение силовой функции на основе выражения (1.7.5) слишком ограничено. В природе имеются силы, определяемые силовой функцией, *зависящей от времени*: $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$. Уравнение (1.7.5) при этом остается справедливым, только если при нахождении дифференциала dU время t считать константой. Уравнения (1.7.7) и (1.7.8) остаются справедливыми, но свойство сохранения энергии системы уже теряется. Обобщенная сила, *не будучи* консервативной, имеет силовую функцию. Электрически заряженные частицы, вращаясь в циклотроне, возвращаются в ту же точку с возросшей кинетической энергией, так что энергия не сохраняется. Это происходит не из-за того, что в этом случае силовая функция отсутствует, а потому, что она зависит от времени. С другой стороны, обобщенная сила может не иметь силовой функции и все же удовлетворять условию сохранения энергии системы, как, например, сила, обеспечивающая качение.

Желательно иметь особое название для сил, порождаемых одной скалярной величиной, независимо от того, консервативны они или нет. В данной книге для этой категории

сил предлагается название «моногенные» (что означает «произведенные от одного»), в то время как остальные силы, например трение, можно называть «полигенными».

Силовая функция, связанная с моногенной силой, в наиболее общем случае зависит от координат *и от скоростей*

$$U = U(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t). \quad (1.7.12)$$

Например, электромагнитная сила Лоренца, действующая на частицу при наличии электрического и магнитного полей, порождается именно подобной силовой функцией. Из дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа (см. ниже, гл. II, п. 10) следует, что связь между силой и силовой функцией при этом задается уравнением

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}, \quad (1.7.13)$$

которое является обобщением более простого выражения (1.7.8).

Резюме. При аналитическом подходе существенной величиной в механике является не сила, а *работа*, совершаемая действующими силами на произвольном бесконечно малом перемещении. Вариационные методы дают особенно полезные результаты в случае сил, определяемых одной скалярной величиной, силовой функцией U . Такие силы можно назвать «моногенными». Если силовая функция не зависит от времени, мы получаем класс сил, называемых «консервативными», поскольку они удовлетворяют закону сохранения энергии. В распространенном случае, когда силовая функция не зависит ни от времени, ни от скоростей, эта функция, взятая с обратным знаком, может быть интерпретирована как потенциальная энергия; сила при этом является градиентом потенциальной энергии, взятым с обратным знаком. Силы, не имеющие силовой функции, тоже могут быть охарактеризованы работой, совершенной на бесконечно малом перемещении, но к ним не применима общая процедура нахождения минимума, характерная для аналитической механики.

равной силовой функции, взятой с обратным знаком; при этом можно вообще обойтись без понятия силовой функции, считая кинетическую энергию T и потенциальную энергию V двумя основными скалярами механики.

В общем случае (1.8.5), однако, приходится возвратиться к силовой функции U ; более того, если U зависит от времени, то пропадает самый смысл определения «потенциальной энергии» как другой формы энергии, компенсирующей потерю или рост энергии кинетической.

Действительно, фундаментальной величиной аналитической механики является не потенциальная энергия, а силовая функция, хотя физикам и инженерам более знакомо первое понятие. Во всех случаях, когда мы будем говорить о потенциальной энергии, молчаливо предполагается, что силовая функция имеет вид (1.7.6) и выполняется соотношение $V = -U$.

Для реономных систем не выполняются никакие законы сохранения, в то время как для склерономных систем они имеют место. Поэтому склерономные системы часто относят к «консервативным системам».

Резюме. Может случиться, что две основные величины механики, кинетическая энергия и силовая функция, содержат время в явном виде. Это происходит, когда некоторые из имеющихся кинематических связей зависят от времени, а также когда силовая функция есть явная функция времени (или, быть может, скоростей). Если и кинетическая энергия, и силовая функция склерономны, т. е. не зависят от времени, то из уравнений движения вытекает фундаментальная теорема, называемая законом сохранения энергии. Если хотя бы одна из основных величин реономна, т. е. зависит от времени, то такой закон сохранения не может быть получен.

ГЛАВА II

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Общие свойства задач на экстремум. Задачи на нахождение экстремума всегда привлекали к себе внимание. Даже наша ходьба по прямой линии есть инстинктивное решение задачи на экстремум: мы хотим достичь конечной точки нашего пути с возможно меньшими усилиями. Известное выражение «по пути наименьшего сопротивления» есть еще одно признание нашего инстинктивного стремления к нахождению минимума. Это же стремление проявляется в общем интересе к рекордным достижениям, к чему-то такому, что «нельзя превзойти».

Математически мы говорим о «задаче на экстремум» всякий раз, когда фигурирует наибольшее или наименьшее значение какой-либо величины. Например, мы можем искать наивысшую точку горы или наинизшую точку долины, или кратчайший путь между двумя точками, или наибольший объем контейнера, который можно сделать из данного куска металла, или наименьшие возможные затраты на освещение либо на обогрев и т. д. Для решения подобных задач возникла отдельная ветвь математики, называемая «вариационным исчислением».

С формальной точки зрения задача нахождения минимума определенного интеграла является собственно задачей вариационного исчисления, в то время как задача нахождения минимума функции принадлежит к обычному анализу. Исторически эти две проблемы возникли одновременно и четкого разграничения между ними не было вплоть до Лагранжа, развившего технику вариационного исчисления. Знаменитая задача Дидоны, хорошо известная геометрам древности, была вариационной задачей, требовавшей нахождения минимума некоторого интеграла. Герон Александрийский вывел закон отражения, исходя из того, что луч света, выходящий из точки A и приходящий в точку B после отражения от зеркала, достигает цели в кратчайшее время. Ферма применил этот принцип для получения законов преломления. Все эти задачи решались геометрическими методами. Задача о брахистохоне (кривой быстрейшего спуска) была предложена Иоганном Бернулли и решена независимо им самим, Ньютоном и Лейбницем. Основные дифферен-

циальные уравнения для вариационных задач были найдены Эйлером и Лагранжем. Общий метод решения вариационных задач был предложен Лагранжем в его *Mécanique Analytique* (1788)¹.

Перед тем как приступить к изложению формального аппарата вариационного исчисления, рассмотрим один простой, но типичный пример, который поможет уяснить общие черты задач на экстремум. Предположим, что мы желаем определить высшую точку горы. Высота местности может быть аналитически записана уравнением

$$z = f(x, y) \quad (2.1.1)$$

и пусть $f(x, y)$ -- непрерывная и дифференцируемая функция x и y .

Вопрос о максимуме или минимуме по самой своей природе требует какого-то *сравнения*. Если мы утверждаем, что находимся на вершине горы, то мы должны показать, что все соседние точки расположены ниже нас. Здесь мы сталкиваемся с первым характерным ограничением задач на экстремум. В удаленных от нас частях горы могут существовать и более высокие пики. Нам достаточно, чтобы достигнутая нами высота была максимальна в *непосредственной* окрестности, даже если и не установлено, что она максимальна в более широкой окрестности. Мы говорим, таким образом, о *локальном* максимуме (или минимуме) в отличие от *абсолютного* максимума (или минимума).

Однако даже программа поисков этого относительного экстремума может быть еще больше ограничена исследованием в первую очередь *бесконечно малой* (т. е. произвольно малой) окрестности нашего местоположения. Ясно, что возле вершины горы все точки бесконечно малой окрестности должны иметь в первом приближении одинаковую высоту. Это означает, что *скорость изменения высоты должна быть равна нулю при движении в любом направлении*. Действительно, наличие положительной скорости движения в каком-либо направлении означало бы, что в ближайшей окрестности нашей точки имеются другие точки, с большей высотой. С другой стороны, если скорость изменения отрицательна в некотором направлении, то, двигаясь в *противоположном* направлении, мы можем сделать скорость измене-

¹ Точнее, в 1760—1762 гг. См. сб. Вариационные принципы механики, под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, М., 1959.—Прим. ред.

ния положительной. При этом предполагается, и это очень существенно, что имеется возможность двигаться в любом направлении.

Таким образом, в точке, где имеется относительный максимум функции, не должно быть ни положительного, ни отрицательного значения скорости ее изменения. Отсюда следует весьма важное утверждение, что для наличия максимума данной функции в некоторой точке требуется, чтобы *скорость изменения функции при движении в любом направлении от этой точки была равна нулю*.

Однако это условие само по себе не гарантирует наличие максимума. Мы можем находиться на седловой точке, что приводит к наличию минимума по отношению к одним направлениям и максимума по отношению к другим. Поэтому равенство нулю скорости изменения функции во всех возможных направлениях является необходимым, но отнюдь не достаточным условием наличия экстремума. Требуется провести дополнительное исследование, чтобы установить, что в действительности реализуется: максимум, минимум или седловая точка без какого-либо экстремального значения.

Однако тот факт, что мы находимся в точке, где скорость изменения функции в любом направлении равна нулю, интересен сам по себе. Подобные точки являются особыми, независимо от того, выполняются в них или нет более сильные условия наличия максимума или минимума. Поэтому эти точки имеют специальное название. *Если скорость изменения функции в любом направлении в некоторой точке равна нулю, то мы говорим, что функция имеет в этой точке «стационарное значение»*.

Как оказалось, в задачах о движении существенны лишь *стационарные значения* некоторых определенных интегралов. Поэтому имеется заметное различие между вариационным исчислением — ветвью чистой математики, с одной стороны, и его приложением к задачам механики — с другой. С точки зрения чистой математики задача о нахождении стационарных значений не представляет большого интереса. После установления критерия для стационарных точек идут дальше и ищут дополнительные критерии для истинных экстремумов. Для вариационных принципов механики, однако, эти последние исследования представляют интерес только при решении задач устойчивости, когда ищется дей-

3В*

ствительный минимум потенциальной энергии. Задачи же по определению движения не связаны со специальными условиями существования таких минимумов.

Резюме. Задача о нахождении точки, в которой некоторая функция имеет относительный максимум или минимум, приводит к необходимости исследования бесконечно малой окрестности этой точки. Это исследование должно показать, что функция обладает стационарным значением в рассматриваемой точке. Хотя это утверждение само по себе без дополнительных условий и не может гарантировать наличия экстремума, для общих задач динамики его достаточно: задачи движения требуют лишь нахождения стационарных значений, а не обязательно минимумов некоторого определенного интеграла.

2. Стационарное значение функции. Рассмотрим функцию произвольного числа переменных

$$F = F(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (2.2.1)$$

Эти переменные могут рассматриваться как прямоугольные координаты точки P в пространстве n измерений. Если мы нанесем значения самой функции вдоль еще одного измерения, то получим некоторую поверхность в пространстве $n + 1$ измерений. Мы будем предполагать, что F — непрерывная и дифференцируемая функция переменных u_k .

Переведем теперь выражение: «исследование бесконечно малой окрестности некоторой точки» на точный математический язык. При этом нам понадобится понятие «вариации», которое означает бесконечно малое изменение, подобное дифференциалу в обычном анализе. В отличие от обычного дифференцирования это бесконечно малое изменение не связано с *действительным* изменением независимой переменной; это своего рода *математический эксперимент*, который мы проделываем над совокупностью переменных. Рассмотрим для примера шарик, покоящийся в нижней точке чаши. Действительное перемещение шарика равно

нулю. Нам, однако, желательно перевести его в какое-нибудь соседнее положение, чтобы посмотреть, как изменится его потенциальная энергия. Подобная операция называется «виртуальным перемещением». Термин «виртуальное» означает, что перемещение производится преднамеренно в любом кинематически допустимом направлении. Такое виртуальное бесконечно малое изменение положения кратко называется «вариацией положения». Эта вариация вызывает соответствующее изменение исследуемой функции F (в нашем примере потенциальной энергии шарика). Мы производим варьирование переменных по своему усмотрению, после чего соответствующее изменение функции, называемое «вариацией функции», происходит уже независимо от нас.

Лагранжу принадлежит замечательная идея ввести для вариации специальный символ δ , чтобы подчеркнуть ее виртуальный характер. Сходство с обозначением дифференциала d напоминает, что оба символа означают *бесконечно малое изменение*. Однако d относится к *действительным*, а δ — к *виртуальным* изменениям. Так как в задачах, связанных с вариациями определенных интегралов, встречаются одновременно оба типа изменений, это различие в обозначениях оказывается весьма существенным.

В соответствии с введенными обозначениями запишем бесконечно малые виртуальные изменения наших координат в виде

$$\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n. \quad (2.2.2)$$

Соответствующее изменение функции F находится по правилам элементарного анализа

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \delta u_n. \quad (2.2.3)$$

Это выражение называется «первой вариацией» функции F .

Для того чтобы оперировать с конечными, а не с бесконечно малыми величинами, положим

$$\delta u_1 = \varepsilon \alpha_1, \delta u_2 = \varepsilon \alpha_2, \dots, \delta u_n = \varepsilon \alpha_n, \quad (2.2.4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — направляющие косинусы выбранного нами виртуального направления, а ε — параметр, стремящийся к нулю.

Скорость изменения функции в выделенном направлении

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \alpha_n. \quad (2.2.5)$$

Для того чтобы F приняло стационарное значение, эта скорость должна обратиться в нуль:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_k} \alpha_k = 0. \quad (2.2.6)$$

«Виртуальность» нашего перемещения означает, что мы можем выбрать любое направление; поэтому α_k произвольны и, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.2.7)$$

Обратно, если условия (2.2.7) выполняются, то величина (2.2.5) обращается в нуль и F имеет стационарное значение. Следовательно, условия (2.2.7) являются необходимыми и достаточными для стационарности функции.

Заметим, что уравнения (2.2.7) определяют лишь *положение* стационарного значения, а не само значение. Найдя, однако, из n уравнений (2.2.7) n величин $u_1, u_2, \dots, u_n$, мы можем подставить их в выражение для F и определить таким образом стационарное значение нашей функции.

Резюме. Необходимым и достаточным условием наличия стационарного значения функции F n переменных в некоторой точке P является обращение в нуль в этой точке всех ее n частных производных.

3. Вторая вариация. Вернемся к бесконечно малому изменению функции, связанному с виртуальной вариацией координат. Записав вариации координат снова в форме (2.2.4), мы должны оценить величину

$$\begin{aligned} \Delta F = & F(u_1 + \varepsilon \alpha_1, u_2 + \varepsilon \alpha_2, \dots, u_n + \varepsilon \alpha_n) - \\ & - F(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Рассматривая эту величину как функцию параметра ε и разлагая ее в ряд по ε , получаем

$$\Delta F = \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_k} \alpha_k + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_k} \alpha_i \alpha_k + \dots \quad (2.3.2)$$

Если в некоторой точке функция F имеет стационарное значение, то первая сумма обращается в нуль и разложение ΔF начинается с членов второго порядка. При достаточно малом ε можно пренебречь членами высших порядков и написать

$$\Delta F = \frac{1}{2} \delta^2 F, \quad (2.3.3)$$

где

$$\delta^2 F = \varepsilon^2 \sum_{i, k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_k} \alpha_i \alpha_k. \quad (2.3.4)$$

Это выражение называется «второй вариацией» F . Пусть $\delta^2 F$ оказывается положительной при любом выборе косинусов α_i (любом, но, конечно, при условии, что сумма их квадратов равна 1). Это означает, что F *возрастает* во всех направлениях от P , и мы имеем в этой точке действительный минимум. Если же $\delta^2 F$ отрицательна при любых выбранных значениях α_i , то F *уменьшается* во всех направлениях от P и осуществляется максимум. Если $\delta^2 F$ положительна для одних направлений и отрицательна для других, то в данной точке нет экстремума. Таким образом, *знак второй вариации* позволяет установить наличие экстремума. Запишем уравнение

$$\delta^2 F = 0 \quad (2.3.5)$$

и попытаемся найти удовлетворяющие ему действительные значения α_i . Если это возможно, то $\delta^2 F$ может изменить знак и экстремума не существует. Если же, наоборот не существует действительных решений уравнения (2.3.5) для α_i , то $\delta^2 F$ не может изменить знак и потому имеется экстремум. (Чтобы определить, максимум это или минимум, следует вычислить $\delta^2 F$ при каких-нибудь произвольных значениях α_i и определить таким образом ее знак.)

Вторую вариацию функции мы рассмотрим более подробно при обсуждении вопросов малых колебаний вблизи положения равновесия (см. гл. V, п. 10). Там мы найдем более точные критерии для различения максимума и минимума. Здесь следует, однако, отметить, что иногда исследование второй вариации является излишним, потому что наличие, скажем, минимума может быть известно заранее из самого характера задачи. Пусть, например, мы ищем минимум функции, состоящей только из положительных членов. Тогда заранее ясно, что эта функция должна иметь где-то наименьшее значение. Поэтому если условия существования стационарного значения выполняются лишь в *одной* точке, то эта точка и будет точкой минимума (см. гл. IV, п. 8).

Резюме. При выполнении условия существования стационарного значения дальнейшие критерии наличия экстремума связаны со знаком второй вариации. Для существования экстремума достаточно, чтобы знак второй вариации сохранялся при всех возможных бесконечно малых виртуальных перемещениях; положительный знак при этом соответствует минимуму, а отрицательный — максимуму. Если вторая вариация положительна для одних перемещений и отрицательна для других, то в стационарной точке функция не имеет экстремума.

4. Взаимосвязь стационарных и экстремальных значений. Следует хорошо усвоить разницу между стационарным значением и экстремумом, а также взаимосвязь между этими двумя понятиями. Для стационарного значения требуется лишь обращение в нуль первой вариации, без каких бы то ни было ограничений на вторую вариацию. Для экстремума требуется, *помимо* обращения в нуль первой вариации, выполнение некоторых условий для второй вариации. До сих пор мы рассматривали вопрос об экстремумах для *внутренних* точек заданной области пространства конфигураций. Функция, не допускающая экстремумов внутри некоторой области, может иметь их на границе области, где направления перемещений уже не обратимы. Поэтому наше утверждение, что первая вариация должна обратиться в нуль, так как в противном случае ее можно сделать и положительной и отрицательной, больше не имеет места.

При необратимых перемещениях функция может иметь экстремум и не в стационарных точках. В этих случаях экстремум существует без обращения в нуль первой вариации. Шар, катящийся по желобу, приходит в состояние равновесия в наинизшей точке желоба, где касательная к его траектории горизонтальна. Но шар можно остановить и раньше при помощи колышка, который не даст ему скатиться донизу. Шар при этом находится в своем наинизшем из всех возможных положений, хотя тангенс угла наклона желоба не равен нулю и высота не имеет стационарного значения. Последнее и не требуется, так как шар находится на границе области пространства конфигураций и вариации его положения не обратимы по направлению.

Резюме. Экстремум функции требует стационарного значения лишь в случае перемещений, обратимых по направлению. На границах области пространства конфигураций, где обратимость не имеет места, экстремум может достигаться и не в стационарных точках.

5. Дополнительные условия. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Задача нахождения минимума функции не всегда задается в той форме, о которой говорилось выше. Число измерений пространства конфигураций, в котором движется точка P , может оказаться меньшим, чем n , из-за наличия каких-то определенных кинематических соотношений между координатами. Подобные кинематические условия называются «дополнительными условиями» соответствующей вариационной задачи. Если такие условия не наложены и переменные $u_1, u_2, \dots, u_n$ могут меняться без ограничений, то мы имеем «свободную» вариационную задачу, которая рассматривалась выше (пп. 1—3).

Исследуем теперь вариации функции

$$F = F(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.5.1)$$

с дополнительным условием

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0. \quad (2.5.2)$$

Естественно сначала исключить одну из переменных — например, u_n — при помощи дополнительного условия, выразив ее через остальные u_k . Тогда мы получим функцию $n-1$ переменных $u_1, \dots, u_{n-1}$, которую можно уже исследовать методами свободной вариационной задачи. Этот способ вполне оправдывает себя, а иногда оказывается и наиболее простым. Однако очень часто исключение переменных является чрезвычайно обременительной задачей. Кроме того, условие (2.5.2) может быть симметричным относительно переменных $u_1, \dots, u_n$; тогда, вообще говоря, нет никаких оснований искусственно выделять одну из переменных в качестве зависимой, выражая ее через остальные как через независимые переменные.

Лагранж предложил прекрасный метод решения задач с дополнительными условиями, так называемый «метод неопределенных множителей», который, не прибегая к исключению некоторых переменных, сохраняет их симметрию и тем не менее сводит задачу к задаче о свободной вариации. Этот метод очень общий. Он применим при любом количестве дополнительных условий и даже в случае неголономных условий, заданных в виде неинтегрируемых соотношений между дифференциалами переменных.

Чтобы уяснить смысл метода множителей Лагранжа, начнем с единственного дополнительного условия, заданного в виде (2.5.2). Варьируя это уравнение, мы получаем следующее соотношение между δu_k :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \delta u_n = 0, \quad (2.5.3)$$

в то время как обращение в нуль вариации функции F в стационарной точке дает

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \delta u_n = 0. \quad (2.5.4)$$

Из п. 3 нам известно, что в случае, когда все δu_k независимы, условие (2.5.4) должно приводить к обращению в нуль всех $\partial F / \partial u_k$. Здесь, однако, этот случай не имеет места из-за условия (2.5.3). Нам придется выразить δu_n через другие вариации ($\partial f / \partial u_n$ в точке P предполагается отличной от нуля), а затем рассматривать остальные δu_k как свободные

вариации. Однако предварительно преобразуем (2.5.4). Умножим левую часть (2.5.3) на некоторый неопределенный множитель λ , являющийся функцией $u_1, \dots, u_n$, и прибавим полученное произведение к δF . При этом, естественно, величина δF не изменится, так как мы прибавили нуль. Поэтому справедливо равенство

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} \delta u_n + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \delta u_n \right) = 0. \quad (2.5.5)$$

Эта операция не тривиальна, так как хотя мы и прибавили нуль, но мы в действительности прибавили *сумму*; нулю равна вся сумма, но не отдельные ее члены.

Запишем (2.5.5) в виде

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0. \quad (2.5.6)$$

Теперь вместо исключения δu_n мы можем выбрать λ таким образом, чтобы обратился в нуль множитель при δu_n :

$$\frac{\partial F}{\partial u_n} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_n} = 0. \quad (2.5.7)$$

После этого в нашей сумме осталось всего $n - 1$ членов

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0. \quad (2.5.8)$$

Так как остались только те δu_k , которые могут быть выбраны произвольно, то теперь применимы условия свободной вариационной задачи. Поэтому коэффициенты при всех δu_k должны равняться нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \quad (2.5.9)$$

Из формул (2.5.7) и (2.5.9) видно, что все коэффициенты в сумме (2.5.6) обращаются в нуль, как если бы все вариации δu_k были свободными. В результате идея «метода неопределенных множителей» Лагранжа может быть сформулирована следующим образом: вместо изучения условий обращения в нуль выражения

$$\delta F + \lambda \delta f \quad (2.5.10)$$

при всех возможных вариациях δu_k , удовлетворяющих заданным дополнительным условиям. Мы должны были бы выразить последние m вариаций δu_k через остальные вариации. Однако сначала преобразуем выражение (2.5.15), добавив левые части каждого из уравнений (2.5.14), умноженные предварительно на некоторые неопределенные множители λ_i . В результате получим

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0. \quad (2.5.16)$$

Теперь исключение последних m вариаций δu_k может быть произведено путем подбора множителей λ так, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} = 0, \quad (k = n - m + 1, \dots, n). \quad (2.5.17)$$

Тогда от равенства (2.5.16) остается

$$\sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} \right) \delta u_k = 0. \quad (2.5.18)$$

Все оставшиеся в (2.5.18) вариации — свободные, и коэффициенты при них должны обратиться в нуль. В конечном счете мы получаем систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial u_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (2.5.19)$$

которые можно рассматривать как следствие вариационного условия

$$\delta F + \lambda_1 \delta f_1 + \dots + \lambda_m \delta f_m = 0 \quad (2.5.20)$$

в предположении, что все вариации независимы. Таким образом, в конечном счете разница между зависимыми и независимыми переменными исчезла.

Уравнение (2.5.20) можно записать даже в более замечательном виде

$$\delta (F + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m) = 0 \quad (2.5.21)$$

и интерпретировать его следующим образом: *вместо того, чтобы отыскивать стационарное значение функций F , мы можем искать стационарное значение другой функции*

$$\bar{F} = F + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m, \quad (2.5.22)$$

опуская дополнительные условия и оперируя по правилам свободной вариационной задачи. Это дает n уравнений. Кроме того, мы должны удовлетворить m дополнительным условиям (2.5.13). Всего получается $n + m$ уравнений с $n + m$ неизвестными

$$u_1, u_2, \dots, u_n; \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m. \quad (2.5.23)$$

Этот замечательный метод множителей Лагранжа заменяет задачу с $n - m$ степенями свободы задачей с $n + m$ степенями свободы. Если к n переменным u_k добавить еще m величин λ_i в качестве дополнительных переменных и после этого искать стационарное значение функции $\bar{F}$, то коэффициенты при вариациях u_k дадут те же самые n уравнений, которые мы имели раньше, а коэффициенты при вариациях λ_i дадут дополнительно m уравнений

$$f_1 = 0, \dots, f_m = 0. \quad (2.5.24)$$

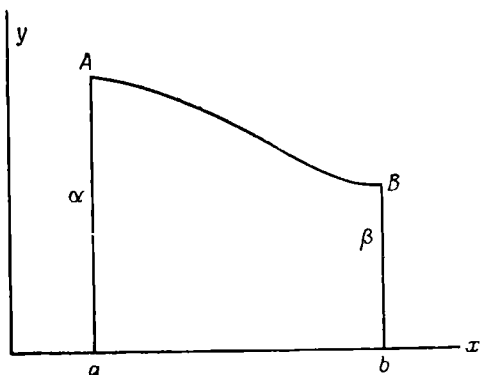
Эти уравнения представляют собой не что иное, как заданные ранее дополнительные условия. Теперь мы их получили a posteriori из решения вариационной задачи.

Метод Лагранжа позволяет использовать дополнительные координаты, что очень часто по многим соображениям механики оказывается удобным. Он сохраняет полную симметрию всех координат, так как делает ненужным деление переменных на зависимые и независимые.

Резюме. Метод неопределенных множителей Лагранжа сводит вариационную задачу с дополнительными условиями к свободной вариационной задаче. Функция F , для которой ищется стационарное значение, преобразуется путем прибавления левых частей дополнительных условий, каждая из которых умножается предварительно на некоторый неопределенный множитель λ . Вариационная задача для преобразованной функции решается как свободная. Получающиеся условия стационарности вместе с имеющимися дополнительными условиями определяют искомые значения переменных и множители λ .

Резюме. Метод Лагранжа применим также и при неголономных условиях. Левые части этих условий умножаются на некоторые неопределенные множители λ и прибавляются к вариации исследуемой функции F . Все это выражение приравнивается нулю, причем все вариации δu_k считаются здесь свободными.

7. Стационарное значение определенного интеграла. Изучение движения аналитическими методами приводит к частному виду задачи на экстремум: нахождению стацио-



Р и с. 2.

нарных значений *определенного интеграла*. Ветвь математики, занимающаяся подобными проблемами, называется вариационным исчислением. В качестве типичного примера рассмотрим задачу о брахистохроне (кривой быстрого спуска), впервые сформулированную и решенную Иоганном Бернулли (1696); это одна из первых вариационных задач. Требуется найти плоскую кривую, двигаясь вдоль которой (под действием силы тяжести) частица спустится от точки A до точки B за кратчайшее время. Пусть искомая кривая аналитически выражается уравнением

$$y = f(x). \quad (2.7.1)$$

Тогда время, минимум которого нас интересует, будет представлено в виде следующего определенного интеграла:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\alpha-y}} dx. \quad (2.7.2)$$

Здесь y — неизвестная функция x , которую нужно найти. Среди всех возможных $y = f(x)$ мы должны найти такую $f(x)$, которая даст наименьшее возможное значение t . Функция y должна быть непрерывна, дифференцируема и иметь непрерывную производную. Кроме того, поскольку оба конца неизвестной кривой заданы, функция y должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta. \quad (2.7.3)$$

Имеется одна и только одна функция, удовлетворяющая этим условиям.

Задача, с которой мы здесь столкнулись, может быть сформулирована в более общем виде следующим образом. Задана функция трех переменных

$$F = F(y, y', x) \quad (2.7.4)$$

(в приведенном выше примере F не зависит от x , но это ограничение несущественно); задан определенный интеграл

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx; \quad (2.7.5)$$

заданы, наконец, граничные условия

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta. \quad (2.7.6)$$

Требуется найти функцию

$$y = f(x), \quad (2.7.7)$$

удовлетворяющую обычным условиям регулярности, для которой интеграл принимает экстремальное или, по крайней мере, стационарное значение.

На первый взгляд эта задача совершенно отлична от предыдущих задач, где мы имели дело с экстремумом или со стационарным значением функции $F(u_1, \dots, u_n)$ от нескольких переменных. Здесь должна быть минимизирована не функция, а определенный интеграл; вместо системы переменных $u_1, \dots, u_n$ мы имеем неизвестную функцию $y = f(x)$. Более детальное изучение, однако, показывает, что по своей

математической природе эта новая задача несущественно отличается от предыдущей.

Используем понятие «функционального пространства», предложенное Гильбертом. Произвольная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая некоторым общим условиям непрерывности, может быть разложена в бесконечный ряд Фурье в заданном интервале от a до b :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \xi + a_2 \cos 2\xi + \dots + \\ + b_1 \sin \xi + b_2 \sin 2\xi + \dots, \quad (2.7.8)$$

где
$$\xi = \frac{2\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right).$$

Коэффициенты этого разложения определяются однозначно. Тогда любой функции $y = f(x)$ можно поставить в соответствие определенную совокупность коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$, при условии что n выбрано достаточно большим, так чтобы остаток разложения был достаточно малым. Примем эти коэффициенты за прямоугольные координаты точки P в $(2n + 1)$ -мерном пространстве. При этом произвольная функция изобразится некоторой точкой этого многомерного пространства; значение интеграла I , соответствующее функции $f(x)$, можно отложить на перпендикуляре к прежнему пространству, увеличив на единицу число измерений. Мы, таким образом, вновь приходим к картине *поверхности в многомерном пространстве*. Малому изменению функции $f(x)$ отвечает малое перемещение точки P . Задача нахождения функции $f(x)$, которая минимизирует определенный интеграл I , сводится к задаче нахождения наинизшей точки на некоторой поверхности в пространстве $2n + 2$ измерений. Это в точности та же задача, которую мы рассматривали в предыдущих пунктах данной главы.

Эйлер показал, что эту задачу можно решить элементарными средствами, не прибегая к специальным методам. Мы используем тот факт, что определенный интеграл можно заменить суммой с возрастающим числом членов. Кроме того, производную можно заменить отношением приращений функции и аргумента. Получающаяся при этих операциях ошибка может быть сделана сколь угодно малой.

В соответствии с обычной схемой разделим интервал от $x=a$ до $x=b$ на большое число малых равных интервалов; мы получим некоторое множество значений абсцисс

$$x_0=a, \quad x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}=b \quad (2.7.9)$$

и соответствующее множество ординат

$$y_0=\alpha, \quad y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}=\beta, \quad (2.7.10)$$

где

$$y_k = f(x_k). \quad (2.7.11)$$

После этого заменим производную $f'(x_k)$ отношением приращений

$$z_k = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad (2.7.12)$$

а интеграл (2.7.5) — суммой

$$S = \sum_{k=0}^n F(y_k, z_k, x_k) (x_{k+1} - x_k). \quad (2.7.13)$$

Ошибка, возникающая в результате таких замен, стремится к нулю, когда все интервалы $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ стремятся к нулю.

Мы заменяем первоначальный интеграл суммой (2.7.13) и ищем стационарное значение этой суммы. Это уже задача обычного типа: задана функция S n переменных $y_1, \dots, y_n$ (вместо фигурировавших раньше переменных $u_1, \dots, u_n$). Мы знаем, что задача решается приравнением нулю частных производных S по y_k . В заключение придется лишь исследовать переход $\Delta x_k \rightarrow 0$.

Перед тем как приступить к выполнению этой программы, изменим несколько выражение (2.7.13); при предельном переходе это изменение, конечно, не должно отразиться на значении предела. Так как y_{k+1} и y_k различаются сколь угодно мало, можно заменить $F(y_k, z_k, x_k)$ на $F(y_{k+1}, z_k, x_k)$. Теперь интересующая нас функция будет выглядеть следующим образом:

$$S' = \sum_{j=0}^n F(y_{j+1}, z_j, x_j) (x_{j+1} - x_j). \quad (2.7.14)$$

При образовании частной производной S' по одной из переменных, например, y_{k+1} , следует иметь в виду, что y_{k+1} появляется в сумме S' в *двух* соседних членах при $j = k$ и $j = k + 1$. Это видно из определения z_{k+1} в (2.7.12). Частная производная S' по y_{k+1} будет поэтому иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S'}{\partial y_{k+1}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x=x_k} (x_{k+1} - x_k) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_k} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_{k+1}}. \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

После деления на $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ соответствующее уравнение можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x=x_k} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.7.16)$$

Здесь записаны необходимые и достаточные условия стационарности суммы S' . Важно отметить, что две крайние ординаты y_0 и y_{n+1} заданы и не варьируются. Если бы и они были неизвестны, то нам бы потребовалось в дополнение к уравнениям (2.7.16) еще два граничных условия.

В пределе, при Δx , стремящемся к нулю, разностное уравнение (2.7.16) переходит в дифференциальное уравнение. Так как точки x_k могут быть выбраны сколь угодно близкими к любой точке интервала (a, b) , наше дифференциальное уравнение будет справедливо во всем интервале

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (a \leq x \leq b). \quad (2.7.17)$$

Это фундаментальное уравнение было открыто независимо Эйлером и Лагранжем и обычно называется дифференциальным уравнением Эйлера — Лагранжа. Заметим, что оно было выведено элементарными средствами из условия стационарности суммы, заменяющей данный определенный интеграл.

Этот метод вывода основного дифференциального уравнения вариационного исчисления, предложенный Эйлером, не совсем строг, так как он использует двойной предельный переход в не вполне допустимой форме. Прямой вывод Лагранжа, который мы изложим ниже, свободен от этого недостатка.

Резюме. Задача минимизации определенного интеграла, содержащего неизвестную функцию и ее производную, может быть сведена к элементарной задаче минимизации функции многих переменных. Для этого интеграл заменяется суммой, а производная — отношением приращений. Условия, при выполнении которых первая вариация обращается в нуль, принимают форму разностного уравнения, которое в пределе переходит в дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа.

8. Основные операции вариационного исчисления. Лагранж понимал, что задача нахождения минимума определенного интеграла требует особых методов, отличных от методов обычного анализа. С помощью таких методов задача могла бы решаться непосредственно без обращения к предельному переходу, как это сделал Эйлер.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая, по предположению, дает стационарное значение определенному интегралу (2.7.5). Чтобы доказать, что мы действительно имеем стационарное значение, нужно вычислить подобный же интеграл для слегка *измененной* функции $y = \bar{f}(x)$ и показать, что скорость изменения интеграла при изменении функции становится равной нулю.

Измененную функцию $\bar{f}(x)$, очевидно, можно записать в виде

$$\bar{f}(x) = f(x) + \varepsilon \varphi(x), \quad (2.8.1)$$

где $\varphi(x)$ — некоторая произвольная функция, удовлетворяющая тем же общим условиям непрерывности, что и функция $\bar{f}(x)$: $\varphi(x)$ должна быть непрерывной и дифференцируемой.

Очевидно, что выбор искомой функции $f(x)$, которая решает вариационную задачу, должен быть сделан в классе непрерывных функций, дифференцируемых по крайней мере один раз; иначе интеграл от $F(y, y', x)$ не будет иметь смысла. Мы, однако, ограничим $f(x)$ более сильным требованием, чтобы и $f''(x)$ существовала во всем интервале. (Подобного предположения для $\varphi(x)$ не требуется.)

При помощи переменного параметра ε мы можем делать изменение функции $f(x)$ произвольно малым; для этого нужно лишь устремить ε к нулю.

Теперь сравним значения измененной функции $\bar{f}(x)$ со значениями первоначальной функции $f(x)$ при некотором определенном значении независимой переменной x . Для этого образуем разность между $\bar{f}(x)$ и $f(x)$; она называется «вариацией» функции $f(x)$ и обозначается через δy :

$$\delta y = \bar{f}(x) - f(x) = \varepsilon \varphi(x). \quad (2.8.2)$$

Вариация функции, по аналогии с вариацией положения точки, рассматривавшейся ранее, характеризуется двумя основными свойствами. Во-первых, это *бесконечно малое*

Резюме. Вариационное исчисление рассматривает виртуальное бесконечно малое изменение функции $y = f(x)$. Вариация δy означает произвольное бесконечно малое изменение значения y при фиксированном значении x . Независимая переменная x не принимает участия в процессе варьирования.

9. Коммутативные свойства операции варьирования. Вариация функции $f(x)$ приводит к совершенно новой функции $\varepsilon f(x)$. Можно взять производную от этой функции. С другой стороны, можно взять также производные функции $\overline{f(x)}$ и $f(x)$. Их разность естественно назвать вариацией производной $f'(x)$. В одном случае мы имеем «производную от вариации»

$$\frac{d}{dx} \delta y = \frac{d}{dx} [\overline{f(x)} - f(x)] = \frac{d}{dx} \varepsilon f(x) = \varepsilon f'(x). \quad (2.9.1)$$

В другом — «вариацию от производной»

$$\delta \frac{d}{dx} f(x) = \overline{f'(x)} - f'(x) = (y' + \varepsilon f') - y' = \varepsilon f'(x). \quad (2.9.2)$$

Из (2.9.1) и (2.9.2) следует, что

$$\frac{d}{dx} \delta y = \delta \frac{d}{dx} y, \quad (2.9.3)$$

т. е. производная от вариации равна вариации от производной.

Подобным же образом можно ввести вариацию определенного интеграла. Это означает, что берется разность между определенными интегралами, вычисленными при измененном и при первоначальном значениях подинтегрального выражения

$$\begin{aligned} \delta \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b \overline{F(x)} dx - \int_a^b F(x) dx = \\ &= \int_a^b [\overline{F(x)} - F(x)] dx = \int_a^b \delta F(x) dx. \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

Следовательно,

$$\delta \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \delta F(x) dx, \quad (2.9.5)$$

т. е. *вариация от определенного интеграла равна определенному интегралу от вариации.*

Резюме. Операция варьирования обладает двумя характерными свойствами.

а) варьирование и дифференцирование можно менять местами;

б) варьирование и интегрирование можно менять местами.

10. Вывод условий стационарности определенного интеграла методами вариационного исчисления. Рассмотрим еще раз задачу из п. 7, но на этот раз непосредственно методом вариационного исчисления. Пусть требуется найти стационарное значение некоторого определенного интеграла (2.7.5) с граничными условиями (2.7.6).

Для решения этой задачи рассмотрим скорость изменения данного интеграла при варьировании функции $y = f(x)$. Начнем с варьирования самой подынтегральной функции $F(y, y', x)$, происходящего при варьировании y (напомним, что F — заданная функция трех переменных y, y' и x , которая не меняется в процессе варьирования)

$$\begin{aligned} \delta F(y, y', x) &= F(y + \varepsilon \varphi, y' + \varepsilon \varphi', x) - F(y, y', x) = \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right). \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

Высшими членами разложения Тейлора можно пренебречь, так как ε стремится к нулю.

Теперь можно вычислить вариацию определенного интеграла (2.7.5)

$$\delta \int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right) dx. \quad (2.10.2)$$

Чтобы получить «скорость изменения» нашего интеграла, нужно разделить (2.10.2) на бесконечно малый параметр ε подобно тому, как мы это делали в п. 2, когда искали стационарное значение обычной функции $F(u_1, \dots, u_n)$. Следовательно, величиной, которая должна обратиться в нуль при стационарном значении интеграла I , является выражение

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right) dx. \quad (2.10.3)$$

Выражение в такой форме не годится для дальнейшего анализа, потому что $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ взаимосвязаны и в то же время эту взаимосвязь нельзя записать в алгебраической форме. Эту трудность можно обойти путем искусного применения интегрирования по частям. Вторая часть подинтегрального выражения (2.10.3) преобразуется следующим образом:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \varphi \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \varphi dx. \quad (2.10.4)$$

Первый член выпадает, так как мы варьируем при фиксированных граничных значениях и $\varphi(x)$ обращается в нуль в точках a и b . В результате (2.10.3) приобретает вид

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \varphi dx. \quad (2.10.5)$$

Введем для краткости следующее обозначение:

$$E(x) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \quad (2.10.6)$$

и запишем условие стационарности I в виде

$$\int_a^b E(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (2.10.7)$$

Теперь нетрудно видеть, что этот интеграл может обратиться в нуль при произвольной функции $\varphi(x)$ только в том случае, если $E(x)$ тождественно равна нулю в интервале

(a, b) . Действительно, мы можем выбрать функцию $\varphi(x)$ таким образом, чтобы она обращалась в нуль везде, кроме произвольно малой окрестности точки $x = \xi$. Внутри этого интервала $E(x)$ практически равна константе и может быть вынесена из-под знака интеграла ¹

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = E(\xi) \int_{\xi-\rho}^{\xi+\rho} \varphi(x) dx. \quad (2.10.8)$$

Совершаемая при этом ошибка стремится к нулю при ρ , стремящемся к нулю. Так как интеграл в (2.10.8) находится в нашем распоряжении и может быть сделан отличным от нуля, для обращения в нуль $\delta I/\varepsilon$ требуется, чтобы был равен нулю первый множитель. Точка $x = \xi$ может быть выбрана в любом месте интервала (a, b) . Следовательно, во всем интервале справедливо уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (2.10.9)$$

Это условие *необходимо* для обращения в нуль δI . С другой стороны, оно является и *достаточным*, так как если подинтегральное выражение в (2.10.5) обращается в нуль, то и интеграл обращается в нуль. Таким образом, *дифференциальное уравнение (2.10.9) является необходимым и достаточным условием стационарности интеграла I при граничных условиях (2.7.6).*

Задача. Пусть задан определенный интеграл

$$I = \int_a^b F(y, y', y'', x) dx, \quad (2.10.10)$$

содержащий первую и вторую производные y . Найти для него условие стационарности, образуя вариации интеграла и двукратно применяя интегрирование по частям. Должно получиться дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \quad (2.10.11)$$

¹ Предполагается, что функция $E(x)$ непрерывна.

Член, получающийся при интегрировании

$$\delta I = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right]_a^b, \quad (2.10.12)$$

обращается в нуль, если значения y и y' фиксированы в конечных точках интервала.

Резюме. Необходимым и достаточным условием стационарности интеграла

$$\int_a^b F(y, y', x) dx$$

с граничными условиями

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

является выполнение дифференциального уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

11. Дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа в случае n степеней свободы. В механике приходится иметь дело с вариационными задачами следующего вида. Требуется найти стационарное значение определенного интеграла

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt \quad (2.11.1)$$

с граничными условиями

$$[\delta q_k(t)]_{t=t_1} = 0, \quad [\delta q_k(t)]_{t=t_2} = 0 \quad (2.11.2)$$

(q_k заданы на концах интервала в точках t_1 и t_2 , так что их вариации в этих точках равны нулю). Здесь $q_1, \dots, q_n$ — неизвестные функции t ; их требуется определить, исходя из того условия, что при искомом движении интеграл I принимает стационарное значение

$$\delta I = 0 \quad (2.11.3)$$

для произвольных независимых вариаций q_k , удовлетворяющих граничным условиям (2.11.2).

Выделим одну из переменных q_k и будем варьировать только по ней, оставляя остальные q_i неизменными. При этом мы сможем использовать уравнение (2.10.9), предварительно лишь заменив в обозначениях y на q_k , y' на $\dot{q}_k$, а независимую переменную x на время t . Функция F теперь обозначена через L , а пределы интегрирования — через t_1 и t_2 . В результате имеем

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (t_1 \leq t \leq t_2). \quad (2.11.4)$$

Эти уравнения справедливы для каждого отдельного q_k , где k пробегает все значения от 1 до n .

Примененные до сих пор вариации были *частными* вариациями. Естественно возникает вопрос, не появятся ли какие-либо дополнительные условия при одновременном варьировании по всем q_k . Этого, однако, не случится, вследствие принципа суперпозиции операций с бесконечно малыми величинами. Обозначим через $\delta_k I$ вариацию I , получающуюся при варьировании только по одному q_k . Тогда при одновременном варьировании по всем q_k результирующая вариация δI запишется следующим образом:

$$\delta I = \delta_1 I + \delta_2 I + \dots + \delta_n I. \quad (2.11.5)$$

Из дифференциального уравнения (2.11.4) следует обращение в нуль $\delta_k I$. Поскольку оно справедливо для всех q_k , сумма (2.11.5) обращается в нуль, т. е. $\delta I = 0$ при *произвольных* вариациях q_k .

Таким образом, задача нахождения стационарного значения интеграла I при произвольных вариациях по q_k при фиксированных граничных значениях решена. Условия стационарности получаются в виде следующей *системы дифференциальных уравнений*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.11.6)$$

Они называются «дифференциальными уравнениями Эйлера — Лагранжа», а также, когда они встречаются в приложениях к механике, «уравнениями движения Лагранжа».

За исключением того единственного случая, когда L зависит от части либо от всех q_k *линейно*, все частные произ-

водные $\partial L / \partial \dot{q}_k$ будут содержать соответствующие $\dot{q}_k$. Поэтому дифференцирование по t приведет везде к появлению вторых производных $\ddot{q}_k$. Полученные уравнения можно алгебраически разрешить относительно $\ddot{q}_k$ и записать систему дифференциальных уравнений (2.11.6) в следующем виде:

$$\ddot{q}_k = \Phi_k(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t). \quad (2.11.7)$$

В результате решения такой системы дифференциальных уравнений второго порядка появится $2n$ констант интегрирования, так что полное решение (2.11.7) может быть записано следующим образом:

$$q_k = q_k(A_1, \dots, A_n; B_1, \dots, B_n; t). \quad (2.11.8)$$

Константы интегрирования A_k и B_k выбираются в соответствии с граничными условиями. Наша вариационная задача требует варьирования при фиксированных *граничных значениях*. Следовательно, координаты q_k заданы при $t = t_1$ и $t = t_2$. Это и есть $2n$ граничных условий, которым можно удовлетворить соответствующим выбором констант A_k и B_k . Однако природа задач механики такова, что обычно вместо граничных условий задаются *начальные условия*. Наличие $2n$ констант интегрирования позволяет задать произвольным образом все начальные значения координат и скоростей.

Резюме. Если из условия стационарности определенного интеграла, содержащего не одну, а несколько неизвестных функций, требуется найти эти функции, то можно варьировать эти функции независимо друг от друга. Поэтому для каждой функции в отдельности можно написать дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа. В результате получается система n дифференциальных уравнений второго порядка. Решение этой системы уравнений определяет n искомым функций, которые оказываются выраженными через независимую переменную (время t) и $2n$ констант интегрирования.

12. Варьирование при наличии дополнительных условий. Рассмотрим снова задачу предыдущего пункта с тем,

$$\delta I' = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} (\lambda_1 \delta f_1 + \dots + \lambda_m \delta f_m) dt = 0. \quad (2.12.3)$$

Сделать это можно, так как в действительности мы прибавили нуль к вариации интеграла I . Первый член преобразуем обычным интегрированием по частям к виду

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} [E_1(t) \delta q_1 + \dots + E_n(t) \delta q_n] dt. \quad (2.12.4)$$

Объединим теперь подинтегральные выражения в (2.12.3) и соберем члены, содержащие одинаковые δq_k . Мы должны были бы исключить последние $(n - m)$ вариаций δq_k при помощи уравнений (2.12.2), но этого можно избежать, выбрав λ_i таким образом, чтобы коэффициенты при этих δq_k обратились в нуль. Оставшиеся вариации могут выбираться произвольно, а потому и при них коэффициенты должны быть равны нулю во всем интервале. В итоге получается, что коэффициенты при *всех* δq_k обращаются в нуль, безотносительно к тому, является ли данная вариация зависимой или нет.

Окончательная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial q_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial q_k} = 0. \quad (2.12.5)$$

($k=1, \dots, n$)

Она совпадает с системой уравнений для следующей вариационной задачи: вместо вариации определенного интеграла

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.12.6)$$

с дополнительными условиями (2.12.1) рассматривается вариация другого, видоизмененного, интеграла

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt, \quad (2.12.7)$$

где

$$L' = L + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m, \quad (2.12.8)$$

но уже без дополнительных условий.

В этом случае, как и всегда, λ_i должны рассматриваться как константы в процессе варьирования. Можно, однако, включить их в вариационную задачу в качестве дополнительных неизвестных функций от t . Варьирование по λ_i приведет тогда снова к дополнительным условиям (2.12.1).

Решение системы (2.12.5) должно удовлетворять дополнительным условиям (2.12.1), что и определяет λ_i как функции от t . Из имеющихся начальных условий мы можем выбрать произвольно лишь $n - m$ координат и $n - m$ скоростей, а остальные q_i и $\dot{q}_i$ определяются из дополнительных условий. Это согласуется с тем фактом, что соответствующая механическая система имеет лишь $n - m$ степеней свободы. Поэтому использование дополнительных координат является лишь удобным математическим приемом.

Резюме. Метод неопределенных множителей Лагранжа позволяет избежать исключения лишних переменных при наличии дополнительных условий и учитывает дополнительные условия без уменьшения числа переменных. Подинтегральное выражение L заданной вариационной задачи преобразуется путем прибавления левых частей имеющихся дополнительных условий, каждое из которых умножается предварительно на множитель λ . Полученная новая задача рассматривается как свободная вариационная задача. Множители λ определяются затем как функции t путем удовлетворения имеющихся дополнительных условий.

13. Неголономные условия. Метод неопределенных множителей Лагранжа применим и в том случае, когда дополнительные условия вариационной задачи заданы в виде не алгебраических, а дифференциальных соотношений (ср. гл. I, п. 6, и гл. II, п. 6). Мы снова получаем уравнения (2.12.5) с той только разницей, что $\partial f / \partial q_k$ заменены коэффициентами A_{ik} неголономных условий (2.6.1). Различие имеется лишь в вопросе о начальных условиях. Координаты q_i теперь не связаны какими бы то ни было условиями, связи наложены только на их дифференциалы. Поэтому начальные

значения всех q_i можно задать произвольно. Скорости, однако, связаны некоторыми условиями в соответствии с уравнениями

$$A_{i1} \dot{q}_1 + \dots + A_{in} \dot{q}_n = 0, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.13.1)$$

Мы можем поэтому произвольно задать n начальных координат и $n - m$ начальных скоростей.

Имеющиеся m уравнений (2.13.1) служат не только для исключения m начальных скоростей. С их помощью определяются коэффициенты λ , которые входят в уравнения движения как неопределенные множители.

Особого внимания требуют неголономные дополнительные условия, которые являются одновременно реономными, т. е. зависящими от времени. Необходимо выяснить, какие соотношения будут существовать между δq_k , если варьирование осуществляется не мгновенно, а за бесконечно малое время δt . Дополнительные условия при этом имеют вид

$$A_{i1} \delta q_1 + \dots + A_{in} \delta q_n + B_i \delta t = 0, \quad (2.13.2)$$

где коэффициенты A_{ik} и B_i — некоторые функции от q_i и t . Величины B_i не входят в уравнения движения, так как виртуальные перемещения происходят без варьирования времени; они, однако, входят в соотношения между скоростями

$$A_{i1} \dot{q}_1 + \dots + A_{in} \dot{q}_n + B_i = 0. \quad (2.13.3)$$

Резюме. Вариационную задачу с неголономными дополнительными условиями нельзя привести к такому виду, чтобы решение получилось путем приравнивания к нулю вариации какой-то определенной величины. Однако уравнения движения можно получить при помощи метода неопределенных множителей так же, как и в случае голономных условий.

14. Изопериметрические условия. Дополнительные условия могут быть заданы не в виде алгебраического соотношения между q_k , а в форме определенного интеграла, равного некоторой заданной величине C

$$\int_{t_1}^{t_2} f(q_1, \dots, q_n, t) dt = C. \quad (2.14.1)$$

Дополнительные условия такого вида называются «изопериметрическими условиями», так как исторически они впервые встретились в задаче о нахождении максимальной площади фигуры, ограниченной кривой с данным периметром (задача Дидоны).

Вообще говоря, может быть произвольное число дополнительных условий вида (2.14.1), но мы ограничимся изучением случая, когда имеется лишь одно такое условие; обобщение на случай m условий очевидно.

Условие (2.14.1) должно выполняться не только для тех функций $q_1, \dots, q_n$, которые приводят к стационарности интеграла (2.11.1), но и для варьированных функций $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$; поэтому можно проварьировать (2.14.1), что приводит к следующему интегральному соотношению между $\delta q_1, \dots, \delta q_n$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \delta q_n \right) dt = 0. \quad (2.14.2)$$

Поэтому наша задача заключается в том, чтобы удовлетворить уравнению

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} [E_1(t) \delta q_1 + \dots + E_n(t) \delta q_n] dt = 0 \quad (2.14.3)$$

при дополнительном условии (2.14.2). Как и раньше, можно умножить левую часть уравнения (2.14.2) на некоторый неопределенный множитель λ и прибавить к δI . В результате получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(E_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \dots + \left(E_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_n} \right) \delta q_n \right] dt = 0. \quad (2.14.4)$$

Заменим теперь dt на Δt , а определенный интеграл суммой, и устремим сумму к интегралу, делая Δt все меньшим и меньшим. При этом λ можно все время выбирать таким образом, чтобы в результате интеграл (2.14.4) об-

ращался в нуль при произвольных вариациях δq_k . Так как это выполняется независимо от интервалов Δt , то будет выполнено и после перехода к пределу. Следовательно, при соответствующем выборе λ получим при произвольных вариациях δq_k

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L + \lambda f) dt = 0. \quad (2.14.5)$$

Это означает, что мы снова сумели перевести вариационную задачу с условиями в свободную вариационную задачу, заменив первоначальную функцию L на

$$L' = L + \lambda f, \quad (2.14.6)$$

где λ — неизвестная константа.

Из сказанного можно сделать те же выводы, что и в п. 12. Мы снова пришли к уравнениям типа (2.12.5) с той лишь разницей, что λ_i — константы, а не функции t . Эти константы можно определить путем удовлетворения заданным интегральным условиям.

Этот же метод неопределенных множителей применим и тогда, когда изопериметрическое условие (2.14.1) зависит не только от q_k , но и от производных по времени $\dot{t}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) dt = C. \quad (2.14.7)$$

Подобная задача — задача о гибкой цепи — рассматривается в гл. III, п. 4.

Резюме. Метод множителей Лагранжа можно обобщить на случай дополнительных условий, заданных в виде некоторого определенного интеграла, значение которого не должно меняться при варьировании. Результирующие уравнения имеют тот же вид, что и при алгебраических дополнительных условиях. Единственное различие состоит в том, что в этом случае коэффициенты λ — не функции времени, а константы.

15. Вариационное исчисление и граничные условия. Задача об упругом стержне¹. Во всех наших предыдущих рассуждениях мы интересовались в основном *дифференциальными уравнениями*, которые получались как решение задачи о стационарном значении заданного определенного интеграла. Вывод этих уравнений при помощи интегрирования по частям показывает, что вариация определенного интеграла состоит из двух частей: из интеграла, распространенного на данный интервал, и *граничного члена*. Мы не рассматривали до сих пор этот член, так как задача решалась при граничных условиях, обращавших его в нуль. Однако имеются случаи, когда граничный член играет более активную роль. Ниже, при изучении работ Гамильтона по решению дифференциальных уравнений динамики при помощи уравнения в частных производных, мы увидим, что в математически более сложных вопросах механики этот ранее отброшенный член окажется существенным. Здесь, однако, мы хотим обсудить другой аспект вопроса о граничном члене, имеющий более непосредственный физический смысл.

Как известно, любая задача, приводящая к решению дифференциальных уравнений, требует определенного числа *граничных условий* для того, чтобы решение было единственным. Эти условия формулируются на основе имеющихся физических соображений. Может, однако, случиться, что физические соображения не приводят к граничным условиям либо дают их в количестве, недостаточном для получения однозначного решения.

В качестве иллюстрирующего примера возьмем задачу из механики сплошной среды. Рассмотрим закрепленный на концах горизонтальный гибкий стержень, находящийся под действием вертикальных сил, например, сил веса. Прогиб стержня определяется дифференциальным уравне-

¹ Материал, изложенный в этом разделе, основан на ряде кратких, но существенных замечаний по этому вопросу, имеющих в книге Куранта и Гильберта «Методы математической физики» (см., в частности, стр. 183—185, т. I, изд. 3-е, Гостехиздат, 1951). Связь между вариационным исчислением и граничными условиями не только интересна сама по себе, но и является чрезвычайно существенной во многих приложениях, в частности, при изучении вопросов устойчивости в теории упругости.

нием четвертого порядка, которое требует задания четырех граничных условий. Если *защемить* оба конца стержня, то и сами прогибы и первые производные от прогибов на концах стержня будут равны нулю; это даст как раз четыре граничных условия.

Однако можно не заземлять стержень, а лишь *подпереть* его с обоих концов. В этом случае из физических соображений следуют лишь *два* граничных условия — обращение в нуль прогибов на обоих концах, в то время как производные остаются неопределенными. Откуда же взять два дополнительных граничных условия?

Замечательное свойство вариационных задач заключается в том, что *в них всегда автоматически возникает нужное число граничных условий*. Эти граничные условия, не обуславливаемые имеющимися внешними обстоятельствами, следуют из сути вариационной задачи. Для наличия стационарного значения эти дополнительные граничные условия существенны в такой же степени, как и выполнение дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа. Появление этих дополнительных условий связано с граничным членом в δI . «Наложённые извне» (внешние) и «естественные» граничные условия, вместе взятые, обеспечивают *единственность решения*.

Проиллюстрируем этот принцип на упоминавшейся выше задаче о нагруженном гибком стержне. Равновесие стержня определяется из условия минимальности его потенциальной энергии. Мы не будем останавливаться на выводе выражения для упругой энергии стержня, который можно найти в любом учебнике по теории упругости. Обозначим через l длину стержня, а через x — независимую переменную, изменяющуюся от 0 до l и определяющую положение любой точки стержня. Малое вертикальное перемещение (прогиб) под действием нагрузки обозначим через $y(x)$, а величину нагрузки на единицу длины — через $p(x)$. Предположим также, что стержень имеет постоянное сечение. Тогда потенциальная энергия, обусловленная силами упругости, определится формулой

$$V_1 = \frac{k}{2} \int_0^l (y'')^2 dx, \quad (2.15.1)$$

где k — константа, а потенциальная энергия силы тяжести имеет вид

$$V_2 = - \int_0^l \rho y dx. \quad (2.15.2)$$

Следовательно, интеграл, минимум которого нас интересует, будет иметь вид

$$I = \int_0^l \left(\frac{k}{2} y'^2 - \rho y \right) dx. \quad (2.15.3)$$

Дифференциальное уравнение Эйлера — Лагранжа в этом случае запишется, согласно (2.10.11), следующим образом:

$$k y''''(x) = \rho(x). \quad (2.15.4)$$

Если удовлетворить этому уравнению, то вариация δI сводится к граничному члену, который в нашей задаче имеет вид [см. (2.10.12)]

$$\delta I = k \{ -y'''(l) \delta y(l) + y'''(0) \delta y(0) + y''(l) \delta y'(l) - y''(0) \delta y'(0) \}. \quad (2.15.5)$$

1. *Защемленные концы.* Граничные условия, наложенные на стержень, имеют вид

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y(l) &= 0, \\ y'(0) &= 0, & y'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15.6)$$

Так как вариации фиксированных величин равны нулю, то все члены в (2.15.5) обращаются в нуль, и единственным условием обращения в нуль δI остается дифференциальное уравнение (2.15.4). Все граничные условия здесь наложены извне и никакие естественные условия не добавляются.

2. *Опертые концы.* Внешних условий всего два

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (2.15.7)$$

Следовательно, вариации $\delta y'(0)$ и $\delta y'(l)$ произвольны и для обращения в нуль выражения (2.15.5) необходимо выполнение добавочных граничных условий:

$$y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \quad (2.15.8)$$

которые дополняют внешние условия (2.15.7).

3. *Один конец заземлен, другой свободен.* Пусть стержень заземлен в точке $x = 0$ и свободен на другом конце. Внешние граничные условия при этом

$$y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad (2.15.9)$$

в то время как $y(l)$ и $y'(l)$ не заданы. Следовательно, вариации этих величин произвольны и для обращения в нуль (2.15.5) требуется выполнение условий

$$y''(l)=0, \quad y'''(l)=0. \quad (2.15.10)$$

Эти условия возникают как следствие вариационной задачи и дополняют внешние условия (2.15.9).

4. *Оба конца свободны.* Естественные граничные условия (2.15.10) выполняются теперь на обоих концах

$$\begin{aligned} y''(0)=0, \quad y'''(0)=0, \\ y''(l)=0, \quad y'''(l)=0. \end{aligned} \quad (2.15.11)$$

Заметим, что здесь уже все граничные условия вытекают из вариационной задачи. «Наложенных извне» условий нет, но естественные условия имеются в нужном количестве.

Легко видеть тем не менее, что в последней задаче возникают свои специфические трудности, так как стержень не может находиться в равновесии при отсутствии соответствующей поддержки со стороны двух сил, направленных вверх. Мы будем рассматривать эти силы как предельный случай сил, непрерывно распределенных вдоль стержня; поэтому их можно включить в нагрузку $p(x)$, приписав силам, направленным вверх, отрицательный знак. В общей теории дифференциальных уравнений показывается, что правая часть уравнения (2.15.4) может быть задана произвольным образом лишь в том случае, если соответствующее однородное дифференциальное уравнение, т. е. дифференциальное уравнение с $p(x) \equiv 0$, не имеет решений, кроме как $y = 0$. Во всех предыдущих случаях граничные условия были таковы, что дифференциальное уравнение

$$y''''(x)=0 \quad (2.15.12)$$

не имело нетривиальных решений. Здесь же существуют два таких независимых решения, а именно

$$y=1 \quad (2.15.13)$$

$$y=x. \quad (2.15.14)$$

В подобных случаях задача имеет решение только при условии, что $\rho(x)$ «ортогонально» к решениям (2.15.13) и (2.15.14) однородного уравнения, т. е.

$$\int_0^l \rho(x) dx = 0 \quad (2.15.15)$$

и

$$\int_0^l \rho(x) x dx = 0. \quad (2.15.16)$$

Физический смысл этих условий заключается в том, что *сумма сил и сумма моментов сил, действующих на стержень, равны нулю*. Эти условия определяют две поддерживающие силы, необходимые для равновесия стержня. Эти силы получаются, таким образом, из условий интегрируемости краевой задачи; граничные же условия задачи целиком определяются с помощью вариационного исчисления.

Задача 1. Исследовать случай, когда конец $x = 0$ поддерживается (но не зажат), а конец $x = l$ свободен. Показать, что имеется лишь одно условие интегрируемости: «сумма всех моментов равна нулю».

Задача 2. Рассмотреть случай двух стержней различного сечения, жестко скрепленных друг с другом. Здесь константа k в дифференциальном уравнении (2.15.4) испытывает скачок в точке $x = \xi$ соединения стержней. Показать, что граничный член (2.15.5) приводит к двум условиям непрерывности в точке $x = \xi$, а именно к требованию, чтобы ky'' и ky''' были непрерывны в точке $x = \xi$.

Резюме. Решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений не единственно, если не добавлено нужное количество граничных условий. Задачи, связанные с нахождением стационарного значения определенного интеграла, всегда имеют нужное число граничных условий. Если условия задачи не дают достаточного количества граничных условий, то недостающие условия получаются из самой вариационной задачи, потому что граничный член в вариации δI добавляет некоторые «естественные» условия к имеющимся условиям, «наложенным извне». Задача об упругом стержне с различными способами закрепления концов прекрасно иллюстрирует это положение.

Г Л А В А III

ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Принцип виртуальных перемещений для обратимых перемещений. Первый вариационный принцип, с которым мы встречаемся в механике, это принцип виртуальных перемещений. Он определяет равновесие механической системы. Принцип имел фундаментальное значение для последующего развития аналитической механики.

Согласно ньютоновой механике, частица находится в равновесии, если результирующая сила, действующая на эту частицу, равна нулю. При этом частица изолируется и все ее связи заменяются силами. Неудобство подобного подхода станет очевидным, даже если обратиться, например, к столь простой задаче, как равновесие рычага. Рычаг состоит из бесконечного числа частиц и число внутренних сил взаимодействия между этими частицами бесконечно. При аналитическом подходе можно не интересоваться всеми этими силами, а рассматривать лишь внешние в данном случае силы тяжести. Это достигается путем учета лишь тех виртуальных перемещений, которые допускаются наложенными связями. В случае рычага, например, мы рассматриваем лишь вращение всего рычага как *твердого тела* вокруг точки опоры. Поэтому сохраняются неизменными расстояния между любыми двумя точками рычага. При таком подходе надобность в учете внутренних сил, порождаемых связями, отпадает.

С точки зрения механики поведение твердого тела сильно отличается от поведения кучи песка. Существуют значительные внутренние силы, действующие между частицами твердого тела, которые удерживают эти частицы на своих местах внутри тела; такие силы не возникают между песчинками. Как доказать наличие этих сил? Это можно сделать, попытавшись *разрушить* твердое тело, т. е. сдвинуть одни частицы относительно других таким способом, который *не* допускается данными связями. Если мы осторожно пере-

мещаем кучу песка, вращая либо передвигая ее параллельно самой себе, то разница между ней и твердым телом как механическими системами пропадает, так как значительные по величине внутренние силы, отличающие твердое тело от кучи песка, при таком движении не действуют. Вот почему в вариационных методах механики «силами связи», обеспечивающими выполнение некоторых определенных кинематических условий, пренебрегают, принимая во внимание лишь работу «приложенных (активных) сил». Исключить действие внутренних сил удастся благодаря тому, что виртуальные перемещения системы не нарушают имеющихся кинематических связей. Число уравнений, получаемых при таком подходе, меньше числа частиц, но оно в точности равно числу степеней свободы системы.

Воспользуемся сначала языком векторной механики. Предположим, что некоторые заданные внешние силы $F_1, F_2, \dots, F_n$ действуют на систему в точках⁹ $P_1, P_2, \dots, P_n$. Виртуальные перемещения этих точек обозначим через

$$\delta R_1, \delta R_2, \dots, \delta R_n. \quad (3.1.1)$$

Эти виртуальные перемещения не должны нарушать имеющихся кинематических связей; мы будем предполагать, что все эти перемещения обратимы, т. е. что заданные связи не мешают нам заменить любое перемещение δR_i на $-\delta R_i$.

Принцип виртуальных перемещений утверждает, что *данная механическая система будет находиться в равновесии в том и только том случае, когда полная виртуальная работа всех приложенных сил обращается в нуль*

$$\overline{\delta w} = F_1 \cdot \delta R_1 + F_2 \cdot \delta R_2 + \dots + F_n \cdot \delta R_n = 0. \quad (3.1.2)$$

Переведем это уравнение на аналитический язык. С этой целью выразим прямоугольные координаты x_i, y_i, z_i как функции обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_n$, подобно тому как это было сделано в гл. I, п. 7. Дифференциальная форма (3.1.2) *преобразуется* в новую дифференциальную форму

$$\overline{\delta w} = F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots + F_n \delta q_n, \quad (3.1.3)$$

где $F_1, F_2, \dots, F_n$ — компоненты обобщенной силы, образующие вектор в n -мерном пространстве конфигураций.

Принцип виртуальных перемещений требует, чтобы

$$F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + \dots + F_n \delta q_n = 0. \quad (3.1.4)$$

Можно предложить поразительную геометрическую интерпретацию этого уравнения. В левой его части записано, по сути дела, «скалярное произведение» силы и виртуального перемещения. Обращение в нуль этого скалярного произведения означает, что *сила F_i ортогональна всем возможным виртуальным перемещениям*.

Предположим сначала, что на координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$ не наложено никаких связей. В этом случае S -точка в пространстве конфигураций может перемещаться в любом направлении. Тогда принцип (3.1.4) требует, чтобы сила F_i обратилась в нуль, потому что не существует вектора, который был бы перпендикулярен ко всем направлениям в пространстве.

Пусть теперь S -точка под действием заданных кинематических связей вынуждена оставаться в некотором $(n-m)$ -мерном *подпространстве* пространства конфигураций. Тогда условие (3.1.4) требует уже не обращения в нуль силы F_i , а лишь ее *ортогональности* этому подпространству. Это дает $n - m$ уравнений, что соответствует $n - m$ степеням свободы механической системы.

Мы можем теперь дать *физическую* интерпретацию принципа виртуальных перемещений. Согласно механике Ньютона, состояние равновесия требует, чтобы результирующая сила, действующая на *любую* частицу системы, была равна нулю. Эта результирующая сила есть сумма приложенных сил и сил, обеспечивающих выполнение наложенных связей. Последние обычно называются «силами реакции». Так как условие равновесия требует, чтобы «сумма приложенной силы и результирующей сил реакции равнялась нулю», то виртуальная работа приложенных сил равна виртуальной работе сил реакции, взятой с обратным знаком. Следовательно, принцип виртуальных перемещений можно сформулировать в несколько другом виде, который мы будем называть постулатом А:

«Виртуальная работа сил реакции всегда равна нулю на любом виртуальном перемещении, не нарушающем заданных кинематических связей».

Действие этого постулата не ограничивается областью статики. Он приложим также и к динамике, где принцип виртуальных перемещений соответствующим образом обобщается принципом Даламбера. Так как все основные вариационные принципы механики — принципы Эйлера, Лагранжа, Якоби, Гамильтона — являются всего лишь другими математическими формулировками принципа Даламбера, постулат А есть в сущности *единственный* постулат аналитической механики и поэтому играет фундаментальную роль ¹.

Принцип виртуальных перемещений приобретает особое значение в важном частном случае, когда приложенная сила F_i моногенная, т. е. когда она получается из одной скалярной функции — силовой. В этом случае виртуальная работа равна вариации силовой функции $U(q_1, \dots, q_n)$. Так как силовая функция равна потенциальной энергии, взятой с обратным знаком, то можно сказать, что состояние равновесия механической системы характеризуется стационарностью потенциальной энергии, т. е. условием

$$\delta V = 0. \quad (3.1.5)$$

Если равновесие *устойчиво*, то потенциальная энергия должна иметь минимум, точнее относительный минимум, в то время как в общем случае для равновесия требуется не минимальность, а лишь стационарность V .

Резюме. Принцип виртуальных перемещений требует, чтобы в состоянии равновесия равнялась нулю работа приложенных сил при любой бесконечно малой вариации конфигурации системы, при которой не нарушаются наложенные кинематические связи. Для моногенных сил это приводит к следующему условию: в состоянии равновесия потенциальная энергия должна иметь стационарное значение по отношению ко всем кинематически возможным вариациям.

¹ Те ученые, которые утверждают, что аналитическая механика есть не что иное, как математически отличная формулировка законов Ньютона, должно быть, полагают, что постулат А можно вывести из законов движения Ньютона. Автор не видит, как это можно сделать. Третий закон Ньютона — «действие равно противодействию», конечно, не достаточно универсален, чтобы заменить постулат А.

Следующие два пункта будут посвящены приложению принципа виртуальных перемещений к статике твердого тела. Эти результаты хорошо известны из элементарной векторной механики, однако получение их из одного общего принципа является полезным упражнением.

2. Равновесие твердого тела. Твердое тело, свободно перемещающееся в пространстве, имеет шесть степеней свободы: три, связанные с поступательным движением, и три, связанные с вращением. Используя принцип суперпозиции бесконечно малых величин, можно рассмотреть эти два типа перемещений независимо друг от друга.

(А) *Поступательное движение.* Бесконечно малый параллельный перенос приводит к одинаковому перемещению всех точек твердого тела. Обозначим через ε величину перемещения, а через $\mathbf{B}$ — вектор единичной длины. Тогда для виртуального перемещения $\delta \mathbf{R}_k$ частицы P_k можно написать

$$\delta \mathbf{R}_k = \varepsilon \mathbf{B}, \quad (3.2.1)$$

и выражение для суммарной работы принимает вид

$$\overline{\delta w} = \sum (\mathbf{F}_k \cdot \varepsilon \mathbf{B}) = \varepsilon \mathbf{B} \cdot \sum \mathbf{F}_k. \quad (3.2.2)$$

Так как вектор $\mathbf{B}$ может принимать любое направление, для обращения в нуль (3.2.2) требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\bar{\mathbf{F}} = \sum \mathbf{F}_k = 0; \quad (3.2.3)$$

это означает, что *равнодействующая $\bar{\mathbf{F}}$ всех приложенных сил обращается в нуль.*

Рассмотрим поршень, имеющий возможность двигаться внутри цилиндра. Вектор $\mathbf{B}$ имеет в этом случае определенное направление. Поэтому для обращения в нуль (3.2.3) необходимо, чтобы *равнялась нулю лишь компонента вектора $\bar{\mathbf{F}}$ в направлении движения.*

(Б) *Вращение.* Пусть ε — угол бесконечно малого поворота, а Ω — вектор единичной длины вдоль оси вращения. Перемещение точки P_k , обусловленное поворотом, можно

записать следующим образом:

$$\delta \mathbf{R}_k = \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_k, \quad (3.2.4)$$

где вектор $\mathbf{R}_k$ определяет положение точки P_k относительно начала координат на оси вращения. Работа силы $\mathbf{F}_k$ равна

$$\overline{\delta w}_k = \mathbf{F}_k \cdot \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_k = \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{R}_k \times \mathbf{F}_k) = \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{M}_k, \quad (3.2.5)$$

где мы ввели вектор

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{R}_k \times \mathbf{F}_k \quad (3.2.6)$$

для обозначения «момента силы» относительно начала координат.

Следовательно, полная работа всех действующих сил

$$\overline{\delta w} = \sum \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{M}_k = \varepsilon \boldsymbol{\Omega} \cdot \sum \mathbf{M}_k. \quad (3.2.7)$$

Отметим полную аналогию между (3.2.7) и (3.2.2): вектор $\boldsymbol{\Omega}$ заменяет вектор параллельного переноса $\mathbf{V}$, а момент $\mathbf{M}$ — силу $\mathbf{F}$.

Так как свободное тело может вращаться вокруг любой оси и направление $\boldsymbol{\Omega}$ произвольно, для обращения в нуль (3.2.7) требуется выполнение равенства

$$\overline{\mathbf{M}} = \sum \mathbf{M}_k = 0. \quad (3.2.8)$$

Результирующий момент всех приложенных сил обращается в нуль.

Мы получили таким образом второе условие равновесия твердого тела. Так как произвольное виртуальное перемещение твердого тела всегда можно представить в виде суперпозиции бесконечно малых параллельного переноса и поворота, условия (3.2.3) и (3.2.8) совместно определяют равновесие тела.

Замечание 1. Тело может быть закреплено в одной точке, принятой за начало координат. При этом оно теряет степени свободы поступательного движения. Первое условие: «сумма всех сил равна нулю» — отпадает, однако второе условие, обращение в нуль результирующего момента, остается. Радиусы-векторы $\mathbf{R}_k$ теперь откладываются от закрепленной точки. Поэтому должен обращаться в нуль результирующий момент относительно этой точки.

Замечание 2. Можно закрепить не только одну точку тела, но и целую ось. В этом случае $\boldsymbol{\Omega}$ — уже не произвольный вектор, а имеет

направление вдоль данной оси. Для обращения в нуль (3.2.7) достаточно условия

$$\Omega \cdot \bar{\mathbf{M}} = 0. \quad (3.2.9)$$

Это означает, что *должна обращаться в нуль лишь проекция результирующего момента на ось вращения.*

Резюме. Произвольное движение твердого тела складывается из поступательного движения и вращения. При равновесии для исключения возможности поступательного движения требуется равенство нулю суммы всех сил, а для исключения возможности вращения — равенство нулю суммы всех моментов.

3. Эквивалентность двух систем сил. Как мы увидим ниже, виртуальная работа приложенных сил характеризует не только равновесие, но и динамическое поведение механической системы. *Две системы сил, производящие одну и ту же виртуальную работу, динамически эквивалентны.*

Так как виртуальная работа произвольной системы сил, действующих на данное твердое тело, зависит лишь от двух величин: равнодействующей силы $\bar{\mathbf{F}}$ и результирующего момента $\bar{\mathbf{M}}$, то мы сразу получаем важную теорему: *две системы сил с равной равнодействующей и равным результирующим моментом механически эквивалентны.*

Задача 1. Показать, что любая система сил, действующая на твердое тело, может быть сведена к одной силе в том и только том случае, если результирующий момент $\bar{\mathbf{M}}$ и равнодействующая сила $\bar{\mathbf{F}}$ взаимно ортогональны

$$\bar{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{M}} = 0. \quad (3.3.1)$$

Задача 2. Показать, что две силы могут быть заменены одной в том и только том случае, если они компланарны и не образуют пары.

Задача 3. Показать, что произвольную систему *параллельных* сил

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{G} \quad (3.3.2)$$

всегда можно заменить одной силой

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{m} \mathbf{G}, \quad (3.3.3)$$

приложенной в точке

$$\mathbf{R}_0 = \frac{\sum m \mathbf{R}}{\sum m}, \quad (3.3.4)$$

при условии, что $\bar{m} = \sum m$ не равно нулю.

Задача 4. Показать, что произвольную систему сил можно заменить одной силой $\bar{\mathbf{F}} = \sum \mathbf{F}$ и одной парой с осью, параллельной $\bar{\mathbf{F}}$.

4. Задачи о равновесии при наличии дополнительных условий. Часто встречаются задачи о нахождении равновесия системы, на которую наложены одно или несколько дополнительных условий. В соответствии с общим методом, обсуждавшимся в гл. II, п. 5 и 12, в подобных задачах к бесконечно малой виртуальной работе δw следует прибавить вариации дополнительных условий, умноженные на неопределенные множители Лагранжа λ , и лишь затем полученную сумму приравнять нулю. Для иллюстрации этого общего метода мы рассмотрим здесь две задачи статики. В одной требуется минимизировать обычную функцию, а в другой — определенный интеграл.

1. Задача о соединенных стержнях. Рассмотрим систему однородных твердых стержней постоянного сечения, шарнирно соединенных друг с другом. Два свободных конца цепи подвешены. Найти положение равновесия системы.

В этой задаче приложенной силой является сила тяжести, имеющая потенциал. Запишем для нашей системы потенциальную энергию V , минимум которой нужно найти. Направим ось x горизонтально, а ось y — вертикально вниз и обозначим через x_k и y_k прямоугольные координаты концов стержней, а через l_k — длину k -го стержня

$$\begin{aligned} l_k^2 &= (x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 = \\ &= (\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Для потенциальной энергии получаем следующее выражение:

$$V = \frac{\sigma g}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) l_k, \quad (3.4.2)$$

где σ — масса единицы длины. Требуется найти минимум функции V , рассматривая (3.4.1) с заданными константами l_k как n дополнительных условий.

В соответствии с общим методом Лагранжа составим *вариационную* потенциальную энергию вида

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) l_k + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k [(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2] \quad (3.4.3)$$

(несущественный постоянный множитель σg опущен). Требуется найти минимум этой новой функции. Варьируемыми величинами задачи являются x_k и y_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$), в то время как x_0, y_0 и x_n, y_n фиксированы как координаты двух точек подвеса.

Варьирование по x_k дает

$$\lambda_k \Delta x_k - \lambda_{k-1} \Delta x_{k-1} = 0, \quad (3.4.4)$$

откуда следует, что

$$\lambda_k = \frac{c}{\Delta x_k}. \quad (3.4.5)$$

Варьирование по y_k дает

$$\frac{1}{2} (l_k + l_{k-1}) - \lambda_k \Delta y_k + \lambda_{k-1} \Delta y_{k-1} = 0. \quad (3.4.6)$$

Подставив вместо λ_k их выражения из (3.4.5), получим решение нашей задачи о равновесии в виде следующего разностного уравнения

$$c \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{\Delta y_{k-1}}{\Delta x_{k-1}} \right) = \frac{1}{2} (l_k + l_{k-1}). \quad (3.4.7)$$

2. *Задача об однородной цепи (цепная линия).* Если увеличивать число стержней, одновременно уменьшая их длину, то (независимо от того, равны длины стержней между собой или нет) цепь по форме будет приближаться к гладкой, непрерывной и дифференцируемой кривой. В предельном случае мы получим задачу об однородной цепи. Легко видеть, что разностное уравнение (3.4.7) в пределе перейдет в дифференциальное уравнение

$$c \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 1, \quad (3.4.8)$$

где через ds обозначен дифференциал дуги кривой. Зададим кривую уравнением вида $y = f(x)$; тогда уравнение (3.4.8) запишется в форме

$$\frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = \alpha, \quad (3.4.9)$$

где $\alpha = 1/c$. Это уравнение можно проинтегрировать, и мы получим хорошо известное уравнение цепной линии

$$y = \frac{1}{2\alpha} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}). \quad (3.4.10)$$

Вместо того чтобы использовать предельный переход, решим задачу прямыми методами вариационного исчисления. Предположим, что искомая кривая задана в параметрической форме

$$\begin{aligned}x &= x(\tau), \\ y &= y(\tau).\end{aligned}\quad (3.4.11)$$

Определенный интеграл, который нужно минимизировать, имеет вид

$$V = \int_{\tau_1}^{\tau_2} y \sqrt{x'^2 + y'^2} d\tau. \quad (3.4.12)$$

Что касается дополнительных условий, то можно действовать двумя способами. Если исходить из предыдущей задачи, то следует в процессе варьирования сохранять постоянной длину любого, сколь угодно малого участка цепи. Это даст дополнительное условие

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad (3.4.13)$$

если за параметр τ мы примем длину дуги s искомой кривой. В этом случае метод Лагранжа требует нахождения минимума видоизмененного интеграла

$$\bar{V} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} [y + \lambda (x'^2 + y'^2)] d\tau. \quad (3.4.14)$$

Ввиду того что наша цепь абсолютно гибкая, мы можем производить варьирование другим способом. Мы можем допустить любые вариации кривой (3.4.11), которые не меняют ее *полной* длины. Это означает, что следует минимизировать интеграл (3.4.12) с дополнительным условием

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} d\tau = \text{const}. \quad (3.4.15)$$

Эта задача изопериметрического типа (см. гл. II, п. 14). Видоизмененный интеграл имеет вид

$$\bar{V} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} (y + \lambda) d\tau. \quad (3.4.16)$$

Отметим существенную разницу между указанными двумя способами решения задачи. В первом случае, когда используется дополнительное условие локального типа, коэффициент λ является функцией τ , во втором, — когда дополнительное условие, определенный интеграл, взятый по всей области, — λ будет константой.

Задача 1. Применить дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа к интегралу (3.4.14). Первое уравнение (связанное с переменной x) непосредственно интегрируется. Выразив из него λ

и подставив ее во второе дифференциальное уравнение, можно прийти к уравнению (3.4.8). Проверить, что λ оказывается функцией τ .

Задача 2. Применить дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа к интегралу (3.4.16). Если отождествить τ с y , то дифференциальное уравнение для x можно непосредственно проинтегрировать. Показать, что результат в обеих задачах совпадает. Во второй задаче λ — константа и совершенно отличается от λ из первой задачи.

5. Физическая интерпретация метода неопределенных множителей Лагранжа. Пусть мы имеем механическую систему с n степенями свободы, определяемую обобщенными координатами $q_1, \dots, q_n$, на которую наложено кинематическое условие вида

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0. \quad (3.5.1)$$

Метод Лагранжа требует, чтобы

$$\delta V + \lambda \delta f = 0. \quad (3.5.2)$$

Напомним, что это выражение можно записать в виде

$$\delta \bar{V} = 0, \quad (3.5.3)$$

где

$$\bar{V} = V + \lambda f. \quad (3.5.4)$$

Мы снова получаем задачу о нахождении стационарного значения функции, но эта функция — уже не первоначальная потенциальная энергия V , а видоизмененная потенциальная энергия $\bar{V}$. Физически это вполне понятно. Поскольку мы не ограничиваем вариации положения системы условием (3.5.1), а допускаем произвольные вариации q_i , постольку будут действовать не только приложенные силы, но и силы, обеспечивающие выполнение заданной связи. Они тоже имеют свою потенциальную энергию, которую следует добавить к потенциальной энергии внешних сил. Поэтому преобразование потенциальной энергии путем добавления члена λf — это не просто математический прием, а операция, имеющая реальный физический смысл. *Преобразование потенциальной энергии в соответствии с методом множителей Лагранжа отражает наличие потенциальной энергии у сил, обеспечивающих выполнение заданных кинематических условий.*

Естественно, что мы не можем ожидать большого количества сведений о механизме, обеспечивающем выполнение заданного кинематического условия, поскольку нам, по сути дела, ничего не известно, кроме самого условия. Член λf содержит множитель λ , который может быть вычислен только для *реальных* конфигураций механической системы. Иначе говоря, λ известно только для тех точек C пространства конфигураций, которые лежат на поверхности (3.5.1). Тем не менее этих скудных сведений о силовой функции для сил, обеспечивающих связь, вполне достаточно для определения самих этих сил. Дело в том, что, взяв градиент дополнительной потенциальной энергии

$$V_1 = \lambda f, \quad (3.5.5)$$

мы получим

$$F_{1i} = -\frac{\partial V_1}{\partial x_i} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f. \quad (3.5.6)$$

В точке C второй член выпадает, так как в него входит множитель f , обращающийся в точке C в нуль; в результате «сила реакции» F_{1i} сводится к

$$F_{1i} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (3.5.7)$$

Таким образом, член с множителем Лагранжа обладает следующим интересным свойством: из него можно получить силу реакции, связанную с соответствующей кинематической связью. Ниже мы увидим, что это справедливо не только в состоянии равновесия, но и при движении (см. гл. V, п. 8).

Задача 1. Пусть силовая функция совокупности свободных частиц, связанная с силами взаимодействия между ними, зависит лишь от «относительных координат»

$$\xi_{ik} = x_i - x_k, \quad \eta_{ik} = y_i - y_k, \quad \zeta_{ik} = z_i - z_k \quad (3.5.8)$$

любой пары частиц P_i и P_k

$$U = U(\xi_{ik}, \eta_{ik}, \zeta_{ik}). \quad (3.5.9)$$

Варьируя по x_i , получаем x -компоненту силы, действующей на P_i . Показать, что величину

$$X_{ik} = \frac{\partial U}{\partial \xi_{ik}}, \quad (3.5.10)$$

можно интерпретировать, как x -компоненту силы, «действующей на P_i со стороны P_k ». Непосредственно видно, что

$$X_{ik} = -X_{ki}. \quad (3.5.11)$$

Следовательно, для этих сил выполняется закон Ньютона «действие равно противодействию». Силы появляются попарно, равные по величине и противоположные по знаку.

Задача 2. Сделаем более жесткое предположение, что U зависит только от комбинации

$$r_{ik}^2 = \xi_{ik}^2 + \eta_{ik}^2 + \zeta_{ik}^2, \quad (3.5.12)$$

т. е. от *расстояния* между любыми двумя *частицами*. Показать, что внутренние силы в этом случае являются центральными, т. е. направлены вдоль прямой, соединяющей P_i и P_k . Такие силы не дают результирующего момента.

Задача 3. Рассмотрим твердое тело как совокупность свободных частиц, ограниченных дополнительными условиями

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 = c_{ik}^2. \quad (3.5.13)$$

Показать с помощью метода множителей Лагранжа и результатов предыдущих двух задач, что силы, удерживающие частицы твердого тела, не дают результирующей силы $\mathbf{F}$ и результирующего момента $\mathbf{M}$.

Если имеющиеся кинематические связи неголономны, то уже нельзя записать видоизмененную функцию, которая должна быть минимизирована. Но в условиях равновесия все же появляются члены с λ . Это опять-таки имеет прямой физический смысл. Члены с λ добавляют к приложенным силам силы, обеспечивающие удовлетворение кинематических связей. Хотя в этом случае и не существует силовой функции, *силы реакции возникают, как и раньше.*

Таким образом, замечательный метод неопределенных множителей Лагранжа проясняет природу голономных и неголономных кинематических связей, показывая, что голономные связи механически эквивалентны моногенным силам; с другой стороны, неголономные связи механически эквивалентны полигенным силам. *Голономная связь поддерживается при помощи моногенных сил; неголономная связь поддерживается при помощи полигенных сил.*

Резюме. Физический смысл метода неопределенных множителей Лагранжа заключается в том, что этот метод позволяет получить силы реакции, возникающие вследствие наличия кинематических связей. В случае голономных связей эти силы можно получить из некоторой силовой функции; в случае неголономной связи такой функции не существует, однако силы реакции можно получить и в этом случае.

6. Неравенство Фурье. Все наши предыдущие рассуждения проводились при молчаливом предположении, что виртуальные перемещения обратимы. Фактически рассматривался случай, когда мы находились где-то *внутри* пространства конфигураций, так что движение могло осуществляться в любом направлении. Однако ситуация совершенно меняется, когда мы достигаем *границ* пространства конфигураций. Здесь виртуальные перемещения должны быть направлены *внутрь*, а противоположно направленные перемещения невозможны, так как они выводят за пределы пространства. Рассмотрим шар, висющий на гибкой нити. Этот шар может двигаться вверх, и при этом он будет лишь ослаблять натяжение нити. Но он не может двигаться вниз, потому что нить этого не допускает. Другой пример: шар может двигаться по поверхности стола, а также в любом направлении вверх; но он не может двигаться вниз. Виртуальные перемещения обратимы при движении в горизонтальном направлении и необратимы во всех других направлениях.

Как указал Фурье, обычная формулировка принципа виртуальных перемещений

$$\delta V = 0 \quad (3.6.1)$$

относится к *обратимым* перемещениям; в случае необратимых перемещений ее следует заменить неравенством

$$\delta V \geq 0. \quad (3.6.2)$$

Действительно, наша конечная цель — минимизировать потенциальную энергию. Это значит, что при малых, но конечных перемещениях функция V должна всегда увеличиваться

$$\Delta V > 0. \quad (3.6.3)$$

Для бесконечно малых перемещений следует еще добавить знак равенства

$$\Delta V \geq 0. \quad (3.6.4)$$

Теперь у нас уже нет возражений против знака «больше». Единственный довод, на основании которого мы отбрасывали его раньше, заключался в том, что из-за обратимости перемещений знак «больше» предполагает одновременное наличие и знака «меньше», а последний противоречит предположению о минимуме. При необратимых перемещениях, однако, этот аргумент уже не справедлив, и нам приходится согласиться с неравенством (3.6.4), потому что других возражений против положительного изменения потенциальной энергии нет. Так как изменение потенциальной энергии равно работе приложенных сил, взятой с обратным знаком, то неравенство (3.6.4) можно записать в виде

$$\overline{\delta w} \leq 0. \quad (3.6.5)$$

В такой форме неравенство Фурье справедливо и для полигенных сил, не имеющих потенциальной энергии. *Если работа сил на любом виртуальном перемещении равна нулю или отрицательна, то система находится в равновесии.*

Когда шар, подвешенный на нити, движется вверх, работа силы тяжести отрицательна. При горизонтальном (и обратимом) перемещении шара она равна нулю. Аналогично, при движении шара вдоль по горизонтальному столу (обратимое перемещение) работа силы тяжести равна нулю, а при движении шара вверх она становится отрицательной. Механическая система, которая не может прийти в равновесие *внутри* некоторой области пространства конфигураций, будет двигаться *к границе* области и найдет свое равновесие там. Удовлетворить неравенству (3.6.4) на границе области легче, чем равенству (3.6.1) внутри области. Напомним, что на границе области для равновесия не требуется стационарности потенциальной энергии.

Резюме. Обычная формулировка принципа виртуальных перемещений: «сумма всех виртуальных работ равна нулю» справедлива только для обратимых перемещений. Для необратимых перемещений на границе пространства конфигураций условие «равна нулю» следует заменить — «меньше или равна нулю».

ГЛАВА IV

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Введение. Приступая к принципу Даламбера, мы покидаем область статики и попадаем в область динамики. Здесь задачи гораздо более сложны и их решение требует более совершенных методов. В то время как задачи статики для систем с конечным числом степеней свободы приводят к алгебраическим уравнениям, которые могут быть решены при помощи исключения переменных и подстановок, задачи динамики приводят к дифференциальным уравнениям. Настоящая книга посвящена главным образом формулировке и интерпретации основных дифференциальных уравнений движения, а не их окончательному интегрированию. Принцип Даламбера, который мы обсудим в настоящей главе, непосредственно ничего не дает для целей интегрирования. Однако он является важной вехой в истории теоретической механики, так как он дает интерпретацию силе инерции, а это существенно для дальнейшего развития вариационных методов.

1. Сила инерции. Выдающийся французский математик и философ Даламбер (1717—1783) сумел совершить гениальный шаг, распространив на динамику применимость принципа виртуальных перемещений. Простая, но далеко идущая идея Даламбера может быть изложена следующим образом. Мы исходим из основного закона движения Ньютона: «произведение массы на ускорение равно движущей силе»:

$$m\mathbf{A}=\mathbf{F} \quad (4.1.1)$$

и переписываем его в виде

$$\mathbf{F}-m\mathbf{A}=0. \quad (4.1.2)$$

Введем вектор $\mathbf{I}$ следующим образом:

$$\mathbf{I}=-m\mathbf{A}. \quad (4.1.3)$$

Этот вектор можно рассматривать как силу, создаваемую движением. Назовем ее силой инерции. Теперь уравнение Ньютона можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{F}+\mathbf{I}=0. \quad (4.1.4)$$

На первый взгляд ничего не изменилось, так как промежуточная ступень (4.1.3) дает лишь новое название произведению массы на ускорение, взятому с обратным знаком. Именно эта кажущаяся тривиальность делает принцип Даламбера гениальным открытием и в то же время постоянным источником неверных толкований и недоразумений.

Важность уравнения (4.1.4) связана с тем, что в нем содержится нечто *большее*, чем просто измененная формулировка закона Ньютона. Это уравнение является выражением некоторого *принципа*. Мы знаем, что в ньютоновой механике обращение силы в нуль означает равновесие. Следовательно, уравнение (4.1.4) утверждает, что добавление силы инерции к остальным действующим силам приводит к равновесию. Это означает, что, имея какой-либо критерий равновесия механической системы, мы можем сразу же распространить его на систему, находящуюся в движении. Единственно, что для этого требуется, это добавить к имеющимся силам новую «силу инерции». В результате *динамика сводится к статике*.

Это не означает, что мы можем на практике *решать* задачи динамики методами статики. Окончательные уравнения являются *дифференциальными уравнениями*, которые приходится потом решать. Мы просто *выводим* эти уравнения, пользуясь соображениями статики. Добавление силы инерции $\mathbf{I}$ к действующей силе $\mathbf{F}$ заменяет задачу о движении задачей о равновесии.

Нам могут возразить, что поскольку масса m на самом деле движется, то, казалось бы, нет оснований рассматривать ее так же, как если бы она покоилась. На это возражение можно дать два ответа. Во-первых, движение есть явление относительное. Мы можем ввести систему отсчета, движущуюся вместе с телом, и наблюдать за телом из этой системы. Тогда тело будет действительно покоиться. Во-вторых, принцип Даламбера акцентирует внимание на силах, а не на движущемся теле, и равновесие данной системы сил можно рассматривать безотносительно к состоянию движения тела, на которое эти силы действуют. Согласно критерию равновесия для произвольной системы сил, должна обратиться в нуль полная виртуальная работа всех сил. Этот критерий использует *виртуальные*, а не реальные перемещения, и потому он равно применим и к покоящимся, и

к движущимся массам. Так как виртуальные перемещения представляют собой хотя и возможный, но все же чисто математический эксперимент, то их можно произвести *в некоторый определенный момент времени* (даже если бы подобные перемещения и потребовали физически бесконечных скоростей). В такой фиксированный момент времени реальное движение тела не играет роли.

Даламбер обобщил свои рассуждения о равновесии одной частицы на произвольную механическую систему. Принцип Даламбера утверждает, что *любая система сил находится в равновесии, если мы добавляем к приложенным (активным) силам силы инерции. Это означает, что полная виртуальная работа всех приложенных сил и сил инерции равна нулю на обратимых перемещениях*. Представляется удобным дать особое название силе, получающейся в результате сложения силы инерции $\mathbf{I}_k$ и заданной силы $\mathbf{F}_k$, действующей на частицу. Мы назовем эту суммарную силу «эффективной силой»¹ и обозначим ее через $\mathbf{F}_k^e$:

$$\mathbf{F}_k^e = \mathbf{F}_k + \mathbf{I}_k. \quad (4.1.5)$$

Принцип Даламбера можно теперь сформулировать следующим образом: *полная виртуальная работа эффективных сил равна нулю для всех обратимых виртуальных перемещений, совместимых с заданными кинематическими условиями*

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^e \cdot \delta \mathbf{R}_k \equiv \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{A}_k) \cdot \delta \mathbf{R}_k = 0. \quad (4.1.6)$$

Заметим, что приложенные силы могут действовать лишь на часть точек системы, в то время как эффективные силы $\mathbf{F}_k^e$ существуют везде, где только имеются массы, участвующие в ускоренном движении.

Заданная система приложенных сил в общем случае не находится в равновесии, так как для этого требуется выполнение специальных условий. Полная виртуальная работа этих сил обычно отлична от нуля. Однако само движение системы восполняет этот недостаток. Тело движется таким

¹ Синг и Гриффит в своей книге *The Principles of Mechanics* (см. библиографию), а также некоторые другие авторы используют название «эффективная сила» для произведения массы на ускорение, т. е. для силы инерции, взятой с обратным знаком.

образом, чтобы дополнительные инерционные силы, порождаемые движением, привели баланс работы к нулю. Таким путем из принципа Даламбера *следуют уравнения движения произвольной механической системы.*

В отличие от приложенных (активных) сил, которые обычно получаются путем дифференцирования одной силовой функции (моногенные силы), силы инерции имеют полигенный характер. В то время как виртуальная работа активных сил может быть записана в виде полной вариации силовой функции

$$\overline{\delta w} = \delta U, \quad (4.1.7)$$

виртуальная работа сил инерции

$$\overline{\delta w^i} = - \sum m_k \mathbf{A}_k \cdot \delta \mathbf{R}_k. \quad (4.1.8)$$

Это просто дифференциальная форма, не сводимая к вариации скалярной функции. (Ниже мы увидим, как этот недостаток может быть возмещен при помощи интегрирования по времени.)

Уравнение Ньютона (4.1.1) справедливо только в случае, когда масса постоянна. Если масса меняется во время движения, то основной закон движения должен быть записан в виде

$$\frac{d}{dt} (mv) = F, \quad (4.1.9)$$

т. е. «скорость изменения импульса равна движущей силе». Соответственно сила инерции $\mathbf{I}$ должна быть определена как скорость изменения импульса, взятая с обратным знаком

$$\mathbf{I} = - \frac{d}{dt} (mv). \quad (4.1.10)$$

В обычном случае постоянной массы это общее определение совпадает с (4.1.3).

Определение силы инерции требует наличия «абсолютной системы отсчета», в которой измеряется ускорение. Это внутренний недостаток ньютоновой механики, который остро ощущался самим Ньютоном и его современниками. Разрешение этой трудности появилось лишь недавно, в связи с величайшим достижением Эйнштейна, общей теорией относительности.

Можно спросить, в чем же *физический* смысл принципа Даламбера. Из определения «эффективной силы» (4.1.5) следует, что эта сила равна нулю для свободной частицы и равна силе реакции, взятой с обратным знаком, для частицы, на которую наложена некоторая связь. Следовательно,

применение принципа виртуальных перемещений к эффективной силе F^e эквивалентно предположению, что «виртуальная работа сил реакции равна нулю на любых виртуальных перемещениях, совместимых со связями». Мы таким образом вновь приходим к тому же «постулату А», который мы сформулировали раньше в гл. III, п. 1. Принцип Даламбера распространяет действие этого постулата из области статики на область динамики, не производя в нем никаких изменений.

Резюме. Принцип Даламбера вводит новую силу, силу инерции, определенную как произведение массы на ускорение, взятое с обратным знаком. Добавив эту силу к активным силам, получим равновесие, означающее выполнение условия принципа виртуальных перемещений. Действие последнего распространяется таким образом из области статики на область динамики.

2. Роль принципа Даламбера в механике. Принцип Даламбера дает полное решение задачи механики. Все остальные принципы механики — это просто математически другие формулировки принципа Даламбера. Наиболее развитый вариационный принцип механики, принцип Гамильтона, может быть получен из принципа Даламбера путем некоторого математического преобразования. В тех случаях, когда оба принципа применимы, они эквивалентны. Однако принцип Гамильтона относится лишь к голономным системам, в то время как принцип Даламбера равно применим и к голономным и к неголономным системам.

Принцип Даламбера более элементарен по сравнению с остальными вариационными принципами, так как он не требует интегрирования по времени. Недостатком принципа является то, что виртуальная работа сил инерции есть полигенная величина, не сводимая к одной скалярной функции. Это делает его неудобным при использовании криволинейных координат. Однако во многих простых задачах динамики, которые могут быть рассмотрены при помощи прямоугольных координат или векторными методами вообще без всяких координат, принцип Даламбера очень полезен.

В некоторых задачах принцип Даламбера оказывается даже более гибким, чем более развитый принцип наименьшего действия. Дифференциальные уравнения движения, определяющие ускорения движущейся системы, являются уравнениями второго порядка. Ускорение $\ddot{q}_i$ — это вторые производные координат q_i или первые производные скоростей $\dot{q}_i$. Может, однако, оказаться более удобным — и такая ситуация встречается, в частности, в динамике твердого тела — характеризовать движение при помощи некоторых скоростей, не являющихся производными действительных координат. Такие величины называют «кинематическими переменными». Хорошим примером является вращение волчка вокруг оси симметрии. Его можно охарактеризовать угловой скоростью вращения $\omega = d\bar{\varphi}/dt$, где $d\bar{\varphi}$ — просто бесконечно малый угол поворота, а не дифференциал от какого-либо угла φ , так как такой угол φ существует лишь в случае, если ось симметрии закреплена. Тем не менее и при незакрепленной оси удобно использовать $d\bar{\varphi}/dt$ как величину, характеризующую движение волчка. В принципе наименьшего действия нельзя использовать кинематические переменные, а в принципе Даламбера можно.

Принцип Даламбера важен еще в другом отношении. Делая возможным использование движущихся систем отсчета, этот принцип предвосхищает революционную идею Эйнштейна об относительности движения. Он объясняет также, оставаясь в пределах ньютоновой физики, происхождение тех «фиктивных сил», которые появляются в движущихся системах координат.

Резюме. Принцип Даламбера требует введения полигенной величины для составления виртуальной работы сил инерции; поэтому он, в отличие от принципа наименьшего действия, не дает возможности использовать преимущества криволинейных координат. Однако этот принцип чрезвычайно полезен в задачах, где возможно использование кинематических переменных (неголономные скорости) и движущихся систем отсчета.

В следующих пунктах мы остановимся на применении принципа Даламбера к ряду типичных задач, в частности, задач, связанных с использованием движущихся систем отсчета. Первое приложение касается вывода закона сохранения энергии, хорошо известного из элементарной механики. Этот вывод, однако, представляет интерес, так как он показывает пределы применимости закона.

3. Закон сохранения энергии как следствие принципа Даламбера. Хотя принцип Даламбера применим, вообще говоря, к полигенным силам, имеется один частный случай, когда для моногенных сил он допускает интегрирование. Этот особый случай приводит к одному из наиболее фундаментальных законов механики, закону сохранения энергии.

Рассмотрим общую формулировку принципа Даламбера, данную в уравнении (4.1.6). Пусть активные силы — моногенные, получаемые из функции потенциальной энергии. Тогда работа активных сил равна вариации потенциальной энергии, взятой с обратным знаком, и принцип Даламбера можно записать в виде

$$\delta V + \sum m_k \mathbf{A}_k \cdot \delta \mathbf{R}_k = 0. \quad (4.3.1)$$

Второй член, работа сил инерции со знаком минус, не может быть записан в общем случае как вариация какой-либо величины. Однако распорядимся вариацией $\delta \mathbf{R}_k$, являющейся произвольной пробной вариацией радиус-вектора $\mathbf{R}_k$, особым образом. Выберем в качестве пробных перемещений *действительные* перемещения, происходящие за время dt . Это означает, что мы заменяем $\delta \mathbf{R}_k$ на $d\mathbf{R}_k$ и имеем дело с частным случаем вариационного выражения (4.3.1).

Для этой выбранной особым образом вариации виртуальное изменение δV потенциальной энергии совпадает с действительным изменением dV , происходящим за время dt . Более того, второй член в (4.3.1) также становится дифференциалом некоторой величины, что можно увидеть, если заменить ускорение $\mathbf{A}_k$ второй производной радиус-вектора $\mathbf{R}_k$

$$\begin{aligned} \sum m_k \ddot{\mathbf{R}}_k \cdot d\mathbf{R}_k &= \sum m_k \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \dot{\mathbf{R}}_k dt = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2 \right) dt = dT, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

где T — кинетическая энергия механической системы

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k \mathbf{v}_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2. \quad (4.3.3)$$

Уравнение (4.3.1) теперь принимает вид

$$dV + dT = d(V + T) = 0 \quad (4.3.4)$$

и может быть проинтегрировано, что дает

$$T + V = \text{const} = E. \quad (4.3.5)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии остается при движении постоянной. Эта фундаментальная теорема называется «законом сохранения энергии». Мы получили скалярное уравнение, являющееся лишь одним из интегралов уравнений движения. Хотя его одного и недостаточно для полного решения задачи о движении системы (исключая случай одной степени свободы), это тем не менее один из наиболее фундаментальных и универсальных законов природы, который при соответствующих модификациях выполняется не только в механических, но и во всех физических процессах. Постоянная E называется «постоянной энергии».

На первый взгляд может показаться, что отождествление $\delta \mathbf{R}_k$ с $d\mathbf{R}_k$ возможно *всегда*, потому что среди кинематически возможных перемещений обязательно должно быть и действительное перемещение. Однако этот почти очевидный аргумент не всегда безупречен. Он справедлив для свободных частиц, но не всегда правилен в случае механической системы со связями. Конечно, положение C -точки в пространстве конфигураций можно изменять произвольно, и мы всегда можем отождествить δq_i с dq_i . Это, однако, не всегда означает, что вариации $\delta \mathbf{R}_i$ положений частиц совпадают с действительными перемещениями $d\mathbf{R}_i$. Следует иметь в виду, что вариации накладываются *мгновенно*, в определенный момент времени, что означает возникновение бесконечных скоростей, в то время как реальное движение происходит с конечными скоростями. Сравнив уравнения (1.2.8) с уравнениями (1.8.3), мы увидим, что в первом случае отождествление δq_i с dq_i приводит к равенству $\delta \mathbf{R}_i = d\mathbf{R}_i$, а во втором случае — нет. Уравнения первого типа выпол-

няются для «склерономных» систем, когда заданные кинематические связи не содержат явно времени. Уравнения же второго типа выполняются для «реономных» систем, когда кинематические связи зависят явно от времени.

Подобные соображения справедливы и относительно потенциальной энергии V . Если V — функция одних только q_i , то выбор $\delta q_i = dq_i$ приводит к $\delta V = dV$, если же V зависит явно от времени, то этого не происходит. Так как V определена как $-U$, то наш результат означает, что для сохранения энергии силовая функция U не должна зависеть явно от времени.

Таким образом, применение закона сохранения энергии следует ограничить системами, *склерономными как в отношении силовой функции, так и в отношении кинематических условий*. Кроме того, наш вывод неявно предполагает, что массы m_k — константы.

Резюме. Если в принципе Даламбера отождествить вариации с действительными перемещениями, происходящими за время dt , то полученное уравнение можно проинтегрировать. Это приводит к закону сохранения энергии, который утверждает, что в процессе движения сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Для справедливости этого вывода необходимо, чтобы в процессе движения массы частиц были постоянными, а силовая функция и заданные связи системы были склерономными, т. е. не зависели от времени.

4. Фиктивные силы при ускоренном движении систем отсчета. Гипотеза Эйнштейна об эквивалентности. Глубокая справедливость принципа Даламбера может быть проверена при помощи совершенно точных физических экспериментов, и выводы из этого принципа подтверждаются наблюдениями. Принцип Даламбера предполагает, что сила инерции — это просто еще одна дополнительная сила, действующая подобно всем остальным силам. Для определения силы инерции нам приходится использовать «абсолютную систему

отсчета». Если система отсчета, в которой измеряются ускорения, движется относительно абсолютной системы, то сила инерции в движущейся системе отсчета — это уже не истинная сила инерции: к ней следует добавить дополнительные члены. Согласно принципу Даламбера, корректирующие члены, входящие в силу инерции из-за движения системы

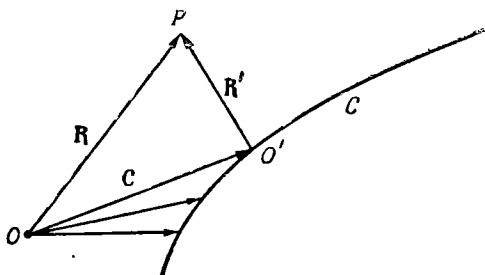


Рис. 4.

отсчета, могут также рассматриваться как приложенные силы, порождаемые внешним полем сил. Таким образом, возникает понятие «фиктивных сил» в движущихся системах отсчета.

В дальнейшем нам понадобится сравнение между двумя системами отсчета, одна из которых «находится в абсолютном покое», а другая движется. Мы будем называть их «системой S » и «системой S' » и условимся обозначать соответствующие величины в обеих системах одинаковыми буквами, отмечая величины из системы S' штрихами. Особенно интересно сравнить измерения в системах S и S' трех основных кинематических величин: радиуса-вектора R , скорости v и ускорения A движущейся частицы.

Пусть сначала система отсчета движется чисто *поступательно*, подобно лифту, который может двигаться вверх и вниз с произвольными ускорениями.

Такое поступательное движение системы отсчета можно охарактеризовать следующим образом. Начало координат O' подвижной системы движется по заданной кривой C , описываемой вектором C , который является функцией времени t . Радиусы-векторы R и R' связаны между собой соотношением (рис. 4)

$$\mathbf{R} = \mathbf{C} + \mathbf{R}'. \quad (4.4.1)$$

Дважды дифференцируя по времени это соотношение, получаем

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{C}} + \ddot{\mathbf{R}}'. \quad (4.4.2)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{C}} + \mathbf{A}' \quad (4.4.3)$$

или, умножив на $-m$,

$$\mathbf{I} = -m\ddot{\mathbf{C}} + \mathbf{I}'. \quad (4.4.4)$$

Отсюда видно, что сила инерции, которую, согласно принципу Даламбера, нужно добавить к приложенным силам $\mathbf{F}$, состоит из двух частей. Величина $-m\ddot{\mathbf{C}}$ — это часть истинной силы инерции; появление этого члена связано с тем, что использованная система отсчета движется относительно абсолютной системы. Этот дополнительный член, порождаемый движением системы отсчета и добавляемый к относительной силе инерции $\mathbf{I}'$ в этой системе, называется «фиктивной силой». Это название очень точно указывает на тот факт, что этой силы не существует в абсолютной системе отсчета и что она возникает лишь из-за движения нашей системы отсчета относительно абсолютной. Это название в то же время будет дезориентирующим, если, исходя из него, считать, что эта сила не столь «реальна», как остальные силы. При движении системы отсчета фиктивная сила является совершенно реальной и не отличается от других приложенных сил. Предположим, что наблюдатель не знает, что его система отсчета движется равноускоренно. Тогда из чисто механических наблюдений он не сможет установить этого факта. Согласно принципу Даламбера, физический процесс определяется суммой приложенной силы $\mathbf{F}$ и силы инерции $\mathbf{I}$. Способа разделить эти силы не существует. Если физик, не знающий о своем движении, будет считать фиктивную силу $-m\ddot{\mathbf{C}}$ приложенной силой, то он не придет к противоречию с фактами.

Таково логическое следствие принципа Даламбера. Предположим, что истинная сила инерции $\mathbf{I}$ и сила инерции $\mathbf{I}'$, измеренная в движущейся системе, связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{I} = \mathbf{J} + \mathbf{I}'. \quad (4.4.5)$$

Эффективная сила, действующая в движущейся системе, есть

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} + \mathbf{J} + \mathbf{I}'. \quad (4.4.6)$$

Поскольку механическое действие определяется лишь эффективной силой, постольку можно с равным основанием считать $\mathbf{F}^e$ суммой $\mathbf{F}$ и $\mathbf{J} + \mathbf{I}'$ либо суммой $\mathbf{F} + \mathbf{J}$ и $\mathbf{I}'$. В первом случае мы отмечаем тот факт, что наша система отсчета движется и что это движение создает силу $\mathbf{J}$ как часть силы инерции. Во втором случае мы забываем о движении нашей системы отсчета и интерпретируем силу $\mathbf{J}$ как дополнительную приложенную силу, действующую на частицу.

Предположим, что мы находимся в закрытой лаборатории; пусть в некоторый момент времени поле тяжести внезапно исчезло, и лаборатория в этот же момент начинает двигаться вверх с постоянным ускорением $\mathbf{G}$ («опыт в ящике Эйнштейна»). Тогда принцип Даламбера утверждает, что никакой механический эксперимент не сможет указать на произошедшее изменение, потому что невозможно выбрать между следующими двумя гипотезами:

1. Наша система отсчета движется вверх с постоянным ускорением $\mathbf{G}$; поля гравитации не существует.

2. Наша система отсчета находится в покое, но имеется поле гравитации, которое действует вниз на каждую массу m с силой $m\mathbf{G}$.

Эта «гипотеза об эквивалентности» была предложена Эйнштейном при его ранних попытках раскрыть загадку гравитации, до создания общей теории относительности. С точки зрения чистой механики гипотеза об эквивалентности есть прямое следствие принципа Даламбера. Эйнштейн возвел его в общий принцип природы. Было бы заслуженно называть фиктивную силу

$$\mathbf{E} = -m\ddot{\mathbf{C}}, \quad (4.4.7)$$

которая, согласно принципу Даламбера, действует в поступательно ускоряющейся системе координат, «силой Эйнштейна». Отметим, что *все фиктивные силы, поскольку они порождены силой инерции $-\mathbf{m}\mathbf{A}$, пропорциональны инерт-*

ной массе m . Тот опытный факт, что гравитационная масса всегда пропорциональна инертной массе, был путеводной нитью, приведшей Эйнштейна к утверждению, что сила гравитации есть фиктивная сила.

а) Парашютист, прыгающий с самолета, переживает в первый момент своего падения особое ощущение, вызванное тем, что он становится абсолютно невесомым. Фиктивная сила, возникающая при падении, компенсирует силу гравитации. По мере раскрытия парашюта вес постепенно восстанавливается. б) Подобное ощущение уменьшения веса возникает, хотя и в меньшей степени, в первый момент после начала движения лифта вниз. Наоборот, при замедлении движения лифта перед остановкой наш кажущийся вес возрастает. в) Когда автобус трогается с места, нас толкает назад, когда он останавливается — вперед. г) Ускорение и замедление поезда можно измерить при помощи чувствительных пружинных весов, укрепленных на стене, перпендикулярной направлению движения. Все эти явления иллюстрируют принцип Даламбера.

Резюме. Ускоренное движение системы отсчета вызывает эффект, эквивалентный появлению некоторых дополнительных внешних сил. Эти силы называются «силами Даламбера» или «фиктивными силами», потому что они образуются вследствие движения системы отсчета и отсутствуют в абсолютной системе. Фиктивная сила, возникающая при движении системы отсчета с постоянным ускорением, аналогична однородному гравитационному полю.

5. Фиктивные силы во вращающейся системе отсчета. Любое движение жесткой системы отсчета можно рассматривать как поступательное движение плюс вращение. После изучения чисто поступательного движения системы перейдем к случаю чистого вращения. Общая задача представляет собой суперпозицию этих двух задач.

Если начала координат обеих систем совмещены, то радиусы-векторы $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ в абсолютной системе S и движущейся системе S' одинаковы

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}'. \quad (4.5.1)$$

Тем не менее скорости и ускорения, измеренные в обеих системах, различаются, так как скорость изменения положе-

ния точки различна в обеих системах. Если некоторый вектор $\mathbf{B}$ вращается вместе с системой S' и потому постоянен в этой системе, то, наблюдаемый из системы S , он совершает за время dt бесконечно малый поворот

$$d\mathbf{B} = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}) dt \quad (4.5.2)$$

[см. (3.2.4)], где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения системы S' относительно S . Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}, \quad (4.5.3)$$

в то время как

$$\frac{d'\mathbf{B}}{dt} = 0. \quad (4.5.4)$$

Введенное здесь обозначение d'/dt относится к операции наблюдения скорости изменения какой-либо величины в движущейся системе S' .

Для вектора $\mathbf{B}$, не постоянного в S' , так что $d'\mathbf{B}/dt \neq 0$, мы найдем, используя принцип суперпозиции бесконечно малых величин,

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{d'\mathbf{B}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}. \quad (4.5.5)$$

Применив это уравнение к радиусу-вектору $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$, получим

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d'\mathbf{R}'}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}'. \quad (4.5.6)$$

Отсюда следует соотношение между скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}'. \quad (4.5.7)$$

Далее, чтобы получить соотношение между абсолютным и относительным ускорениями $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$, продифференцируем уравнение (4.5.7)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R}' + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{R}'}{dt}. \quad (4.5.8)$$

Правую часть выражения (4.5.8) можно преобразовать с тем, чтобы выразить все через величины, принадлежащие системе S' . В результате получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}') + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R}'. \quad (4.5.9)$$

Умножив на $-m$, придем к соотношению между силами инерции $\mathbf{I}$ и $\mathbf{I}'$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}' - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}') - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R}'. \quad (4.5.10)$$

В дальнейшем мы больше не будем проводить сравнения между абсолютной и вращающейся системами, *оставаясь все время во вращающейся системе S'* . Поэтому мы опустим штрих, подразумевая, что все величины относятся к S' . Из (4.5.10) видно, что вращение системы отсчета приводит к появлению трех фиктивных сил различного характера. Третий член в (4.5.10) может быть преобразован в

$$\mathbf{C} = m\Omega^2 \mathbf{R}_\perp, \quad (4.5.11)$$

где $\mathbf{R}_\perp$ означает компоненту радиуса-вектора $\mathbf{R}$, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{\Omega}$. Это сила моногенной природы, так как ее можно получить из потенциальной энергии

$$\varphi = -\frac{m}{2} \Omega^2 R_\perp^2. \quad (4.5.12)$$

Она называется «центробежной силой». На Земле, вращающейся вокруг своей оси, линия отвеса указывает направление равнодействующей силы гравитации и центробежной силы. Из принципа Даламбера следует, что их нельзя разделить ни в одном эксперименте.

Совершенно другую природу имеет второй член

$$\mathbf{B} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.5.13)$$

зависящий от скорости движущейся частицы. Он всегда перпендикулярен скорости и поэтому не совершает работы. Эта сила называется «силой Кориолиса». Ее горизонтальная компонента может быть обнаружена с помощью знаменитого опыта Фуко с прецессирующим маятником — первой механической демонстрацией вращения Земли.

Наличие вертикальной компоненты можно продемонстрировать с помощью замечательного эксперимента венгерского физика Этвеша, который взял химические весы и заставил их вращаться вокруг вертикальной оси, с постоянной угловой скоростью предварительно сняв с них обе чашки. Коромысло весов вращалось в горизонтальной плоскости, причем точка на правой части коромысла

и симметрично расположенная точка на левой части коромысла имели скорости, равные по величине и противоположные по направлению. Сила Кориолиса, действуя то вверх, то вниз, приводила к появлению периодического вращающего момента, действовавшего на коромысло и вызывавшего вынужденные колебания весов (максимум момента достигается, когда коромысло расположено по меридиану; при прохождении направления запад — восток вращающий момент обращается в нуль). Хотя эффект получался очень маленьким, его можно было наблюдать в условиях резонанса, выбрав частоту вращения так, чтобы она совпадала с собственной частотой колебаний весов.

Последний член в (4.5.10) имеется лишь в том случае, когда вектор угловой скорости изменяется либо по направлению, либо по величине. Эта третья фиктивная сила не имеет общепринятого названия. Мы будем называть ее «силой Эйлера» в знак признания выдающегося значения исследований Эйлера в этой области механики. Положив

$$\mathbf{K} = -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R}, \quad (4.5.14)$$

окончательно получим эффективную силу $\mathbf{F}^e$, действующую во вращающейся системе, в виде

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} + \mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{K} + \mathbf{I} \quad (4.5.15)$$

(приложенная сила + центробежная сила + кориолисова сила + сила Эйлера + сила инерции).

Резюме. Во вращающейся системе координат появляются фиктивные силы: центробежная и кориолисова. Если к тому же скорость вращения непостоянна, то появляется третья фиктивная сила, «сила Эйлера».

6. Динамика твердого тела. Движение центра масс. В качестве последней иллюстрации действия фиктивных сил и принципа Даламбера рассмотрим динамику твердого тела, которое может свободно перемещаться в пространстве. Предположим, что наблюдатель, производящий измерения, находится в системе отсчета, связанной с телом. В этой системе отсчета тело покоится и потому находится в равновесии.

Как было показано в гл. III, п. 2, для равновесия твердого тела требуется выполнение двух векторных условий:

сумма всех сил и сумма всех моментов должны обратиться в нуль. В настоящем пункте мы рассмотрим лишь первое условие.

При вычислении равнодействующей силы F^e следует иметь в виду, что кроме приложенной силы F имеются еще фиктивные силы, действующие на тело. Это, во-первых, «сила Эйнштейна» (4.4.7), появляющаяся вследствие поступательного движения твердого тела, и, во-вторых, «центробежная сила» (4.5.11) и «сила Эйлера» (4.5.14), связанные с вращением тела (кориолисова сила B и сила инерции I выпадают, так как в нашей системе отсчета точки тела не имеют ни скоростей, ни ускорений). Пусть начало координат нашей системы отсчета O' совпадает с центром масс. Это означает, что

$$\sum mR = 0. \quad (4.6.1)$$

Задача 1. Показать, что в нашей системе отсчета равнодействующая центробежных сил обращается в нуль.

Задача 2. Показать, что в нашей системе отсчета равнодействующая сил Эйлера обращается в нуль.

Так как в выбранной системе отсчета равнодействующие центробежных сил и сил Эйлера обращаются в нуль, должно выполняться условие равновесия между приложенными силами и силами Эйнштейна. Это приводит к условию

$$\bar{F} - \sum m\ddot{C} = 0 \quad (4.6.2)$$

или

$$\overline{m\ddot{C}} = \bar{F}, \quad (4.6.3)$$

где

$$\overline{m} = \sum m. \quad (4.6.4)$$

Ввиду того что $\ddot{C}$ — ускорение центра масс, уравнение (4.6.3) выражает хорошо знакомую теорему о движении центра масс: *центр масс твердого тела движется, как частица с массой, равной полной массе тела, на которую действует равнодействующая всех сил, приложенных к твердому телу.*

Резюме. Закон, по которому движется центр масс твердого тела, может быть получен из того факта, что приложенные силы и силы Эйнштейна, действующие в системе отсчета, жестко связанной с телом, находятся в равновесии.

7. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера. Переходим ко *второму* условию равновесия твердого тела, свободно движущегося в пространстве: сумма всех моментов должна обратиться в нуль.

Задача 1. Показать, что в нашей системе отсчета результирующий момент сил Эйнштейна обращается в нуль.

Так как силы Эйнштейна не имеют результирующего момента, то должна обратиться в нуль сумма моментов следующих трех категорий сил: приложенных сил, центробежных сил и сил Эйлера.

Введем прямоугольную систему координат с осями x, y, z и началом в центре масс. Пусть оси этой системы жестко связаны с телом и совпадают с «главными осями инерции». Это означает, что в нашей системе координат равны нулю «произведения инерции»

$$\sum m y z = \sum m z x = \sum m x y = 0. \quad (4.7.1)$$

Кроме того, введем общепринятые обозначения

$$\begin{aligned} \sum m (y^2 + z^2) &= A, \\ \sum m (z^2 + x^2) &= B, \\ \sum m (x^2 + y^2) &= C. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Задача 2. Показать, что компоненты результирующего момента центробежных сил (4.5.11) равны

$$(B - C) \omega_y \omega_z, \quad (C - A) \omega_z \omega_x, \quad (A - B) \omega_x \omega_y. \quad (4.7.3)$$

Задача 3. Показать, что компоненты результирующего момента сил Эйлера (4.5.14) равны

$$-A\dot{\omega}_x, \quad -B\dot{\omega}_y, \quad -C\dot{\omega}_z. \quad (4.7.4)$$

Обозначим компоненты результирующего момента $\bar{\mathbf{M}} = \sum (\mathbf{R} \times \mathbf{F})$ приложенных сил через

$$\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z. \quad (4.7.5)$$

Условие обращения в нуль суммы моментов (4.7.3), (4.7.4) и (4.7.5) приводит к уравнениям Эйлера

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x - (B - C) \omega_y \omega_z &= \bar{M}_x, \\ B\dot{\omega}_y - (C - A) \omega_z \omega_x &= \bar{M}_y, \\ C\dot{\omega}_z - (A - B) \omega_x \omega_y &= \bar{M}_z. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Эти знаменитые уравнения описывают изменение со временем положения мгновенной угловой скорости вращения Ω относительно системы координат, связанной с телом. Они решают лишь часть динамической задачи о свободном вращении твердого тела и должны быть дополнены описанием движения системы координат, связанной с телом относительно системы неподвижных осей. Эта задача, как и ряд других задач динамики твердого тела, выходит за рамки данной книги, посвященной основным принципам механики и обращающейся к приложениям лишь для иллюстрации применения этих основных принципов. Для дальнейшего изучения этой темы читатель отсылается к учебникам, указанным в библиографии.

Резюме. Уравнения Эйлера, описывающие величину изменения вектора угловой скорости вращения твердого тела относительно осей координат, жестко связанных с телом и направленных вдоль его главных осей инерции, могут быть интерпретированы как условия обращения в нуль результирующего момента сил следующих трех категорий: сил Эйлера, центробежных сил и внешних сил.

8. Принцип наименьшего принуждения Гаусса. Принцип Даламбера не связан с понятием минимальности. В нем фигурирует бесконечно малая величина — виртуальная работа приложенных сил, к которой прибавлена виртуальная работа сил инерции, причем последняя величина не есть вариация какой-либо функции. Гаусс (1777—1855) предложил замечательную интерпретацию принципа Даламбера, вводящую в этот принцип понятие минимальности. Идею Гаусса можно изложить следующим образом.

Дифференциальные уравнения движения определяют ускорения $\ddot{q}_i$. Предположим, что мы встретились с такой задачей: в некоторый момент времени t заданы положения и скорости всех частиц механической системы; ускорениями же мы можем распоряжаться по своему усмотрению, не нарушая, однако, заданных связей. Замена действительного ускорения частицы $\mathbf{A}(t)$ в момент времени t величиной $\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ приводит к следующему. Положение частицы в момент времени $t + \tau$ определяется рядом Тэйлора

$$\mathbf{R}(t + \tau) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{v}(t)\tau + \frac{1}{2}\mathbf{A}(t)\tau^2 + \dots \quad (4.8.1)$$

Вариация ускорения приведет к изменению пути частицы. Вследствие того, что мы договорились не менять начальных значений координат и скоростей системы, вариации первых двух членов в правой части (4.8.1) равны нулю. Следовательно, считая τ достаточно малым и пренебрегая членами высшего порядка по τ , получаем

$$\delta \mathbf{R}(t + \tau) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{A}(t) \cdot \tau^2. \quad (4.8.2)$$

Это рассуждение совершенно не зависит от каких бы то ни было связей; связи учитываются лишь при выборе вариаций $\delta \mathbf{A}(t)$.

Далее, согласно принципу Даламбера,

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i) \cdot \delta \mathbf{R}_i = 0, \quad (4.8.3)$$

где в качестве $\delta \mathbf{R}_i$ можно взять любое виртуальное перемещение, совместимое со связями. Применим этот принцип в момент времени $t + \tau$, выбрав $\delta \mathbf{R}_i(t + \tau)$ в соответствии с (4.8.2). В результате получим

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i) \cdot \delta \mathbf{A}_i = 0. \quad (4.8.4)$$

Поскольку приложенные силы $\mathbf{F}_i$ заданы и не могут варьироваться, условие (4.8.4) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i) \cdot \delta \left(\frac{\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i}{m_i} \right) = 0, \quad (4.8.5)$$

откуда

$$\delta \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i)^2 = 0. \quad (4.8.6)$$

Гаусс ввел величину

$$Z = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}_i)^2, \quad (4.8.7)$$

назвав ее «мерой принуждения» движения, и сформулировал содержание уравнения (4.8.6) в виде «принципа наименьшего принуждения»: движение, осуществляющееся в действительности, таково, что величина Z принимает наименьшее возможное значение из всех значений, совместимых с данными кинематическими связями. Если частицы свободны от связей, то Z достигает своего абсолютного минимума, равного нулю. Мы получим тогда

$$m_i \mathbf{A}_i = \mathbf{F}_i, \quad (4.8.8)$$

т. е. закон движения Ньютона. Если связи ограничивают свободу выбора $\mathbf{A}_i$, то мы можем тем не менее минимизировать Z при данных дополнительных условиях. Решение вариационной задачи определит нам движение системы, реализующееся в действительности.

Пример. Частица, вынужденная оставаться на поверхности

$$z = f(x, y), \quad (4.8.9)$$

находится под действием силы $\mathbf{F}$. Найти уравнения движения.

Из уравнения связи (4.8.9) имеем

$$\ddot{z} = f_{xx} \ddot{x} + f_{yy} \ddot{y} + f_{xx} \dot{x}^2 + \dots \quad (4.8.10)$$

Требуется минимизировать величину

$$(F_1 - m\ddot{x})^2 + (F_2 - m\ddot{y})^2 + (F_3 - m\ddot{z})^2, \quad (4.8.11)$$

где $\ddot{z}$ задана уравнением (4.8.10). Независимыми переменными являются $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} F_1 - m\ddot{x} + (F_3 - m\ddot{z}) f_x &= 0, \\ F_2 - m\ddot{y} + (F_3 - m\ddot{z}) f_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.8.12)$$

Это и есть искомые уравнения движения.

Гаусс высоко ценил сформулированный им принцип, потому что этот принцип представляет собой полную физическую аналогию «методу наименьших квадратов» теории ошибок (открытому самим Гауссом и независимо Лежандром). Пусть задано некоторое функциональное соотношение, содержащее ряд параметров, которые должны быть определены экспериментально. Если число наблюдений равно числу неизвестных параметров, то вычисления производятся непосредственно. Однако при числе наблюдений, превышающем число параметров, уравнения становятся противоречивыми вследствие наличия ошибок наблюдений.

Под «ошибкой» понимается разность между предполагаемым значением функции и значением, наблюдаемым на опыте. В этом случае составляется сумма квадратов всех отдельных ошибок и параметры задачи определяются из того условия, чтобы эта сумма была минимальной.

Принцип нахождения минимума величины Z полностью аналогичен только что сделанному наброску. $3N$ членам суммы (4.8.7) соответствует $3N$ наблюдений. Это число превышает количество неизвестных $\ddot{q}_i$ вследствие наличия m кинематических связей. «Ошибка» заменена разностью между приложенной силой и силой инерции — «массой, умноженной на ускорение». Даже множитель $1/m_i$ в выражении для Z может быть интерпретирован как «весовой коэффициент», по аналогии со случаем наблюдения нескольких различных величин, которые входят в уравнения с весами, соответствующими надежности полученных значений.

Хотя условие (4.8.6) требует лишь стационарности Z , можно легко доказать, что в данном случае стационарность всегда, без каких-либо дополнительных условий, означает наличие минимума. Это следует из того факта, что функция Z , будучи суммой существенно положительных членов, должна иметь где-то минимум. Следовательно, если условие стационарности имеет единственное решение, то это решение должно давать минимум величины Z . Единственность решения показывается следующим образом. В приведенном выше примере $\ddot{z}$ получилась в виде *линейной* функции $\dot{x}$ и $\dot{y}$. В общем случае, независимо от конкретного характера заданных кинематических условий, их двукратное дифференцирование всегда приводит к *линейным* соотношениям между ускорениями. После исключения при помощи этих условий лишних ускорений результирующее выражение для Z останется квадратичной формой от остальных ускорений, которые уже варьируются свободно. Следовательно, мы приходим к системе *линейных* уравнений, которая имеет единственное решение.

Гауссов принцип наименьшего принуждения является, таким образом, истинно минимальным принципом, подобно принципу наименьшего действия; притом гауссов принцип проще, так как он не требует интегрирования по времени. Это преимущество, однако, далеко не искупает того недо-

статка, что в принцип Гаусса входят *ускорения*, в то время как в принцип наименьшего действия — одни лишь скорости. Вследствие этого принцип Гаусса имеет меньшее значение. С другой стороны, он с одинаковым успехом может использоваться как при голономных связях, так и при неголономных, не теряя свойства минимальности; забегая вперед, укажем, что принцип наименьшего действия не может быть сформулирован в виде минимального принципа при неголономных связях или непотенциальных силах.

Герц¹ предложил замечательную геометрическую интерпретацию принципа Гаусса в частном случае, когда приложенные силы равны нулю. Он показал, что в этом случае мера принуждения Z может быть интерпретирована как «геодезическая кривизна» траектории C -точки, изображающей положение механической системы в $3N$ -мерном евклидовом пространстве с прямоугольными координатами $\sqrt{m_i}x_i$, $\sqrt{m_i}y_i$, $\sqrt{m_i}z_i$ (см. гл. I, пп. 4 и 5). Из-за наличия связей наша точка должна оставаться внутри определенного подпространства этого $3N$ -мерного пространства. Утверждение, что Z принимает минимальное значение, можно теперь сформулировать следующим образом: C -точка при движении стремится уменьшить кривизну своей траектории в каждой ее точке до минимального значения, допускаемого связями. Это означает, что траектория C -точки стремится стать возможно более прямой. Интерпретация Герца с помощью «прямейшего пути» роднит принцип Гаусса с принципом Якоби, который достигает той же самой цели гораздо более непосредственно, путем минимизации длины дуги в пространстве конфигураций. Герцовы «пути наименьшей кривизны» могут быть интерпретированы как *геодезические линии в искривленном пространстве конфигураций, которое погружено в евклидово $3N$ -мерное пространство Герца* (см. гл. I, п. 5).

Аппель² предложил другую формулировку принципа

¹ См. H e r t z H., Principles of Mechanics (London, Macmillan, 1900). Имеется русский перевод: Г е р ц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959.

² A p p e l l P. E., Sur une forme générale des équations de la dynamique (Mémoires des sciences mathém., fasc. I, Paris, Gauthier—Villars, 1925). См. также: А п п е л ь П., Теоретическая механика, т. II, Физматгиз, М., 1960, стр. 420—426.

Гаусса, сделавшую его более удобным для вывода уравнений движения в случае неголономных связей и в случае, когда желательно использовать кинематические переменные, о которых говорилось в п. 2.

Резюме. При помощи вариаций особого вида Гауссу удалось преобразовать принцип Даламбера в подлинно минимальный принцип, в котором отыскивается минимум некоторой скалярной величины, названной Гауссом «мерой принуждения»; при этом ускорения рассматриваются как переменные вариационной задачи. Будучи принципом минимума, принцип наименьшего принуждения аналогичен принципу наименьшего действия. Он проще, чем этот последний, так как не требует вариационного исчисления, поскольку отыскивается не минимум определенного интеграла, а минимум обычной функции. Большим недостатком принципа наименьшего принуждения является то, что он требует вычисления ускорений. Это, вообще говоря, приводит к гораздо более громоздким и трудоемким вычислениям. В то же время в принципе наименьшего действия все выводится из скалярной функции, не содержащей производных выше первого порядка.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Введение. Мы подошли, наконец, к типичным «вариационным принципам», в которых рассматривается минимум или, точнее, стационарное значение некоторого определенного интеграла. Полигенный характер силы инерции можно обойти при помощи интегрирования по времени. В результате такого подхода задача динамики сводится к исследованию некоторого скалярного интеграла. Из условия стационарности этого интеграла получаются все уравнения движения.

Несмотря на то, что имеется целый ряд вариационных принципов, связанных с именами Эйлера, Лагранжа, Якоби, Гамильтона, все эти принципы взаимосвязаны, и к ним ко всем подходит название «принцип наименьшего действия», если понимать этот термин в широком смысле слова.

При изложении вариационных принципов мы не будем придерживаться исторической последовательности, а начнем с «принципа Гамильтона», который является наиболее прямым и наиболее естественным преобразованием принципа Даламбера в минимальный принцип. Из него при некоторых ограничениях мы сможем получить более старые формы принципа, применявшиеся Эйлером и Лагранжем, а также принцип Якоби.

1. Принцип Гамильтона. В принципе Даламбера оперируют с неинтегрируемыми дифференциалами. Приравнивается нулю некоторая бесконечно малая величина $\delta \bar{\omega}^e$ — полная виртуальная работа приложенных и инерционных сил. Две составные части совершаемой работы, связанные с этими двумя категориями сил, резко различаются по своему характеру. Виртуальная работа приложенных сил — моногенный дифференциал, получаемый из силовой функции; виртуальную работу сил инерции нельзя получить из какой-либо одной функции — ее приходится выписывать для каждой частицы в отдельности. Это ставит силы инерции в очень невыгодное положение по сравнению с приложенными силами. Большое теоретическое и практическое значение имеет тот факт, что это положение может быть исправлено путем преобразования, которое придает принципу Даламбера моногенный характер. Хотя в неявном виде это использовалось еще Эйлером и Лагранжем, Га-

мильтон первый произвел преобразование принципа Даламбера, показав, что интегрированием по времени можно придать работе сил инерции моногенную форму.

Умножим величину $\delta \bar{\omega}^e$ на dt и проинтегрируем в интервале от $t = t_1$ до $t = t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{\omega}^e dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sum \left[\mathbf{F}_i - \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right] \cdot \delta \mathbf{R}_i dt. \quad (5.1.1)$$

Представим правую часть (5.1.1) в виде суммы двух слагаемых. Первое из них может быть записано в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{R}_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = - \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt. \quad (5.1.2)$$

(Мы предполагаем, что силовая функция не зависит от скоростей, и полагаем $V = -U$.) Во второй части можно выполнить интегрирование по частям

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{R}_i dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{R}_i) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} (\delta \mathbf{R}_i) dt. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Первый интеграл в (5.1.3) после интегрирования дает граничный член

$$- [m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{R}_i]_{t_1}^{t_2}, \quad (5.1.4)$$

Второй интеграл, с учетом коммутативности операций варьирования и дифференцирования [см. уравнение (2.9.3)], преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{R}_i dt &= \int_{t_1}^{t_2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m_i \cdot \delta (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) dt = \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} m_i v_i^2 dt. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Далее, просуммировав по всем частицам, окончательно получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \overline{\omega^e} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt - \\ - [\sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{R}_i]_{t_1}^{t_2}. \quad (5.1.6)$$

Вводя затем кинетическую энергию T механической системы, согласно определению (1.5.9), построим с ее помощью функцию

$$L = T - V. \quad (5.1.7)$$

Функция L , определенная как избыток кинетической энергии по сравнению с потенциальной, является наиболее важной величиной при математическом анализе задач механики. Эту функцию обычно называют «функцией Лагранжа».

С помощью функции Лагранжа выражение (5.1.6) можно записать в форме

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \overline{\omega^e} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - [\sum m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{R}_i]_{t_1}^{t_2}. \quad (5.1.8)$$

До сих пор вариации $\delta \mathbf{R}_i$ являлись произвольными виртуальными изменениями радиусов-векторов $\mathbf{R}_i$. Потребуем теперь, чтобы $\delta \mathbf{R}_i$ *обязательно обращались в нуль на концах интервала* t_1 и t_2 :

$$\delta \mathbf{R}_i(t_1) = 0, \\ \delta \mathbf{R}_i(t_2) = 0. \quad (5.1.9)$$

Это означает, что при $t = t_1$ и $t = t_2$ положение механической системы считается заданным и при этих граничных значениях t не допускаются никакие вариации. Мы говорим, что мы варьируем «при фиксированных граничных значениях», потому что начальное и конечное положения системы заданы. В этом случае граничный член в правой части (5.1.8) обращается в нуль и *интеграл по времени от виртуальной работы, совершенной эффективными силами, переходит в вариацию некоторого определенного интеграла*

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \overline{\omega^e} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta A, \quad (5.1.10)$$

где

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (5.1.11)$$

Так как принцип Даламбера требует, чтобы величина $\overline{\delta w}^e$ равнялась нулю в любой момент времени, левая часть (5.1.10) также должна быть равна нулю. Следовательно, принцип Даламбера можно сформулировать в виде

$$\delta A = 0. \quad (5.1.12)$$

Это и есть «принцип Гамильтона». Он утверждает, что движение произвольной механической системы происходит таким образом, что *определенный интеграл A приобретает стационарное значение по отношению к любым возможным вариациям положения системы, при которых начальное и конечное положения остаются фиксированными.*

Гамильтон, по существу, дал улучшенную математическую формулировку принципа, который был установлен еще в фундаментальных исследованиях Эйлера и Лагранжа; предложенная им операция интегрирования по времени также была известна уже Лагранжу. Поэтому название «принцип Гамильтона», данное Якоби, не привилось среди ученых прошлого столетия. Оно вошло в употребление, однако, благодаря ряду учебников, появившихся в более позднее время.

Рассуждения, которые привели нас к принципу Гамильтона, могут быть проведены и в обратном порядке. Мы можем сначала постулировать, что δA обращается в нуль для произвольных вариаций положения системы, а затем преобразовать δA в левую часть (5.1.10) и прийти к обращению в нуль величины $\overline{\delta w}^e$, т. е. к принципу Даламбера. Отсюда видно, что принцип Гамильтона и принцип Даламбера математически эквивалентны и их возможности одинаковы до тех пор, пока приложенные силы, действующие на механическую систему, являются моногенными. В случае полигенных сил преобразование принципа Даламбера в минимальный принцип, или, точнее говоря, в принцип стационарного значения, становится невозможным. Так как голономные кинематические связи механически эквивалентны моногенным силам, а неголономные связи — полигенным силам, то мы можем сказать, что *принцип Гамильтона применим к произвольной механической системе, характеризу-*

емой моногенными силами и голономными связями. Консервативности же сил и стационарности связей (т. е. их независимости от времени) *не* требуется.

В то время как в принципе Даламбера высказываются независимые суждения для каждого отдельного момента времени в процессе движения, принцип Гамильтона содержит лишь одно утверждение, охватывающее весь промежуток времени. В этом принципе движение рассматривается как нечто *целое*.

Это унифицирующее свойство вариационного принципа поистине замечательно. Хотя современная физика существенно отошла в своем развитии от старого курса вследствие появления теории относительности и квантовой теории, тем не менее идея о получении основных уравнений природы из вариационных принципов сохранилась. И уравнения теории относительности, и уравнения волновой механики получаются, подобно более старым уравнениям физики, из «принципа наименьшего действия». Только функцию Лагранжа L определяют по-разному.

Резюме. При помощи интегрирования по времени виртуальная работа сил инерции может быть преобразована в истинную вариацию. Таким образом, принцип Даламбера может быть математически переформулирован в принцип Гамильтона; последний требует стационарности определенного интеграла, взятого по времени, от функции Лагранжа L , где L — разность между кинетической и потенциальной энергиями. Варьирование должно производиться при фиксированных граничных положениях системы (и фиксированном интервале времени).

2. Уравнения движения Лагранжа и их инвариантность относительно точечных преобразований. При выводе принципа наименьшего действия были использованы прямоугольные координаты. Однако на механическую систему могут быть наложены связи; если эти связи голономны, то $3N$ прямоугольных координат системы могут быть выражены

через n обобщенных координат $q_1, \dots, q_n$, подобно тому как это было сделано в (1.2.8) и (1.8.3). Тогда и потенциальная, и кинетическая энергии становятся функциями обобщенных координат и обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$. Движение системы может быть теперь изображено при помощи одной S -точки в n -мерном пространстве конфигураций q_i . Можно, однако, сделать еще один шаг по пути геометризации динамики, приняв время t за дополнительное измерение и оперируя с $(n+1)$ -мерным «расширенным пространством конфигураций», содержащим обобщенные координаты и время t в качестве независимых переменных¹. В этом пространстве последовательные фазы движения изображаются последовательными точками кривой. Эта кривая, «мировая линия» S -точки, содержит в геометрической форме всю физическую историю данной механической системы.

Теперь варьирование положения системы в произвольный момент времени между t_1 и t_2 выглядит как варьирование S -кривой, т. е. мировой линии механической системы. Так как положения системы в моменты времени t_1 и t_2 заданы (так же, как и сами моменты времени t_1 и t_2), варьирование производится при фиксированных граничных значениях. Это означает, что варьированная кривая S' имеет те же самые концевые точки A и B . Время t не играет какой-либо особой роли в этом представлении и даже не обязательно должно рассматриваться как аргумент. Можно с равным успехом записать кривую S в параметрической форме, задав все q_i и время t как функции некоторого параметра τ .

Необходимые и достаточные условия стационарности интеграла действия (5.1.11) имеют вид (см. гл. II)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.2.1)$$

Следует особо отметить тот замечательный факт, что задача минимизации определенного интеграла совершенно не зависит от какой-либо особой системы отсчета. Пусть первоначальная система координат q_i при помощи точечного преобразования (1.4.3) заменена другой системой координат.

¹ Идея о введении времени t в качестве дополнительного измерения была впервые предложена Лагранжем в его *Mécanique Analytique* (1788).

Это точечное преобразование можно представить как отображение n -мерного q -пространства самого на себя (см. гл. I, п. 4). Кривая C (q, t) -пространства переходит в некоторую новую кривую $\bar{C}$. Варьированная кривая C' переходит в соответствующую вариацию $\bar{C}'$ кривой $\bar{C}$. Если при этом

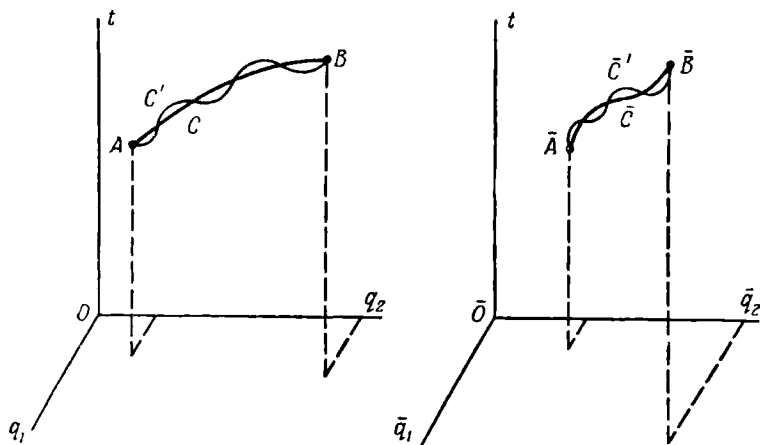


Рис. 5.

вариация в (q, t) -пространстве производится при фиксированных граничных значениях, то и в $(\bar{q}, t)$ -пространстве получится вариация с фиксированными граничными значениями (рис. 5). Обращение в нуль вариации интеграла A требует обращения в нуль вариации и в том случае, когда она записана в новых координатах. Следовательно, *дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа остаются справедливыми и в новой системе отсчета*. Функция Лагранжа L и интеграл действия A являются инвариантами преобразования. Мы просто подставляем в них вместо координат q_i их выражения через новые переменные $\bar{q}_i$. Вид функции L в результате замены переменных, возможно, изменится, но ее *численное значение* останется прежним. Аналогично остаются неизменными значения интеграла действия A , взятого вдоль кривой C и затем вдоль кривой $\bar{C}$. Каждое отдельное уравнение Лагранжа, с каким-либо опре-

деленным значением индекса i , не переходит в соответствующее уравнение в новых переменных. Однако *полная система уравнений* переходит в соответствующую систему в новых переменных¹, потому что полная система уравнений Лагранжа отражает факт обращения в нуль вариации интеграла действия A , а этот факт не зависит от какой-либо конкретной системы координат.

Поскольку t является просто еще одной переменной, наши рассуждения остаются в силе и в том случае, когда соотношения между старыми и новыми q_i зависят от времени t (см. гл. I, п. 8). Это имеет место, когда механические явления описываются в движущейся системе отсчета. *Уравнения движения Лагранжа остаются справедливыми и в произвольном образом движущейся системе отсчета.*

Инвариантность уравнений Лагранжа относительно произвольных точечных преобразований обусловила выдающуюся роль этих уравнений в развитии математической мысли. Эти уравнения оказались первым примером того «принципа инвариантности», который являлся одной из ведущих идей математики XIX столетия и который приобрел значение первостепенной важности в современной физике.

Инвариантность уравнений движения Лагранжа является одним из наиболее важных их свойств. Она позволяет использовать координаты, соответствующие особенностям задачи. Поскольку не существует общего метода решения уравнений Лагранжа, то лучшее, что можно сделать, это выбрать такую систему координат, в которой эти уравнения были бы, хотя бы частично, интегрируемы.

Вторым большим преимуществом принципа наименьшего действия по сравнению с принципом Даламбера является использование одной скалярной функции L . Теперь уже не нужно находить ускорения для каждой частицы и виртуальную работу, совершаемую всеми силами инерции. *Скалярная функция $L = T - V$ определяет собой всю динамику заданной системы.*

Задача 1. Пусть положение физического маятника определяется углом θ между плоскостью, проходящей через ось подвеса и центр масс, и вертикалью. Показать, что

¹ Поэтому, говоря о полной системе уравнений, мы употребляем термин «ковариантная», а не «инвариантная».

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2,$$

где I — момент инерции относительно оси подвеса, и что

$$V = Mgl(1 - \cos \theta),$$

где M — масса маятника, а l — расстояние от центра масс до оси подвеса.

Записать уравнение движения Лагранжа и проинтегрировать его в предположении, что угол θ мал.

Задача 2. Опишем положение планеты с помощью полярных координат r , θ . Показать, что

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2),$$

$$V = -\frac{f m M}{r},$$

в предположении, что Солнце неподвижно и находится в начале координат. Составить уравнения движения Лагранжа.

Задача 3. Записав положение сферического маятника длины l в сферических координатах r , θ , φ , показать, что

$$T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2),$$

$$V = mgl(1 - \cos \theta).$$

Составить уравнения движения Лагранжа.

Две основные функции T и V соответствуют двум величинам, которые приравниваются друг другу в уравнении Ньютона: «Произведение массы на ускорение равно силе». Это уравнение может быть интерпретировано как баланс между силой инерции и движущей силой. Подобный баланс может быть установлен и при аналитическом подходе путем разделения членов с двумя основными скалярами аналитической механики: кинетической энергией T и силовой функцией U . Уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (5.2.2)$$

Теперь n величин

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (5.2.3)$$

представляют собой n компонент силы инерции в пространстве конфигураций, а n величин

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial U'}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U'}{\partial q_i} \quad (5.2.4)$$

— соответственно n компонент движущей силы.

Обычно первый член в (5.2.4) выпадает из-за того, что U является функцией только от координат q_i . Более того, U заменяется на $-V$. Однако нет никаких внутренних причин для того, чтобы исключить возможность зависимости силовой функции от скоростей $\dot{q}_i$. В релятивистской механике такая возможность осуществляется: электромагнитная сила, действующая на заряженную частицу, может быть получена из силовой функции, зависящей от скорости.

Резюме. Принцип Гамильтона приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка — уравнениям движения Лагранжа. Эти уравнения обладают замечательным свойством инвариантности относительно произвольных преобразований координат.

3. Теорема о сохранении энергии как следствие принципа Гамильтона. Закон сохранения энергии, полученный раньше как следствие принципа Даламбера (см. гл. IV, п. 3), может быть теперь выведен из принципа Гамильтона. Попутно при этом выводятся общие соотношения, существующие между полной энергией механической системы и функцией Лагранжа L .

Используем снова тот частный способ варьирования, который мы применили раньше при выводе теоремы о сохранении энергии из принципа Даламбера. Пусть виртуальные перемещения δq_i в каждый момент времени совпадают с действительными перемещениями dq_i , происходящими за бесконечно малый промежуток времени $dt = \epsilon$. Другими словами, положим

$$\delta q_i = dq_i = \epsilon \dot{q}_i, \quad (5.3.1)$$

Задача 1. Изобразить эту вариацию графически в плоскости (q, t) , направив ось q вертикально вверх, и показать, что она сводится к *горизонтальному сдвигу влево истинной кривой* на величину ε . При этом следует иметь в виду, что время t в соответствии с обычными правилами *не* варьируется (см. гл. II, п. 8).

Выбранная нами вариация изменяет значения координат $q_i(t)$ и на концах интервала t_1 и t_2 ; поэтому здесь нельзя говорить о «вариации при фиксированных граничных значениях». Мы уже знаем, что уравнения движения получаются из принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (5.3.2)$$

при условии, что q_i не варьируются в граничных точках. Посмотрим, однако, как будет себя вести вариация интеграла действия, если мы *не выполним* условия варьирования при фиксированных граничных значениях, а проварьируем также и граничные значения координат. Из интегрирования по частям при преобразованиях вариации определенного интеграла [см. (2.10.4)] видно, что варьирование на концах интервала вызывает появление *граничного члена*. В результате получим

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (5.3.3)$$

Перед тем как продолжить наши рассуждения, введем одно очень важное обозначение. Частные производные функции Лагранжа по скоростям играют столь существенную роль во всех выводах аналитической механики, что они имеют особое название и обозначение. Положим

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.3.4)$$

и назовем эти p_i компонентами «обобщенного импульса», потому что в случае одной свободной частицы при прямоугольной системе координат величины p_1, p_2, p_3 совпадают с соответствующими компонентами импульса mv . В общем случае компоненты p_i не имеют ничего общего с элементарным определением импульса и должны рассматриваться как компоненты некоторого вектора в пространстве конфигураций. На фундаментальную важность величин p_i как некой

новой системы независимых переменных обратил внимание Гамильтон; он построил всю свою теорию, исходя из того факта, что с импульсами можно оперировать, как с новой совокупностью механических переменных. Однако даже и уравнения Лагранжа будут выглядеть значительно проще, если мы используем p_i в качестве промежуточных переменных и запишем уравнения движения в виде

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (5.3.5)$$

Уравнение (5.3.3) при использовании обобщенных импульсов принимает вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (5.3.6)$$

Для случая выбранной нами частной вариации (5.3.1) можно установить определенные соотношения между вариацией функции L и истинным бесконечно малым изменением L за время dt . Предположим, что наша система *склерономна*, т. е. что L не содержит явно времени (см. гл. I, п. 8)

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n). \quad (5.3.7)$$

Тогда сразу видно, что из условия (5.3.1) следует соответствующее уравнение для вариации функции L

$$\delta L = dL = \varepsilon \dot{L}, \quad (5.3.8)$$

откуда следует, что

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon \dot{L} dt = \varepsilon [L]_{t_1}^{t_2}, \quad (5.3.9)$$

в то время как правая часть (5.3.6) принимает вид

$$\left[\sum p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (5.3.10)$$

Окончательно уравнение (5.3.6) записывается следующим образом:

$$\left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (5.3.11)$$

Это означает, что величина $\sum p_i \dot{q}_i - L$ имеет одно и то же значение в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$. Поскольку границы

интервала t_1 и t_2 не входят явно в уравнения движения и могут быть выбраны произвольно, мы получаем

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \text{const.} \quad (5.3.12)$$

Эта фундаментальная теорема не предполагает каких-либо ограничений вида функции L , кроме требования ее независимости от времени t . Вместе с тем в приложениях вариационного исчисления в механике функция L обычно встречается в форме $T - V$, где и T и V — функции определенного вида: T представляет собой квадратичную форму скоростей $\dot{q}_i$ [см. (1.5.16)]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (5.3.13)$$

где a_{ik} — функции q_i , а V обычно вообще не зависит от скоростей. При этих условиях мы имеем

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k, \quad (5.3.14)$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T. \quad (5.3.15)$$

В результате уравнение (5.3.12) принимает вид

$$2T - (T - V) = T + V = \text{const} = E. \quad (5.3.16)$$

Это хорошо известный закон сохранения энергии.

Наш вывод показывает, что обычная формулировка теоремы о сохранении энергии: «сумма кинетической и потенциальной энергий в процессе движения остается постоянной» справедлива лишь при определенных ограничивающих условиях. Недостаточно, чтобы система была склерономной. Необходимо, помимо этого, чтобы кинетическая энергия была квадратичной формой скоростей, а потенциальная энергия не содержала скоростей вообще. Встречаются, однако, механические системы с «гироскопическими членами», линейными относительно скоростей. Более того, в релятивистской механике кинетическая часть функции Лагранжа зависит от скоростей более сложным образом, чем в ньюто-

новой механике. Подобные системы, если они склерономны, *тоже удовлетворяют закону сохранения*. Но этот закон принимает более общую форму (5.3.12), которая имеет место при любом виде функции Лагранжа.

Заметим, что в случае механической системы с одной степенью свободы теорема (5.3.12) приводит к *полному интегрированию* задачи. Уравнение (5.3.12) имеет при этом форму

$$f(q, \dot{q}) = E, \quad (5.3.17)$$

откуда можно выразить $\dot{q}$

$$\dot{q} = \varphi(E, q). \quad (5.3.18)$$

После интегрирования получаем

$$t = \int \frac{dq}{\varphi(E, q)} + \tau, \quad (5.3.19)$$

что дает нам t как функцию q . Обратная функция определяет q через t с двумя константами интегрирования E и τ .

Задача 2. Решить задачу о линейном осцилляторе

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad V = \frac{1}{2} k x^2$$

при помощи теоремы о сохранении энергии.

Задача 3. Решить задачу о физическом маятнике, приведенную в п. 2, задача 1. (Здесь квадратура приводит к эллиптическому интегралу.)

Величину

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (5.3.20)$$

можно интерпретировать как «полную энергию» механической системы. Наряду с функцией Лагранжа она является наиболее важным скаляром, характеризующим механическую систему. Как мы увидим ниже, в гамильтоновой форме механики эта функция Λ отбирает первенство у функции Лагранжа L и, выраженная в соответствующих переменных, превращается в «функцию Гамильтона» H , которая полностью заменяет первоначальную функцию L .

Интересно выяснить, что происходит с полной энергией Λ в случае, когда система реономна, т. е. L зависит явно

от времени t

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (5.3.21)$$

В этом случае δL и dL уже не равны между собой, потому что вариация δL производится в *определенный момент времени*, а изменение dL происходит за интервал времени dt . Вместо (5.3.8) получается более общее соотношение

$$\delta L = dL - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \varepsilon \left(\dot{L} - \frac{\partial L}{\partial t} \right), \quad (5.3.22)$$

а уравнение (5.3.11) обобщается следующим образом:

$$\left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right]_{t_1}^{t_2} = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.3.23)$$

Отсюда видно, что полная энергия Λ теперь не является константой, а изменяется по закону

$$\Delta \Lambda = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5.3.24)$$

Задача 4. Математический маятник свисает с неподвижного блока. Другой конец нити находится в руках наблюдателя, который ее медленно выбирает, укорачивая таким образом длину маятника с постоянной скоростью (маятник Эренфеста). Пренебрегая трением, показать, что амплитуда колебаний увеличивается таким образом, что изменение полной энергии от одного положения $\theta = 0$ до следующего положения $\theta = 0$ задается выражением

$$\Delta E = - \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} E,$$

где E — постоянная энергии невозмущенного маятника.

Резюме. Для склерономных систем уравнения движения Лагранжа дают первый интеграл в форме $\sum p_i \dot{q}_i - L = E$. Это уравнение можно интерпретировать как закон сохранения энергии, если определить левую часть уравнения как полную энергию системы. Для обычных задач классической механики сумма $\sum p_i \dot{q}_i$ равна удвоенной кинетической энергии; в этом случае теорема о сохранении энергии принимает форму $T + V = E$.

4. Циклические (игнорируемые) координаты и их исключение. Выше уже упоминалось о том, что общего метода интегрирования уравнений Лагранжа не существует. Однако иногда оказывается возможным произвести *частичное* их интегрирование. Особенно важным примером такого положения является случай «циклических» или «игнорируемых» переменных.

Функция Лагранжа L , вообще говоря, зависит от всех координат q_i и скоростей $\dot{q}_i$. Однако может случиться, что некоторые q_k не входят в функцию Лагранжа, хотя соответствующие $\dot{q}_k$ в ней имеются. На особую важность подобных переменных для интегрирования уравнений Лагранжа впервые обратил внимание Раус¹, а затем несколько позже Гельмгольц². Раус назвал эти переменные «отсутствующими координатами», а Дж. Дж. Томсон употреблял названия «киностенические» или «скоростные координаты». Гельмгольц те же самые координаты называл «циклическими переменными», а в курсе Уиттекера (см. библиографию) используется название «игнорируемые координаты»³.

Как указывалось выше, после введения «импульсов» p_k в соответствии с определением (5.3.4) уравнения Лагранжа могут быть записаны в следующей форме:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}. \quad (5.4.1)$$

Если q_k — циклическая координата, то

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (5.4.2)$$

и (5.4.1) может быть сразу же проинтегрировано

$$p_k = \text{const} = c_k. \quad (5.4.3)$$

¹ Routh E. J., Dynamics of Rigid Bodies (Macmillan, 1877).

² Helmholtz H. V., Journal of Math., 97 (1884), 111.

³ Автор пользуется терминами «игнорируемые» и «киностенические координаты»; однако в соответствии со сложившейся в русской литературе терминологией мы в дальнейшем в большинстве случаев будем употреблять термин «циклические координаты». — Прим. перев.

Импульс, соответствующий циклической координате, остается постоянным в процессе движения. Эта важная теорема имеет много физических приложений.

Задача 1. Рассмотреть задачу о движении планет, сформулированную раньше в задаче 2, п. 2. Показать, что постоянство циклического импульса p_θ есть не что иное, как закон Кеплера о площадях.

Задача 2. Рассмотреть подобным же образом задачу о сферическом маятнике (п. 2, задача 3); дать интерпретацию постоянству циклического импульса.

Поскольку q_k отсутствует в частной производной $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$, а $\dot{q}_k$ в ней присутствует, из (5.4.3) можно выразить $\dot{q}_k$ через нециклические координаты и скорости. Для упрощения изложения ограничимся случаем одной циклической координаты; обобщение на случай любого их количества является очевидным.

Поставим индексы при координатах с таким расчетом, чтобы циклической оказалась *последняя* координата q_n , так что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = c_n; \quad (5.4.4)$$

отсюда

$$\dot{q}_n = f(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, c_n, t). \quad (5.4.5)$$

Теперь в уравнениях Лагранжа можно $\dot{q}_n$ везде заменить выражением (5.4.5); само же q_n в уравнениях отсутствует. Таким образом, задача интегрирования уравнений Лагранжа может быть сведена к задаче с одними лишь нециклическими координатами. После решения этой последней, когда q_i и $\dot{q}_i$ — уже известные функции t , их можно подставить в (5.4.5) и с помощью интегрирования определить q_n .

Поскольку циклические переменные столь легко исключаются после написания уравнений движения Лагранжа, то возникает естественный вопрос, нельзя ли произвести их исключение до написания уравнений еще при постановке самой вариационной задачи. Как известно, первая вариация интеграла

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n, t) dt \quad (5.4.6)$$

обращается в нуль для произвольных вариаций $\dot{q}_k$ при фиксированных граничных значениях. Исключив $\dot{q}_n$ с помощью (5.4.5), мы с самого начала сведем задачу от n к $n - 1$ степеням свободы и тем самым сразу существенно упростим имеющуюся вариационную задачу. Следует, однако, иметь в виду, что соотношение (5.4.5) выражает $\dot{q}_n$ как функцию нециклических переменных лишь в том случае, если мы считаем соотношение (5.4.4) выполняющимся не только для действительного, но и для варьированного движения. Вообще говоря, это ограничение возможностей варьирования $\dot{q}_n$ мало существенно, потому что вариация $\dot{A}$ обращается в нуль при произвольных вариациях всех $\dot{q}_k$. Однако условие, что вариация $\dot{q}_n$ должна обращаться в нуль на концах интервала, теперь нарушается, потому что $\dot{q}_n$ получается из (5.4.5) при помощи однократного интегрирования. Поэтому из уравнения (5.3.3) мы имеем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = [p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2}. \quad (5.4.7)$$

Напомним, что циклический импульс p_n постоянен вдоль всей C -кривой. Поэтому можно написать

$$[p_n \delta q_n]_{t_1}^{t_2} = p_n \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_n dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_n \dot{q}_n dt, \quad (5.4.8)$$

в результате чего (5.4.7) переходит в равенство

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - p_n \dot{q}_n) dt = 0. \quad (5.4.9)$$

Положим

$$L - p_n \dot{q}_n = \bar{L} \quad (5.4.10)$$

и назовем $\bar{L}$ «видоизмененной функцией Лагранжа». Результат наших рассуждений может быть теперь сформулирован следующим образом: задача минимизации интеграла действия A , содержащего циклическую координату q_n , может быть сведена к минимизации видоизменного интеграла действия

$$\bar{A} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{L} dt, \quad (5.4.11)$$

не содержащего циклической координаты q_n , путем исключения q_n при помощи первого интеграла $p_n = c_n$.

Процесс исключения циклической переменной может быть разбит на три стадии.

1. Выписывается уравнение для циклического импульса

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = c_n. \quad (\alpha)$$

2. Данная функция Лагранжа преобразуется к виду

$$\bar{L} = L - c_n \dot{q}_n. \quad (\beta)$$

3. Путем решения уравнения (α) относительно $\dot{q}_n$ и подстановки в (β) циклическая скорость $\dot{q}_n$ исключается из $\bar{L}$. Новая функция Лагранжа уже не зависит от циклической переменной и первоначальная вариационная задача с n степенями свободы сводится к новой вариационной задаче с $n - 1$ степенями свободы.

Подобным же образом следует действовать и в том случае, когда рассматриваемая задача содержит более чем одну циклическую координату. Видоизмененная функция Лагранжа тогда записывается в виде

$$\bar{L} = L - \sum c_k \dot{q}_k, \quad (5.4.12)$$

где суммирование распространяется на все циклические координаты.

Задача 3. Применить общий метод уменьшения числа степеней свободы к рассматривавшейся ранее задаче о движении планет (см. п. 2, задача 2), исключив θ . В результате получается задача с одной степенью свободы, которая может быть решена при помощи теоремы о сохранении энергии.

Задача 4. Рассмотреть таким же образом задачу о сферическом маятнике (см. п. 2, задача 3).

Задача 5. Рассмотреть случай, когда сами координаты входят в функцию Лагранжа, а скорости — нет. Показать, что такие переменные могут быть исключены алгебраически при помощи уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

без видоизменения функции Лагранжа L .

Исключение циклической переменной имеет интересные следствия для полученной в результате этого исключения задачи. Кинетическая энергия T первоначальной системы может быть записана следующим образом [см. (5.3.13)]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n-1} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \dot{q}_i \dot{q}_n + \frac{1}{2} a_{nn} \dot{q}_n^2, \quad (5.4.13)$$

где мы выделили циклическую скорость из остальных скоростей. Циклический импульс запишем теперь в виде

$$p_n = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \dot{q}_i + a_{nn} \dot{q}_n = c_n, \quad (5.4.14)$$

а для видоизмененной функции Лагранжа получим

$$\bar{L} = L - c_n \dot{q}_n = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{n-1} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} a_{nn} \dot{q}_n^2 - V. \quad (5.4.15)$$

Процесс пока не закончен, так как нужно еще исключить $\dot{q}_n$ с помощью (5.4.14). Прделав это, мы получаем, во-первых, член в $\bar{L}$

$$- \frac{1}{2} \frac{c_n^2}{a_{nn}}, \quad (5.4.16)$$

вообще не зависящий от скоростей. Во-вторых, получаем $n - 1$ членов, *линейных* относительно нециклических скоростей.

Член (5.4.16) ведет себя подобно некоей фиктивной потенциальной энергии и может быть объединен с V

$$\bar{V} = V + \frac{1}{2} \frac{c_n^2}{a_{nn}}. \quad (5.4.17)$$

Остальные члены имеют необычную природу. Их можно, вообще говоря, считать частью кинетической энергии T , но вместо того, чтобы быть квадратичными, они *линейны* по скоростям. Такие члены в функции Лагранжа называются

«гироскопическими», потому что именно они обуславливают парадоксальное поведение гироскопа. Сила Кориолиса во вращающейся системе координат и магнитная сила, связанная с электрическими токами, дают нам другие примеры гироскопических членов в функции Лагранжа.

Появление или отсутствие гироскопических членов зависит от коэффициентов a_{in} ($i \neq n$), связывающих циклические и нециклические скорости. Если не все a_{in} обращаются в нуль, то говорят, что существует «кинетическое взаимодействие» между циклическими и нециклическими скоростями. Если же все a_{in} обращаются в нуль, то взаимодействия нет и получающаяся задача свободна от гироскопических членов.

Пример. В задаче Кеплера исключение $\dot{\theta}$ приводит к появлению фиктивной потенциальной энергии вида c^2/r^2 . Это означает наличие фиктивной отталкивающей силы, пропорциональной $1/r^3$, в то время как сила притяжения пропорциональна $1/r^2$. Эти две силы уравнивают друг друга в некоторой точке, являющейся точкой устойчивого равновесия. Осцилляциями r вблизи этой точки объясняются пульсации радиуса-вектора между перигелием и афелием. Если бы сила притяжения уменьшалась как $1/r^3$ или быстрее, то устойчивого равновесия между этими двумя силами не существовало бы и радиус-вектор не мог бы колебаться между конечными пределами. Траектории движения планет были бы либо гиперболического типа, либо типа спиралей, приближающихся к Солнцу — в зависимости от величины константы углового момента. (Кинетическое взаимодействие здесь равно нулю.)

Резюме. Если некоторые координаты не входят в функцию Лагранжа, в то время как соответствующие скорости в нее входят, то такие координаты называются циклическими. Импульс, соответствующий циклической координате, остается постоянным в процессе движения. Циклические координаты могут быть исключены из функции Лагранжа путем ее соответствующего видоизменения. Исключение приводит к появлению фиктивной потенциальной энергии. Кроме того, может появиться фиктивная кинетическая энергия, не квадратичная, а линейная относительно скоростей.

5. Бессиловая механика Герца. Свойства циклических координат легли в основу интересной теории Герца, созданной с целью вскрыть более глубокий смысл потенциальной энергии. Механическая система характеризуется определенным количеством координат, но некоторые из них могут быть скрытыми. Система может обладать «микроскопическими параметрами», которые непосредственно не наблюдаемы. Из-за этих «микроскопических параметров» число степеней свободы системы может показаться меньшим, чем оно есть на самом деле. Например, твердое тело является в первом приближении жестким, однако в действительности молекулы твердого тела осциллируют вокруг некоторых средних положений. Шесть степеней свободы твердого тела описывают механическое поведение тела только *макроскопически*.

Микроскопические движения внутри механической системы могут быть разделены на две категории: движения, выражающиеся через циклические, и движения, выражающиеся через нециклические переменные. Микроскопические движения, связанные с нециклическими переменными, приводят, очевидно, к полигенным силам в макроскопическом движении. Хорошим примером является сила трения, которая действует макроскопически как полигенная сила, а в действительности является лишь проявлением ненаблюдаемого микроскопического движения молекул.

Совсем другую природу имеют микроскопические движения, связанные с циклическими переменными. Они поддаются исключению, и можно иметь механическую систему с таким скрытым движением, которое не проявляется в виде неголономного поведения системы. Приведенная система полностью голономна и удовлетворяет принципу наименьшего действия; наличие скрытых движений никак не может быть обнаружено.

При наличии кинетического взаимодействия между макроскопическими и скрытыми циклическими координатами функция Лагранжа макроскопической системы будет содержать гироскопические члены, линейные относительно наблюдаемых скоростей. При отсутствии же подобного взаимодействия скрытые движения проявляются лишь в виде дополнительной фиктивной потенциальной энергии, записанной в макроскопических переменных.

Эти соображения привели Герца¹ к мысли о том, что, возможно, вся потенциальная энергия приложенных сил порождается скрытыми движениями, выражаемыми при помощи циклических переменных. Дуализм кинетической и потенциальной энергий представляет собой достойную задачу для философских размышлений. Мы имеем инертное свойство материи, с одной стороны, и силу — с другой. Инертное свойство материи есть нечто, вытекающее из самого факта существования массы. Обычная инерция заставляет материю двигаться по прямой линии; то же самое происходит и в римановом пространстве, при помощи которого движение даже самых сложных механических систем изображается как движение одной точки. Создается впечатление, что инерция есть первичное свойство материи, которое вряд ли может быть сведено к чему-либо еще более простому. Поэтому с философской точки зрения можно согласиться с тем, что при помощи кинетической энергии выражаются инертные свойства материи. Однако подобного объяснения для «силы» предложить нельзя. Если кинетическая энергия является главной движущей силой в механике, то нельзя ли как-нибудь обойтись без потенциальной энергии и тем самым устранить необъяснимый дуализм, проникший в механику вместе с понятием о двух глубоко различных формах энергии, кинетической и потенциальной. Герц хотел показать, что потенциальная энергия имеет *кинетическое* происхождение, что она возникает в результате скрытых движений с циклическими координатами. Место сил в бессиловой механике Герца занимают кинематические условия, налагаемые на движение с микроскопическими параметрами.

Хотя эта любопытная гипотеза так и осталась в виде эскизных набросков, она тем не менее имела пророческое значение. Теория относительности, исходившая из совершенно других предпосылок и развивавшаяся совершенно иными путями, дала эффективный пример бессиловой механики Герца. Движение планет вокруг Солнца было объяснено на основе одной инерции, без привлечения каких бы то ни было сил. Планеты описывают кратчайшие траектории

¹ Герц Г., Принципы механики, М., Изд-во АН СССР, 1959; см. также T h o m s o n J. J., Application of dynamics to Physics and Chemistry (Macmillan, 1888), стр. 11.

в римановом пространстве как раз таким образом, как представлял себе это Герц для механических систем, свободных от потенциальной энергии. Единственная разница заключается в том, что в системе Герца риманова кривизна пространства конфигураций создается кинематическими условиями, наложенными на скрытые движения системы, а в теории Эйнштейна риманова структура физического пространственно-временного континуума является внутренним свойством геометрии мира.

Резюме. Скрытые микроскопические движения внутри механической системы, выражаемые циклическими переменными, не нарушают ни голономного характера макроскопической системы, ни справедливости принципа Гамильтона. Они «игнорируемые», потому что их можно исключить. Они вызывают появление фиктивной потенциальной энергии, которую можно интерпретировать как потенциальную энергию приложенных сил. Это явление привело Герца к мысли о том, что, возможно, происхождение потенциальной энергии любой механической системы связано со скрытыми движениями циклической природы.

6. Время как циклическая переменная; принцип Якоби; принцип наименьшего действия. Рассмотрим склерономную или «консервативную» систему с функцией Лагранжа, не зависящей явно от времени. Представим себе, что мы не используем время t как независимую переменную и что все $n + 1$ переменных $q_1, \dots, q_n$ и t заданы как функции некоторого параметра τ . Система имеет теперь $n + 1$ степеней свободы. Обозначив штрихом производные по τ , получим интеграл действия в следующем виде:

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(q_1, \dots, q_n, \frac{q'_1}{t'}, \dots, \frac{q'_n}{t'} \right) t' d\tau. \quad (5.6.1)$$

Время здесь является циклической координатой, поскольку в подинтегральное выражение входит только t' , а само t не входит.

Воспользуемся теоремой о том, что импульс, соответствующий циклической координате, остается при движении постоянным. Вначале рассмотрим p_t — импульс, соответствующий временной переменной

$$\begin{aligned} p_t = \frac{\partial (Lt')}{\partial t'} &= L - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\dot{q}_i}{t'^2} \right) t' = L - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i = \\ &= - \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right). \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

Выражение в последних круглых скобках в точности совпадает с тем выражением, которое встречалось уже раньше при обсуждении закона сохранения энергии. Мы называли это выражение полной энергией и обозначили через Λ . Для обычных механических систем Λ есть просто сумма кинетической и потенциальной энергий $T + V$. Мы получаем таким образом важную теорему, которая справедлива независимо от того, консервативна система или нет: *импульс, соответствующий временной переменной t , является полной энергией, взятой с обратным знаком*. Если t — циклическая координата, т. е. если наша система консервативна, то мы сразу получаем

$$p_t = -\Lambda = \text{const} = -E, \quad (5.6.3)$$

что является новым выводом теоремы о сохранении энергии.

Можно, однако, сделать нечто большее. Мы знаем, что циклическую переменную можно исключить, уменьшив на единицу число степеней свободы исходной вариационной задачи. В данном случае мы можем исключить из вариационной задачи t и получить новую вариационную задачу, определяющую траекторию движения в пространстве, но ничего не говорящую о том, как это движение протекает во времени.

Согласно общему методу, сначала видоизменим функцию Лагранжа. В данном случае мы должны написать

$$\bar{L} = Lt' - p_t t' = (L - p_t) t' = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i t', \quad (5.6.4)$$

что приводит к новому интегралу действия

$$\bar{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i t' d\tau. \quad (5.6.5)$$

Учитывая (5.3.15), можно переписать $\bar{A}$ в виде

$$\bar{A} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} T t' d\tau. \quad (5.6.6)$$

В литературе восемнадцатого века этот интеграл часто появлялся в форме

$$\bar{A} = 2 \int T dt, \quad (5.6.7)$$

но Якоби указал на то, что эта форма неудовлетворительна, потому что время t не может рассматриваться как аргумент в данной вариационной задаче. Действительно, наш процесс уменьшения числа степеней свободы еще не закончен. Мы должны исключить циклическую переменную t при помощи уравнения для импульса (5.6.3), а это делает t зависимой переменной. До этого исключения вариационный принцип не может быть применен к (5.6.6) или (5.6.7).

Используем теперь символическое понятие S -точки, изображающей механическую систему в пространстве конфигураций. Мы уже знаем, что кинетическую энергию системы можно рассматривать как кинетическую энергию одной частицы с единичной массой

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad (5.6.8)$$

где $\overline{ds}$ — линейный элемент пространства конфигураций (см. гл. I. п. 5). Поскольку аргументом теперь является не t , а τ , мы должны написать

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{ds}}{d\tau} \right)^2 / t'^2. \quad (5.6.9)$$

Выражая отсюда t' с учетом теоремы о сохранении энергии (5.6.3), получаем

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2(E - \bar{V})}} \frac{\overline{ds}}{d\tau}. \quad (5.6.10)$$

Более того, в подинтегральном выражении в (5.6.6) можно положить

$$T = E - V, \quad (5.6.11)$$

в результате чего (5.6.6) будет иметь вид

$$\bar{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - V)} \frac{ds}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E - V)} ds. \quad (5.6.12)$$

Мы закончили таким образом исключение переменной t и получили интеграл действия для приведенной системы. Время t не входит в интеграл $\bar{A}$, и, кроме того, $\bar{A}$ не зависит также от параметра τ . Однако ds не есть полный дифференциал, и было бы совершенно неверно считать, что $\sqrt{2(E - V)}$ — это подинтегральное выражение в $\bar{A}$, а ds соответствует дифференциалу независимой переменной. Чтобы избежать этого недоразумения, мы и поставили черту над ds . В качестве аргумента нужно выбрать *какой-либо* параметр τ . В частности, в качестве такого параметра можно взять одно из q_i , например q_n , считая все остальные q_i функциями q_n . Это сразу сведет вариационную задачу от n к $n - 1$ степеням свободы.

Принцип минимизации, примененный к интегралу (5.6.12) с целью нахождения пути механической системы, называется «принципом Якоби». Время не входит в его формулировку. Он определяет траекторию S -точки в пространстве конфигураций, а не движение во времени. Однако это последнее легко найти путем интегрирования уравнения (5.6.10), что дает t как функцию параметра τ . Уравнение (5.6.10) не является частью вариационной задачи, а есть выражение теоремы о сохранении энергии. Однако оно дополняет вариационную задачу, определяя, как происходит движение во времени.

Принцип Якоби является фундаментальным принципом механики. Если ограничиться случаем одной частицы, то линейный элемент ds совпадает с линейным элементом обычного трехмерного пространства в произвольных криволинейных координатах. Принцип Якоби в этом случае оказывается механическим аналогом принципа Ферма наименьшего времени в оптике, согласно которому оптический путь светового луча определяется минимизацией интеграла

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} n \overline{ds}, \quad (5.6.13)$$

где n — коэффициент преломления, который, подобно величине $\sqrt{2(E - V)}$, может изменяться от точки к точке. Мопертюи утверждал, что законы природы могут быть получены путем минимизации некоторой величины, которую он назвал «действием» и которая при соответствующей формулировке совпадает с интегралом Якоби (5.6.12); он пытался показать, что закон преломления света получается из принципа наименьшего действия с таким же успехом, как и из принципа наименьшего времени. Он обратил внимание, таким образом, на ту же самую примечательную аналогию между оптическими и механическими явлениями, которая была известна еще Иоганну Бернулли, и которая впоследствии нашла свое полное развитие в замечательной оптико-механической теории Гамильтона. Эта аналогия сыграла важную роль в развитии современной волновой механики.

Аналогия между принципом Якоби, с одной стороны, и принципом Ферма — с другой, касается лишь *пути*, описываемого движущейся точкой в механике и лучом света в оптике. Протекание процесса *во времени* в механическом и в оптическом случаях совершенно различно (см. гл. VIII, п. 7).

Якоби раскритиковал рассуждения Лагранжа, касающиеся «принципа наименьшего действия», указав на важность того обстоятельства, что варьирование происходит при определенных граничных значениях; последнее невозможно, если в качестве аргумента выбрано время. В этом случае верхний предел интеграла действия должен варьироваться определенным образом с тем, чтобы обеспечить сохранение энергии вдоль истинного и варьированного путей. Тем не менее если соответствующим образом понять формулировку принципа наименьшего действия, данную Эйлером и Лагранжем, то окажется, что их выкладки совершенно правильны, а их принцип отличается от принципа Якоби лишь формально. Как мы видели, принцип Якоби представляет собой результат следующих операций.

1. В кинетической энергии дифференцирование по времени t заменяется дифференцированием по параметру τ

$$T' = \frac{1}{2} \sum a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = T t'^2. \quad (5.6.14)$$

2. После исключения t' при помощи соотношения для энергий

$$\frac{T'}{t'^2} + V = E \quad (5.6.15)$$

минимизируется интеграл действия

$$\overline{A} = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{T'}{t'} d\tau. \quad (5.6.16)$$

В качестве «действия» Эйлер и Лагранж использовали тот же самый интеграл, который является основой принципа Якоби — разни́ца заключалась только в параметре τ . Более того, Эйлер и Лагранж использовали соотношение (5.6.15) в качестве *дополнительного условия*, что эквивалентно исключению t' из этого выражения. Как известно, дополнительные условия можно учитывать либо путем исключения переменных, либо при помощи метода неопределенных множителей. Первый способ соответствует методу Якоби, а второй — методу Лагранжа. При этом второй способ приводит к появлению новой формы интеграла действия

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[2 \frac{T'}{t'} + \lambda \left(\frac{T'}{t'^2} + V \right) \right] d\tau. \quad (5.6.17)$$

В данной конкретной задаче неопределенный множитель Лагранжа можно легко вычислить. Так как t' — одна из переменных, то минимум по t' дает соотношение

$$-\frac{2T'}{t'^2} - \frac{2\lambda T'}{t'^3} = 0, \quad (5.6.18)$$

откуда

$$\lambda = -t'. \quad (5.6.19)$$

В результате интеграл принимает вид

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{T'}{t'^2} - V \right) t' d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (T - V) t' d\tau. \quad (5.6.20)$$

Поскольку новая вариационная задача является *свободной*, без каких бы то ни было дополнительных условий, нет причин, препятствующих использованию t в качестве аргумента. В результате получаем интеграл действия

$$\overline{A} = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = A, \quad (5.6.21)$$

возвращающий нас к *принципу Гамильтона*. Этот вывод объясняет, как Лагранж получил свои уравнения движения, являющиеся прямым следствием принципа Гамильтона, исходя из совершенно иного принципа, «принципа наименьшего действия».

Резюме. При параметрическом задании движения время является дополнительной координатой, которая может принять участие в процессе варьирования. Импульс, соответствующий временной координате, является полной энергией, взятой с обратным знаком. Для склерономных систем время становится циклической координатой, а соответствующий импульс — константой. Это приводит к теореме сохранения энергии для консервативных систем. Исключение времени как циклической координаты позволяет сформулировать новый принцип, определяющий лишь путь механической системы, а не ее движение во времени. Это — принцип Якоби, аналогичный принципу Ферма в оптике. Этот же принцип может быть сформулирован как «принцип наименьшего действия». В последнем случае интеграл по времени от удвоенной кинетической энергии минимизируется с дополнительным условием, что при движении и вдоль истинного, и вдоль проварьированного пути должна выполняться теорема о сохранении энергии. Если этот принцип рассматривать с помощью метода неопределенных множителей, то в качестве результирующих уравнений получаются уравнения движения Лагранжа.

7. Принцип Якоби и риманова геометрия. Как было выяснено в гл. I, п. 5, геометрическая структура простран-

ства конфигураций в общем случае не евклидова, а риманова. Пространство конфигураций механической системы, содержащей N свободных частиц, является евклидовым и имеет $3N$ измерений. Однако при наличии связей между частицами пространство конфигураций становится искривленным подпространством с числом измерений, меньшим чем $3N$. Геометрия этого подпространства характеризуется римановым линейным элементом. Этот линейный элемент определяется кинетической энергией механической системы, записанной в криволинейных координатах q_k

$$\overline{ds}^2 = 2T dt^2 = \sum a_{ik} dq_i dq_k. \quad (5.7.1)$$

Принцип Якоби наглядно поясняет внутренние соотношения, существующие между движением консервативной голономной системы и геометрией пространств, обладающих кривизной. Введем в дополнение к линейному элементу $\overline{ds}$ пространства конфигураций еще один риманов линейный элемент $\overline{d\sigma}$, определяемый равенством

$$\overline{d\sigma}^2 = (E - V) \overline{ds}^2. \quad (5.7.2)$$

Согласно (5.6.12), принцип Якоби требует минимизации определенного интеграла

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{d\sigma}, \quad (5.7.3)$$

а это совпадает с *нахождением кратчайшего пути между двумя определенными точками в некотором римановом пространстве*. Движению механической системы под действием потенциальной энергии V можно сопоставить движение точки *вдоль некоторой геодезической линии в данном римановом пространстве*. Решение данной динамической задачи математически эквивалентно решению задачи о нахождении этих геодезических линий.

Рассмотрим частный случай, когда потенциальная энергия V обращается в нуль, т. е. когда движение происходит при отсутствии каких бы то ни было приложенных сил. В этом случае мы можем, не вводя дополнительного линейного элемента $\overline{d\sigma}$, оперировать непосредственно с линейным

элементом пространства конфигураций $\overline{ds}$. Поскольку $V = 0$, принцип Якоби требует, чтобы

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{ds} = 0. \quad (5.7.4)$$

Это означает, что *С-точка механической системы движется вдоль кратчайшего пути (геодезической линии) пространства конфигураций*. Более того, теорема о сохранении энергии дает

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\overline{ds}}{dt} \right)^2 = E, \quad (5.7.5)$$

откуда видно, что *С-точка движется с постоянной скоростью*.

Мы имеем здесь замечательное обобщение закона инерции, открытого Леонардо да Винчи и Галилеем: «Под действием собственной инерции частица движется по прямой линии с постоянной скоростью». Оказывается, что этот закон справедлив для сколь угодно сложных механических систем с произвольными голономными связями. Однако «частица», представляющая такую систему, движется не в обычном трехмерном, а в n -мерном римановом пространстве.

Пример. Частица вынуждена оставаться на некоторой поверхности; к ней не приложены силы. Риманово пространство теперь имеет два измерения, а его геометрия идентична внутренней геометрии заданной поверхности. Движение частицы по поверхности происходит по одной из геодезических линий этой поверхности.

Задача. Показать то же самое при помощи принципа Гамильтона.

Отметим тесную связь между этим геодезическим принципом и динамическим принципом теории Эйнштейна. Там также задача о движении эквивалентна нахождению геодезической линии риманова пространства. Это риманово пространство имеет четыре измерения, так как пространство и время вместе образуют единый четырехмерный континуум. Из закона инерции получается решение задачи о движении планет без введения каких бы то ни было сил гравитации. Принцип Якоби применим в релятивистской механике частицы. Единственная разница заключается в том, что риманова структура четырехмерного континуума является внутренним свойством вселенной, а не следствием наличия кинематических связей.

Резюме. Принцип Якоби связывает движение голономных консервативных систем и риманову геометрию. В частности, если система движется под действием собственной инерции в отсутствии приложенных сил, то изображающая эту систему S -точка описывает геодезическую (кратчайшую) линию в пространстве конфигураций, которое является n -мерным римановым пространством. Из теоремы о сохранении энергии следует к тому же, что движение происходит с постоянной скоростью. Все это является естественным обобщением обычного закона инерции, который утверждает, что при наличии лишь собственной инерции частица движется по прямой линии с постоянной скоростью.

8. Дополнительные условия; физический смысл неопределенных множителей Лагранжа. При изучении общих вопросов вариационного исчисления мы подробно обсуждали, как следует оперировать с механическими системами, на которые наложены кинематические связи (см. гл. II, п. 12). При голономных связях, заданных в форме аналитических соотношений между переменными

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad (i=1, \dots, m), \quad (5.8.1)$$

можно поступить двумя различными способами. Во-первых, можно, с помощью дополнительных условий (5.8.1) исключить m координат q_i , сведя тем самым заданную систему к свободной системе без связей. Во-вторых, можно обойтись без исключений, применив метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого подинтегральное выражение L в вариационной задаче преобразуется в $\bar{L}$ путем добавления левых частей уравнений (5.8.1), каждая из которых предварительно умножена на некоторый неопределенный множитель $\lambda_i(t)$ ¹. После этого с задачей можно оперировать как

¹ Метод неопределенных λ -множителей остается справедливым даже и при дополнительных условиях, содержащих не только q_i , но и $\dot{q}_i$. Мы встретились с такой ситуацией в п. 6, где уравнение, содержащее требование постоянства энергии, было дополнительным условием при варьировании.

со свободной, несмотря на имеющиеся дополнительные условия.

Поскольку λ_i — неопределенные множители, можно с равным успехом использовать $-\lambda_i$, записав $\bar{L}$ в форме

$$\bar{L} = L - (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m). \quad (5.8.2)$$

В обычных задачах классической механики L представляется в виде разности $T - V$. Модификацию функции L можно приписать изменению потенциальной энергии V , считая, что V преобразуется в $\bar{V}$

$$\bar{V} = V + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m. \quad (5.8.3)$$

Этот изящный математический прием имеет неожиданную и вместе с тем поучительную физическую интерпретацию. То обстоятельство, что после изменения функции Лагранжа L вариационная задача становится свободной, означает, что мы опускаем имеющиеся кинематические связи и рассматриваем механическую систему так, как если бы связей не было. При этом, однако, замена функции V на $\bar{V}$ означает, что мы добавляем к потенциальной энергии приложенных сил потенциальную энергию сил, обеспечивающих удовлетворение заданных связей. Эти силы задаются выражениями

$$K_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m) = - \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right). \quad (5.8.4)$$

Таким образом, те условия, с которыми мы встречались раньше в статике (ср. гл. III, п. 5), появляются теперь в том же самом виде в динамике. Снова *метод λ -множителей Лагранжа определяет силы реакции имеющихся связей*.

Имеется, однако, один аспект задачи, требующий особого внимания. Пусть заданные кинематические условия (5.8.1) и потенциальная энергия V не зависят явно от времени t . Тогда система является консервативной; в этом можно сразу же убедиться, если при учете дополнительных условий применить метод исключения лишних переменных. Следовательно, силы реакции также должны быть консервативными; это означает, что их потенциальная энергия не должна зависеть от t . С другой стороны, λ_i являются функциями t ,

что создает впечатление, будто бы потенциальная энергия сил реакции

$$V_0 = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_m f_m \quad (5.8.5)$$

является также функцией t .

Это кажущееся противоречие проистекает из того факта, что потенциальная энергия сил реакции известна *только вдоль S -кривой*. Более детальный анализ снимает это противоречие и приводит к интересной физической интерпретации множителей λ_i .

Достаточно рассмотреть одно дополнительное условие

$$f(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad (5.8.6)$$

так как результаты легко обобщаются на случай произвольного числа подобных условий. Предположим, что потенциальная энергия V_1 сил реакции связи (5.8.6) имеет вид

$$V_1 = \Phi(f). \quad (5.8.7)$$

[Это предположение нуждается в уточнении. Очевидно, что (5.8.6) не определяет однозначно функцию f , потому что это самое условие можно задать и в более общей форме

$$gf = 0, \quad (5.8.8)$$

где $g(q_1, \dots, q_n)$ — любая другая функция координат, которая не обращается в нуль на поверхности $f = 0$. Поэтому аргумент функции Φ в (5.8.7) должен быть фактически заменен на gf , где g — некоторая функция q_i . Более общий случай рассматривается в задаче 4 в конце этого пункта.]

Естественно, что удовлетворение связи (5.8.6) обеспечивается за счет появления значительных сил, поэтому уравнение (5.8.6) не может сильно нарушаться. Ввиду этого потенциал V_1 будет интересовать нас лишь для *малых* значений f . Следовательно, функцию Φ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $f = 0$. Поскольку постоянные слагаемые в потенциальной энергии не существенны, можно написать

$$V_1 = \Phi'(0)f + \frac{1}{2}\Phi''(0)f^2. \quad (5.8.9)$$

При этом мы пренебрегаем членами выше второго порядка.

Известно, что силы реакции не проявляются до тех пор, пока условие (5.8.6) выполняется *точно*. Это означает, что $f = 0$ должно соответствовать состоянию равновесия сил реакции; более того, можно также утверждать, что заданная связь не могла бы поддерживаться, если бы состояние равновесия не было *устойчивым*. Следовательно, функция V_1 должна иметь *минимум* при $f = 0$. Это означает, что

$$\varphi'(0) = 0, \quad (5.8.10)$$

а $\varphi''(0)$ должна быть *положительной*.

Пусть

$$\varphi''(0) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad (5.8.11)$$

где ε — малая постоянная положительная величина. Малость ε отражает тот факт, что связь (5.8.6) поддерживается *большими* по величине силами. Строгое выполнение условия (5.8.6) в течение длительного времени потребовало бы *бесконечно больших* сил, т. е. $\varepsilon = 0$.

Поскольку в действительности ε хотя и малая, но все же *конечная* величина, условие (5.8.6) не может *точно* удовлетворяться в процессе движения. Истинное движение происходит в соответствии с уравнением

$$f(q_1, \dots, q_n) = \varepsilon \rho(t), \quad (5.8.12)$$

где $\rho(t)$ — некоторая функция времени. Имея в виду малость ε , можно сказать, что условие $f = 0$ выполняется лишь *макроскопически*. Правую часть уравнения (5.8.12) можно назвать «микроскопической ошибкой» данной связи $f = 0$. Эта ошибка меняется со временем t .

Потенциальная энергия

$$V_1 = \frac{1}{2\varepsilon} f^2 \quad (5.8.13)$$

приводит к появлению силы

$$K_i = -\frac{1}{\varepsilon} f \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (5.8.14)$$

в то время как, согласно методу неопределенных множителей Лагранжа,

$$K_i = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (5.8.15)$$

Сравнение (5.8.14) и (5.8.15) приводит к равенству

$$\lambda = \frac{f}{\varepsilon}, \quad (5.8.16)$$

или, учитывая (5.8.12),

$$\lambda = \rho(t). \quad (5.8.17)$$

Это соотношение показывает, что *лагранжесвы λ -множители являются мерой микроскопического нарушения уравнения связи $f = 0$* . Правая часть этого уравнения в действительности не нуль, а произведение $\varepsilon \cdot \lambda$, где ε — малая положительная величина, стремящаяся к нулю, когда силы, поддерживающие связь, стремятся к бесконечности.

Мы получили, таким образом, объяснение того, почему потенциальная энергия V_1 сил реакции на первый взгляд зависит от времени t , хотя *в действительности* силы консервативны.

Мы еще раз установили результат — как это уже было сделано для систем, находящихся в равновесии, — согласно которому *голономные дополнительные условия механически эквивалентны моногенным силам*. Можно добавить, что *склерономные голономные условия эквивалентны консервативным моногенным силам*.

Задача 1. Рассмотреть двухатомную молекулу со следующей структурой: потенциальная энергия внутренних сил имеет вид

$$V_1 = \frac{A}{2} \left(r^2 + \frac{1}{r^2} \right),$$

где r — расстояние между атомами, а A — большая постоянная величина. Показать, что движение системы под действием приложенных сил с потенциальной энергией V микроскопически эквивалентно движению двухатомной молекулы без какого бы то ни было V_1 , но с дополнительным условием $r = 1$.

Задача 2. Показать, что в предыдущей задаче множитель Лагранжа λ равен микроскопическому нарушению условия $r = 1$, умноженному на $4A$.

Задача 3. Рассмотреть тяжелую материальную точку массы m , движущуюся по сфере

$$r = 1.$$

Показать, что множитель λ в этой задаче пропорционален микроскопическому упругому проникновению в глубь сферы, вызываемому давлением точки на поверхность сферы. Множитель λ , а вместе с ним

и сила реакции обращаются в нуль в точке, где масса покидает сферу, продолжая свое движение в свободном падении.

Задача 4. Рассмотреть более общую задачу, возникающую в связи с тем, что функция f определяется уравнением $f = 0$ неоднозначно; вследствие этого простое выражение (5.8.7) следует заменить более общим предположением

$$V_1 = \varphi(fg), \quad (5.8.18)$$

где g — неизвестная функция координат. Для исключения этой неизвестной функции нужна дополнительная информация, не содержащаяся в уравнении связи $f = 0$. Известно, что поверхность $f = 0$ является эквипотенциальной для сил реакции. Предположим, что нам известна в пространстве конфигураций *вторая*, близкая эквипотенциальная поверхность. Ее можно охарактеризовать, задав в каждой точке поверхности $f = 0$ *бесконечно малое расстояние* φ между двумя эквипотенциальными поверхностями $\varphi = 0$ и $\varphi = p$, где p — положительная бесконечно малая величина. В этом случае можно установить следующее соотношение для λ :

$$\lambda = \frac{2p}{\sqrt{2} |\text{grad } f|^2} f. \quad (5.8.19)$$

Снова λ оказалось пропорциональным f , т. е. микроскопическому нарушению связи $f = 0$; однако множитель пропорциональности уже не является константой, хотя и остается существенно *положительной* величиной.

Эта дополнительная информация потребовалась только для *интерпретации* множителя λ . Сила реакции не зависит от неизвестной функции g и всегда полностью определяется методом неопределенных множителей Лагранжа¹.

Резюме. Физический смысл метода неопределенных множителей Лагранжа при решении задач с дополнительными условиями заключается в том, что имеющиеся кинематические связи заменяются силами, поддерживающими эти связи. Этот метод позволяет определить силы реакции, обусловленные данными связями. Силы реакции возникают вследствие микроскопических отклонений от связей, а λ -множители могут быть интерпретированы как мера этих отклонений. Отклонения меняются в процессе движения, что делает λ_i функциями t , несмотря на консервативную природу сил, поддерживающих заданные связи.

¹ Автору неизвестно подобное обсуждение в литературе физического смысла неопределенных множителей Лагранжа.

9. Неголономные дополнительные условия и полигенные силы. Если кинематические условия не имеют формы аналитических соотношений между координатами, а представляют собой неинтегрируемые дифференциальные соотношения типа (2.6.1), то уже нельзя уменьшить число степеней свободы путем исключения лишних переменных. Метод неопределенных множителей Лагранжа, однако, по-прежнему применим. В самом деле, из (2.6.1) мы получаем для уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -(\lambda_1 A_{1k} + \lambda_2 A_{2k} + \dots + \lambda_m A_{mk}), \quad (5.9.1)$$

где A_{ik} — заданные функции q_i . Они заняли место производных $\partial f_i / \partial x_k$, которые входили в уравнение в случае голономных условий.

Для физической интерпретации неголономного случая следует заметить, что у сил реакции неголономных связей силовой функции не существует, *однако сами силы по-прежнему могут быть определены с помощью метода неопределенных множителей.* Положим

$$K_i = -(\lambda_1 A_{1i} + \dots + \lambda_m A_{mi}). \quad (5.9.2)$$

Эти K_i можно физически интерпретировать как компоненты силы, действующей на механическую систему с целью обеспечить выполнение заданных неголономных условий. Эта сила имеет теперь полигенную природу. Мы убеждаемся еще раз, что *неголономные дополнительные условия механически эквивалентны полигенным силам.*

Исходя из этой эквивалентности, естественно предположить, что соответствующим образом преобразованные уравнения Лагранжа применимы и в случае полигенных сил. Это действительно так. Полигенную систему сил можно охарактеризовать с помощью их виртуальной работы. Пусть эта работа имеет вид

$$\overline{\delta w} = \rho_1 \delta q_1 + \rho_2 \delta q_2 + \dots + \rho_n \delta q_n. \quad (5.9.3)$$

Единственное отличие от случая моногенной силы заключается в том, что работа $\overline{\delta w}$ не может быть представлена в виде вариации какой-либо скалярной функции. Предположим, что все моногенные приложенные силы учтены

обычным образом в функции Лагранжа L , а для полигенных сил задана их виртуальная работа (5.9.3). Тогда уравнения движения получаются в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i. \quad (5.9.4)$$

Снова, как и в (5.9.1), полигенные силы приводят к появлению «правой части» в уравнениях Лагранжа.

Резюме. Метод множителей Лагранжа остается справедливым и в случае неголономных дополнительных условий. Силы, возникающие в связи с этими условиями по-прежнему могут быть найдены. Эти силы имеют полигенную природу. Неголономные дополнительные условия и полигенные силы одинаково влияют на уравнения движения Лагранжа: они приводят к появлению в этих уравнениях «правых частей».

10. Малые колебания около положения равновесия.

Одним из наиболее замечательных примеров эффективности аналитических методов является приложение уравнений Лагранжа к теории малых колебаний вблизи положения устойчивого равновесия. Эта теория чрезвычайно важна при изучении упругих свойств твердых тел, колебаний молекулярных структур, теории теплоемкости и других фундаментальных проблем. Наиболее замечательной чертой теории является ее *общность*. Независимо от степени сложности механической системы ее движение вблизи положения равновесия описывается всегда одинаковым образом. Конкретные вычисления усложняются по мере увеличения числа степеней свободы, однако теоретические аспекты задачи остаются неизменными.

Упрощения, возникающие при решении этой задачи, связаны с фактом *малости* колебаний. Как известно, пространство конфигураций имеет не евклидову, а риманову геометрию. Известно также, что искривленное риманово пространство по мере уменьшения размеров области все более приближается к плоскому. Это свойство риманова

пространства находит свое аналитическое выражение в том, что линейный элемент

$$\overline{ds^2} = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k, \quad (5.10.1)$$

в котором a_{ik} являются функциями q_i , в непосредственной окрестности точки P может быть заменен локальным линейным элементом с *постоянными* коэффициентами. Коэффициенты a_{ik} меняются в этой окрестности столь незначительно, что они могут быть заменены их значениями в точке P .

Пусть точка P , являющаяся одновременно S -точкой, изображающей положение механической системы в пространстве конфигураций, соответствует положению равновесия. Поместим ее для простоты в начале координат, записав ее координаты в виде $q_i = 0$. Будем теперь считать линейный элемент (5.10.1) с постоянными a_{ik} , соответствующими точке P , справедливым во *всем* пространстве. Пространство, получившееся в результате этой операции, является евклидовым, а допущенная нами ошибка стремится к нулю по мере приближения к точке P .

В новом пространстве q_i являются уже не криволинейными, а *прямолинейными* координатами. Нам понадобятся несколько основных фактов, касающихся аналитической природы таких координат. Начнем с того, что в нашем неискривленном пространстве не только дифференциальная форма (5.10.1), но и конечная форма

$$s^2 = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} q_i q_k \quad (5.10.2)$$

имеет простой геометрический смысл. Она задает расстояние s от начала координат $P = (0, \dots, 0)$ до точки $Q = (q_1, \dots, q_n)$.

Пусть мы находимся в n -мерном евклидовом пространстве с n линейно независимыми базисными векторами

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \quad (5.10.3)$$

произвольной длины и ориентации; независимость этих векторов означает, что ни один из $\mathbf{u}_k$ не представляет собой линейной комбинации остальных базисных векторов.

Радиус-вектор $\mathbf{R}$ точки этого пространства можно теперь записать в виде

$$\mathbf{R} = q_1 \mathbf{u}_1 + q_2 \mathbf{u}_2 + \dots + q_n \mathbf{u}_n. \quad (5.10.4)$$

Образовав скалярное произведение вектора $\mathbf{R}$ самого на себя, получим

$$\mathbf{R}^2 = s^2 = \sum_{i, k=1}^n (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k) q_i q_k. \quad (5.10.5)$$

Сравнение с (5.10.2) показывает, что коэффициенты a_{ik} линейного элемента равны

$$a_{ik} = a_{ki} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k. \quad (5.10.6)$$

В частном случае *прямоугольных* координат в качестве $\mathbf{u}_i$ выбираются взаимно перпендикулярные векторы единичной длины. Тогда

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad (i \neq k), \quad \mathbf{u}_i^2 = 1 \quad (5.10.7)$$

и квадрат расстояния s принимает обычную пифагорову форму

$$s^2 = q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2. \quad (5.10.8)$$

Мы намеренно не накладываем каких-либо специальных условий на базисные векторы, чтобы оперировать с произвольной прямолинейной системой координат. Однако мы должны потребовать, чтобы евклидово пространство было «реальным», т. е. чтобы расстояние между несовпадающими точками P и Q в нем не могло равняться нулю. Для этого нужно, чтобы квадратичная форма (5.10.2) была «положительно определенной», т. е. принимала положительные значения s^2 при произвольных значениях q_i , кроме тривиального случая $q_i = 0$, когда $s = 0$.

В пространстве конфигураций это условие действительно выполняется, потому что кинетическая энергия, определяющая линейный элемент (5.10.1), а с ним и расстояние (5.10.2), никогда не может стать отрицательной. Даже значение нуль для нее возможно лишь в случае, когда все q_i обращаются в нуль. Это гарантирует положительную определенность выражения (5.10.2).

Рассмотрим теперь две *различные* точки Q и Q' а с ними и два вектора

$$\overline{PQ} = \mathbf{R} = q_1 \mathbf{u}_1 + \dots + q_n \mathbf{u}_n \quad (5.10.9)$$

и

$$\overline{PQ'} = \mathbf{R}' = q'_1 \mathbf{u}_1 + \dots + q'_n \mathbf{u}_n. \quad (5.10.10)$$

Образует скалярное произведение этих двух векторов

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}' = \sum_{i, k=1}^n (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_k) q_i q'_k = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} q_i q'_k. \quad (5.10.11)$$

Заметим, что обращение в нуль суммы (5.10.11) означает взаимную *ортогональность* векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$.

Сделав эти общие замечания, касающиеся аналитической геометрии n -мерного евклидова пространства, перейдем теперь к изучению потенциальной энергии $V(q_1, \dots, q_n)$ механической системы. Разложим эту функцию в ряд Тейлора в окрестности начала координат $q_i = 0$

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + \dots \quad (5.10.12)$$

Предположим теперь, что начало координат P нашей системы отсчета является положением *равновесия*. Следовательно, функция V должна иметь в этой точке стационарное значение (см. гл. II, п. 2 и гл. III, п. 1). Поэтому линейные члены разложения (5.10.12) выпадают. Поскольку аддитивная постоянная в потенциальной энергии не существенна, то можно считать, что разложение начинается с членов *второго* порядка. Дальнейшие члены не нужны, потому что уже членами третьего порядка можно пренебречь при достаточно малых q_i . Следовательно, можно написать

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^n b_{ik} q_i q_k, \quad (5.10.13)$$

где

$$b_{ik} = b_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0. \quad (5.10.14)$$

Рассмотрим теперь уравнение $V = \frac{1}{2}$, т. е.

$$\sum b_{ik} q_i q_k = 1. \quad (5.10.15)$$

Геометрически это уравнение определяет *поверхность* в n -мерном пространстве. Можно сказать более определенно, что оно определяет какую-то поверхность *второго* порядка; для наглядности можно представить себе эллипсоид или гиперболоид в обычном трехмерном пространстве, но не следует забывать при этом о разнице в числе измерений. Следует отметить, что аналитическую геометрию поверхностей второго порядка можно строить с равным успехом при *любом* числе измерений. Теория таких поверхностей очень важна почти во всех разделах математической физики. Строгое математическое обоснование теории упругости, акустики и волновой механики может быть сформулировано при помощи аналитической геометрии таких поверхностей в пространстве с бесконечно большим числом измерений.

В механике мы сталкиваемся с этой теорией в связи с колебаниями механических систем около положения равновесия. Из обычной аналитической геометрии известно, что изучение поверхностей второго порядка сильно облегчается, если оси системы координат совпадают с определенными осями симметрии, например с тремя взаимно перпендикулярными «главными осями» эллипсоида или гиперболоида.

Если уравнение задано относительно других осей, то следует найти главные оси и повернуть систему отсчета в новое положение. В физике это «приведение к главным осям» очень важно, потому что большая часть аналитических задач обычно решается лишь после выполнения этого преобразования.

Покажем теперь, как тесно связана задача о малых колебаниях механических систем около положения равновесия с определением главных осей для потенциальной энергии V . Главные оси поверхности второго порядка обладают определенными экстремальными свойствами. Их можно найти, отыскивая на поверхности те точки, для которых расстояния от начала координат имеют стационарные значения. Поэтому задача состоит в нахождении стационарного значения квадратичной формы

$$s^2 = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} q_i q_k \quad (5.10.16)$$

при дополнительном условии, что мы движемся по поверхности

минант системы равен нулю. Мы получаем таким образом фундаментальное детерминантное условие, называемое «характеристическим уравнением», из которого можно определить «характеристические значения» λ_i

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11}, & \dots, & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} - \lambda a_{n1}, & \dots, & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.10.23)$$

Это алгебраическое уравнение n -й степени относительно λ должно иметь n корней, среди которых возможны и комплексные. Обозначим эти n корней через

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \quad (5.10.24)$$

Среди корней могут оказаться кратные. Мы считаем такой случай вырожденным и будем устранять вырождение путем сколь угодно малого изменения коэффициентов a_{ik} и b_{ik} . При этом кратные корни разделяются, а затем, уже после исследования, можно выполнить предельный переход. Поэтому можно исключить случай кратных корней и считать, что *все λ_i различны*.

Для каждого λ_i можно найти соответствующее решение системы линейных уравнений (5.10.22). Решение находится с точностью до произвольного множителя, общего для всех q_i ; этот множитель, однако, однозначно определяется (с точностью до знака) из дополнительного условия (5.10.21).

Значения $q_1, \dots, q_n$, соответствующие некоторому λ_i , могут рассматриваться как компоненты вектора $\mathbf{p}_i$ единичной длины. Назовем этот вектор i -й «главной осью» поверхности (5.10.17). Существует n таких главных осей

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, \quad (5.10.25)$$

соответствующих n характеристическим значениям (5.10.24).

Эти главные оси обладают рядом характерных свойств, которые мы сейчас кратко перечислим.

1. *Корни характеристического уравнения инвариантны относительно произвольных линейных преобразований координат q_i* . Умножив уравнения (5.10.22) соответственно на $q_1, \dots, q_n$ и затем сложив их все, получим справа произ-

ведение $\lambda \cdot 1$ ввиду дополнительного условия (5.10.21), а слева величину $2V$. Это приводит к соотношению

$$\lambda = 2V. \quad (5.10.26)$$

Следовательно, произвольное линейное преобразование координат q_i , не изменяющее значений потенциальной энергии V , оставляет неизменным также и значения λ_i . В то время как n главных осей P_i определяют направления, в которых потенциальная энергия достигает своих стационарных значений, корни λ_i определяют сами эти значения V_i , согласно равенству

$$V_i = \frac{\lambda_i}{2}. \quad (5.10.27)$$

2. Все корни являются действительными, и потому главные оси — это n действительных векторов в n -мерном евклидовом пространстве. Корни λ_i алгебраического уравнения n -й степени являются, вообще говоря, комплексными; то обстоятельство, что они оказываются действительными для характеристического уравнения (5.10.23), обусловлено симметрией элементов детерминанта a_{ik} и b_{ik}

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}. \quad (5.10.28)$$

Для доказательства этой важной теоремы поступим следующим образом. Предположим, что некоторый корень λ_i является комплексным, и решим линейные уравнения (5.10.22) при этом значении λ . В качестве q_i получаются некоторые комплексные числа. Как известно, любое алгебраическое соотношение между комплексными числами остается справедливым при замене i на $-i$. Следовательно, мы можем выписать уравнения (5.10.22), заменив q_i на q_i^* , а λ на λ^* , где звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины. Умножим первую систему уравнений последовательно на $q_1^*, \dots, q_n^*$, а вторую — на $q_1, \dots, q_n$ и составим в каждом из этих случаев сумму уравнений. В левых частях уравнений мы получим в обоих случаях одинаковые суммы, а сравнение правых частей приведет к соотношению

$$(\lambda - \lambda^*) \sum_{i, k=1}^n a_{ik} q_i q_k^* = 0. \quad (5.10.29)$$

После замены q_k на $\alpha_k + i\beta_k$, где α_k и β_k — действительные числа, и при учете (5.10.28) равенство (5.10.29) переходит в

$$(\lambda - \lambda^*)(s_1^2 + s_2^2) = 0, \quad (5.10.30)$$

где s_1 и s_2 — действительные расстояния в n -мерном евклидовом пространстве, не равные одновременно нулю. Следовательно,

$$\lambda = \lambda^*, \quad (5.10.31)$$

т. е. λ должны быть действительными.

3. Главные оси $\mathbf{p}_i$ взаимно перпендикулярны и потому образуют ортогональную систему координат в n -мерном пространстве. Это фундаментальное свойство главных осей поверхности второго порядка может быть доказано при помощи того же соотношения (5.10.29), которое мы раньше использовали для доказательства действительности корней λ_i . Теперь его следует лишь по-иному интерпретировать. Предположим, что λ и λ^* — два различных характеристических корня, а q_i и q_i^* определяют соответственно две главные оси, соответствующие этим двум λ_i . В этом случае первый сомножитель в (5.10.29) не может обратиться в нуль, потому что λ и λ^* различны. Следовательно, в нуль должен обратиться второй сомножитель. Это дает

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik} q_i q_k^* = 0. \quad (5.10.32)$$

В соответствии с (5.10.11) это уравнение в векторной форме выглядит следующим образом:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^* = 0. \quad (5.10.33)$$

Это означает, что две главные оси $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}^*$, а значит, и любые $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_k$ ортогональны между собой.

Из упомянутых основных свойств векторов $\mathbf{p}_i$ видно, что n главных осей могут быть выбраны в качестве осей новой прямоугольной системы координат. Аналитически это преобразование выполняется следующим образом. Обозначим решение $q_1, \dots, q_n$, полученное в задаче о главных осях при определенном λ_i , через

$$\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}. \quad (5.10.34)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n b'_{i\alpha} u_{\alpha} = \lambda u_i \quad (5.10.38)$$

с дополнительным условием

$$u_1^2 + \dots + u_n^2 = 1. \quad (5.10.39)$$

В качестве λ в уравнении (5.10.38) могут быть последовательно взяты n *прежних* значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, поскольку λ_i инвариантны относительно произведенного преобразования. Более того, решение задачи о главных осях в новой системе отсчета тривиально, поскольку главные оси совпадают с координатными осями. Решение, соответствующее λ_i , имеет вид

$$u_i = 1, \text{ все остальные } u_k = 0. \quad (5.10.40)$$

Подставив эти значения в уравнения (5.10.38), получим

$$\begin{aligned} b'_{ii} &= \lambda_i, \\ b'_{ik} &= 0 \quad (i \neq k). \end{aligned} \quad (5.10.41)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия V в новой системе отсчета имеет вид

$$V = \frac{1}{2} (\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \dots + \lambda_n u_n^2). \quad (5.10.42)$$

Мы получили замечательный результат: в новой системе отсчета диагональную форму принимает не только квадрат расстояния s^2 , но и потенциальная энергия V . *Одним линейным преобразованием координат можно одновременно привести к диагональному виду две квадратичные формы, из которых одна положительно определенная* (в остальном эти формы произвольны).

В задачах механики подобное преобразование приводит к значительному упрощению выражений для потенциальной и кинетической энергий. Выражение для кинетической энергии в новой системе принимает вид

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dots + \dot{u}_n^2), \quad (5.10.43)$$

в то время как потенциальная энергия равна

$$V = \frac{1}{2} (\lambda_1 u_1^2 + \dots + \lambda_n u_n^2). \quad (5.10.44)$$

Уравнения движения Лагранжа выглядят теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \lambda_1 u_1 &= 0, \\ \dots \dots \dots & \\ \ddot{u}_n + \lambda_n u_n &= 0. \end{aligned} \quad (5.10.45)$$

Переменные в этих дифференциальных уравнениях полностью *разделены*, и уравнения легко интегрируются. Это дифференциальные уравнения простого гармонического колебания, и они имеют решения

$$u_i = A_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + B_i \sin \sqrt{\lambda_i} t, \quad (5.10.46)$$

где A_i и B_i — произвольные константы интегрирования.

Задача. Дан двойной маятник, состоящий из двух математических маятников одинаковой длины и массы, второй из которых подвешен к грузу первого. В качестве координат взяты два бесконечно малых угла θ_1 и θ_2 между нитями и вертикалью.

1. Записать выражения для кинетической и потенциальной энергий системы.

2. Записав линейный элемент, показать, что две оси Q_1 и Q_2 косоугольной системы координат расположены под углом 45° друг к другу.

3. Показать, что главные оси P_1 и P_2 направлены по биссектрисам угла между Q_1 и Q_2 и дополнительного угла.

4. Показать, что частоты, связанные с двумя главными осями, равны

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \nu, \\ \nu_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \nu, \end{aligned}$$

где ν — собственная частота каждого из математических маятников.

Следует рассмотреть две принципиально различные возможности. Мы уже знаем, что λ_i всегда *действительны*. Однако мы не можем гарантировать, что они всегда *положительны*. В общем случае часть из них может быть положительна, а часть — отрицательна. Предположим, что *все* λ_i *положительны*. В этом случае из решения (5.10.46) видно, что *С-точка колеблется вблизи положения*

равновесия P . Движение состоит из суперпозиции монохроматических колебаний с частотами

$$\nu_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (5.10.47)$$

и с малыми, но постоянными амплитудами и произвольными начальными фазами. Эти колебания происходят в направлениях взаимно перпендикулярных главных осей $\mathbf{p}_i$. Суперпозиция всех этих колебаний образует «фигуры Лиссажу» в n -мерном пространстве конфигураций. Из-за взаимной ортогональности эти колебания называются «нормальными колебаниями». Их число всегда равно числу степеней свободы механической системы. Частоты ν_i меняются при переходе от одной главной оси к другой, что дает основание говорить о «спектре» нормальных колебаний.

Замечательным примером колебаний механической системы вблизи положения равновесия является случай твердого тела, молекулы которого расположены вблизи положения равновесия, но находятся в состоянии непрерывных беспорядочных колебаний в связи с тепловым движением. Все эти колебания могут быть аналитически изображены одной C -точкой, помещенной в $3N$ -мерном евклидовом пространстве, где N — число молекул, составляющих твердое тело. Движение C -точки можно представить в виде гармонических колебаний определенных частот вдоль взаимно перпендикулярных осей. Каждой степени свободы отвечает одна ось. Спектр этих колебаний простирается от очень низких упругих и акустических частот вплоть до очень высоких инфракрасных частот. Распределение амплитуд и фаз определяется статистическими законами и является функцией абсолютной температуры T .

Предположим теперь, что по крайней мере один из характеристических корней λ_i — например, корень λ_n — отрицателен. Положив в этом случае

$$\sqrt{-\lambda_n} = \nu_n, \quad (5.10.48)$$

получим решение последнего из уравнений Лагранжа в виде

$$u_n = A_n e^{\nu_n t} + B_n e^{-\nu_n t}. \quad (5.10.49)$$

Это решение уже не периодическое, а экспоненциальное. Достаточно малейшего толчка вдоль оси $\mathbf{p}_n$ для того, чтобы привести C -точку в состояние движения, которое, не являясь уже колебательным, начнет уводить ее все дальше и дальше от положения равновесия.

Таким образом, изучение малых колебаний вблизи положения равновесия приводит нас к заключению, что сле-

дует различать два типа равновесия, физически глубоко различных. Первый случай реализуется, когда все корни характеристического уравнения положительны. Равновесие тогда называется «устойчивым», так как малые возмущения не выводят систему из положения равновесия, а лишь вызывают колебания вблизи этого положения. Второй случай реализуется, когда по крайней мере один из характеристических корней отрицателен. Тогда достаточно малейшего возмущения, чтобы вывести систему из первоначального положения равновесия. Это означает, что равновесие, даже если оно и достигается в какой-то момент, не может поддерживаться в течение длительного времени. Равновесие такого типа называется неустойчивым. В промежуточном случае, когда среди корней λ_i нет отрицательных, но один из корней равен нулю, говорят о «нейтральном» равновесии.

Обсудим связь между материалом, изложенным в данном пункте, где речь шла об описании механических явлений вблизи положения равновесия, и *макроскопической* картиной пространства конфигураций. Мы оперировали с координатами, имевшими значение *локальных* координат. Они отражали малые локальные вариации δq_i координат q_i^0 вблизи положения равновесия P . Потенциальная энергия V вследствие разложения в ряд Тейлора также отражала *локальные вариации* потенциальной энергии V в окрестности точки P . Линейные члены выпадали, поскольку мы разлагали функцию вблизи точки равновесия. Разложение начиналось с членов второго порядка и давало то, что в общем случае называется «второй вариацией» функции (см. гл. II, п. 3). Теперь мы видим, что та же самая вторая вариация, которая была существенна при определении экстремальных свойств стационарной точки, существенна и в вопросе об устойчивости либо неустойчивости состояния равновесия. Если все λ_i положительны, то вторая вариация является положительно определенной формой; это означает, что потенциальная энергия увеличивается в любом направлении от P . Следовательно, потенциальная энергия имеет *локальный минимум* в точке P . Утверждения о наличии минимума потенциальной энергии и существовании устойчивого положения равновесия эквивалентны. Если по крайней мере один из корней λ_i отрицателен, то вторая вариация меняет знак и стационарное значение потенциальной энергии не является уже истинным экстремумом. В то же время соответствующее положение равновесия неустойчиво.

Вопросы устойчивости необычайно важны в некоторых задачах теории упругости. Тонкие оболочки при слишком большой нагрузке внезапно выгибаются. Выгибание происходит не путем постепенного преодоления сил упругости, а «хлопком». Явление «хлопка» означает, что при определенной нагрузке устойчивое равновесие оболочки сменяется неустойчивым. Решение задачи о «хлопке» автоматическим

приводит к исследованию второй вариации $\delta^2 V$ потенциальной энергии в точке, где δV равно нулю. Если можно найти характеристические значения λ_i $\delta^2 V$, то знаки этих λ_i сразу же решают вопрос об устойчивости равновесия. Пока наименьшее из λ_i положительно, оболочка устойчива; если же наименьшее λ_i отрицательно, то оболочка неустойчива. Критическая нагрузка соответствует случаю, когда наименьшее из λ_i обращается в нуль.

Часто бывает очень сложно найти характеристический спектр второй вариации, и более приемлемым оказывается другой путь решения задачи. Вторая вариация минимизируется и определяется ее знак в минимуме. При положительном знаке равновесие устойчиво, в противном случае — неустойчиво. Условие «хлопка» получается приравнением минимального значения $\delta^2 V$ к нулю.

Резюме. Движение произвольной механической системы вблизи положения устойчивого равновесия удобно изучать с помощью пространства конфигураций. В этом случае пространство евклидово, а переменные q_i служат в нем прямолинейными координатами. Главные оси квадратичной формы потенциальной энергии определяют n взаимно ортогональных направлений в пространстве конфигураций, которые могут быть выбраны в качестве осей естественной системы координат. С-точка совершает гармонические колебания вдоль этих направлений с частотами, меняющимися от одной оси к другой. Амплитуды и фазы этих колебаний, называемых «нормальными», произвольны и зависят от начальных условий. Произвольное движение системы является суперпозицией нормальных колебаний. В результате такого движения С-точка описывает фигуры Лиссажу в пространстве конфигураций. Для устойчивости равновесия требуется, чтобы корни характеристического уравнения были положительны, так как в противном случае нарушается колебательный характер движения.

ГЛАВА VI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Кто из богов придумал этот знак?
Какое исцеленье от уныния
Дает мне сочетание этих линий!
Расходится томивший душу мрак.
Все проясняется, как на картине.
И вот мне кажется, что сам я — бог
И вижу, символ мира разбирая,
Вселенную от края и до края.

(Фауст, разглядывающий
знак макрокосма), Гёте,
«Фауст», часть I, сцена 1¹

Введение. Принцип наименьшего действия и его обобщение, произведенное Гамильтоном, переводят задачу механики в область вариационного исчисления. Уравнения движения Лагранжа, вытекающие из стационарности некоторого определенного интеграла, являются основными дифференциальными уравнениями теоретической механики. И тем не менее мы еще не достигли конца пути. Функция Лагранжа квадратична по скоростям. Гамильтон обнаружил замечательное преобразование, делающее функцию Лагранжа линейной по скоростям при одновременном удвоении числа механических переменных. Это преобразование применимо не только к специальному виду функции Лагранжа, встречающемуся в механике. Преобразование Гамильтона сводит все лагранжевы задачи к особенно простой форме, названной Якоби «канонической» формой. Первоначальные n дифференциальных лагранжевых уравнений второго порядка заменяются при этом $2n$ дифференциальными уравнениями первого порядка, так называемыми «каноническими уравнениями», которые замечательны своей простой и симметричной структурой. Открытие этих дифференциальных уравнений ознаменовало собой начало новой эры в развитии теоретической механики.

1. Дуальное преобразование Лежандра. Французский математик Лежандр (1752—1833) в своих работах по изучению дифференциальных уравнений обнаружил одно важное преобразование, которое обладает замечательными свойствами, обусловившими его применение во многих проблемах анализа. В механике оно приводит к новой форме уравнений

¹ Перевод Б. Пастернака.

Лагранжа, которая будет очень удобна для дальнейших математических исследований. Перед тем как применить это преобразование к уравнениям Лагранжа, обсудим его общие математические свойства.

Пусть задана функция n переменных $u_1, \dots, u_n$

$$F = F(u_1, \dots, u_n). \quad (6.1.1)$$

Введем новую совокупность переменных $v_1, \dots, v_n$ с помощью преобразования

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}. \quad (6.1.2)$$

Предположим, что так называемый «гессиан», т. е. детерминант, образованный из вторых частных производных F , отличен от нуля. Этим гарантируется независимость n переменных v_i , и из уравнений (6.1.2) можно выразить u_i , представив их как функции v_i .

Определим новую функцию G следующим образом:

$$G = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F. \quad (6.1.3)$$

Выразим u_i через v_i и подставим в (6.1.3). Функция G окажется выраженной только через новые переменные v_i

$$G = G(v_1, \dots, v_n). \quad (6.1.4)$$

Рассмотрим теперь бесконечно малую вариацию функции G , вызванную произвольными бесконечно малыми вариациями v_i . Из (6.1.3) и (6.1.4) получим

$$\begin{aligned} \delta G &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i \delta v_i + v_i \delta u_i) - \delta F = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[u_i \delta v_i + \left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right]. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Поскольку G — функция одних только v_i , мы должны были бы выразить u_i через v_i и, следовательно, вариации u_i через вариации v_i . Однако из (6.1.5) видно, что эта операция излишня, так как коэффициенты при δu_i автоматически равны нулю в соответствии с определением переменных v_i , данным в (6.1.2). Поэтому из (6.1.5) сразу получаем

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}. \quad (6.1.6)$$

Этот результат выражает замечательный дуализм преобразования Лежандра, который можно пояснить следующей схемой:

	Старая система	Новая система
Переменные:	$u_1, \dots, u_n;$	$v_1, \dots, v_n;$
Функции:	$F = F(u_1, \dots, u_n);$	$G = G(v_1, \dots, v_n).$
	Преобразование	
	$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad (\alpha)$	$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}, \quad (6.1.7)$
	$G = \sum u_i v_i - F, \quad (\beta)$	$F = \sum u_i v_i - G,$
	$G = G(v_1, \dots, v_n). \quad (\gamma)$	$F = F(u_1, \dots, u_n).$

То есть так же, как новые переменные представляют собой частные производные старой функции по старым переменным, старые переменные являются частными производными новых функций по новым переменным.

Преобразование, определяемое (6.1.7), полностью симметрично. Название «старая система» и «новая система» связаны с тем, начинаем ли мы справа или слева. Но ведь в действительности можно с равным успехом начинать и справа и слева. В преобразовании Лежандра «старая» и «новая» системы полностью эквивалентны.

Область применимости преобразования Лежандра можно несколько расширить. Предположим, что функция F зависит от двух систем переменных $u_1, \dots, u_n$ и $w_1, \dots, w_m$:

$$F = F(w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_n). \quad (6.1.8)$$

Переменные w_i не зависят от переменных u_i . Они входят в F просто как параметры и не участвуют в преобразова-

нии, которое выполняется точно так же, как и раньше. Новая функция G также будет содержать ω_i . Мы будем называть u_i активными, а ω_i — пассивными переменными преобразования.

Возвращаясь к уравнению (6.1.5), найдем полную вариацию G при произвольных вариациях всех v_i и ω_i . Наличие переменных ω_i приводит к появлению соотношений, которых не было раньше. Соотношения (6.1.2) остаются неизменными; однако в дополнение к ним появляются равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_i} = - \frac{\partial G}{\partial \omega_i}. \quad (6.1.9)$$

Резюме. Преобразование Лежандра заменяет данную функцию заданной системы переменных новой функцией новой системы переменных. Старые и новые переменные связаны между собой точечным преобразованием. Замечательным свойством преобразования Лежандра является его симметрия относительно обеих систем. То преобразование, которое переводит старую систему в новую, приводит также от новой системы к старой.

2. Преобразование Лежандра в применении к функции Лагранжа. Функция Лагранжа L , появляющаяся в вариационной задаче, зависит в общем случае от n позиционных координат q_i , n скоростей $\dot{q}_i$ и времени t

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (6.2.1)$$

Для нас сейчас неважно, что $\dot{q}_i$ — скорости действительного движения, в своих рассуждениях мы будем их считать просто переменными, независимыми от q_i .

Применим преобразование Лежандра, считая $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ активными переменными, а остальные переменные пассивными. Другими словами, $\dot{q}_i$ соответствуют u_i , а q_i и t соответствуют ω_i в общей схеме. Поэтому в данной задаче число m пассивных переменных равно $n + 1$.

Следуя общей схеме преобразования Лежандра, произведем последовательно следующие три операции.

1. Введем «новые переменные», которые теперь называются импульсами и обозначаются через p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (6.2.2)$$

2. Введем новую функцию, назвав ее «полной энергией» и обозначив ее через H ,

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (6.2.3)$$

3. Выразим новую функцию H через новые переменные p_i , разрешив уравнения (6.2.2) относительно $\dot{q}_i$ и подставив их в (6.2.3). В результате получим

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), \quad (6.2.4)$$

где H теперь называется «функцией Гамильтона». Общая схема преобразования выглядит таким образом:

Старая система

Новая система

Функция: Лагранжа L ,

Гамильтона H .

Переменные: Скорости,

Импульсы.

Пассивные переменные: позиционные координаты, время.

Дуальная природа преобразования отражается в следующих уравнениях:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, & \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ H &= \sum p_i \dot{q}_i - L, & L &= \sum p_i \dot{q}_i - H, \\ H &= H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), & L &= L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Мы исходили из функции Лагранжа L и с помощью трех последовательных операций построили функцию Гамильтона H . Точно так же можно начать с функции Гамильтона H и построить тремя последовательными операциями функцию Лагранжа L .

Уравнения (6.1.9) общей схемы теперь принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t}.\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Резюме. Преобразование Лежандра можно применить к функции Лагранжа L , считая скорости $\dot{q}_i$ активными переменными преобразования, а позиционные координаты q_i и время t — пассивными. Скорости преобразуются в импульсы; функция Лагранжа преобразуется в функцию Гамильтона.

3. Преобразование уравнений движения Лагранжа. Уравнения движения Лагранжа являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно позиционных координат q_i . Однако, введя в качестве промежуточных величин импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\tag{6.3.1}$$

эти уравнения можно записать в виде дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.\tag{6.3.2}$$

Мы попросту назвали некоторую совокупность величин «импульсами» с целью упростить форму записи уравнений Лагранжа. Однако введение p_i привело к замене первоначальной системы из n дифференциальных уравнений второго порядка системой из $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, а именно из уравнений (6.3.1) и (6.3.2). Введение p_i привело к тому, что для записи уравнений не требуются производные выше первого порядка. Эта процедура аналогична тому, как в векторной механике, определив импульс как «произведение массы на скорость», мы заменяем «произведение массы на ускорение» на «скорость изменения импульса».

Применим теперь преобразование Лежандра, подобно тому как мы это сделали в предыдущем пункте. Вследствие дуализма преобразования вместо уравнений (6.3.1) можно написать

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (6.3.3)$$

Уравнения (6.3.1) и (6.3.3) эквивалентны друг другу. Следует отметить, что эти уравнения не отражают какого-либо физического закона. Уравнения (6.3.1) являются просто *определением* импульса, а в уравнениях (6.3.3) это определение переписано таким образом, чтобы скорости были выражены через импульсы, а не импульсы через скорости.

Уравнения движения Лагранжа содержатся в уравнениях (6.3.2). Применяя преобразование Лежандра, их можно записать в виде [см. (6.2.6)]

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6.3.4)$$

Теперь, наконец, уравнения движения Лагранжа полностью заменены новой системой дифференциальных уравнений, которые называются «каноническими уравнениями Гамильтона»,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (6.3.5)$$

Эти уравнения полностью эквивалентны первоначальным лагранжевым уравнениям, являясь лишь их новой математической формулировкой. Однако новые уравнения обладают огромным преимуществом по сравнению с первоначальными: производные по времени в них появляются лишь в левых частях уравнений, потому что функция Гамильтона не содержит производных $\dot{q}_i$ или $\dot{p}_i$ по времени t .

Эта замечательная система уравнений впервые появилась в одной из статей Лагранжа (1809), в которой шла речь о теории возмущений для механических систем. Лагранж не заметил глубокой связи между этими уравнениями и уравнениями движения. Первый указал на истинное значение этих уравнений Коши (в неопубликованном мемуаре в 1831 г.). Гамильтон положил эти уравнения в основу своих выдающихся исследований в области механики. Поэтому название «канонические уравнения Гамильтона» вполне оправдано, хотя работа Гамильтона появилась лишь в 1835 г.

Резюме. Уравнения движения Лагранжа являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Применение преобразования Лежандра замечательным образом отделяет дифференцирование по времени от аналитических операций над переменными. Новые уравнения образуют систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка. Они называются «каноническими уравнениями».

4. Канонический интеграл. Уравнения системы (6.3.5) происходят из двух источников. Первая группа уравнений возникает в силу преобразования Лежандра и может рассматриваться как определение импульсов p_i . Вторая группа уравнений является следствием вариационного принципа. Вместе с тем явная симметрия полной системы уравнений заставляет предположить, что все они могут быть получены из какого-то единого принципа. Это действительно так.

Исходя из функции Гамильтона H и опираясь на дуализм преобразования Лежандра, можно построить функцию Лагранжа L . Функция L будет определяться выражением

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H. \quad (6.4.1)$$

Из этого выражения предстоит исключить p_i , выразив их через q_i и $\dot{q}_i$. Однако более детальное исследование показывает, что этого исключения *производить не нужно*.

Посмотрим, как варьирование p_i влияет на вариацию интеграла действия. Варьирование выражения (6.4.1) по p_i дает

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i, \quad (6.4.2)$$

но коэффициенты при δp_i равны нулю в силу преобразования Лежандра. Отсюда видно, что *произвольное варьирование p_i не влияет на вариацию L* . Следовательно, оно также не влияет и на интеграл от δL по времени. Это приводит к следующему важному результату. Раньше мы требовали обращения в нуль первой вариации интеграла действия

А при условии, что p_i не являются независимыми переменными, а суть некоторые заданные функции q_i и $\dot{q}_i$. Вариации p_i , таким образом, определялись вариациями $\dot{q}_i$. Однако, поскольку вариации p_i не влияют на вариацию интеграла действия, можно расширить формулировку первоначального вариационного принципа и утверждать, что интеграл действия принимает стационарное значение *даже и при произвольных вариациях p_i , когда p_i рассматриваются как вторая система независимых переменных.*

Поэтому нет необходимости что-либо менять в форме записи функции Лагранжа (6.4.1). Можно образовать интеграл действия

$$A = \int_{t_1}^{t_2} [\sum p_i \dot{q}_i - H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)] dt \quad (6.4.3)$$

и потребовать его стационарности при произвольных вариациях q_i и p_i . Эта новая вариационная задача содержит $2n$ переменных и дифференциальные уравнения Эйлера—Лагранжа могут быть записаны относительно всех q_i и p_i . Сделав это, получим $2n$ дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &\equiv \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L}{\partial p_i} &\equiv 0 - \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Это не что иное, как канонические уравнения (6.3.5), представляющие собой единую систему из $2n$ дифференциальных уравнений, полученных из интеграла действия (6.4.3). Мы больше не нуждаемся ни в первоначальной функции Лагранжа, ни в преобразовании Лежандра, при помощи которого была получена функция H . У нас есть теперь новый вариационный принцип, эквивалентный первоначальному, но имеющий перед ним некоторое преимущество вследствие более простой структуры получающихся дифференциальных уравнений — они уже не второго, а первого порядка. В уравнениях все производные выделены, а не скрыты какими-либо алгебраическими операциями.

Это замечательное упрощение получено за счет простоты формы нового интеграла действия (6.4.3), который мы будем

называть «каноническим интегралом». Подинтегральное выражение снова имеет вид «кинетическая энергия минус потенциальная энергия». Действительно, роль прежних позиционных координат q_i теперь играют переменные q_i и p_i , и второй член подинтегрального выражения является функцией только этих позиционных координат, первый же член зависит от скоростей. Замечательные свойства канонического интеграла связаны именно с *кинетической частью* подинтегрального выражения. Эта «кинетическая энергия» представляет собой теперь *простую линейную функцию скоростей* $\dot{q}_i$ ¹, а именно

$$p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \dots + p_n \dot{q}_n. \quad (6.4.5)$$

Нетрудно видеть, что каждому q_k соответствует определенное p_k . Поэтому p_k называется «сопряженными импульсами» и переменные вариационной задачи могут быть разбиты на пары

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}. \quad (6.4.6)$$

Замечательное преобразование уравнений Лагранжа, произведенное Гамильтоном, фактически означает, что произвольная сколь угодно сложная вариационная задача может быть преобразована в эквивалентную задачу с удвоенным количеством переменных и с кинетической частью, приведенной к простой форме. Это преобразование осуществляется без какого бы то ни было интегрирования, лишь при помощи дифференцирований и исключения переменных.

Обычные задачи механики приводят к функциям Лагранжа, не содержащим производных выше первого порядка. В общем же случае в вариационных задачах могут встретиться в подинтегральном выражении производные вплоть до m -го порядка. Эти задачи также могут быть преобразованы к нормальному виду при помощи канонического интеграла. Поэтому канонические уравнения Гамильтона могут считаться *нормальным видом, к которому приводится любая*

¹ В классической механике кинетическая энергия обычно бывает квадратичной функцией скоростей. Это, однако, отнюдь не обязательно. Преобразование к канонической форме может быть выполнено для произвольных сколь угодно сложных функций Лагранжа.

система дифференциальных уравнений, возникающих в вариационных задачах. В общем случае для приведения к нормальному виду также не требуется ничего, кроме дифференцирований и исключения переменных¹.

Задача. Рассмотреть задачу о нагруженном упругом стержне, приведенную в гл. II, п. 15, в частности интеграл (2.15.3). Ввести вспомогательный «импульс»

$$u = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}},$$

и преобразовать этот интеграл методом Гамильтона в

$$\int_0^t [u\ddot{y} - \Phi(y, \dot{y}, u)] dx.$$

Интегрирование по частям интеграла (2.15.3) преобразует первый член подинтегрального выражения в $-u\dot{y}$. Теперь мы имеем обычную лагранжеву задачу с переменными y и u , которая может быть преобразована в гамильтонову форму, что даст две пары канонических уравнений для четырех переменных y, u, p_1, p_2 ; они заменяют собой одно первоначальное дифференциальное уравнение четвертого порядка для y . Показать эквивалентность канонической системы и первоначального дифференциального уравнения. Очевидно, что этот метод перехода от вторых производных к первым производным применим при любом количестве переменных. В общем случае при наличии производных m -го порядка следует начать с вышших производных, сводя их к производным $(m-1)$ -го порядка; затем процесс повторяется до тех пор, пока в подинтегральном выражении останутся одни лишь первые производные. Это и означает, что подинтегральное выражение приведено при помощи преобразования Гамильтона к каноническому виду.

Отметим, что произвольную систему дифференциальных уравнений можно путем введения соответствующей системы независимых переменных $q_1, \dots, q_n$ привести к виду

$$\dot{q}_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t). \quad (6.4.7.)$$

Однако дифференциальные уравнения, вытекающие из вариационного принципа, обладают тем отличительным свой-

¹ Впервые на это обратил внимание русский математик М. Остроградский: *Mémoire sur les equations différentielles relative au problème des Isopérimètres*, *Mém. de l'Acad. de St. Pétersb.*, VI (1850), 385 (см. также сб. *Вариационные принципы механики* под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, М., 1959, стр. 315.—*Прим.ред.*). Ссылка взята из первого обзора Кейли (Cayley, первый обзор, стр. 186, см. библиографию).

ством, что их правые части сразу *получаются в таком виде из одной-единственной функции H путем дифференцирования. Функция H определяет собой всю систему уравнений.*

Особым свойством канонических уравнений является то, что они разбиваются на пары. При замене сопряженных переменных q_k , p_k комплексными переменными

$$\begin{aligned}\frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}} &= u_k, \\ \frac{q_k - ip_k}{\sqrt{2}} &= u_k^*\end{aligned}\quad (6.4.8)$$

двойная система канонических уравнений (6.3.5) заменяется *одной системой комплексных уравнений, а именно*

$$\frac{du_k}{idt} = - \frac{\partial H}{\partial u_k^*}. \quad (6.4.9)$$

Вследствие дуализма преобразования Лежандра *каждой гамильтоновой задаче можно поставить в соответствие лагранжеву задачу.* Для этого p_i выражаются через q_i и $\dot{q}_i$ при помощи уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (6.4.10)$$

а затем подставляются в подинтегральное выражение. Это дает функцию Лагранжа L , зависящую только от q_i и $\dot{q}_i$.

Резюме. Канонические уравнения Гамильтона могут рассматриваться как решение задачи Лагранжа с подинтегральным выражением особо простой структуры. Переменными в этой вариационной задаче являются варьируемые независимо друг от друга q_i и p_i . Подинтегральное выражение вариационной задачи приводится к нормальной форме

$$\sum p_i \dot{q}_i - H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)^1.$$

¹ См. приложение, стр. 396.

5. Фазовое пространство и фазовая жидкость. Переменными в каноническом интеграле являются q_i и p_i . Следовательно, новая вариационная задача касается $2n$ степеней свободы. Если мы желаем изобразить эту новую ситуацию геометрически, то нам придется использовать пространство $2n$ измерений. «Положение» механической системы теперь определяется наряду с прежними позиционными координатами лагранжевой механики также и импульсами. Великий американский ученый Гиббс назвал это $q - p$ пространство, в котором одна точка C определяет обобщенное «положение» механической системы «фазовым пространством». В лагранжевой механике мы говорили о «пространстве конфигураций», в которое включались только переменные q_i . В гамильтоновой механике мы говорим о «фазовом пространстве», использующем q_i и p_i , как совокупность $2n$ переменных.

В пространстве конфигураций имело смысл введение определенного вида геометрии, причем эта геометрия оказалась римановой. В фазовом пространстве ситуация иная: оно не имеет определенной метрики, и мы для удобства будем считать, что q_i и p_i являются прямоугольными координатами $2n$ -мерного евклидова пространства. Поскольку нет особых оснований для введения метрики в фазовом пространстве, евклидова геометрия столь же хороша, как и всякая другая.

Удвоение числа измерений, произведенное при введении фазового пространства, на первый взгляд кажется ненужным усложнением. Однако при теоретических исследованиях задач движения использование фазового пространства ведет к ряду существенных преимуществ. Одно из наиболее важных преимуществ станет наглядным, если рассмотреть *множество траекторий* C -точки, сначала в лагранжевом пространстве конфигураций, а затем в гамильтоновом фазовом пространстве. Пока речь идет об одной траектории, то движущаяся C -точка в обоих случаях описывает некоторую кривую. Однако выделение одной конкретной траектории из множества всех возможных траекторий часто сильно затрудняет теоретические исследования. На многие вопросы механики нельзя дать удовлетворительный ответ, выделяя одно частное решение уравнений движения, соответствующее какому-то конкретному выбору начальных условий.

Необходимо получить *общее* решение, удовлетворяющее произвольным начальным условиям.

Попытавшись изобразить все множество траекторий в лагранжевом пространстве конфигураций, мы получим безнадежно запутанное переплетение линий. Движение может начинаться из любой точки пространства конфигураций в *произвольном направлении* и с произвольной начальной скоростью. Невозможно получить какое-либо упорядоченное представление всех этих линий. Обратимся теперь к фазовому пространству уравнений Гамильтона — уравнений не *второго*, а *первого* порядка. При заданном положении *S*-точки эти уравнения определяют значение ее скорости. Движение может начаться в любой точке фазового пространства, но *задание одной точки P однозначно определяет всю траекторию*. Выражаясь аналитическим языком, можно сказать, что для полного решения канонических уравнений (6.3.5) нужно знать q_i и p_i , как функции времени t и $2n$ констант интегрирования, которые можно интерпретировать как значения $2n$ координат фазового пространства в момент времени $t = 0$

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0, t), \\ p_i &= g_i(q_1^0, \dots, q_n^0, p_1^0, \dots, p_n^0, t). \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Это полное решение канонических уравнений можно изобразить в упорядоченном виде, без каких бы то ни было пересечений, если $2n$ координат q_i , p_i рассматривать как различные измерения фазового пространства. Геометрическая картина получается еще более полной, если добавить еще одно измерение, вводя время t в качестве $(2n + 1)$ -й координаты. Картан¹ назвал это $(2n + 1)$ -мерное пространство «пространством состояний» (espace des états). В пространстве состояний задача о движении системы полностью геометризуется и полное решение канонических уравнений изображается в виде бесконечного множества кривых, *заполняющих* $(2n + 1)$ -мерное пространство. Эти кривые нигде не пересекаются. Действительно, пересечение двух кривых означало бы, что в одной и той же точке пространства состояний возможны две касательные, что исключается,

¹ Cartan, Invariants intégraux, p. 4, см. библиографию.

так как канонические уравнения в каждой точке этого пространства определяют единственную касательную.

Полученная геометрическая и аналитическая картина находится в полной аналогии с движением *жидкости*. Представим себе трехмерное движение обычной жидкости, с которой оперирует гидродинамика. Это движение можно описать двумя способами: «с помощью частиц» и «с помощью поля».

При первом способе рассматривается отдельная частица жидкости и прослеживается изменение ее положения со временем t , начиная с некоторого начального положения x_0, y_0, z_0

$$\begin{aligned}x &= f(x_0, y_0, z_0, t), \\y &= g(x_0, y_0, z_0, t), \\z &= h(x_0, y_0, z_0, t).\end{aligned}\tag{6.5.2}$$

С другой стороны, можно рассмотреть «поле скоростей», существующее в некоторый момент времени t и заданное уравнениями

$$\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \dot{y} = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \dot{z} = \frac{\partial h}{\partial t}.\tag{6.5.3}$$

Разрешим уравнения (6.5.2) относительно x_0, y_0, z_0 , выразив их в виде функций x, y, z, t . Подставив затем полученные выражения в (6.5.3), получим $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ как функции x, y, z и t

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= v(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= w(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{6.5.4}$$

Это и есть описание движения жидкости с помощью *поля*, которое определяет вектор скорости в любой точке пространства в любой момент времени. Из заданного описания с помощью частиц можно получить описание с помощью поля путем дифференцирований и исключения переменных. С другой стороны, для получения описания второго типа из первого нужно *проинтегрировать* уравнения (6.5.4). Оба способа описания эквивалентны.

Эта гидродинамическая картина полностью переносится на фазовое пространство. Единственная разница заключается в том, что вместо трех координат x, y, z имеются $2n$ ко-

ординат $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$. Описание с помощью частиц получается в результате интегрирования канонических уравнений. Поведение $2n$ -мерной фазовой жидкости подобно поведению обычной жидкости.

Резюме. Пространство конфигураций канонических уравнений имеет $2n$ измерений, а именно n позиционных координат q_i и n импульсов p_i , и все они являются независимыми переменными вариационной задачи. Это $2n$ -мерное пространство называется «фазовым пространством». Вводя время в качестве дополнительной переменной, получим $(2n + 1)$ -мерное пространство, которое называется «пространством состояний». Геометрически движение можно представить в виде движения $2n$ -мерной жидкости, называемой «фазовой жидкостью». Каждая отдельная линия тока движущейся жидкости определяет собой движение механической системы при соответствующих начальных условиях; движение жидкости в целом определяет общее решение при произвольных начальных условиях.

6. Теорема сохранения энергии как следствие канонических уравнений. Канонические уравнения

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}\tag{6.6.1}$$

получают новый смысл, если их интерпретировать гидродинамически, имея в виду движение фазовой жидкости. Они определяют скорость частиц жидкости в определенной точке фазового пространства в определенный момент времени. Оказывается, что особые типы движения жидкости, представляющие интерес в обычной гидродинамике, интересны также и при движении фазовой жидкости.

Одним из таких типов является *стационарное* движение жидкости. В нем поле скоростей не зависит от времени t . Хотя жидкость движется и частицы все время изменяют

свое положение, скорость в *определенной точке пространства* постоянна. Это означает, что в описании с помощью поля правые части уравнений (6.5.4) явно не зависят от времени t .

Такая же ситуация возникает в потоке фазовой жидкости в случае консервативных (склерономных) систем. Здесь функция Лагранжа, а следовательно, и функция Гамильтона, не зависят от t

$$H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \quad (6.6.2)$$

Поэтому правые части уравнений (6.6.1) не зависят от времени, откуда сразу следует, что *фазовая жидкость в случае консервативных систем находится в состоянии стационарного движения*.

Второй фундаментальной теоремой, которая может быть получена для таких систем, является *теорема о сохранении энергии*. Дифференцирование уравнений (6.6.2) дает

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (6.6.3)$$

Из канонических уравнений (6.6.1) сразу видно, что

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (6.6.4)$$

и, следовательно,

$$H = \text{const} = E. \quad (6.6.5)$$

Эта теорема придает функции H физический смысл «полной энергии». Если $L = T - V$, и T — квадратичная функция скоростей, в то время как V от скоростей не зависит, то

$$H = T + V. \quad (6.6.6)$$

В релятивистской механике ни одно из этих условий не выполняется. Тем не менее теорема о сохранении энергии (6.6.5) остается справедливой, но функция H определяется в соответствии с общей формулой (6.2.3)

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (6.6.7)$$

Теорема о сохранении энергии (6.6.5) имеет интересную геометрическую интерпретацию в связи с движением фазовой жидкости. Уравнение

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E \quad (6.6.8)$$

определяет некоторую поверхность в $2n$ -мерном пространстве. Если константа E может принимать произвольные значения, то мы получаем бесконечное семейство поверхностей, заполняющих все фазовое пространство. Теорема о сохранении энергии утверждает, что *частица жидкости, начавшая свое движение на некоторой изоэнергетической поверхности, остается на этой поверхности в течение всего движения, независимо от его продолжительности.*

Резюме. Если функция Гамильтона H не зависит от времени t , то механическая система консервативна. Такие системы характеризуются двумя особыми свойствами фазовой жидкости:

1. Движение фазовой жидкости является *стационарным*.

2. Каждая частица жидкости остается все время на «изоэнергетической поверхности» $H = E$.

7. Теорема Лиувилля. Физическая жидкость иногда под действием достаточно больших сил испытывает изменение объема. Если же в процессе движения произвольный объем жидкости остается неизменным, то мы говорим о «несжимаемой жидкости». Аналитически несжимаемость жидкости можно описать двумя способами. В описании с помощью частиц (6.5.2) условием несжимаемости является тождественное равенство единице «функционального детерминанта» от x, y, z по x_0, y_0, z_0 . В описании с помощью поля (6.5.4) условие несжимаемости выглядит так:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.7.1)$$

Фазовая жидкость, связанная с каноническими уравнениями, обладает тем интересным свойством, что она *имитирует*

поведение несжимаемой жидкости. Поскольку жидкость имеет $2n$ измерений, то естественным обобщением уравнения (6.7.1) является

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_i} + \frac{\partial p_i}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (6.7.2)$$

Из канонических уравнений (6.6.1) непосредственно следует, что это соотношение выполняется, причем не только для консервативных, но и для произвольных систем. Напомним теперь, что теорема Грина, переводящая объемный интеграл от дивергенции в интеграл, определяющий поток через поверхность, применима в случае n измерений в такой же степени, как и в случае трех измерений. Ввиду наличия такого преобразования уравнение для дивергенции (6.7.2) равносильно утверждению, что *полный поток фазовой жидкости через любую замкнутую поверхность в фазовом пространстве всегда равен нулю.* Это в свою очередь означает, что *фазовая жидкость движется подобно несжимаемой жидкости.* Эта теорема была впервые сформулирована Лиувиллем (1838) и поэтому называется «теоремой Лиувилля».

Теорема Лиувилля позволяет добавить к закону сохранения энергии еще один закон сохранения. Выделим произвольную $2n$ -мерную область фазового пространства с объемом

$$\sigma = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (6.7.3)$$

и посмотрим, что происходит с точками этого объема при движении фазовой жидкости. Хотя форма области может искажаться, *ее объем в процессе движения остается неизменным*

$$\sigma = \text{const.} \quad (6.7.4)$$

Пример. Для механической системы лишь с одной степенью свободы фазовое пространство становится двумерным, а пространство состояний — трехмерным. Поэтому в этом простом случае поведение фазовой жидкости можно изобразить особенно наглядно при помощи нашего обычного пространства. «Энергетические поверхности» в этом случае сводятся к кривым, причем эти кривые определяют непосредственно линии тока двумерной фазовой жидкости. Более того, хотя картина линий тока является статической и не содержит скоростей, с которыми частицы жидкости движутся вдоль линий тока, эти скорости можно получить из расстояний между со-

седними линиями тока, воспользовавшись несжимаемостью фазовой жидкости.

Задача. Два следующих рисунка соответствуют таким двум задачам.

1. Линейный осциллятор

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k^2 q^2. \quad (6.7.5)$$

2. Движение частицы между двумя твердыми стенками с упругими отражениями от стенок.

Дать анализ рис. 6 и 7. Линиями тока в первой задаче являются эллипсы, а во второй — прямоугольники.

Пусть потенциальная энергия задается выражением

$$V = \frac{1}{2} k^2 q^{2m}, \quad (6.7.6)$$

где m меняется от 1 до ∞ . Показать, что по мере увеличения m эллипсы осциллятора становятся все более выпуклыми, приближаясь к прямоугольникам. Для $m = \infty$ получается распределение линий тока, соответствующее упругому отражению. Винтовая линия рис. 6, б деформируется в ломаную, изображенную на рис. 7, б. «Стенки» при этом расположены в точках $q = \pm 1$.

Резюме. Фазовая жидкость в $2n$ -мерном пространстве ведет себя подобно несжимаемой жидкости. Произвольная область, вырезанная из жидкости и движущаяся вместе с ней, меняет в процессе движения свою форму, но сохраняет свой объем.

8. Интегральные инварианты, теорема Гельмгольца о циркуляции. Французский математик Пуанкаре (1859—1912) предложил для любых интегралов, связанных с фазовой жидкостью и сохраняющих свою величину при движении фазовой жидкости, название «интегральные инварианты». Объем σ фазовой жидкости, рассматривавшийся в предыдущем пункте, является одним из примеров подобных интегральных инвариантов. Другим важным примером является величина, введенная Гельмгольцем и называемая «циркуляцией».

Вернемся к теореме, сформулированной в гл. V, п. 3 [см. там (5.3.3)], в которой определяется вариация интегра-

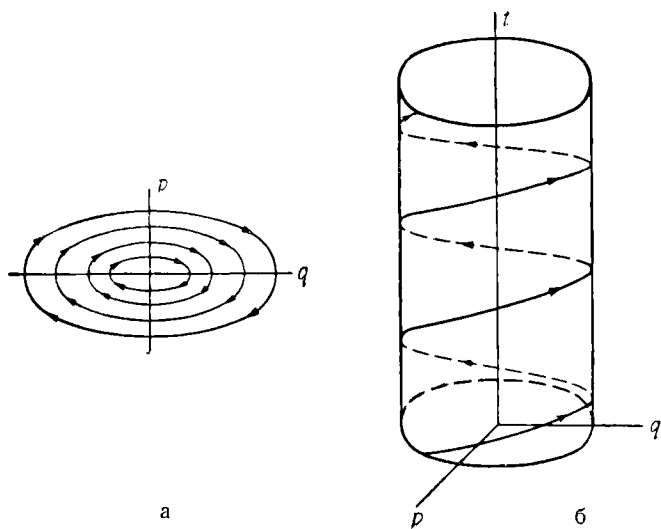


Рис. 6. Линейный осциллятор
 а. Фазовое пространство. б. Пространство состояний.

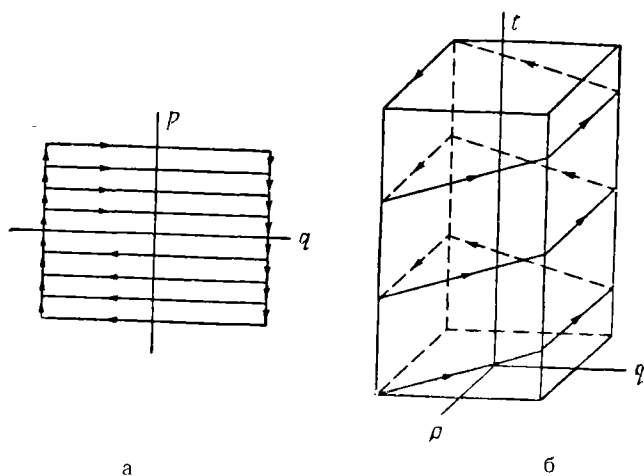


Рис. 7. Упругое отражение.
 а. Фазовое пространство. б. Пространство состояний.

ла действия при произвольных вариациях q_i , которые могут даже и не обращаться в нуль в двух граничных точках

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (6.8.1)$$

Эта важная теорема может применяться в гамильтоновой форме механики без каких бы то ни было изменений, поскольку вариации p_i не влияют на δA . Следовательно, (6.8.1) имеет место при произвольных вариациях q_i и p_i .

Используем эту теорему следующим образом. Проведем произвольную замкнутую кривую L в фазовом пространстве в некоторый момент времени t_1 . Предположим, что это «материальная линия», т. е. что она жестко связана с частицами жидкости и движется вместе с ними. Поэтому в какой-либо другой момент времени t_2 кривая L будет находиться уже в другом месте фазового пространства. Она по-прежнему будет замкнутой кривой. Пусть в момент времени t_1 кривая L задана в параметрической форме

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(\tau), \\ p_i &= g_i(\tau). \end{aligned} \quad (6.8.2)$$

Напишем следующий криволинейный интеграл, взяв его вдоль замкнутой кривой L

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint \sum_{i=1}^n p_i q'_i d\tau. \quad (6.8.3)$$

Эта величина инвариантна при движении,

$$\Gamma = \text{const}. \quad (6.8.4)$$

Сказанное иллюстрируется рис. 8. Фазовое пространство в моменты времени t_1 и t_2 изображено в виде двух сечений $(2n+1)$ -мерного пространства состояний. Точка M_1 переносится движущейся жидкостью в точку M_2 , а соседняя точка N_1 — в точку N_2 . Линии M_1M_2 и N_1N_2 являются мировыми линиями частиц жидкости. Интеграл действия между точками M_1 и M_2 имеет значение A , а между точками N_1 и N_2 — значение $A + \delta A$. Так как линия N_1N_2 может

рассматриваться как вариация линии M_1M_2 , применив теорему (6.8.1), получим

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (6.8.5)$$

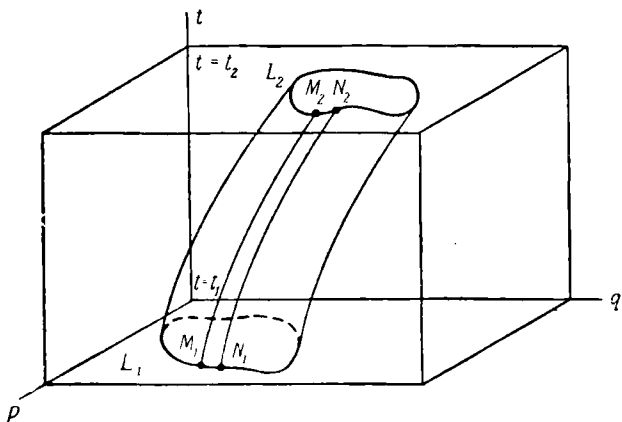


Рис. 8.

Интегрируя это равенство между точками τ_1 и τ_2 кривой L , получаем

$$\Delta A = \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (6.8.6)$$

Если полностью обойти всю кривую L , так чтобы конечная и начальная точки совпали, то ΔA обратится в нуль. Следовательно,

$$\left[\oint \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (6.8.7)$$

Так как t_1 и t_2 произвольны, отсюда следует теорема (6.8.4).

Гельмгольц интересным образом использовал эту «теорему о циркуляции». Рассмотрим движение частицы в поле силы с потенциальной энергией V . Связанное с этой задачей фазовое пространство имеет шесть измерений. Однако

для того чтобы наглядно изобразить содержание теоремы (6.8.4), отнюдь не нужно шести измерений. Вместо того чтобы рассматривать p_1, p_2, p_3 как три дополнительные координаты, можно ввести вектор с компонентами p_1, p_2, p_3 в точке q_1, q_2, q_3 пространства конфигураций. Выберем в качестве q -координат обычные прямоугольные координаты x, y, z . Мы получим тогда замкнутую кривую в обычном трехмерном пространстве, а вдоль этой кривой непрерывное векторное поле с компонентами p_1, p_2, p_3 . Так как вектор импульса $\mathbf{p}$ есть попросту $m\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ —скорость, то циркуляция принимает вид

$$\Gamma = m \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}, \quad (6.8.8)$$

где $d\mathbf{s}$ — векторный элемент длины замкнутой кривой. Это представление обходится без шестимерного фазового пространства, которое заменяется трехмерным пространством конфигураций.

В общем случае пространство конфигураций не имеет ничего общего с реальным физическим пространством. Однако пространство конфигураций одной частицы совпадает с физическим пространством. Различные траектории в пространстве конфигураций представляют собой траектории самой частицы, относящиеся к разным начальным условиям. Эти траектории могут также рассматриваться как линии тока так называемой «идеальной жидкости», т. е. физической жидкости (необязательно несжимаемой), которая не обладает вязкостью и имеет постоянную температуру. На частицы такой жидкости действуют, конечно, силы со стороны окружающих частиц, но из гидродинамических уравнений Эйлера видно, что эти силы имеют потенциал и эквивалентны некоторой внешней моногенной силе. Следовательно, выполняются условия применимости принципа Гамильтона, и линии тока движущейся жидкости совпадают с линиями тока в пространстве конфигураций, к которым применима теорема о циркуляции. Мы получаем таким образом теорему Гельмгольца о циркуляции, которая утверждает, что

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \text{const}, \quad (6.8.9)$$

где интеграл берется вдоль любой замкнутой кривой в идеальной жидкости, причем кривая движется вместе с жидко-

стью. Отсюда следует, что если циркуляция вдоль любой замкнутой кривой равна нулю в момент времени $t = 0$, то это свойство сохраняется и в дальнейшем. Это значит, что жидкость, в которой вихри сначала отсутствуют, будет оставаться безвихревой сколь угодно долго. Другими словами, вихри не могут возникать или исчезать.

Резюме. «Циркуляция» является инвариантом движения фазовой жидкости. Она представляет собой величину $\sum p_i dq_i$, проинтегрированную вдоль произвольной замкнутой кривой фазового пространства. Инвариантность циркуляции имеет для фазовой жидкости тот же смысл, что и теорема Гельмгольца для идеальной физической жидкости: обе они утверждают сохраняемость вихрей.

9. Исключение циклических переменных. Хотя канонические уравнения имеют гораздо более простую структуру, чем исходные уравнения Лагранжа, у нас нет общего метода интегрирования этих уравнений. Поэтому при интегрировании уравнений движения по-прежнему необычайно важную роль играют циклические переменные. Как только появляются циклические переменные, становится возможным частичное интегрирование данной механической задачи и сведение ее к более простой. Сам процесс сведения, однако, в гамильтоновой форме механики выглядит гораздо проще, чем в лагранжевой форме.

Если функция Лагранжа L не содержит какой-либо определенной координаты q_i , скажем q_n , то и функция Гамильтона H тоже ее не содержит. Последнее из канонических уравнений тогда имеет вид

$$\dot{p}_n = 0, \quad (6.9.1)$$

откуда

$$p_n = \text{const} = C_n. \quad (6.9.2)$$

Таким образом, при помощи канонических уравнений еще раз установлено постоянство циклических импульсов.

Так как p_i — независимые переменные, не может быть возражений против того, чтобы в процессе варьирования использовать условие (6.9.2). Само правило варьирования — при фиксированных граничных значениях — не нарушается, поскольку p_n не варьируется вовсе.

Так как p_n — постоянная величина, в функции Гамильтона ее можно заменить на C_n . Более того, кинетическая часть интеграла действия принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} p_n \dot{q}_n dt = C_n \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_n dt = C_n [q_n]_{t_1}^{t_2}. \quad (6.9.3)$$

Полученное выражение представляет собой граничный член, который не изменяется при варьировании и потому может быть опущен. Следовательно, интеграл действия сводится к

$$\bar{A} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{q}_i - H \right) dt. \quad (6.9.4)$$

Этот метод применим при любом количестве циклических переменных.

Задача. Для каждой гамильтоновой задачи существует соответствующая лагранжева задача. Показать, что исключение циклических переменных при гамильтоновом подходе соответствует при лагранжевом подходе процессу сведения Рауса, обсуждавшемуся ранее в гл. V, п. 4.

После решения сведенной механической задачи циклические переменные получаются в виде функций t прямым интегрированием, так как правые части соответствующих канонических уравнений

$$\dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \quad (6.9.5)$$

являются явными функциями t .

Резюме. Исключение циклических переменных в гамильтоновой форме механики является очень простой операцией. Вклад от циклических переменных в кинетической части канонического интеграла опускается, а циклические импульсы в функции Гамильтона заменяются константами.

10. Параметрическая форма канонических уравнений.

Раньше было показано, что введение понятия «пространства состояний» полностью геометризует задачу о движении, связанную с каноническими уравнениями. Множество всех решений системы канонических уравнений можно изобразить с помощью некоторого бесконечного семейства непересекающихся кривых, заполняющих пространство состояний.

Характерной чертой пространства состояний является то, что оно имеет *нечетное* число измерений. Всем позиционным координатам q_i соответствуют их импульсы p_i , а время t выделено как обособленная переменная, не связанная ни с каким импульсом. Причина заключается в том, что время t не является механической переменной, а играет роль независимой переменной.

Иногда оказывается чрезвычайно выгодным превратить время t в механическую переменную. Вместо того чтобы считать позиционные координаты q_i функциями времени t , координаты q_i и время t рассматриваются как функции некоторого произвольного параметра τ . Лагранж в подобных случаях считал, что пространство конфигураций для одной частицы превращается из пространства трех в пространство четырех измерений. В релятивистской механике этот переход абсолютно необходим, так как пространство и время объединяются там в один четырехмерный континуум Эйнштейна—Минковского.

Теперь встает вопрос о том, как в этом случае сформулировать канонические уравнения движения Гамильтона. Первоначальная задача Лагранжа превращается в задачу о нахождении $q_1, \dots, q_n$ и t как функций аргумента τ . Поэтому пространство конфигураций Лагранжа имеет теперь $n + 1$ измерение, и t можно включить в число позиционных координат, положив

$$t = q_{n+1}. \quad (6.10.1)$$

Однако соответствующее фазовое пространство должно теперь иметь $2n + 2$ измерений, поскольку имеется $n + 1$ пара канонических переменных.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ p_t \end{pmatrix},$$

где t и p_t — просто другие обозначения переменных q_{n+1} и p_{n+1} . Импульс p_t , соответствующий времени t [таким «импульсом» является полная энергия, взятая с обратным знаком, — см. гл. V, п. 6 (5.6.2)], добавляется к другим переменным в качестве еще одной независимой переменной, снова увеличивая число измерений уже по сравнению с «пространством состояний». Это новое пространство мы будем называть «расширенным фазовым пространством». Прежний интеграл Лагранжа в параметрической форме [см. гл. V, п. 6 (5.6.1)] переходит в

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left[q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \frac{q'_1}{q'_{n+1}}, \dots, \frac{q'_n}{q'_{n+1}} \right] q'_{n+1} d\tau. \quad (6.10.2)$$

Можно заранее сказать, что обычный стандартный метод не подходит для параметрического случая, потому что канонические уравнения определяют переменные q_i и p_i как некоторые конкретные функции независимой переменной — в данном случае τ , — в то время как в действительности τ — произвольная переменная и свобода ее выбора должна как-то отразиться в решении.

И действительно, функция Гамильтона H_1 расширенной задачи тождественно обращается в нуль. Это можно увидеть, рассмотрев функцию Лагранжа

$$L_1 = L \left(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \frac{q'_1}{q'_{n+1}}, \dots, \frac{q'_n}{q'_{n+1}} \right) q'_{n+1}. \quad (6.10.3)$$

Функция L_1 является линейной формой относительно $n+1$ переменных $q'_1, \dots, q'_{n+1}$. Следовательно, согласно теореме Эйлера об однородных функциях,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial L_1}{\partial q'_i} q'_i = L_1, \quad (6.10.4)$$

откуда видно, что

$$H_1 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i - L_1 = 0. \quad (6.10.5)$$

Итак, канонический интеграл сводится к совершенно симметричной форме

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i d\tau \quad (6.10.6)$$

без какой бы то ни было функции Гамильтона. Ясно, однако, что место функции H_1 должно занять что-то другое, так как при полном отсутствии гамильтоновой функции все q_i и p_i обратились бы в константы, что невозможно.

Действительно, существует нечто, заменяющее функцию Гамильтона. Этим заменителем оказывается *дополнительное условие*, связывающее q_i и p_i , которое обязательно должно существовать. Нетрудно видеть, что уравнения

$$p_i = \frac{\partial L_1}{\partial q'_i} \quad (6.10.7)$$

не могут быть разрешены относительно q'_i . В противном случае мы получили бы определенную совокупность q'_i , отвечающую совокупности p_i , тогда как в действительности p_i не изменяются при умножении всех q'_i на один и тот же множитель α . Из того, что уравнения (6.10.7) неразрешимы относительно q'_i , следует, что они не являются взаимно независимыми. Отсюда в свою очередь следует, что должно существовать какое-то *тождественное соотношение* между p_i (это тождество содержит q_i в качестве параметров и поэтому оно фактически является соотношением между q_i и p_i).

Действительно, выделив последнюю переменную $q_{n+1} = t$, получим для связанного с ней импульса

$$p_{n+1} = -H(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_n). \quad (6.10.8)$$

В результате наша вариационная задача принимает следующий вид: интеграл

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_{n+1} q'_{n+1}) d\tau \quad (6.10.9)$$

должен принять стационарное значение при дополнительном условии

$$p_{n+1} + H = 0. \quad (6.10.10)$$

Подставив в интеграл (6.10.9) вместо p_{n+1} его значение $-H$, получим обычную форму канонического интеграла

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (p_1 \dot{q}_1 + \dots + p_n \dot{q}_n - H) dt \quad (6.10.11)$$

при условии, что вместо параметра τ мы вновь в качестве независимой переменной возьмем $q_{n+1} = t$.

Однако нет необходимости выделять переменную q_{n+1} ; лучше записать тождество, которое должно существовать между q_i и p_i , в более общей форме

$$K(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0. \quad (6.10.12)$$

В этой форме сохраняется симметрия $2n + 2$ канонических переменных и ни одной из них не отдается предпочтение.

Задача 1. Пусть дан интеграл действия из принципа Якоби

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2} \sqrt{E - V} \sqrt{\sum a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k} d\tau.$$

Показать, что p_i , связанные с этим подинтегральным выражением, удовлетворяют следующему тождеству:

$$\frac{\sum b_{ik} p_i p_k}{2(E - V)} = 1,$$

где b_{ik} — коэффициенты матрицы, обратной исходной матрице a_{ik} .

Задача Гамильтона, отвечающая параметрической форме задачи Лагранжа, принимает, наконец, следующий вид. Отыскивается условие стационарности интеграла (6.10.9) при дополнительном условии (6.10.12). Условие (6.10.12) можно учесть методом неопределенных множителей δB^*

Лагранжа, видоизменив заданный интеграл следующим образом:

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i - \lambda K \right) d\tau. \quad (6.10.13)$$

Здесь λ — некоторая произвольная функция τ в полном соответствии с произвольностью самого τ . В настоящей задаче «неопределенный множитель Лагранжа» действительно остается неопределенным. При желании мы можем положить $\lambda = 1$ за счет соответствующего выбора переменной τ . Тогда получим вариационный интеграл

$$\overline{A} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i - K \right) d\tau, \quad (6.10.14)$$

имеющий в точности каноническую форму, за тем лишь исключением, что наша «расширенная» задача имеет $2n + 2$ вместо $2n$ канонических переменных. Функция K — левая часть дополнительного условия (6.10.12) — заняла место функции Гамильтона H ; поэтому мы будем называть K «обобщенной функцией Гамильтона».

Таким образом, в параметрической форме канонические уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} q'_k &= \frac{\partial K}{\partial p_k}, \\ p'_k &= -\frac{\partial K}{\partial q_k}. \end{aligned} \right\} (k=1, \dots, n+1). \quad (6.10.15)$$

В частном случае, когда

$$K = p_{n+1} + H, \quad (6.10.16)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} q'_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k}, \\ p'_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \end{aligned} \right\} (k=1, \dots, n), \quad (6.10.17)$$

$$q'_{n+1} = 1, \quad (6.10.18)$$

$$p'_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+1}}. \quad (6.10.19)$$

Уравнение (6.10.18) показывает, что нормированный таким образом параметр τ совпадает с q_{n+1} , т. е. со временем t . Уравнения (6.10.17) при этом являются обычными каноническими уравнениями. Последнее из уравнений системы [уравнение (6.10.19)] определяет закон, по которому изменяется со временем t полная энергия p_{n+1} (см. гл. V, п. 3). Оно включено теперь в параметрическую систему уравнений в качестве независимого уравнения, поскольку p_{n+1} — одна из независимых переменных.

Общая параметрическая формулировка канонических уравнений в форме (6.10.15) с теоретической точки зрения обладает серьезными преимуществами по сравнению с другими формулировками. Ее можно считать наиболее выразительной формой канонических уравнений. Она совсем по-новому освещает роль консервативных систем. Заметим, что после преобразования времени t в одну из механических переменных *любая система становится консервативной*. «Обобщенная функция Гамильтона» K не зависит явно от независимой переменной τ , и поэтому наша система в расширенном фазовом пространстве становится консервативной. Движение фазовой жидкости является установившимся, и каждая частица жидкости все время находится на какой-то определенной поверхности

$$K = \text{const.} \quad (6.10.20)$$

Поэтому если начальные значения q_i и p_i при значении τ , равном τ_1 , выбраны в соответствии с условием $K = 0$, то это условие выполняется в течение всего времени движения.

В свете всего сказанного о параметрических системах формулировка принципа наименьшего действия для консервативных систем, данная Эйлером и Лагранжем, получает новый смысл. Напомним, что этот принцип требует минимизации интеграла по времени от величины $2T$ при условии, что для движущейся точки выполняется энергетическое уравнение $T + V = E$. При переходе от пространства конфигураций к фазовому пространству принцип Эйлера — Лагранжа принимает следующую форму. Требуется найти условия стационарности интеграла

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_n q'_n) d\tau \quad (6.10.21)$$

при дополнительном условии

$$H - E = 0. \quad (6.10.22)$$

Согласно принципу, выраженному каноническими уравнениями в параметрической форме, требуется стационарность интеграла

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_1 q'_1 + \dots + p_n q'_n + p_{n+1} q'_{n+1}) d\tau \quad (6.10.23)$$

при дополнительном условии

$$K = 0. \quad (6.10.24)$$

Заметим, что этот принцип сразу же переходит в принцип Эйлера — Лагранжа, когда система консервативна и когда K задается в виде $H + p_{n+1}$. Поскольку последняя переменная $t = q_{n+1}$ является теперь циклической, импульс p_{n+1} может быть заменен на $-E$ и последний член в подинтегральном выражении в (6.10.23) можно опустить.

Параметрическая форма канонических уравнений позволяет также глубже понять внутренние соотношения, связывающие различные принципы минимума в механике. Если канонический интеграл приведен к нормальной форме

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum p_i q'_i d\tau, \quad (6.10.25)$$

то разница между различными принципами соответствует различным интерпретациям дополнительного условия

$$K = 0. \quad (6.10.26)$$

Как было установлено в задаче 1 настоящего пункта, дополнительное условие принципа Якоби принимает вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{b_{ik} p_i p_k}{E - V} = 1. \quad (6.10.27)$$

То же самое условие можно, очевидно, задать в форме

$$\frac{1}{2} \sum b_{ik} p_i p_k + V = E, \quad (6.10.28)$$

что соответствует дополнительному условию принципа Эйлера — Лагранжа. Таким образом, непосредственно установлена эквивалентность этих двух принципов. Более того, если учесть дополнительное условие (6.10.28) с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа, вернувшись при этом от фазового пространства к пространству конфигураций, то мы получим принцип Гамильтона. Отсюда видна эквивалентность всех трех принципов для консервативных систем. Время t , играющее роль параметра, интерпретируется как частный вид переменной τ , при котором неопределенный множитель λ превращается в 1.

Интересно посмотреть, что произойдет, если применить метод неопределенных множителей, оставив дополнительное условие в форме (6.10.27). Вернувшись снова от фазового пространства к пространству конфигураций, получим принцип, в котором стационарное значение принимает интеграл

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (E - V) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} q'_i q'_k d\tau. \quad (6.10.29)$$

Это есть принцип Якоби, хотя и *без обычного квадратного корня*. Траектории, получаемые из интеграла (6.10.29), тем не менее те же самые, что и из принципа Якоби. Разница заключается лишь в выборе независимой переменной τ . В обычной формулировке принципа Якоби τ — произвольный параметр; в принципе же (6.10.29) τ выбрано определенным образом.

Задача 2. Принцип (6.10.29) приводит к следующей интересной теореме эквивалентности. Рассмотрим движение частицы с массой m , меняющейся по закону

$$m = m_0 (1 - \alpha V),$$

где α — константа. Эта частица переменной массы, двигаясь под действием собственной инерции, без какого бы то ни было внешнего поля сил, описывает ту же самую траекторию, что и частица постоянной массы m_0 в потенциальном поле V , при условии что масса m_0 начинает свое движение в том же направлении, что и масса m , и что ее полная энергия $E = 1/\alpha$. Доказать справедливость этой теоремы, написав уравнения движения Лагранжа. Эквивалентность сохраняется лишь для *траекторий*, но не для движения во времени.

Резюме. Путем добавления времени t к другим механическим переменным в качестве $(n + 1)$ -й позиционной координаты достигается замечательная симметризация канонического интеграла. Канонический интеграл принимает вид

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i q'_i d\tau$$

и ищется его стационарное значение при дополнительном условии

$$K(q_i, p_i) = 0.$$

При этом фазовое пространство имеет $2n + 2$ измерений, движение фазовой жидкости является всегда установившимся, а механическая система всегда консервативна. Особые свойства консервативных систем распространяются таким образом на произвольные системы. Эта параметрическая формулировка канонических уравнений с теоретической точки зрения обладает рядом преимуществ.

ГЛАВА VII

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Введение. Мы привели дифференциальные уравнения движения к особенно удобному «каноническому» виду. Однако наша конечная цель будет достигнута только тогда, когда мы сможем решить эти уравнения. Поскольку нам неизвестен метод непосредственного интегрирования этих уравнений, то приходится идти косвенными путями. Одним из таких путей является метод преобразований координат. Мы пытаемся отыскать такую систему координат в фазовом пространстве, в которой входящая в канонические уравнения функция Гамильтона имела бы настолько простой вид, чтобы уравнения движения могли быть непосредственно проинтегрированы. Естественно, что с этой точки зрения желательно исследовать всю группу преобразований координат, связанных с каноническими уравнениями. Изучение этих «канонических преобразований» оказывает ценную помощь при интегрировании уравнений механики. Теория канонических преобразований в основном связана с именем Якоби. Хотя он, возможно, и не обладал воображением, присущим Гамильтону, и его усилия были в основном направлены на решение задачи интегрирования уравнений, однако открытие канонических преобразований явилось все же огромным достижением. Получившаяся в результате теория интегрирования сыграла важную роль в развитии современной атомной физики. В далеко идущих исследованиях Гамильтона проблема интегрирования являлась второстепенной задачей.

1. Преобразования координат как метод решения задач механики. Как мы уже видели при изучении лагранжевой формы механики, правильный выбор координат может существенно облегчить задачу решения дифференциальных уравнений движения. Если среди наших координат имелась циклическая, то мы сразу находили первый интеграл уравнений Лагранжа. Поэтому мы пытались получить циклические координаты путем преобразования первоначальной системы координат.

Совершенно аналогичная ситуация возникает и в гамильтоновой форме механики. Мы снова не имеем прямого метода интегрирования канонических уравнений, и наиболее эффективными оказываются координатные преобразования фазового пространства. При этом выясняется, что уравнения Гамильтона обладают рядом преимуществ по сравнению

с уравнениями Лагранжа. В лагранжевой механике существенной является функция L , представляющая собой разность между кинетической и потенциальной энергией. При попытке упростить выражение для потенциальной энергии кинетическая энергия может приобрести слишком сложный вид, и наоборот. Одновременное упрощение выражений и для потенциальной и для кинетической энергий является довольно трудной задачей. В гамильтоновой механике положение более благоприятное, потому что основная функция, функция Гамильтона H , зависит лишь от самих переменных и не содержит каких бы то ни было производных. Поэтому ее можно сравнить с потенциальной энергией в лагранжевой задаче. Кинетическая же энергия приводится к нормальному виду $\sum p_i \dot{q}_i$ и не участвует в задаче преобразования. Ею определяется общий класс преобразований, которые могут применяться. Оставаясь внутри этого класса, мы можем полностью сконцентрировать свое внимание на функции Гамильтона H .

Еще одно преимущество уравнений Гамильтона при координатных преобразованиях по сравнению с уравнениями Лагранжа связано с удвоенным количеством переменных. Хотя на первый взгляд это является скорее недостатком, чем преимуществом, сам процесс преобразования координат переводит этот пассив в актив. Увеличение числа переменных, имеющихся в нашем распоряжении, расширяет область возможных преобразований, что очень существенно.

Наконец, в лагранжевой механике не существует какого-либо общего метода упрощения функции Лагранжа. Не существует никакого систематического приема для получения циклических переменных и их можно получить лишь путем удачной догадки. В гамильтоновой механике может быть предложен определенный метод получения циклических переменных и упрощения функции Гамильтона. Этот метод сводит всю задачу интегрирования к нахождению одной фундаментальной функции, являющейся производящей функцией некоторого преобразования. Он играет центральную роль в теории канонических уравнений и, как будет показано в следующей главе, предоставляет широкие возможности для различных обобщений.

Метод преобразований координат требует совершенно иного подхода по сравнению с задачей прямого интегриро-

вания. Теперь q_i и p_i уже не рассматриваются как функции времени t . Нужно совершенно забыть об уравнениях движения и считать q_i и p_i просто *переменными величинами*. Они являются теперь только координатами точки в фазовом пространстве и ничем больше. Специфическая задача о движении полностью предается забвению. Важно лишь, чтобы при преобразовании сохранялись канонические уравнения. Это требование приводит к появлению дифференциальной формы, которая фигурирует в каноническом интеграле. При сохранении этой дифференциальной формы сохраняется и вся система дифференциальных уравнений. Следовательно, мы имеем задачу о преобразовании координат, которая характеризуется инвариантностью определенной дифференциальной формы.

Преобразования, сохраняющие канонические уравнения, называются «каноническими преобразованиями». Общая теория этих преобразований принадлежит Якоби.

Резюме. Наиболее эффективным инструментом для исследования и решения канонических уравнений являются преобразования координат фазового пространства. Вместо того чтобы пытаться непосредственно интегрировать уравнения, ищется некоторая новая система координат, которая больше подходит для решения задачи, чем первоначальная система. Для этого процесса в нашем распоряжении имеется широкий класс преобразований. Они называются «каноническими преобразованиями».

2. Точечные преобразования Лагранжа. В лагранжевой механике позиционными координатами являются величины q_i . Уравнения движения Лагранжа остаются инвариантными по отношению к произвольным точечным преобразованиям этих координат. В гамильтоновой механике мы снова встречаемся с задачей Лагранжа, но уже при наличии $2n$ переменных q_i и p_i . Пространством конфигураций гамильтоновой механики является $2n$ -мерное фазовое пространство. На первый взгляд может показаться, что в нашем распоря-

жении имеются теперь произвольные точечные преобразования фазового пространства. Это означало бы, что $2n$ координат q_i и p_i могут преобразовываться в какие-либо новые $\bar{q}_i$ и $\bar{p}_i$ при помощи любых функциональных соотношений. Дело обстоит, однако, не так. Канонические уравнения

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\tag{7.2.1}$$

порождаются некой весьма *специальной* лагранжевой задачей, а именно задачей с функцией Лагранжа, приведенной к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H.\tag{7.2.2}$$

Произвольное точечное преобразование, переводящее q_i и p_i в $\bar{q}_i$ и $\bar{p}_i$, могло бы нарушить нормальную форму канонического интеграла, а вместе с ней и канонические уравнения. Мы должны ограничиться, таким образом, преобразованиями, которые сохраняют каноническую форму этих уравнений. Последнее гарантируется в том случае, если варьируемое подинтегральное выражение имеет вид (7.2.2). *Любое преобразование, оставляющее инвариантным каноническое подинтегральное выражение (7.2.2), оставляет инвариантными также и канонические уравнения (7.2.1).*

Перед тем как исследовать полную группу канонических преобразований, изучим некоторые частные случаи. Лагранжевы точечные преобразования являются весьма частным случаем гораздо более широкой группы канонических преобразований.

В дальнейшем везде при обсуждении преобразований мы будем придерживаться удобных обозначений, введенных Уиттекером в книге «Аналитическая динамика» (см. библиографию). Преобразованные переменные будем обозначать соответствующими *большими буквами* Q_i, P_i ¹.

¹ Если время t также подвергается преобразованию, то преобразованную переменную мы будем обозначать через $\bar{t}$, а не через T , с тем чтобы избежать путаницы с кинетической энергией T .

Поскольку переменными в лагранжевой механике являются одни q_i , произвольное точечное преобразование лагранжевой механики имеет вид

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(Q_1, \dots, Q_n), \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(Q_1, \dots, Q_n). \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Из вида подинтегрального выражения (7.2.2) ясно, что канонические уравнения заведомо сохраняются, если, преобразуя p_i , одновременно потребовать инвариантности дифференциальной формы $\sum p_i \delta q_i$

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i. \quad (7.2.4)$$

Если этот принцип справедлив в случае произвольных бесконечно малых изменений q_i , мы можем заменить канонический интеграл

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) \quad (7.2.5)$$

соответствующим интегралом

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - H' dt \right). \quad (7.2.6)$$

Отсюда видно, что канонические уравнения сохраняются и что функция Гамильтона H' в новой системе координат, после того как q_i, p_i выразятся через новые переменные Q_i, P_i , будет иметь тот же вид, что и функция H в старой системе. Можно сказать, что *функция Гамильтона H инвариантна относительно точечного преобразования* (7.2.3).

Ниже мы увидим, что инвариантность дифференциальной формы (7.2.4) не является обязательным свойством, присущим каждому каноническому преобразованию. Преобразования, удовлетворяющие этому условию, образуют лишь *подгруппу* в полной группе канонических преобразований. Даже внутри этой подгруппы формулы (7.2.3) выделяют весьма узкую группу преобразований, отличающуюся тем

свойством, что в соотношения между q_i и Q_i совсем не входят ни p_i , ни P_i . Соответствующие преобразования для величин p_i следуют из принципа инвариантности (7.2.4). Из формул (7.2.3) имеем

$$\delta q_i = \frac{\partial f_i}{\partial Q_1} \delta Q_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial Q_n} \delta Q_n. \quad (7.2.7)$$

Вводя эти выражения в (7.2.4) и приравнивая коэффициенты при δQ_i в левой и правой частях уравнения (7.2.4), получаем выражения для преобразования p_i в явном виде — в форме n линейных уравнений. Эти уравнения могут быть разрешены относительно p_i при условии, что якобиан преобразования (7.2.3) отличен от нуля.

Нужно, однако, показать, что введенное преобразование величин q_i и p_i действительно эквивалентно точечному преобразованию Лагранжа. Формулы (7.2.3) устанавливают эту эквивалентность в части, касающейся переменных q ; следует также доказать, что преобразование импульсов, основанное на принципе инвариантности (7.2.4), согласуется с соответствующим преобразованием в механике Лагранжа.

Как известно, импульсы p_i вводятся в гамильтоновой механике с помощью определения

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.2.8)$$

Соответственно, после введения новых переменных Q_i в функцию Лагранжа мы должны аналогично определить и новые импульсы P_i ,

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}. \quad (7.2.9)$$

Функция Лагранжа L есть инвариант этого преобразования, но p_i и P_i являются «ковариантными» величинами, связанными между собой по определенному правилу. Будем считать L функцией одних только $\dot{q}_i$, забыв на некоторое время о наличии переменных q_i и t , которые как бы останутся постоянными. Тогда принцип инвариантности дает для произвольных вариаций $\dot{q}_i$ и соответствующих вариаций $\dot{Q}_i$:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \delta \dot{Q}_i. \quad (7.2.10)$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta \dot{Q}_i. \quad (7.2.11)$$

Теперь из дифференцирования уравнений (7.2.3) по времени t

$$\dot{q}_i = \frac{\partial f_i}{\partial Q_1} \dot{Q}_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial Q_n} \dot{Q}_n \quad (7.2.12)$$

видно, что преобразование от $\dot{q}_i$ в $\dot{Q}_i$ является *линейным*, причем в точности таким же, как и преобразование (7.2.7), связывающее δq_i с δQ_i . По этой причине принцип инвариантности (7.2.11) остается справедливым и при замене $\delta \dot{q}_i$ и $\delta \dot{Q}_i$ на δq_i и δQ_i

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i. \quad (7.2.13)$$

Это и есть, однако, тот самый принцип инвариантности (7.2.4), с которого мы начинали. Мы установили таким образом, что преобразование импульсов, связанное с лагранжевым точечным преобразованием, может быть получено из принципа инвариантности (7.2.4).

Задача 1. Записать кинетическую энергию произвольной частицы в прямоугольных координатах x, y, z и в сферических координатах r, θ, φ . Ввести соответствующие импульсы p_x, p_y, p_z и p_r, p_θ, p_φ на основе правил лагранжевой механики и определить связывающие их соотношения. Показать, что эти же самые соотношения могут быть получены из принципа инвариантности

$$p_x \delta x + p_y \delta y + p_z \delta z = p_r \delta r + p_\theta \delta \theta + p_\varphi \delta \varphi.$$

Точечное преобразование (7.2.3) было «склерономным», так как оно не включало время t . Для того чтобы обобщить наши рассуждения на реономный случай, наиболее естественно добавить время t к остальным механическим переменным и рассматривать задачу в $(2n + 2)$ -мерном «расширенном фазовом пространстве», которое связано с параметрической формой канонических уравнений (см. гл. VI, п. 10). В этом случае точечное преобразование (7.2.3) автоматически включает в себя время t , поскольку мы

теперь имеем точечное преобразование от старых переменных $q_1, \dots, q_n, t$ к новым переменным $Q_1, \dots, Q_n, \bar{t}$. Принцип инвариантности (7.2.4) принимает вид

$$\sum p_i \delta q_i + p_t \delta t = \sum P_i \delta Q_i + p_{\bar{t}} \delta \bar{t}. \quad (7.2.14)$$

Более того, инвариантом преобразования является теперь не функция Гамильтона H , а *обобщенная функция Гамильтона* K . Как было показано в гл. VI, п. 10, эта функция находится в следующем соотношении с обычной функцией Гамильтона H :

$$K = p_t + H; \quad (7.2.15)$$

поэтому инвариантность K приводит к соотношению

$$p_t + H = p_{\bar{t}} + H', \quad (7.2.16)$$

где через H' обозначена функция Гамильтона, получившаяся после преобразования. Следовательно,

$$H' = H + p_t - p_{\bar{t}}, \quad (7.2.17)$$

откуда следует, что в общем случае реономного преобразования функция Гамильтона уже не является инвариантом.

Наиболее часто встречаются реономные преобразования, вводящие движущиеся системы отсчета, но не преобразующие при этом самого времени. Преобразования такого типа характеризуются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= f_1(Q_1, \dots, Q_n, t), \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(Q_1, \dots, Q_n, t), \\ t &= \bar{t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.18)$$

Введем эти соотношения в принцип инвариантности (7.2.14) варьируя только время t . В результате получим

$$p_t - p_{\bar{t}} = - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad (7.2.19)$$

откуда

$$H' = H - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial t}. \quad (7.2.20)$$

Поскольку H' должна быть выражена через новые переменные Q_i и P_i , из второго члена в правой части (7.2.20) следует исключить p_i , записав их как функции P_i . Отметим, что этот член *линеен* относительно импульсов и является источником появления «гироскопических членов» в H' .

Задача 2. Рассмотреть движение одной частицы, переходя от прямоугольных координат x, y, z во вращающуюся систему отсчета

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t,$$

$$y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t,$$

$$z = z'.$$

Показать, что преобразование функции Гамильтона приводит к появлению во вращающейся системе отсчета фиктивных силы Кориолиса и центробежной силы.

Резюме. Канонические уравнения инвариантны относительно точечного преобразования Лагранжа. Преобразование импульсов происходит с учетом инвариантности дифференциальной формы $\sum p_i \delta q_i$. Функция Гамильтона является инвариантом преобразования, если новая система координат покоится относительно старой. В противном случае функция Гамильтона изменяется за счет гироскопических членов.

3. Преобразования Матье и Ли. В предыдущем пункте было показано, что инвариантность дифференциальной формы (7.2.4) приводит к инвариантности канонических уравнений. Инвариантность дифференциальной формы (7.2.4) может быть получена, однако, и в том случае, если *не* требовать выполнения (7.2.3). Эти более общие преобразования, известные уже Якоби, были изучены французским математиком Матье (в 1874 г.). Поэтому их иногда называют

«преобразованиями Матье»¹. Софус Ли широко использовал эти же самые преобразования в своих работах, касающихся геометрических методов решения дифференциальных уравнений. Он назвал их «контактными преобразованиями».

Ли определял контактное преобразование из того требования, чтобы дифференциальная форма

$$dz - \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad (7.3.1)$$

была пропорциональна преобразованной дифференциальной форме

$$dZ - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i. \quad (7.3.2)$$

Если считать z просто $(n+1)$ -й переменной q_{n+1} , то это условие можно записать в однородной форме

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i = \sum_{i=1}^{n+1} P_i dQ_i; \quad (7.3.3)$$

при этом оно становится эквивалентным преобразованию Матье в пространстве $n+1$ измерений.

Вместо точечного преобразования, связывавшего q_i и Q_i без помощи p_i , мы имеем более общее функциональное соотношение между координатами за счет того, что импульсы могут теперь входить в соотношения между позиционными координатами. Единственным условием является принцип инвариантности

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i. \quad (7.3.4)$$

Внимательное изучение этого условия показывает, что q_i и Q_i не могут быть совершенно независимыми. Иначе бы получился абсурдный результат, что все p_i и P_i должны обратиться в нуль. Поэтому существует по крайней мере одно функциональное соотношение

$$f(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n) = 0 \quad (7.3.5)$$

¹ См., например, У и т т е к е р, Аналитическая динамика, стр. 333.

где $i = 1, 2, \dots, n$. Эти уравнения вместе с данными дополнительными условиями (7.3.6) полностью определяют преобразования, хотя и в неявном виде. Можно исключить λ_i из уравнений (7.3.8), получив $2n - m$ соотношений между старыми и новыми переменными. Вместе с m дополнительными условиями (7.3.6) они и задают преобразование. Путем соответствующих алгебраических операций старые q_i, p_i могут быть выражены через новые Q_i, P_i , и наоборот.

Все дальнейшие рассуждения будут аналогичны рассуждениям предыдущего пункта. Инвариантность дифференциальной формы $\sum p_i \delta q_i$ гарантирует инвариантность канонических уравнений и снова функция Гамильтона H оказывается инвариантом преобразования. Более того, мы снова можем включить время t в число позиционных координат $q_1, \dots, q_n$ в качестве дополнительной переменной, перейдя к параметрической форме канонических уравнений. В результате получим реономную форму преобразований Матье, характеризующую инвариантностью дифференциальной формы

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i + p_t \delta t = \sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i + p_{\bar{t}} \delta \bar{t} \quad (7.3.9)$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} \Omega_k(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t) &= 0, \\ (k &= 1, \dots, m), \quad t = \bar{t}. \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

К уравнениям (7.3.8) добавляется сейчас еще одно уравнение

$$p_t - p_{\bar{t}} = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t}. \quad (7.3.11)$$

Мы снова имеем дело с расширенным фазовым пространством, в котором обобщенная функция Гамильтона K инвариантна относительно преобразования. Это приводит к соотношению

$$p_t + H = p_{\bar{t}} + H', \quad (7.3.12)$$

откуда

$$H' = H + p_t - p_{\bar{t}} = H + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial t}. \quad (7.3.13)$$

Здесь мы опять сталкиваемся с тем фактом, что функция Гамильтона инвариантна лишь относительно склерономных преобразований, в то время как в реономном случае появляются дополнительные корректирующие члены.

Задача. Предположим, что $m = n$ и что дополнительные условия (7.3.6) заданы в явном виде (7.2.18). Показать, что преобразование функции Гамильтона в соответствии с (7.3.13) приводит к тому же результату, что и формула (7.2.20) предыдущего пункта.

Резюме. Преобразования Матье определяются требованием инвариантности дифференциальной формы $\sum p_i \delta q_i$. Для выполнения этого требования должно существовать по крайней мере одно соотношение между q_i и Q_i , не содержащее p_i . Преобразования Матье могут быть классифицированы по числу соотношений, существующих между q_i и Q_i , которые могут быть заданы заранее. Минимальное число соотношений равно 1, а максимальное n . Последний случай соответствует рассматривавшимся ранее точечным преобразованиям, которые составляют, таким образом, особую подгруппу преобразований Матье.

4. Канонические преобразования общего типа. Инвариантность дифференциальной формы (7.2.13) не является абсолютно необходимой для сохранения вида канонических уравнений. Существует более широкая группа преобразований, которые оставляют инвариантными канонические уравнения. Предположим, что дифференциальная форма (7.2.13) преобразуется по следующему закону:

$$\sum p_i \delta q_i = \sum P_i \delta Q_i + \delta S, \quad (7.4.1)$$

где δS — полный дифференциал некоторой величины S , являющейся функцией q_i и Q_i . Канонический интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n P_i dQ_i - H dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} dS, \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Последний интеграл является *граничным членом*, не зависящим от способа варьирования, поскольку варьирование производится при фиксированных граничных значениях. Следовательно, хотя мы и изменили канонический интеграл, это изменение свелось лишь к добавлению некоторой константы. Поэтому обращение в нуль вариации канонического интеграла, записанного в первоначальных переменных, гарантирует обращение в нуль вариации канонического интеграла в новых переменных. Это означает, что *канонические уравнения движения остаются инвариантными относительно преобразования* (7.4.1).

Мы получили наиболее общее условие для канонического преобразования. Требование инвариантности дифференциальной формы $\sum p_i \delta q_i$ мы заменили условием

$$\sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \delta S, \quad (7.4.3)$$

где S — некоторая заданная функция q_i и Q_i

$$S = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n). \quad (7.4.4)$$

Функция S называется «производящей функцией» канонического преобразования. Вариация S имеет вид

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} \delta Q_i \right). \quad (7.4.5)$$

Подставим это выражение в (7.4.3), предполагая при этом, что не существует дополнительных условий, связывающих q_i и Q_i , так что все δq_i и δQ_i — свободные вариации. Тогда получим

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Уравнения (7.4.6) являются уравнениями произвольного канонического преобразования, свободного от каких бы то ни было априорных условий. В самой природе канонических преобразований заключено то свойство, что мы не можем получить в явном виде выражения старых переменных через новые переменные, и наоборот, не сделав предварительно

некоторых исключений. Мы имеем *смешанное* представление, в котором старые и новые импульсы записаны в виде функций и старых и новых позиционных координат. Для получения явного представления требуется разрешить относительно позиционных координат либо первую, либо вторую систему уравнений (7.4.6).

Наиболее общая форма канонического преобразования возникает в том случае, когда преобразование обладает производящей функцией S и, кроме того, существуют дополнительные соотношения между q_i и Q_i , как в случае преобразований Матье. Применение метода неопределенных множителей Лагранжа показывает, что уравнения преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial \bar{S}}{\partial Q_i}, \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

где «видоизмененная производящая функция» $\bar{S}$ определяется следующим образом:

$$\bar{S} = S + \lambda_1 \Omega_1 + \dots + \lambda_m \Omega_m. \quad (7.4.8)$$

До сих пор мы рассматривали только склерономные преобразования. Для обобщения на реономный случай следует снова обратиться к расширенному фазовому пространству, в котором время является дополнительной позиционной координатой. Производящая функция S тогда имеет вид

$$S = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t) \quad (7.4.9)$$

с дополнительным условием

$$t = \bar{t}. \quad (7.4.10)$$

Из определения функции S при помощи обобщенной дифференциальной формы

$$\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i + p_t \delta t - \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta Q_i + p_{\bar{t}} \delta \bar{t} \right) = \delta S. \quad (7.4.11)$$

сразу следуют снова уравнения (7.4.6), характеризующие каноническое преобразование; к ним добавляется, однако, еще одно уравнение

$$p_t - p_{\bar{t}} = \frac{\partial S}{\partial \bar{t}}. \quad (7.4.12)$$

Наконец, инвариантность обобщенной функции Гамильтона $K = p_t + H$ приводит к следующему закону преобразования обычной функции Гамильтона H :

$$H' = H + p_t - p_{\bar{t}} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (7.4.13)$$

Задача. Доказать справедливость соотношения (7.4.13) другим способом. Оставив время t в качестве независимой переменной, рассмотреть каноническое преобразование, в котором время входит как параметр. После этого получить выражение (7.4.13), различая величины dS в каноническом интеграле и δS в определении канонического преобразования. В первом случае время варьируется, а во втором нет.

Резюме. Общая форма произвольного канонического преобразования связана с производящей функцией, которая определяет собой это преобразование. Любая функция переменных q_i и Q_i может быть выбрана в качестве производящей функции для соответствующего канонического преобразования. В дополнение к этой функции a priori может быть задан ряд определенных соотношений между q_i и Q_i . В этом случае мы получаем «обусловленное» каноническое преобразование. Число заданных заранее условий может меняться от одного до n . Формулы канонического преобразования имеют ту особенность, что они не задают преобразование в явном виде. Вместо выражений для новых переменных через старые либо наоборот — старых через новые мы имеем некоторое смешанное представление. Старые и новые импульсы выражаются через старые и новые позиционные координаты.

5. Билинейная дифференциальная форма. В любой теории преобразований имеются основные величины, которые при преобразовании *не* меняются. Они являются основными инвариантами, которые определяют собой природу преобразования. Начав изучать канонические преобразования, мы установили инвариантность дифференциальной формы $\sum p_i \delta q_i$, откуда следовала инвариантность канонических уравнений. Однако затем выяснилось, что канонические уравнения остаются инвариантными и при более общих условиях. Необходимое и достаточное условие каноничности

преобразования было сформулировано в такой форме: разность двух дифференциальных форм должна быть полным дифференциалом δS некоторой функции S . При этом возникает вопрос, что же в действительности является основным инвариантом канонических преобразований.

Эта задача тесно связана с вопросом о *геометрической структуре* фазового пространства. Мы уже видели, как помогло динамической теории введение определенной геометрической структуры лагранжевого пространства конфигураций. Там был введен риманов линейный элемент $\overline{ds}$, квадрат которого задавался в виде некоторой квадратичной дифференциальной формы переменных q_i . Величина $\overline{ds}^2$ была одновременно основным инвариантом лагранжевого точечного преобразования и тем бесконечно малым расстоянием, которое — при соответствующем выборе граничных условий — определяло геометрическую структуру пространства конфигураций.

Можно ли ввести что-нибудь подобное в гамильтоновом фазовом пространстве? Имеются ли какие-либо инвариантные дифференциальные формы, которые могли бы в нем играть роль формы $\overline{ds}^2$, как в лагранжевом пространстве конфигураций? Такая дифференциальная форма, связанная с каноническими преобразованиями и инвариантная при этих преобразованиях, действительно существует, хотя она и отличается принципиально от римановой формы $\overline{ds}^2$. Она также квадратична относительно дифференциалов, но связана при этом с *двумя* перемещениями и не имеет ничего общего с расстоянием. Геометрия фазового пространства имеет, таким образом, необычную метрику. Она похожа скорее на некую геометрию, в которой могут измеряться не расстояния, а *площади*. Поскольку основной дифференциальный инвариант канонических преобразований линеен по каждому из двух бесконечно малых перемещений, мы будем называть его «билинейной дифференциальной формой». На основе этой инвариантной дифференциальной формы может быть построена полная теория канонических преобразований.

Дифференциальная величина

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i = dS \quad (7.5.1)$$

напоминает работу моногенной силы. Такая работа является полным дифференциалом некоторой функции, из которой может быть получена и сама сила. Желая проверить, является ли данная сила моногенной, мы прилагали ее к какой-нибудь частице, перемещающейся по произвольной замкнутой траектории. Равенство нулю полной работы силы вдоль любой замкнутой траектории означало моногенность силы, противное свидетельствовало о ее полигенности.

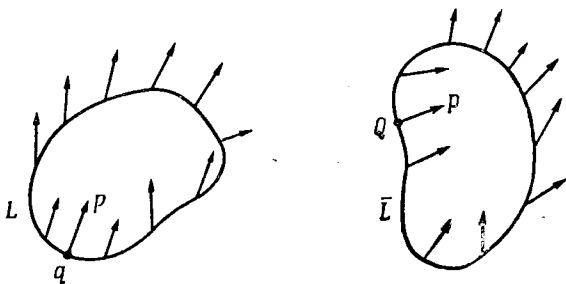


Рис. 9.

Подобный критерий может быть применен и к дифференциальной форме (7.5.1). Проинтегрируем (7.5.1) вдоль любой замкнутой кривой L в фазовом пространстве. Тогда в левой части мы получим два криволинейных интеграла, поскольку каждая (p, q) -точка связана преобразованием с соответствующей (P, Q) -точкой. Интеграл в правой части обращается в нуль. Следовательно, мы получаем принцип инвариантности, в котором уже отсутствует неопределенная функция S ,

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint \sum_{i=1}^n P_i dQ_i. \quad (7.5.2)$$

Для любой замкнутой кривой в фазовом пространстве можно записать «циркуляцию» Γ , и эта циркуляция инвариантна при произвольном каноническом преобразовании.

Вместо того чтобы проводить исследование $2n$ -мерного фазового пространства, можно сделать определение циркуляции наглядным, перейдя в пространство q -переменных и введя в каждой точке q_i величины p_i в виде компонент вектора. Произвольная замкнутая кривая L в фазовом простран-

стве переходит в таком представлении в какую-то замкнутую кривую $\bar{L}$ в q -пространстве, в каждой точке которой задан вектор, непрерывно меняющийся при движении вдоль кривой (см. рис. 9).

Уравнение (7.5.2) характеризует каноническое преобразование с помощью интегрального инварианта. Покажем теперь, как этот интегральный инвариант может быть преобразован в дифференциальный инвариант. С этой целью будем считать заданную замкнутую кривую L границей какой-то двумерной области K . Предположим, что в каждой точке этой области задан вектор p_i и что каждую точку мы аналитически характеризуем при помощи двух «гауссовых криволинейных координат» u и v

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(u, v), \\ p_i &= p_i(u, v). \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Параметрические линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ образуют плотную сетку линий. Вместо того чтобы двигаться вдоль гладкого контура L , будем перемещаться вдоль зигзагообразной линии L' , образованной из бесконечно малых участков параметрических линий (см. рис. 10). В пределе, когда сетка параметрических линий становится сколь угодно плотной, циркуляция Γ вдоль зигзагообразной линии L' как угодно близко приближается к циркуляции, взятой вдоль гладкого контура L .

Заметим, что циркуляцию Γ можно вычислять двумя способами. Можно двигаться вдоль самого контура, как мы это делали раньше. Однако можно также двигаться и вдоль всех многочисленных маленьких параллелограммов, образованных двумя семействами параметрических линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Конечный результат будет тем же самым, поскольку вклады от внутренних участков выпадают, потому что каждый из таких участков проходится дважды в противоположных направлениях. Вклад от внешних участков остается прежним. Это приводит к переходу от линейного интеграла к поверхностному интегралу.

Пусть $f(u, v)$ — произвольная функция, заданная в области K . Обозначим через $d'f$ изменение f , связанное с изменением одного лишь v , при постоянном u

$$d'f = \frac{\partial f}{\partial v} dv. \quad (7.5.4)$$

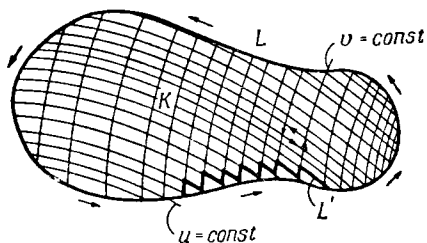


Рис. 10.

Аналогично через $d''f$ обозначим изменение f , связанное с изменением одного лишь u , при постоянном v

$$d''f = \frac{\partial f}{\partial u} du. \quad (7.5.5)$$

Для циркуляции вдоль бесконечно малого параллелограмма, образованного параметрическими линиями, можно написать

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [d'(p_i d''q_i) - d''(p_i d'q_i)] &= \sum_{i=1}^n (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) du dv. \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

Мы получили следующее важное преобразование линейного интеграла в поверхностный интеграл:

$$\oint_{\hat{L}} \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \int_K \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) du dv. \quad (7.5.7)$$

Задача. Применив теорему (7.5.7) к трехмерному случаю $n = 3$, показать, что она сводится к интегральному преобразованию, известному под названием «теорема Стокса». Интегральное преобразование (7.5.7) обобщает теорему Стокса на любое число измерений. Отметим, что эта теорема не зависит от каких-либо специальных метрических свойств пространства.

С помощью этого преобразования инвариантность циркуляции Γ может быть представлена в другом виде. Циркуляция может быть записана в виде *поверхностного интеграла*, распространенного на область K . Поскольку эта область совершенно произвольна, из инвариантности Γ следует инвариантность подинтегрального выражения

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right). \quad (7.5.8)$$

Это в свою очередь эквивалентно инвариантности дифференциальной формы

$$\sum_{i=1}^n (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i), \quad (7.5.9)$$

которую можно связать с любыми двумя независимыми бесконечно малыми перемещениями $d' q_i$, $d' p_i$ и $d'' q_i$, $d'' p_i$ в фазовом пространстве. Это и есть «билинейная дифференциальная форма», инвариантность которой является необходимым и достаточным условием канонического преобразования. Производящая функция S исключена из этого условия. В действительности определение канонического преобразования при помощи S -функции может рассматриваться как интегральная форма того утверждения, что билинейная дифференциальная форма является определяющим инвариантом канонического преобразования.

Резюме. Условие того, что преобразование является каноническим, может быть сформулировано без помощи производящей функции S . Характерным свойством канонических преобразований является инвариантность циркуляции вдоль любой замкнутой кривой в фазовом пространстве. Это же самое свойство может быть представлено в дифференциальной форме. Мы получаем определенное дифференциальное выражение, «билинейную дифференциальную форму», инвариантную относительно канонических преобразований. Эта билинейная дифференциальная форма аналогична величине $\bar{ds}^2$ в метрической геометрии. Однако в то время, как линейный элемент соответствует одному бесконечно малому перемещению, билинейный дифференциал соответствует двум бесконечно малым перемещениям. Поэтому он скорее подобен элементу площади, а не элементу расстояния.

6. Скобки Лагранжа и Пуассона. Лагранж предвосхитил целый ряд результатов, которые являются по существу естественными следствиями теории канонических преобра-

зований¹. Он заметил, что в теории возмущений оказывается чрезвычайно важным одно выражение. Рассмотрим две системы переменных, q_i и p_i , которые заданы как функции двух параметров u и v . Образует «скобки Лагранжа».

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial p_i}{\partial u} \right). \quad (7.6.1)$$

Они, очевидно, антисимметричны относительно перестановки переменных u и v

$$[u, v] = -[v, u]. \quad (7.6.2)$$

Эти скобки тесно связаны с теорией канонических преобразований.

Заметим, что выражение (7.6.1) в точности равно той величине, с которой мы встретились в предыдущем пункте при преобразовании в поверхностный интеграл циркуляции, записанной в виде криволинейного интеграла. В новых обозначениях можно написать

$$\oint_L \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \int_K [u, v] du dv. \quad (7.6.3)$$

Поскольку инвариантность циркуляции, взятой вдоль любой замкнутой кривой L , является характерным свойством канонических преобразований, это же свойство может быть выражено как инвариантность скобок Лагранжа $[u, v]$: *каноническими являются те преобразования от переменных q_i, p_i к Q_i, P_i , которые оставляют инвариантными скобки Лагранжа, независимо от того, как q_i, p_i зависят от u и v* . Смысл этой инвариантности состоит в том, что, заменив координаты q_i, p_i в результате канонического преобразования координатами Q_i, P_i и образовав затем скобки Лагранжа в новой системе координат, мы получим то же самое значение, что и раньше.

Уже было показано, что, характеризуя каноническое преобразование при помощи производящей S -функции, мы не получаем сразу явных уравнений преобразования. Преобразование получается в неявном виде и окончательные

¹ L a g r a n g e, Oeuvres, vol. VI, p. 713. Оригинальная статья вышла в 1808 г.

уравнения получаются лишь путем исключения (разрешения относительно одной из систем переменных). В связи с этим возникает интересный вопрос: как узнать, является ли некоторое заданное в явном виде преобразование каноническим или нет? У нас нет возможности *получать* в явном виде канонические преобразования, однако мы можем *проверить*, является ли данное преобразование каноническим. Каноническое преобразование может быть охарактеризовано системой дифференциальных соотношений. Если эти соотношения выполняются, то преобразование каноническое, и наоборот, если преобразование каноническое, то эти соотношения должны выполняться.

Эти дифференциальные соотношения сразу следуют из того факта, что произвольные скобки Лагранжа не меняются при канонических преобразованиях. Предположим, что нам задано в явном виде некоторое преобразование от старых переменных к новым

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n), \\ p_i &= g_i(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n). \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

Тогда можно выбрать любую пару переменных: Q_i и Q_k , либо Q_i и P_k , либо P_i и P_k — и рассматривать их как два параметра u и v , для которых образуются скобки Лагранжа; при этом остальные переменные следует считать постоянными. Затем делается то же самое в новой системе координат. В новой системе координат все Q_i и P_i взаимно независимы. Поэтому из определения скобки Лагранжа сразу получаем

$$[Q_i, Q_k] = 0, \quad [P_i, P_k] = 0, \quad [Q_i, P_k] = \delta_{ik}, \quad (7.6.5)$$

где «символ Кронекера» $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

Задача 1. Используя правила дифференцирования неявной функции, показать, что для любого преобразования координат от q_i, p_i к Q_i, P_i , удовлетворяющего условию (7.6.5), оказываются инвариантными произвольные скобки Лагранжа $[u, v]$. Отсюда видно, что условия (7.6.5) являются не только необходимыми, но и достаточными для определения канонической природы преобразования.

Задача 2. Показать, что при выполнении условия (7.6.5) билинейная дифференциальная форма

$$\sum_{i=1}^n (d' p_i d'' q_i - d'' p_i d' q_i)$$

также является инвариантом преобразования.

Вскоре после исследований Лагранжа Пуассон (в 1809 г.) ввел другой тип скобок, который является естественным дополнением к скобкам Лагранжа. Вместо того чтобы считать q_i и p_i функциями Q_i и P_i , рассмотрим пару переменных u и v как заданные функции координат q_i, p_i ,

$$\begin{aligned} u &= u(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \\ v &= v(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (7.6.6)$$

«Скобками Пуассона» называется следующая величина:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} \right). \quad (7.6.7)$$

Эти скобки также обладают свойствами антисимметрии

$$(u, v) = -(v, u). \quad (7.6.8)$$

Они тесно связаны со скобками Лагранжа. Предположим, что у нас имеются $2n$ переменных $u_1, \dots, u_{2n}$, которые являются заданными функциями q_i, p_i . Можно, конечно, и наоборот, рассматривать q_i, p_i как функции $u_1, \dots, u_{2n}$. Для соотношений первого типа образуются скобки Пуассона, для соотношений второго типа — скобки Лагранжа. Один тип скобок определяет другой. Следовательно, раз скобки Лагранжа инвариантны относительно канонических преобразований, то этим свойством обладают и скобки Пуассона. Отсюда получается другая формулировка условий и каноничности преобразования. *Каноническими являются те преобразования, которые оставляют инвариантными скобки Пуассона (u, v) независимо от того, как функции u и v зависят от координат q_i, p_i .*

Применим теперь этот принцип инвариантности к обратному каноническому преобразованию (7.6.4), которое переводит новые координаты в старые

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \\ P_i &= P_i(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (7.6.9)$$

Отождествим u и v с любыми двумя переменными из Q_i , P_i и запишем скобки Пуассона в новой и старой координатных системах. Для старой системы они могут быть, как и раньше, непосредственно вычислены. Следовательно, из свойства инвариантности получаем

$$(Q_i, Q_k) = 0, \quad (P_i, P_k) = 0, \quad (Q_i, P_k) = \delta_{ik}. \quad (7.6.10)$$

Эти условия эквивалентны первоначальным условиям (7.6.5).

Задача 3. Считая $u_1, \dots, u_{2n}$ заданными функциями q_i, p_i и разрешая затем заданные соотношения относительно q_i, p_i , установить следующие формулы, связывающие скобки Лагранжа и Пуассона,

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} [u_i, u_\alpha] (u_k, u_\alpha) = \delta_{ik}. \quad (7.6.11)$$

При использовании этих соотношений условия (7.6.10) оказываются прямым следствием условий (7.6.5).

Резюме. Заданная производящая функция определяет каноническое преобразование в неявной форме. Хотя и не существует формул, которые бы задавали каноническое преобразование в явном виде, однако относительно любого конкретного преобразования можно выяснить, является ли оно каноническим. Для этой цели могут быть использованы скобки Лагранжа или Пуассона. Эти скобки тесно связаны с каноническими преобразованиями. Каноническими являются те преобразования сопряженных переменных, которые оставляют инвариантными любые скобки Лагранжа или Пуассона.

7. Бесконечно малые канонические преобразования. Произведем некоторое произвольное каноническое преобразование, определяемое условием

$$\sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \delta S. \quad (7.7.1)$$

Пусть теперь переменные Q_i , P_i преобразуются в другие переменные $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ при помощи второго канонического преобразования

$$\sum_{i=1}^n (P_i \delta Q_i - \bar{p}_i \delta \bar{q}_i) = \delta S'. \quad (7.7.2)$$

Суммируя, получаем

$$\sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - \bar{p}_i \delta \bar{q}_i) = \delta (S + S'), \quad (7.7.3)$$

откуда видно, что прямой переход от переменных q_i , p_i к переменным $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ также является каноническим преобразованием. Это означает, что *произведение двух канонических преобразований снова является каноническим преобразованием*. Мы говорим, что канонические преобразования «обладают групповыми свойствами». Это играет важную роль в теории дифференциальных уравнений Ли. Там полное решение системы дифференциальных уравнений сводится к изучению некоторой непрерывной группы преобразований. Как будет видно из дальнейшего, канонические уравнения движения находятся в теснейшей связи с подобными непрерывными преобразованиями.

Рассмотрим производящую функцию S , содержащую параметр t

$$S = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t). \quad (7.7.4)$$

В дальнейшем t будет отождествлено со временем; пока же это просто переменный параметр.

Производящая функция вида (7.7.4) порождает бесконечное множество канонических преобразований, потому что каждому значению t соответствует свое определенное каноническое преобразование. Рассмотрим теперь преобразование, соответствующее какому-то определенному

значению t , а также близкое преобразование, относящееся к значению $t + \Delta t$. Каждое преобразование можно рассматривать, как отображение пространства самого на себя. Преобразование I отображает точку P фазового пространства в некоторую точку Q , а преобразование II отображает ту же точку P в какую-то другую точку Q' . Поскольку S — непрерывная функция t , две точки Q и Q' находятся близко одна к другой. Ввиду групповых свойств канонических преобразований переход из Q в Q' тоже есть каноническое преобразование. Мы встречаемся здесь с особым типом преобразований, когда каждая точка фазового пространства переходит в соседнюю близкую точку. Таким образом, можно положить

$$\begin{aligned} Q_k &= q_k + \Delta q_k, \\ P_k &= p_k + \Delta p_k, \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

где Δq_k и Δp_k — малые величины, произведениями и квадратами которых можно пренебречь.

Подобное преобразование называется «бесконечно малым каноническим преобразованием». Оно обладает одним замечательным свойством: в то время как произвольное каноническое преобразование не допускает представления в явном виде, бесконечно малое каноническое преобразование может быть получено в явном виде.

Для наших целей будет более удобно обозначить первоначальные переменные, с которых мы начинаем, большими буквами Q_i, P_i . Новые переменные при значении параметра, равном t , обозначим через q_i, p_i , а при значении параметра, равном $t + \Delta t$, через $q_i + \Delta q_i, p_i + \Delta p_i$. Тогда имеем¹

$$\sum_{i=1}^n (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \delta S, \quad (7.7.6)$$

$$\sum_{i=1}^n [(p_i + \Delta p_i) \delta (q_i + \Delta q_i) - P_i \delta Q_i] = \delta S',$$

¹ Из формул (7.7.6) видно, что S — производящая функция канонического преобразования, переводящего точку q_i, p_i в точку Q_i, P_i . Для обратного же преобразования производящей функцией будет $-S$. — Прим. ред.

где

$$\begin{aligned} S' &= S(q_1 + \Delta q_1, \dots, q_n + \Delta q_n, Q_1, \dots, Q_n, t + \Delta t) = \\ &= S + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t = S + \sum_{i=1}^n p_i \Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t. \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

Записав разность двух уравнений (7.7.6), получим следующее замечательное соотношение:

$$\sum_{i=1}^n \Delta p_i \delta q_i - \Delta q_i \delta p_i = \delta \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t. \quad (7.7.8)$$

Для дальнейших рассуждений нам нужно построить новую функцию. Первоначальная функция S имеет вид (7.7.4) и такой же вид имеет ее частная производная по t . Введем теперь p_i с помощью уравнений, определяющих каноническое преобразование

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (7.7.9)$$

Из этих уравнений можно получить Q_i как функции q_i и p_i . Подставим теперь полученные значения Q_i в $\partial S / \partial t$ и обозначим получившуюся функцию через $-B$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -B(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t). \quad (7.7.10)$$

Это и есть та функция, которую нужно было построить.

Используя эту новую функцию в правой части (7.7.8), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (\Delta p_i \delta q_i - \Delta q_i \delta p_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial B}{\partial p_i} \delta p_i \right) \Delta t. \end{aligned} \quad (7.7.11)$$

Сравнение двух частей этого уравнения дает

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= \frac{\partial B}{\partial p_i} \Delta t, \\ \Delta p_i &= - \frac{\partial B}{\partial q_i} \Delta t. \end{aligned} \quad (7.7.12)$$

Это и есть уравнения в явном виде для бесконечно малого канонического преобразования. Вместо «абсолютных координат» $q_i + \Delta q_i$, $p_i + \Delta p_i$ в новой системе отсчета могут быть использованы «относительные координаты» Δq_i , Δp_i . Эти координаты выражены в явном виде при помощи одной функции B , характеризующей преобразование. В качестве этой функции может быть выбрана произвольная функция переменных q_i , p_i .

Резюме. При бесконечно малом каноническом преобразовании точки фазового пространства получают бесконечно малые смещения. Формулы такого преобразования могут быть записаны в явном виде. Преобразование определяется заданием произвольным образом выбранной функции переменных q_i , p_i .

8. Движение фазовой жидкости как непрерывное выполнение канонических преобразований. Результаты предыдущего пункта пролили новый свет на природу уравнений динамики. Если разделить левые и правые части уравнений (7.7.12) на Δt , а затем устремить Δt к нулю, то в пределе мы получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial B}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial B}{\partial q_i}.\end{aligned}\tag{7.8.1}$$

Это — не что иное, как *канонические уравнения движения*, если переменный параметр t отождествить со временем, а функцию B с функцией Гамильтона H . Чтобы лучше понять получившийся результат, представим себе, что мы следим за движением фазовой жидкости в течение некоторого интервала времени Δt . Предположим, что частицы жидкости помечены, так что можно определять положение каждой из них. В какой-то момент времени t сделаем моментальный снимок движущейся жидкости; затем в момент $t + \Delta t$ — второй моментальный снимок. Все частицы жидкости сдвинулись со своих прежних мест, но их перемещения бесконеч-

но малы. Эти бесконечно малые перемещения определяют некоторое каноническое преобразование в фазовом пространстве. Процесс может быть повторен много раз. Все движение фазовой жидкости есть не что иное, как непрерывное выполнение канонических преобразований.

Этот поразительный результат был впервые получен Гамильтоном, хотя и в несколько другой интерпретации. Он по-новому освещает роль канонических преобразований при изучении движения. Все движение механической системы может рассматриваться как задача о преобразованиях. Последовательные положения фазовой жидкости представляют собой непрерывно меняющееся отображение пространства самого на себя. Это отображение все время каноническое.

Можно сказать даже нечто большее. Последовательные преобразования фазовой жидкости связаны друг с другом. В конце предыдущего пункта мы пришли к функции Гамильтона $B = H$, начав с произвольной производящей функции S , содержащей параметр t . Однако теперь можно проделать обратный путь. Имеющаяся задача о движении дает нам функцию Гамильтона H , зависящую от q_i , p_i и, возможно, t . Заменяем p_i на $\partial S / \partial q_i$ и попытаемся найти первоначальную функцию S , из которой возникло уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (7.8.2)$$

А это уже задача интегрирования. Первая задача была проще, потому что она не требовала ничего, кроме дифференцирования и исключения переменных. Новая задача гораздо более трудная, и она будет подробно рассматриваться в следующей главе. Можно показать, что для каждой заданной функции H может быть найдена соответствующая функция S ; более того, существует бесконечное множество возможных функций S . Построенная таким образом S -функция

$$S = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t) \quad (7.8.3)$$

порождает бесконечное семейство канонических преобразований. Точка Q_i , P_i преобразуется в точку q_i , p_i , положение которой непрерывно меняется со временем t , причем для выбранных Q_i , P_i при изменении t это движение

в точности отражает движение механической системы. Движение же всей фазовой жидкости есть не что иное, как *постепенная эволюция зависящего от времени канонического преобразования*.

Эта новая точка зрения отражает в новом свете также и смысл инвариантов движения. Эти инварианты являются в действительности *инвариантами произвольного канонического преобразования*. Инвариантность циркуляции, обсуждавшаяся в гл. VI, п. 8, является характерным свойством канонических преобразований. Более того, она даже определяет эти преобразования. Теорема Лиувилля (см. гл. VI, п. 7) доказывает инвариантность объема, основанную на несжимаемости фазовой жидкости. Эту теорему можно сформулировать в таком виде: значение якобиана (функционального детерминанта) преобразования, которое связывает два состояния движения, соответствующие двум произвольным моментам времени, всегда равно 1. Это тоже является общим свойством канонических преобразований. *Значение якобиана произвольного канонического преобразования равно 1.*

Задача. Записать якобиан Δ некоторого канонического преобразования и умножить его самого на себя. Показать, что $\Delta^2 = 1$. Для исключения возможности $\Delta = -1$ требуются дальнейшие рассуждения, однако для движения фазовой жидкости выбор $+1$ следует из непрерывности движения.

Резюме. Произвольная функция, зависящая от времени, порождает бесконечное семейство канонических преобразований. Последовательные стадии этого преобразования могут рассматриваться как непрерывно меняющееся отображение пространства самого на себя, что в свою очередь может быть интерпретировано как движение некоторой жидкости. Это движение удовлетворяет каноническим уравнениям, что приводит, таким образом, к совершенно новой интерпретации этих уравнений. Движение фазовой жидкости можно представить как последовательные стадии бесконечного семейства непрерывных канонических преобразований.

9. Главная функция Гамильтона и движение фазовой жидкости. Результаты нашего обсуждения, естественно, имеют отношение к задаче интегрирования уравнений динамики. Нам уже известно соотношение между производящей функцией S и функцией Гамильтона H [см. уравнение (7.8.2)]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \quad (7.9.1)$$

При этом следует помнить, что p_i в функции Гамильтона H заменены на $\partial S / \partial q_i$. Предположим, что мы можем найти производящую функцию S , удовлетворяющую этому уравнению в частных производных. Тогда мы сможем получить движение фазовой жидкости в виде последовательных фаз зависящего от времени канонического преобразования с заданной производящей функцией S . После соответствующих дифференцирований и исключений это преобразование может быть найдено в явном виде. Уравнения преобразования записываются в такой форме

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, t), \\ p_i &= g_i(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, t). \end{aligned} \quad (7.9.2)$$

Получение этих формул равносильно *полному интегрированию* динамической задачи, потому что все механические переменные записаны в виде явных функций времени t и $2n$ постоянных $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n$, которые могут быть выбраны в соответствии с произвольными начальными условиями. В действительности эти «постоянные» являются координатами той фиксированной точки Q_i, P_i , которая преобразуется в движущуюся точку q_i, p_i ; движение последней обусловлено тем, что наше преобразование зависит от времени. В результате оказывается, что в явной форме описано все движение фазовой жидкости. При этом координаты Q_i, P_i играют роль произвольных постоянных интегрирования.

Следовательно, задача интегрирования сводится к задаче нахождения производящей функции для данной непрерывной последовательности бесконечно малых канонических преобразований. Если эту задачу решить, то остальное получается при помощи дифференцирований и разрешения конечных уравнений.

Идея о нахождении фундаментальной функции, из которой при помощи дифференцирования и конечных преобразований без всякого интегрирования могли бы быть получены все решения уравнений движения, принадлежит Гамильтону. Он первый доказал существование такой функции в геометрической оптике, назвав ее там «характеристической функцией»; эта функция оказалась необычайно полезной в целом ряде задач. Позднее, в своих исследованиях по динамике, Гамильтон снова столкнулся с той же самой функцией, назвав ее на этот раз «главной функцией». Ввиду общей вариационной основы у оптики и механики, эти две концепции эквивалентны и открытие Гамильтона относится по существу к вариационному исчислению, а специальная форма вариационного интеграла несущественна. (Этот интеграл определяет время в оптическом принципе Ферма и действие в механическом принципе Лагранжа.)

В распоряжении Гамильтона не было теории канонических преобразований, и он сделал свое открытие, исходя из совершенно иных предпосылок. Главная функция Гамильтона не является абстрактным математическим понятием, которое используется только для получения преобразований специального вида; она имеет определенный физический смысл. Для того чтобы пояснить ход рассуждений Гамильтона, начнем с консервативной системы, у которой функция Лагранжа L и функция Гамильтона H не зависят явно от времени. Именно такие функции встречаются в оптике, и это явилось для Гамильтона исходным пунктом как для оптики, так и для механики. Обобщение на случай неконсервативных систем может быть сделано очень просто: задача сводится к случаю консервативных систем путем включения времени t в число механических переменных.

Вернемся к принципу наименьшего действия в формулировке Лагранжа, перейдя, однако, от n -мерного пространства конфигураций к $2n$ -мерному фазовому пространству (см. гл. V, п. 6). Требуется найти стационарное значение «действия»

$$A = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} T dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n p_i dq_i \quad (7.9.3)$$

при том дополнительном условии, что C -точка в фазовом пространстве остается на поверхности постоянной энергии

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) - E = 0. \quad (7.9.4)$$

Как мы знаем, тот же самый принцип можно выразить в форме Якоби. Требуется минимизировать интеграл

$$A = \sqrt{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{E - V} \, ds \quad (7.9.5)$$

без каких бы то ни было дополнительных условий. Мы видели, что можно ввести риманов линейный элемент

$$d\sigma = \sqrt{2(E - V)} \, ds, \quad (7.9.6)$$

с помощью которого принципу Якоби можно придать простой геометрический смысл: требуется определить кратчайшие (геодезические) линии в некотором римановом пространстве. Предположим, что мы нашли эти геодезические линии и вычислили вдоль них интеграл (7.9.5). При этом мы фактически получили длину дуги геодезической линии между двумя точками M и N , или, проще говоря, «расстояние» между точками M и N . Это расстояние, очевидно, является функцией координат q_i двух крайних точек M и N . Таким образом, выраженное через координаты двух крайних точек это расстояние и есть главная функция Гамильтона.

Очевидно, что любые две точки $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ и $q_1, \dots, q_n$ пространства конфигураций (по крайней мере в достаточно малой области) могут быть соединены геодезической линией. Поэтому главная функция Гамильтона может быть записана для любой пары точек $\bar{q}_i$ и q_i . Обозначив главную функцию Гамильтона через W , получим

$$W = W(q_1, \dots, q_n, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n). \quad (7.9.7)$$

Из предыдущего известно, что вариация интеграла A равна нулю при варьировании с фиксированными граничными значениями, и содержит только граничный член, если граничные значения варьируются (см. гл. VI, п. 8)

$$\delta A = [\sum p_i \delta q_i]_{\tau_1}^{\tau_2} = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \delta \bar{q}_i. \quad (7.9.8)$$

С другой стороны, функция W , по определению, есть не что иное, как определенный интеграл A , записанный в виде функции точек $\bar{q}_i$ и q_i , между которыми этот интеграл берется. Отсюда следует

$$\delta A = \delta W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i} \delta \bar{q}_i \right). \quad (7.9.9)$$

Сравнение последних двух уравнений приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, \\ \bar{p}_i &= - \frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i}. \end{aligned} \quad (7.9.10)$$

Эти уравнения снова показывают, что *два положения движущейся фазовой жидкости связаны друг с другом при помощи канонического преобразования*. Теперь, однако, можно сказать больше: роль W в уравнениях (7.9.10) показывает, что главная функция Гамильтона является производящей функцией того канонического преобразования, которое переводит движущуюся фазовую жидкость из одного состояния в другое, более позднее¹.

Заметим, что производящая функция S зависящего от времени канонического преобразования есть нечто более общее, чем W -функция Гамильтона, потому что зависящее от времени каноническое преобразование переводит произвольную точку Q_i, P_i фазового пространства в движущуюся точку q_i, p_i , в то время как преобразование Гамильтона переводит начальное положение $\bar{q}_i, \bar{p}_i$ движущейся частицы жидкости в какое-то более позднее положение q_i, p_i .

Во всех наших построениях координаты q_i, p_i все время оставались на изоэнергетической поверхности $H=E$. Наши переменные, по сути дела, составляют $(2n-1)$ -мерное многообразие, для которого не существует фазового

¹ Точнее, производящей функцией этого преобразования будет $-W$. — Прим. ред.

пространства вне изоэнергетической поверхности. [Напомним, что уравнение (6.10.27), связанное с принципом Якоби, имело смысл *тождества*, которому должны удовлетворять переменные q_i , p_i .] Поэтому функция W автоматически удовлетворяет уравнению в частных производных

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) - E = 0. \quad (7.9.11)$$

То же самое можно сказать и о координатах начальной точки $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$, принадлежащей тому же самому многообразию. Следовательно, функция W удовлетворяет также и *второму* уравнению в частных производных, полученному заменой $\bar{p}_i$ на $-\partial W / \partial \bar{q}_i$,

$$H\left(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_1}, \dots, -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_n}\right) - E = 0. \quad (7.9.12)$$

Главная функция Гамильтона связана таким образом с *двумя* уравнениями в частных производных.

При заданной производящей функции уравнения канонического преобразования могут быть получены с помощью дифференцирований и исключений, что дает возможность выразить в явном виде координаты q_i , p_i через $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$. Это означает, что мы получаем в явном виде траекторию S -точки, с началом в заданной точке пространства конфигураций. *В этом и заключается выдающееся открытие Гамильтона.* При заданной главной функции W вся динамическая задача сводится к дифференцированиям и разрешению конечных уравнений.

Перейдем теперь к случаю наличия зависимости от времени, имея в виду как консервативные, так и неконсервативные системы. Процедура при этом в точности та же самая, что и в случае консервативных систем. Лишь время t добавляется к позиционным координатам и рассматривается таким образом «обобщенное действие»

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i + p_t t' \right) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i + p_t dt \right) \quad (7.9.13)$$

при дополнительном условии

$$K(q_1, \dots, q_n, t, p_1, \dots, p_n, p_t) = 0. \quad (7.9.14)$$

Введем еще раз линейный элемент $\overline{d\sigma}$, на этот раз для расширенного пространства конфигураций $q_1, \dots, q_n, t$

$$\overline{d\sigma} = L dt = Lt' d\tau, \quad (7.9.15)$$

но геометрия, введенная этим линейным элементом, уже не будет римановой. Соединим две точки $\overline{q}_1, \dots, \overline{q}_n, \overline{t}$ и $q_1, \dots, q_n, t$ в $(n+1)$ -мерном пространстве кратчайшей линией и измерим длину дуги

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{d\sigma} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} Lt' d\tau \quad (7.9.16)$$

этой линии. Таким образом, мы получаем какое-то определенное «расстояние» между двумя точками пространства, причем это расстояние снова оказывается функцией координат этих двух точек

$$W = W(q_1, \dots, q_n, t, \overline{q}_1, \dots, \overline{q}_n, \overline{t}). \quad (7.9.17)$$

Следовательно, мы построим тем самым главную функцию Гамильтона. Варьируя интеграл действия при произвольных граничных значениях, получаем соотношения

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, & \overline{p}_i &= -\frac{\partial W}{\partial \overline{q}_i}, \\ p_t &= \frac{\partial W}{\partial t}, & \overline{p}_t &= -\frac{\partial W}{\partial \overline{t}}, \end{aligned} \quad (7.9.18)$$

из которых видна каноническая природа преобразования. Уравнение в частных производных принимает вид

$$K\left(q_1, \dots, q_n, t, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, \frac{\partial W}{\partial t}\right) = 0 \quad (7.9.19)$$

или, если выразить K через функцию Гамильтона $K = p_t + H$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) &= 0, \\ -\frac{\partial W}{\partial \bar{t}} + H\left(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_1}, \dots, -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_n}, \bar{t}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (7.9.20)$$

Функция W должна удовлетворять этим двум уравнениям в частных производных.

Заметим, что ввиду наличия этих двух условий для W последние два уравнения преобразования (7.9.18) следуют из предыдущих уравнений и могут быть опущены. В оставшихся уравнениях мы выражаем q_i из второй группы уравнений и подставляем их в первую группу. Это дает уравнения преобразования

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{t}, t), \\ p_i &= g_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{t}, t), \end{aligned} \quad (7.9.21)$$

которые в явном виде решают задачу движения, определяя координаты q_i, p_i движущейся точки в любой момент времени t , если задано начальное положение в момент $\bar{t}$.

Эта схема интегрирования Гамильтона была упрощена и улучшена Якоби. Главная функция Гамильтона должна удовлетворять сразу двум уравнениям в частных производных. Решение этой задачи практически невозможно без более широкой схемы интегрирования, предложенной Якоби. Производящая функция S зависящего от времени канонического преобразования определяет все движение фазовой жидкости, удовлетворяя лишь одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) = 0. \quad (7.9.22)$$

Второе дифференциальное уравнение больше не нужно, поскольку точка $Q_1, \dots, Q_n$ не должна лежать на обобщенной изоэнергетической поверхности $K = 0$. Более того, S является функцией только $q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t$ в то время, как главная функция Гамильтона зависит, кроме того, еще и от переменной $\bar{t}$.

В литературе дифференциальное уравнение (7.9.22) часто называют «дифференциальным уравнением в частных производных Гамильтона — Якоби». Это название совершенно справедливо. Несмотря на фундаментальную важность функции расстояния Гамильтона, его первоначальная схема была неприемлема для целей практического интегрирования. Замечательное открытие Гамильтона дало Якоби ключ к каноническим преобразованиям, что в свою очередь расширило рамки применимости метода самого Гамильтона. С помощью функции Якоби S , на которую наложено гораздо меньше условий, можно найти и гамильтонову W -функцию. Но было бы практически невозможно найти W -функцию непосредственно путем решения двух совместных уравнений в частных производных. Связь между этими двумя теориями будет обсуждаться более подробно в следующей главе.

Резюме. В то время как производящая функция канонического преобразования является чисто математическим понятием, Гамильтон ввел «главную функцию», тесно связанную с интегралом действия. В его геометрической интерпретации эта функция имеет ясный смысл. Она задает расстояние между двумя точками в соответствующим образом определенном метрическом пространстве, являясь при этом функцией координат этих двух точек. Главная функция Гамильтона является производящей функцией того частного канонического преобразования, которое связывает два состояния фазовой жидкости, принадлежащие двум различным моментам времени, причем связывает их непосредственно, без помощи какой-либо промежуточной внешней точки.

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ

Сними обувь твою с ног твоих,
ибо место, на котором ты стоишь,
есть земля святая.

Исход, III, 5

Введение. В своем восхождении мы поднялись уже довольно высоко и теперь находимся в разреженной атмосфере теорий необыкновенной красоты и приближаемся к высокому плато, на котором встречаются и находят общую почву геометрия, оптика, механика и волновая механика. Только путем глубоких размышлений, принимающих зачастую творческий характер, можно постичь всю красоту предмета нашего исследования, в котором последнее слово еще отнюдь не сказано. Мы начнем с теории интегрирования, принадлежащей Якоби, а затем перейдем к исследованиям Гамильтона в области геометрической оптики и механики. Объединение этих двух подходов ведет к великим открытиям де Бройля и Шредингера, лежащим в конце нашего пути.

1. Важная роль производящей функции в задаче о движении. В теории канонических преобразований нет более важной теоремы, чем та, которая утверждает, что произвольное каноническое преобразование полностью характеризуется заданием одной-единственной функции S — производящей функции этого преобразования. Подобным же образом и канонические уравнения характеризуются одной функцией — функцией Гамильтона H . Эти две фундаментальные функции можно связать между собой определенными соотношениями. Для решения задачи о движении достаточно рассмотреть функцию Гамильтона и попытаться упростить ее с тем, чтобы канонические уравнения стали непосредственно интегрируемыми. С этой целью можно применить подходящее каноническое преобразование, причем это преобразование зависит от одной функции S . Поэтому вместо решения целой системы канонических уравнений можно свести задачу к решению одного уравнения, дифференциального уравнения в частных производных.

С практической точки зрения мы выиграли немного. Решение уравнения в частных производных — даже *одного*

уравнения — нелегкая задача. Она в большинстве случаев не легче, чем первоначальная задача интегрирования. Те задачи, которые могут быть решены с помощью уравнения в частных производных, обычно могут быть решены и другими методами. Поэтому в течение длительного времени считалось, что методы Гамильтона имеют чисто математический интерес и их практическое значение невелико. Философское же значение этих методов и то, что они позволяют по-новому осмыслить наиболее глубокие проблемы механики, оставалось незамеченным всеми, за исключением нескольких ученых, на которых произвела большое впечатление необыкновенная красота исследований Гамильтона. Среди них следует особо отметить Якоби; позднее это были Гельмгольц, Ли, Пуанкаре и уже в наши дни де Бройль и Шредингер. В современной физике методы Гамильтона завоевали признание благодаря оптико-механической аналогии, которая была выяснена с помощью уравнения в частных производных Гамильтона. С рождением шредингеровской волновой механики, существенно опирающейся на работы Гамильтона, основные идеи гамильтоновой механики нашли свое место в учебниках теоретической физики. При этом, однако, на первый план выдвигается обычно *техническая* сторона этой теории, а ее принципиальная философская сторона остается в тени. С нашей точки зрения, чисто техническая сторона этого вопроса менее важна. Основным интерес представляет осмысление основ этой теории и взаимосвязи между ее различными аспектами. Мы обсудим последовательно теории Якоби и Гамильтона и выявим ту центральную роль, которую в них играет уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби.

Резюме. Канонические преобразования характеризуются одной-единственной функцией, производящей функцией. Поэтому задача нахождения некоторого канонического преобразования, которое бы упрощало функцию Гамильтона и делало бы уравнения непосредственно интегрируемыми, эквивалентна задаче о нахождении только одной функции. Эта функция определяется одним уравнением в частных производных. Задача решения системы канонических уравнений заменяется задачей решения этого уравнения.

2. Теория преобразований Якоби. Рассмотрим консервативную механическую систему с заданной функцией Гамильтона H , не зависящей от времени t . Преобразуем механические переменные $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ в новую совокупность переменных $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n$ с помощью некоторого канонического преобразования. При этом наложим лишь одно условие, а именно чтобы в качестве одной из переменных, например Q_n , была взята функция H .

$$Q_n = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n). \quad (8.2.1)$$

Остальные $2n - 1$ уравнений преобразования произвольны, с тем лишь ограничением, что преобразование должно быть каноническим.

Предположим, что мы сумели найти такое преобразование. Тогда канонические уравнения в новой системе координат легко проинтегрировать. Поскольку функция Гамильтона H инвариантна относительно канонического преобразования, в новой системе функция Гамильтона H' равна Q_n . Это означает, что в новой системе координат *все переменные циклические*¹ и можно произвести полное интегрирование уравнений движения.

Первая группа уравнений

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}$$

сразу же дает

$$Q_i = \text{const} = \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (8.2.2)$$

Последний индекс n мы выделили, потому что константа, связанная с Q_n , имеет особый смысл; она представляет собой *постоянную энергии* E

$$Q_n = \text{const} = E. \quad (8.2.3)$$

Из второй группы уравнений

$$\dot{P}_i = - \frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

¹ Строго говоря, циклическими являются координаты $Q_1, \dots, Q_{n-1}$. — Прим. р.ед.

получаем

$$P_i = \text{const} = -\beta_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (8.2.4)$$

в то время как последнее уравнение дает

$$P_n = \tau - t. \quad (8.2.5)$$

Геометрически это решение канонических уравнений можно интерпретировать следующим образом. Первоначальные мировые линии движущейся фазовой жидкости образуют бесконечное семейство кривых и заполняют все фазовое пространство. Интересующее нас каноническое преобразование производит такое отображение пространства самого на себя, которое *выпрямляет эти мировые линии, превращая их в бесконечное множество параллельных прямых линий, наклоненных под углом 45° к оси времени t .*

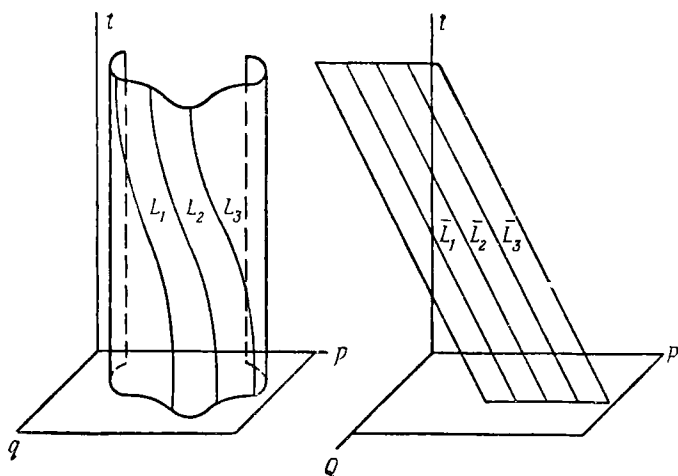


Рис. 11.

Замечательным свойством этого преобразования является тот факт, что выпрямление искривленных мировых линий фазовой жидкости и превращение их в прямые параллельные линии происходит автоматически при переходе цилиндрических поверхностей $H=E$ в параллельные плоскости $Q_n = E$.

Таким образом, первоначальная задача интегрирования свелась к нахождению канонического преобразования, удовлетворяющего единственному условию (8.2.1). Это условие требует, чтобы в новых переменных Q_i , P_i функция Гамильтона была равна Q_n .

Сразу решить эту задачу в явном виде невозможно, потому что мы не умеем получать каноническое преобразование, выражающее q_i , p_i через Q_i , P_i . Поэтому введем *промежуточную ступень*. Вместо того чтобы сразу ввести новые переменные Q_i и P_i , сначала введем лишь Q_i , сохранив старые q_i и исключив p_i . Потом мы исключим также и q_i .

Первый шаг может быть выполнен в явном виде, потому что имеется формула

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (8.2.6)$$

выражающая p_i через q_i и Q_i . Подставив эти выражения в H , получим функцию Гамильтона, зависящую от q_i и Q_i .

Предположим теперь, что в результате этой операции функция Гамильтона H стала равной Q_n

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = Q_n. \quad (8.2.7)$$

Здесь q_i вообще отсутствуют. Поэтому второй шаг, исключение q_i , может быть опущен, так как наша задача выполнена.

Уравнение (8.2.7) является дифференциальным уравнением в частных производных с неизвестной функцией S . Недостаточно найти какое-нибудь решение этого дифференциального уравнения. Для того чтобы S могла быть производящей функцией, она должна иметь вид

$$S = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n). \quad (8.2.8)$$

Однако все Q_i , кроме Q_n , в дифференциальное уравнение не входят. Они являются просто параметрами. С точки зрения интегрирования (8.2.7) первые $n - 1$ переменных Q_i играют роль *постоянных интегрирования*.

Согласно общей теории, решение, содержащее произвольные константы в количестве, равном количеству переменных, называется «полным интегралом». В данном слу-

чае число переменных n и полное решение должно содержать n констант интегрирования. Однако в действительности одна из констант выпадает.

Поскольку сама функция S не входит в дифференциальное уравнение, а входят только ее частные производные, решение определяется с точностью до *аддитивной постоянной*. Эта постоянная, однако, не входит в каноническое преобразование и поэтому она с самого начала может быть опущена. Оставшиеся $n - 1$ константы можно отождествить с $Q_1, \dots, Q_{n-1}$.

В результате процесс определения функции S протекает следующим образом. Находится какой-либо полный интеграл уравнений (8.2.1) с $n - 1$ существенными постоянными интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, Q_n). \quad (8.2.9)$$

Эти постоянные заменяются переменными $Q_1, \dots, Q_{n-1}$.

Проделав это, мы тем самым определяем общее решение канонических уравнений движения. Уравнения

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (8.2.10)$$

$$P_i = - \frac{\partial S}{\partial Q_i}$$

определяют в явном виде переход от q_i, p_i к Q_i, P_i . После разрешения этих уравнений относительно переменных q_i, p_i последние могут быть записаны как функции Q_i, P_i

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(Q_1, \dots, Q_n, -P_1, \dots, -P_n), \\ p_i &= g_i(Q_1, \dots, Q_n, -P_1, \dots, -P_n). \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Все значения новых координат известны: они записаны в решении (8.2.2—8.2.5). Подставив их в выражения (8.2.11), получим q_i и p_i в виде *явных функций времени* t и $2n$ констант интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau$

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, t - \tau), \\ p_i &= g_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, t - \tau). \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

Задача. В случае одной степени свободы уравнение в частных производных (8.2.7) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению и решается в квадратурах. Рассмотрим задачу о линейном осцилляторе

$$V = \frac{1}{2} m k^2 x^2. \quad (8.2.13)$$

Решив дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби, получить следующее каноническое преобразование:

$$x = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2Q}{m}} \cos kP,$$

$$p = \sqrt{2mQ} \sin kP.$$

Эллипсы $H=E$ первоначальной системы координат преобразуются в новой системе в прямые линии $Q=E$. Как известно, при каноническом преобразовании пары переменных сохраняется площадь. Как же может эллипс, ограничивающий определенную площадь, преобразовываться в прямую линию? Разрешение этого кажущегося противоречия заключается в *неоднозначности* преобразования. Для того чтобы сделать преобразование однозначным, ограничим P областью от 0 до $2\pi/k$ и разрежем плоскость x, p вдоль оси x . Тогда эллипс нельзя замкнуть способом, отличным от показанного на рис. 12. Соответствующей фигурой в преобразованной системе отсчета является заштрихованный прямоугольник, который действительно имеет ту же площадь, что и первоначальный эллипс.

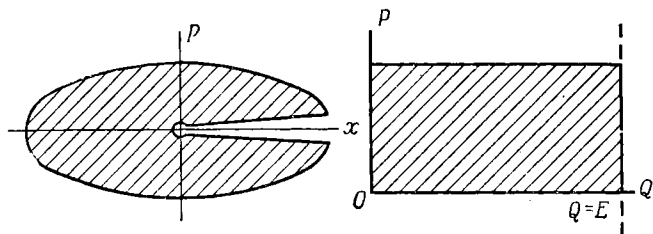


Рис. 12.

Подытоживая сказанное с точки зрения решения канонических уравнений, заметим, что нет необходимости сначала заменять константы интегрирования переменными Q_i , а затем Q_i снова константами. Аналогично, переменная Q_n может быть сразу отождествлена с постоянной энергии E . Вся формальная сторона решения может быть сформулирована в виде следующего рецепта.

1. Записать уравнение энергии

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = E. \quad (\alpha)$$

2. Заменить p_i частными производными некоторой функции S по переменным q_i

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = E. \quad (\beta)$$

3. Найти какой-либо полный интеграл с $n - 1$ существенными постоянными интегрирования

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E). \quad (\gamma)$$

4. Записать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_i} &= \beta_i, \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= t - \tau. \end{aligned} \quad (\delta)$$

5. Решить эти уравнения относительно q_i , получив

$$q_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, t - \tau), \quad (\epsilon)$$

что и является искомым решением.

Перейдем теперь к общему случаю реономной системы, не удовлетворяющей закону сохранения энергии. В соответствии с изложенным раньше методом результаты, полученные для консервативных систем, всегда могут быть обобщены, если включить время t в число позиционных координат q_i и рассматривать задачу как консервативную, но в расширенном фазовом пространстве. Имеется канонический интеграл

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i q_i' + p_t t' \right) d\tau, \quad (8.2.14)$$

для которого требуется найти условия стационарности при следующем дополнительном условии:

$$K(q_1, \dots, q_n, t, p_1, \dots, p_n, p_t) = 0. \quad (8.2.15)$$

Предположим, что мы применили какое-то каноническое преобразование, удовлетворяющее всего лишь одному условию, а именно: одно из уравнений преобразования имеет форму

$$\bar{t} = K(q_1, \dots, q_n, t, p_1, \dots, p_n, p_t). \quad (8.2.16)$$

Тогда в новой системе координат дополнительное условие принимает вид

$$\bar{t} = 0 \quad (8.2.17)$$

и канонический интеграл сводится к интегралу

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^n P_i Q_i d\tau \quad (8.2.18)$$

без каких бы то ни было дополнительных условий. Это приводит к тому, что *все* Q_i и P_i оказываются константами

$$\begin{aligned} Q_i &= \alpha_i, \\ P_i &= \beta_i. \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

Опять канонические уравнения в новой системе координат получаются чрезвычайно легко, причем результат оказывается даже более симметричным, чем раньше, потому что все переменные находятся теперь в равном положении.

Условие (8.2.16) эквивалентно решению уравнения в частных производных

$$K\left(q_1, \dots, q_n, t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, \frac{\partial S}{\partial t}\right) = \bar{t}. \quad (8.2.20)$$

Поэтому снова ищется какой-либо «полный интеграл», содержащий n констант интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые отождествляются с n переменными $Q_1, \dots, Q_n$. Более того, ввиду дополнительного условия (8.2.17) переменная $\bar{t}$ при движении, осуществляющемся в действительности, тождественно равна нулю, и мы можем подставить это ее значение заранее. Вспомнить, что связь между K и обычной

функцией Гамильтона H имеет вид $K = H + p_t$, получим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_n, t, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (8.2.21)$$

Это и есть дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби, полученное теперь для произвольных реономных систем.

Замечательная особенность этого метода заключается в том, что каноническое преобразование, выпрямляющее «изоэнергетическую поверхность» $K = 0$ в плоскость $\bar{t} = 0$, преобразует также *все линии тока движущейся фазовой жидкости в параллельные прямые линии.*

Цепь наших рассуждений, приведшая к распространению свойств консервативных систем на произвольные реономные системы, основывалась на добавлении к фазовому пространству двух новых измерений: t и p_t . Можно действовать и другим методом, оставляя время t независимой переменной и сохраняя обычное фазовое пространство. Можно рассмотреть каноническое преобразование q_i, p_i в Q_i, P_i , не вводя время t в число активных переменных преобразования. Время t входит в такое преобразование только *как параметр*, т. е. уравнения преобразования, связывающие старые и новые переменные, непрерывно меняются. При таком зависящем от времени каноническом преобразовании функция Гамильтона H не является инвариантной. Как видно из уравнения (7.4.13), функция Гамильтона H' для новой системы координат равна

$$H' = \frac{\partial S}{\partial t} + H. \quad (8.2.22)$$

Теперь можно потребовать, чтобы

$$H' = 0. \quad (8.2.23)$$

Это дает в точности условие (8.2.21), т. е. дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби. Оно интерпретируется теперь как условие того, что функция Гамильтона переводится в нуль при помощи зависящего

от времени канонического преобразования. Если функция Гамильтона в новых переменных равна нулю, то из канонических уравнений сразу следует, что в процессе движения все Q_i и P_i постоянны. Мы возвратились таким образом к прежнему методу интегрирования, хотя и пришли к нему несколько иным путем.

Еще раз сформулируем результаты теории преобразований в виде «рецепта», излагающего формализм интегрирования (но пусть те, кто понял лишь этот рецепт, не думают, что они постигли всю теорию Гамильтона — Якоби.)

1. Получить произвольный полный интеграл уравнения в частных производных (8.2.21), т. е. решение, содержащее n существенных постоянных интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (8.2.24)$$

2. Приравнять частные производные S по этим константам интегрирования n новым константам

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \quad (8.2.25)$$

3. Разрешив эти уравнения относительно n позиционных координат q_i , записать их в форме

$$q_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, t). \quad (8.2.26)$$

Этот процесс приводит к *полному решению задачи интегрирования*, так как в результате механические переменные оказываются полученными в виде явных функций времени t и $2n$ констант интегрирования, которые могут быть выбраны в соответствии с произвольными начальными условиями.

Задача. Предположим, что H не зависит от t и положим

$$S = -Et + S_1(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E).$$

Показать, что общий процесс, примененный к функции S , взятой в такой форме, приводит снова к обсуждавшемуся ранее методу интегрирования, который справедлив для консервативных систем.

Резюме. Вместо того чтобы пытаться непосредственно интегрировать канонические уравнения, мы можем применить процесс преобразования. При этом для консервативной системы отыскивается каноническое преобразование, переводящее функцию Гамильтона H в одну из новых переменных. Для реонормальной системы ищется зависящее от времени каноническое преобразование, преобразующее H в нуль. В обоих случаях найденное преобразование решает задачу о движении, так как в новой системе координат канонические уравнения могут быть непосредственно проинтегрированы. Для нахождения искомого преобразования и его выполнения нужно найти какое-либо полное решение уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби.

3. Решение уравнения в частных производных методом разделения переменных. У нас нет какого-либо общего метода решения уравнений в частных производных. Однако при некоторых особых условиях оказывается возможным найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Этот специальный класс задач сыграл важную роль в развитии теоретической физики, так как оказалось, что ряд основных задач теории атома Бора принадлежит к этому классу. В таких задачах одно уравнение в частных производных с n переменными может быть заменено n обыкновенными дифференциальными уравнениями с одной независимой переменной, которые полностью интегрируются. Такие задачи называются «задачами с разделяющимися переменными».

Метод «разделения переменных» заключается в следующем. Мы пытаемся решить данное дифференциальное уравнение путем представления функции S в виде суммы n функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n). \quad (8.3.1)$$

Приведет ли такое весьма специальное предположение к нужному результату, заранее сказать нельзя. Просто из

алгебраического вида функции Гамильтона нельзя усмотреть, будет ли уравнение с разделяющимися переменными или нет. Леви - Чивита¹ показал, как можно исследовать разделяемость заданной функции Гамильтона, однако в данном случае проще предположить, что S имеет форму (8.3.1), и проверить это предположение, непосредственно подставив функцию S такого вида в уравнение в частных производных.

Характерным для решения в форме (8.3.1) является то, что импульс

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S_k(q_k)}{\partial q_k} \quad (8.3.2)$$

оказывается функцией только q_k . Запишем уравнение

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) - E = 0 \quad (8.3.3)$$

и разрешим его относительно p_k . При этом импульс p_k получится, вообще говоря, функцией всех q_i и p_i , а, согласно (8.3.2), он должен был бы зависеть от одной q_k . Это противоречие может быть устранено только, если *приравнять константам некоторые определенные комбинации остальных переменных*. Поэтому можно заранее сказать, что разделение возможно только в случае, когда уравнение (8.3.3) может рассматриваться как следствие n соотношений вида

$$p_k = f_k(q_k, a_1, \dots, a_{n-1}, E), \quad (8.3.4)$$

где $a_1, \dots, a_{n-1}$ — произвольные константы, полученные в процессе разделения. Обычно в отдельные уравнения (8.3.4) входят не все a_i . Часто выделение первой переменной, выбранной соответствующим образом, приводит к введению одной константы, потом при выделении второй переменной появляется вторая константа и т. д., пока мы, наконец, не получим n констант разделения $a_1, \dots, a_n$. Постоянная энергии E является функцией этих констант

$$E = \varphi(a_1, \dots, a_n). \quad (8.3.5)$$

Из этого соотношения можно исключить константу a_n , выразив ее через $a_1, \dots, a_{n-1}$ и E . Уравнения (8.3.4) ока-

¹ Levi-Civita T., *Mathematische Annalen*, **LIX** (1904), 383.

зываются поэтому достаточно общими, чтобы охватить все системы с разделяющимися переменными; с другой стороны, если переменные разделяются, то должны выполняться n уравнений вида (8.3.4).

Заменив p_k , согласно (8.3.2), на $\partial S_k / \partial q_k$, получим непосредственным интегрированием

$$S_k = \int f_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E) dq_k + C_k. \quad (8.3.6)$$

Аддитивная константа C_k входит слагаемым в аддитивную константу функции S и потому не представляет интереса. Истинные «константы интегрирования» появляются в процессе разделения переменных; само же интегрирование не приводит к появлению новых констант.

В качестве типичного примера рассмотрим задачу Кеплера о движении планет. Используя сферические координаты r, θ, φ , получаем линейный элемент

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.3.7)$$

и функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{k^2}{r}. \quad (8.3.8)$$

В уравнении $H = E$ переменные можно разделить следующим образом:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \text{const} = \alpha, \\ p_\theta^2 + \frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} &= \text{const} = \beta^2, \\ \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) - \frac{k^2}{r} &= E. \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Итак, процесс разделения переменных автоматически приводит к нужному числу констант. При настоящем интегрировании дополнительные константы уже не появляются.

Задача 1. Произвести разделение переменных в задаче о движении в однородном поле тяжести $V = mgz$ в прямоугольной системе координат.

Задача 2. Произвести разделение переменных в задаче об «анизотропном осцилляторе»

$$V = \frac{1}{2} m (k_1^2 x^2 + k_2^2 y^2 + k_3^2 z^2)$$

в прямоугольной системе координат.

Задача 3. Произвести разделение переменных в задаче об эффекте Штарка

$$V = -\frac{k^2}{r} + Ez$$

(E — напряженность электрического поля, действующего вдоль оси z) в параболических координатах (Эпштейн, 1916)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{uv} \cos \varphi, \\ y &= \sqrt{uv} \sin \varphi, \\ z &= \frac{1}{2} (u - v). \end{aligned}$$

Иногда разделение переменных возможно не только в одной, а в нескольких системах координат. Старая квантовая теория называла такие системы «вырожденными системами». Например, в задаче Кеплера разделение переменных возможно не только в сферических, но и в параболических координатах.

Из уравнений (8.3.6) видно, что для систем с разделяющимися переменными полный интеграл уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби можно получить в квадратурах. Возникает такая необычная ситуация, что сопряженные переменные q_k, p_k в каждой паре связаны непосредственно друг с другом без участия остальных переменных. Механическая система с n степенями свободы может рассматриваться как суперпозиция n систем с одной степенью свободы. Однако истинные уравнения движения такие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_i} &= \beta_i, \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= t - \tau, \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

и в этих уравнениях переменные *не разделены*, потому что, вообще говоря, каждое конкретное α_i , а также E будут входить более чем в одну из S_i .

Задача 4. Получить функцию S и полное решение задачи Кеплера (см. пример выше).

Задача 5. Сделать то же самое для задачи об однородном поле тяжести, сформулированной в задаче 1.

Разделяемость переменных в тех или иных задачах не свидетельствует об особенностях физических свойств соот-

ветствующих механических систем, а является результатом только *правильного выбора системы координат*. Если в данной задаче при одной системе координат переменные не разделяются, то они вполне могут разделиться после соответствующего точечного преобразования. К сожалению, выбор правильной системы координат является в каком-то смысле делом случая, так как никакого систематического метода для выполнения этой операции не существует.

Бюргерс¹ показал, что задача о комбинированном эффекте Штарка и Зеемана (движение электрона вокруг ядра, возмущенное внешним электрическим и магнитным полями) не допускает разделения переменных ни при каких системах координат, и вместе с тем разделение переменных возможно после соответствующего канонического преобразования.

Резюме. При благоприятных обстоятельствах дифференциальное уравнение Гамильтона — Якоби непосредственно интегрируется в квадратурах. Это происходит в том случае, когда уравнение для энергии распадается на n уравнений, каждое из которых содержит лишь *одну* пару сопряженных переменных q_k, p_k . При этом функция S может быть записана в виде суммы n функций, каждая из которых зависит лишь от одной из переменных q_k . Константы интегрирования появляются в процессе разделения переменных.

4. Метод Делоне для разделения переменных в периодических системах. Метод разделения переменных, если он применим, приводит к получению полного интеграла уравнения Гамильтона — Якоби, необходимого в теории интегрирования Якоби. «Полный интеграл» уравнения в частных производных первого порядка может принимать множество различных форм. Предположим, что мы имеем какой-то полный интеграл

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E). \quad (8.4.1)$$

¹ B u r g e r s J. M., Het Atoommodel van Rutherford—Bohr (Leyden, 1918).

Постоянство правых частей в (8.4.8) следует из того, что все Q_i — константы, так что

$$-P_i = v_i t + \delta_i \quad (8.4.9)$$

и канонические уравнения таким образом оказываются полностью проинтегрированными.

Преимущество такой более общей формы решения для систем с разделяющимися переменными заключается в следующем. Может оказаться, что первоначальные константы $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, появившиеся в процессе разделения переменных, не имеют определенного физического смысла, в то время как новые константы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ могут быть увязаны с физической сущностью задачи; тогда новая совокупность констант будет более удобна для обсуждения теоретических выводов, чем старая.

Такова основная идея замечательного метода, предложенного французским астрономом Делоне¹ (1816—1872) для решения определенного класса задач с разделяющимися переменными. На первый взгляд теория Делоне кажется весьма специальной и чисто методической. Однако именно этот метод, первоначально разработанный для чисто астрономических целей, раскрыл глаза физикам на силу идей Гамильтона.

Как мы уже знаем, при разделении переменных сопряженные переменные в каждой паре оказываются связанными друг с другом без участия остальных переменных. Поэтому, исходя из уравнений (8.3.4) и считая α_i константами, мы можем нарисовать в плоскости q_k, p_k линии тока фазовой жидкости. В классических задачах механики H — квадратичная функция p_k и поэтому решение уравнения $H = E$ должно обязательно приводить к решению некоторого квадратного уравнения. Это дает, вообще говоря, два решения, так что могут быть найдены два значения p_k , соответствующие одному и тому же q_k . Предположим, что дискриминант квадратного уравнения положителен только в определенном конечном интервале изменения q_k . В этом случае q_k колеблется между двумя фиксированными предельными значениями a_k и b_k , а линии тока соответствующей двумерной фазовой жидкости должны быть замкнутыми.

¹ Delaunay Ch. E., Sur une nouvelle théorie analytique du mouvement de la lune (1846).

Линии тока могут быть замкнутыми не только при двузначности соотношений между p_k и q_k , но и еще в одном случае. Может случиться, что одна из переменных q_k

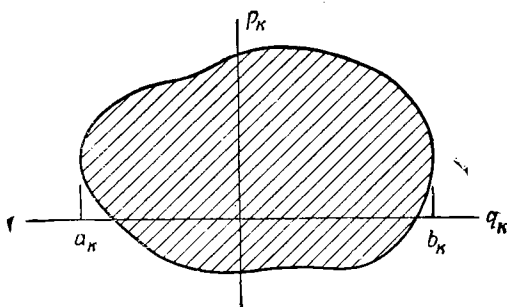


Рис. 13.

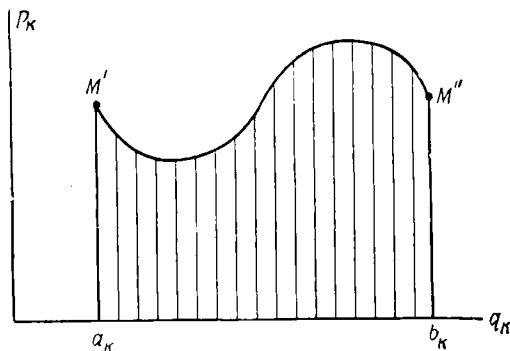


Рис. 14.

меняется в некотором диапазоне от a_k до b_k вследствие геометрической связности фазового пространства. Например, если координатой является угол φ , меняющийся в интервале от 0 до 2π , то линия тока на самом деле не открытая, как это может показаться из рис. 14, а замкнутая, потому что конечные точки a_k и b_k совпадают. Это можно было бы проиллюстрировать, согнув плоскость рисунка в цилиндр и совместив граничные ординаты. Движущаяся C -точка пере-

прыгивает обратно из M'' M' и продолжает свое движение вдоль той же самой линии тока.

Предположим, что по первой или по второй причине линии тока во *всех* плоскостях q_k, p_k — *замкнутые*. Тогда движущаяся частица жидкости возвращается в ту же самую точку, а затем движение повторяется. Мы имеем тогда периодическое движение. Это касается, однако, только *траектории* движущейся точки, спроектированной на плоскости q_k, p_k ; в отношении же движения *во времени* периодичность не имеет места. Скорость, с которой точка начинает свой второй виток, не совпадает с первоначальной скоростью, потому что $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ в общем случае зависят от *всех* q_i, p_i и поэтому возвращения *одной* пары переменных к начальным значениям недостаточно для того, чтобы движение было периодическим. Однако движение содержит в себе n независимых периодов, и они охватывают неразделяющимся образом все переменные. Метод Делоне показывает, как путем изучения свойств двух основных функций — функции Гамильтона H и производящей функции S — можно получить все частоты движения. В этом заключается суть метода. Соответствующее преобразование обнаруживает многопериодическую структуру данной системы с разделяющимися переменными и определяет частоты системы в явном виде. Этот процесс не требует ничего, кроме квадратур и разрешения уравнений относительно определенных переменных.

Мы знаем, что константы α_i и постоянная энергии E являются новыми позиционными координатами Q_i в соответствующем каноническом преобразовании. Заменим эти переменные новыми переменными J_i , называемыми «переменными действия», потому что они имеют размерность «действия», т. е. произведения p на q .

Начнем с уравнений (8.3.4), которые, согласно нашему предположению, дают замкнутые линии в плоскостях q_k, p_k . Вычислим следующие определенные интегралы, взятые вдоль всей линии тока:

$$J_k = \oint p_k dq_k = \oint f_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E) dq_k. \quad (8.4.10)$$

Этот криволинейный интеграл равен площади, охватываемой линией тока. Эта площадь является функцией α_i и E ,
10В*

которые входят в подинтегральные выражения в качестве параметров

$$J_k = J_k(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E). \quad (8.4.11)$$

При помощи этих уравнений можно выразить α_i и E как функции J_k

$$\alpha_i = \alpha_i(J_1, \dots, J_n), \quad (8.4.12)$$

$$E = E(J_1, \dots, J_n). \quad (8.4.13)$$

Исходя из этих соотношений, можно ввести «переменные действия» в производящую функцию S и получить S в виде функции q_i и J_i .

$$S = S(q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n). \quad (8.4.14)$$

Нужное преобразование теперь определено. Двумя основными функциями в новой системе переменных являются функции E и S . Функция E является в действительности функцией Гамильтона H в новой системе.

Переменные действия J_i являются позиционными координатами Q_i новой системы отсчета. Сопряженные импульсы P_i называются *угловыми переменными*. Они являются безразмерными величинами. Мы будем пользоваться не самими P_i , а величинами, отличающимися от них знаком, которые обозначим через $\omega_1, \dots, \omega_n$. Согласно общей схеме преобразования,

$$-P_i = \omega_i = \frac{\partial S}{\partial J_i}. \quad (8.4.15)$$

Исследуем эти уравнения несколько более подробно. Рассмотрим функциональные соотношения между первоначальными q_i и новыми ω_i при условии постоянства J_i . При этом мы сможем говорить об отображении n -мерного q -пространства на n -мерное ω -пространство, и наоборот. Соотношения (8.4.15), выражающие ω_i через J_i , не однозначны. Отметим сначала, что пространство конфигураций q_i , в котором происходит движение, является *ограниченной* областью n -мерного пространства. Координаты q_k меняются между определенными минимальными и максимальными значениями. Поэтому, если нанести q_i в качестве координат на прямоугольные оси n -мерного пространства, то ввиду

разделения переменных все движение окажется ограниченным некоторым «прямоугольным ящиком» в этом пространстве. Например, в случае задачи Кеплера из уравнений (8.3.9) видно, что φ меняется от 0 до 2π , θ — между каким-то минимальным значением θ_0 и максимальным $\pi - \theta_0$, а r — между некоторым минимумом r_1 (перигелием) и максимумом r_2 (афелием). С точки зрения физического пространства это означает, что движение происходит внутри области, ограниченной двойным конусом и двумя концентрическими сферами.

Нанесем теперь одну линию тока на плоскость q_k, p_k и совершим вдоль нее один полный виток; q_k изменится от минимального до максимального, а затем снова до минимального значения, в то время как остальные q_i останутся неизменными. Посмотрим, что произойдет при этом с ω_i . Из уравнений (8.4.15) следует

$$\Delta\omega_i = \oint d\omega_i = \oint \frac{\partial^2 S}{\partial J_i \partial q_k} dq_k. \quad (8.4.16)$$

Теперь J_i при интегрировании являются параметрами. Поэтому операцию дифференцирования по J_i можно вынести из-под знака интеграла, пользуясь правилом дифференцирования по параметру

$$\Delta\omega_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_k dq_k. \quad (8.4.17)$$

Последний интеграл по определению равен J_k . Поэтому

$$\Delta\omega_i = \frac{\partial J_k}{\partial J_i} = \delta_{ik}, \quad (8.4.18)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера.

Таким образом, полный цикл изменения переменной q_k приводит к изменению ω_k на единицу, в то время как остальные ω_i не меняются. Этот результат дает ключ для понимания взаимосвязи между ω - и q -переменными. Можно сказать, что ω -пространство носит характер «зеркальной комнаты». Представим себе единичный куб в n -мерном пространстве, стенками которого являются отражающие зеркала. Возьмем произвольную точку внутри куба. В каждом направлении, перпендикулярном к отражающим стенкам, появляется бесконечное число мнимых изображений. Единичный

куб повторяется бесконечное число раз. Однако все изображения точки Ω , находящейся внутри куба, соответствуют одной и той же точке Q в q -пространстве.

Имеется и аналитическое рассуждение, соответствующее этой геометрической картине. Обратим соотношение между ω -и q -пространством, считая q_i функциями ω_k . Тот факт,

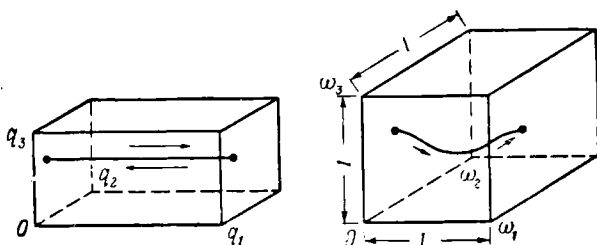


Рис. 15.

что изменение произвольного ω_k на единицу не меняет значений q_i , означает, что q_i — *периодические функции всех угловых переменных $\omega_1, \dots, \omega_n$ с периодом, равным единице*. Это в свою очередь означает, что q_i могут быть представлены в виде кратных рядов Фурье, т. е. бесконечных рядов синусов и косинусов с аргументами

$$2\pi(k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n), \quad (8.4.19)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n$ — произвольные целые числа, и с постоянными амплитудами.

Из рис. 15 видно, что преобразование от q -пространства к ω -пространству является двузначным (одна q -точка переходит в две ω -точки) в соответствии с колебательным характером изменения q_k между крайними значениями (рис. 13). Если выполняются условия рис. 14, то преобразование от q -пространства к ω -пространству однозначное, так как первоначальная переменная q_k сама по существу является угловой переменной. Преобразование от ω -к q -пространству всегда однозначно (одна ω -точка преобразуется в одну q -точку).

Эти сведения о соотношениях между q - и ω -переменными помогут нам довольно подробно представить себе картину, связанную с полным интегрированием задачи движения. До сих пор мы не учитывали канонических уравнений, а попросту исследовали некое каноническое преобразование.

Теперь решим канонические уравнения в новой системе координат с переменными J_i , ω_i . Напомним, что J_i соответствуют Q_i , а $-\omega_i$ соответствуют P_i . Функцией Гамильтона является $E(J_1, \dots, J_n)$. Первая группа канонических уравнений дает [см. (8.4.6)]

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial E}{\partial \omega_i} = 0, \quad (8.4.20)$$

откуда

$$J_i = \text{const}. \quad (8.4.21)$$

Постоянство J_i уже предполагалось в наших предыдущих рассуждениях.

Вторая группа уравнений [см. (8.4.7)] дает

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial E}{\partial J_i} = \text{const} = \nu_i \quad (8.4.22)$$

и, следовательно,

$$\omega_i = \nu_i t + \delta_i. \quad (8.4.23)$$

Подставив эти значения ω_i в аргументы (8.4.19) членов разложения в кратный ряд Фурье, получим, что все движение аналитически представляется в виде *суперпозиции простых гармонических колебаний с основными частотами ν_i* . Таким образом, частоты движения получаются из полной энергии, выраженной через переменные действия. Частные производные E по J_i дают непосредственно частоты системы.

Задача. Вернемся к задаче об ангармоническом осцилляторе, уже рассматривавшейся в задаче 2, п. 3. Применяя метод Делоне, показать, что

$$E = \frac{1}{2\pi} (k_1 J_1 + k_2 J_2 + k_3 J_3),$$

что дает три частоты $\nu_i = k_i/2\pi$.

Можно, однако, продолжить наш анализ. Исследуем траекторию точки, движущейся в ω -пространстве. Уравнения (8.4.23) показывают, что траектория является прямой линией, которая проходит с постоянной скоростью. Соответствующая кривая в q -пространстве может быть очень сложной фигурой Лиссажу.

Используем тот факт, что ω -пространство сводится к единичному кубу. Дойдя до правой стенки куба, прямая

линия перескакивает в соответствующую точку левой стенки и продолжается в прежнем направлении. Такие перескоки совершаются многократно, как это показано на рис. 16 для двумерной проекции. Случайно линия может замкнуться, но может случиться и так, что она никогда не вернется

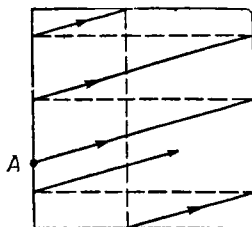


Рис. 16.

в исходную точку. Критерием замыкания могут служить линейные соотношения вида

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n = 0 \quad (8.4.24)$$

с целыми значениями k_i . Если существует $n - 1$ соотношений подобного типа, то через какое-то конечное время линия снова пройдет через начальную точку, так что движение строго периодически. Если не существует ни одного такого соотношения, то линия *заполняет собой весь единичный куб*, время от времени подходя сколь угодно близко к любой точке внутри куба. Если же, наконец, существует m соотношений типа (8.4.24), то движущаяся точка будет оставаться на определенной $(n - m)$ -мерной плоскости внутри куба, подходя сколь угодно близко к каждой точке этого подпространства. Эти результаты могут быть сразу же перенесены и на первоначальное пространство конфигураций переменных q_i , хотя прямые линии и заменяются кривыми, а плоское подпространство — искривленным подпространством с тем же числом измерений.

Метод Делоне проливает новый свет на понятие «вырожденные системы» старой квантовой теории. Если траектории полностью заполняют разрешенную область пространства конфигураций, то система не вырождена и разделение переменных возможно только в координатах одного вида.

Это соответствует тому случаю, когда отсутствуют целочисленные соотношения между частотами. Если существуют одно или больше соотношений типа (8.4.24), то движение заполняет лишь отдельные части пространства конфигураций. Система в этом случае является однократно либо многократно вырожденной.

Например, в случае эллипсов Кеплера, E принимает вид

$$E = -\frac{2\pi^2 mk^2}{(J_1 + J_2 + J_3)^2}. \quad (8.4.25)$$

Здесь

$$v_1 = v_2 = v_3 \quad (8.4.26)$$

и движение происходит вдоль одного и того же эллипса. Введение слабого магнитного поля (эффект Зеемана) снимает однократное вырождение, заставляя плоскость эллипса медленно прецессировать вокруг полярной оси. Оставшееся вырождение может быть снято, если предположить, что сила притяжения меняется как некоторая степень расстояния, хотя бы немного отличная от 2. На самом деле это вырождение снимается в связи с тем, что движение происходит в соответствии с законами релятивистской, а не классической механики. Это заставляет перигелий эллипса медленно прецессировать в плоскости самого эллипса. Вместе оба эти эффекта определяют движение, полностью заполняющее допустимую область пространства конфигураций.

Метод Делоне возник из астрономических задач теории возмущений. Однако он был замечательным образом применен к задачам молодой квантовой теории. Квантовая теория Бора предполагала, что для вращающегося электрона разрешены лишь определенные орбиты. При движении по этим орбитам полностью отсутствуют потери энергии, так что движение происходит в соответствии с обычными законами механики. Таким образом, квантовая теория восприняла принципы механики, а следовательно, и канонические уравнения без каких бы то ни было модификаций. Она просто добавила определенные дополнительные ограничения на начальные условия. Теперь $2n$ констант интегрирования стали уже не произвольными величинами, а величинами

«квантованными» в соответствии с определенными правилами. Для этих «квантовых условий» метод Делоне изучения многопериодных систем был чрезвычайно удобен. Вторая группа констант — «фазовые углы» δ_i , которые появляются при интегрировании второй группы канонических уравнений в представлении Делоне [см. (8.4.23)], оставались при этом произвольными; первая же группа констант, переменные действия, квантовалась. Квантовые условия требовали, чтобы переменные действия были равны целым кратным фундаментальной величины — постоянной Планка h

$$J_k = n_k h. \quad (8.4.27)$$

(Целые числа n_k называются «квантовыми числами».) Таким образом, метод Делоне, первоначально разработанный для планетарных задач теории возмущений, нашел свои наиболее важные применения в области атомной физики.

Условия (8.4.27) называются «квантовыми условиями Зоммерфельда — Вильсона» (1915). Они не отвечают на вопрос о том, что происходит в случае систем с неразделяющимися переменными. Более того, квантование зависело от использованной системы координат; изменение системы координат приводило к совершенно другим механическим траекториям. В 1917 г. Эйнштейн предложил удивительно эффектную новую интерпретацию квантовых условий Зоммерфельда — Вильсона, оперируя не с линиями тока в плоскостях q_k, p_k , а с самой S -функцией. Заметим, что ввиду (8.3.2) «фазовые интегралы» (8.4.10) могут быть заменены на ΔS_k , т. е. на изменение S_k за один полный виток. Следовательно, в квантовых условиях содержится нечто, связанное с многозначностью функций S_k . Эйнштейн ввел сумму всех квантовых условий

$$\sum J_k = \sum \Delta S_k = \Delta S = nh, \quad (8.4.28)$$

где $n = \sum n_k$ — снова целое число. Это одно уравнение, конечно, не может заменить первоначальную систему уравнений. Однако Эйнштейн рассматривал его скорее не как уравнение, а как *принцип*, потребовав, чтобы многозначность была такова, чтобы для *любой* замкнутой кривой пространства конфигураций изменение S на одном полном витке было кратно h . В случае систем с разделяющимися переменными следует выбрать кривые с $q_k = \text{const}$; тогда принцип Эйнштейна сразу приведет к квантовым условиям (8.4.27). Инвариантная формулировка квантовых условий, данная Эйнштейном, привела де Бройля в 1924 г. к его фундаментальному открытию волн материи.

Резюме. Делоне предложил замечательный метод изучения систем с разделяющимися переменными, удовлетворяющих дополнительному условию, согласно которому линии тока на разделившихся фазовых плоскостях (q_k, p_k) — замкнутые кривые. Он ввел каноническое преобразование, позиционными координатами которого являются «переменные действия» J_k , определенные как площади, ограниченные линиями тока. Для движения, осуществляющегося в действительности, J_k являются константами, а сопряженные импульсы, взятые с обратным знаком, — «угловые переменные» ω_k — линейно меняются со временем t . Частные производные E по J_i дают n новых констант, являющихся частотами движения ν_i . Каждое q_k может быть записано в виде кратного ряда Фурье, содержащего все частоты ν_i и все их гармоники. Поэтому такие системы называются многопериодными.

5. Роль дифференциального уравнения в частных производных в теориях Гамильтона и Якоби. В предыдущей главе (гл. VII, п. 9) отмечалось, что впервые в аналитической механике фундаментальное уравнение в частных производных открыл Гамильтон. Он также первый выдвинул идею о фундаментальной функции, из которой можно было бы получить при помощи простых дифференцирований и исключения переменных все механические траектории. Однако первоначальная схема Гамильтона была практически неприменима. Более того, главная функция Гамильтона удовлетворяла двум уравнениям в частных производных. Второе уравнение с точки зрения теории интегрирования является ненужным усложнением. С другой стороны, в теории Якоби требуется найти лишь один полный интеграл основного дифференциального уравнения. В случае систем с разделяющимися переменными такой интеграл может быть найден. Поэтому при поверхностном подходе создается впечатление, что Якоби освободил теорию Гамильтона от ненужного усложнения, приведя ее к схеме, применимой на практике.

Это действительно так, если считать, что основная задача механики состоит лишь в интегрировании уравнений движения. Но такая ограниченная точка зрения была бы несправедливостью по отношению к далеко идущим исследованиям Гамильтона. Пользоваться непосредственно главной функцией Гамильтона действительно нельзя, и приходится прибегать к методу Якоби, но тем не менее главная функция Гамильтона остается важной и интересной функцией и служит гораздо более глубоким целям, чем простое интегрирование канонических уравнений. Поэтому сравнение W -функции Гамильтона с S -функцией Якоби заслуживает того, чтобы на нем остановиться. Постигнув все тонкости теории Гамильтона, мы придем к заключению, что в теории Гамильтона два уравнения в частных производных столь же необходимы и естественны, как одно уравнение в теории Якоби.

Остановимся сначала на задаче о консервативной механической системе. Это в действительности общий случай, так как путем добавления времени t к числу позиционных переменных и введения в пространство конфигураций дополнительной оси t , а также замены слов «независящая от времени t » словами «независящая от параметра τ » любая механическая система может быть сделана консервативной. Соединим точки $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ и $q_1, \dots, q_n$ траекторией, которая приводит к стационарному значению интеграл

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{k=1}^n p_k q'_k d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{k=1}^n p_k dq_k \quad (8.5.1)$$

при том дополнительном условии, что эта траектория лежит на изоэнергетической поверхности

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) - E = 0. \quad (8.5.2)$$

Представив затем значение интеграла A , взятого для стационарной траектории, в виде функции координат q_i и $\bar{q}_i$, получим главную функцию Гамильтона W ,

$$W = W(q_1, \dots, q_n, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n). \quad (8.5.3)$$

Гамильтон показал, что эта функция удовлетворяет уравнению в частных производных

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) - E = 0. \quad (8.5.4)$$

До сих пор аналогия с S -функцией Якоби, удовлетворяющей тому же самому дифференциальному уравнению, кажется совершенно полной. Обе функции зависят от $2n$ переменных и каждая из них может рассматриваться как производящая функция некоторого канонического преобразования. После интегрирования уравнения (8.5.4) обе функции будут содержать n констант интегрирования.

Тем не менее для того, чтобы обнаружить существенное различие между этими двумя функциями, не нужно даже прибегать к помощи второго уравнения в частных производных. В теории Якоби энергетическая постоянная E была *одной из новых переменных* Q_n . Кроме энергетической постоянной E , в решении содержалось лишь $n - 1$ *констант интегрирования*. В теории Гамильтона *все* переменные находятся в равном положении и энергетическая постоянная играет роль заданной константы, а не переменной. Гамильтоново решение уравнения в частных производных является не полным, а «сверхполным», так как оно содержит *на одну константу больше*, чем полное решение. *Однородность по всем переменным* является характерным свойством, отличающим гамильтонову W -функцию от S -функции Якоби. Эта однородность приводит к тому, что преобразование, определяемое функцией W , в корне отличается от S -преобразования.

При помощи S -функции Якоби производится преобразование изоэнергетических поверхностей $H = E$ в плоскости $Q_n = E$. Смысл уравнения в частных производных заключается здесь в том, что в одну из новых переменных Q_n преобразуется функция Гамильтона. В гамильтоновом случае ситуация совершенно иная. Построение Гамильтона вовсе не преобразует изоэнергетические поверхности в плоскости; оно целиком разворачивается на изоэнергетической поверхности $H = E$, не выходя за ее пределы. В случае Якоби мы имеем *регулярное* преобразование, разрешимое как относительно q_k, p_k , так и относительно Q_k, P_k . Здесь нет тождества, которому бы удовлетворяли координаты, так как уравнение в частных производных устанавливает некоторое соотношение не между одними q_k, p_k , а между q_k, p_k и Q_n .

В гамильтоновом случае преобразование не может быть регулярным, так как *пространство* q_k, p_k отображается на *поверхность*. Уравнения

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (8.5.5)$$

неразрешимы относительно $\bar{q}_i$, потому что каноническое преобразование, переводящее q_i, p_i в $\bar{q}_i, \bar{p}_i$, существует лишь в том случае, если точка q_i, p_i фазового пространства выбрана на поверхности $H = E$. Это показывает, что функциональный детерминант для уравнений (8.5.5), составленный относительно $\bar{q}_i$, должен быть равен нулю. Отсюда получается следующее детерминантное условие для функции W :

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \bar{q}_j} \right\| = 0. \quad (8.5.6)$$

Это характерное свойство W -функций не имеет аналога в теории Якоби. Уравнение Гамильтона в частных производных приводит к некоторому тождеству, связывающему q_k, p_k , которое заставляет точку оставаться на определенной поверхности в фазовом пространстве.

Проиллюстрируем это положение на примере линейного преобразования, отображающего само на себя обычное трехмерное пространство. Пусть, например, координаты x, y, z принадлежат пространству I, а координаты X, Y, Z — пространству II. При отличном от нуля детерминанте мы имеем обычное взаимно однозначное преобразование. Однако предположим, что детерминант преобразования обращается в нуль. Тогда координаты x, y, z , являющиеся линейными функциями X, Y, Z , удовлетворяют тождеству вида

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (8.5.7)$$

означающему, что все точки x, y, z принадлежат одной плоскости. Повернем оси координат так, чтобы уравнение этой плоскости превратилось в $z = 0$. Тогда наше вырожденное (сингулярное) преобразование примет вид

$$\begin{aligned} x &= X + \alpha Z, \\ y &= Y + \beta Z, \\ z &= 0. \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

В результате преобразования (8.5.8) пространство Π отобразилось на плоскость $z = 0$ пространства I . Следовательно, это преобразование не может давать взаимно однозначного соответствия. При переходе от пространства Π к пространству I соответствие однозначно; однако при обратном переходе происходит преобразование точки в линию. (На рис. 17 точка p , лежащая в основании прямой L , преобразуется в целую прямую.)

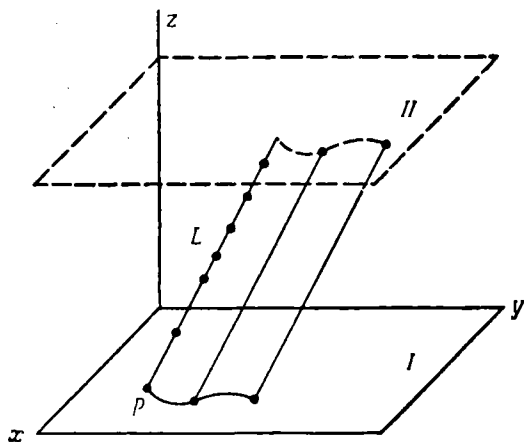


Рис. 17.

Преобразование линии в точку характерно для вырожденного преобразования. Теперь понятно, почему преобразование, порожаемое главной функцией, должно быть вырожденным. Ведь каким-то образом должно войти движение, т. е. преобразование точки $\bar{q}_k, \bar{p}_k$ во все последующие положения q_k, p_k , а это как раз и означает преобразование точки в линию.

В теории Якоби преобразование точки в линию возникает совершенно иным путем. Здесь переменная Q_n выделена среди других переменных. Все координаты точки Q_i, P_i фиксированы, за исключением координаты P_n , которая *меняется*. Следовательно, требуется разрешить $n - 1$ уравнений

$$P_k = -\frac{\partial S}{\partial Q_k} \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (8.5.9)$$

относительно q_i , получив $n-1$ уравнений с n переменными q_i , т. е. аналитическое выражение *линии*. В гамильтоновом же случае все P_k , включая и P_n , являются константами, а преобразование точки в линию возникает из-за вырожденности преобразования.

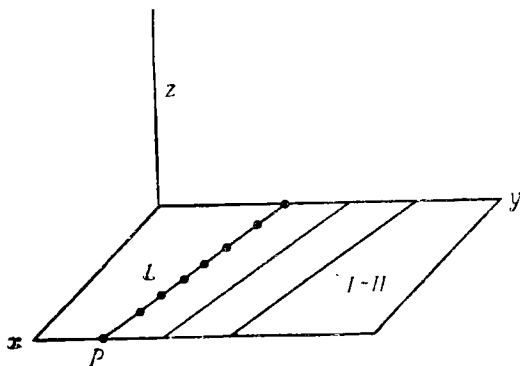


Рис. 18.

Переходя к дальнейшему, укажем, что вырожденности преобразования в *одном* направлении недостаточно. Поскольку движение происходит по поверхности $H = E$, отображение точек этой поверхности во все окружающее пространство в данном случае невозможно. Такое преобразование не имело бы ничего общего с задачей движения. Поэтому в нашем примере следует предположить, что угол наклона параллельных прямых L к плоскости z становится все меньше и меньше, пока они окончательно не ложатся на плоскость $z = 0$. Теперь преобразование вырождено в *обоих* направлениях. И пространство I и пространство II отображаются на плоскость $z = 0$. Преобразование точки в линию возникает теперь совершенно симметрично: и при переходе от пространства I к пространству II и при обратном переходе.

Такова картина преобразования, порождаемого главной функцией Гамильтона. Поверхность $H = E$ преобразуется

сама в себя, так как точки q_k, p_k преобразуются в линии, лежащие на этой же поверхности. Таким образом, не только точка q_k, p_k , но и точка $\bar{q}_k, \bar{p}_k$ лежит на поверхности $H = E$ — это есть в точности то утверждение, которое содержится во втором уравнении Гамильтона в частных производных. Подобно тому как уравнения (8.5.5) не могут быть разрешены относительно $\bar{q}_i$ из-за обращения функционального детерминанта в нуль, так и уравнения

$$\bar{p}_i = - \frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i} \quad (8.5.10)$$

не могут быть разрешены относительно q_i , потому что и здесь функциональный детерминант обращается в нуль. Действительно, последний идентичен функциональному детерминанту (8.5.6) вследствие его симметрии относительно q_i и $\bar{q}_i$. Таким образом, мы видим, что вырожденность преобразования в одном направлении *приводит* к вырожденности преобразования и в противоположном направлении. Одно уравнение в частных производных не может существовать без другого, причем общая связь между ними выражается детерминантным условием (8.5.6).

Перейдем теперь к общему случаю реономных систем. Ввиду того что этот переход уже встречался ранее, ограничимся здесь лишь кратким изложением. Добавим время t к числу механических переменных и потребуем стационарности «обобщенного действия»

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i \dot{q}_i d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i + p_t dt \right) \quad (8.5.11)$$

при том дополнительном условии, что C -точка расширенного фазового пространства остается на «обобщенной изоэнергетической поверхности»

$$p_t + H(q_1, \dots, q_n, t, p_1, \dots, p_n) = 0. \quad (8.5.12)$$

Опять нужно вычислить интеграл (8.5.11), взятый между двумя точками $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{t}$ и $q_1, \dots, q_n, t$ расширенного пространства конфигураций, записав его в виде функции этих двух совокупностей координат

$$W = W(q_1, \dots, q_n, t, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{t}). \quad (8.5.13)$$

Задача 1. Показать, что это определение главной функции Гамильтона эквивалентно следующей схеме:

а. Получаем полное решение уравнений Лагранжа в форме

$$q_i = f_i(x_1, \dots, x_{2n}, t).$$

б. Вычисляем для этого решения определенный интеграл

$$A = \int_t^t L dt,$$

получив A в виде функции $t, \bar{t}$ и $2n$ констант интегрирования α_i .

γ. Вычисляем константы интегрирования, разрешая $2n$ уравнений

$$q_i = f_i(x_1, \dots, x_{2n}, t),$$

$$\bar{q}_i = f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}, \bar{t})$$

относительно α_i .

δ. Подставляем эти выражения для α_i в A . Сконструированная таким образом функция является главной функцией Гамильтона W .

Задача 2. Рассмотреть задачу о движении в однородном гравитационном поле $V = mgz$, используя прямоугольную систему координат. Здесь уравнения Лагранжа интегрируются элементарными средствами. Пользуясь описанной выше схемой, вычислить гамильтонову W -функцию, которая должна иметь вид

$$W = \frac{m}{2} \left[\frac{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2}{t - \bar{t}} - g(z + \bar{z})(t - \bar{t}) - \frac{1}{12} g^2 (t - \bar{t})^3 \right].$$

Далее при изучении реономного случая вновь выписываются уравнения преобразования

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i}, \\ p_t &= \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \bar{p}_t = -\frac{\partial W}{\partial \bar{t}}. \end{aligned} \quad (8.5.14)$$

Дополнительное условие (8.5.12), записанное для обеих точек (q_i, t, p_i, p_t) и $(\bar{q}_i, \bar{t}, \bar{p}_i, \bar{p}_t)$, приводит к двум уравнениям в частных производных, которым удовлетворяет W -функция [см. (7.9.20)].

Здесь опять функциональный детерминант преобразования обращается в нуль, что делает преобразование вырожденным. Нельзя выразить q_i, t, p_i, p_t через $\bar{q}_i, \bar{t}, \bar{p}_i, \bar{p}_t$, и наоборот. Если, однако, выбирать и первую и вторую совокупности координат в соответствии с условием (8.5.12), то в обеих группах уравнений (8.5.14) можно опустить по одному последнему уравнению, потому что они в этом случае являются следствиями предыдущих уравнений. Оставшиеся уравнения

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}_i} \quad (8.5.15)$$

разрешимы относительно q_i и p_i и преобразование получается в следующей форме:

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(t, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n; \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, \bar{t}), \\ p_i &= g_i(t, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, \bar{t}). \end{aligned} \quad (8.5.16)$$

Это дает исчерпывающее решение задачи о движении, удовлетворяющее произвольным начальным условиям. По сравнению с решением Якоби, число констант интегрирования не $2n$, а $2n + 1$ в соответствии со «сверхполнотой» W -функции.

Резюме. В то время как преобразование Якоби переводит изоэнергетические поверхности в плоскости, а линии движения — в прямые, преобразование, порождаемое главной функцией Гамильтона, имеет совершенно другую природу. Оно осуществляется в пределах изоэнергетической поверхности $H = E$ и носит вырожденный характер. Движение здесь проявляется как следствие того, что преобразование переводит точку в линию, а это в свою очередь вызывается обращением в нуль функционального детерминанта.

6. Построение главной функции Гамильтона при помощи полного интеграла Якоби. Несмотря на различие подходов, характеризующих теории Гамильтона и Якоби, между W -функцией и S -функцией имеется определенная связь. Тео-

рия интегрирования Якоби косвенным образом включает в себя W -функцию. Зная S -функцию Якоби, можно при помощи дифференцирования и разрешения конечных уравнений построить главную функцию Гамильтона.

Для того чтобы показать это, вернемся к развитой ранее теории бесконечно малых преобразований (см. гл. VII, п. 7). Будем считать S -функцию Якоби производящей функцией бесконечной последовательности непрерывно изменя-

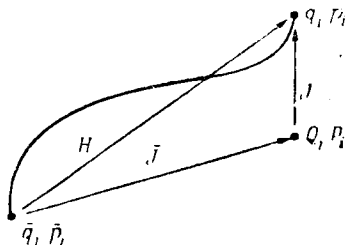


Рис. 19.

ющихся канонических преобразований. Физически такая последовательность реализуется в виде движения фазовой жидкости. Произвольная фиксированная точка Q_i, P_i фазового пространства преобразуется в движущуюся точку q_i, p_i . Эта точка в момент времени $\bar{t}$ оказывается в положении $\bar{q}_i, \bar{p}_i$, а в момент времени t — в положении q_i, p_i . С другой стороны, функция Гамильтона W может быть представлена как производящая функция канонического преобразования, переводящего точку $\bar{q}_i, \bar{p}_i$ непосредственно в q_i, p_i , минуя точку Q_i, P_i .

Воспользуемся теперь *групповыми свойствами* канонических преобразований (см. гл. VII, п. 7). Оба преобразования, как q_i, p_i к Q_i, P_i , так и Q_i, P_i к q_i, p_i являются каноническими. Следовательно, результирующее преобразование от $\bar{q}_i, \bar{p}_i$ в q_i, p_i тоже каноническое. Производящая функция результирующего преобразования равна разности двух производящих функций отдельных преобразований [см. (7.7.3)]. Отсюда получается следующее замечательное соотношение:

$$W = \Delta S = S(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t) - S(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, Q_1, \dots, Q_n, \bar{t}). \quad (8.6.1)$$

Однако наше построение еще не закончено, поскольку мы должны рассматривать уравнения

$$P_i = \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial Q_i}, \quad P_i = \frac{\partial S(\bar{q}, Q, \bar{t})}{\partial Q_i} \quad (8.6.2)$$

как дополнительные условия. Подставив эти два уравнения, получим n условий

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial Q_i} = 0. \quad (8.6.3)$$

Эти n условий могут быть использованы для исключения Q_i , так что окончательно W оказывается функцией одних только q_i , t и $\bar{q}_i$, $\bar{t}$.

Таким образом, мы пришли к следующей схеме, позволяющей получить главную функцию Гамильтона из полного интеграла $S(q_1, \dots, q_n, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби.

1. Берется разность

$$\Delta S = S(q_1, \dots, q_n, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - S(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{t}, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

2. Уравнения

$$\frac{\partial \Delta S}{\partial \alpha_i} = 0$$

разрешаются относительно α_i .

3. Полученные выражения для α_i подставляются в ΔS . В результате получается функция $W = \Delta S$, зависящая от $q_1, \dots, q_n, t$ и $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{t}$. Это и есть главная функция Гамильтона W .

Задача 1. Решить уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби методом разделения переменных для случая однородного гравитационного поля (см. задачу 2, п. 5). Из этого решения получить W -функцию Гамильтона и показать, что результат совпадает с прежним результатом, когда W -функция строилась на основе полученного предварительно полного решения уравнений движения.

Задача 2. Пусть задана консервативная система, для которой известна независящая от времени W -функция, связывающая две точки фазового пространства

$$W = W(q_1, \dots, q_n, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, E).$$

Показать, что зависящая от времени W -функция может быть получена в следующем виде:

$$W_1 = -E(t - \bar{t}) + W$$

при условии, что мы исключим константу энергии E с помощью уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial E} = t - \bar{t}.$$

Резюме. Хотя главная функция Гамильтона содержит лишнюю константу, она может быть получена из полного решения уравнения теории Якоби с помощью дифференцирования и необходимых исключений.

7. Геометрическое решение уравнения в частных производных. Оптико-механическая аналогия Гамильтона. В наших предыдущих рассуждениях предполагалось, что у нас есть *полное решение* дифференциального уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби. Предположим теперь гораздо меньшее, а именно что мы знаем лишь некоторое *частное решение* заданного уравнения в частных производных

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = E \quad (8.7.1)$$

без каких бы то ни было констант интегрирования.

Аналитически такое частное решение может быть использовано для интегрирования *половины* полной системы канонических уравнений. При помощи уравнений

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (8.7.2)$$

можно p_i выразить через q_i . После введения этих p_i в первую группу канонических уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (8.7.3)$$

наша задача сводится к решению этих n дифференциальных уравнений первого порядка вместо первоначальной системы $2n$ уравнений. Однако в дальнейшем мы будем интересоваться геометрическими, а не аналитическими методами решения.

Частное решение уравнения в частных производных (8.7.1) можно построить геометрически. Физическая интерпретация такого метода решения проливает новый свет на природу механических задач и разъясняет одно из самых значительных открытий Гамильтона — аналогию между оптическими лучами и механическими траекториями. В связи с развитием современных квантовомеханических теорий эта аналогия превратилась в одну из ведущих идей в современных атомных исследованиях.

В дальнейшем мы будем предполагать, что имеем дело с движением частицы в поле с потенциальной энергией V . В качестве координат выберем обычные прямоугольные координаты x, y, z . В следующем пункте будет показано, что все наши выводы применимы и к движению произвольных механических систем.

Уравнение для энергии в нашей задаче имеет вид

$$\frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x, y, z) = E. \quad (8.7.4)$$

Это приводит к следующему уравнению в частных производных для функции S

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2m(E - V). \quad (8.7.5)$$

Предположим, что S — функция только x, y, z , без каких бы то ни было констант интегрирования

$$S = S(x, y, z). \quad (8.7.6)$$

Это означает, что мы имеем *частное* решение дифференциального уравнения (8.7.5) вместо полного интеграла, который должен содержать две произвольные константы интегрирования α_1 и α_2 . Такое частное решение уравнения (8.7.5) допускает простую геометрическую интерпретацию.

Как известно, градиент функции S имеет направление нормали к поверхности

$$S(x, y, z) = \text{const.} \quad (8.7.7)$$

Рассмотрим две близкие поверхности $S = C$ и $S = C + \varepsilon$. В произвольной точке P первой поверхности построим нормаль, которая пересечет вторую поверхность в точке P' .

Абсолютное значение $\text{grad } S$ может быть определено как частная производная S , взятая в направлении нормали,

$$|\text{grad } S| = \frac{\partial S}{\partial r}. \quad (8.7.8)$$

В соответствии с рис. 20 можно написать

$$|\text{grad } S| = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (8.7.9)$$

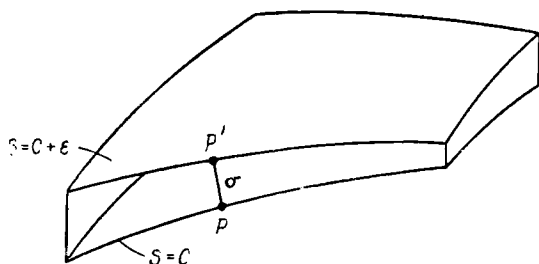


Рис. 20.

Тогда уравнение (8.7.5) можно переписать в следующем виде:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2m(E - V)}}. \quad (8.7.10)$$

Из этого уравнения следует метод построения поверхности $S = C + \varepsilon$ по известной поверхности $S = C$. От каждой точки поверхности $S = C$ перпендикулярно к ней откладывается бесконечно малое расстояние σ , вычисленное по (8.7.10).

Из такого построения следует возможность получения частного решения уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби при помощи последовательности бесконечно малых операций. Мы начинаем с любой заданной базисной поверхности в трехмерном пространстве и ставим ей в соответствие значение $S = 0$. Затем строим близкую поверхность $S = \varepsilon$, потом поверхности $S = 2\varepsilon$, $S = 3\varepsilon$ и т. д. В конце концов некоторая ограниченная область трехмерного пространства окажется заполненной поверх-

ностями $S = \text{const}$, так что через каждую точку пространства будет проходить одна такая поверхность. Это означает, что в некоторой области мы имеем функцию S , удовлетворяющую уравнению в частных производных (8.7.5).

Поверхности $S = \text{const}$ замечательным образом связаны с задачей движения. С помощью этой «частной» производящей функции S невозможно решить канонические уравнения в стиле теории интегрирования Якоби, так как мы не знаем, каким образом функция S зависит от переменных Q_i . Однако вместо того, чтобы использовать *вторую* группу уравнений преобразования, можно обратиться к *первой* группе

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (8.7.11)$$

Эти соотношения можно записать в виде векторного уравнения

$$\mathbf{P} = \text{grad } S. \quad (8.7.12)$$

Поскольку импульс $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ имеет направление касательной к траектории, мы получаем следующую теорему: *механическая траектория движущейся точки перпендикулярна поверхностям $S = \text{const}$. При помощи этой теоремы, строя ортогональные траектории к поверхностям $S = \text{const}$, получаем семейство возможных механических траекторий.*

Эта теорема имеет следующий смысл. Представим себе семейство механических траекторий, каждая из которых соответствует одной и той же полной энергии E и все они начинаются на некоторой заданной поверхности $S = 0$. Для этих траекторий *можно найти бесконечное семейство поверхностей $S = \text{const}$, к которым траектории будут перпендикулярны.* Мы говорим, что механические траектории «обладают свойством лучей», потому что они ведут себя точно так же, как лучи света в оптике. Световые лучи характеризуются тем, что они везде перпендикулярны волновым поверхностям (фронту волны). То же самое справедливо для механических траекторий консервативной системы: их можно рассматривать как ортогональные траектории семейства поверхностей $S = \text{const}$.

Ортогональность световых лучей волновому фронту не имеет места в кристаллооптике. Подобно этому, и механические траектории

не всегда перпендикулярны поверхностям $S = \text{const.}$ Электрон, движущийся в магнитном поле, не пересекает поверхности $S = \text{const.}$ под прямым углом. Однако, как будет показано в п. 9 настоящей главы, ортогональность сохранится, если рассуждать не в образах евклидовой геометрии, а той геометрии, которая внутренне присуща динамической структуре пространства конфигураций.* Мы увидим, что в тех случаях, когда линейный элемент взят в форме Якоби $\overline{ds} = \sqrt{E - V} ds$, это различие не проявляется, потому что «внутренняя ортогональность» ведет к ортогональности в обычном смысле. В остальных случаях, однако, специальная «внутренняя ортогональность» лучей и волновых фронтов не приводит к ортогональности в обычном евклидовом смысле.

«Лучевые свойства» некоторого выделенного семейства механических траекторий ни в коем случае не являются тривиальными. Произвольное непрерывное семейство кривых в пространстве более чем двух измерений не может, вообще говоря, рассматриваться как семейство ортогональных траекторий по отношению к какому-нибудь семейству поверхностей. Аналитически лучевые свойства механических траекторий появляются лишь благодаря тому, что они подчиняются вариационным принципам. Без принципа наименьшего действия лучевые свойства механических траекторий не могли бы быть установлены.

Следует выделить условие, которое приводит к возникновению лучевых свойств механических траекторий, потому что мы фактически произвели определенный отбор среди всех возможных механических траекторий. Световые лучи в заданном оптическом поле образуют двумерное многообразие, в то время как совокупность всех механических траекторий в потенциальном поле образует пятимерное многообразие. С заданной базисной поверхностью траектории могли бы начинаться с произвольными скоростями. *Мы отбираем те траектории, которые имеют одну и ту же полную энергию и перпендикулярны заданной поверхности.* Лучевые свойства устанавливаются именно для них. Механические траектории являются изолированными линиями, не пересекающимися друг с другом. Если при помощи какого-нибудь условия искусственно выделить некоторое семейство траекторий, то, вообще говоря, ничто не мешает добавить к ним некую «случайную» траекторию, не принадлежащую к этому семейству. В противоположность этому оптические лучи не могут существовать в изолированном виде, а всегда являются частью какого-то поля.

В «электронном микроскопе» оптическое изображение образуется при помощи движущихся электронов. Все электроны покидают нагретый катод практически с одинаковой полной энергией, потому что температура катода везде одинакова. Более того, ввиду наличия сильного электрического поля электроны покидают катод практически перпендикулярно его поверхности. Степень размытия получающегося оптического изображения определяется степенью нару-

шения этих двух условий. Как мы покажем ниже, нарушение энергетического условия аналогично «хроматической аберрации» в оптике.

Лучевые свойства механических траекторий являются лишь частью глубокой аналогии, существующей между оптикой и механикой. Построение волнового фронта на основе принципа Гюйгенса также имеет механическую аналогию. Действительно, дифференциальная формулировка принципа Гюйгенса совпадает с уравнением в частных производных Гамильтона для оптики.

Принцип Гюйгенса в применении к бесконечно малым расстояниям может быть сформулирован следующим образом. Мы начинаем с некоторой произвольной поверхности, на которой имеется световое возбуждение в момент времени $t = 0$. Затем строим близкую поверхность для момента времени $t = \varepsilon$, используя значение скорости света в каждой точке базисной поверхности $t = 0$. Построение полностью подобно приведенному на рис. 20. Если v — скорость света в точке P , то

$$\sigma = v\varepsilon. \quad (8.7.13)$$

Предположим, что среда оптически неоднородна, так что скорость света меняется от точки к точке. Тогда

$$v = \frac{c}{n(x, y, z)}, \quad (8.7.14)$$

где n — «коэффициент преломления» среды, а c — скорость света в вакууме. Если n задано во всех точках, то бесконечно малое расстояние

$$\sigma = \frac{c}{n} \varepsilon \quad (8.7.15)$$

можно отложить от всех точек базисной поверхности, а затем многократно повторить это же бесконечно малое построение. Наконец, некоторая часть пространства заполнится поверхностями, определяемыми формулой

$$\varphi(x, y, z) = C. \quad (8.7.16)$$

Эта φ -функция соответствует прежней S -функции. Смысл ее таков: она равна времени, необходимому свету для того, чтобы пройти от базисной поверхности $\varphi = 0$ до заданной точки x, y, z . Ввиду соотношения, существующего между

бесконечно малым расстоянием σ , разделяющим две близкие поверхности $\varphi = \text{const}$, и градиентом функции φ [см. уравнение (8.7.9)], для φ получается следующее уравнение в частных производных:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{n^2}{c^2}. \quad (8.7.17)$$

Это основное уравнение геометрической оптики, выражающее в дифференциальной форме принцип Гюйгенса, было открыто Гамильтоном в его фундаментальных исследованиях в области геометрической оптики.

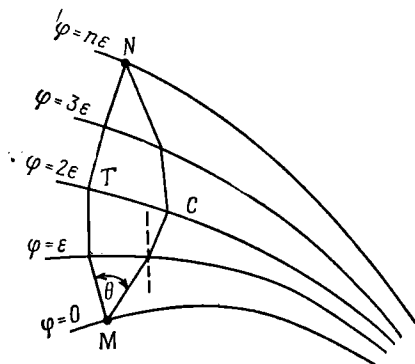


Рис. 21.

В механических задачах мы встречались с уравнением в частных производных (8.7.17) в форме (8.7.5). Это дифференциальное уравнение может теперь рассматриваться как аналог принципа Гюйгенса. Сравнивая правые части уравнений (8.7.17) и (8.7.5), можно для каждой данной механической задачи сформулировать соответствующую оптическую задачу, определив коэффициент преломления воображаемой оптической среды по формуле

$$\frac{n}{c} = \alpha \sqrt{2m(E - V)}, \quad (8.7.18)$$

где α — произвольная константа.

Отметим один поразительный исторический факт: еще на заре развития физических наук, когда методы высшей математики только

начинали разрабатываться, Иоганн Бернулли рассмотрел движение частицы в поле тяжести как оптическую задачу, введя фиктивный коэффициент преломления, пропорциональный $\sqrt{E - V}$.

В своих рассуждениях мы исходили из волновых поверхностей (фронта) как в оптике, так и в механике, а оптические или механические пути рассматривали как траектории, ортогональные этим поверхностям. Теперь мы покажем, как из уравнения в частных производных, задающего волновые поверхности, может быть получен принцип минимума, определяющий эти траектории.

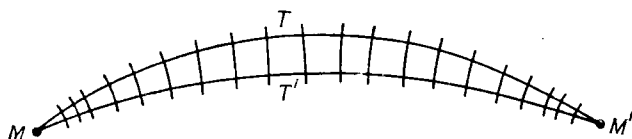


Рис. 22.

На рис. 21 изображен луч света, идущий вдоль ортогональной траектории T , которая начинается в точке M на волновой поверхности $\varphi = 0$ и заканчивается в точке N на поверхности $\varphi = n\varepsilon$. Вместе с ним рассмотрим другой луч C , с теми же самыми конечными точками M и N , который не является ортогональной траекторией. Из геометрического построения поверхностей $\varphi = \text{const}$ следует, что путь от M до N вдоль ортогональной траектории T займет время

$$t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \dots), \quad (8.7.19)$$

а для пути вдоль траектории C потребовалось бы время

$$t' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{\cos \theta_1} + \frac{\varepsilon}{\cos \theta_2} + \dots \right), \quad (8.7.20)$$

где θ — угол между касательной к траектории и нормалью. Поскольку сумма (8.7.19) составлена только из положительных величин, а все члены в (8.7.20) больше или равны соответствующим членам (8.7.19), получим

$$t' > t. \quad (8.7.21)$$

Это неравенство выражает «принцип наименьшего времени распространения» Ферма: *путь луча света отличается тем*

свойством, что из заданной точки M свет приходит в другую заданную точку N за минимально возможное время.

Казалось бы, из наших рассуждений следует, что принцип Ферма является истинным минимальным принципом, а не принципом стационарного значения, если сравнение происходит в «локальном» смысле, т. е. если истинные траектории сравниваются с траекториями, находящимися поблизости. Однако для справедливости нашего вывода требуется, чтобы вдоль всей траектории T волновые поверхности были хорошо определенными, однозначными поверхностями с определенными нормальными. Между тем может возникнуть и другая ситуация (рис. 22). Рассмотрим пучок лучей, исходящий из точки M . Эти лучи вначале расходятся, но затем они могут снова начать сходиться, так что соседние траектории T и T' могут *пересечься* в какой-то точке M' . В этом случае волновая поверхность, которой принадлежит точка M' , вырождается в точку. (В оптических инструментах *каждому* точечному источнику световых волн M должно соответствовать «изображение» M' , где волновые поверхности вырождаются в точку.) Наше заключение о настоящем относительном минимуме справедливо лишь до точки M' , но не может быть распространено на область *за* точку M' , так как в этом случае близкие траектории проходят через область, где они не пересекают никаких волновых поверхностей. Тогда величина θ перестает быть действительной, а неравенство $t' > t$ становится иллюзорным. При соответствующей ситуации в механике точка M' называется «кинетическим фокусом», сопряженным с точкой M на траектории T . После того как мы проходим через кинетический фокус, принцип наименьшего действия перестает быть минимальным принципом.

Задача 1. Рассмотреть движение частицы по сфере в отсутствие внешних сил. Показать, что действие перестает быть минимальным, когда движущаяся точка проходит через «кинетический фокус», находящийся в «антиполюсе» по отношению к точке M .

Задача 2. Найти кинетический фокус в поле тяжести Земли для частиц, вылетающих из определенной точки M в различных направлениях, но с одной и той же энергией E . Исследовать свойство «минимальности» в принципе наименьшего действия в связи с этим кинетическим фокусом.

Минимизация времени t означает минимизацию интеграла

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{ds}{v} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{n}{c} ds. \quad (8.7.22)$$

Следовательно, имеется *два* принципа, с помощью которых можно описать оптические явления. Можно использовать принцип волнового фронта, определив из уравнения в частных производных (8.7.17) функцию ϕ , а затем строя траек-

тории, ортогональные к поверхностям $\varphi = \text{const}$. С другой стороны, можно использовать принцип Ферма, минимизирующий интеграл (8.7.22). Эти два принципа полностью эквивалентны.

Подобный же дуализм проявляется в механических задачах. Можно определить механические пути как ортогональные траектории к волновым поверхностям $S = \text{const}$, определив S из решения уравнения в частных производных (8.7.5). Можно также использовать принцип минимума, аналогичный принципу Ферма (8.7.22). Ввиду соотношения (8.7.18) этот принцип должен сводиться к минимизации определенного интеграла

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2m(E - V)} ds. \quad (8.7.23)$$

А это не что иное, как принцип Якоби (см. гл. V, п. 6), который снова оказался эквивалентным принципу наименьшего действия. Параллелизм между механическими и оптическими явлениями можно усмотреть уже из сравнения принципа Якоби с принципом Ферма. Принцип Якоби допускает оптическую интерпретацию, если консервативной механической системе поставить в соответствие оптическую среду с коэффициентом преломления, меняющимся пропорционально $\sqrt{E - V}$. Эта аналогия может быть использована обеими науками. С одной стороны, канонические уравнения Гамильтона становятся применимыми в оптических задачах. С другой стороны, из оптики в область механики могут быть перенесены методы построения волновых фронтов Гюйгенса.

Все сказанное придает новый смысл функции S , определенной как произвольное частное решение уравнения Гамильтона — Якоби. Полный интеграл этого уравнения был интерпретирован с помощью абстрактных математических понятий: он представлял собой производящую функцию определенного канонического преобразования. Однако S -функция в виде частного решения имеет гораздо более непосредственный физический смысл. Оптическим эквивалентом функции S является функция φ , определяющая время, необходимое свету для прохождения от одного волнового фронта до другого. Это время может быть определено с по-

мощью интеграла (8.7.22), взятого вдоль траекторий, ортогональных к волновому фронту. Соответствующим интегралом в механике является действие (8.7.23). Интеграл (8.7.23) берется, начиная от заданной базисной поверхности, вдоль истинных механических траекторий с одной и той же полной энергией E , которые идут перпендикулярно к этой поверхности. Записав это действие в виде функции координат x, y, z конечной точки траектории, получим функцию S . Поверхности $S = \text{const}$ будут, таким образом, *поверхностями равного действия*, а действие измеряется, начиная от произвольной базисной поверхности, для которой принято, что $S = 0$.

Такая интерпретация S -функции сильно напоминает главную функцию Гамильтона W . Единственное различие заключается в том, что в случае W -функции мы начинаем от некоторой *точки*, а не от *поверхности*. Действие вычисляется вдоль произвольной механической траектории, исходящей из точки $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, вплоть до точки x, y, z . В рассмотренном же выше случае S -функции можно начать с произвольной базисной *поверхности*, двигаясь затем от этой поверхности вдоль произвольной ортогональной траектории.

Заслуживает внимания еще один аспект оптико-механической аналогии. В заданной области пространства могут распространяться световые колебания различных частот. Может случиться так, что коэффициент преломления n зависит от частоты. Это явление называется «дисперсией». При наличии дисперсии первоначальный волновой фронт $\varphi = 0$ распространяется различным образом для разных частот. В оптических приборах это явление называется «хроматической аберрацией». Явлению дисперсии в оптике тоже может быть предложена соответствующая механическая аналогия. Механические траектории, начинающиеся перпендикулярно базисной поверхности $S = 0$, могут несколько различаться по своей полной энергии E . Это происходит, например, в электронном микроскопе, где тепловое движение электронов вызывает небольшой разброс значений их полной начальной энергии E . Это приводит к дисперсии и к небольшой хроматической аберрации в картине, получаемой с помощью электронного микроскопа.

В оптико-механической аналогии время распространения света и действие являются соответственными величинами. Исходя из заданной начальной поверхности, можно определить бесконечное семейство поверхностей, до которых за последовательно малые интервалы времени доходят све-

товые импульсы. Соответствующими поверхностями в механике являются *поверхности равного действия*. Очень важно, что оптико-механическая аналогия касается только механических траекторий и световых лучей. Движение же *во времени* происходит по совершенно различным законам. Частицы, начинающие двигаться с одинаковой полной энергией в направлениях, нормальных к некоторой базисной поверхности, не остаются в процессе движения на поверхностях равного действия. Они оставались бы в том случае, если бы для соседних волновых фронтов выполнялось соотношение (8.7.13). На самом же деле величина $\sqrt{2m(E - V)}$ равна импульсу mv ; поэтому, исходя из уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби, соотношение (8.7.13) в случае механики должно быть записано в виде

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{mv}. \quad (8.7.24)$$

Бесконечно малое расстояние между двумя соседними волновыми фронтами оказывается не прямо, а *обратно* пропорциональным скорости. Поэтому поверхности, на которых движущиеся частицы находятся в фиксированные моменты времени, совершенно отличны от поверхностей равного действия.

Выбор между корпускулярной теорией и волновой теорией света не может быть сделан на основании изучения одних только траекторий световых лучей. Законы отражения и преломления могут быть получены и из чисто механических соображений. Однако в корпускулярной теории закон преломления получается в виде

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{const} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (8.7.25)$$

а из волновой теории следует обратное соотношение

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{const} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (8.7.26)$$

Выбор между этими двумя теориями был сделан на основании знаменитого эксперимента Фуко (1850 г.), показавшего, что свет распространяется в воде медленнее, чем в воздухе. Этот результат противоречил корпускулярной теории света.

Задача 3. Пронормируем массу движущейся частицы и скорость света таким образом, чтобы они стали равны 1. Тогда из уравнения оптико-механической аналогии (8.7.18) получим $n = v$. Скачкообразному изменению коэффициента преломления на границе двух

оптических сред соответствует скачкообразное поведение соответствующего потенциала V . Заменяя этот скачок крутым, но непрерывным изменением потенциала V в пограничном слое, объяснить механический смысл законов отражения и преломления.

Задача 4. Пусть задан непрерывно изменяющийся от точки к точке коэффициент преломления n , соответствующий непрерывному полю сил с потенциальной энергией $V(x, y, z)$. Дать интерпретацию дифференциальной формулировке закона преломления

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

и показать, что она определяет искривление светового луча в соответствии с законом механики

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n,$$

где F_n — компонента силы вдоль главной нормали, а ρ — радиус кривизны траектории.

Резюме. Механические траектории консервативных систем могут быть получены из частного решения уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби с помощью построения ортогональных траекторий к поверхностям $S = \text{const}$. Это построение аналогично построению волнового фронта и световых лучей в геометрической оптике. Поверхности равного времени в оптике соответствуют поверхностям равного действия в механике, а принцип наименьшего времени Ферма — принципу наименьшего действия или принципу Якоби. И оптические и механические явления могут быть описаны как с помощью волн, так и с помощью частиц. При описании с помощью волн мы оперируем с бесконечным семейством поверхностей, которое определяется уравнением в частных производных Гамильтона. При описании же с помощью частиц мы оперируем с ортогональными траекториями к этим поверхностям, и они определяются принципами Ферма и Якоби. Аналогия распространяется только на траектории механических частиц, не касаясь того, как движение происходит во времени. Кроме того, при этой аналогии среди всех возможных механических траекторий выделяются те, по которым движение начинается перпендикулярно к заданной поверхности.

8. Значение уравнения в частных производных Гамильтона в теории распространения волн. Выше было выяснено, что уравнение в частных производных Гамильтона (8.7.17) в оптике выражает принцип Гюйгенса в дифференциальной форме. Хотя принцип Гюйгенса основан на предположении о волновом характере движения, построение с помощью этого принципа последовательности волновых фронтов является методом геометрической, а не физической оптики. Для того чтобы более глубоко изучить связь между уравнением в частных производных Гамильтона и принципами физической оптики, мы несколько преобразуем определение волнового фронта. До сих пор мы рассматривали волновые поверхности в связи с распространением элементарных световых возбуждений в геометрической оптике, однако они имеют не меньшее значение и в физической оптике при изучении распространения световой волны определенной частоты. При этом волновые поверхности могут быть определены как *поверхности равной фазы*. Скорость распространения света является в то же время скоростью распространения фазового угла, например $\bar{\varphi}$, в направлении, перпендикулярном волновым поверхностям.

Распространение волны определенной частоты может быть описано уравнением

$$u = A e^{i 2\pi [\nu t - \bar{\varphi}(x, y, z)]}, \quad (8.8.1)$$

где u — распространяющееся возбуждение, A — амплитуда, ν — частота, а $\bar{\varphi}$ — фазовый угол. При этом волновые поверхности характеризуются уравнением

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \text{const}. \quad (8.8.2)$$

При распространении определенной фазы должно выполняться соотношение

$$\nu dt - d\bar{\varphi} = 0, \quad (8.8.3)$$

или

$$d\bar{\varphi} = \nu dt. \quad (8.8.4)$$

Из этого соотношения видно, что время, нужное свету для того, чтобы пройти расстояние между соседними поверхностями $\bar{\varphi} = \text{const}$, равно $d\bar{\varphi}/\nu$, а соответствующее время для

поверхностей $\varphi = \text{const}$ в соответствии с результатом предыдущего пункта равно $d\varphi$ [см. (8.7.16)]. Следовательно, дифференциальное уравнение для $\bar{\varphi}$ получается из (8.7.17) путем замены

$$\bar{\varphi} = v\varphi \quad (8.8.5)$$

и уравнение в частных производных Гамильтона принимает вид

$$|\text{grad } \bar{\varphi}|^2 = \frac{v^2 n^2}{c^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (8.8.6)$$

где через λ обозначена длина волны.

Интерпретация величины $\bar{\varphi}$ как некоторой фазы послужила де Бройлю исходным пунктом в его фундаментальном открытии волн материи. Допустим, что в оптико-механической аналогии заключен какой-то физический смысл, несмотря на очевидное различие между движением материи и распространением световых волн. Забудем о том, что электрон — частица, и рассмотрим лишь *путь* движущегося электрона как своего рода световой луч. Этот путь представляет собой некоторую замкнутую орбиту вокруг ядра. Предположим, что вдоль замкнутой орбиты имеется какое-то колебание. Тогда каждый раз при повторных возвращениях в данную точку это колебание будет вносить вклад в результирующую амплитуду. Эта амплитуда равна нулю, если фазовый угол возвращающегося колебания находится не в резонансе с первоначальным фазовым углом. С другой стороны, амплитуда может стать сколь угодно большой, если новый фазовый угол отличается от первоначального на 2π либо на целое кратное 2π . Ввиду того что фазовый угол равен $2\pi\bar{\varphi}$, мы получаем следующее правило отбора для траекторий, не уничтожаемых интерференцией:

$$\Delta\bar{\varphi} = n, \quad (8.8.7)$$

где n — целое число. С другой стороны, инвариантная формулировка квантовых условий, предложенная Эйнштейном [см. (8.4.28)], дает

$$\Delta S = nh. \quad (8.8.8)$$

В оптико-механической аналогии фазовый угол $\bar{\varphi}$ и действие S — соответственные величины. Резонансное условие (8.8.7) показывает, что можно получить естественную адекватную интерпретацию квантовых условий Эйнштейна, если под функцией действия S понимать фазовую функцию φ , удовлетворив соотношению

$$\bar{\varphi} = \frac{S}{h}. \quad (8.8.9)$$

Сравнив уравнения в частных производных (8.7.5) и (8.8.6), которые определяют соответственно функции S и φ , получим, что с движущимся электроном связана определенная длина волны, согласно закону

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2m(E - V)}{h^2} = \frac{m^2 v^2}{h^2}. \quad (8.8.10)$$

Отсюда получается знаменитая «де-бройлева длина волны»

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (8.8.11)$$

открытие которой столь сильно повлияло на развитие современной атомной физики.

Уравнение в частных производных Гамильтона в оптике эквивалентно дифференциальной формулировке принципа Гюйгенса. Однако принцип Гюйгенса — всего лишь *приближенное* следствие истинных принципов физической оптики. Адекватное описание оптических явлений производится с помощью уравнений Максвелла для электромагнитного поля, являющихся векторными уравнениями. Вместе с тем ряд оптических явлений можно объяснить с помощью более простой скалярной теории Френеля.

Рассмотрим функцию поля $\varphi(x, y, z, t)$, удовлетворяющую волновому уравнению Френеля

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (8.8.12)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка в отличие от уравнения в частных производных Гамильтона (8.8.6), которое является уравнением первого порядка, но второй степени. Связь между этими двумя фундаментальными уравнениями может быть установлена следующим образом.

Предположим, что оптические колебания происходят с определенной частотой ν . Тогда становится возможным разделение переменных (выделение времени) и φ записывается в виде

$$\varphi = e^{2\pi i \nu t} \psi(x, y, z). \quad (8.8.13)$$

Здесь ψ называется «амплитудной функцией», а определяющее ее дифференциальное уравнение — «амплитудным уравнением»

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \psi = 0. \quad (8.8.14)$$

Из сравнения (8.8.13) с (8.8.1) следует, что имеется следующая связь между волновой функцией ψ и фазовой функцией $\bar{\varphi}$:

$$\psi = e^{-2\pi i \bar{\varphi}}. \quad (8.8.15)$$

Подставив выражение (8.8.15) в амплитудное уравнение (8.8.14), получим следующее дифференциальное уравнение для $\bar{\varphi}$:

$$|\text{grad } \bar{\varphi}|^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \frac{i}{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} \right). \quad (8.8.16)$$

При λ , стремящемся к нулю, последним членом в этом уравнении можно пренебречь. Отсюда следует интересный вывод: уравнение в частных производных Гамильтона в оптике эквивалентно волновому уравнению Френеля для случая бесконечно малых длин волн, т. е. бесконечно больших частот. Для малых, но конечных длин волн уравнение в частных производных Гамильтона является лишь приближенным и должно было бы быть заменено точным уравнением (8.8.16) или, что еще лучше, амплитудным уравнением для функции ψ .

В 1927 г. Шредингер предложил оригинальную идею: углубить аналогию между геометрической оптикой и механикой, установленную уравнением в частных производных Гамильтона и перейти от фазовой функции $\bar{\varphi}$ к волновой функции ψ . Так, вводя де-Бройлевую длину волны (8.8.10) в амплитудное уравнение (8.8.14), получим знаменитое дифференциальное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0, \quad (8.8.17)$$

которое является основой современной волновой механики. Таким образом, великий переход от классической к волновой механике отмечен следующими вехами: теория Делоне для многопериодных механических систем с разделяющимися переменными; квантовые условия Зоммерфельда — Вильсона; инвариантная формулировка Эйнштейна для квантовых условий; резонансная интерпретация де Бройля квантовых условий Эйнштейна; логарифмическое преобразование Шредингера от фазовой функции $\bar{\varphi}$ к волновой функции ψ .

Резюме. Волновые поверхности распространения света могут быть определены как поверхности равной фазы. Уравнение в частных производных Гамильтона определяет в оптике распределение в пространстве фазового угла стационарного оптического поля. Это дифференциальное уравнение тесно связано с волновым уравнением Френеля и является его приближенным следствием. Это приближение переходит в точное уравнение в случае бесконечно малых длин волн, т. е. бесконечно больших частот.

9. Геометризация динамики. Неримановы геометрии. Метрическая интерпретация уравнения в частных производных Гамильтона. Снова и снова мы убеждаемся в том, сколь успешно наглядный язык геометрии помогает более глубокому пониманию проблем механики. Пространство конфигураций с его римановой метрикой дало возможность изобразить сколь угодно сложную механическую систему в виде одной точки в соответствующим образом определенном многомерном пространстве. Благодаря этому законы, определявшие движение одной частицы, удалось обобщить на произвольные механические системы.

Преимущества геометрического языка особенно заметны тогда, когда механическая система не подвержена действию внешних сил. В этом случае траектория механической системы может рассматриваться как геодезическая линия в пространстве конфигураций (принцип «прямейшего пути» Герца). Более того, при потенциальной энергии, не зависящей от времени t , можно ввести вспомогательный линейный элемент

$$d\sigma = \sqrt{E - V} ds, \quad (8.9.1)$$

где ds — линейный элемент исходного пространства конфигураций. Тогда мы снова получим все механические траектории с одной и той же полной энергией E в виде геодезических линий нового пространства.

Однако не все механические системы консервативны. Силовая функция внешних сил также не всегда зависит от

одних только координат. Например, в случае сил, действующих на электрон при наличии внешнего электромагнитного поля, силовая функция зависит от скоростей $\dot{q}_i$ и может зависеть и от времени t . Следовательно, обычные условия независимости силовой функции от времени и скорости здесь не выполняются. Более того, при переходе от классической к релятивистской механике изменяется обычная форма кинетической энергии, определяющая риманову структуру линейного элемента.

Тесная связь между динамикой и геометрией сохраняется и при более общих предположениях. Риманова геометрия — не единственно возможная форма метрической геометрии. Для римановой геометрии характерным свойством является «выпрямление» пространства в окрестности произвольной точки, так что обычная евклидова геометрия остается справедливой по крайней мере в бесконечно малых областях. Но для построения геометрии, использующей прямые линии и углы, такого ограничения, вообще говоря, не требуется. В применении к общим задачам динамики заслуживает внимания более общая форма геометрии, линейный элемент которой $\overline{ds}$ определяется более общим способом по сравнению с римановым линейным элементом.

Для последующих рассуждений нужно лишить время t того положения, которое оно занимает в обычных задачах механики. Добавим время t к числу позиционных координат q_i , положив

$$t = q_{n+1}, \quad (8.9.2)$$

и будем считать все q_i равноправными. Индекс i во всех случаях, когда это особо не оговаривается, будет теперь пробегать значения от 1 до $n + 1$. Пространство конфигураций имеет, таким образом, не n , а $n + 1$ измерений. Введем линейный элемент $\overline{ds}$ этого пространства с помощью следующего определения:

$$\overline{ds} = F(q_1, \dots, q_{n+1}, dq_1, \dots, dq_{n+1}). \quad (8.9.3)$$

Здесь F — произвольная функция $2n + 2$ переменных q_i и dq_i с тем лишь естественным ограничением, что она предполагается *однородной дифференциальной формой пер-*

вой степени относительно дифференциалов dq_i . Это означает, что

$$\begin{aligned} F(q_1, \dots, q_{n+1}, \alpha dq_1, \dots, \alpha dq_{n+1}) &= \\ &= \alpha F(q_1, \dots, q_{n+1}, dq_1, \dots, dq_{n+1}). \end{aligned} \quad (8.9.4)$$

Рассмотрим произвольную кривую на этом многообразии, заданную в параметрической форме

$$q_i = f_i(\tau). \quad (8.9.5)$$

Благодаря условию (8.9.4) линейный элемент этой кривой может быть записан в виде

$$\overline{ds} = F(q_1, \dots, q_{n+1}, q'_1, \dots, q'_{n+1}) d\tau. \quad (8.9.6)$$

Следовательно, задача о геодезической линии, т. е. задача о минимизации длины кривой, соединяющей две точки τ_1 и τ_2 , приводит к вариационной задаче о минимизации определенного интеграла

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(q_1, \dots, q_{n+1}, q'_1, \dots, q'_{n+1}) d\tau. \quad (8.9.7)$$

Эта же самая задача может быть сформулирована в несколько иной форме, если выбрать в качестве параметра τ последнюю переменную $q_{n+1} = t$. Тогда уравнения геодезической линии примут вид

$$q_i = f_i(t), \quad (8.9.8)$$

где функции $f_i(t)$ находятся из минимизации интеграла

$$A = \int_{t_1}^{t_2} F(q_1, \dots, q_n, t, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, 1) dt. \quad (8.9.9)$$

Мы сталкиваемся здесь с задачей, аналогичной стандартной задаче лагранжевой механики, а именно с определением движения механической системы с помощью минимизации зависящего от времени интеграла от функции Лагранжа L . *Функция F может быть, таким образом, интерпретирована с механической точки зрения как функция Лагранжа L аналитической механики.*

Наоборот, исходя из механической задачи с заданной функцией Лагранжа L ,

$$L = L(q_1, \dots, q_n, t, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad (8.9.10)$$

можно определить линейный элемент $\overline{ds}$ в $(n+1)$ -мерном пространстве, написав

$$\begin{aligned} \overline{ds} &= L\left(q_1, \dots, q_{n+1}, \frac{dq_1}{dq_{n+1}}, \dots, \frac{dq_n}{dq_{n+1}}\right) dq_{n+1} = \\ &= F(q_1, \dots, q_{n+1}, dq_1, \dots, dq_{n+1}). \end{aligned} \quad (8.9.11)$$

Тогда задача о движении перейдет в задачу о нахождении геодезической линии на этом $(n+1)$ -мерном многообразии. Таким образом, мы видим, что *задача решения уравнений динамики и задача нахождения геодезической линии на определенном — вообще говоря, неримановом — многообразии эквивалентны.*

В этой геометрической интерпретации динамики особенно существенна «главная функция» Гамильтона. Поскольку «действие» теперь геометрически интерпретируется как «длина дуги», а «наименьшее действие» — как «наименьшая дуга», постольку W -функция Гамильтона попросту определяет расстояние между двумя точками $q_1, \dots, q_{n+1}$, и $q_1, \dots, q_{n+1}$ этого многообразия¹.

В свете этой интерпретации сразу видно, почему главная функция Гамильтона должна быть обусловлена каким-то дифференциальным уравнением. Трудно было бы ожидать, чтобы произвольной функции координат двух точек многообразия можно было бы приписать смысл «расстояния» между этими точками. Под «расстоянием» на самом деле подразумевается «наименьшее расстояние», а слово «наименьшее» не могло бы относиться к произвольному определению расстояния.

¹ В связи с этой интерпретацией обозначение S , предложенное Гамильтоном для его главной функции, приобретает пророческий смысл. В данной книге мы не придерживаемся этого обозначения. Дело в том, что в современной литературе S -функция интерпретируется в духе теории интегрирования Якоби, т. е. как производящая функция некоторого общего канонического преобразования. Ввиду глубокого различия, существующего между теориями Гамильтона и Якоби (см. п. 5), нам показалось целесообразным ввести для главной функции Гамильтона специальное обозначение.

При изучении проблемы под геометрическим углом зрения естественно ожидать, что уравнению в частных производных Гамильтона может быть придан глубокий геометрический смысл. Для получения такой новой интерпретации начнем с преобразования вариационной задачи (8.9.7) к каноническому виду. Введем импульсы

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q'_i} \quad (8.9.12)$$

и построим функцию Гамильтона H . Однако поскольку F — однородная функция первой степени относительно переменных q'_i , получим

$$H = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F}{\partial q'_i} q'_i - F = 0. \quad (8.9.13)$$

Мы знаем уже, что обращение в нуль функции Гамильтона всегда компенсируется наличием тождества, связывающего q_i и p_i

$$K(q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0. \quad (8.9.14)$$

Это тождество следует рассматривать как дополнительное условие вариационной задачи, в которой ищется стационарное значение интеграла

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i. \quad (8.9.15)$$

Задача 1. Показать, что в случае евклидова линейного элемента

$$\overline{ds} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

импульсы p_i являются «направляющими косинусами» z_i некоторого направления. Тождество (8.9.14) в этом случае принимает форму

$$\sum \alpha_i^2 = 1.$$

Следовательно, «импульсы» p_i , связанные с произвольным метризованным многообразием, являются «обобщенными направляющими косинусами» этого многообразия. Эти направляющие косинусы не являются взаимно независимыми — они связаны тождеством (8.9.14).

Рассмотрим теперь произвольную поверхность

$$f(q_1, \dots, q_{n+1}) = 0 \quad (8.9.16)$$

на нашем многообразии и найдем нормаль к этой поверхности. Для этой цели опустим на поверхность перпендикуляр из произвольной точки $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_{n+1}$ вне поверхности. Тогда получим задачу о нахождении расстояния от точки $\bar{q}_i$ до поверхности. Другими словами, требуется минимизировать функцию $W(q_i, \bar{q}_i)$ при дополнительном условии (8.9.16). Решение этой задачи на минимум определяется уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0. \quad (8.9.17)$$

С учетом основных свойств главной функции Гамильтона получим

$$p_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (8.9.18)$$

Эти уравнения выражают направляющие косинусы нормали через градиент функции f . Множитель λ имеет следующий смысл. Уравнение (8.9.13) можно написать в форме

$$\sum p_i dq_i = \bar{ds}, \quad (8.9.19)$$

или

$$\bar{ds} = \lambda \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i = \lambda df, \quad (8.9.20)$$

откуда следует

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{df}{ds} = |\text{grad } f|. \quad (8.9.21)$$

Следовательно, величина $1/\lambda$ равна производной по направлению нормали от функции f , т. е. равна *наибольшей скорости изменения функции f в данной точке*. Уравнение нормали (8.9.18) принимает вид

$$p_i = \frac{1}{|\text{grad } f|} \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (8.9.22)$$

Для того чтобы вычислить λ , подставим выражения (8.9.18) для p_i в тождество (8.9.14). В результате получим

$$K\left(q_1, \dots, q_{n+1}, \lambda \frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \lambda \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right) = 0. \quad (8.9.23)$$

Из этого условия может быть найден неопределенный множитель λ .

Задача 2. Для риманова линейного элемента

$$\overline{ds} = \sqrt{\sum a_{ik} dx_i dx_k}$$

получить наибольшую скорость изменения функции $f(x_i)$ в виде

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\sum b_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}},$$

где b_{ik} — элементы матрицы, обратной матрице a_{ik} .

Заметим, что этот путь определения множителя λ , а вместе с ним и наибольшей скорости изменения функции f , напоминает вывод уравнения в частных производных Гамильтона. Там мы заменили p_i на $\partial W / \partial q_i$ и получили условие для функции W . Здесь же функция f может быть произвольной функцией, а условие (8.9.23) служит для получения наибольшей скорости изменения f . Уравнение в частных производных Гамильтона эквивалентно условию

$$\lambda = 1, \quad (8.9.24)$$

что означает

$$|\text{grad } W| = \left(\frac{dW}{ds}\right)_{\max} = 1. \quad (8.9.25)$$

Это свойство главной функции имеет наглядный геометрический смысл. Поверхности $W = \text{const}$ являются по определению концентрическими сферами с общим центром в точке $\bar{q}_i$. Радиус-вектор $\mathbf{R}$ везде перпендикулярен поверхности сферы. Следовательно, направление радиуса-вектора совпадает с направлением нормали и вследствие определения W как длины радиуса-вектора $\mathbf{R}$ имеем

$$|\text{grad } W| = \left(\frac{dW}{ds}\right)_{\max} = \frac{dr}{dr} = 1. \quad (8.9.26)$$

Заметим, что перпендикулярность радиуса-вектора к поверхности сферы не является характерным свойством

только евклидовой геометрии. Это инвариантное свойство присуще метрической геометрии любого вида.

Условие (8.9.26) эквивалентно уравнению в частных производных Гамильтона

$$K\left(q_1, \dots, q_{n+1}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{n+1}}\right) = 0. \quad (8.9.27)$$

Этого дифференциального уравнения достаточно для определения главной функции Гамильтона W , если только добавить соответствующие граничные условия. Граничные условия следуют из определения W как расстояния между двумя точками $\bar{q}_i$ и q_i , принадлежащими нашему многообразию. Предположим, что расстояние между этими двумя точками *сколь угодно мало*, т. е. что

$$q_i = \bar{q}_i + dq_i. \quad (8.9.28)$$

Расстояние между двумя соседними точками является попросту линейным элементом $d\bar{s}$, заданным в форме (8.9.3). Поэтому имеем условие

$$W(q_1, \dots, q_{n+1}, q_1 - dq_1, \dots, q_{n+1} - dq_{n+1}) = F(q_1, \dots, q_{n+1}, dq_1, \dots, dq_{n+1}). \quad (8.9.29)$$

Дифференциальное уравнение (8.9.27) вместе с граничным условием (8.9.29) однозначно определяет главную функцию Гамильтона.

Граничное условие (8.9.29) позволяет получить явное выражение для функции расстояния W в виде

$$W = F(q_1, \dots, q_{n+1}, q_1 - \bar{q}_1, \dots, q_{n+1} - \bar{q}_{n+1}) \quad (8.9.30)$$

при условии, что точка $\bar{q}_i$ находится достаточно близко к точке q_i . Полное интегрирование становится возможным в частном случае, когда F зависит только от dq_i и не зависит от самих q_i :

$$d\bar{s} = F(dq_1, \dots, dq_{n+1}). \quad (8.9.31)$$

Задача о геодезической линии становится тогда полностью интегрируемой, потому что все q_i оказываются циклическими переменными. В результате получим

$$W = F(q_1 - \bar{q}_1, \dots, q_{n+1} - \bar{q}_{n+1})d\bar{s}, \quad (8.9.32)$$

откуда расстояние между любыми двумя точками многообразия получается простой подстановкой без какого бы то ни было интегрирования. В этой геометрии пространство однородно, т. е. свойства пространства вблизи всех точек одинаковы. В то же время пространство *неизотропно*, т. е. свойства пространства зависят от направления. Фигуры в этом пространстве могут подвергаться параллельному переносу, но их, вообще говоря, нельзя поворачивать.

Задача 3. Получить выражение для расстояния между двумя точками евклидова пространства из линейного элемента $ds = \sqrt{\sum dx_i^2}$ на основе принципа (8.9.32).

Задача 4. Получить таким же способом главную функцию для свободной частицы массы m , движущейся в отсутствие внешних сил. Показать, что результат совпадает с выражением, полученным в задаче 2, п. 5, если положить там $g = 0$.

Задача 5. Показать, что детерминантное условие (8.5.6) удовлетворяет этой геометрии.

В п. 7 мы рассматривали замечательную аналогию между оптическими и механическими явлениями. Мы построили волновые поверхности $S = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ и показали, что ортогональные траектории к этим волновым поверхностям являются траекториями соответственно механических систем и оптических лучей. Наши рассуждения ограничивались случаем одной частицы, находящейся под действием консервативной внешней силы, независимой от скорости частицы. Отбросим теперь это ограничение и покажем, что наши результаты остаются справедливыми для любых механических систем *при условии, что каждой системе ставится в соответствие ее собственная естественная геометрия*.

Основное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция S , может быть сформулировано геометрически благодаря (8.9.24) и (8.9.25) следующим образом:

$$|\text{grad } S| = 1. \quad (8.9.33)$$

Это уравнение имеет ясный геометрический смысл. *Все точки поверхности $S = \text{const}$ находятся на одном и том же расстоянии от базисной поверхности $S = 0$.* Следовательно, уравнение $S = \text{const}$ определяет семейство параллельных поверхностей. Волновые поверхности, которые раньше были «поверхностями равного действия», теперь превращаются в «поверхности равного расстояния», т. е. в параллельные поверхности.

Теперь можно еще раз установить ортогональность механических (или оптических) траекторий по отношению к вол-

новым поверхностям $S = \text{const}$. В п. 7 этой главы мы получили механические траектории из волновых поверхностей путем решения первой группы уравнений преобразования

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (8.9.34)$$

Воспользовавшись (8.9.33), запишем эти уравнения в форме

$$p_i = \frac{1}{|\text{grad } S|} \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (8.9.35)$$

Отсюда видно, что мы имеем дело с уравнениями нормалей к поверхностям $S = \text{const}$. Таким образом, мы снова получили результат, согласно которому *траектории механических систем являются ортогональными траекториями к волновым поверхностям*.

Эта теорема стала теперь гораздо более общей. Раньше ортогональность траекторий и волновых поверхностей рассматривалась лишь в обычной евклидовой геометрии. На самом же деле эта теорема справедлива для той неевклидовой и даже неримановой геометрии, которая внутренним образом связана с данной механической задачей. Поэтому наши прежние рассуждения были справедливы благодаря тому в какой-то мере случайному обстоятельству, что линейный элемент внутренней геометрии был пропорционален евклидову линейному элементу [см. (8.9.1)].

Задача 6. Показать, что уравнения нормали инвариантны относительно умножения элемента $\overline{ds}$ на произвольный множитель $\alpha(q_1, \dots, q_{n+1})$.

В более общих случаях — таких, как движение электрона в магнитном поле, неконсервативные системы, релятивистская механика, распространение света в кристаллах — уже нет пропорциональности элемента $\overline{ds}$ внутренней геометрии и обычного элемента ds . Ортогональность траекторий и волновых поверхностей сохраняется поэтому лишь в особом внутреннем смысле.

Соотношения между волновыми поверхностями и механическими траекториями более важны, когда задача рассматривается с точки зрения ее собственной внутренней геометрии. Тогда в совершенно общем случае мы встречаемся

с той же самой ситуацией, которая существует в оптике при изучении распространения света в оптически *однородной* среде. Оптические лучи являются *прямыми линиями*, т. е. кратчайшими линиями. Элементарные волны в построении Гюйгенса представляют собой *сферы*, причем не только в бесконечно малых, но и в конечных областях. Огибающие этих сфер, т. е. волновые поверхности, являются *параллельными поверхностями*, а оптические лучи — либо траектории механической системы — *ортогональными траекториями* для этого семейства параллельных поверхностей. Все это остается справедливым для произвольных оптических или механических систем при условии, что мы оперируем соответствующим образом определенным метрическим пространством.

Гаусс в своих бессмертных «Общих исследованиях поверхностей с кривизной» (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827) первый обнаружил, что *ортогональные траектории произвольного семейства параллельных поверхностей являются геодезическими линиями*. Его исследования ограничивались той формой метрики, которая впоследствии была названа римановой. Однако в действительности эта теорема в полной мере справедлива для *любой* метрической геометрии.

Удивительная форма неримановой геометрии реализуется в природе в оптических явлениях, связанных с кристаллами. В этой геометрии линейный элемент определяется следующим образом:

$$d\vec{s} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{v}, \quad (8.9.36)$$

где скорость света v получается из решения «уравнения Френеля»

$$\frac{dx^2}{v^2 - v_1^2} + \frac{dy^2}{v^2 - v_2^2} + \frac{dz^2}{v^2 - v_3^2} = 0. \quad (8.9.37)$$

Константы v_1, v_2, v_3 называются «главными скоростями». Поскольку это уравнение приводит к квадратному уравнению для v , то получается *двузначная* метрика, т. е. в одной задаче сосуществуют два различных типа геометрии. В результате световая волна, падающая на кристалл, разделяется на две (различно поляризованные) волны и мы получаем явление «двойного лучепреломления». Элементарные волновые поверхности теории Гюйгенса образуют двойное семейство сложных поверхностей четвертого порядка, хотя они и остаются сферами при соответствующих геометриях.

Задача 7. Положим в уравнении Френеля $v_1 = v_2$. Тогда возникнет осевая симметрия вокруг оси z и кристалл из «двухосного» превратится в «одноосный». Показать, что при этом одна из метрик вырождается в метрику евклидова типа, так что одна группа волновых поверхностей превращается в сферы в евклидовом смысле («обыкновенный луч»). Выражение для расстояния во втором типе геометрии (связанном с «необыкновенным лучом») имеет вид

$$W = \frac{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2}{\sqrt{v_3^2 [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2] + v_1^2 (z - \bar{z})^2}}.$$

Резюме. Задачи динамики могут быть целиком сформулированы в геометрических образах. Для этого каждой заданной механической задаче нужно поставить в соответствие нужную форму метрической геометрии. В общем случае такая геометрия будет нериманова типа. Пространство конфигураций при этом включает в себя время наравне с другими переменными. Механические траектории являются кратчайшими, т. е. геодезическими, линиями этого многообразия, а волновые поверхности превращаются в параллельные поверхности. Геодезические линии могут быть получены как ортогональные траектории волновых поверхностей. Механическая задача соответствует задаче о распространении света в оптически однородной среде.

ГЛАВА IX

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

Тому, кто единым взглядом смог бы окинуть Вселенную, все мироздание показалось бы единственно правильным и необходимым.

Даламбер, Энциклопедия (1751)

1. Историческое введение. Еще со времен появления фарадеевой концепции «силовых линий» обсуждался такой вопрос: что происходит с силовыми линиями, когда тела приведены в движение? Перемещается ли электрическое поле, создаваемое материальными телами, жестким образом при перемещении этих тел? Г. Герц, первый демонстратор электромагнитных волн, отвечал на этот вопрос утвердительно. Однако эксперименты Физо с движущейся водой показали, что скорость распространения света в воде равна не $c + v$, а лишь $c + (1 - 1/n^2)v$, где n — коэффициент преломления воды. Лоренц объяснил «коэффициент увлечения» $1 - 1/n^2$ на основе гипотезы о «неподвижном эфире», не увлекаемом движущимися сквозь него электрическими зарядами. С другой стороны, из гипотезы о неподвижном эфире следовало, что на Земле (движущейся относительно неподвижного эфира вследствие своего вращения вокруг Солнца с периодом в год) должны были бы наблюдаться определенные оптические эффекты порядка v^2/c^2 , где v — линейная скорость вращения Земли вокруг Солнца, а c — скорость света. Экспериментальное доказательство отсутствия этих эффектов поставило теоретическую физику в тупик, выход из которого был указан в 1905 г. в статье Эйнштейна «Об электродинамике движущихся тел».

И Г. Лоренц и А. Пуанкаре еще до Эйнштейна понимали, что нужна теория, которая должна объяснить экспериментально обнаруженную невозможность измерения абсолютной скорости, но они не нашли удовлетворительного

решения этой проблемы. Только Эйнштейн понял, что в основу наших рассуждений в виде универсального *постулата*, принимаемого без доказательства, должна быть положена эквивалентность всех систем отсчета, движущихся одна относительно другой с постоянной скоростью. К этому постулату он добавил еще один постулат, утверждавший, что скорость света во всех эквивалентных системах отсчета и во всех направлениях равна одной и той же постоянной величине c . Содержание этого постулата иллюстрируется отрицательным результатом опыта Майкельсона — Морли и множеством других экспериментов.

Если исходить из наших обычных кинематических представлений, то эти два постулата противоречат один другому. Однако Эйнштейн показал, что их можно примирить, если отказаться от нашего обычного представления о существовании «абсолютного времени». Он нашел соотношение, которое должно связывать результаты измерения расстояния и времени, производимые двумя наблюдателями в системах отсчета, одна из которых движется относительно другой с постоянной скоростью. Получившиеся уравнения показывают, что время t утрачивает свой абсолютный характер и должно быть теперь добавлено к трем пространственным координатам. Время t превратилось из *инвариантной* величины в *ковариантную*, тогда как скорость света c , наоборот, из *ковариантной* величины в *инвариантную*.

Эйнштейну удалось показать, что уравнения такого преобразования прекрасно согласуются со всеми известными эффектами первого и второго порядка и дают полное объяснение всех явлений, происходящих при движении источника света относительно наблюдателя, либо, наоборот, — наблюдателя относительно источника. Более того, эти два основных постулата потребовали модификации уравнений движения Ньютона, что привело к появлению нового закона динамики. Однако наиболее сильный результат новой теории состоял в том, что два ранее независимых понятия массы и энергии оказались объединенными при помощи знаменитого уравнения $E = mc^2$. Эйнштейн открыл это соотношение сначала в неполном виде в 1905 г., а позже, в 1907 г., придал ему окончательную форму.

То возражение, что Эйнштейн, мол, не дал истинного физического объяснения релятивистских эффектов, а лишь за-

путал задачу при помощи массы физически неинтерпретируемых математических формул, отпало несколькими годами позже (в 1908—1909 гг.), когда Минковский показал глубокий смысл обоих постулатов Эйнштейна. Он обнаружил, что эти постулаты отражают новую *геометрическую* структуру, реализующуюся во Вселенной, где время добавлено к пространству так, что образуется расширенное многообразие четырех измерений: пространственно-временной континуум. Поэтому релятивистские эффекты являются прямым следствием геометрии, реализующейся в природе, независимо от каких-бы то ни было физических предположений.

Несметное количество доказательств правильности всех следствий релятивистских постулатов, полученное в результате самых тщательных экспериментов, привело через несколько лет к всеобщему признанию теории относительности и сделало ее одной из наиболее аргументированных глав математической физики. Единственный протестующий голос принадлежал самому Эйнштейну, который чувствовал, что первый постулат относительности был недостаточно общим. Он ограничивал круг рассматриваемых систем отсчета системами, движущимися с *постоянной скоростью*, вместо того чтобы включать *все* возможные системы. Системы отсчета по своей природе являются вспомогательными построениями, которые не должны были бы иметь абсолютного значения, а понятие законности выбора данной системы отсчета должно было бы полностью исчезнуть из математической физики. Постулат об эквивалентности *всех* систем отсчета называется «принципом общей относительности» в противоположность «специальной относительности», ограничивающейся эквивалентностью систем отсчета, движущихся с постоянной скоростью.

Еще более серьезным обстоятельством была мысль Эйнштейна о том, что при наличии гравитации не может соблюдаться принцип постоянства скорости света. Вследствие этого геометрическая структура Вселенной не могла бы быть типа пространства Минковского. Ее следовало обобщить таким образом, чтобы эта структура была пространством Минковского лишь в малом, а при конечных размерах пространство приобретало бы «кривизну». Это бы означало, что геометрия мира, оставаясь метрической, приобрела вместо четырехмерной евклидовой четырехмерную риманову струк-

туру. Новая теория дала полное описание всех гравитационных эффектов, а вместе с тем и новую интерпретацию физической «материи» при помощи чисто геометрических понятий. В то время как специальная теория относительности объединила в одном понятии пространство и время, общая теория относительности объединила *пространство, время и материю* в один геометрический образ — метрическую геометрию риманова типа в четырехмерном мире.

Общая теория относительности не может быть последовательно изложена без использования понятия поля, принадлежащего механике сплошной среды. Поэтому в последующем изложении мы ограничимся кинематикой и динамикой специальной теории относительности. Однако закон динамики общей теории относительности попадает в сферу идей динамики Лагранжа и Гамильтона, а потому он будет фигурировать в нашем дальнейшем обсуждении.

2. Релятивистская кинематика. В своей основной статье Эйнштейн¹ ввел два следующих постулата:

а) Все системы отсчета, движущиеся с постоянной скоростью одна относительно другой, одинаково приемлемы для описания природы, так что ни одной из них нельзя отдать предпочтение.

б) Скорость света c во всех этих системах остается одной и той же универсальной постоянной.

Второй постулат приводит к следующему кажущемуся противоречию. Пусть наблюдатель B движется относительно A со скоростью света c . Он дает световой сигнал в направлении своего движения, и этот сигнал движется относительно него со скоростью c . Тогда, в соответствии с нашими обычными представлениями, скорость сигнала относительно A должна была бы быть $2c$, в то время как второй постулат требует, чтобы она была равна c . Получается абсурдное равенство $c = 2c$. Противоречие, однако, устранится, если мы расстанемся с нашим представлением о том, что время t одно и то же для наблюдателей A и B .

Согласно Эйнштейну, мы ничего не должны предрешать заранее в уравнениях преобразования, связывающего коор-

¹ *Ann. der Physik*, 17 (1905), 891 (см. также Сб. Принцип относительности, под ред. В. К. Фридрикса и Д. Д. Иваненко, ОНТИ, М. — Л., 1935, стр. 133. — *Прим. ред.*).

динаты системы A и системы B . Предполагая, что движение B относительно A происходит в направлении X , положим

$$\begin{aligned}x &= \alpha x' + \beta t', \\ t &= \gamma x' + \delta t',\end{aligned}\tag{9.2.1}$$

где α , β , γ , δ — константы, поскольку мы хотим сохранить *линейность* преобразования. Отказавшись от уравнения $t = t'$ (что соответствовало бы выбору $\gamma = 0$, $\delta = 1$), мы получили новые возможности в связи с появлением двух дополнительных констант.

Все формулы специальной теории относительности сильно упростятся, если мы договоримся измерять время в таких единицах, чтобы скорость света была равна единице (для этого нужно обычное время t заменить на t/c). Для того чтобы вернуться к формулам, в которые входит наше обычное время t , мы должны просто заменить везде t на ct , а v — на v/c . Мы будем часто пользоваться этим упрощением, а потому условимся, что инвариантное значение скорости света имеет численное значение $c = 1$.

Пусть (x, t) — координаты системы, связанной с наблюдателем A , а (x', t') — координаты, связанные с наблюдателем B . Точки системы B измеряемые из A , движутся со скоростью v (< 1). При фиксированном x' это означает, что

$$\begin{aligned}dx &= \beta dt', \\ dt &= \delta dt',\end{aligned}$$

и потому

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\beta}{\delta}.\tag{9.2.2}$$

Согласно второму постулату, если $x = t$, то $x' = t'$. Действительно, если A обнаруживает, что сигнал распространяется относительно него со скоростью света (равной единице), то B должен обнаружить это же соотношение в своей системе. Это приводит к соотношению

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.\tag{9.2.3}$$

Однако свет может распространяться и в противоположном направлении: $x = -t$, что должно соответствовать

равенству $x' = -t'$. Отсюда получается новое соотношение

$$\alpha - \beta = \delta - \gamma. \quad (9.2.4)$$

Как результат этих соотношений можно положить

$$\begin{aligned} x &= k(x' + vt'), \\ t &= k(vx' + t'), \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

где константа k еще не определена.

Можно, однако, обратить это преобразование, выразив координаты (x', t') через (x, t)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{k} \frac{x - vt}{1 - v^2}, \\ t' &= \frac{1}{k} \frac{-vx + t}{1 - v^2}. \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

Теперь можно использовать факт равноправия систем A и B . Естественно, следует заменить v на $-v$, потому что если система B движется относительно A со скоростью v , то система A движется относительно B со скоростью $-v$. Однако никакие другие замены не допустимы, поскольку системы A и B должны быть полностью эквивалентными. Это дает

$$\frac{1}{k(1 - v^2)} = k, \quad (9.2.7)$$

откуда определяется константа k :

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (9.2.8)$$

Таким образом, мы получили соотношения между координатами двух систем

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, & x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ t &= \frac{vx' + t'}{\sqrt{1 - v^2}}, & t' &= \frac{-vx + t}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

К этим уравнениям следует добавить

$$y = y', \quad z = z', \quad (9.2.10)$$

поскольку нет оснований предполагать, что движение вдоль направления x окажет влияние на координаты y и z .

Сложение скоростей. Рассмотрим сигнал, распространяющийся со скоростью u в системе B , так что

$$x' = ut'. \quad (9.2.11)$$

Тогда

$$x = \frac{v + u}{1 + vu} t, \quad (9.2.12)$$

и скорость сигнала, измеренная наблюдателем A , оказывается равной

$$w = \frac{v + u}{1 + vu} \quad (9.2.13)$$

в отличие от ньютонова уравнения, согласно которому $w = v + u$. Это и есть знаменитая *теорема Эйнштейна о сложении скоростей*.

Если сигнал распространяется в системе B перпендикулярно оси x' , то

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= ut', \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= vt, \\ y &= \sqrt{1 - v^2} ut. \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Это не означает, что сложение векторов по обычному правилу параллелограмма более не справедливо. Правило параллелограмма не применимо только тогда, когда мы хотим сложить два вектора, *измеренные в двух различных системах отсчета*.

В опыте Физо свет распространялся в воде со скоростью

$$u = \frac{1}{n} \quad (9.2.16)$$

(n — коэффициент преломления), в то время как скорость воды равнялась v . Результирующая скорость света, измеренная в лабораторной системе координат, становится равной

$$\omega = \frac{v + 1/n}{1 + v/n}. \quad (9.2.17)$$

Ввиду малости v можно положить $(1 + v/n)^{-1} = 1 - v/n$, и, пренебрегая величинами второго порядка малости относительно v , получим

$$\omega = \left(1 - \frac{v}{n}\right) \left(v + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (9.2.18)$$

Этот результат полностью согласуется с экспериментальными фактами и совпадает с «коэффициентом увлечения» Френеля.

Аберрация света. Рассмотрим луч света, испускаемый в системе B в направлении, образующем угол θ' с осью x . Для него

$$\begin{aligned} x' &= t' \cos \theta', \\ y' &= t' \sin \theta'. \end{aligned} \quad (9.2.19)$$

Подставив в (9.2.9), получим

$$\begin{aligned} x &= t' \frac{v + \cos \theta'}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ y &= t' \sin \theta', \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

откуда

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta'}{v + \cos \theta'} \sqrt{1 - v^2}. \quad (9.2.21)$$

В обычных астрономических задачах последний множитель близок к единице; поэтому можно считать, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta'}{v + \cos \theta'}. \quad (9.2.22)$$

Поэтому направление, под которым видна звезда, из-за движения Земли изменяется практически так же, как это получается из элементарного сложения векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{c}$ (для длины результирующего вектора это не справедливо: она остается равной c , а не $|\mathbf{v} + \mathbf{c}|$).

Эффект Доплера. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в системе B под углом θ' к оси X . Представим ее с помощью волновой функции

$$Ce^{2\pi i\nu'(t' - x' \cos \theta' - y' \sin \theta')}. \quad (9.2.23)$$

Воспользовавшись формулами преобразования (9.2.9), получим ту же самую волну, но измеренную в системе A

$$Ce^{2\pi i\nu(t - x \cos \theta - y \sin \theta)}, \quad (9.2.24)$$

где

$$v = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}} (1 + v \cos \theta'), \quad (9.2.25)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{1 + v \cos \theta'} \sqrt{1-v^2}, \quad (9.2.26)$$

$$\cos \theta = \frac{v + \cos \theta'}{1 + v \cos \theta'}.$$

Поэтому

$$\cos \theta' = \frac{-v + \cos \theta}{1 - v \cos \theta} \quad (9.2.27)$$

и, подставляя в (9.2.25), получаем

$$v = v' \frac{\sqrt{1-v^2}}{1 - v \cos \theta}, \quad (9.2.28)$$

что с точностью до величин первого порядка совпадает с обычным выражением

$$v = v'(1 + v \cos \theta). \quad (9.2.29)$$

Однако релятивистская формула (9.2.28) показывает, что даже световой луч, приходящий от источника, движущегося перпендикулярно направлению луча ($\cos \theta = 0$), испытывает небольшое красное смещение. Этот так называемый «поперечный эффект Допплера» был исследован экспериментально, и было показано полное совпадение результатов измерений с предсказаниями теории¹.

Парадокс часов. Одним из парадоксов теории относительности, породившим поток статей в полупопулярных журналах (вышедших из-под пера менее чем полуквалифицированных авторов), был так называемый «парадокс часов». На него впервые обратили внимание около 1918 г., и он был

¹ Ives H. E. and Stilwell G. R., *J. Opt. Soc. Amer.*, 28 (1938), 215 и 31 (1941), 369.

полностью проанализирован и разъяснен Эйнштейном¹. Из уравнений преобразования (9.2.9) следует, что наблюдатель из системы B , сравнивая показания своих часов с показаниями часов из системы A , обнаружит, что часы в системе A идут быстрее. (Это не вызывается реальным изменением скорости работы часов, о чем свидетельствует тот факт, что наблюдатель из системы A обнаружил бы то же самое, если бы сравнил свои часы с часами из системы B .) При относительной скорости v , близкой к скорости света, может случиться так, что собственные часы наблюдателя B регистрируют интервал времени, скажем, в 1 сек, а часы из системы A регистрируют интервал времени в 1 год. Это же можно пояснить в другой форме. Предположим, что человек находится в снаряде, которым выстрелили из пушки, так что он движется по направлению к звезде Сириус со скоростью, близкой к скорости света, а затем с такой же скоростью движется обратно к Земле. Пусть он вернулся на место старта, скажем, через 16 сек по своим часам — конечно, совсем не постарев, — между тем как жители Земли успели постареть на 16 лет. Хотя этот результат и кажется в высшей степени парадоксальным, если исходить из соображений «здравого смысла» — кстати, основанных на неверном предположении об абсолютном времени, — в нем еще не содержится никаких внутренних противоречий. Человек, летящий к Сириусу и обратно, движется по совершенно иным участкам пространственно-временного континуума, чем жители Земли, так что нет никаких причин, по которым они должны были бы постареть одинаково. Предполагаемый же «парадокс» становится ясным из следующей кинематической формулировки этого предполагаемого эксперимента. A говорит: «Я вижу B , движущегося направо со скоростью v и возвращающегося с той скоростью обратно». Наблюдения B за движением A будут точно теми же самыми, с той лишь разницей, что «право» заменится на «лево». Почему же возникает асимметрия в старении A и B ? В действительности при таком чисто кинематическом описании событий теряется одно существенное обстоятельство, так что это описание физически неполно. Если оба наблюдателя A и B будут иметь при себе акселерометры, то у A аксе-

¹ *Die Naturwissenschaften*, 6 (1918), 697.

лерометр все время будет стоять на нуле, а у B он покажет очень большой сигнал в тот момент, когда B достигнет Сириуса и повернет обратно. Следовательно, физические состояния у A и B совершенно различны, так что принцип симметрии нарушен в самом условии задачи.

Экспериментальное доказательство парадокса часов стало возможным в опытах с коротко живущими частицами, так называемыми μ -мезонами, возникающими в космических ливнях на очень больших высотах. Время жизни этих частиц известно из лабораторных измерений. Оно таково, что эти частицы, движущиеся со скоростью, составляющей 99,5% скорости света, не должны были бы успеть до распада проникнуть в атмосферу глубже, чем на 600 м, если бы не релятивистское удлинение времени. Это удлинение делает возможным их проникновение на глубину 6000 м и более и их появление на уровне моря. Этот факт никак нельзя было бы объяснить без формул преобразования теории относительности. Таким образом, эффект, на котором основан так называемый «парадокс часов», полностью подтвержден экспериментально¹.

3. Четырехмерное пространство Минковского. Формулы преобразования (9.2.9—9.2.10) обладают тем свойством, что они оставляют инвариантным выражение

$$C(x^2 + y^2 + z^2 - t^2) = C(x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2). \quad (9.3.1)$$

Две системы отсчета, к которым они относятся, являются частными случаями более общего класса систем отсчета, которые равноправны с точки зрения описания событий природы. Такие системы отсчета допускают произвольный перенос начала координат (3 параметра), произвольный перенос начала отсчета времени (1 параметр), произвольный поворот пространственных осей (3 параметра) и поступательное движение с произвольной скоростью v (< 1) (3 параметра) — в общей сложности класс систем отсчета, допускающий свободный выбор 10 параметров. Это полное семейство допустимых систем отсчета может быть охарактеризовано одним утверждением, а именно координаты системы отсчета должны быть такими, чтобы оставалась

¹ См. Swann W. F. G., *Report on Progress in Physics*, 10, (1946), 1, особенно стр. 16.

инвариантной следующая алгебраическая величина:

$$C [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 - (t - \bar{t})^2] \quad (9.3.2)$$

(если бы время не было нормировано, то последний член следовало бы умножить на c). Сюда следует добавить условие *линейности* соотношений между двумя системами отсчета. В ньютоновой физике эквивалентность систем отсчета ограничена инвариантностью величины

$$s^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2, \quad (9.3.3)$$

являющейся квадратом расстояния между точками (x, y, z) и $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. В этом случае эквивалентность систем отсчета обусловлена тем, что физическое пространство считается евклидовым пространством трех измерений, в котором эквивалентны все точки (возможность поступательного перемещения начала координат) и все направления (возможность поворота координатных осей).

Новая точка зрения, согласно которой эквивалентность систем отсчета требует инвариантности квадратичной формы

$$s^2 = C [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 - c^2 (t - \bar{t})^2], \quad (9.3.4)$$

показывает, что физическому миру отвечает метрическая геометрия, в которой расстояние между двумя точками определяется выражением (9.3.4), а не (9.3.3). Это означает, что время t присоединяется к пространственным координатам x, y, z , образуя евклидово пространство *четырех измерений*. Это пространство не совсем евклидово из-за знака минус перед последним членом. Но его можно сделать *формально* евклидовым, вводя совокупность четырех математических координат с помощью следующих формул:

$$x_1 = ix, \quad x_2 = iy, \quad x_3 = iz, \quad x_4 = ct. \quad (9.3.5)$$

В этом случае выражение для расстояния между точками x_1, x_2, x_3, x_4 и $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$ принимает вид

$$s^2 = -C [(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + (x_3 - \bar{x}_3)^2 + (x_4 - \bar{x}_4)^2]. \quad (9.3.6)$$

«Абсолютное пространство» и «абсолютное время» Ньютона больше не могут существовать как независимые категории

и сливаются в одно целое: «абсолютный пространственно-временной мир» теории относительности¹. В такой интерпретации все релятивистские эффекты предыдущего пункта следует рассматривать как *геометрические* эффекты, порождаемые тем обстоятельством, что явления природы разыгрываются в геометрическом пространстве четырех измерений с квазиевклидовой структурой.

Константа C может быть опущена, так как мы исходим из того, что величина расстояния между двумя точками зависит от единиц, в которых это расстояние измеряется. Однако безразлично, нормировано ли C на $+1$ или -1 . Если мы хотим, чтобы расстояния между любыми двумя физическими соединимыми точками выражались действительными числами, то следует выбрать -1 . Поэтому положим

$$s^2 = c^2 (t - \bar{t})^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2 - (z - \bar{z})^2, \quad (9.3.7)$$

или, в дифференциальной форме,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (9.3.8)$$

Наличие различных знаков $(+, -, -, -)$ в этой квадратичной форме приводит к глубоким отличиям от истинного четырехмерного евклидова пространства, имеющего квадратичную форму со знаками $(+, +, +, +)$. «Нулевое расстояние» между двумя точками в евклидовом смысле означает, что эти точки совпадают. «Нулевое расстояние» в пространстве Минковского означает, что

$$c^2 (t - \bar{t})^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2 - (z - \bar{z})^2 = 0. \quad (9.3.9)$$

Геометрическим местом точек, удовлетворяющих этому уравнению, является сфера с центром в точке $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, которая расширяется со скоростью света, начиная с некоторого момента времени $\bar{t}$. Сюда следует добавить сферу, которая раньше *стягивалась* в точку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и достигла нулевого радиуса в момент времени $\bar{t}$. Из инвариантности расстояния относительно прямоугольных преобразований координат сразу следует, что если расстояние $s = 0$ в *одной* из допу

¹ Minkowski H., *Phys. Zeitschr.*, 10 (1909), 104.

стимых систем координат, то оно равно нулю и во *всех* остальных допустимых системах координат. Это означает, что распространение света есть *явление абсолютное*, одинаковое во всех допустимых системах отсчета. Постулат Эйнштейна об инвариантности скорости света включен таким образом в более исчерпывающий принцип инвариантности линейного элемента (9.3.8).

Тот факт, что в природе невозможна скорость, превышающая скорость света, оказывается теперь естественным геометрическим следствием того, что такие скорости приводят к *мнимым* расстояниям, квадрат которых отрицателен. Произвольная точка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ физического многообразия может быть физически связана лишь с такими точками (x, y, z, t) , для которых

$$c^2(t - \bar{t})^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2 - (z - \bar{z})^2 \geq 0. \quad (9.3.10)$$

Уравнение

$$c^2(t - \bar{t})^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2 - (z - \bar{z})^2 = 0 \quad (9.3.11)$$

называется уравнением «светового конуса», связанного с точкой $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$. О точках, для которых в неравенстве (9.3.10) выполняется знак «больше», говорят, что они «лежат внутри светового конуса» с центром $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$.

4. Преобразования Лоренца. Преобразование (9.2.9) является частным случаем более широкой группы преобразований, которые исторически не очень заслуженно называются «преобразованиями Лоренца». Они характеризуются произвольными четырехмерными поворотами евклидова пространства четырех измерений с координатами $x_1 = ix$, $x_2 = iy$, $x_3 = iz$, $x_4 = ct$. Можно обойтись и без мнимых величин. Для этого следует определить преобразования Лоренца как группу линейных преобразований четырех действительных величин, (x, y, z, t) , оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (9.4.1)$$

Хотя в то время, когда Гамильтон создавал свою теорию кватернионов, идея о четырехмерной вселенной была еще не известна, его кватернионы исключительно удобны

для изучения общих свойств произвольного преобразования Лоренца. Кватернион Гамильтона определяется как гиперкомплексное число вида

$$Q = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} + q_4, \quad (9.4.2)$$

в котором четвертая компонента («временная часть» кватерниона) алгебраически ведет себя как простое число (скаляр), а гиперкомплексные единицы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ подчиняются следующим правилам:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\mathbf{j} &= -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} &= -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k}\mathbf{i} &= -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1. \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

Умножение в общем случае не коммутативно ($AB \neq BA$), но обладает свойством ассоциативности. За исключением коммутативного свойства умножения, все остальные правила обычной алгебры сохраняются, в том числе и невозможность деления на нуль. Введем «сопряженный» кватернион

$$\tilde{Q} = -q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} + q_4. \quad (9.4.4)$$

Тогда сумма $Q + \tilde{Q}$, а также и

$$|Q|^2 = Q\tilde{Q} = \tilde{Q}Q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \quad (9.4.5)$$

являются простыми скалярами, коммутирующими с любым кватернионом. Имеет место также следующее соотношение:

$$(AB)^\sim = \tilde{B}\tilde{A}. \quad (9.4.6)$$

Отсюда

$$|AB|^2 = (AB)(AB)^\sim = AB\tilde{B}\tilde{A} = (A\tilde{A})(B\tilde{B}) = |A|^2 |B|^2. \quad (9.4.7)$$

Кватернион может быть интерпретирован как вектор в пространстве четырех измерений (4-вектор). На языке кватернионов может быть записан ряд свойств электромагнитного поля (например, уравнения Максвелла)¹. Однако

¹ См. Silberstein L., Theory of Relativity (Macmillan, 1924), p. 46.

исчисление кватернионов особенно удобно для изучения преобразований Лоренца.

Положим

$$R = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} + x_4 \quad (9.4.8)$$

и возьмем некоторый кватернион

$$A = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} + a_4, \quad (9.4.9)$$

удовлетворяющий условию

$$A\tilde{A} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1. \quad (9.4.10)$$

Тогда уравнение

$$R' = AR \quad (9.4.11)$$

выражает собой некоторое линейное преобразование координат, которое, согласно (9.4.7), удовлетворяет условию

$$R' \tilde{R}' = R \tilde{R}. \quad (9.4.12)$$

Это означает, что *длина вектора R не меняется*. Следовательно, преобразование (9.4.11) является некоторым *поворотом* четырехмерного евклидова пространства. То же самое справедливо для преобразования

$$R' = RB, \quad (9.4.13)$$

если кватернион B тоже удовлетворяет условию

$$B\tilde{B} = 1. \quad (9.4.14)$$

Ввиду наличия у поворотов групповых свойств произведение кватернионов

$$R' = ARB \quad (9.4.15)$$

снова является поворотом в пространстве четырех измерений. Выбор двух кватернионов единичной длины A и B допускает шесть степеней свободы в соответствии с шестью степенями свободы произвольного поворота (без отражения) в пространстве четырех измерений. Следовательно, (9.4.15) можно рассматривать как общее выражение для произвольного поворота в пространстве четырех измерений.

Предположим теперь, что кватернионы A и B имеют *комплексные коэффициенты*. «Комплексно сопряженную»

величину мы будем обозначать при помощи звездочки. В пространстве Минковского вектор R имеет действительную временную часть и мнимую пространственную часть. Это однозначным образом характеризуется свойством

$$\tilde{R} = R^*. \quad (9.4.16)$$

Для того чтобы получить поворот четырехмерного пространства, имеющий физический смысл [т. е. такой, который бы оставлял инвариантной действительную величину (9.4.1)], необходимо и достаточно, чтобы условие (9.4.16) выполнялось и в новой системе отсчета

$$\tilde{R}' = R'^*. \quad (9.4.17)$$

Это означает, что

$$\tilde{B} \tilde{R} \tilde{A} = A^* R^* B^*,$$

или

$$\tilde{B} R^* \tilde{A} = A^* R^* B^*. \quad (9.4.18)$$

Это условие будет выполнено, если мы выберем

$$\tilde{B} = A^*. \quad (9.4.19)$$

Тогда и

$$\tilde{A} = B^*. \quad (9.4.20)$$

Следовательно, произвольное (собственное) преобразование Лоренца, имеющее физический смысл, можно охарактеризовать произведением кватернионов

$$R' = A R \tilde{A}^*, \quad (9.4.21)$$

где восемь компонент комплексного кватерниона

$$A = A' + iA''$$

удовлетворяют двум скалярным условиям

$$A' \tilde{A}' - A'' \tilde{A}'' = 1,$$

$$A' \tilde{A}'' + A'' \tilde{A}' = 0.$$

При A действительном $A^* = A$ и

$$A \tilde{A}^* = A \tilde{A} = 1.$$

Следовательно, $R = x_4$ преобразуется в

$$R' = x_4,$$

т. е. *временная ось* при таком преобразовании *остается неизменной*. Преобразование Лоренца в этом случае сводится к простому *повороту* обычного пространства. Такое представление произвольного поворота трехмерного пространства с помощью действительного кватерниона единичной длины было известно и использовалось еще Эйлером.

При обычном трехмерном повороте особый интерес представляет *ось вращения*, т. е. прямая линия, преобразующаяся сама в себя. Аналогично можно поставить вопрос о «главной оси» нашего преобразования, характеризующейся условием

$$R' = \lambda R, \quad (9.4.22)$$

где λ — просто число (необязательно действительное), называемое «главным значением» матрицы, связанной с линейным преобразованием (9.4.21). Поскольку наше преобразование обладает тем свойством, что для *всех* значений радиуса-вектора

$$|R'|^2 = |R|^2, \quad (9.4.23)$$

условие (9.4.22) для главной оси дает

$$(\lambda^2 - 1) |R|^2 = 0, \quad (9.4.24)$$

откуда видно, что либо

$$\lambda = \pm 1, \quad (9.4.25)$$

либо

$$|R|^2 = 0. \quad (9.4.26)$$

Условие (9.4.26) означает, что соответствующая главная ось лежит на нуль-конусе

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (9.4.27)$$

Таким образом, главная ось лоренцова преобразования может существовать в реальном пространстве, несмотря на то что λ отлично от ± 1 . В евклидовом пространстве этого не может быть. Действительно, в евклидовом пространстве с четным числом измерений *не* может существовать прямой линии, которая бы при повороте переходила сама в себя

в отличие от пространства с нечетным числом измерений, где должна существовать по крайней мере *одна* действительная ось вращения. Однако преобразование Лоренца всегда имеет *две* главные оси, принадлежащие действительному нуль-конусу (9.4.27)¹, хотя величины λ практически всегда отличны от единицы. В пределе эти две оси сливаются в одну. Остальные главные оси тоже находятся на нуль-конусе (9.4.27), но они соответствуют комплексным значениям координат.

Произвольное преобразование Лоренца мы будем выражать через его две действительные главные оси, которые будем для краткости называть «нуль-осями», поскольку они лежат на действительном нуль-конусе. Рассмотрим их как кватернионы и обозначим через P и Q . Из того, что они лежат на нуль-конусе, следует, что их длина равна нулю

$$P\tilde{P}=Q\tilde{Q}=0. \quad (9.4.28)$$

Для того чтобы эти оси были действительными, требуется выполнение условия (9.4.16). Положим

$$\begin{aligned} P &= p_4 [1 + i(p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k})] = p_4 (1 + i\mathbf{P}), \\ Q &= q_4 [1 + i(q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k})] = q_4 (1 + i\mathbf{Q}), \end{aligned} \quad (9.4.29)$$

где $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ можно рассматривать как обычные трехмерные векторы либо как кватернионы со скалярной частью, равной нулю.

Из условия (9.4.28) следует

$$P\tilde{P} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \quad (9.4.30)$$

и аналогично

$$Q\tilde{Q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Пронормируем длины векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ так, чтобы

$$p_4 = q_4 = p \quad (9.4.31)$$

¹ Подробнее о свойствах нуль-конуса см. Synge J. L., Relativity, the Special Theory (North-Holland, Amsterdam, 1956), стр. 89 и далее.

и

$$\begin{aligned} P\tilde{Q} + Q\tilde{P} = p_4(1 + i\mathbf{P})q_4(1 - i\mathbf{Q}) + \\ + q_4(1 + i\mathbf{Q})p_4(1 - i\mathbf{P}) = 2p^2(1 - \cos\theta) = 1, \end{aligned} \quad (9.4.32)$$

где через θ обозначен угол между векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ (мы временно исключили возможность совпадения этих двух векторов).

Введем теперь кватернион A преобразования (9.4.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \alpha P\tilde{Q} + \frac{1}{\alpha} Q\tilde{P}, \\ \tilde{A}^* &= \alpha^* \tilde{Q}P + \frac{1}{\alpha^*} \tilde{P}Q. \end{aligned} \quad (9.4.33)$$

[Во втором уравнении использовано условие (9.4.16).]

Сначала покажем, что независимо от того, какие (вообще говоря, комплексные) значения принимает α , условие (9.4.10) выполняется

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= \left(\alpha P\tilde{Q} + \frac{1}{\alpha} Q\tilde{P} \right) \left(\alpha Q\tilde{P} + \frac{1}{\alpha} P\tilde{Q} \right) = \\ &= (P\tilde{Q})^2 + (Q\tilde{P})^2 = \\ &= (P\tilde{Q} + Q\tilde{P})P\tilde{Q} + (Q\tilde{P} + P\tilde{Q})Q\tilde{P} = \\ &= (P\tilde{Q} + Q\tilde{P})^2 = 1. \end{aligned} \quad (9.4.34)$$

Поскольку длины векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ нормализованы условиями (9.4.30—9.4.32), при выборе этих векторов имеется четыре степени свободы, которые добавляются к двум степеням свободы, связанным с комплексной константой α .

Методом дополнения, подобным тому, который был использован при доказательстве (9.4.34), покажем, что P и Q — действительно главные оси нашего преобразования

$$\begin{aligned} P' &= \left(\alpha P\tilde{Q} + \frac{1}{\alpha} Q\tilde{P} \right) P \left(\alpha^* \tilde{Q}P + \frac{1}{\alpha^*} \tilde{P}Q \right) = \\ &= \alpha\alpha^* P\tilde{Q}P\tilde{Q}P = \\ &= \alpha\alpha^* (P\tilde{Q} + Q\tilde{P})P(\tilde{Q}P + \tilde{P}Q) = \alpha\alpha^* P. \end{aligned} \quad (9.4.35)$$

Следовательно,

$$P' = \alpha\alpha^* P, \quad \lambda_1 = \alpha\alpha^*. \quad (9.4.36)$$

Аналогично

$$Q' = \frac{1}{\alpha\alpha^*} Q, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\alpha\alpha^*}. \quad (9.4.37)$$

Точно так же можно показать, что кватернионы PQ и QP также имеют характер главных осей

$$\begin{aligned} \left(\alpha P\tilde{Q} + \frac{1}{\alpha} Q\tilde{P} \right) PQ \left(\alpha^* \tilde{Q}P + \frac{1}{\alpha^*} \tilde{P}Q \right) &= \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^*} P\tilde{Q}\overline{PQ}\tilde{P}Q = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^*} (P\tilde{Q} + Q\tilde{P}) PQ (\tilde{P}Q + \tilde{Q}P) = \frac{\alpha}{\alpha^*} PQ. \end{aligned} \quad (9.4.38)$$

Следовательно,

$$(PQ)' = \frac{\alpha}{\alpha^*} (PQ), \quad \lambda_3 = \frac{\alpha}{\alpha^*}, \quad (9.4.39)$$

$$(QP)' = \frac{\alpha^*}{\alpha} (QP), \quad \lambda_4 = \frac{\alpha^*}{\alpha}. \quad (9.4.40)$$

Мы получили таким образом четыре главные оси произвольного преобразования Лоренца. Первая пара (9.4.36—9.4.37) имеет действительные взаимно обратные собственные значения; они лежат на действительном нуль-конусе. Вторая пара (9.4.39—9.4.40) лежит на комплексном нуль-конусе. Их собственные значения являются комплексно-сопряженными и опять-таки взаимно обратными величинами.

Предельные случаи. В общем случае преобразование Лоренца имеет четыре различных главных значения. Поэтому не может случиться так, что преобразование оставляет неизменными более чем четыре прямые линии. Однако мы встречались с частным случаем преобразования Лоренца (9.2.9—9.2.10), когда неподвижной может остаться *целая плоскость*. Это происходит только тогда, когда совпадают два собственных значения. Из проведенной выше классификации видно, что совпадение собственных значений может произойти лишь одним из путей:

(а) Если α выбрано *действительным*. Тогда

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 1. \quad (9.4.41)$$

(6) Если α выбрано комплексным, но равным единице по абсолютной величине. Тогда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1. \quad (9.4.42)$$

(При $\alpha = 1$ осуществляются оба условия. Тогда мы имеем тождественное преобразование $R' = R$ и неизменным остается все пространство. Кроме этого предельного случая, никогда не может случиться так, что неподвижной окажется более чем одна плоскость.)

1. Обратимся сначала к случаю (а). Мы сталкиваемся здесь с 5-параметрическим семейством преобразований, поскольку α ограничено лишь одним условием. Этот класс преобразований отличается тем свойством, что *все четыре собственных значения*, а потому и все четыре главные оси, *действительны*. Этого не видно из выражений (9.4.39) и (9.4.40), так как и PQ , и QP являются комплексными величинами. Однако ввиду совпадения собственных значений λ_3 и λ_4 можно взять любую линейную комбинацию этих двух осей. Тогда из (9.4.16) следует, что должны быть действительными следующие два 4-вектора:

$$C_1 = PQ + QP, \quad C_2 = i(PQ - QP). \quad (9.4.43)$$

Вычислим для этих двух векторов скаляр (9.4.5)

$$(PQ \pm QP)(\tilde{Q}\tilde{P} \pm \tilde{P}\tilde{Q}) = \pm (PQ\tilde{P}\tilde{Q} + QP\tilde{Q}\tilde{P}).$$

Учитывая множитель i в C_2 , получаем, что $|C_1|^2 = |C_2|^2$. Записав P и Q в форме (9.4.29), получим

$$|C_1|^2 = |C_2|^2 = -2p^2 \sin^2 \theta = -(1 + \cos \theta). \quad (9.4.44)$$

Следовательно, обе главные оси лежат *вне* нуль-конуса и вне физического пространства, преобразующегося по лоренцову преобразованию. То же самое справедливо и по отношению к инвариантной плоскости, проходящей через эти два 4-вектора. Плоскость $Y-Z$ в частном случае преобразования (9.2.9—9.2.10) лежит вне нуль-конуса и потому преобразование (9.2.9.—9.2.10) принадлежит к этому классу. В частности, в этом случае имеем

$$\cos \theta = -1, \quad p = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{1-v}{1+v}},$$

$$P = \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{i}), \quad Q = \frac{1}{2}(1 - i\mathbf{i}),$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-v} + \sqrt{1+v}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-v} - \sqrt{1+v}}{\sqrt{1-v^2}} i\mathbf{i}.$$

2. Перейдем теперь к случаю (б). Здесь тоже имеется 5-параметрическое семейство преобразований Лоренца, поскольку α должно иметь вид $e^{i\chi}$. Инвариантная плоскость характеризуется линейной комбинацией двух главных осей P и Q

$$C = aP + bQ, \quad (9.4.45)$$

так что получаем

$$\begin{aligned} |C|^2 &= (aP + bQ)(a\tilde{P} + b\tilde{Q}) = \\ &= ab(P\tilde{Q} + Q\tilde{P}) = ab. \end{aligned} \quad (9.4.46)$$

Те точки инвариантной плоскости, для которых множители a и b имеют одинаковые знаки, лежат внутри нуль-конуса (действительное пространство), а те, для которых знаки разные, лежат вне нуль-конуса (мнимое пространство). Случаи (а) и (б) взаимно исключают друг друга.

3. Имеется одна точка соприкосновения между этими двумя классами преобразований, приводящая к 4-параметрическому классу преобразований Лоренца¹. Преобразования этого класса получаются в том случае, когда два вектора P и Q непрерывным образом приближаются друг к другу при одновременном стремлении α к 1. Положим

$$\alpha = 1 + \varepsilon, \quad (9.4.47)$$

где ε — бесконечно малый параметр. Тогда кватернион (9.4.33) принимает вид

$$A = 1 + \varepsilon(P\tilde{Q} - Q\tilde{P}). \quad (9.4.48)$$

Положив

$$P = p(1 + i\mathbf{P}_0 + i\mu\mathbf{P}_1),$$

$$Q = p(1 + i\mathbf{P}_0 - i\mu\mathbf{P}_1),$$

$$|\mathbf{P}_0| = |\mathbf{P}_1| = 1, \quad \mathbf{P}_0 \perp \mathbf{P}_1, \quad (9.4.49)$$

¹ Автор благодарен профессору Дж. Л. Сингу, обратившему внимание автора на этот класс преобразований.

получим, пренебрегая величинами второго порядка малости относительно μ ,

$$P\tilde{Q} - Q\tilde{P} = 4\rho^2 i\mu (\mathbf{P}_1 + i\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1), \quad (9.4.50)$$

$$\cos \theta = 1 - \mu^2. \quad (9.4.51)$$

Учитывая условие (9.4.32), имеем

$$2\rho^2 = \frac{1}{\mu^2} \quad (9.4.52)$$

и потому

$$\varepsilon (P\tilde{Q} - Q\tilde{P}) = \frac{2\varepsilon}{\mu} i (\mathbf{P}_1 + i\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1). \quad (9.4.53)$$

Отношение $2\varepsilon/\mu$ двух бесконечно малых параметров может стремиться к любому конечному значению β . Поэтому результат наших вычислений можно представить в следующем виде. Комплексный кватернион A , который, согласно (9.4.21), производит преобразование Лоренца, превращается в

$$A = 1 + i\beta (\mathbf{P}_1 + i\mathbf{P}_2), \quad (9.4.54)$$

где

$$|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2| = 1, \quad \mathbf{P}_1 \perp \mathbf{P}_2.$$

Главными осями этого преобразования становятся $\mathbf{P}_2$ и $1 + i\mathbf{P}_0$, где

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2. \quad (9.4.55)$$

Хотя действительное собственное значение $\lambda = 1$ является четырехкратно вырожденным, мы получаем всего *две* главные оси, так как две нуль-оси P и Q совпадают; более того, первая ось C_1 из пары (9.4.43) также совпадает с P , так как $P^2 = 2\rho P$. Поэтому нуль-ось C_1 становится *трехкратно вырожденной осью*, в то время как C_2 в пределе стремится к 3-вектору $\mathbf{P}_2$.

Инвариантная плоскость, определяемая двумя векторами $\mathbf{P}_2$ и $1 + i\mathbf{P}_0$, полностью лежит вне нуль-конуса. Однако она касается его по линии $a(1 + i\mathbf{P}_0)$.

В качестве примера такого преобразования выберем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{i}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{k}, \\ A &= 1 + \beta i (\mathbf{j} + i\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Тогда

$$R' = (1 + \beta i j - \beta k) R (1 + \beta i j + \beta k),$$

или, после расписывания по координатам,

$$\begin{aligned} x'_1 &= (1 - 2\beta^2) x_1 + 2\beta x_2 + 2i\beta^2 x_4, \\ x'_2 &= -2\beta x_1 + x_2 + 2i\beta x_4, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 &= 2\beta^2 i x_1 - 2\beta i x_2 + (1 + 2\beta^2) x_4. \end{aligned}$$

Одна из главных осей $\mathbf{P}_2 = \mathbf{k}$ видна сразу. Можно также показать, что значения $x_1 = i$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = i$ дают вторую главную ось.

Бесконечно малые преобразования Лоренца. Выбор $\alpha = 1$ приводит к тождественному преобразованию. Выбрав α очень близким к единице, получим «бесконечно малое преобразование», соответствующее бесконечно малому повороту осей. Любой конечный поворот может рассматриваться как последовательность бесконечно малых поворотов.

Мы снова приходим к соотношению (9.4.48). Поскольку $P\tilde{Q} - Q\tilde{P}$ есть просто пространственный кватернион (с временной скалярной частью, равной нулю), можно положить

$$A = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon i (\mathbf{b} + i\mathbf{a}), \quad (9.4.56)$$

где два 3-вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ произвольны, а ε — действительный бесконечно малый параметр. Тогда

$$\begin{aligned} R' &= A R \tilde{A}^* = \\ &= \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon i (\mathbf{b} + i\mathbf{a}) \right] R \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon i (\mathbf{b} - i\mathbf{a}) \right] = \\ &= R - \frac{1}{2} \varepsilon (\mathbf{a}R - R\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \varepsilon i (\mathbf{b}R + R\mathbf{b}), \end{aligned} \quad (9.4.57)$$

или, в координатной форме,

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \varepsilon a_3 x_2 - \varepsilon a_2 x_3 + i\varepsilon b_1 x_4, \\ x'_2 &= -\varepsilon a_3 x_1 + x_2 + \varepsilon a_1 x_3 + i\varepsilon b_2 x_4, \\ x'_3 &= \varepsilon a_2 x_1 - \varepsilon a_1 x_2 + x_3 + i\varepsilon b_3 x_4, \\ x'_4 &= -i\varepsilon b_1 x_1 - i\varepsilon b_2 x_2 - i\varepsilon b_3 x_3 + x_4. \end{aligned} \quad (9.4.58)$$

5. Механика одной частицы. Вариационные принципы механики позволяют написать уравнения движения произвольной механической системы, если только задана одна фундаментальная величина — «функция Лагранжа» L . В ньютоновой механике пространство и время существуют обособленно, и время t служит при этом независимой переменной. В теории относительности это уже не так. Время теперь не более чем одна из координат, равноценная трем пространственным координатам. Физические события происходят в четырехмерном мире, который имеет определенную метрику. Согласно требованиям, вытекающим из этой метрики, в четырехмерном мире не должно существовать предпочтительного направления. Уравнения, приводящие к такому привилегированному направлению, противоречат принципу относительности и должны быть отброшены либо исправлены таким образом, чтобы в конечном счете они отразили надлежащую метрическую структуру физического мира.

Существование функции Лагранжа сильно облегчает эту задачу. Если функция Лагранжа L является истинным скаляром четырехмерного мира (т. е. величиной, инвариантной относительно произвольного преобразования Лоренца, или, иначе говоря, «лоренц-инвариантом»), то и полученные из этой функции уравнения будут корректными с релятивистской точки зрения — тоже будут «лоренц-инвариантами».

Мы уже знаем, как решаются динамические задачи в ньютоновой механике с помощью функции Лагранжа $L = T - V$ [см. (5.1.7)], где T — кинетическая, а V — потенциальная энергия системы. Ограничимся изучением одной частицы, характеризваемой массой и положением. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} mv^2, \quad (9.5.1)$$

ответственная за инерцию частицы, могла рассматриваться как истинный скаляр ньютонова мира. Однако в объединенном пространственно-временном мире она уже не является скаляром. Здесь движение частицы может быть изображено при помощи линии в четырехмерном пространстве, называемой «мировой линией». Ее линейный элемент задается выражением

$$\begin{aligned}\overline{ds^2} &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 = \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.\end{aligned}\quad (9.5.2)$$

В этом представлении скорость частицы определяется *касательной* к мировой линии. Эта касательная является вектором с четырьмя компонентами

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds}. \quad (9.5.3)$$

Связь этого вектора с нашими обычными представлениями станет ясной, если учесть необычайно большую величину скорости света по сравнению с обычными скоростями в ньютоновой механике. Линейный элемент (9.5.2) может быть записан в форме

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt. \quad (9.5.4)$$

Следовательно, замена ds на cdt приводит лишь к очень малой ошибке. В частности, с чрезвычайно высокой степенью точности можно положить

$$ds = c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) dt, \quad (9.5.5)$$

откуда

$$\int_{t_1}^{t_2} mc ds = \int_{t_1}^{t_2} mc^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} T dt. \quad (9.5.6)$$

Тот факт, что первый член в правой части выражения (9.5.6) не проявляется при обычных обстоятельствах (несмотря на огромную константу c^2), объясняется необычайно высокой стабильностью массы m . Если m — константа, то вариация первого члена равна нулю и может быть опущена.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что для получения релятивистски инвариантного интеграла действия кинетическую часть интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt \quad (9.5.7)$$

следует заменить на

$$-c \int_{t_1}^{t_2} m ds. \quad (9.5.8)$$

Из такой формы инертного члена в интеграле действия вытекает ряд важных следствий. Выберем время t в качестве независимой переменной, тогда функция Лагранжа L в интеграле действия (9.5.8) принимает вид

$$L = -c^2 m \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)}; \quad (9.5.9)$$

при этом координаты x, y, z рассматриваются как динамические переменные q_i . Из общих принципов вариационного метода в механике [см. (5.3.4)] известно, что «импульсы» механической системы могут быть определены как частные производные L по $\dot{q}_i$. Следовательно,

$$p_i = \frac{m \dot{q}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.5.10)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.5.11)$$

Таким образом, поправка к ньютонову определению импульса оказывается очень небольшой для малых скоростей. Вместе с тем она приобретает решающее значение при скоростях, близких к скорости света.

Следующей важной величиной является *энергия* системы. В соответствии с (5.3.12) она может быть определена при помощи функции Лагранжа L

$$E = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{q}_i - L. \quad (9.5.12)$$

В рассматриваемом случае имеем

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (9.5.13)$$

Этот знаменитый результат Эйнштейна представляет собой одно из наиболее важных открытий теоретической физики. В ньютоновой физике кинетическая энергия частицы фигурировала в виде $mv^2/2$; это означало, что масса приобретает энергию только при движении. Новое уравнение (9.5.13) ставит рядом с ньютоновым членом огромную величину mc^2 , демонстрируя тем самым, что масса является носителем громадного количества энергии, связанной лишь с фактом самого существования этой массы. По сравнению с ней обычная кинетическая энергия в большинстве случаев пренебрежимо мала. В связи с тем что различные формы энергии могут довольно легко переходить одна в другую, на горизонтах науки появилась возможность перевода и этой новой формы энергии в другие формы. Успех в деле создания атомной бомбы трагически подтвердил этот вывод теории относительности.

Поскольку $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, переход 1 г вещества в энергию приводит к выделению приблизительно $9 \cdot 10^{20}$ эрг энергии или $9 \cdot 10^{13}$ дж, или 25 млн. квт·ч, или 21500 млн. ккал.

Еще один важный вывод можно сделать с помощью канонического подинтегрального выражения [см. (6.4.3)], переписанного в математических координатах

$$\begin{aligned} p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz - H dt &= \\ &= \frac{p_1}{i} dx_1 + \frac{p_2}{i} dx_2 + \frac{p_3}{i} dx_3 - \frac{H}{c} dx_4 = \\ &= \sum_{i=1}^4 \bar{p}_i dx_i. \end{aligned} \quad (9.5.14)$$

Четыре компоненты 4-импульса должны иметь инвариантный характер, являясь компонентами некоторого 4-вектора. Действительно, из (9.5.11) и (9.5.13) получаем

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -mc \frac{dx_1}{ds}, \quad \bar{p}_2 = -mc \frac{dx_2}{ds}, \\ \bar{p}_3 &= -mc \frac{dx_3}{ds}, \quad \bar{p}_4 = -mc \frac{dx_4}{ds}, \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

откуда видно, что $\bar{p}_i$ — четырехмерный вектор (9.5.3), касательный к мировой линии частицы, но умноженный на постоянную $-mc$.

Мы видим, что два ньютоновых понятия: *импульса* и *энергии*, существовавшие в ньютоновой физике совершенно порознь, в релятивистской физике оказываются неразделимыми; *компоненты импульса* (деленные на i) *вместе с энергией* (деленной на c) являются компонентами 4-вектора в пространственно-временном мире Минковского.

В литературе по теории относительности часто уравнение (9.5.11) пишут в виде

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \quad (9.5.16)$$

и интерпретируют величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (9.5.17)$$

как «релятивистскую массу» частицы, изменяющуюся со скоростью и растущую до бесконечности при стремлении v к скорости света. Это полезно для демонстрации того факта, что конечная сила не может ускорить материальное тело до скорости света, потому что инертность тела бесконечно возрастает при приближении v к c . Однако в действительности наличие множителя в знаменателе связано с dt , потому что нам приходится дифференцировать по длине дуги s , имеющей инвариантный смысл, а не по переменной времени t , которая теперь не более чем одна из координат. Вместо длины дуги s можно ввести более физическую величину, определив понятие «собственного времени» частицы. Под этим подразумевается время, измеряемое часами, движущимися вместе с частицей, а потому связанными с ее мировой линией. Обозначив это собственное время через σ , имеем

$$ds = c d\sigma, \quad (9.5.18)$$

так как часы находятся в системе отсчета, в которой частица покоится. Отсюда получаем

$$\frac{cdx}{ds} = \frac{dx}{d\sigma} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt}. \quad (9.5.19)$$

Условимся определять скорость как быстроту изменения положения частицы, измеряемую с помощью собственного времени частицы. Тогда определение импульса (9.5.11) превратится в

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (9.5.20)$$

снова приняв вид ньютонова определения.

6. Гамильтонова формулировка динамики частицы. В предыдущем пункте мы использовали время t в качестве независимой переменной. Такой подход не в духе теории относительности, потому что время должно было бы входить на равных условиях по отношению к другим координатам. Это можно сделать, введя параметр τ и рассматривая четыре математические координаты $q_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) как функции τ . Мы следовали такому методу при изучении уравнений движения методом Гамильтона (см. гл. VI, п. 10).

В гамильтоновой форме динамики основной является уже не функция Лагранжа L , а функция Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (9.6.1)$$

[см. (6.2.3)], записанная через q_i и p_i . В рассматриваемой сейчас задаче

$$L = -mc \frac{ds}{d\tau} = -mc \sqrt{\sum_{i=1}^4 \dot{q}_i^2}. \quad (9.6.2)$$

Следовательно,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -mc \frac{\dot{q}_i}{\sqrt{\sum \dot{q}_i^2}} = -mc \frac{dq_i}{ds} \quad (9.6.3)$$

и

$$H = \sum_{i=1}^4 p_i \dot{q}_i - L = -mc \sum_{i=1}^4 \frac{dq_i^2}{ds d\tau} + mc \frac{ds}{d\tau} = 0. \quad (9.6.4)$$

Таким образом, мы столкнулись с той же самой ситуацией, какая встретилась раньше в (6.10.5). Хотя в каноническую функцию Лагранжа входит H

$$L = \sum_{i=1}^4 p_i \dot{q}_i - H, \quad (9.6.5)$$

а H обращается в нашем случае в нуль, это не должно нас смущать, так как роль функции Гамильтона берет на себя *тождество*, которое должно существовать между p_i . Действительно, из выражения (9.6.3) видно, что $\dot{q}_i$ нельзя выразить через p_i ввиду тождества

$$\sum_{i=1}^4 p_i^2 - m^2 c^2 = 0, \quad (9.6.6)$$

которое следует рассматривать как *дополнительное условие* в нашей вариационной задаче. Мы должны, таким образом, минимизировать канонический интеграл

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^4 p_i \dot{q}_i d\tau \quad (9.6.7)$$

при дополнительном условии (9.6.6). Это означает, что результирующей функцией L становится

$$L' = \sum_{i=1}^4 p_i \dot{q}_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^4 p_i^2 - m^2 c^2 \right). \quad (9.6.8)$$

Появление неопределенного множителя λ связано со свободой выбора параметра τ . Можно нормировать λ на 1, что естественно приведет параметр τ к какой-то определенной величине. Существенное отличие от обычной формы динамики имеется лишь в том, что суммирование идет по *четырем*, а не по трем координатам.

7. Потенциальная энергия. Вернемся к функции Лагранжа ньютоновой физики: $L = T - V$. Мы уже знаем, как нужно модифицировать кинетическую энергию T , чтобы привести ее в соответствие с принципами теории относительности. Рассмотрим теперь вариационный интеграл, связанный с потенциальной энергией V .

$$A = - \int_{t_1}^{t_2} V dt. \quad (9.7.1)$$

Считая V заданным скаляром четырехмерного мира

$$V = V(x_1, \dots, x_4), \quad (9.7.2)$$

нужно модифицировать интеграл (9.7.1), придав ему четырехмерный характер. Это можно сделать, заменив dt дифференциалом «собственного времени» $d\sigma$. Тогда получим модифицированный интеграл действия в форме

$$- \int_{t_1}^{t_2} V \frac{ds}{c}, \quad (9.7.3)$$

а полный интеграл действия, включающий и кинетическую, и потенциальную энергию, примет вид

$$A = - \int_{t_1}^{t_2} \left(mc + \frac{V}{c} \right) ds = - c \int_{t_1}^{t_2} \left(m + \frac{V}{c^2} \right) ds. \quad (9.7.4)$$

Отсюда видно, что наличие скаляра потенциальной энергии эквивалентно *увеличению массы частицы* на величину V/c^2 . Заводя свои часы и увеличивая тем самым их потенциальную энергию, мы изменяем массу часов. Когда какие-нибудь химические вещества изменяют свою конфигурацию, переходя в состояние с меньшей потенциальной энергией и выделяя при этом определенное количество химической энергии в виде тепла, масса нового вещества меньше, чем масса, которая была раньше. Однако из-за стоящего в знаменателе множителя c^2 эти изменения массы столь малы, что их невозможно наблюдать.

Совсем иная ситуация в ядерной физике, где процессы деления и рекомбинации могут привести к весьма эффективным событиям ввиду огромного числа участвующих атомов. Масса ядра атома водорода (протона) равна 1,008146 атомных единиц, если масса атома кислорода принимается равной 16. Масса нейтрона — 1,00897, а масса атома гелия — 4,003879. При крайне высоких температурах в присутствии нейтронов (и углерода) водород может превращаться в гелий, потому что ядро атома гелия представляет собой комбинацию двух протонов и двух нейтронов. Однако масса образующегося ядра на 0,03136 меньше массы исходных частиц, что составляет примерно 1% массы. Соответствующая энергия выделяется в виде тепла, что и лежит в основе разрушительного эффекта водородной бомбы.

8. Релятивистская формулировка ньютоновой скалярной теории гравитации. Выпишем лагранжевы уравнения, связанные с принципом действия (9.7.4). Сделаем все четыре переменные $q_i = x_i$ равноправными, вводя в качестве независимой переменной параметр τ и рассматривая q_i как функции τ . Тогда

$$-L = \left(m + \frac{V}{c^2}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^4 \dot{q}_i^2}. \quad (9.8.1)$$

и из уравнений Лагранжа (5.2.1) получим

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{V}{c^2}\right) \frac{dq_i}{d\tau} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial q_i} \sqrt{\sum_{i=1}^4 \dot{q}_i^2}, \quad (9.8.2)$$

что может быть записано в виде

$$c \frac{d}{ds} \left[\left(m + \frac{V}{c^2}\right) c \frac{dq_i}{ds} \right] = \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (9.8.3)$$

или

$$\frac{d}{ds} \left[\left(m + \frac{V}{c^2}\right) \frac{dq_i}{ds} \right] = \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (9.8.4)$$

Помимо перехода от операции d/dt ньютоновой физики к инвариантной операции $d/d\sigma$ имеется лишь небольшая поправка, заключающаяся в замене m на $m + V/c^2$. Правда, в ньютоновой физике правая часть уравнения имеет отрицательный знак, поскольку $L = T - V$. Однако это различие объясняется тем, что мы в качестве координат q_1, q_2, q_3 используем не ньютоновы x, y, z , а ix, iy, iz . Если ввести обычные координаты, то правая часть окажется умноженной на -1 .

Дав индексу i значение 4, мы получим одно дополнительное уравнение, *выражающее закон сохранения энергии*. Предположим, что V не зависит от t (а следовательно, и от x_4 ; другими словами, мы предполагаем, что внешнее поле статическое). Тогда четвертое уравнение дает

$$\frac{mc^2 + V}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const}. \quad (9.8.5)$$

что с точностью до величин второго порядка относительно v/c совпадает с законом сохранения энергии в ньютоновой механике

$$\frac{1}{2} m v^2 + V = \text{const.} \quad (9.8.6)$$

Эту же задачу можно решить методом Гамильтона. Для этого используем наш прежний результат, связанный с принципом Якоби (см. гл. 6, п. 10). Формально принцип эквивалентен принципу действия (9.7.4), следует лишь заменить $\sqrt{2(E - V)}$ на $m + V/c^2$. Отсюда получаем функцию Лагранжа в каноническом виде

$$L = \sum_{i=1}^4 p_i \dot{q}_i - H, \quad (9.8.7)$$

где дифференцирование подразумевается по параметру τ , а функция Гамильтона H задана в виде

$$H = \frac{\sum_{i=1}^4 p_i^2}{\left(m + \frac{V}{c^2}\right)^2} \quad (9.8.8)$$

с добавочным условием, что для реального движения энергетическая постоянная в выражении $H = \text{const}$ должна быть выбрана равной единице.

Ньютон объяснил орбиты планет при помощи скалярной функции поля, «гравитационного потенциала». В ранних работах по теории относительности Пуанкаре (1905), а позже Минковский (1908) попытались модифицировать теорию Ньютона, приведя ее в соответствие с четырехмерной структурой мира. В результате они заменили ньютоновы уравнения движения системой (9.8.4). Эти попытки оказались ненужными в связи с появлением в 1916 г. общей теории относительности Эйнштейна, с необычайной убедительностью показавшей, что задача о гравитации требует гораздо более радикальной ревизии наших традиционных представлений (см. ниже, п. 11).

9. Движение заряженной частицы. Предположим, что скалярная функция V заменена векторной функцией A_i , называемой «векторным потенциалом». В соответствии

с требованиями теории относительности следует предположить, что вектор A_i имеет *четыре* компоненты (при использовании математических координат пространственные компоненты должны быть чисто мнимыми). Он является, таким образом, 4-вектором пространственно-временного мира. Рассмотрим этот вектор как некое поле, заданное в виде функции четырех координат $q_i = x_i$. Образовав скалярное произведение этого вектора на 4-вектор скорости, получим истинный скаляр в пространстве Минковского. Соответственно заменим потенциальную энергию инвариантом

$$\frac{e}{c} \sum_{i=1}^4 A_i \frac{dx_i}{ds}, \quad (9.9.1)$$

где константа e — электрический заряд частицы. Запишем теперь инвариантный интеграл действия (опустив из соображений удобства знак минус)

$$A = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(mc + \frac{e}{c} \sum_{i=1}^4 A_i \frac{dq_i}{ds} \right) ds. \quad (9.9.2)$$

При этом мы, как и раньше, желая сохранить равноправие координат q_i , пользуемся в качестве независимой переменной некоторым параметром τ . В результате функция Лагранжа принимает вид •

$$L = mc \sqrt{\sum_{i=1}^4 \dot{q}_i^2} + \frac{e}{c} \sum_{i=1}^4 A_i \dot{q}_i. \quad (9.9.3)$$

Записывая четыре компоненты импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = mc \frac{dq_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i, \quad (9.9.4)$$

получаем уравнения движения в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau} \left[mc \frac{dq_i}{ds} + \frac{e}{c} A_i \right] = \frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_\alpha}{d\tau}, \quad (9.9.5)$$

где две константы e и m — соответственно заряд и масса частицы. Умножив обе части уравнения на $d\tau/ds$, получим равноценную форму записи

$$m \frac{d^2 q_i}{d\sigma^2} + \frac{e}{c} \frac{dA_i}{d\sigma} = \frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_\alpha}{d\sigma}. \quad (9.9.6)$$

Перенесем второй член из левой в правую часть и, воспользовавшись соотношением

$$\frac{dA_i}{d\sigma} = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{d\sigma}, \quad (9.9.7)$$

объединим правую часть в один член

$$\frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^4 F_{i\alpha} \frac{dq_\alpha}{d\sigma}, \quad (9.9.8)$$

где

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} = F_{lk}. \quad (9.9.9)$$

Шесть величин $F_{ik} = -F_{ki}$ являются компонентами некоторого антисимметричного «тензора».

Следует помнить, что компоненты A_1, A_2, A_3 являются чисто мнимыми, как и координаты $q_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$). Поэтому все F_{ik} с $i, k = 1, 2, 3$ — действительные, а три компоненты F_{i4} ($i = 1, 2, 3$) — чисто мнимые. Соотношения между F_{ik} и обычными величинами электромагнитного поля оказываются следующими:

$$\begin{aligned} F_{14} = iE_1, \quad F_{24} = iE_2, \quad F_{34} = iE_3, \\ F_{23} = H_1, \quad F_{31} = H_2, \quad F_{12} = H_3, \end{aligned} \quad (9.9.10)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — обычные векторы напряженности электрического и магнитного полей.

Для того чтобы придать уравнениям (9.9.6) обычный вид, снова выберем время t в качестве независимой переменной. Для этого умножим обе части уравнений на $d\sigma/dt$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^4 F_{i\alpha} \frac{dx_\alpha}{dt}. \quad (9.9.11)$$

Левая часть может быть выражена с помощью понятий ньютоновой физики. Если ограничиться первыми тремя уравнениями ($i=1,2,3$), причем разделить обе части каждого из них на i , то левые части превратятся в «скорость изменения импульса» частицы, где «импульс» определяется согласно (9.5.11). Тогда правые части оказываются «движущей силой», потому что уравнение Ньютона, из которого мы исходим, гласит, что «скорость изменения импульса равна движущей силе»

$$\frac{dp}{dt} = F. \quad (9.9.12)$$

Здесь F — 3-вектор, записываемый в привычных символах обычного векторного исчисления

$$F = e \left(E + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (9.9.13)$$

Эта сила, называемая «силой Лоренца», действует на заряженную частицу. Последнее уравнение ($i=4$) снова выражает закон сохранения энергии в форме: «скорость изменения кинетической энергии равна работе движущей силы» [кинетическая энергия при этом подразумевается в релятивистской форме (9.5.13)].

При последовательном релятивистском изложении мы должны были бы оперировать лишь с величинами, имеющими четырехмерный характер. Поэтому умножим обе части уравнений (9.9.11) на dt/ds и запишем

$$mc \frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^4 F_{i\alpha} \frac{dx_{\alpha}}{ds}, \quad (9.9.14)$$

где четыре компоненты 4-скорости связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = 1. \quad (9.9.15)$$

Совместность этого условия с уравнениями движения (9.9.14) легко усмотреть, если умножить эти уравнения на dx_i/ds и составить сумму. Справа получится нуль из-за антисимметричности $F_{ik} = -F_{ki}$. Слева же будем иметь

$$\frac{1}{2} mc \frac{d}{ds} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = 0.$$

Это и означает, что величина (9.9.15) остается при движении постоянной.

Уравнения (9.9.14) допускают интересную геометрическую интерпретацию. В гл. VII, п. 8, показано, что движение фазовой жидкости можно рассматривать как непрерывное выполнение *бесконечно малых канонических преобразований*. Сосредоточим внимание на векторе скорости

$$\frac{dx_i}{ds} = u_i \quad (9.9.16)$$

и запишем уравнения (9.9.14) в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_i(s+\varepsilon) - u_i(s)}{\varepsilon} = \frac{e}{mc^2} \sum_{\alpha=1}^4 F_{i\alpha} u_{\alpha}, \quad (9.9.17)$$

$$u_i(s+\varepsilon) = u_i(s) + \frac{e}{mc^2} \varepsilon \sum_{\alpha=1}^4 F_{i\alpha}(s) u_{\alpha}(s). \quad (9.9.18)$$

Расписав подробно эти четыре уравнения, мы увидим, что они полностью совпадают с уравнениями (9.4.58), задающими *бесконечно малое преобразование Лоренца*. При этом электрический вектор **E** играет роль **a**, а магнитный вектор **H** — роль **b**. Следовательно, движение вектора скорости электрона во внешнем электромагнитном поле можно рассматривать как *непрерывную последовательность бесконечно малых преобразований Лоренца*, причём компоненты этого преобразования задаются электромагнитным тензором F_{ik} .

Интересным предельным случаем является движение электрона в поле *плоской волны*. Здесь $E=H$ и $E \perp H$. Мы имеем здесь физическую реализацию того частного четырехпараметрического класса преобразований Лоренца, который разбирался раньше [см. (9.4.47—9.4.55)], когда все четыре собственных значения совпадали и три главные оси сливались в одну, лежащую на нуль-конусе.

Эта трехкратная ось задается выражением

$$1 + i \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{|\mathbf{E}|^2},$$

в то время как другая ось (лежащая вне конуса) совпадает с направлением вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$.

Рассмотрим теперь ту же самую задачу о движении методом Гамильтона. Поскольку функция Лагранжа (9.9.3) — снова однородная форма первого порядка относительно $\dot{q}_i$, из теоремы Эйлера (6.10.4) следует, что $H = 0$. Таким образом, p_i должны быть связаны тождеством, которое используется в качестве дополнительного условия и занимает место функции Гамильтона.

Четыре уравнения (9.9.4) сразу дают

$$\sum_{i=1}^4 \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 = m^2 c^2, \quad (9.9.19)$$

и совершенно аналогично (9.6.8) получим

$$L' = \sum_{i=1}^4 p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^4 \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2. \quad (9.9.20)$$

Здесь λ выбрано равным 1, что попросту означает нормировку переменной τ , по которой берутся производные. Последний член эквивалентен функции Гамильтона

$$H = \sum_{i=1}^4 \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2. \quad (9.9.21)$$

Кажется удивительным, что при этом никуда вообще не вошла масса частицы m . Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= 2 \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right), \\ \dot{p}_i &= 2 \frac{e}{c} \sum_{\alpha=1}^4 \left(p_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha \right) \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (9.9.22)$$

и можно проверить, что они эквивалентны (9.9.14), если только в последних заменить множитель mc в левой части на $1/2$, а $d\tau$ заменить на ds .

Умножим теперь обе части уравнений (9.9.14) на $\dot{q}_i$ и образуем сумму. Правые части дадут нуль вследствие антисимметричности тензора F_{ik} . Следовательно,

$$\sum_{i=1}^4 \dot{q}_i \ddot{q}_i = 0. \quad (9.9.23)$$

Это означает, что

$$\sum_{i=1}^4 \dot{q}_i^2 = \text{const.} \quad (9.9.24)$$

Из дополнительного условия (9.9.19) следует, что

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \dot{q}_i^2 = m^2 c^2, \quad (9.9.25)$$

в то время как

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{dq_i}{ds} \right)^2 = 1. \quad (9.9.26)$$

Из сравнения двух последних тождеств видно, что наш — прежде неопределенный — параметр τ теперь оказывается равным

$$\tau = \frac{s}{2mc}, \quad (9.9.27)$$

так что прежние уравнения (9.9.14) восстановлены теперь полностью.

10. Геодезические линии в четырехмерном мире. Движение частицы, свободной от действия внешних сил, можно описать с помощью принципа действия

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{ds} = 0. \quad (9.10.1)$$

Этот принцип сходен с принципом Якоби (5.6.12), если только в последнем опустить член с потенциальной энергией V . Кроме того, $\bar{ds}$ — это уже не линейный элемент трехмерного пространства, а элемент (9.3.8) четырехмерного пространства Минковского. Предположим, что с помощью некоторого точечного преобразования мы переходим от прямоугольных к произвольным *криволинейным* координатам. Тогда тот же самый линейный элемент $\bar{ds}$ примет форму (1.5.16), с суммированием от 1 до 4

$$\overline{ds} = \sqrt{\sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dq_i dq_k}. \quad (9.10.2)$$

Если интересоваться тем, как свободная частица будет двигаться в криволинейной системе отсчета, то приходится решать вариационную задачу с функцией Лагранжа

$$L = \sqrt{\sum_{i,k=1}^4 g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k}, \quad (9.10.3)$$

где дифференцирование производится по некоторому параметру τ .

Снова перейдем к задаче Гамильтона, как это было уже сделано раньше в гл. VI, п. 10. Функция Гамильтона обращается в нуль, потому что опять L — однородная форма первого порядка относительно $\dot{q}_i$. Кроме того, p_i удовлетворяет тождеству [см. (6.10.27)]

$$\sum_{i,k=1}^4 g^{ik} p_i p_k = 1, \quad (9.10.4)$$

где обозначение g^{ik} относится к элементам матрицы, *обратной* первоначальной матрице с элементами g_{ik} . Следовательно, практически функцией Гамильтона нашей задачи является выражение

$$H = \sum_{i,k=1}^4 g^{ik} p_i p_k, \quad (9.10.5)$$

где g^{ik} — в общем случае какие-то заданные функции переменных $q_1, \dots, q_4$, а значение постоянной в равенстве $H = \text{const}$ следует приравнять 1.

Уравнения движения, имеющие также смысл уравнений прямых линий в пространстве Минковского, принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= 2 \sum_{\alpha=1}^4 g^{i\alpha} p_\alpha, \\ \dot{p}_i &= - \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial q_i} p_\alpha p_\beta. \end{aligned} \quad (9.10.6)$$

11. Орбиты планет в теории тяготения Эйнштейна. Обдумывая тот удивительный и вместе с тем, по-видимому,

основополагающий факт, что *всякая инертная масса является одновременно и тяжелой массой*, а потому источником гравитационной силы, Эйнштейн пришел к выводу, что скорость света не может быть постоянной при наличии гравитационного поля. Поскольку линейный элемент Минковского непосредственно приводит к инвариантности светового конуса (9.3.11), вывод Эйнштейна требует замены этого линейного элемента более общим линейным элементом, учитывающим наличие гравитации. С беспрецедентной дерзостью математического воображения, имевшей тем не менее глубокие корни в среде наблюдаемых физических явлений, Эйнштейн ввел в физику мира геометрию Римана. Исходя из геометрии пространств с кривизной, он показал, что не только пространство и время объединяются в одно целое (что было уже показано Минковским на основе квазиевклидова четырехмерного линейного элемента), но что одним геометрическим целым становятся *пространство, время и материя*, причем «материя» в этой картине связывается с кривизной четырехмерного мира.

Изучение идей общей теории относительности выходит за рамки динамики частицы, однако мы обсудим фундаментальный результат Эйнштейна, отказавшегося от понятия о «силе тяжести» как о какой-то отдельной силе, и объяснившего движение планет как чисто *геодезическое* явление, т. е. как движение частицы, на которую не действуют никакие силы, в четырехмерном пространстве с римановой структурой.

Теория Эйнштейна обобщает гравитационный потенциал Ньютона, заменяя его системой десяти величин, определяющих поле и являющихся компонентами $g_{ik} = g_{ki}$ четырехмерного риманова линейного элемента. Обобщением скалярного потенциального уравнения Ньютона явились «Эйнштейновы уравнения поля», позволяющие получить, например, гравитационное поле Солнца в предположении, что это поле *сферически симметрично*. Результат вычисления получается в форме «линейного элемента Шварцшильда», который в сферических координатах имеет вид

$$\overline{ds}^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dx_4^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (9.11.1)$$

Случай $\alpha = 0$ соответствует «плоскому» линейному элементу Минковского (9.5.2), записанному в сферических координатах.

Таким образом, задача о движении планет под действием притяжения центрального тела становится эквивалентной вычислению геодезической линии в римановом пространстве с линейным элементом (9.11.1). Это снова предполагает решение задачи динамики с функцией Гамильтона (9.10.5), которая в этом случае имеет вид

$$H = \frac{p_4^2}{1 - \frac{z}{r}} - \left(1 - \frac{z}{r}\right) p_1^2 - \frac{1}{r^2} \left(p_2^2 + \frac{p_3^2}{\sin^2 \theta}\right). \quad (9.11.2)$$

В действительности мы заранее знаем, что вследствие сферической симметрии эта задача сводится к движению в плоскости $\varphi = \pi/2$. Поэтому достаточно рассмотреть задачу Гамильтона лишь для *трех* пар канонических переменных с функцией Гамильтона

$$H = \frac{p_4^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) p_1^2 - \frac{p_2^2}{r^2}. \quad (9.11.3)$$

Далее используем то, что θ и x_4 не входят в функцию Гамильтона явно. Следовательно, они являются циклическими координатами и заранее смогут быть исключены

$$\begin{aligned} p_2 &= \text{const} = -A, \\ p_4 &= \text{const} = BA. \end{aligned} \quad (9.11.4)$$

Это сводит H к

$$H = \frac{B^2 A^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) p_1^2 - \frac{A^2}{r^2}. \quad (9.11.5)$$

Для нас наиболее интересным является не процесс протекания движения во времени, а *геометрические орбиты*, по которым планеты вращаются вокруг Солнца; другими словами, нас интересует *связь между r и θ* . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = -2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) p_1, \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{2A}{r^2} \end{aligned} \quad (9.11.6)$$

и потому

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{A} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) p_1. \quad (9.11.7)$$

Вместе с теоремой о сохранении энергии,

$$H = 1, \quad (9.11.8)$$

это сразу позволяет выразить p_1 в виде функции r . Определение орбит свелось таким образом к одной квадратуре

$$d\theta = \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r}}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{A^2} - \frac{1}{r^2} + B^2/(1 - \alpha/r)}} \quad (9.11.9)$$

(знак перед квадратным корнем при вычислении p_1 выбран так, чтобы увеличение значений r приводило к увеличению значений θ); или, после введения в качестве переменной величины, обратной радиусу $r^{-1} = \rho$, имеем

$$\theta = - \int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \alpha\rho} \sqrt{-1/A^2 - \rho^2 + B^2/(1 - \alpha\rho)}}. \quad (9.11.10)$$

Поскольку знаменатель оказывается квадратным корнем из кубического многочлена по ρ , интегрирование приводит к эллиптическому интегралу. Однако истинное значение α в солнечной системе столь мало, что $(1 - \alpha\rho)^{-1}$ можно разложить в ряд по степеням $\alpha\rho$ и пренебречь членами третьего порядка, которые очень малы. Поэтому последний член в знаменателе заменяется на

$$B^2(1 + \alpha\rho + \alpha^2\rho^2), \quad (9.11.11)$$

а $(1 - \alpha\rho)^{-1/2}$ — соответственно на $1 + \frac{1}{2}\alpha\rho$, поскольку следующий член дает уже совершенно ненаблюдаемый вклад. В результате получаем интеграл

$$\theta = - \int \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\alpha\rho\right) d\rho}{\sqrt{-(A^{-2} - B^2) + \alpha B^2\rho - (1 - B^2\alpha^2)\rho^2}}, \quad (9.11.12)$$

который интегрируется в элементарных функциях. Квадратичную функцию в знаменателе можно разложить на множители

$$- (1 - B^2 \alpha^2) (\rho - \rho_1) (\rho - \rho_2), \quad (9.11.13)$$

где ρ_1 и ρ_2 определяются условиями

$$1 - \frac{\alpha B^2}{\alpha^2 B^2} = \rho_1 + \rho_2, \quad (9.11.14)$$

$$\frac{1}{A^2} - B^2 = \rho_1 \rho_2. \quad (9.11.15)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) = \rho_0, \quad \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) = b \quad (9.11.16)$$

и положить

$$\rho = \rho_0 + t, \quad (9.11.17)$$

то знаменатель превращается в

$$\sqrt{1 - B^2 \alpha^2} \sqrt{b^2 - t^2}, \quad (9.11.18)$$

а числитель -- в

$$1 + \frac{1}{2} \alpha \rho_0 + \frac{1}{2} \alpha t. \quad (9.11.19)$$

Окончательно получаем подинтегральную функцию

$$\frac{1 + \frac{1}{2} \alpha \rho_0}{\sqrt{1 - B^2 \alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{b^2 - t^2}} + \frac{\alpha}{2 \sqrt{1 - B^2 \alpha^2}} \frac{t}{\sqrt{b^2 - t^2}}. \quad (9.11.20)$$

Это выражение интегрируется в элементарных функциях. Величина αB^2 , согласно (9.11.14), практически равна $\rho_1 + \rho_2$, так что

$$\alpha^2 B^2 = 2\alpha \rho_0. \quad (9.11.21)$$

Поэтому постоянный множитель перед первым членом в (9.11.20) можно заменить на $1 + \frac{3}{2} \rho_0 \alpha$. Интегрирование этого члена дает

$$\theta = \left(1 + \frac{3}{2} \rho_0 \alpha\right) \arccos \frac{t}{b}. \quad (9.11.22)$$

Возвращаясь к исходному переменному r , получаем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + b \cos \frac{\theta}{1 + \frac{3}{2} \rho_0 \alpha}, \quad (9.11.23)$$

а это — *фокальное уравнение эллипса* с небольшой поправкой, приводящей к медленной *прецессии* эллипса в его собственной плоскости. Изменение угла от одного минимума r перигелия) до следующего равно не 2π , а

$$2\pi + 3\pi\alpha. \quad (9.11.24)$$

Интегрирование второго члена в (9.11.20) дает малое *периодическое* возмущение орбиты (слишком малое для того, чтобы его можно было наблюдать). Оно не накапливается, в то время как смещение перигелия происходит на *каждом* обороте, так что после сотен витков оно достигает измеримой величины.

Для получения численной величины α следует воспользоваться феноменологической теорией Пуанкаре — Минковского, упоминавшейся ранее в п. 8. Эта теория основана на специальной теории относительности. Она приспособила ньютоновы уравнения движения планет к требованиям этой теории с тем условием, чтобы в предельном случае малых скоростей получить старые результаты. Функция Гамильтона в этой теории имеет вид (9.8.8). В сферических координатах для $\varphi = \text{const} = \frac{1}{2} \pi$ имеем

$$H = \frac{p_1^2}{(m + V/c)^2} - \frac{1}{(m + V/c)^2} \left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} \right)^2, \quad (9.11.25)$$

где V — потенциальная энергия гравитационного поля Солнца (см. задачу 2 в гл. V, п. 2). Из сравнения гамильтониана (9.11.25) с функцией Гамильтона (9.11.3) теории Эйнштейна видно, что согласие для малых скоростей получается при выборе $m = 1$. Если при этом пренебречь величинами второго порядка, то знаменатель первого члена принимает вид

$$1 - \frac{2fM}{c^2 r}, \quad (9.11.26)$$

где f — гравитационная постоянная, а M — масса Солнца. Следовательно, в качестве постоянной интегрирования в линейном элементе Шварцшильда (9.11.1) следует взять величину

$$\alpha = \frac{2fM}{c^2}. \quad (9.11.27)$$

Численное значение отношения $2f/c^2$ очень мало

$$\frac{2f}{c^2} = 1,481 \cdot 10^{-28} \text{ см/г.} \quad (9.11.28)$$

Умножив эту величину на массу Солнца, получим расстояние, называемое «гравитационным радиусом» Солнца и равное

$$\alpha = 2,94 \cdot 10^5 \text{ см.} \quad (9.11.29)$$

Эта величина очень мала по сравнению с расстояниями до планет. Поэтому разложение в ряд по α/r было вполне законным.

Для Меркурия, ближайшей к Солнцу планеты, вековой эффект движения перигелия уже ясно выражен. Если a — большая полуось орбиты, а ε — ее эксцентриситет, то

$$\rho_0 = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} \quad (9.11.30)$$

и смещение перигелия на каждом витке равно в соответствии с (9.11.24)

$$\eta = \frac{6\pi f M}{(1-\varepsilon^2)a}. \quad (9.11.31)$$

Этот знаменитый результат Эйнштейна оказался в полном согласии с величиной наблюдавшейся прецессии перигелия Меркурия (смещение за столетие: вычисленное — $43,03 \pm 0,03 \text{ сек}$, измеренное — $42,56 \pm 0,94 \text{ сек}$)¹.

Следует заметить, что эффект прецессии дает возможность проверить правильность теоретического выражения для g_{44} в первом и во втором приближении, а выражения для g_{11} — в первом приближении.

12. Гравитационное искривление световых лучей. Распространение световых лучей тоже можно рассматривать как задачу динамики, так как их следует представлять себе в виде прямых линий, лежащих на нуль-конусе. Они являются, таким образом, геодезическими линиями нулевой длины. Ясно, что в формулировке принципа о геодезической линии функцию Лагранжа (9.10.3) можно умножить на константу m . При этом в правой части (9.10.4) вместо 1 будет стоять m^2 . По мере уменьшения m частицы будут все

¹ Смещение G. M., *Revs. Mod. Phys.*, 19 (1947), 361.

сильнее приближаться к световому конусу и в пределе при $m = 0$ будут двигаться непосредственно по световому конусу. В этом случае постоянная функция Гамильтона обращается в нуль.

Для того чтобы применить наши предыдущие рассуждения к случаю нулевых геодезических линий, тождество $H = 1$ следует заменить на $H = 0$. На формуле (9.11.10) это скажется лишь в том, что из знаменателя исчезнет постоянная $-A^{-2}$. В результате получим

$$\theta = - \int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\alpha\rho} \sqrt{B^2/(1-\alpha\rho) - \rho^2}}. \quad (9.12.1)$$

Пренебрежем сначала членами с α . Тогда интегрирование даст

$$\theta = \arccos \frac{\rho}{B}$$

или

$$\frac{1}{r} = B \cos \theta,$$

что означает

$$r \cos \theta = \frac{1}{B}. \quad (9.12.2)$$

Получилось уравнение *прямой линии* в полярных координатах, где B — величина, обратная наименьшему расстоянию r_0 , на котором луч света проходит мимо Солнца,

$$B = \frac{1}{r_0}. \quad (9.12.3)$$

Если теперь знаменатель выражения (9.12.1) разложить в ряд по степеням $\alpha\rho$, то члены второго порядка окажутся пренебрежимо малыми, так что достаточно проинтегрировать простое выражение

$$\theta = - \int \frac{1 + \frac{1}{2} \alpha \rho}{\sqrt{B^2 + \alpha B^2 \rho - \rho^2}} d\rho. \quad (9.12.4)$$

Положим теперь

$$\rho - \frac{1}{2} \alpha B^2 = \xi. \quad (9.12.5)$$

В новых переменных, пренебрегая членами второго порядка по α , получаем

$$\theta = - \int \frac{1 + \frac{1}{2} \alpha \xi}{\sqrt{B^2 - \xi^2}} d\xi, \quad (9.12.6)$$

пткуда

$$\theta = \arccos \frac{\xi}{B} + \frac{1}{2} \alpha \sqrt{B^2 - \rho^2}. \quad (9.12.7)$$

Устремим теперь r к пределу $r = \infty$. Тогда ρ обратится в нуль и, следовательно,

$$\frac{\xi}{B} = -\frac{1}{2} \alpha B = -\frac{\alpha}{2r_0}. \quad (9.12.8)$$

Нам нужно найти угол, косинус которого немного меньше нуля, а потому угол несколько больше $\pi/2$. С достаточной точностью имеем

$$\theta = \frac{1}{2} \pi + \frac{\alpha}{2r_0}. \quad (9.12.9)$$

Отклонение направлено в сторону Солнца и соответствует движению по очень крутой гиперболе. Угол отклонения равен

$$\eta = \frac{\alpha}{2r_0} = \frac{fM}{c^2 r_0}. \quad (9.12.10)$$

Это соответствует отклонению светового луча под действием силы тяжести в элементарной ньютоновой схеме. Отклонение светового луча было предсказано Эйнштейном на основе «принципа эквивалентности». Этот принцип, бывший руководящей идеей ранних работ Эйнштейна, помог ему осознать, что линейный элемент Минковского не может сохраниться при наличии гравитации. Как видно из наших выкладок, отклонение порождается членом линейного элемента, содержащим dx_4^2 , т. е. компонентой g_{44} .

Из второго члена в правой части (9.12.7) видно, что компонента g_{11} вызывает добавочное отклонение луча, величина которого тоже равна $\alpha/2r_0$. Поэтому результирующее отклонение оказывается *вдвое больше* полученного раньше

$$\eta = \frac{z}{r_0} = \frac{2fM}{c^2 r_0}. \quad (9.12.11)$$

Таким образом, временная часть линейного элемента и часть, обусловленная неевклидовостью пространства, вносят *одинаковый* вклад в величину отклонения луча света, проходящего вблизи солнечного диска. Полное отклонение видимого положения звезды вдвое больше полученной величины, так как отклонение осуществляется симметричным образом по обе стороны от Солнца. Полное отклонение луча

$$\delta = 2\eta = \frac{4fM}{c^2 r_0}. \quad (9.12.12)$$

Для светового луча, проходящего мимо солнечного диска,

$$\delta = 1,75''. \quad (9.12.13)$$

Астрономические наблюдения, производимые при более или менее благоприятных условиях во время довольно редко бывающих полных солнечных затмений, ясно показывают существование отклонения световых лучей на приблизительно правильную величину. Согласие теории с экспериментом не хуже, чем можно было бы в этих условиях ожидать.

13. Гравитационное красное смещение спектральных линий. В п. 2 мы обсуждали теорию эффекта Доплера. Этот эффект появляется из-за того, что два наблюдателя, движущиеся один относительно другого и измеряющие каждый своими собственными часами время между двумя световыми сигналами, получают различные результаты. Если время, измеренное наблюдателями, равно t и t' , то эффект Доплера, выраженный в частотах, составляет

$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{t'}{t}. \quad (9.13.1)$$

Рассмотрим теперь два световых сигнала, посланных с Солнца и принятых на Земле. Ввиду статического характера солнечного гравитационного поля (g_{ik} не зависит от x_4) определенное Δx_4 , зафиксированное на Солнце, сохранится и при приходе сигналов на Землю. Однако *собственное время*, измеренное часами на Солнце и на Земле, окажется разным

$$t = \sqrt{g_{44}} \Delta x_4, \quad t' = \sqrt{g'_{44}} \Delta x_4, \quad (9.13.2)$$

а потому

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sqrt{g'_{44}}}{\sqrt{g_{44}}}. \quad (9.13.3)$$

Ввиду малости α с достаточной точностью имеем

$$\sqrt{\frac{g'_{44}}{g_{44}}} = \frac{1 - \alpha/2r'}{1 - \alpha/2r} \approx \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right). \quad (9.13.4)$$

Положив

$$v' = v + \Delta v \quad (9.13.5)$$

и учитывая малость эффекта, получим

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\alpha}{2r} = -\frac{fM}{r} = -2,12 \cdot 10^{-6} \quad (9.13.6)$$

(величина $1/r'$ по сравнению с $1/r$ пренебрежимо мала). Следовательно, спектральные линии, излучаемые Солнцем, приходят на Землю несколько смещенными в сторону меньших частот, т. е. больших длин волн, вследствие гравитационного воздействия со стороны материи. Этот важный результат Эйнштейна был сначала получен из «принципа эквивалентности». В окончательной теории этот же самый результат оказался геометрическим следствием четырехмерной римановой структуры пространственно-временного мира.

Обычно бывает трудно отличить гравитационный доплеровский сдвиг от кинематического. Гравитационный сдвиг для Солнца, пересчитанный в кинематический эквивалент, не превышает 0,64 км/сек, что трудно выделить среди других возмущений. Однако блестящее экспериментальное подтверждение существования такого эффекта было получено из спектральных наблюдений за «черным спутником» звезды Сириус. Массы обеих звезд известны из орбитальных измерений. Из светимости черного спутника определяется его радиус, а следовательно, и гравитационный потенциал на его поверхности. Эта звезда относится к категории «белых карликов». Она имеет размеры Земли, а массу Солнца. Этим определяется ее фантастическая плот-

ность, в 50 000 раз большая плотности воды. Гравитационное красное смещение оказывается в 40 раз большим, чем у Солнца, и поэтому оно легко измеряется. Тщательные измерения В. С. Адамса¹ в обсерватории на горе Вильсон блестяще подтвердили теоретическое предсказание (теоретическое значение, выраженное при помощи кинематического эквивалента, 26 км/сек, экспериментальное 23 км/сек).

¹ См. *Astrophysical Journal*, **67** (1928), 195.

ГЛАВА X

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР¹

По-настоящему хорошей и адекватной истории развития аналитических принципов механики еще не написано. Книга Дюринга², претендующая на изложение этого вопроса, содержит мало истории по существу. Классическая книга Маха о развитии механики³ в первую очередь посвящена ее физическим принципам и в меньшей мере ее аналитическому аспекту. Мах столь мало симпатизировал всему, что хоть сколько-нибудь напоминало априорное рационалистическое мышление, что он так и не смог подняться до правильной оценки аналитических методов и их роли в физических науках. Тот факт, что развитие вариационных принципов — этой великолепной главы эволюции человеческого мышления — никогда не вызывало энтузиазма научных кругов и считалось лишь эффективным методом описания механических явлений, является результатом преобладающего влияния позитивистского типа философии в научном мышлении в течение последних пятидесяти лет. Этим объясняется отсутствие систематического исторического описания этой ветви математической физики, в котором развитие ее прослеживалось бы вплоть до наших дней⁴.

¹ Исторический обзор носит фрагментарный характер и в отдельных местах не совсем точно излагает исторические факты. Необходимый материал по этому вопросу читатель найдет в книге: Вариационные принципы механики, сб. статей под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, М., 1959. — *Прим. ред.*

² D ü h r i n g E. E., Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik (Leipzig, 1877).

³ M a c h E., The Science of Mechanics (Chicago, Open Court Publishing Company, 1919).

⁴ В настоящее время это утверждение уже устарело в связи с появлением выдающегося фундаментального исторического труда Р. Дюга [D u g a s, R., Histoire de la Mécanique (Editions de Griffon, Neuchâtel, 1950)], в котором развитие механических идей и принципов прослеживается со времен древних греков до наших дней. Продолжение этой работы [La Mécanique au XVII Siècle (1954)] посвящено преимущественно великому периоду деятельности Кеплера, Декарта, Гюйгенса, Ньютона и Лейбница.

Короткий очерк А. Майера¹ освещает лишь эпизод Мопертюи — Эйлер — Лагранж и совершенно опускает развитие теории Гамильтона — Якоби. При описании этой стадии развития теории, являющейся в основном продуктом девятнадцатого столетия, автор использовал отдельные примечания из математической энциклопедии². Полезными были также прекрасные статьи физической энциклопедии³ под редакцией Гейгера и Шила. Настоящий исторический обзор представляет собой лишь набросок главных направлений работы мысли. Поэтому нам показалось целесообразным сгруппировать материал вокруг имен ряда ведущих ученых, внесших наиболее существенный вклад в эти исследования.

Аристотель (384—322 до н. э.). В «Физике» Аристотеля содержалась первая завуалированная формулировка принципа виртуальных перемещений. Он вывел закон рычага из принципа: «силы уравниваются друг друга, если они обратно пропорциональны скоростям». Поскольку рассматривается равновесие рычага, а аргументация основана на скоростях, здесь уже явно присутствует идея «виртуальных перемещений», обусловленных какой-нибудь малой возмущающей силой. Термин «виртуальные скорости» вместо «виртуальные перемещения», широко употреблявшийся в XIX столетии, восходит к формулировке принципа, данной Аристотелем. Тот же самый принцип, но в новой формулировке: «то, что проигрывается в силе, выигрывается в скорости» — был использован Стевином (1548—1620) при выводе законов равновесия блоков.

Галилей (1564—1642). Всемирно известен огромный вклад в механику, внесенный Галилеем. Однако, отдавая щедрую дань заслугам Галилея — эмпирика, отца экспериментальных методов, — часто забывают о его великих заслугах как физика-теоретика. Его существенный вклад в теоретическую механику заключается в исправлении формули-

¹ Mayer A., Geschichte des Princips der kleinsten Aktion (Leipzig, 1877).

² Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, Mechanik (Leipzig, 1904—1935), статьи 12 и 13, написанные Г. Пранджем.

³ Handbuch der Physik (Berlin, 1927). V, Mechanics of Points and Rigid Bodies: гл. 1 «Аксиомы механики» Г. Хамеля и гл. 2 «Принципы механики» Л. Нордгейма.

ровки принципа Аристотеля. Галилей понял то важное обстоятельство, что в формулировке принципа виртуальных скоростей должны подразумеваться не скорости вообще, а лишь скорости в *направлении действия силы*. Его метод приводит к понятию «работы» как «произведения силы на перемещение в направлении действия силы». Применяв принцип виртуальных перемещений к равновесию тела на наклонной плоскости, Галилей показал, что этот принцип приводит к тому же самому результату, который был получен Стевином из энергетических соображений. Галилей показал также применимость этого принципа в гидростатике, где он вывел с его помощью законы гидростатического давления, установленные ранее Архимедом на основе понятия о центре масс.

Иоганн Бернулли (1667—1748). Во всех предыдущих формулировках принципа всегда фигурировали две силы: «движущая сила» и «нагрузка». При этом закон формулировался с помощью некоторой пропорции. Иоганн Бернулли первый увидел в принципе виртуальных перемещений общий принцип статики, с помощью которого могут быть решены все задачи о равновесии. Он отказывается от использования пропорций и вводит *произведение силы и виртуальной скорости в направлении действия силы*, взятое с положительным или отрицательным знаком, в зависимости от того, является ли угол между силой и скоростью острым или тупым. В письме, написанном Вариньону в 1717 г. Бернулли сформулировал общий принцип, согласно которому при равновесии сил сумма всех таких произведений обращается в нуль на всех возможных бесконечно малых перемещениях. Теперь уже принцип виртуальных перемещений мог применяться для любых сил и любых механических условий.

Довольно любопытна также и другая работа Бернулли. Сравнивая движение частицы в поле заданной силы с распространением света в оптически неоднородной среде, он попытался создать на этой основе механическую теорию коэффициента преломления. Этим Бернулли предвосхитил великую теорию Гамильтона, в которой было показано, что принцип наименьшего действия в механике и принцип минимального времени распространения, носящий имя Ферма, аналогичны в своих выводах, что позволяет

интерпретировать оптические явления при помощи понятий механики и наоборот.

Ньютон (1642—1727). На основе более ранних исследований Леонардо да Винчи и Галилея Ньютоном были сформулированы основные уравнения движения. Были введены такие фундаментальные понятия, как *импульс* и *действующая сила*. Ньютонов закон движения решил задачу о движении изолированной частицы. Он мог также рассматриваться как общее решение задачи о движении, если только согласиться разбивать любую совокупность масс на изолированные частицы. Возникла, однако, трудность, связанная с тем, что не всегда были известны действующие силы. Эта трудность была частично преодолена с помощью третьего закона Ньютона, провозгласившего принцип равенства действия и противодействия. Это исключило неизвестные силы в случае движения твердого тела, однако движение механических систем с более сложными кинематическими условиями не всегда поддавалось ньютонову анализу. Последователи Ньютона считали законы Ньютона абсолютными и универсальными законами природы, интерпретируя их с таким догматизмом, к которому их создатель никогда бы не присоединился. Это догматическое почитание ньютоновой механики частиц помешало физикам отнестись без предубеждения к аналитическим принципам, появившимся в течение XVIII века благодаря работам ведущих французских математиков этого периода. Даже великий вклад Гамильтона в механику не был оценен современниками из-за преобладающего влияния ньютоновой формы механики.

Лейбниц (1646—1716). В то время как Ньютон предлагал измерять движение скоростью изменения импульса, Лейбниц отставал другую величину — «живую силу» («*vis viva*»), которая с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ совпадает с нашим понятием кинетической энергии. Лейбниц заменил уравнение Ньютона уравнением, утверждавшим, что «изменение кинетической энергии равно работе, произведенной силой». Идея Лейбница близка к разившемуся позднее аналитическому направлению. И понятие кинетической энергии, и понятие работы, совершаемой действующей силой, легко можно было обобщить, переходя от одной частицы к произ-

вольным системам частиц, без необходимости выделения отдельных частиц. Работу сил можно было заменить другой, более фундаментальной величиной: «потенциальной энергией», взятой с обратным знаком. Этот термин был введен Ренкином в середине XIX века. Как кинетическая, так и потенциальная энергии были величинами, характеризующими систему в целом. В этом состояло одно из их существенных преимуществ при построении динамики систем взаимосвязанных частиц. Второе преимущество заключалось в том, что, несмотря на свою скалярную природу, эти величины смогли отразить в себе все силы, действовавшие на систему, независимо от их численности и степени сложности. Это стало возможным благодаря применению операции варьирования к кинетической и потенциальной энергиям. Таким образом, спор между Ньютоном и Лейбницем о понятии силы был в какой-то мере спором о методе. В то время как ньютоново определение было, пожалуй, более удобно в векторной механике, идеи Лейбница явились краеугольным камнем аналитических методов.

Даламбер (1717—1783). Важный толчок развитию аналитических методов изучения механических систем был дан Даламбером, который свел произвольную задачу о движении к задаче о равновесии путем добавления к заданной системе внешних сил некоторой новой силы, порождаемой движением. Эта новая сила, сила инерции, совместно с остальными силами приводит к равновесию. Поэтому принцип виртуальных перемещений оказывается применимым к любым движущимся системам. Все уравнения движения произвольной механической системы охватываются, таким образом, одним вариационным принципом.

Мопертюи (1698—1759). Мопертюи предложил некую универсальную гипотезу, согласно которой любые события в природе описываются при помощи определенной величины, называемой «действием», которое принимает минимальное значение. Смелый универсализм этого предположения восхитителен, он вполне в духе религиозного мистицизма XVIII века. Однако математические возможности Мопертюи были гораздо ниже уровня его времени. Мопертюи не смог четко определить величину, которая должна быть минимизирована. Он применил свой принцип при выводе закона упругих столкновений. При применении вариацион-

ных методов в этой задаче имеется ряд тонкостей, так что это требует большого искусства. Мопертюи получил правильный результат при совершенно неверном решении. Более удовлетворительна его работа о законе преломления, в которой он показал, как принцип минимального времени распространения Ферма может быть заменен принципом наименьшего действия. Этот результат был еще раньше получен Иоганном Бернулли.

Очень интересен эпизод Мопертюи — Эйлер, описанный Майером в упоминавшейся выше статье. Приоритет Мопертюи оспаривался Кёнигом, утверждавшим, что еще Лейбниц высказывал те же самые идеи в частном письме. Само это письмо никогда не предъявлялось. В возникшей полемике Эйлер самым решительным образом встал на защиту приоритета Мопертюи. Вместе с тем, он сам открыл этот принцип по крайней мере на год раньше Мопертюи, причем в совершенно корректной форме. В частности, Эйлер знал, что закону сохранения энергии должны удовлетворять и действительное, и варьированное движения. Без этого дополнительного условия «действие» Мопертюи — даже после замены применявшейся им суммы на интеграл — теряет всякий смысл. Хотя Эйлер несомненно должен был заметить слабость аргументации Мопертюи, он воздержался от какой бы то ни было критики и воздержался даже от упоминания о своих собственных результатах в этой области, употребив весь свой авторитет на то, чтобы добиться признания Мопертюи автором принципа наименьшего действия. Даже зная необычайную щедрость и благородство характера Эйлера поражаешься его самоотверженной скромности, которая не имеет себе подобной в истории науки, изобилующей противоположными примерами.

Эйлер (1707—1783). Эйлер внес очень существенный вклад в развитие теоретической механики. При изучении вращения твердого тела он впервые использовал кинематические переменные, введя в качестве вспомогательных переменных три компоненты угловой скорости. Замечательны его пионерские работы в области вариационной механики. Эйлер начал систематическое изучение вариационных задач, иногда называемых «изопериметрическими». Эти задачи на максимум-минимум привлекали к себе внимание лучших умов — таких, как Ньютон, Лейбниц, Яков и Иоганн

Бернулли — с момента появления дифференциального исчисления. Эйлер нашел дифференциальное уравнение, дававшее в явном виде решение для широкого класса таких задач. Хотя Эйлер и не сформулировал четко принцип наименьшего действия, что было впервые сделано Лагранжем, его применения этого принципа к механическим задачам, по сути дела, эквивалентны лагранжевой явной формулировке.

Лагранж (1736—1813). Достижения Лагранжа, этого величайшего математика XVIII века, во многих отношениях параллельны работам Эйлера. Лагранж вполне независимо от Эйлера получил решение изопериметрических задач, сделав это совершенно новыми методами. Он разработал для этой цели новое, вариационное исчисление. Он также понял преимущество вариационных принципов в связи с той свободой, которую мы получаем, описывая положение механической системы при помощи выбираемой по нашему усмотрению совокупности параметров («обобщенные координаты»). Если принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера позволили рассматривать механическую систему как нечто целое, не разбивая ее на изолированные частицы, то уравнения Лагранжа добавили еще одно, чрезвычайно важное свойство — инвариантность относительно произвольных преобразований координат. Это позволило выбирать системы координат, удобные для данной конкретной задачи. В своей «Аналитической механике» (1788) Лагранж создал новое, необычайно мощное оружие для решения любых механических задач при помощи чистых вычислений, без каких бы то ни было физических или геометрических соображений, при условии, что кинетическая и потенциальная энергии заданы в абстрактной аналитической форме. Относясь к этому выдающемуся результату со своей обычной скромностью, Лагранж писал в предисловии к своей книге: «Читатель не найдет в этой книге рисунков. Развитые мною методы не требуют ни каких бы то ни было построений, ни геометрических или механических аргументов — одни только алгебраические операции в соответствии с последовательными едиными правилами». Лагранж таким образом создал программу и основания аналитической механики.

Метод использования дополнительных условий при помощи неопределенных множителей — еще одно бессмерт-

ное открытие Лагранжа, играющее жизненно важную роль в теоретической механике. Гамильтон, сам один из выдающихся деятелей в области аналитической механики, назвал Лагранжа «Шекспиром математики», имея в виду необычайную красоту, элегантность и глубину его методов.

Гамильтон (1805—1865). Совершенно новый мир, скрывавшийся за достижениями Лагранжа, открылся в исследованиях сэра Уильяма Роуана Гамильтона. Уравнения Лагранжа были довольно сложными дифференциальными уравнениями второго порядка. Гамильтон сумел преобразовать их в систему дифференциальных уравнений первого порядка с удвоенным числом переменных; позиционные координаты и импульсы рассматривались при этом как независимые переменные. Дифференциальные уравнения Гамильтона линейны и разрешены относительно производных. Это простейшая и наиболее удобная форма, к которой могут быть приведены уравнения вариационной задачи. Отсюда название «канонические уравнения», данное им Якоби.

Именно Гамильтон, преобразовав принцип Даламбера, впервые дал точную формулировку принципа наименьшего действия. Форма, в которой применяли этот принцип Эйлер и Лагранж, справедлива лишь для консервативных (склерономных) систем.

Одно из наиболее значительных открытий Гамильтона заключается в осознании и реализации того факта, что задачи механики и геометрической оптики могут рассматриваться с единой точки зрения. Он оперировал с «характеристической» или «главной» функцией и в оптике, и в механике. Эта функция обладает тем свойством, что при помощи лишь дифференцирования из нее можно определить как траекторию движущейся частицы, так и траекторию светового луча. Более того, и в оптике, и в механике характеристическая функция удовлетворяет одному и тому же дифференциальному уравнению. Решение этого уравнения в частных производных при соответствующих граничных условиях эквивалентно решению уравнений движения.

Якоби (1804—1851). Якоби был одним из немногих математиков, которые сразу поняли необычайную важность и красоту методов Гамильтона. Якоби развил теорию преобразований канонических уравнений, называемую теорией «канонических преобразований». Он интерпретировал на ос-

нове этой теории характеристическую функцию, показав, что функция, использованная Гамильтоном, является лишь одним частным случаем функции, производящей нужное каноническое преобразование. Он значительно расширил применимость уравнения в частных производных Гамильтона доказав, что для полного решения задачи о движении достаточно любого полного интеграла этого уравнения, без специальных граничных условий, требовавшихся Гамильтоном.

Якоби дал также новую формулировку принципа наименьшего действия для случая независимости от времени, который рассматривали Эйлер и Лагранж. Он критиковал их формулировку на том основании, что область интегрирования у них не удовлетворяет условию варьирования при фиксированных граничных значениях. Хотя в действительности Эйлер и Лагранж применяли свой принцип вполне корректно, исключение времени из вариационного интеграла, произведенное Якоби, привело к новому принципу, определяющему траекторию движущейся точки без всякого указания на то, как движение происходит во времени. Сходство этого принципа с принципом Ферма о наименьшем времени распространения света, из которого может быть определена траектория светового луча, непосредственно устанавливало аналогию между оптическими и механическими явлениями.

Гаусс (1777—1855). Несколько в стороне от главного направления лежит «принцип наименьшего принуждения», установленный выдающимся математиком Гауссом. В этом принципе не используется в качестве минимизируемой функции интеграл по времени. Гаусс вводит для произвольного момента времени определенную положительную величину, называемую «принуждением», и минимизацией этой величины получает ускорения, считая скорости и координаты в этот момент заданными. Принцип Гаусса является истинным минимальным принципом, а не просто принципом стационарного значения. Однако он не обладает аналитическими преимуществами других принципов, поскольку «принуждение» включает в себя, помимо позиционных координат и скоростей, еще и ускорения. Герц дал геометрическую интерпретацию «принуждения» Гаусса, представив его как геодезическую кривизну в «пространстве конфигураций»

3N измерений. В этом пространстве принцип Гаусса может быть сформулирован как «принцип прямейшего пути». Такая интерпретация устанавливает тесную связь между принципом Гаусса и принципом Якоби.

Позднейшее развитие аналитической механики. Мы проследили историческое развитие вариационных принципов механики. Таким образом, наша задача в части, касающейся основного предмета настоящей книги, завершена. Однако в сооружение величественного здания этой науки внесли свой вклад и многие другие ученые, разрабатывавшие аналитические методы и добавившие к основной теории ценные детали, не говоря уже о решении частных задач. Кратко отметим наиболее яркие из них.

Пуассон вместе с *Лагранжем* ввел в теорию возмущений выражения, обозначаемые при помощи скобок, и подошел вплотную к теории канонических преобразований.

Делоне разработал аналитическую теорию многопериодических систем с разделяющимися переменными — метод, который приобрел необычайную важность в теории атома Бора.

Э. Дж. Раус и независимо *Г. Гельмгольц* обнаружили важность «скоростных» или «циклических переменных» и разработали общие методы их исключения.

Дж. Дж. Томсон размышлял о возможности построения бессиловой механики в предположении, что существуют циклические координаты, т. е. «игнорируемые», потому что они могут быть исключены.

Г. Герц развил эти идеи более последовательно, представляя себе потенциальную энергию как кинетическую энергию скрытых движений. Герц также развил геометрические аспекты механики, изображая движение произвольной механической системы как движение одной частицы в пространстве многих измерений в «пространстве конфигураций».

С. Ли ввел групповые представления в теорию канонических преобразований, уделив особое внимание группе бесконечно малых преобразований.

А. Пуанкаре изучал «интегральные инварианты» канонических уравнений. Он внес ценный вклад в теорию возмущений в применении к астрономии и особенно в исследование задачи трех тел. Его интересовали также вопросы

геометрии пространства конфигураций «в большом», которые привели его к фундаментальным топологическим исследованиям.

П. Анпель изучал аналитические свойства неголономных систем.

Вклад многих современных ученых в различные новейшие главы аналитической механики выходит за рамки этой книги, посвященной лишь основным принципам.

Связь аналитической механики и современной физики. Два великих достижения современной физики: теория относительности и квантовая механика — теснейшим образом связаны с аналитической механикой. Теория относительности Эйнштейна революционизировала все области физики. Было показано, что ньютонова механика справедлива лишь приближенно для скоростей, малых по сравнению со скоростью света. Однако аналитический метод, основанный на использовании принципа наименьшего действия, остался неизменным. Модифицирована была лишь функция Лагранжа; получение же дифференциальных уравнений движения из принципа минимума осталось. Действительно, полная независимость вариационного принципа от какой-либо специальной системы отсчета делала его особенно ценным для построения уравнений, удовлетворяющих принципу общей относительности. Этот принцип требует, чтобы основные уравнения природы оставались инвариантными при произвольных преобразованиях координат.

Другая революция в современной теоретической физике — квантовая теория — также тесно связана с аналитической механикой, особенно с ее гамильтоновой формой. Теория электронных орбит Бора великолепно использовала гамильтоновы методы, когда выяснилась важность систем с разделяющимися переменными при формулировке квантовых условий. Если раньше методы Гамильтона изучались лишь астрономами, то формулировка квантовых условий Зоммерфельдом и Вильсоном в 1916 г. и расчет эффекта Штарка, сделанный в том же году Эпштейном, убедительно продемонстрировали важность гамильтоновых идей при изучении структуры атома.

Новая интерпретация законов природы при помощи понятий волновой механики в теориях Шредингера, Гейзенберга и Дирака также выросла из методов Гамильтона. Сопря-

женные переменные и канонические преобразования составляют часть фундамента новой теории. Как новая черта, в теорию Гейзенберга, Борна и Иордана добавлен матричный характер q - и p -переменных; дираковская же теория рассматривает сопряженные переменные как не коммутирующие величины. С другой стороны, Шредингер, исходя из операционной точки зрения, интерпретировал дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби как волновое уравнение. Исходным пунктом Шредингера была оптико-механическая аналогия Гамильтона.

Несмотря на радикальное отличие новых идей от концепций старой физики, основной чертой дифференциальных уравнений волновой механики является их *самосопряженность*. Это означает, что они получаются из вариационного принципа. Поэтому, несмотря на все различия в интерпретациях, вариационные принципы механики продолжают играть важную роль в описании всех явлений природы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

(к гл. IV, п. 4, стр. 197—201)

Важный переход от лагранжевой к гамильтоновой форме динамики можно совершить более непосредственным образом, без использования преобразования Лежандра, основываясь исключительно на методе неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим заданную функцию Лагранжа $L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$. Будем рассматривать $\dot{q}_i$ как некоторую вторую группу независимых переменных ω_i , т. е. напомним

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \omega_1, \dots, \omega_n, t). \quad (1)$$

Это можно сделать, если в качестве *дополнительных* условий нашей задачи взять уравнения

$$\dot{q}_i - \omega_i = 0. \quad (2)$$

Естественно, что новая формулировка идентична первоначальной, так как исключение ω_i при помощи дополнительных условий приводит обратно к первоначальной задаче.

Однако новую задачу уже можно решать при помощи метода неопределенных множителей Лагранжа, заменив первоначальную функцию L на

$$L' = L + \sum_{i=1}^n p_i (\dot{q}_i - \omega_i), \quad (3)$$

где через p_i обозначены лагранжевы множители. Новая задача имеет утроенное количество переменных, а именно q_i , p_i и ω_i . Заметим, однако, что ω_i входят только как *алгебраические* переменные, без производных. Такие динамические переменные могут быть в дальнейшем исключены (см. стр. 154, задача 3). Исключение какой-либо переменной означает, что соотношение, имеющее место для истинного движения, предполагается выполняющимся также и для варьированного движения. Это в общем случае недо-

пустимо, так как может нарушиться условие обращения вариации в нуль в граничных точках области. Однако в случае алгебраической переменной интегрирование по частям отсутствует, так что ограничивающее условие: «вариация должна обращаться в нуль в граничных точках» — может быть опущено. Следовательно, исключение алгебраических переменных всегда допустимо.

Исключение w_i при помощи уравнений

$$\frac{\partial L'}{\partial w_i} = 0 \quad (4)$$

означает, что мы должны решить уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} - p_i = 0 \quad (5)$$

относительно w_i . Однако это означает, что нам нужно разрешить уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i \quad (6)$$

(с первоначальным L) относительно $\dot{q}_i$, записав их в виде функций p_i и q_i . Если положить

$$H = \sum_{i=1}^n p_i w_i - L(q_\alpha, w_\alpha, t), \quad (7)$$

то функция L' имеет вид

$$L' = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q_\alpha, p_\alpha, t). \quad (8)$$

Поскольку w_i будет в дальнейшем везде исключено, с таким же успехом можно определить

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \quad (9)$$

с добавочным условием, что $\dot{q}_i$ должны быть исключены при помощи уравнений (6). Это в точности та самая программа, по которой задача Лагранжа преобразуется в задачу Гамильтона.

Возможность обратного перехода от формулировки Гамильтона к формулировке Лагранжа следует из того, что гамильтоново подинтегральное выражение (8) является чисто алгебраическим относительно p_i , поэтому p_i могут быть исключены. Это означает, что нам следовало бы решить уравнения

$$\frac{\partial L'}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad (10)$$

выразив p_i через q_i и $\dot{q}_i$. Подстановка этих p_i в L' дает некоторую функцию q_i и $\dot{q}_i$, которая есть не что иное, как первоначальная функция Лагранжа L . Таким образом, обратимость преобразования установлена. При получении этих результатов мы пользовались только методом неопределенных множителей Лагранжа и исключением алгебраических переменных.

Еще одно преимущество этого формализма заключается в том, что мы сразу же получаем преобразование вариационной задачи с производными высших порядков к канонической форме, не прибегая к процессу последовательного исключения производных, описанному на стр. 200. Предположим, например, что задана функция Лагранжа

$$L = L(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}, t). \quad (11)$$

Положим

$$y = q_1, \quad \dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = q_3, \quad \dots, \quad \dot{q}_n = q_{n+1}, \quad (12)$$

$$L' = L(q_1, q_2, \dots, q_{n+1}, t) + p_1(\dot{q}_1 - q_2) + \\ + p_2(\dot{q}_2 - q_3) + \dots + p_n(\dot{q}_n - q_{n+1}). \quad (13)$$

Это означает, что

$$L' = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H, \quad (14)$$

где

$$H = p_1 q_2 + p_2 q_3 + \dots + p_n q_{n+1} - L(q_1, \dots, q_{n+1}, t). \quad (15)$$

Единственная алгебраическая переменная, которая должна быть исключена, это q_{n+1} . Здесь используется уравнение

$$\partial L / \partial q_{n+1} = p_n. \quad (16)$$

В результате получается каноническая система первого порядка с n парами переменных $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$.

БИБЛИОГРАФИЯ

По аналитической механике существует много учебников и, по мнению автора, для первого чтения по этому вопросу могут быть полезны следующие книги:

- Ames J. S., Murnaghan F. D., *Theoretical Mechanics* (Ginn & Co., 1929).
Coe C. J., *Theoretical Mechanics: A Vectorial Treatment* (Macmillan, 1938).
Courant R., Hilbert D., *Methoden der mathematischen Physik* (Springer, v. I, 1931, v. II, 1937); русский перевод: Курант Р., Гильберт Д., *Методы математической физики*, Физматгиз, М., 1951.
Курант Р., *Уравнения с частными производными*, «Мир», М., 1964.
MacMillan W. D., *Statics and Dynamics of a Particle* (McGraw-Hill, 1927).
Phillips H. B., *Vector Analysis* (Wiley, 1933).
Syngge J. L., Griffith B. A., *Principles of Mechanics* (McGraw-Hill, 1942).
Wintner A., *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics* (Princeton, 1941).

Для подготовленных читателей:

- Appell P. E., *Traité de mécanique rationnelle*, vv. I and II (Gauthier-Villars, 1909); русский перевод: Аппель П., *Теоретическая механика*, т. I и II, Физматгиз, М., 1960.
Birkhoff G. D., *Dynamical Systems* (American Math. Soc., 1927); русский перевод: Биркгофф Г., *Динамические системы*, Гостехиздат, М. — Л., 1941.
Cartan E., *Leçons sur les invariants intégraux* (Hermann, 1922); русский перевод: Картан Э., *Интегральные инварианты*, Гостехиздат, М., 1940.
Nordheim L., *Die Prinzipie der Dynamik* (Handbuch der Physik, v. V, pp. 43—90).
Nordheim L., Fues E., *Die Hamilton — Jacobische Theorie der Dynamik* (Handbuch der Physik, v. V, pp. 91—130).
Prange G., *Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik* (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, v. IV, № 2, issue 4).
Whittaker E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge, 1917); русский перевод: Уиттекер Е. Т., *Аналитическая динамика*, ОНТИ М., 1937.

Превосходный исторический обзор старой литературы по теоретической динамике вплоть до 1860 года можно найти в работе

C a y l e y A., Collected Mathematical Papers (Cambridge, 1890). Report on the Recent Progress of Theoretical Dynamics, v. III, pp. 156—204, and a second report on special problems, v. IV, pp. 513—593.

Следующий список литературы по релятивистской механике является не более чем выборкой из чрезвычайно обширной библиографии по этому вопросу:

- A h a r o n i J., The Special Theory of Relativity (Clarendon Press, 1959).
 B e r g m a n n P. G., Introduction to the Theory of Relativity (Prentice-Hall, 1947); русский перевод: Б е р г м а н П., Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947.
 M o l l e r C., The Theory of Relativity (Clarendon Press, 1952).
 P a u l i W., Theory of Relativity (Pergamon Press, 1958); русский перевод: П а у л и В., Теория относительности, Гостехиздат, М., 1947.
 R a i n i c h G. Y., Mathematics of Relativity (Wiley, 1950).
 R i n d l e r W., Special Relativity (Oliver and Boyd, 1960).
 S t e p h e n s o n G., K i l m i s t e r C. W., Special Relativity for Physicists (Longmans, Green, 1958).
 S y n g e J. L., Relativity: The Special Theory (North-Holland, 1956).
 S y n g e J. L., The General Theory (North-Holland, 1960); русский перевод: С и н г Дж., Общая теория относительности, ИЛ, М., 1962.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ БИБЛИОГРАФИЯ

- Вариационные принципы механики, сб. статей под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, М., 1959.
 Г а н т м а х е р Ф. Р., Лекции по аналитической механике, 2 изд., изд-во «Наука», М., (в печати).
 Г о л д с т е й н Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.
 Л а н д а у Л. Д., Л и в ш и ц Е. М., Теоретическая физика, т. 1, Механика, Физматгиз, М., 1958.
 Л е в и - Ч и в и т а Т., А м а л ь д и У., Курс теоретической механики, т. 2. ч. 2, ИЛ, М., 1951.
 Л и ч Дж. У., Классическая механика, ИЛ, М., 1961.
 Л у р ь е А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, М., 1961.
 П о л а к Л. С., Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике, Физматгиз, М., 1960.
 Р о з е Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Л., 1938.
 С и н г Дж. Л., Классическая динамика, Физматгиз, М., 1963.
 С у с л о в Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, М., 1946.
 Ф р е н к е л ь Я. И., Аналитическая механика, КУБУЧ, Л., 1935.

УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация света 338
— хроматическая 312
Амплитудная функция 317
Аналогия оптико-механиче-
ская 305
Аппель 394
Аристотель 385
- Бернулли 386
Бор 275, 394
Борн 395
де Бройль 290, 316, 318
Бюргерс 279
- Вариационное исчисление 18
Вариация 18, 60, 61
— вторая 63, 64
— определенного интеграла 80
— первая 61
— функции 77
Варьирование 77
— коммутативные свойства 78
— при дополнительных усло-
виях 65, 70, 85
— — фиксированных гра-
ничных значениях 78, 81
Вектор 41
Величины инвариантные 332
— ковариантные 41, 143, 332
Виртуальное перемещение 61
Время собственное 360
- Галилей 385
Гамильтон 391
Гаусс 392
Гельмгольц 393
Геодезические линии 134, 166,
371
Геометрическая интерпретация
задач динамики 330
Геометрия нериманова 320,
322, 328, 329
- Геометрия риманова 42
Герц 393
Гессман 191
Гравитационная теория Эйн-
штейна 372
Гравитационное искривление
световых лучей 378
— красное смещение 381
Гравитационный радиус Солн-
ца 378
Граничный член 92, 146
Гюйгенс 307
- Даламбер 388
Действие 17, 18, 27, 28
Делоне 281, 393
Дисперсия 312
Допплера эффект 338, 381
- Задача вариационная свобод-
ная 65
— — с дополнительными ус-
ловиями 65, 70, 85
— динамики 25
— Кеплера 277
— об упругом стержне 92
— равновесия при дополни-
тельных условиях 104
Закон движения Ньютона ос-
новной 25
— — — третий 19, 25
Зеемана эффект 279, 289
- Импульс 18
— обобщенный 146
— сопряженный 199
Инвариантное свойство метри-
ческой геометрии 326
Инвариантность уравнений Ла-
гранжа 141, 142, 143

Инварианты интегральные 209
Интеграл полный 268, 279

Канонические уравнения, см.
уравнения канонические
Канонический интеграл 197,
199, 218

Квантовые условия Зоммер-
фельда — Вильсона 290

Кватернионы 345

Кинематика релятивистская
334

Кинематические условия 45
Кинетическая энергия, см.

Энергия кинетическая

Кинетический фокус 310

Кинетическое взаимодействие
156

Колебания малые 175

— нормальные 187, 189

Координаты обобщенные 29,
32, 34

— сферические 40

— циклические (игнорируе-
мые) 151, 214

Лагранж 390

Лейбниц 387

Ли 393

Линейный элемент 40, 44, 166

— — Шварцшильда 373, 377

Линии геодезические 134, 371

Майер 385

Мах 384

Метод неопределенных мно-
жителей Лагранжа 66, 90
— — — интерпретация 107,
168

— разделения переменных 275

Механика аналитическая 16, 19

— векторная 16, 19

— Герца 157, 158

— релятивистская 331

— — одной частицы 356, 361

Минковский 42, 333, 341

Мировая линия 141, 356

Многообразие двумерное 42

— одномерное 42

Мопертюи 388

Неравенство Фурье 110

Ньютон 387

Обобщенные координаты, см.

Координаты обобщенные

— направляющие косинусы
323

Оптико-механическая анало-
гия 305

Парадокс часов 339

Параметры макроскопические
157

— микроскопические 157

Переменные действия 283, 291

— кинематические 117

— пассивные 193

— угловые 284, 285, 291

Перемещения виртуальные 61

— обратимые 98, 110

Преобразование координат то-
точное 37, 142

— Лежандра 190, 192, 193

— линейного интеграла в по-
верхностный 244

— уравнений Лагранжа 195

Преобразования канонические
225

— — бесконечно малые 251,
253

— — общего типа 237

— контактные 234

— Лоренца 344

— — бесконечно малые 355,
369

— Матвея и Ли 233, 237

— реономные 232, 239

— склерономные 231, 239

— точечные Лагранжа 227

Принцип 27

— виртуальных перемещений
98, 99

— Гамильтона 18, 136,
139

— Гюйгенса 307

— Даламбера 114

— инвариантности 143

— наименьшего времени рас-
пространения, см. Принцип
Ферма

- Принцип наименьшего действия
(Эйлера — Лагранжа) 17, 18, 165
— — принуждения (Гаусса) 130, 132
— общей относительности 333
— Ферма 22, 162, 163, 309
— Якоби 162
— и риманова геометрия 165
Пространство конфигураций 34, 44
— — расширенное 141
— Минковского 341
— состояний 203
— фазовое 202, 205
— — расширенное 217, 231
— функциональное 74
Пуанкаре 393
Пуассон 393
- Равновесие нейтральное 188
— неустойчивое 188
— твердого тела 101
— устойчивое 188, 189
Раус 393
Релятивистская кинематика 334
— механика заряженной частицы 365
— — одной частицы 356, 361
— формулировка теории гравитации 364
Риманова геометрия 42, 166
- Свойства пространства метрические 35
— — топологические 35
Связь голономная 47, 49
— неголономная 47, 49
— различных принципов 222
— реономная 54
— склерономная 54
Сила 18
— инерции 112
— — Даламбера 124
— фиктивная 121
— Эйлера 127
— Эйнштейна 123
— эффективная 114
- Силовая функция 19, 20, 26, 51
Силы консервативные 52
— моногенные 53
— обобщенные 50
— полигенные 53
Система сил 26
— — голономная 47
— — консервативная 19
— — неголономная 47
— — реономная 120, 149
— — склерономная 120, 147
Системы эквивалентные 103
Скобки Лагранжа 246
— Пуассона 248
Скорость 43
Сложение скоростей 337
Сохранение энергии 55, 118, 120, 145, 148, 206, 207, 368
Спектр нормальных колебаний 187
Стационарное значение 59, 60, 62
— — определенного интеграла 72, 80
Степени свободы 32
- Тензор 41, 42
— кривизны 43
— метрический 42
Теорема Гельмгольца о циркуляции 209, 213
— Лиувилля 208, 255
Теория относительности об-
щая 23, 333, 334
— — специальная 332
— Стокса 244
Томсон 393
- Уравнение амплитудное 317
— волновое Френеля 317, 329
— Гамильтона — Якоби 263, 270, 273, 274, 291, 319
— характеристическое 181
Шредингера 317
Уравнения канонические 196
— — в параметрической форме 216, 220
— Эйлера 129
— Эйлера — Лагранжа 76, 82

Условия граничные естественные 93

— — наложенные извне 93

— дополнительные 65, 168

— — неголономные 71, 88, 174

— изопериметрические 89

— стационарности определенного интеграла 80

Фазовая жидкость 202, 205, 206

— — движение 254, 256

Фазовое пространство, см.

Пространство фазовое

Фигуры Лиссажу 187, 189, 287

Физо 331

Форма дифференциальная билинейная 241, 245

— — квадратичная 41

Формализм Гамильтона 18

— Эйлера и Лагранжа 17

Фуко 126, 313

Функция амплитудная 317

— Гамильтона 150, 194, 299

Функция Гамильтона главная 256, 301, 322

— — обобщенная 220, 232

— — построение 299, 301

— Лагранжа 138, 193

— производящая 238

— — видоизмененная 239

— характеристическая 257

Фурье 313

Циркуляция 209, 214, 243

Центр масс 127

Частица свободная 19

Черный спутник Сириуса 382

Шредингер 317

Эйлер 389

Эйнштейн 9, 123, 290, 332

Экстремум 63, 64, 65

Энергии сохранение, см. Сохранение энергии

Энергия кинетическая 19, 43

— полная 55, 149, 160, 358

— потенциальная 52, 55, 362, 388.

Якоби 391

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Из предисловия автора	11
Предисловие ко второму изданию	14

ВВЕДЕНИЕ

1. Вариационные методы в механике	15
2. Формализм Эйлера и Лагранжа	16
3. Формализм Гамильтона	17
4. Вариационное исчисление	18
5. Сравнение векторного и вариационного методов в механике	18
6. Математическая оценка вариационных принципов	19
7. Философская оценка вариационного подхода в механике	21

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. Характерные черты методов аналитической механики	25
2. Обобщенные координаты	29
3. Пространство конфигураций	34
4. Отображение пространства самого на себя	35
5. Кинетическая энергия и риманова геометрия	39
6. Голономные и неголономные механические системы	46
7. Обобщенная сила и силовая функция	49
8. Склерономные и реономные системы. Закон сохранения энергии	54

ГЛАВА II

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Общие свойства задач на экстремум	56
2. Стационарное значение функции	60
3. Вторая вариация	62
4. Взаимосвязь стационарных и экстремальных значений	64
5. Дополнительные условия. Метод неопределенных множителей Лагранжа	65
6. Неголономные дополнительные условия	71
7. Стационарное значение определенного интеграла	72
8. Основные операции вариационного исчисления	76
9. Коммутативные свойства операции варьирования	79
10. Вывод условий стационарности определенного интеграла методами вариационного исчисления	80

11. Дифференциальные уравнения Эйлера — Лагранжа в случае n степеней свободы	83
12. Варьирование при наличии дополнительных условий	86
13. Неголономные условия	88
14. Изопериметрические условия	89
15. Вариационное исчисление и граничные условия. Задача об упругом стержне	92

ГЛАВА III

ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Принцип виртуальных перемещений для обратимых перемещений	97
2. Равновесие твердого тела	101
3. Эквивалентность двух систем сил	103
4. Задачи о равновесии при наличии дополнительных условий	104
5. Физическая интерпретация метода неопределенных множителей Лагранжа	107
6. Неравенство Фурье	110

ГЛАВА IV

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1. Сила инерции	112
2. Роль принципа Даламбера в механике	116
3. Закон сохранения энергии как следствие принципа Даламбера	118
4. Фиктивные силы при ускоренном движении систем отсчета. Гипотеза Эйнштейна об эквивалентности	120
5. Фиктивные силы во вращающейся системе отсчета	124
6. Динамика твердого тела. Движение центра масс	127
7. Динамика твердого тела. Уравнения Эйлера	129
8. Принцип наименьшего принуждения Гаусса	130

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА

1. Принцип Гамильтона	136
2. Уравнения движения Лагранжа и их инвариантность относительно точечных преобразований	140
3. Теорема о сохранении энергии как следствие принципа Гамильтона	145
4. Циклические (игнорируемые) координаты и их исключение	151
5. Бессиловая механика Герца	157
6. Время как циклическая переменная; принцип Якоби; принцип наименьшего действия	159
7. Принцип Якоби и риманова геометрия	165

8. Дополнительные условия: физический смысл неопределенных множителей Лагранжа	168
9. Неголономные дополнительные условия и полигенные силы	174
10. Малые колебания около положения равновесия	175

ГЛАВА VI

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

1. Дуальное преобразование Лежандра	190
2. Преобразование Лежандра в применении к функции Лагранжа	193
3. Преобразование уравнений движения Лагранжа	195
4. Канонический интеграл	197
5. Фазовое пространство и фазовая жидкость	202
6. Теорема сохранения энергии как следствие канонических уравнений	205
7. Теорема Лиувилля	207
8. Интегральные инварианты, теорема Гельмгольца о циркуляции	209
9. Исключение циклических переменных	214
10. Параметрическая форма канонических уравнений	216

ГЛАВА VII

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Преобразования координат как метод решения задач механики	225
2. Точечные преобразования Лагранжа	227
3. Преобразования Матье и Ли	233
4. Канонические преобразования общего типа	237
5. Билинейная дифференциальная форма	240
6. Скобки Лагранжа и Пуассона	245
7. Бесконечно малые канонические преобразования	250
8. Движение фазовой жидкости как непрерывное выполнение канонических преобразований	253
9. Главная функция Гамильтона и движение фазовой жидкости	256

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ

1. Важная роль производящей функции в задаче о движении	264
2. Теория преобразований Якоби	266
3. Решение уравнения в частных производных методом разделения переменных	275
4. Метод Делоне для разделения переменных в периодических системах	279
5. Роль дифференциального уравнения в частных производных в теориях Гамильтона и Якоби	291

6. Построение главной функции Гамильтона при помощи полного интеграла Якоби	299
7. Геометрическое решение уравнения в частных производных. Оптико-механическая аналогия Гамильтона . . .	302
8. Значение уравнения в частных производных Гамильтона в теории распространения волн	315
9. Геометризация динамики. Неримановы геометрии. Метрическая интерпретация уравнения в частных производных Гамильтона	319

ГЛАВА IX

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

1. Историческое введение	331
2. Релятивистская кинематика	334
3. Четырехмерное пространство Минковского	341
4. Преобразования Лоренца	344
5. Механика одной частицы	356
6. Гамильтонова формулировка динамики частицы	361
7. Потенциальная энергия V	362
8. Релятивистская формулировка ньютоновой скалярной теории гравитации	364
9. Движение заряженной частицы	365
10. Геодезические линии в четырехмерном мире	371
11. Орбиты планет в теории тяготения Эйнштейна	372
12. Гравитационное искривление световых лучей	378
13. Гравитационное красное смещение спектральных линий	381

ГЛАВА X

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР 384

Приложение	396
Библиография	399
Дополнительная библиография	400
Указатель	401