Дж.Лайтхилл

ВОЛНЫ В ЖИДКОСТЯХ

Логически стройное и четкое изложение классических и современных проблем теории волн. Математическая строгость сочетается с глубиной физической интерпретации явлений. Автор — выдающийся английский ученый, внесший большой вклад в теорию волн, известен по переводам его статей.

Для специалистов по прикладной математике, общей теории волн, гидромеханике, океанографии, геофизике, для студентов этих специальностей.

Содержание

Предисловие редакторов перевода 5
Предисловие 7
Пролог 8
1. Звуковые волны **13**
1.1. Волновое уравнение 13
1.2. Скорость звука 18
1.3. Акустическая энергия и акустическая интенсивность 25
1.4. Точечный источник 31
1.5. Акустический диполь 39
1.6. Компактные области источников в общем случае 48
1.7. Компактные области источников с дипольными дальними полями 53
1.8. Моделирование в волновой кювете 60
1.9. Рассеяние на компактных телах 69
1.10. Излучение квадруполя 78
1.11. Излучение от сфер 87
1.12. Излучение от плоских стенок 93
1.13. Диссипация акустической энергии 100
Упражнения к главе 1 111
2. Одномерные волны в жидкостях **116**
2.1. Продольные волны в трубах и каналах 116
2.2. Примеры, относящиеся к эластичным трубам и открытым каналам 122
2.3. Передача волн через сочленения 129
2.4. Распространение волн через разветвленные системы 137
2.5. Полости, сужения, резонаторы 144
2.6. Линейная теория распространения волн при постепенном изменении физических характеристик жидкости и поперечного сечения 153
2.7. Ослабление волны за счет трения 162
2.8. Нелинейная теория плоских волн 172
2.9. Простыв волны 130
2.10. Ударные волны 191
2.11. Теория простых волн, содержащих слабые ударные волны 205
2.12. Гидравлические прыжки 218
2.13. Нелинейное распространение при постепенном изменении физических характеристик жидкости и поперечного сечения 228
2.14. Нелинейная геометрическая акустика 237

Упражнения к главе 2 248
3. Волны на воде **254**
3.1. Поверхностные гравитационные волны 254
3.2. Синусоидальные волны на глубокой воде 259
3.3. Синусоидальные волны на воде произвольной, но постоянной глубины 266
3.4. Волны ряби 274
3.5. Затухание 283
3.6. Введение в теорию групповой скорости 293
3.7. Исследование диспергирующих систем методом Фурье 302
3.8. Скорость переноса энергии 312
3.9. Картины волн, создаваемые препятствиями в стационарном потоке 319
3.10. Корабельные волны 330
Упражнения к гл. 3 341
4. Внутренние волны **347**
4.1. Введение в теорию внутренних гравитационных волн 347
4.2. Объединенная теория звуковых и внутренних волн 355
4.3. Внутренние волны в океане и атмосфере 364
4.4. Введение в анизотропную дисперсию 375
4.5. Общая теория прослеживания луча 385
4.6. Прослеживание луча в воздушном потоке 394
4.7. Стационарные течения, генерируемые затуханием волн 409
4.8. Метод стационарной фазы в трехмерном случае 424
4.9. Общая теория осциллирующих источников волн 436
4.10. Внутренние волны, генерируемые осциллирующим источником 451
4.11. Каустики 465
4.12. Генерирование волн движущимися вынуждающими воздействиями 482
4.13. Волноводы 502
Упражнения к главе 4 519
Эпилог 526
Часть 1. Различные типы волн в жидкостях 526
Часть 2. Нелинейные эффекты при распространении диспергирующих волн 541
Библиографические комментарии 565
Часть 1. Основная литература 565
Часть 2. Литература по акустике 568-
Часть 3. Литература по волнам на воде 572
Часть 4 Литература по стратифицированным жидкостям 575
Часть 5. Библиографические комментарии к эпилогу 579
Список обозначений 586
Именной указатель 589
Предметный указатель 592

Именной указатель

Звездочками отмечены авторы, упомянутые также в предметном указателе

Аббот 573
Айлифф 579
Аккад 581
* Альвен 582

Анати 576
Андерсон Д. Л. Т. 581
Андерсон Дж. Е. 579
Апостол 566
Арнольди 570
Бадден 578
Байетт-Смит 573, 583
Барбер 574 Бейт 568
* Бенджамен 573, 584
Беранек 568, 569
Блохинцев Д. И. 577
Бреддок 580
Бредли 569
Брезертон 578, 579
Бреннер 572
* Брент 576
Бреховских Л. М. 577
Букер 578
* Буссинеск 576
Бэтчелор 565, 571
Бюргере 571
Варлей 572
Вебстер 570
Вестервельт 572
Вехаузен 574
Ву 570
* Вяйсяля 576
Гальвин 584
Гарабедян 566
Гарднер 584
Гаррик 570
Гейдон 571
* Гельмгольц 573
Герретт 578, 579
Гольдбург 576
Гольдетеин Г. 565
Гольдстейн М. Е. 569
Госсард 576
Граве 574
Гримшоу 575, 584
Грин 584
Гринвуд 565
Гринспэн 579
Гэд 575
* Гюгонио 571
Данджи 580
Дефан 567
Дефей 573
Джефрис Б. 566
Джефрис Г, 566
Джонс 565
Джонсон 567
Джордан 569
Дикон 582
Дрисше, ван ден 580
Дэви 583
Дэвис А. М. 581
Дэвис Г. Г. 578
Дэвис Г. Дж. 565
Дэвис П. А. 580
Дэвис Р. М. 571
Забуски 584
Зельдович Я. Б. 569
Зоммерфельд 567
Иббетсон 580
* Инуи 575
Иоганнесен 577
Йи 576
Камбербач 572
Карпман 580
Картрайт 581 Каулинг 579
* Кельвин 574, 580
Кенион 584
Кёрл 565
Кинг 570
Клеммоу 567
Компанеец А. С. 569
* Кортевег 583, 584
Крайтер 569
Краптон 571
Крускал 584
Кьелас 576
Лайтхилл 566, 568, 570, 573, 574, 577, 578, 580—583
Ламбракис 571
Лейбович 580, 584
Лейк 583
Ли 573

Лонг 578, 580, 584
Лонге-Хиггинс 577, 581—583
Лукассен 573
Лукассен-Рейндерс 573
Лезем 574
Лэмб 569
Майлс 573, 581
Макдональд Д. 566
Макинтайр 578
Маккормик 573
Маклахлан 569
Манк 574, 581
Мей 583
Мерцбахер 567
Миллер Г. Р. 574
Миллер Дж. С. П. 578
Милфорд 567
Мисак 575
Миура 584
Монингер 576
Морс 565
Моубрей 577
Моффетт 582
Муар 569
Мэзон 568
Мюллер 584
Нейман 567
Ниборг 572
Озер 580
Олсон 568
Оуэн 571
Пайерс 579
Пао 576
Пауэре 574
Пекерис 581
Перегрин 575
Пиди 580
Пирсон 567
Пламптон 579
Пози 579
Пойнтон 567
Прайс 570
Праудмен 580
Пресс 579
Пригожий 573
Придмор-Браун 577
Притчард 584
Райзер Ю. П. 569
Райли 572
Рассел Скотт 574, 583
Раулендс 581
* Рейнольде 572, 577
Рейтц 567
* Релей 568, 571, 574, 583
Рил 567
* Риман 571
Розенхед 565
* Россби 581
Рэнкин 571
Рэрити 577
Сагден 570
Саусвелл 566
Свердруп 567
Сибасс 580
Сквайр 572
Снеддон 566
Снодграсс 574
Сокольников 566
Соуорд 582
Стефенс 568
* Стивенсон 577
Стикс 579
Стокер 573
* Стоке 574, 575, 582
Столлери 571
Стюарт Дж. Т. 572
Стаюрт Р. В. 577
Стюарт Р. Д. 566
Стюартсон 581—583
Суинбенкс 578
* Тейлор 571, 580
Тернер 576
Толстой 576
Томас А. 570
* Томас Н. 577
Томпсон П. 571
Томпсон Р. 577
Томсон 574

Тори 584
Трастрэм 581
* Уизем 569, 571, 574, 580, 583, 584
Уилмор 566
Уильяме 570
Урсел 575
* Фейр 583
Фельтхаммар 582
Фентон 583
Феррaро 579
Филлипс Е. 566
Филлипс О. 573, 576, 583, 584
Флезер 581
Флеминг 567
Фоукс Уильяме 570, 571, 578
* Фриз 583, 584
* Фрост 574
* Фруд 574
Фультц 580
Хайд 580, 582
Хаппель 572
Харкрайдер 579
Хаскелл 579
Хассельман 574, 583, 584
Хейвлок 574
Хейз 572, 583
Хелливел 579
Хеммек 580
Хендерсон 572
Хендершотт 581
Херл 570
Херлофсон 582
Хесс 567
Хинце 582
Хогбен 575
Холт 579
Холтон 568
Хоув 571
Хоукинг 570
Хук 576
Чоу 572
Чу 583
Шварц И. 571
Шварц Л. 582
Шерклиф 567
Шифф 567
Эверест 575
* Эйри 578
Экарт 575
Экман 576
Эндрюс Д. 578
Эндрюс Ф. 567
Юань 583
Янг 576

Предметный указатель

Абсолютная частота 396
Акустическая компактность 42, 86, 448, 568—572
— мощность 31, 38, 568—572
Акустический волновод 524, 578
— поток (ветер) 30, 413, 568—572
Альвеновская скорость волны 535, 567, 579, 582
Амплитуда волн на воде 266
— — — в нелинейной теории 547
— — — локальная 298, 310
— — — максимальная 545, 582
Андреевский крест 382, 577
Аорта 156, 182, 566
Аорты бифуркация 139
Артерии 127, 156, 566
Атеросклероз 147, 566
Атлантический океан 366, 567, 581
Атмосфера 394, 512, 567
— изотермическая 241, 360, 520
Аэродинамическая генерация звука 61, 80, 569—571
Бегущая волна 122, 291, 572, 573
Бенджамена — Фейра неустойчивость 556, 583
Бернулли уравнение 16, 544, 565
Б*ойля* закон 19
Бора 235, 562, 572, 573
— волнистая (ундулярная) 225
— турбулентная 225
Борновское приближение 77

Б*уссинеска* приближение 352, 355, 364, 373, 394, 576
Быстроходный катер 335, 339
Ван-дер-Ваальса уравнение 112, 566 567
Вариационный принцип 547—557, 579, 582, 583
Варикозные колебания волны в термоклине 372, 523
Вентури эффект 493, 565
Взаимная поляра 451, 578
Волна взрывная
— плоская 17, 32, 76, 371
— продольная 17
— ударная 569—572
Волновое действие 402
— сопротивление 8, 337, 491, 574, 575
— уравнение 13, 16, 82
— — двумерное 463, 516
— — одномерное 16,121
— — сферически-симметричное 32, 87
Волновой пакет 304
— профиль 238
Волновые числа 380, 439
Волнообразные колебания 371, 480, 520, 575
Волны весьма длинные 556
— гравитационно-акустические 512
— длинные 9, 10, 118, 124, 262, 300, 515
— захваченные 10, 369, 404, 480
— капиллярные 277
— кноидальные 558, 561
— сжатия 189, 201
Время запаздывания 33, 43
Вспенивание на гребнях волн 224, 325, 546, 560, 573, 574, 582, 583
Вязкий пограничный слой 162
Вязкое касательное напряжение 167
Вязкость 14, 24, 101, 205, 251, 287, 409, 423, 458, 565, 567, 573
Вяйсяля — Брента частота 351—377, 380, 393, 405, 477, 497, 515, 576—578
Газ многоатомный 109
— одноатомный 109
— совершенный 19, 233
Гамильтона принцип 547, 565
— функция 388
Гельмгольца резонатор 151, 573
— теорема 15, 565
Геометрическая акустика 90, 99, 116, 155, 385, 577
Гидравлическая средняя глубина 123
Гидравлический прыжок 218, 560, 562, 572, 573, 584
— удар 117
Гидростатическое соотношение 24, 123, 350
Граница раздела 132, 349, 372, 575
Громкоговоритель 38, 93, 117, 161, 234, 568, 569
Групповая скорость 10, 255, 295, 313, 379, 301, 515, 573
— — эффективная 554
Гюгонио закон 199, 203, 569, 572
Движущийся источник 76
Децибел 30, 569, 570
Диспергирующие волны 10, 569, 580, 582, 583
Дисперсионное соотношение 26, 268, 361, 326
— — неоднородное 313
Дисперсия 260, 425
Диссипация 20, 23, 240, 566, 569, 571
— внутренняя 283, 423, 435, 458, 576, 577, 584
— поверхностная 223, 283, 325, 583, 584
Диффузное излучение 509
Длина возмущенной зоны 215
— волны 25
Допплера соотношение 397, 482
Емкость 77 145
Завихренность 15, 165, 257, 580

Задержка 148
Закон сохранения массы 79
Запаздывание 105
Затухание 9, 100, 267, 327
Захваченные волны 10, 369, 480,404
Звуковой ветер 411, 568, 572
— удар 571, 244, 252, 571
Избыточная скорость сигнала 186, 211, 232
Избыточное давление 27
Изотропный поток 80
Индуктивность 148
Инерционные волны 529, 580
Инерция жидкости 14
Интенсивность звука 28, 43, 568, 569
— ударной волны 201
Инуи эксперимент 492, 575
Источник звука 38, 39, 43
Кавитация 52, 113, 565
Каустика 575, 578
Квадруполь 69, 78
Квазиодномерные волны 502
Кельвина клин корабельных волн* 335, 487, 574, 575, 580
Когерентные флуктуации 93
Количество движения 45
Компактная область 129
Компактность 116
Компактное распределение источников 448, 568—572
Компактный источник 9, 508
Комплексная проводимость 142,144
Конвективная скорость 13
Кортевега — де Фриза уравнение 557, 562, 584
Коэффициент теплопроводности 107
Критическая глубина 252, 57?
Критический слой 578
Критическое значение 117
Крылья насекомых 59
Лагранжа уравнения 547
Лапласа уравнение 33
Лапласиан 16
Линейная теория 13, 25, 121, 531, 537
Локальная скорость 13
Локальное дисперсионное соотношение 359
Луковицеобразный нос 493, 575-
Максвелла соотношение 23
Массовый расход 34, 113, 120
Математический маятник 343
Маха локальное число 202
Мембрана 117
Метод наискорейшего спуска 308
Множитель сферического ослабления 35
Мода бароклинная 530, 567, 568, 581
— баротропная 530, 567, 568, 581
— основная 117, 579
Монополь 32
Мощность источника 38
Напряженность диполя 41, 47
— точечного источника 34, 47, 82
Невозмущенная жидкость 70
Недиспергирующие волны 295, 541
Нелинейная дисперсия 562
Нелинейные процессы 563
Неподвижная сфера 75, 76
Несжимаемая жидкость 33
Неустойчивость потока 59
Обобщенная жесткость 51, 273
— масса 51, 273
Обратимый процесс 22
Объемный расход 33
Океанический термоклин 368, 520, 576
Остроградского — Гаусса теорема 83
Ось диполя 44
Отражение отрицательное 135
— положительное 135
— энергия 116
Отраженная волна 135, 519
Падающие звуковые волны 70
Парсеваля теорема 312
Плотность действия 549
— лагранжиана 547, 583
Подветренные волны 374

Поле ближайшее 44
— ближнее 43, 73
— дальнее 38, 43, 73, 242
— слабое 73
Порог слышимости 31
Пороговая частота 161, 250, 505
Потенциал скорости 15
Поток волновой энергии 354
— количества движения 80
— массы 45
— тепла 107
Предельное решение 559
Преломление 314
Приливные силы 532
Приливы 581
Принцип соответствия 388
Присоединенная масса 57
Проводимость 134, 141, 156
Простое растяжение 106
— сжатие 106
Пуассона коэффициент 125
Пульсация пузырьков 49
Пульсовая волна в артериях 118, 139, 156, 249, 566
Радиальные колебания 87
Разрушающая интерференция 93
Разрывная волна 119
Растяжимость 118, 121, 146, 566
Резонанс 9, 73, 144, 157, 171, 504, 565—568, 579
Резонансная частота 73, 151
Рейнольдса маятник 343
— напряжение 399, 408, 412, 421, 522 577
— число 413,423,565,572
Релеевское рассеяние 76
Р*елея* закон 421, 568
Рефракция 386, 398, 404, 573, 574
— волновой энергии 387
Римана теория 174—180, 209, 571
Россби волны 533, 579—582
Ротор поля 15
Рупор громкоговорителя 117, 234, 250, 568
— — конический 250, 569
Сверхзвуковой удар 244, 252, 332, 571
Сдвиговое искажение 188
Сжимаемость 14, 121
Сила инерции 74, 398
— трения 163
Сирена 48, 49
Скорость звука 18, 23
— света 17
— распределения энергии 3, 8, 568
Снелла закон 392, 404
Солевые пальцы 368
Солитон 562
Солитонов ансамбль 562
Сопротивление 134, 151
Спектр 491
Стационарная картина волн 321
— фаза 92, 245, 237, 304, 331, 424, 443, 462, 521, 566, 574, 580
Стеноз 249
Стивенсона уравнения 524, 577
Сток 39
Стокса предельная волна 516
Стокслет 413, 414
Стоксовский дрейф 342
Стратифицированная атмосфера 255 373, 391, 402, 512, 567, 568, 572, 577—579
— энтропия 25
Стратифицированной атмосферы устойчивость 350, 374
Стратифицированный океан 350, 391, 576, 581
Стратосфера 350, 374
Тейлора столб 529, 580
Теплоемкость 20, 21
Теплопроводность 14, 20, 105
Толщина вытеснения 284, 285
Томаса — Стивенсона анализ внутренних волн 458, 577
Точки застоя 422
Трение о дно 283
Тропопауза 374

Турбулентность 12, 224, 577, 582, 585
Турбулентный поток 69, 80
Ударная волна 195, 252
— — хвостовая 216
Уединенная волна 559, 562, 583, 584
Уизема правило 214
— уравнение 551
Ундулярный прыжок 224
Уравнение количества движения 14, 101, 120, 158, 177, 257, 515, 565
— неразрывности 14, 15, 298, 102, 158, 169, 286, 358, 515, 565
Условие излучения 327
Фазовая скорость 10, 224
— функция 297
Физиология кровообращения 9, 566
Фруда число 336
Холла эффект 540
Центр инерции 56
Центрированная простая волна 193
Цилиндрические волны 502
Цунами 532, 580
Шлирен-метод 382, 576
Шум винта 59,
— струи 78,
Шума уменьшение 9, 79, 569, 570
Эйри интеграл 465, 578
Эластомеры 127
Энергия внутренняя 19—22
— кинетическая 26
— потенциальная 26, 27
— свободная 282
Энтропия 22, 23, 571
Эоловы тона 59, 113
Эффективная сжимаемость 122
Юнга модуль 125

Предисловие редакторов перевода

Настоящая монография несомненно привлечет внимание советских читателей хотя бы по двум причинам. Во-первых, она принадлежит перу всемирно известного английского гидромеханика профессора Кембриджского университета сэра Джеймса Лайтхилла, который внес большой вклад в развитие теории волн в жидкостях, обогатив ее первоклассными исследованиями. Во-вторых, тематика этой книги весьма актуальна. Действительно, волны в жидкостях изучаются не только в классической акустике и гидромеханике, но и в океанографии, метеорологии, астрофизике, магнитной гидродинамике, теории корабля, гидравлике, физиологии кровообращения. Теория волн в жидкостях охватывает самые разнообразные физические явления, такие как приливно-отливные движения, цунами, ветровые и корабельные волны, гидравлические прыжки, ударные и взрывные волны, звуковые удары от летящего самолета, волны в ионосфере, волны в волноводах и т. д.

Эта книга написана автором как обстоятельное введение в теорию волн в жидкостях. Здесь в четырех главах детально обсуждаются четыре основных вида волн — звуковые волны, одномерные волны в жидкостях, волны на воде и внутренние волны в стратифицированной среде. Другие, более специальные виды анизотропных и диспергирующих волновых систем (например, волны во вращающейся жидкости или волны в электропроводящей среде) рассматриваются более кратко в эпилоге. Отбор материала и композиция книги обосновываются в прологе.

С методологической стороны монография отличается единообразием, тщательностью и ясностью изложения, продуманностью и глубиной анализа, выявлением взаимосвязи различных вопросов. Наряду с фундаментальными идеями и классическими результатами теории волн в жидкостях здесь освещены (хотя и в более сжатой форме) современные подходы и новые достижения в этой области, полученные, в частности, и самим Лайтхиллом. Автор не просто излагает теоретические результаты, но физически интерпретирует их и приводит разнообразные приложения, например, из радиотехники, аэродинамики, кораблестроения, гидротехники, биологии. В целом ряде случаев указываются количественные оценки и представляются экспериментальные данные. Обращает на себя внимание модели-

рование генерирования и распространения звука с помощью волновой кюветы, проведенное при участии автора.

Материал в книге преподносится в доступной форме и для его понимания требуется знание только основ математики, общей механики и гидромеханики. В конце каждой главы приводятся упражнения и задачи. Все это позволяет использовать книгу как учебное пособие.

Монография снабжена обширным указателем общей и специальной литературы по затрагиваемой тематике, содержащим свыше 230 ссылок и снабженным краткими библиографическими комментариями по каждой цитируемой работе. К сожалению, ссылки даны фактически лишь на англоязычные издания (так, труды советских авторов цитируются всего пять раз, причем в переводах), что, очевидно, было сделано в интересах английского читателя. Восполнить этот пробел и дополнительно привести список трудов советских ученых, опубликовавших большое количество интересных и важных работ по теории волн в жидкостях, нам представляется затруднительным,так как это, вероятно, удвоило бы объем библиографии. Поэтому мы упомянем в данной связи лишь несколько монографий широкого плана: Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости,— 2-е изд.— М.—Л.: Наука, 1976; Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— 6-е изд.: В двух частях.— М.: Физматгиз, 1963; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.—2-е изд.— М.: ГИТТЛ, 1954; Физика океана. Под ред. В. М. Каменковича и А. С. Монина. Том 1. Гидрофизика океана. Том. 2. Гидродинамика океана.— М.: Наука, 1978.

В подготовке русского издания книги участвовал целый коллектив, в котором работа была распределена следующим образом: А. И. Державина перевела пролог и гл. 1, Е. Д. Терентьев — гл. 2, Ю. И. Ромашкевич — гл. 3 и эпилог, З. Н. Добровольская — гл. 4, П. И. Чушкин редактировал пролог, гл. 1, 2 и библиографические комментарии, П. П. Корявов — гл. 3, 4 и эпилог.

Мы уверены, что данная монография будет с интересом встречена широким кругом читателей — научных сотрудников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов, сталкивающихся с применением теории волн в жидкостях в различных областях науки и техники.

П.П. Корявов

П.И. Чушкин

Предисловие

Цели настоящей книги подробно описаны в прологе. Основной материал изложен в главах 1—4, а в эпилоге содержатся краткие очерки некоторых дополнительных тем.

Хотя в тексте по ходу изложения не даются ссылки на литературу, для удобства ориентирования в основном материале в конце книги приведены библиографические комментарии, позволяющие читателю найти более подробные сведения по каждой из упомянутых тем. Далее приведен список обозначений, поясняющий смысл основных используемых символов.

Номера страниц книги, на которых приведены библиографические комментарии, выделены жирным шрифтом; этот шрифт используется далее для ссылок в именном и предметном указателях.

В пределах каждой главы математические формулы снабжены порядковыми номерами в круглых скобках. В каждой новой главе нумерация начинается заново. При ссылках на формулы в тексте имеются в виду формулы той же главы. Напротив, для рисунков используется сквозная нумерация (от 1 до 117) по всей книге.

В конце каждой главы приведены упражнения, рекомендуемые читателю.

Кембридж, 1978 *Джеймс Лайтхилл*

Пролог

Настоящая книга построена как обстоятельное введение в теорию волн в жидких средах (т. е. в жидкостях и газах); эта область исследований составляет существенную часть динамики жидкости, а также значительную часть общей теории волн и кроме того находит важные приложения в изучении окружающей среды и в технике. Указанная область механики необычайно широка. Различные типы волн в жидкостях, фундаментальные идеи, выдвигаемые для объяснения свойств волн, и разнообразные приложения этих свойств столь многочисленны, что создание введения в эту область в рамках одного тома потребовало тщательного отбора материала.

Структура книги (четыре главы и эпилог) преследовала две основные цели. Во-первых, как видно из названий глав, такая структура позволяет в основных главах глубоко проанализировать четыре важнейших и характерных типа волн в жидкости (звуковые волны, одномерные волны в жидкости, волны на воде, внутренние волны), а затем в эпилоге дать краткое описание некоторых других важных типов волн. В то же время материал четырех глав подбирался из тех соображений, чтобы изложить по возможности последовательно большинство обычно используемых фундаментальных идей теории волн в жидкостях. Исключение составляют некоторые новые и весьма сложные идеи, которые даже в таком обстоятельном введении нельзя представить с должной полнотой; они только намечены в эпилоге со ссылками на соответствующие работы, где можно найти их более подробное изложение.

Структура каждой главы подчинена *двум* целям: проанализировать основной тип системы волн, указанной в ее названии, а также развить главное ядро фундаментальных идей в приложении к волнам в жидкости. Идеи, развитые в каждой главе, особенно важны для системы волн, рассматриваемой в данной главе, но они применимы и к теории волн вообще и, в частности, к другим системам волн в жидкости. Поэтому в последующих главах описываются некоторые приложения излагаемых в них идей к системам волн, рассмотренным в предыдущих главах. Так, например, методы, развитые в гл. 2, используются для анализа образования и распространения сверхзвукового удара, а методы гл. 4 используются для анализа волнового сопротивления кораблей.

Постоянно указываются практические приложения: к проблеме уменьшения шума в гл. 1 и 2; к столь далеко отстоящим областям, как гидравлика и физиология кровообращения в гл. 2, к океанографии и использованию океана в гл. 3 и 4 и к различным аспектам исследования атмосферы в гл. 4. Некоторые еще более разнообразные приложения указаны в эпилоге.

В рамках волновой теории в целом волны в жидкости характеризуются их способностью взаимодействовать со сложными полями течений. Поэтому такие взаимодействия подробно описываются в данной книге (см., в частности, разд. 1.10, 2.14, 3.9, 3.10, 4.6, 4.7 и 4.12).

Из вопросов, рассмотренных в начале гл. 1, особую важность представляют такие вопросы, как свойство линейности (допущение прямого линейного наложения различных волновых движений); понятие переноса энергии волнами; различный характер распространения волн в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Далее разрабатываются два совершенно различных круга идей, дополненных их приложениями и касающихся (i) источников, размеры области распределения которых малы по сравнению с длиной генерируемых волн («компактные источники») и (ii) жидких систем, размеры которых велики по сравнению с длиной волны; оба круга идей применяются к проблемам источников шума. В следующих главах все эти идеи развиваются дальше; см., в частности, разд. 4.9 в связи с компактными источниками и разд. 4.5, где излагается общий метод прослеживания лучей в приложении к системам, свойства которых постепенно меняются в масштабе длины волны.

Кроме того, в разд. 1.11 и 1.12 рассмотрен промежуточный режим. И наконец, в гл. 1, как и в остальных главах книги, описываются процессы, связанные с *затуханием* волн: процессы, включающие диссипацию внутри жидкой среды (разд. 1.13), диссипацию около твердой границы (разд. 2.7) или около свободной границы (разд. 3.5), или же генерирование стационарных потоков затуханием волн (разд. 4.7).

В гл. 2 более подробно обсуждаются вопросы одномерного распространения возмущений и показывается, что возможен единый подход к широкому классу на первый взгляд совсем различных систем; сюда включаются распространение звука в трубах, пульсация крови в артериях и длинные волны в открытых каналах. К основным вопросам, рассмотренным в первой половине гл. 2, относятся следующие: (i) различное влияние *разрывных* или *постепенных* изменений свойств трубопровода или канала на распространение волн, (ii) приложение развитой теории к распространению волн в разветвляющих системах и (iii) изучение различных возможных резонансов.

Вторая половина гл. 2 посвящена широкому исследованию нелинейных эффектов, в частности тех эффектов, которые приводят к резкому увеличению локальной крутизны волнового профиля. Подробно описаны ударные волны и другие существенно разрывные волны, включая соотношение между степенью крутизны волнового профиля и диссипативными эффектами; в общих чертах описываются методы прослеживания за развитием сложных сигналов, включающих ударные волны. В заключение одномерная нелинейная теория применяется к случаю распространения сигналов вдоль тех самых абстрактных «трубок лучей», свойства которых впервые были рассмотрены в гл. 1.

Изучение волн на воде, начало которому было положено в гл. 2 при рассмотрении «длинных» волн (волны, длина которых значительно больше глубины воды) и связанных с ними разрывов («гидравлические прыжки»), продолжено далее в гл. 3. Помимо динамики поверхностных волн с учетом силы тяжести или поверхностного натяжения в качестве возвращающей силы в гл. 3 также рассматриваются особые свойства «диспергирующих» волн. Для диспергирующих систем общего вида, которые являются изотропными (в том смысле, что свойства распространения возмущений не зависят от направления, хотя и изменяются с длиной волны), устанавливается фундаментальное различие между фазовой скоростью и групповой скоростью. Теория таких систем рассматривается с трех дополняющих друг друга точек зрения (разд. 3.6—3.8) и затем применяется к анализу поверхностных волн, генерируемых штормами, препятствиями в потоке или движением корабля в воде.

Соответственно в гл. 4 в основном рассматриваются диспергирующие волны в системах, *не* являющихся изотропными, в том числе внутренние гравитационные волны в стратифицированных жидкостях, которые дали название всей главе. Для таких систем групповая скорость и фазовая скорость могут быть совершенно различными как по направлению, так и по величине, что приводит ко многим важным следствиям. Подробно рассмотрены также и другие фундаментальные вопросы, такие как «захваченные волны», каустика, взаимодействие волн с потоком, движущиеся источники волн в общем случае и, наконец, волноводы.

С другой стороны, два класса фундаментальных идей, сопровождаемых трудностями более высокого порядка, отнесены в эпилог, где они рассмотрены только схематически (с соответствующими ссылками на литературу). Сюда относятся теории взаимодействия дисперсионных эффектов и эффектов нелинейности, а также теории развития статистических ансамблей волн, вызванного нелинейными взаимодействиями.

Читатель, обращающийся к данной книге, вероятно знаком с основами *динамики*, в том числе динамики колебаний и элементарной гидродинамики. Тем не менее по этим вопросам, а также по всем другим вопросам, предварительное знание которых было бы желательным, в библиографических комментариях дан подбор соответствующих учебников.

Изложение теории волн здесь носит количественный характер и преследует цель описать в общих чертах всюду, где это возможно, методы количественного анализа. Подчиняясь этой цели, математический аппарат, однако, сведен к минимуму. Никакая математика не излагается ради математики; более того, каждый раз проводимому здесь математическому анализу дается в максимально возможной степени ясная физическая интерпретация. Тем не менее предмет теории волн, по-видимому, требует использования комплексных переменных; соответственно элементарная теория функций комплексного переменного и (по тем же соображениям) элементарные свойства интегралов Фурье относятся к тем математическим вопросам, которые предполагаются известными читателю этой книги; в противном случае ему, возможно, следует ознакомиться с ними по соответствующим учебникам.

Наиболее важными волнами в жидкости являются звуковые волны (гл. 1), поскольку они могут существовать при отсутствии поля внешних сил. Читатели, знакомые с элементарной теорией колебаний, знают, что всякая волна или другая любая колеблющаяся система связана с балансом между возвращающей силой и силами инерции системы. Большинство волн, рассматриваемых в данной книге, сопровождается действием внешних возвращающих сил, в особенности силы тяжести (гл. 2, 3 и 4), но также и поверхностного натяжения (разд. 3.4) или сил упругости стенок трубы (разд. 2.2). Другие внешние силы, которые важны для волновых систем, рассмотрены в эпилоге; сюда относятся сила магнитного поля и кориолисова сила, которая действует на вращающуюся жидкость.

Распространение звуковых волн, однако, не зависит от внешних сил. Здесь возвращающая сила, которая уравновешивает силы инерции жидкости, полностью обеспечивается сжимаемостью самой жидкости. Поскольку свойства сжимаемости жидкости одинаковы во всех направлениях, распространение звуковых возмущений изотропно.

Напротив, большинство волновых движений, обусловленных *внешней* возвращающей силой, анизотропно, и именно поэтому столь важна теория анизотропного распространения волн, изложенная в гл. 4. Волны на горизонтальной поверхности воды являются исключением, поскольку их распространение в гори-

зонтальной плоскости носит двумерный характер, и очевидно, что действие вертикальной внешней силы, такой, как сила тяжести, одинаково для всех направлений в горизонтальной плоскости. С другой стороны, в случае, когда источником таких волн является движущийся корабль, они становятся по существу анизотропными в силу эффекта Допплера (разд. 4.12).

Те обширные разделы гидродинамики, которые связаны с исследованием свойств волн в жидкости, относятся к важным областям современных исследований. Они находят применение, например, в современной авиационной технике и других отраслях техники, где исследование шума очень важно, а также в вопросах кораблестроения и строительства сооружений береговой защиты, где важен учет волн на поверхности моря.

Указанные области исследования включают в себя, кроме того, изучение приливных и поверхностных волн в океанах, морях и эстуариях, а также многообразных океанических течений волновой природы. Сюда входит анализ некоторых важных явлений распространения возмущений в атмосфере, от мелкомасштабной «турбулентности чистого воздуха» до крупномасштабных волнообразных движений воздушных масс, а также многих особенностей взаимодействия воздуха и моря. Другой областью активных геофизических исследований служит распространение волн в ионосфере и в жидком ядре Земли; при астрофизических наблюдениях также постоянно обнаруживаются волнообразные движения газа, весьма подходящие для анализа подобными методами. Предлагаемая книга, построенная как обстоятельное введение в теорию волн в жидкости, имеет своей целью подготовить читателя для работы в любой из этих областей исследований, давая ему прочный фундамент основных идей, при помощи которых можно легко освоить специальную литературу в каждой из таких областей.

1. Звуковые волны

1.1. Волновое уравнение

Как было отмечено в прологе, распространение звуковых волн в жидкости определяется балансом между ее сжимаемостью и инерцией. Линейная теория распространения таких волн излагается в этой главе.

При использовании линейной теории для любого типа волн подразумевается, что возмущения настолько слабы, что в уравнениях движения их можно рассматривать как малые величины, произведениями которых можно пренебречь. Такие произведения малых величин входят, например, в известное выражение для ускорения элемента жидкости

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — поле вектора скорости. В этом выражении (которое играет важную роль в тех случаях, когда важны силы инерции, как это имеет место практически для всех волн в жидкости) линейный член $\partial\mathbf{u}/\partial t$ представляет собой локальную скорость изменения $\mathbf{u}$ в фиксированной точке, в то время как нелинейный член $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ указывает, как меняется скорость элемента вследствие изменения его положения в пространстве. Эта «конвективная скорость изменения» скорости $\mathbf{u}$ содержит произведения составляющих самой скорости и ее пространственных градиентов и поэтому не учитывается в линейной теории. Таким образом, в этой главе мы предполагаем, что возмущения являются достаточно малыми и поэтому можно пренебречь как нелинейными вкладами в инерционные члены, так и нелинейными членами в выражениях для восстанавливающих сил (в данном случае связанных со сжимаемостью). Исследование вопросов о том, *насколько* слабыми должны быть возмущения для того, чтобы линейная теория была достаточно хорошей, и какие эффекты могут давать нелинейные члены в случае более сильных возмущений, откладывается до гл. 2.

В данном разделе, принимая во внимание только сжимаемость и инерцию жидкости, но не другие ее свойства, мы получим линеаризованные уравнения теории звука в самом простом и весьма полезном виде. Обсуждение того, каким образом на звуковые волны влияют эффекты, которые здесь не учитываются (в особенности вязкость, теплопроводность, внешние силы, включая силу тяжести, и неоднородности типа стратификации), отложим до разд. 1.2 и других частей книги.

Инерционная природа жидкости с плотностью ρ проявляется при применении второго закона Ньютона к малому элементу жидкости. Согласно этому закону, произведение массы ρ единичного объема на ускорение (1) равно силе, действующей на этот объем; при отсутствии внешних сил последняя включает в себя лишь внутренние напряжения, вызываемые действием окружающей жидкости на этот элемент. Если пренебречь вязкими напряжениями, то действующая на единичный элемент объема сила будет просто равна градиенту давления жидкости ∇p со знаком минус; следовательно,

$$\rho\,(\partial \mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = -\nabla p. \tag{2}$$

Свойство сжимаемости означает, что плотность элемента жидкости может меняться в соответствии с известным уравнением неразрывности

$$\partial\rho/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{3}$$

Два первых члена в уравнении (3) дают полную скорость изменения ρ для этого элемента. Таким образом, *дивергенция* $\nabla\cdot\mathbf{u}$ поля скорости определяется уравнением (3) как скорость изменения объема элемента жидкости, движущейся в данном поле скорости, деленная на этот объем; иначе говоря (поскольку масса элемента сохраняется), дивергенция скорости равняется скорости изменения плотности, деленной на плотность и взятой со знаком *минус*. В то же время возможна и другая интерпретация уравнения (3), при которой второй и третий члены объединяются в виде $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})$ и которая будет использована ниже (разд. 1.10).

Линеаризуем выписанные уравнения, считая малыми величинами все отклонения от состояния, в котором жидкость покоится и имеет постоянную плотность ρ_0. При отсутствии внешних сил это означает также, что давление равно постоянной величине, например p_0.

Пренебрегая произведениями малых величин в уравнениях (2) и (3), приходим к линеаризованным уравнениям количества движения

$$\rho_0\,\partial\mathbf{u}/\partial t = -\nabla p \tag{4}$$

и неразрывности

$$\partial\rho/\partial t = -\rho_0 \nabla\cdot\mathbf{u} \tag{5}$$

При выводе этих уравнений отбрасывается член $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ в уравнении (2), как уже обсуждалось выше, а также член $\mathbf{u}\cdot\nabla\rho$ в уравнении (3); оба эти члена содержат произведения малых скоростей на малые градиенты. Кроме того, множитель ρ в одном из членов каждого уравнения заменяется на ρ_0 с точностью до произведения малой величины $\rho - \rho_0$ на другую малую величину ($\partial\mathbf{u}/\partial t$ или $\nabla\cdot\mathbf{u}$). В результате получается, что локальные скорости изменения скорости $\mathbf{u}$ и плотности ρ прямо пропорциональны градиенту давления и дивергенции скорости соответственно.

Величиной, которая в линейной теории ведет себя чрезвычайно просто, является завихренность

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \tag{6}$$

т. е. ротор поля скорости (относительно общих свойств завихренности см. любой курс гидродинамики). В самом деле, из уравнения (4) вытекает, что

$$\partial\boldsymbol{\Omega}/\partial t = 0, \tag{7}$$

так как rot ∇p равен нулю. Таким образом, поле завихренности не зависит от времени: в приближении линейной теории звука завихренность «остается неподвижной», хотя многие другие величины могут распространяться.

Такое заключение может удивить читателя, знакомого с теоремой Гельмгольца, утверждающей, что «вихревые линии движутся вместе с жидкостью». Однако в линейной теории все подобные изменения, обусловленные конвекцией, считаются пренебрежимо малыми, и это вполне разумно в теории звука, в которой принимается, что изменения других величин (таких, как давление) распространяются на сотни метров в секунду, по сравнению с чем конвекция при относительно малых скоростях течения представляется пренебрежимо малой.

Вихревая часть поля скорости, которая «индуцируется» полем завихренности $\boldsymbol{\Omega}$, не должна, согласно уравнению (7), зависеть от времени. Остальная часть поля скорости является безвихревой и, таким образом, может быть представлена как градиент $\nabla\varphi$ от потенциала скорости φ. Только в этой части поля возникают флуктуации, вызванные распространением звука.

Учитывая сказанное, положим

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi, \tag{8}$$

так что $\mathbf{u}$ рассматривается как безвихревая часть поля скорости (которая остается после вычитания скоростей, индуцируемых стационарным полем завихренности). В рамках линейной теории взаимодействие этого безвихревого движущегося поля скорости со стационарным полем завихренности не проявляется. Действительное распространение звуковых полей через вихревые линии, которые на самом деле движутся вместе с жидкостью, будет исследовано ниже (разд. 4.6); если скорости течения много меньше скорости звука, то можно показать, что это взаимодействие приводит самое большее к весьма медленным изменениям.

Из уравнений (4) и (8) следует, что

$$p - p_0 = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t, \tag{9}$$

поскольку градиенты от обеих частей уравнения (9) всюду равны и поскольку обе эти части обращаются в нуль в невозмущенной области течения, если потенциал скорости, как обычно, берется как решение уравнения (8), равное нулю в этой области. Уравнение (9) отличается от известного уравнения Бернулли для нестационарных безвихревых течений отсутствием в правой части члена $-(1/2)\rho_0 (\nabla\varphi)^2$ (которым в линейной теории пренебрегают).

Из уравнений (5) и (8) получаем выражение для скорости изменения плотности

$$\partial\rho/\partial t = -\rho_0 \nabla^2\varphi \tag{10}$$

через лапласиан $\nabla^2\varphi$, но дальнейшие преобразования уравнений (9) и (10) провести нельзя до тех пор, пока не будут использованы свойства сжимаемости жидкости, приводящие к явному виду связи между изменениями давления и плотности. Характер такой связи будет обсуждаться ниже (разд. 1.2), но здесь мы просто предположим наличие некоторой функциональной зависимости: $p = p(\rho)$. Линеаризуя ее посредством разложения в ряд Тейлора в окрестности $\rho = \rho_0$

$$p = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0) p'(\rho_0) + \ldots \tag{11}$$

и пренебрегая всеми членами, содержащими квадраты и более высокие степени $\rho - \rho_0$, получаем

$$\partial p/\partial t = p'(\rho_0)\, \partial\rho/\partial t. \tag{12}$$

Отсюда, подставляя в левую часть p из уравнения (9), а в правую часть выражение (10) для $\partial\rho/\partial t$, выводим уравнение

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 = c^2 \nabla^2\varphi, \tag{13}$$

где постоянная c (имеющая размерность скорости) определяется формулой

$$c^2 = p'(\rho_0). \tag{14}$$

Большинство читателей узнает в уравнении (13) «волновое уравнение» — уравнение, типичное для любого явления с сохранением энергии, в том числе и для распространения волн через однородную среду с единственной возможной скоростью волны c, не зависящей ни от формы волны, ни от направления ее распространения. Этому уравнению удовлетворяют, например, компоненты электромагнитных полей в вакууме, если c — скорость света, равная $3 \cdot 10^8$ м/с. Как будет показано ниже (разд. 1.2), скорость звука c, определяемая формулой (14), на несколько порядков меньше этой величины.

Простейшим решением уравнения (13) является «плоская волна», бегущая в положительном направлении оси x:

$$\varphi = f(x - ct). \tag{15}$$

Здесь $f(x)$ задает форму волны при $t = 0$, причем в более поздние моменты времени t форма волны сохраняется, но сдвигается на расстояние ct в направлении положительной оси x. Такая волна является «продольной» в том смысле, что поле скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, удовлетворяющее равенствам

$$u = f'(x - ct), \quad v = w = 0, \tag{16}$$

параллельно направлению распространения волны.

Для такой бегущей плоской волны уравнение (9) дает

$$p - p_0 = \rho_0 c u, \tag{17}$$

т. е. прямую пропорциональность между избыточным давлением и составляющей скорости жидкости в направлении распространения волны. Эта пропорциональность обусловлена тем, что в точке бегущей волны, где давление увеличивается, градиент давления в направлении распространения волны принимает отрицательное значение $-c^{-1}\,\partial p/\partial t$ и, таким образом, *ускоряет* жидкость, в которой соответствующая составляющая ускорения $\partial u/\partial t$ имеет положительное значение $(\rho_0 c)^{-1}\,\partial p/\partial t$ (см. уравнение (4)). Заметим, что формула (17) дает намного большее приращение давления при данном u, чем получилось бы для стационарного течения в соответствии с членом $(1/2)\rho_0 u^2$.

Решение (15) не является единственным решением волнового уравнения, зависящим от двух переменных x и t; другим решением будет

$$\varphi = g(x + ct), \tag{18}$$

а общее решение дается суммой решений (15) и (18) с произвольными функциями f и g. Формула (18) описывает плоскую волну, бегущую в отрицательном направлении оси x; поле скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$ удовлетворяет равенствам

$$u = g'(x + ct), \quad v = w = 0, \tag{19}$$

а избыточное давление составляет

$$p - p_0 = -\rho_0 c u, \tag{20}$$

но по-прежнему отношение избыточного давления к составляющей скорости $(-u)$ в направлении распространения равно $\rho_0 c$.

В общем случае плоская волна, бегущая в направлении вектора (ξ, η, ζ), представляется функцией

$$\varphi = h(\xi x + \eta y + \zeta z - ct), \tag{21}$$

которая удовлетворяет уравнению (13) при условии, что $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Из уравнений (8) и (9) очевидно, что

$$\mathbf{u} = (\xi, \eta, \zeta)(\rho_0 c)^{-1}(p - p_0), \tag{22}$$

т. е. мы снова имеем продольную волну с составляющей скорости $(\rho_0 c)^{-1}(p - p_0)$ в направлении ее распространения.

Предположения о независимости скорости волны c от направления вектора (ξ, η, ζ), а также от формы волны h упрощают «волновое уравнение», но такое упрощение оказывается недопустимым во многих других задачах о волнах в жидкости (см. ниже, начиная с гл. 3 и 4).

1.2. Скорость звука

Хотя формула (14) для скорости звука была известна еще Ньютону, ему не удалось получить хорошее согласование между вычисляемой по ней величиной скорости звука и результатами наблюдений. Эксперименты Бойля с газами показали, что при умеренных значениях давления оно увеличивается с уменьшением объема газа и что давление почти пропорционально плотности при фиксированной температуре; с учетом последнего предположения формулу (14) можно записать как $c^2 = p_0/\rho_0$, откуда для воздуха при 20° С получается $c = 290$ м/с, что значительно меньше наблюдаемой величины 340 м/с.

Не более чем столетие спустя Лаплас объяснил, что это расхождение получается из-за недопустимости использования данных, полученных при фиксированной температуре. Каждый раз, когда в звуковой волне сжимается элемент газа, соседняя жидкость совершает над ним работу, и эта «работа сжатия»

увеличивает внутреннюю энергию элемента, таким образом повышая его температуру. Эксперименты, подобные экспериментам Бойля с газами, выполняются в резервуарах с большой теплоемкостью, благодаря чему допускается теплообмен в газе после сжатия; при этом изменение объема измеряется только после достижения стационарного состояния, связанного с возвращением к начальной температуре.

Наоборот, для локальных сжатий внутри звуковой волны подобных ограничений на изменение температуры нет; вычислим величину этого изменения температуры и определим, как она влияет на скорость звука в тех газах, которые с хорошей степенью приближения удовлетворяют закону Бойля. Это так называемые «совершенные газы»; к ним относятся воздух и любой газ, плотность которого очень мала по сравнению с плотностью того же вещества в конденсированной фазе. Тогда величина давления хорошо аппроксимируется выражением

$$p = RT\rho, \tag{23}$$

где T —абсолютная температура в градусах Кельвина (т. е. температура в градусах Цельсия плюс 273), а формула

$$R = \frac{8314\ (\text{м}^2/\text{с}^2)\cdot\text{К}^{-1}}{\text{Средний молекулярный вес}} \tag{24}$$

позволяет выразить RT (в $\text{м}^2/\text{с}^2$) через средний молекулярный вес газа или газовой смеси.

С физической точки зрения совершенным является такой газ, в котором в каждый момент времени только очень малая часть молекул находится настолько близко к другим молекулам, что они могут взаимодействовать. Давление такого газа близко к величине $RT\rho$, связанной с переносом количества движения за счет случайного поступательного движения молекул, поскольку вклады от действия межмолекулярных сил, пропорциональные более высоким степеням ρ, пренебрежимо малы. Отнесенная к единице массы внутренняя энергия E такого газа, которая с хорошей степенью приближения представляется функцией только от температуры $E = E(T)$, пропорциональна средней энергии (поступательного движения, вращения и колебаний) изолированной молекулы, поскольку вклады потенциальной энергии, связанные с межмолекулярными силами, тоже являются пренебрежимо малыми.

Если объем элемента газа остается неизменным, то для любого повышения температуры dT требуется на единицу массы подвод тепла, равный требуемому увеличению внутренней энергии $E'(T)\,dT$. Поэтому $E'(T)$ (количество подводимого тепла на единицу массы, требующееся для повышения температуры на

один градус) обозначается через c_v и называется *удельной теплоемкостью при постоянном объеме.*

Кроме того, при сжатии элемента газа имеет место дополнительное увеличение внутренней энергии (за счет совершаемой *работы*, а не тепла), так что его объем V изменяется на величину dV, которая является отрицательной. Тогда полная работа, совершаемая над этим элементом давлением p со стороны соседних элементов, будет равна $p\,(-dV)$, так как каждый соседний малый элемент совершает работу (равную *произведению силы*, с которой он действует, *на перемещение в направлении действия этой силы*) на единицу уменьшения объема элемента, равную силе, деленной на площадь ее приложения, т. е. давлению p. Но объем V единицы массы равен ρ^{-1}, и, таким образом, изменение энергии единицы массы вследствие «работы сжатия» равно

$$dE = p\,(-d\rho^{-1}) = p\rho^{-2}d\rho. \tag{25}$$

В случае когда указанный источник изменения внутренней энергии является единственным, как для звуковых волн, в которых и *теплопроводностью*, и возникновением тепла за счет *диссипации* механической энергии можно пренебречь, соответствующее приращение температуры dT вычисляется следующим образом:

$$p\rho^{-2}\,d\rho = dE = c_v\,dT = (c_v/R)\,(\rho^{-1}\,dp - p\rho^{-2}\,d\rho); \tag{26}$$

при этом используется соотношение (23), связывающее изменения температуры с изменениями давления и плотности.

Теперь видно, что квадрат скорости звука c^2, определяемый формулой (14) как $dp/d\rho$, в силу соотношения (26), связывающего давление и плотность для звуковой волны в совершенном газе, выражается как

$$c^2 = \gamma p/\rho = \gamma RT, \tag{27}$$

где для совершенного газа

$$\gamma = (R + c_v)/c_v. \tag{28}$$

Величина, найденная по формуле (27), равна ньютоновскому значению p/ρ, умноженному на величину γ, которая для воздуха имеет значение 1,40. Соответствующее значение R мы находим по формуле (24), используя средний молекулярный вес 29,0, и тогда при $T = 293$ К (что соответствует 20° С) получаем величину $c = 340$ м/с, с точностью до двух значащих цифр совпадающую со значением, полученным в эксперименте.

Для совершенных газов в общем случае величину (28) можно представить как

$$\gamma = c_p/c_v, \tag{29}$$

где c_p — *удельная теплоемкость при постоянном давлении*, равная $c_v + R$. Это обусловлено тем, что газ, будучи нагретым при постоянном давлении (например, при заданной высоте ртутного столба), *расширяется*, совершая работу над окружающим газом, равную $pd\rho^{-1}$ на единицу массы (она равна взятой со знаком минус работе, которую совершает соседний газ над данным элементом и которая выражается формулой (25)); эта работа при постоянном давлении равна $R\,dT$ в силу (23). Сумма работы $R\,dT$ и увеличения внутренней энергии $c_v\,dT$ должна равняться полному притоку тепла $c_p\,dT$.

Типичный интервал значений γ: от максимального значения 5/3 для одноатомного газа, внутренняя энергия которого просто равна энергии поступательного движения молекул (дающей вклад $(3/2)R$ в c_v), и 7/5 для двухатомного газа (в котором энергия вращения молекул дает дополнительную добавку R к c_v), до таких низких значений, как 1,2 и даже 1,1 для многоатомных газов при высокой температуре (с дальнейшим значительным увеличением c_v из-за колебаний молекул). Во всех этих случаях формула (27), утверждающая, что квадрат скорости звука c^2 превышает его ньютоновское значение в γ раз, хорошо подтверждается наблюдениями.

Для жидкостей или газов, плотность которых слишком велика, чтобы их можно было считать «совершенными газами», простое уравнение состояния (23) и функциональное соотношение между E и T должны быть заменены более сложными соотношениями

$$p = p(\rho,\ T), \quad E = E(\rho,\ T), \tag{30}$$

но c^2 по-прежнему выражается как $dp/d\rho$ при условии выполнения равенства (25). Довольно удивительно, что здесь, как и ранее, выполняется соотношение

$$c^2 = \gamma c_N^2, \tag{31}$$

в котором «ньютоновское» значение c_N^2 равно $\partial p/\partial\rho$ при постоянной температуре T, а γ по-прежнему определяется формулой (29) как отношение удельных теплоемкостей.

Это объясняется тем, что любое малое изменение температуры dT при постоянном давлении приводит к изменению плотности

$$d\rho = -\frac{\partial p/\partial T}{\partial p/\partial\rho}\,dT, \tag{32}$$

так что отношение подвода тепла $dE - p\rho^{-2}d\rho$ при постоянном давлении к подводу тепла $(\partial E/\partial T)dT$ при постоянном объеме

составляет

$$\gamma = \left[\frac{\partial E}{\partial T} + \left(\frac{\partial E}{\partial \rho} - p\rho^{-2}\right)\left(-\frac{\partial p/\partial T}{\partial p/\partial \rho}\right)\right] \Big/ \frac{\partial E}{\partial T}. \qquad (33)$$

С другой стороны, изменение плотности, удовлетворяющее соотношению (25), отвечает изменению температуры

$$dT = \frac{p\rho^{-2} - \partial E/\partial \rho}{\partial E/\partial T}\, d\rho, \qquad (34)$$

так что, используя для γ определение (31), приходим к соотношению

$$\gamma = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial T}\left(\frac{p\rho^{-2} - \partial E/\partial \rho}{\partial E/\partial T}\right)\right] \Big/ \frac{\partial p}{\partial \rho}, \qquad (35)$$

которое, очевидно, совпадает с (33).

Более глубокое проникновение в природу скорости звука дает общая термодинамическая теория, использующая понятие «энтропии». Подробные сведения об энтропии и ее свойствах можно найти в курсах термодинамики и статистической физики; здесь же кратко описываются только те свойства, которые необходимы для изучения волн в жидкости.

Энтропия — это некоторая величина, которая остается постоянной в любом «обратимом» процессе, подобном изменениям, постулированным выше для звуковых волн. В обратимом процессе внутренняя энергия E единицы массы газа меняется точно на величину, даваемую формулой (25); никакие дополнительные изменения вследствие перехода кинетической энергии в тепло или передачи тепла извне здесь не имеют места; кроме того, при таком процессе жидкость или газ продолжает удовлетворять тем же соотношениям (30), которые характеризуют условия равновесия. Таким образом, обратимым является процесс, в котором отсутствуют *резкие градиенты* по пространству и по времени, так что: (i) влияние обусловленной вязкостью диссипации энергии в тепло и теплопроводности пренебрежимо мало и (ii) распределение тепловой энергии между различными формами молекулярного движения остается близким к равновесному распределению. Этот процесс обратим, поскольку равное и противоположное изменение восстанавливает начальное состояние через ту же совокупность равновесных состояний.

Отсюда следует, что если градиенты в звуковой волне не слишком велики, то энтропия S единицы массы остается постоянной. Соответственно если для данной жидкости или газа, находящегося в условиях равновесия, можно вывести соотношение

$$p = p(\rho, S), \qquad (36)$$

то

$$c^2 = \partial p/\partial \rho, \tag{37}$$

где частная производная теперь берется при постоянной S.

Энтропия, однако,— это не просто любая величина, которая сохраняет свое постоянное значение в обратимом процессе (процессе, который, в частности, удовлетворяет соотношению (25)); энтропия и абсолютная температура T определяются таким образом, что любое отклонение от условия (25) при переходе от одного равновесного состояния к другому близкому к нему состоянию определяется уравнением

$$dE - p\rho^{-2}d\rho = TdS; \tag{38}$$

иначе говоря, полное подводимое тепло равно TdS. Если все переменные представить в виде функций от ρ и T, как в формулах (30), то из уравнения (38) следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial \rho} - p\rho^{-2}\right), \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}. \tag{39}$$

Учитывая, что $\partial^2 S/\partial\rho\partial T = \partial^2 S/\partial T\partial\rho$, получаем соотношение Максвелла

$$\partial E/\partial \rho = (p - T\partial p/\partial T)\rho^{-2}, \tag{40}$$

которое можно подставить в формулу (33) и найти выражение γ через величины, которые могут быть измерены:

$$\gamma = 1 + \alpha^2 T c_N^2/c_v, \tag{41}$$

где α—коэффициент расширения жидкости или газа $(-\partial\rho/(\rho\partial T))$ при процессе с постоянным давлением; с учетом α имеем для произвольного процесса

$$dp = c_N^2(d\rho + \alpha\rho dT), \tag{42}$$

откуда можно найти $\partial p/\partial\rho$ и $\partial p/\partial T$, подставить в (33) и (40) и получить соотношение (41).

Величина γ всегда превышает единицу, но это превышение для большинства жидкостей значительно меньше, чем для большинства газов. Это превышение весьма мало для холодной воды с необычно малой величиной произведения αT (величина, которая в действительности стремится к нулю при $T = 277$ К). Значения αT для наиболее типичных жидкостей, как правило, близки к значению для горячей воды; в этом случае произведение αT увеличивается до 0,27 при $T = 371$ К (т. е. при 98 °С), что дает величину $\gamma = 1{,}1$. Скорость звука c в воде составляет приблизительно 1400 м/с, и подобные значения характерны для большинства жидкостей.

Второй закон термодинамики утверждает, что *полная энтропия* в любой теплоизолированной системе никогда не может уменьшаться. Происходящие процессы либо являются обратимыми и при этом энтропия остается постоянной, либо не обладают свойством обратимости и при этом энтропия увеличивается, как, например, в случае, когда в результате обусловленной вязкостью диссипации кинетической энергии получается приращение тепла TdS или когда некоторое количество тепла передается от части системы с более высокой температурой T к части системы с более низкой температурой (так что последняя приобретает больше энтропии, чем теряет первая). С точки зрения статистической физики энтропия является мерой случайности организации системы молекул вещества, и в обратимых процессах эта мера остается постоянной, в то время как при необратимых изменениях ее полная величина для изолированной системы может только увеличиваться, так как система движется в области «пространства состояний» со все большей и большей вероятностью.

В звуковых волнах любые необратимые процессы, включая вязкость и теплопроводность, которые не принимались во внимание в разд. 1.1, должны таким образом приводить к увеличению полной энтропии и соответственно к нагреву жидкости, через которую проходит звуковая волна, и соответствующей постепенной диссипации механической энергии звуковой волны (смысл этой величины будет уточнен в разд. 1.3). Количественное исследование процесса диссипации проводится в разд. 1.13.

Теперь можно остановиться вкратце на возможном влиянии на распространение звука еще одного фактора, которым мы пренебрегали в разд. 1.1, а именно поля внешних сил, в частности поля силы тяжести. Его наличие означает, что давление p_0 и плотность ρ_0 в невозмущенной жидкости не являются постоянными, а удовлетворяют гидростатическому соотношению

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}, \tag{43}$$

где $\mathbf{g}$ — вектор ускорения силы тяжести.

Однако сначала предположим, что энтропия единицы массы в невозмущенной жидкости имеет постоянную величину, и, следовательно, остается постоянной (если пренебречь процессами диссипации) в течение всего процесса распространения звуковой волны. Тогда линеаризованное уравнение количества движения (4), которое теперь будет содержать в правой части дополнительный член $\rho\mathbf{g}$, после вычитания из него соотношения (43) и учета соотношения (37), связывающего p и ρ при постоянной энтропии, примет вид

$$\rho_0 \partial \mathbf{u}/\partial t + \nabla (p - p_0) = (\rho - \rho_0)\mathbf{g} = (p - p_0)\mathbf{g}c^{-2}. \tag{44}$$

Отношение характерной величины градиента $\nabla (p - p_0)$ в уравнении (44) к характерной величине $p - p_0$ равно $2\pi/\lambda$, где λ — характерная длина волны. Следовательно, влияние силы тяжести на любую звуковую волну *с длиной волны* λ, *много меньшей, чем* c^2/g, оказывается пренебрежимо малым. Для воздуха отношение c^2/g равно приближенно 12 км, так что влияние силы тяжести пренебрежимо мало для всех обычных звуковых волн. В атмосфере оно может оказаться значительным лишь при распространении очень медленных флуктуаций давления с периодами в несколько секунд (и, следовательно, длиной волны в несколько километров). Для воды отношение c^2/g достигает величины 200 км, что практически исключает какое-либо влияние силы тяжести на звуковые волны даже в таких больших объемах воды, как океан.

Проведенные выше рассуждения обобщаются в гл. 4 на атмосферы со *стратифицированной* энтропией (увеличивающейся вверх), для которых *те же* условия оказываются достаточными (несмотря на то, что уравнения движения теперь допускают существование других, значительно более медленных волн — так называемых внутренних гравитационных волн) для того, чтобы устранить любое возможное влияние силы тяжести на распространение звука вообще и на скорость звука в частности.

1.3. Акустическая энергия и акустическая интенсивность

Характерным свойством волн является возможность переноса энергии без необходимости переноса вещества. Под «акустической энергией» подразумевают часть полной энергии жидкости, связанную с наличием в ней звуковой волны, в то время как «акустическая интенсивность» имеет смысл скорости переноса акустической энергии; в данном разделе оба понятия рассматриваются в плане линейной теории звука.

Как было отмечено в разд. 1.1, в любой линейной теории колебаний или волн возмущения считаются малыми величинами, квадратами которых *в уравнениях движения* можно пренебречь (подразумевается также, что произведение двух таких величин является пренебрежимо малым, поскольку его численное значение не может быть больше квадрата одной из них). Однако иное правило применяется для *выражений энергии* и скорости ее изменения (или переноса), в которых первые степени малых величин будут отсутствовать и в которых поэтому *сохраняют квадраты* и произведения двух малых величин, а *пренебрегают*

только их кубами (подразумевая при этом, что произведение трех и более таких величин также пренебрежимо мало). В общей теории (см. курсы теории колебаний) показывается, почему два таких подхода в точности согласуются друг с другом.

Для простой иллюстрации вышесказанного рассмотрим кинетическую энергию. В потоке жидкости с вектором скорости

$$\mathbf{u} = (u, v, w) \tag{45}$$

плотность кинетической энергии (кинетическая энергия на единицу объема) равна

$$\frac{1}{2}\rho\,(u^2+v^2+w^2), \tag{46}$$

где ρ —массовая плотность жидкости. Для любого возмущения волнового типа в жидкости, у которой в невозмущенном состоянии $\rho = \rho_0$ и $\mathbf{u} = 0$, плотность кинетической энергии в линейной теории принимается равной

$$\frac{1}{2}\rho_0\,(u^2+v^2+w^2), \tag{47}$$

что отличается от величины (46) на пренебрежимо малую величину, равную произведению трех малых величин ($\rho - \rho_0$ и двух составляющих скорости). Из общей теории колебаний следует, что инерциальный вклад, даваемый формулой (47), в плотность энергии волны должен быть равноценным вкладу, который связан с восстанавливающими силами (например, со сжимаемостью жидкости в акустическом случае) и который можно назвать плотностью «потенциальной» энергии; утверждается также, что соответствующим образом *осредненные* значения кинетической и потенциальной энергий должны быть равны между собой.

В акустической теории требуется некоторая аккуратность, чтобы определить точные значения как для «потенциальной энергии», так и для скорости переноса этой энергии. Рассмотрим сначала последнюю величину, причем только в описываемом уравнениями (15)—(17) очень простом случае плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси x.

В данном случае можно ожидать, что будет иметь место положительный перенос энергии через любую плоскость $x = \text{const}$ в положительном направлении оси x. Для этого требуется, чтобы жидкость слева от плоскости действовала на жидкость справа с положительной мощностью. Эта мощность будет равна произведению (i) силы, действующей в положительном направлении оси x на указанную плоскость и равной давлению p в пересчете на единицу площади, и (ii) составляющей скорости u

в этом направлении. Уравнение (17) подтверждает высказанное предположение о положительности мощности на единицу площади, поскольку из него следует, что «избыточное давление» $p - p_0$ (избыточное по отношению к невозмущенному значению p_0) всегда имеет тот же знак, что и u, так что их произведение никогда не может быть отрицательным.

Хотя действительная мощность на единицу площади равна pu, мы определим акустическую интенсивность как

$$I = (p - p_0)\, u. \tag{48}$$

Это означает, что мы игнорируем любую работу, производимую невозмущенным «атмосферным» давлением p_0, поскольку вряд ли можно ожидать, что оно играет какую-либо роль в переносе энергии, и принимаем (48) как величину, точно квадратичную относительно возмущений (таким, как мы видели, и должен быть перенос энергии). Принимая на время концепцию, аргументированную такими грубыми рассуждениями, будем сейчас исходить из формулы (48), но позднее в этом же разделе вернемся к более полному обоснованию отбрасывания обременительного для нас линейного члена $p_0 u$.

Принимая ту же концепцию, определим «потенциальную энергию» жидкости как работу, произведенную над ней действием только избыточного давления при сжатии до плотности ρ от невозмущенной плотности ρ_0. Для любого малого увеличения $d\rho$ эта работа на единицу объема представится выражением

$$\rho\,(p - p_0)\,(-d\rho^{-1}) = (p - p_0)\rho^{-1}\, d\rho, \tag{49}$$

которое отличается от (25) заменой самого давления p на избыточное $p - p_0$ и множителем ρ, введенным для пересчета с единицы массы на единицу объема. Заметим, что выражение (49) является квадратичным относительно малых величин, каким и должен быть вклад в энергию. Это значит, что множитель ρ^{-1} можно заменить на ρ_0^{-1} с погрешностью третьего порядка малости, а с учетом (14) множитель $p - p_0$ можно заменить на $(\rho - \rho_0)\, c^2$. Следовательно, полная потенциальная энергия жидкости, сжатой до плотности ρ, равна

$$\int_{\rho_0}^{\rho} (\rho - \rho_0)\, c^2 \rho_0^{-1}\, d\rho = \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2\, c^2 \rho_0^{-1} = \frac{1}{2}(p - p_0)^2\, c^{-2} \rho_0^{-1}. \tag{50}$$

В этом выражении два различных представления снова совпадают, если пренебречь величинами третьего порядка малости.

Предположение общей теории о том, что «соответствующим образом осредненные» величины кинетической и потенциальной энергий должны быть равны, легко подтверждается в этом

частном случае распространения плоской волны: их плотности (47) и (50) действительно *всегда* равны, так как в этом случае $v = w = 0$ и справедливо уравнение (17). Поэтому полная плотность акустической энергии (кинетической и потенциальной) составляет

$$W = \rho_0 u^2, \tag{51}$$

в то время как интенсивность (48) с учетом (17) можно представить в виде

$$I = \rho_0 c u^2. \tag{52}$$

Полученные величины находятся в соответствии с предположением, что движущаяся звуковая волна может переносить энергию со скоростью c, так как скорость переноса энергии I на единицу площади равна произведению скорости c на энергию W единицы объема.

Используя полученные заключения для плоской волны, можно теперь попытаться обобщить понятие акустической энергии и интенсивности на общий случай трехмерного движения, основываясь на той же концепции, согласно которой необходимо учитывать лишь ту работу, которую совершает «избыточное» давление. Вывод уравнения (50) для плотности потенциальной энергии остается неизменным, но полная акустическая энергия (сумма (47) и (50)) уже не может быть представлена простым выражением (51), так как соотношение (17) в общем случае не выполняется. Вместо него можно использовать уравнения (8) и (9), чтобы записать эту акустическую энергию или «волновую энергию» через потенциал скорости φ в виде

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 [(\nabla\varphi^2) + c^{-2}(\partial\varphi/\partial t)^2]. \tag{53}$$

В рассматриваемом трехмерном случае акустическую интенсивность можно определить как *вектор* $\mathbf{I}$, составляющая которого $\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}$ в направлении любого единичного вектора $\mathbf{n}$ равна скорости, с которой в направлении $\mathbf{n}$ через малый элемент плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$, переносится энергия, отнесенная к единице площади элемента. Этот перенос энергии создается силой $p - p_0$ на единицу площади (если мы рассматриваем только *избыточное* давление), умноженной на составляющую скорости $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$ в направлении $\mathbf{n}$; таким образом, мощность на единицу площади равна $(p - p_0)\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$, и обобщением формулы (48) на трехмерный случай будет

$$\mathbf{I} = (p - p_0)\,\mathbf{u}. \tag{54}$$

Отсюда, выражая все величины через потенциал скорости φ, получаем

$$\mathbf{I} = -\rho_0 (\partial\varphi/\partial t)\nabla\varphi. \tag{55}$$

Важной проверкой *взаимной* согласованности уравнений (53) и (54) является тот факт, что они удовлетворяют уравнению *сохранения акустической энергии*

$$\partial W/\partial t = -\nabla\cdot\mathbf{I}, \tag{56}$$

которое выражает равенство скорости изменения акустической энергии в малой области и полной скорости переноса энергии в эту область (которая в пересчете на единицу объема этой области равна дивергенции вектора переноса энергии $\mathbf{I}$, взятой со знаком минус). Заметим, что любой член типа $\mathbf{u}\cdot\nabla W$, который можно было бы добавить в левую часть (56) для учета конвективного переноса акустической энергии со скоростью жидкости $\mathbf{u}$ (и который может дополнительно влиять на изменение энергии за счет работы сил давления жидкости), можно здесь отбросить, поскольку W — величина второго порядка малости, а $\mathbf{u}\cdot\nabla W$ имеет третий порядок. Действительно, уравнению (56) в том виде, как оно записано, точно удовлетворяет потенциал скорости φ линейной теории, так как его левая часть с учетом (53) равна

$$\rho_0 [(\nabla\varphi)\cdot\nabla (\partial\varphi/\partial t) + c^{-2} (\partial\varphi/\partial t) (\partial^2\varphi/\partial t^2)], \tag{57}$$

а правая с учетом (55) записывается в виде

$$\rho_0 [(\nabla\varphi)\cdot\nabla (\partial\varphi/\partial t) + (\partial\varphi/\partial t)\nabla^2\varphi]. \tag{58}$$

Эти выражения равны в силу волнового уравнения (13). Тогда, конечно, логично рассматривать W как плотность некоторой полезной квадратичной меры акустической амплитуды, а $\mathbf{I}$ — как векторный поток этой величины.

С другой стороны, следовало бы спросить, почему это так, поскольку, отбрасывая всякую работу, производимую невозмущенным атмосферным давлением p_0, мы, конечно, не включили в W всю плотность энергии. Уравнение (49) показывает, что отброшенная часть энергии равна

$$W_{ex} = \int_{\rho_0}^{\rho} p_0\rho^{-1}\, d\rho = p_0 \ln (\rho/\rho_0), \tag{59}$$

а соответствующая отброшенная часть скорости переноса энергий $\mathbf{I}$, согласно (54), равна

$$\mathbf{I}_{ex} = p_0\mathbf{u}. \tag{60}$$

Почему же можно исключать из рассмотрения подобные члены, например часть $\mathbf{I}$, пропорциональную $\mathbf{u}$?

При ответе на этот вопрос мы не должны использовать тот довод, что член (60) не должен быть существенным в переносе энергии, поскольку его среднее (в некотором смысле) значение равно нулю. Разумеется, звук часто генерируется колебаниями, которые в линейной теории вызывают флуктуации скорости $\mathbf{u}$ жидкости около ее нулевого значения. Однако если включить $\mathbf{I}_{ex}$ в $\mathbf{I}$, которая является величиной второго порядка малости, то нужно включить в $\mathbf{I}_{ex}$ вклады $\mathbf{u}$ того же порядка, которые могут быть вычислены только на основе нелинейной теории и могут иметь ненулевое среднее значение (это были бы «исправленные» движения, которые часто описываются как «акустический ветер» или как «акустический поток» и которые более подробно изучаются в разд. 4.7).

Тот факт, что $\mathbf{I}_{ex}$ и аналогично W_{ex} могут быть учтены правильно *только* в том случае, когда входящие в них величины вычисляются со *вторым* порядком точности, является весьма убедительным мотивом (наряду с отмеченными выше) отбрасывания $\mathbf{I}_{ex}$ и W_{ex}, но при этом подразумевается, что любые доводы, оправдывающие их исключение, должны основываться на точных, а не на простых линеаризованных соотношениях между входящими в них величинами. К счастью, эти отброшенные величины сами точно удовлетворяют уравнению сохранения вида

$$\partial W_{ex}/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla W_{ex} = -\nabla\cdot\mathbf{I}_{ex}, \tag{61}$$

которое утверждает, что полная скорость изменения «потенциальной» энергии элемента жидкости, связанной с работой невозмущенного давления p_0, равна скорости такого переноса энергии в этот элемент, который соответствует работе, совершаемой за единицу времени давлением p_0 со стороны соседних элементов. Это утверждение почти самоочевидно; во всяком случае уравнение (61) с учетом (59) и (60) *совпадает* с уравнением неразрывности (3) с точностью до множителя.

Это делает ясным статус нашего уравнения сохранения акустической энергии (56): оно представляет собой полное уравнение сохранения энергии за вычетом уравнения неразрывности (61), умноженного на определенный множитель. Результат умножения можно рассматривать как отдельное уравнение сохранения части полной энергии, отброшенной в полной «акустической энергии», которое включает в себя конвективный член $\mathbf{u}\cdot\nabla W_{ex}$, поскольку в W_{ex} входят величины первого порядка малости, в то время как в (56) соответствующий член отбрасывается, поскольку W не содержит величин первого порядка. Определенные формулами (53) и (55) величины W и $\mathbf{I}$, в которых отброшены W_{ex} и $\mathbf{I}_{ex}$, особенно полезны, поскольку для них

всегда можно использовать решения линейного волнового уравнения (13), если пренебречь членами третьей степени от возмущений, и эти решения должны точно удовлетворять уравнению сохранения в линейной теории (56).

Акустическая интенсивность может измеряться в единицах Вт·м$^{-2}$ (ватт на кв. метр), однако если речь идет о чувственном восприятии звука, то более подходящей является логарифмическая шкала уровней интенсивности, потому что для данной частоты в Гц (колебаниях в секунду) ухо воспринимает одинаковые отличия в громкости при одинаковых отличиях логарифма интенсивности, а не ее самой. Уровень интенсивности по шкале децибелов (дБ) определяется как

$$120 + 10 \lg (I/\text{Вт м}^{-2}); \qquad (62)$$

здесь в скобках стоит величина I вектора интенсивности, измеренная в Вт·м$^{-2}$. Типичный минимальный уровень интенсивности, при котором слышен звук, на типичных «высоких» частотах (от 500 до 8000 Гц) составляет 0 дБ, что соответствует $I = 10^{-12}$ Вт·м$^{-2}$ в силу (62).

Аналогичный «порог слышимости» при низких или очень высоких частотах больше, например он равен 20 дБ (т. е. $I = 10^{-10}$ Вт·м$^{-2}$) как при 200 Гц, так и при $\sim$ 15 000 Гц и 40 дБ (т. е. $I = 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$) как при 100 Гц, так и при $\sim$ 18 000 Гц. Слышимость прекращается при частотах ниже 20 Гц и выше $\sim$ 20 000 Гц. Для большинства частот звук сильнее $\sim$ 120 дБ ($I = 1$ Вт·м$^{-2}$) приводит к болевым ощущениям.

Оценка выходной мощности (в Вт) источников различных типов обсуждается в следующих разделах, но здесь мы укажем типичные значения для нескольких случаев; величины выходной мощности, если их разделить на $4\pi r^2$ (при этом направленность источника, если таковая имеет место, не учитывается), дадут интенсивность (в Вт·м$^{-2}$) на расстоянии r (в метрах) от источника. Выходная мощность человеческого голоса составляет около 10^{-5} Вт при обычной речи и поднимается до 0,03 Вт при громком пении. С другой стороны, акустическая мощность двигателей может быть гораздо выше, достигая таких больших значений, как 10^5 Вт для огромных ракетных двигателей, используемых при запуске больших космических кораблей.

1.4. Точечный источник

Волновое уравнение (13), которому удовлетворяет потенциал скорости φ в линейной теории звука, имеет много разнообразных решений, кроме решений вида (15), (18) или (21), пред-

ставляющих плоские волны. Дальнейшие исследования по определению существенно одномерных решений, подобных указанным, мы отложим до гл. 2, а в оставшейся части гл. 1 изучим свойства некоторого важного класса существенно трехмерных решений. При этом время от времени мы будем производить сравнения со свойствами решений для плоских волн, поскольку противопоставление характеристик механизма образования звука при разном числе измерений оказывается весьма поучительным.

Некоторое понимание чрезвычайно сложных механизмов образования звука или «источников» звука часто может быть достигнуто в результате исследования нескольких фундаментальных решений волнового уравнения. Простейшим из них является решение, не зависящее от направления; таков источник, излучающий звук одинаково по всем направлениям и, естественно, называемый «точечным источником» (или иначе по соображениям, которые будут объяснены в разд. 1.5, «монополем»). В данном разделе подробно исследуются свойства такого точечного источника.

Для описания точечного источника, не зависящего от направления, будем искать потенциал φ, сферически симметричный относительно некоторой центральной точки. Действительно, потенциал

$$\varphi = \varphi(t, r), \tag{63}$$

зависящий только от времени t и расстояния r от центральной точки, должен принимать одинаковые значения во всех точках, равноудаленных от центральной точки по всем направлениям в фиксированный момент времени. Лапласиан от функции (63) легко вычислить:

$$\nabla^2\varphi = \partial^2\varphi/\partial r^2 + 2r^{-1}\partial\varphi/\partial r = r^{-1}\partial^2(r\varphi)/\partial r^2, \tag{64}$$

так что волновое уравнение (13) можно записать в виде

$$\partial^2(r\varphi)/\partial t^2 = c^2\partial^2(r\varphi)/\partial r^2. \tag{65}$$

Целесообразность изучения волнового уравнения в трехмерном пространстве очевидна, поскольку только при таком числе измерений волновое уравнение для сферически симметричного потенциала φ может быть сведено к одномерному волновому уравнению (65) для функции $r\varphi$. Для этого уравнения в соответствии с формулами (15) и (18) можно записать общее решение

$$r\varphi = f(r - ct) + g(r + ct), \tag{66}$$

но, поскольку нас интересуют лишь волны, бегущие в направлении возрастания r (т. е. от источника), в дальнейшем мы будем рассматривать только случай $g = 0$.

Интересно сравнить решение (66) с классическим решением для сферически симметричного течения «несжимаемой жидкости», т. е. идеализированной жидкости, плотность которой не меняется при изменении давления, так что $c^2 = dp/d\rho$ равняется бесконечности и уравнение (13) превращается в уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$. Это классическое течение, также называемое точечным источником (см. курсы гидродинамики), описывается решением

$$\varphi = -m\,(t)/(4\pi r). \tag{67}$$

Здесь коэффициент $m\,(t)$ означает объемный расход источника при истечении из центра в момент времени t; действительно, объем жидкости, протекающий через площадь $4\pi r^2$ на расстоянии r от центра, равен

$$4\pi r^2 \partial\varphi/\partial r = m\,(t). \tag{68}$$

Этот поток на расстоянии r мгновенно реагирует на изменение объемного расхода источника $m\,(t)$ из центральной точки, поскольку время передачи информации на расстояние r для идеализированой жидкости, скорость звука в которой бесконечна, равно нулю.

Акустическое решение (66) (при $g = 0$) можно представить в виде, аналогичном (67), если функцию $f\,(x)$ записать как $-m\,(-x/c)/4\pi$; тогда

$$\varphi = -m\,(t - r/c)/(4\pi r). \tag{69}$$

Это выражение отличается от (67) *только* наличием времени запаздывания r/c, требующегося для того, чтобы информация об изменениях объемного расхода источника $m\,(t)$ передавалась на расстояние r со скоростью c; такое чрезвычайно *слабое* различие между решениями уравнения Лапласа и волнового уравнения надо вновь отметить как относящееся исключительно к случаю *трехмерной* задачи.

Теперь объемный расход жидкости через площадь $4\pi r^2$ на расстоянии r от центра равен

$$4\pi r^2 \partial\varphi/\partial r = m\,(t - r/c) + (r/c)\,\dot{m}\,(t - r/c), \tag{70}$$

где в противоположность (68) $\partial\varphi/\partial r$ представляется в виде двух членов, поскольку время запаздывания r/c зависит от r. Дополнительный член, однако, исчезает при $r \to 0$, когда предельный объемный расход жидкости, вытекающей из централь-

ной точки, будет, согласно равенству (70), составлять, как и прежде, $m\,(t)$.

Заметим, что r/c не обязательно должно быть чрезвычайно малым для того, чтобы выражение (70) было близко к $m\,(t)$, так как оно представляет собой *первые два члена* разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $t - r/c$. В самом деле, можно сказать, что объемный расход при умеренных расстояниях r «пытается подстроиться» к величине мгновенного расхода $m\,(t)$ по закону линейной экстраполяции (при помощи производной по времени $\dot{m}$) на временно́м интервале r/c. Если характерные значения $\ddot{m}$ определяются отношением ω^2 к характерным значениям m (ω представляет собой характерную частоту звука в радианах), то относительная ошибка при замене выражения (70) на $m\,(t)$ будет величиной порядка $(\omega r/c)^2$. Отсюда следует (и это подтверждается в дальнейших разделах), что источник конечного радиуса r с переменным объемным расходом $m\,(t)$ может действовать так же, как точечный источник, если отношение $\omega r/c$ мало.

Избыточное давление $p - p_0$, определяемое в линейной теории звука по формуле (9), для точечного источника равно

$$p - p_0 = \dot{q}\,(t - r/c)/(4\pi r), \tag{71}$$

где

$$q\,(t) = \rho_0 m\,(t) \tag{72}$$

в линейной теории можно рассматривать как *массовый* расход источника. В акустике часто предпочитают массовый расход $q\,(t)$ объемному расходу, поскольку масса является физически более важной переменной: даже сжимаемая жидкость точно удовлетворяет закону сохранения массы всюду, где «источники» массы отсутствуют. Избыточное давление (а *не* потенциал скорости) в акустике также является наиболее просто измеряемой величиной. По этим двум причинам уравнение (71), связывающее $p - p_0$ и $q\,(t)$, рассматривается как фундаментальное уравнение для точечного источника.

Заметим, что избыточное давление (71) с запаздыванием во времени на r/c реагирует на *скорость изменения* массового расхода $\dot{q}(t)$. Вот почему производную по времени $\dot{q}\,(t)$ обычно называют *напряженностью* точечного источника.

Сравним указанное свойство точечного источника в трехмерном пространстве (скорость изменения массового расхода вызывает флуктуации давления) с противоположной ситуацией в одномерном случае. Плоские волны, распространяющиеся в направлении оси x вдоль трубы с постоянной площадью A

поперечного сечения, удовлетворяют уравнению (17); таким образом, если они генерируются при $x = 0$ пульсирующим массовым расходом

$$q(t) = A\rho_0 (u)_{x=0} = Ac^{-1} (p - p_0)_{x=0}, \tag{73}$$

то избыточное давление при $x > 0$ определяется формулой

$$p - p_0 = cA^{-1} q (t - x/c). \tag{74}$$

Выражение (74) отличается от соответствующего выражения (71 для трехмерного случая не только вполне естественным отсутствием множителя сферического ослабления $(4\pi r)^{-1}$, но и тем, что оно зависит непосредственно от массового расхода $q(t)$, а не от его производной по времени.

На рис. 1 показано, как положительная пульсация массового расхода генерирует пропорциональный ей положительный импульс избыточного давления в одномерном случае распространения волн и импульс совершенно другой формы, полученной дифференцированием одномерной зависимости в трехмерном случае. Из-за такого различия напрашивается вопрос: что происходит в промежуточном случае двумерного распространения волн?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим генерирование звука расположенными вдоль бесконечной прямой источниками с постоянным массовым расходом $h^{-1}q(t)$ на единицу длины. Определим избыточное давление в некоторой точке, кратчайшее расстояние от которой до рассматриваемой прямой равно s. Заметим, что суммарная длина двух отрезков этой прямой, расстояние от которых до рассматриваемой точки лежит между r и $r + dr$, находится из простых тригонометрических соотношений и составляет $2r(r^2 - s^2)^{-1/2}\, dr$, если $r > s$, и таких отрезков не существует, если $r < s$. Отсюда следует, что в уравнении (71), величину $\dot{q}(t - r/c)$ необходимо заменить величиной $2r(r^2 - s^2)^{-1/2} h^{-1} \dot{q}(t - r/c)\, dr$. Интегрируя от $r = s$ до $r = \infty$, в результате получаем

$$p - p_0 = (2\pi h)^{-1} \int_s^\infty (r^2 - s^2)^{-1/2} \dot{q}(t - r/c)\, dr. \tag{75}$$

Видно, что это поле давления от источника в двумерном случае значительно сложнее, чем поля, отвечающие выражениям (71) и (74) в трехмерном и одномерном случаях соответственно. Экспериментально такое поле может быть создано в жидкости, заключенной между двумя параллельными плоскостями с рас-

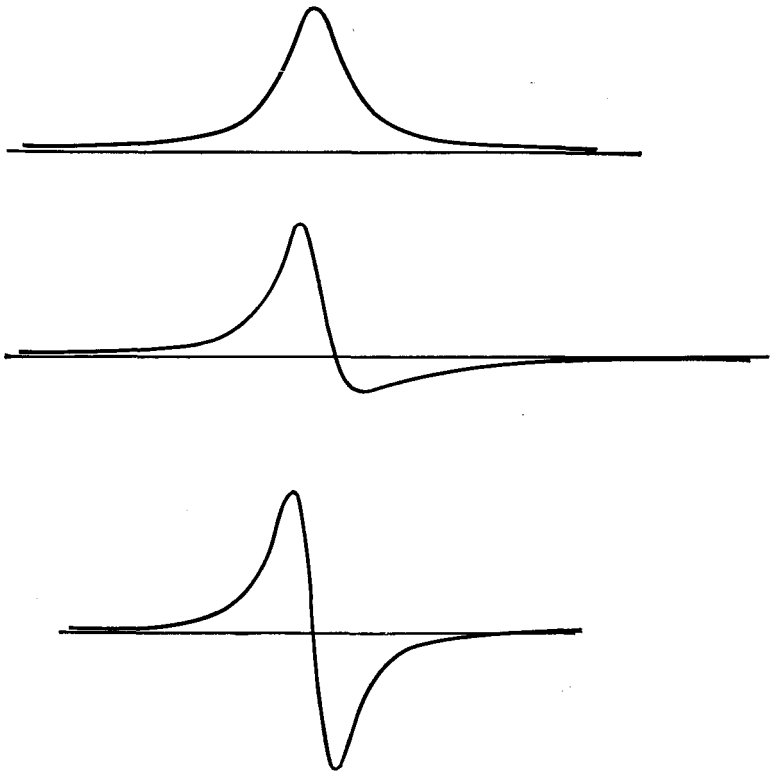

Рис. 1. Звуковые импульсы, генерируемые положительной пульсацией массового расхода (меняющегося со временем как $(t^2 + \tau^2)^{-1}$, где $\tau = \text{const}$) в одномерном (вверху), двумерном (в середине) и трехмерном (внизу) случаях. Эти импульсы (изображенные в произвольном вертикальном масштабе) пропорциональны расходу массы, его дробной производной порядка 1/2 и его первой производной соответственно.

стоянием h между ними, когда вдоль прямой, перпендикулярной этим плоскостям, происходит приток массы $q(t)$ (например, при взрыве проволочки).

Если массовый расход $q(t)$ задается в виде одиночного импульса, как на рис. 1, то уравнение (75) упрощается, когда s/c велико по сравнению со временем продолжительности импульса. В этом случае $r^2 - s^2$ можно приближенно записать как $2s(r - s)$, так как можно показать, что при значениях r/s, близких к единице, вклады в интеграл (75) от r значительно больше, чем вклады от более высоких степеней r. Подставляя

в (75) указанное выражение при больших s, получаем

$$p - p_0 = (2h)^{-1} (c/(2\pi s))^{1/2} (d/dt)^{1/2} q (t - s/c), \qquad (76)$$

где производная дробного порядка $(d/dt)^{1/2}$, как обычно, определяется равенством

$$(d/dt)^{1/2} q(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{q}(T) [\pi (t-T)]^{-1/2} dT. \qquad (77)$$

В силу такой зависимости от производной порядка 1/2 функции $q(t - s/c)$ двумерный случай занимает промежуточное положение между одно- и трехмерным случаями (формулы (74) и (71)), и, как видно на рис. 1, форма импульса, даваемая выражением (76), также носит промежуточный характер; вместо чисто положительного импульса или получающегося из него однократным дифференцированием импульса с крутым положительным выбросом, за которым следует точно такой же отрицательный выброс, в двумерном случае виден крутой положительный выброс и более широкий, но зато более пологий отрицательный выброс с той же площадью. Дальнейшее обсуждение распространения двумерных волн подобного типа отложим до гл. 2.

Тем временем мы продолжим сравнение между точечными источниками в одномерном и трехмерном случаях, рассмотрев акустическую интенсивность и выходную генерируемую мощность. В одномерном случае, когда справедлива формула (74), интенсивность (48) с учетом (17) можно записать как

$$I = (p - p_0) u = (p - p_0)^2/(\rho_0 c) = c\rho_0^{-1} A^{-2} q^2 (t - x/c), \qquad (78)$$

что соответствует мощности

$$c\rho_0^{-1} A^{-1} q^2 (t), \qquad (79)$$

генерируемой в источнике и переносимой со скоростью c вдоль трубы с площадью поперечного сечения A.

В трехмерном случае уравнение (17) не обязательно должно удовлетворяться, и вместо него мы имеем (переписав (70) через $g(t)$) равенство для радиальной скорости

$$u_r = \partial\varphi/\partial r = (\rho_0 c)^{-1} [\dot{q}(t - r/c) + (c/r) q (t - r/c)]/(4\pi r). \qquad (80)$$

Из соотношения (80) следует, что при $r \to \infty$ сферические волны все точнее и точнее удовлетворяют соотношению

$$u_r = (\rho_0 c)^{-1} (p - p_0), \qquad (81)$$

так что в этом смысле они становятся все более и более похожими на плоские волны. Очевидно, что если в равенстве (80) вве-

сти ω (отношение характерной величины $\dot{q}$ к характерной величине q), то соотношение (81) будет хорошей аппроксимацией равенства (80) при больших значениях $\omega r/c$. Для источников звука вообще (не только для точечных источников) с характерной угловой частотой ω мы будем использовать термин «дальнее поле», имея в виду ту часть жидкости, для точек которой расстояние r от источника велико по сравнению с c/ω (или $\lambda/(2\pi)$, где λ — характерная длина волны), и найдем (разд. 1.6), что в дальнем поле соотношение для плоских волн (81) становится хорошим приближением.

В дальнем поле вектор интенсивности (54) направлен по радиусу от источника и имеет величину

$$I = (\rho_0 c)^{-1}\dot{q}^2\,(t - r/c)/(16\pi^2 r^2), \tag{82}$$

такую же, как если бы выходная мощность

$$P\,(t) = \dot{q}^2\,(t)/(4\pi\rho_0 c), \tag{83}$$

генерируемая источником, переносилась от него со скоростью c, проходя с задержкой во времени r/c через площадь $4\pi r^2$ жидкости, удаленной на расстояние r от источника. Такое описание генерирования мощности является приемлемым во многих отношениях, несмотря на тот факт, что в более близких точках, не принадлежащих дальнему полю, второй член в квадратных скобках (80) приводит в (82) к дополнительному члену вида

$$\rho_0^{-1} q\,(t - r/c)\dot{q}\,(t - r/c)/(16\pi^2 r^3) = (d/dt)\,[\rho_0^{-1} q^2(t - r/c)/(32\pi^2 r^3)], \tag{84}$$

поскольку осредненное по длительному периоду значение такой производной по времени от ограниченной пульсирующей величины равно нулю. Таким образом, член (84) не дает вклада в суммарный перенос энергии от источника; действительно, можно проверить, основываясь на уравнении (56), что он соответствует только колебанию дополнительной энергии, которая требуется в ближнем поле для того, чтобы сбалансировать приток массы от источника.

Таким образом, заданные флуктуации переноса массы $q\,(t)$ генерируют акустическую выходную мощность, которая в дальнем поле представляется формулой (83) и характерное значение которой отличается от соответствующего значения (79) в одномерном случае множителем

$$A\,\omega^2/(4\pi c^2) = \pi A/\lambda^2, \tag{85}$$

где λ — характерная длина волны. Это означает, что громкоговорители, размеры которых малы по сравнению с длиной

волны (так что площадь A мала по сравнению с λ^2/π), генерируют акустическую мощность гораздо *менее* эффективно, когда они излучают в *трех* измерениях, нежели в случае, когда их излучение распространяется в одном направлении вдоль трубы поперечного сечения A. (Такое утверждение предполагает, как было указано в рассуждениях, следующих за уравнением (70), что пульсации массового расхода $q(t)$ в области, размер которой мал по сравнению с $c/\omega = \lambda/(2\pi)$, излучают как точечный источник; этот результат более полно обсуждается в разд. 1.6.) Примеры эффективности, в одномерном случае большей, чем в трехмерном, с более подробными количественными оценками приводятся в разд. 1.11 и 1.12.

1.5. Акустический диполь

Среди фундаментальных решений волнового уравнения, на основании свойств которых было достигнуто понимание очень сложных источников звука, следующим по степени важности после точечного (монопольного) источника является дипольный источник. Акустический диполь, как будет показано в данном разделе, обладает некоторыми свойствами рассмотренного в разд. 1.4 пространственного точечного источника, которые даже более ярко выражены: различие между дальним полем и ближним полем здесь *более* значительно и приводит к еще большей неэффективности диполя как генератора акустической энергии (оказывается, что в этой роли точечный пространственный источник, хотя и малоэффективный по сравнению с одномерными источниками, затмевает всех своих *трехмерных* соперников!).

Начнем изучение свойств диполя с рассмотрения решения волнового уравнения (13), полученного сложением двух решений для точечных источников: (i) решения, найденного в разд. 1.4 для точечного источника, расположенного в начале координат (0, 0, 0), с полем давления (71), выраженным через напряженность $\dot{q}(t)$ и расстояние r от начала координат, и (ii) решения для точечного источника равной и противоположной напряженности $(-\dot{q})$[1], расположенного в соседней точке $(-l, 0, 0)$, с полем давления, определенным по формуле (71), в которой $\dot{q}$ заменяется на $(-\dot{q})$ и r на r', где r' — расстояние от точки $(-l, 0, 0)$.

---

[1] Источник с отрицательным расходом обычно называют стоком.— *Прим. ред.*

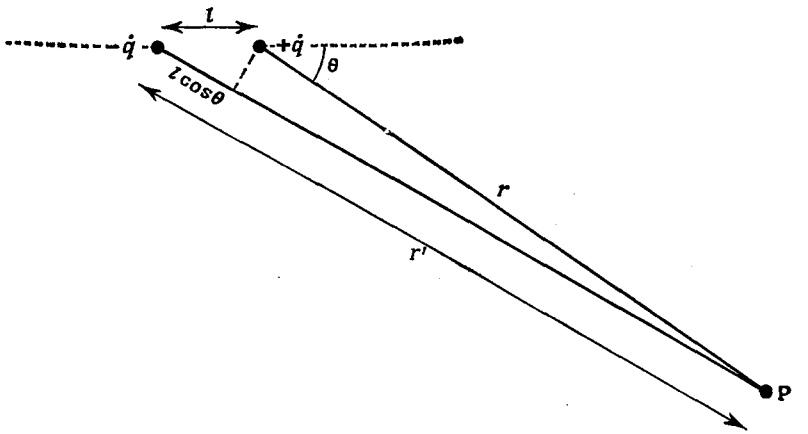

Рис. 2. Звуковое поле в точке P, обусловленное точечным источником напряженности $\dot{q}$ в точке (0, 0, 0) и источником равной напряженности противоположного знака $-\dot{q}$ в точке $(-l, 0, 0)$, зависит от разности расстояний r и r' от точки P до этих источников.

Тогда для r, много бóльших l, поле давления совместной конфигурации, изображенной на рис. 2, определяется как

$$p - p_0 = [\dot{q}\,(t - r/c)/(4\pi r)] - [\dot{q}\,(t - r'/c)/(4\pi r')]. \qquad (86)$$

Это в действительности относится к диполю, который по существу является предельной формой рассматриваемой конфигурации при уменьшении l.

Выражение (86) представляет собой разность значений в фиксированный момент времени t выражения (71) для двух близких значений r, а именно r и r', разность между которыми не может превышать l; действительно, на рис. 2 видно, что разность $r - r'$ в направлении, составляющем угол θ с осью x, все точнее аппроксимируется величиной $-l\cos\theta$, когда l становится малым по сравнению с r. Соответствующую разность значений выражения (71), обусловленную различными значениями как множителя сферического ослабления $(4\pi r)^{-1}$, так и времени запаздывания r/c, для достаточно малых l (см. ниже необходимую оценку малости) можно выразить через производную по r:

$$p - p_0 \approx (-l\cos\theta)\,(\partial/\partial r)\,[\dot{q}\,(t - r/c)/(4\pi r)]. \qquad (87)$$

На рис. 3 показан другой способ получения того же результата: если r — расстояние точки (x, y, z) от начала координат, то в силу свойств построенного параллелограмма r' можно рас-

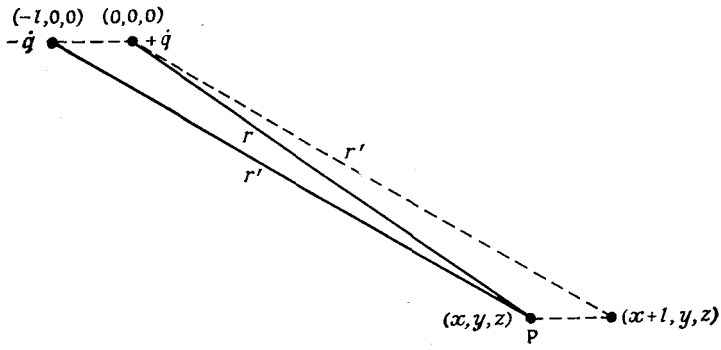

Рис. 3. Расстояние r' точки P с координатами (x, y, z) от источника напряженности $-\dot{q}$, расположенного в точке $(-l, 0, 0)$, равно расстоянию точки с координатами $(x + l, y, z)$ от источника напряженности $\dot{q}$, расположенного в точке $(0, 0, 0)$.

сматривать как расстояние близкой точки $(x + l, y, z)$ от начала координат. Следовательно, формула (86) выражает разность между значениями выражения (71) в точках (x, y, z) и $(x + l, y, z)$, которую для достаточно малых l можно представить в виде

$$p - p_0 \approx -\, l\,(\partial/\partial x)[\dot{q}\,(t - r/c)/(4\pi r)], \tag{88}$$

что и совпадает с (87), поскольку $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ и

$$\partial r/\partial x = x/r = \cos\theta. \tag{89}$$

Понятие диполя в акустике и других отраслях физики возникло в связи с тем, что выражения типа (87) и (88) зависят не от l и $\dot{q}$ в отдельности, а только от произведения

$$l\dot{q}\,(t) = G\,(t), \tag{90}$$

которое можно назвать *напряженностью* диполя. Иначе говоря, когда l достаточно мало для того, чтобы уравнения (87) и (88) были достаточно точными, поле давления будет, например, таким же и для другой пары источник — сток, у которых напряженность $\dot{q}$ вдвое больше, а расстояние l вдвое меньше.

Мы можем теперь ответить на вопрос о том, сколь малым для этого должно быть l, при помощи теоремы о среднем, которая утверждает, что каждое уравнение является точным, если производная от правой части уравнения вычисляется *при некотором промежуточном значении* r, заключенном между r и r';

замена этого промежуточного значения самим значением r является хорошим приближением только тогда, когда изменение производной мало по сравнению с ней самой при изменениях r на величину порядка l. Это легко показать, если выписать производную (например, как это делается ниже при выводе формулы (92)), потребовав при этом не только, чтобы l было мало по сравнению с r, как уже предполагалось ранее, но и чтобы $\omega l/c$ (где ω — характерная частота, отношение характерной величины $\ddot{q}$ к характерной величине $\dot{q}$) было мало.

Последнее условие, при котором область источника конечных размеров l (подобная той, которая изображена на рис. 2) описывается формулой для классического диполя, часто называется условием компактности: область, содержащая источники, *акустически компактна*, если

$$l \ll c/\omega = \lambda/(2\pi). \tag{91}$$

В разд. 1.4 (в рассуждениях, следующих за уравнением (70)) мы получили такое же условие для того, чтобы расход массы из области конечного радиуса описывался соответствующим точечным источником. Акустическая компактность оказывается обычно очень важным условием, которое позволяет использовать элементарные решения, подобные точечным источникам и диполям, для построения моделей более сложных источников звука.

Целесообразно пока не пользоваться подстановкой (90), а вычислить производную в (87):

$$p - p_0 = \cos\theta \{[l\dot{q}(t - r/c)/(4\pi r^2)] + [l\ddot{q}(t - r/c)/(4\pi rc)]\} \tag{92}$$

и сравнить результат с полями давления для индивидуальных источников. Основным отличием, которое возникает из такого сравнения, является зависимость от направления, выраженная множителем $\cos\theta$, принимающим значения от -1 до $+1$, но не менее существенным является и различие в зависимости от r.

Значения двух членов в квадратных скобках (92) относятся к величине для поля давления (71) от одного источника с положительным расходом как

$$l/r \quad \text{и} \quad \omega l/c, \tag{93}$$

где ω — снова характерная угловая частота (отношение характерной величины $\ddot{q}$ к величине $\dot{q}$). Оба отношения (93) должны быть малыми величинами для того, чтобы формула (92) была точной. Таким образом, любая акустически компактная пара источник — сток создает на расстоянии r, большом по сравнению с l, поле давления диполя, которое мало по сравнению с полем, обусловленным действием каждого источника в отдельности.

Заметим, что из двух отношений (93) *первое* уменьшается при удалении на достаточно большое расстояние r, и в частности в ту область, которая в разд. 1.4 определялась как «дальнее поле», где

$$r \gg c/\omega = \lambda/(2\pi). \tag{94}$$

При вычислении избыточного давления в этом дальнем поле основную роль играет второй член (92), полученный в результате дифференцирования (87) только из-за наличия времени задержки r/c. В ближнем поле, однако, первое отношение в (93) является по меньшей мере столь же важным и начинает преобладать, когда $\omega r/c$ становится малым, а это означает, что существенным в (92) будет первый член, полученный в результате дифференцирования в (87) множителя сферического ослабления $(4\pi r)^{-1}$.

Таким образом, оставляя в стороне зависимость поля давления диполя от направления, т. е. от $\cos\theta$, мы видим, что оно имеет двойственную структуру зависимости от r: (i) в дальнем поле (94) избыточное давление описывается членом, пропорциональным r^{-1}, который является следствием разности фаз сигналов от двух одинаковых источников с напряженностью противоположного знака (эта разность фаз обусловлена различием r/c во времени прибытия сигнала в точку наблюдения; (ii) в ближнем поле доминирующим является член, пропорциональный r^{-2}, обусловленный разностью в степени сферического ослабления двух сигналов. Такая двойственная структура резко отличается от случая точечного источника, для которого избыточное давление (71) меняется как r^{-1} для всех r и «дальнее поле» определяется просто как область, где выполняется соотношение (81), дающее тот же закон изменения радиальной скорости u_r, что и в плоском случае.

Для диполя, как и для источника, в дальнем поле это простое соотношение между u_r и p тоже остается справедливым. В действительности уравнение количества движения (4) в радиальном направлении

$$\rho_0 \partial u_r/\partial t = -\partial p/\partial r \tag{95}$$

дает соотношение для плоских волн (81) в дальнем поле, где с достаточной степенью точности можно считать, что оператор $\partial/\partial r$ действует только на время запаздывания (r/c) в (87) (время запаздывания входит и в выражение для плоских волн), а не на типично трехмерные элементы (множитель сферического ослабления $(4\pi r)^{-1}$ и множитель направления $\cos\theta$). Отсюда следует, что вектор интенсивности звука (54) направлен по радиусу

и имеет величину

$$I = \cos^2\theta\,(\rho_0 c)^{-1} l^2 \ddot{q}^2\,(t - r/c)/(16\pi^2 r^2 c^2), \qquad (96)$$

соответствующую потоку энергии $P\,(t - r/c)$ через сферу радиуса r с центром в диполе, получаемому интегрированием (96) по всей поверхности этой сферы, где величина

$$P\,(t) = l^2 \ddot{q}^2\,(t)/(12\pi\rho_0 c^3) \qquad (97)$$

может рассматриваться как акустическая выходная мощность пары источник — сток.

Из сравнения (97) и (83) видно, что при выполнении условия компактности (91) эта пара источник — сток является малоэффективной, обладая выходной мощностью, составляющей примерно $(\omega l/c)^2$-ю часть мощности одного источника.

Такая низкая эффективность диполя по сравнению с источником безусловно связана с двойственной структурой его поля давления, которое характеризуется сравнительно мощным ближним полем, излучающим малую энергию в гораздо более слабое дальнее поле.

Заметим, что даже при условии компактности $l \ll \lambda/(2\pi)$ пара источник — сток генерирует поле диполя *только там*, где $r \gg l$; это поле включает в себя и дальнее поле, где $r \gg \lambda/(2\pi)$, и ближнее поле. Таким образом, область, где r сравнимо с l, не включается даже в «ближнее» поле диполя. Если этой области нужно дать какое-либо название, то подходящим будет термин типа «ближайшее поле». В ближайшем поле, где пара источник — сток даже приблизительно не является диполем, нужно пользоваться уравнением (86). Вне этой области справедливо дипольное приближение, приводящее к уравнению (92), в котором в ближнем поле более существенным является первый член, а в дальнем поле — второй.

Важным свойством ближнего поля диполя является перенос флуктуаций количества движения, связанного с силой, с которой диполь действует на внешнюю жидкость. Вектор количества движения направлен вдоль прямой, соединяющей пару источник — сток (*оси* диполя). При таком определении трудности, связанные со сходимостью, при недостаточной аккуратности могут привести к неправильному ответу, но эти трудности исчезают, если рассмотреть количество движения в некотором *круговом цилиндре* радиуса a, ось которого совпадает с осью диполя и

$$l \ll a \ll \lambda/(2\pi). \qquad (98)$$

Скорость изменения осевой составляющей количества движения в таком цилиндре в точности равна осевой силе, приложенной

к диполю, поскольку силы давления, действующие на поверхность цилиндра, не имеют осевой составляющей.

Для того чтобы найти распределение этой осевой составляющей количества движения, рассмотрим сначала ту ее часть, которая связана с источником, имеющим положительный расход $+q(t)$. Плотность количества движения в ближнем поле для такого источника в силу уравнений (69) и (70) представляется как

$$\rho_0 \partial\varphi/\partial x = \rho_0 (x/r)\partial\varphi/\partial r =$$
$$= \rho_0(x/r)[m(t-r/c)+(r/c)\dot{m}(t-r/c)]/(4\pi r^2) \approx$$
$$\approx \rho_0(x/r)[m(t)]/(4\pi r^2) = xq(t)/(4\pi r^3). \qquad (99)$$

Здесь выражения в квадратных скобках приближенно равны при малых $\omega r/c$ (т. е. в ближнем поле) по соображениям, приведенным после уравнения (70). Интегрирование (99) по кругу радиуса a при фиксированном x приводит к выражению

$$\frac{1}{2} xq(t)\,[\,|x|^{-1} - (a^2+x^2)^{-1/2}], \qquad (100)$$

график которого представлен на рис. 4. Это выражение дает величину *количества движения на единицу длины* цилиндра, но, с другой стороны, его можно рассматривать как *поток массы через круг* в направлении оси x; такая интерпретация объясняет скачок кривой $q(t)$ при $x = 0$, где поступает новая масса со скоростью $q(t)$. Полное количество движения, получаемое интегрированием выражения (100) от $x = -\infty$ до $x = +\infty$ (интеграл от него сходится на обоих концах), равно нулю, как и следовало ожидать в силу симметрии точечного источника.

Для пары источник — сток полная осевая составляющая количества движения, получаемая сложением нулевых ее значений для каждого из них, должна быть также равна нулю.

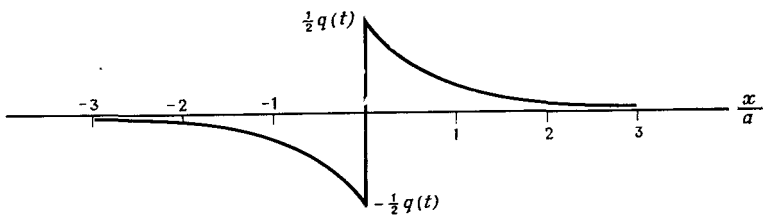

Рис. 4. **Поток массы через круг, являющийся поперечным сечением цилиндра жидкости радиуса a как функция расстояния x от точечного источника напряженности $\dot{q}(t)$, расположенного на оси цилиндра. Приведенная кривая показывает также распределение количества движения жидкости на единицу длины цилиндра.**

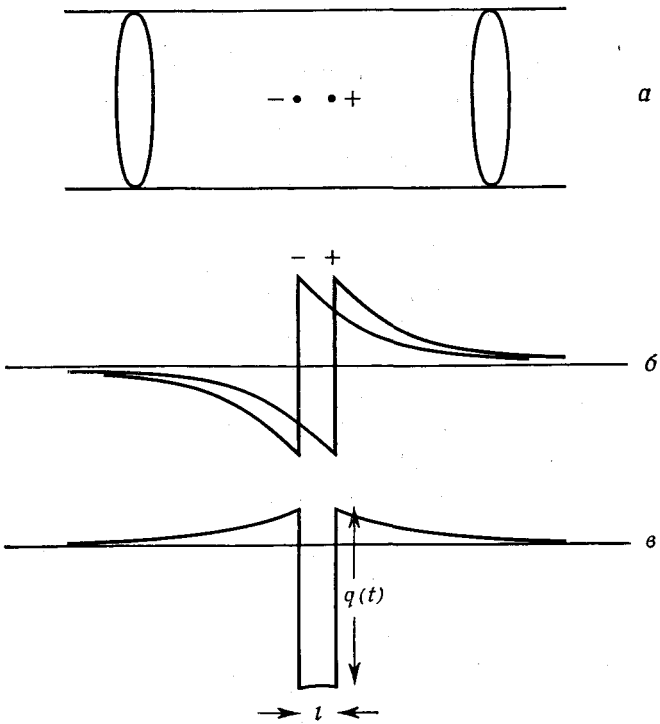

Рис. 5. Распределение количества движения на единицу длины цилиндра жидкости, создаваемого источником и стоком одинаковой напряженности, расположенными на оси цилиндра (*а*). Складывая распределения (*б*), аналогичные приведенному на рис. 4, но с противоположным знаком, получаем суммарное распределение (*в*).

Распределение этого количества движения, однако, имеет весьма своеобразный характер: большой отрицательный вклад в малой области между источником и стоком, который обусловлен непосредственным течением из источника в сток, компенсируется равным положительным вкладом, распределенным по всей области ближнего поля источника. На рис. 5 видно, что такое распределение получается как разность между распределением, представленным на рис. 4, и точно таким же распределением, но сдвинутым в центр стока. Оно имеет два разрыва: один $-q\,(t)$ в стоке и другой $+q\,(t)$ в источнике.

В предельном случае малых l (как показывает рис. 5) отрицательное количество движения между двумя источниками равно $-lq\,(t)$, и, таким образом, уравновешивающее его положительное количество движения, распределенное по всему ближ-

нему полю диполя, будет $+lq\ (t)$. Диполь является предельным случаем пары источник — сток при $l \to 0$, когда отрицательное количество движения «теряется» в ближайшем поле между источником и стоком, а количество движения в ближнем поле диполя складывается в положительную величину $lq\ (t)$.

Таким образом, любой механизм генерирования звука, который может создавать дипольное поле, должен создавать количество движения $lq\ (t)$, так что на внешнюю жидкость он будет действовать с силой, равной скорости изменения $\dot{lq}\ (t)$ этого количества движения, которая обозначается через $G\ (t)$ (формула (90)) и называется *напряженностью* диполя. Иначе говоря, в поле диполя напряженности $G\ (t)$ должна существовать сила $G\ (t)$, действующая на жидкости в направлении от стока к источнику. И наоборот, мы увидим, что внешняя сила, действующая на жидкость, порождает акустический диполь с напряженностью, равной этой силе.

В приведенном выше примере сила $G\ (t)$ направлена вдоль оси x, а связанное с ней поле диполя представляется при помощи формулы (88):

$$p - p_0 = -\ (\partial/\partial x)\ [G\ (t - r/c)/(4\pi r)], \tag{101}$$

но если бы сила была направлена по оси y или оси z, мы должны были бы в формуле (101) вместо $\partial/\partial x$ написать $\partial/\partial y$ или $\partial/\partial z$ соответственно. В случае действия силы общего вида $\mathbf{G} = (G_x,\ G_y,\ G_z)$ поле диполя представляется суммой членов типа (101), связанных с каждой из составляющих, которые дифференцируются по соответствующей координате; через дивергенцию его можно записать так:

$$p - p_0 = -\ \nabla \cdot [\mathbf{G}\ (t - r/c)/(4\pi r)]. \tag{102}$$

Будем называть выражение (102) полем давления диполя с *векторной напряженностью* $\mathbf{G}\ (t)$. В дальнем поле в соответствии с последним членом (92) это выражение принимает вид

$$p - p_0 = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{G}}\ (t - r/c)/\ (4\pi r^2 c) \tag{103}$$

в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$ и с выходной мощностью, согласно (97), равной

$$P(t) = \dot{\mathbf{G}}^2\ (t)/(12\pi\rho_0 c^3). \tag{104}$$

Эти свойства диполя, связанные с наличием силы, равной скорости изменения количества движения внешней жидкости, а также свойства монополя (разд. 1.4), связанные со скоростью изменения массового расхода во внешнюю жидкость, будут в дальнейшем использоваться для объяснения более сложных акустических явлений.

I.6. Компактные области источников в общем случае

В качестве примера рассмотрим порождение звука компактными областями источников (т. е. областями, диаметр которых мал по сравнению с $\lambda/(2\pi)$, где λ—характерная длина волны генерируемого звука) в общем случае. Рассмотрим сначала небольшую группу (рис. 6) *точечных* источников, заполняющих такую компактную область в случае, когда суммарная напряженность *не на много* меньше напряженности отдельных источников. Сравним поле давлений этой группы источников с полем давления одного точечного источника, расположенного в некоторой центральной точке области и имеющего напряженность, равную суммарной напряженности.

Рис. 6 показывает, что разность двух указанных полей давлений равна просто сумме полей диполей, каждый из которых образован компактной парой, включающей сток в центре и источник в одной из периферийных точек. Из отношений (93) можно заключить, что поле диполя на расстояниях r, много бо́льших расстояния между компактной парой источников, мало по сравнению с полем, генерируемым каждым из источников в отдельности. Отсюда следует, что полная разность полей давлений, показанных на рис. 6, мала по сравнению с полем давления одного источника на всех расстояниях r, много бо́льших диаметра области источников.

Здесь мы пользуемся предположением о том, что напряженность центрального источника (сумма напряженностей источников в группе) сама не мала по сравнению с напряженностью отдельных источников. Группа источников, удовлетворяющих этому предположению, генерирует на расстояниях, больших по сравнению с ее размерами (группа предполагается компактной), поле давлений, близкое к полю давлений одного источника.

Например, в устройстве типа «сирены» через отверстия, равномерно распределенные в неподвижном диске, периоди-

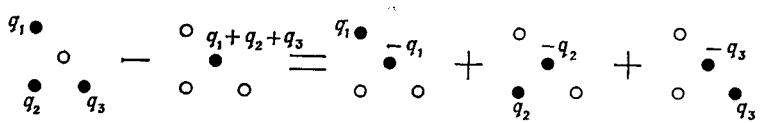

Рис. 6. Разность между полями небольшой группы точечных источников и одного точечного источника с напряженностью, равной их суммарной напряженности, может быть выражена в виде суммы полей диполей.

чески испускается сжатый воздух (в те моменты, когда отверстия в точно таком же вращающемся диске располагаются напротив отверстий в неподвижном диске). Если диск акустически компактен, то такое устройство излучает звук подобно точечному источнику (равномерно во всех направлениях). Из каждого отверстия расход массы $q(t)$ периодически резко повышается до максимума и снова резко спадает до нуля, генерируя акустическое поле точечного источника напряженности $\dot{q}(t)$. В таком случае акустически компактная группа источников, расположенных в отверстиях, генерирует на расстояниях, больших по сравнению с ее размерами, поле давления, близкое к полю давления одного точечного источника, напряженность которого равна сумме напряженностей отдельных источников.

Для того чтобы установить, что поле давления близко к полю давления точечного источника, здесь не обязательно рассматривать «дальнее поле»; мы должны лишь исключить «ближайшее поле» (см. разд. 1.5), а не все «ближнее поле». Однако некоторые более сложные области, содержащие источники, генерируют звук, близкий к точечному источнику только в своих дальних полях. Эти компактные области источников (довольно часто встречающиеся) содержат *как* точечные источники, обусловленные расходом массы, *так* и диполи, возникающие под действием внешних сил, причем ближние поля, обусловленные теми и другими, оказываются сравнимыми. В разд. 1.5 было показано, что в таком случае дальнее поле диполя мало по сравнению с полями отдельных источников. Следовательно, когда суммарная напряженность *не на много* меньше, чем напряженности отдельных источников, суммарное поле давлений от источников будет главным в дальнем поле, где оно близко (как показывает рис. 6) к полю давлений одного точечного источника с напряженностью, в точности равной их суммарной напряженности.

Это простейший рецепт для оценки дальнего поля сложных, но компактных групп монопольных и дипольных источников. Все зависит лишь от суммы напряженностей монопольных источников, которые в свою очередь равны производной по времени от суммарного расхода массы, соответствующего этим источникам.

В жидкости звук часто генерируется колебаниями погруженных в нее посторонних тел. Только что проведенные рассуждения применимы и к тем случаям, когда колебания приводят к значительным изменениям суммарного массового расхода, поскольку тела *меняют свои объем и форму*; например, когда в воде содержатся пузырьки газа, звук (как это часто случается) генерируется их пульсацией.

В самом деле, когда постороннее тело совершает внутри жидкости движения, возможно включающие изменения его объема и формы, их акустический эффект можно изучать, задавая на поверхности тела непрерывное распределение особенностей, таких, как:

(i) источники, напряженность которых отражает расход массы жидкости, обусловленный смещением поверхности тела наружу;

(ii) диполи, напряженность которых отражает силу, с которой поверхность тела действует на жидкость.

Такое описание легко понять, исходя из физической интерпретации этих особенностей, данной в последних двух разделах и хорошо известной для течений несжимаемой жидкости из курсов гидродинамики, где подобные результаты выводятся на основе теоремы Грина; параллельный вывод для акустики, приводящий к указанной здесь интерпретации, довольно прост.

В ближнем поле движения, вызванные диполем и источниками, сравнимы по величине; соответственно в дальнем поле преобладает движение от источников. Если в результате смещений поверхности тела его объем, скажем $V(t)$, меняется значительно, то напряженности различных источников складываются и могут приводить к значительной суммарной напряженности, которая может быть записана как

$$\dot{q}(t) = \rho_0 \ddot{V}(t), \tag{105}$$

поскольку в линейной теории полный массовый расход жидкости $q(t)$ равен $\rho_0 \dot{V}(t)$, где ρ_0 — плотность невозмущенной жидкости. Таким образом, дальнее поле близко к полю точечного источника с напряженностью $\rho_0 \ddot{V}(t)$, если тело акустически компактно. Связанная с ним акустическая выходная мощность на основании (83) равна

$$[\rho_0/(4\pi c)]\ddot{V}^2(t). \tag{106}$$

Проведенные выше рассуждения хорошо иллюстрируются излучением звука пузырьками воздуха или другого газа в жидкости. Такие пузырьки обычно совершают сложные колебания как *формы*, так и *объема*, причем из-за ограничений, налагаемых поверхностным натяжением, колебания происходят около сферической формы с различными модами, описываемыми различными сферическими гармониками. Однако (в приближении линейной теории) объем $V(t)$ не меняется ни в одной из этих мод, кроме одной, той, в которой пузырек остается сферическим и только его радиус a колеблется около невозмущенного значения a_0. Для такой единственной моды возвращающая сила

преобладает над силой поверхностного натяжения, что связано со сжимаемостью газа. В уравновешивающем эту возвращающую силу инерционном члене масса почти в точности соответствует жидкости с плотностью ρ_0 в обычном случае, когда плотность газа пренебрежимо мала по сравнению с плотностью жидкости.

При описании такой радиальной моды колебаний в качестве обобщенной координаты удобно выбрать переменный радиус пузырька a (об использовании обобщенных координат в линейных теориях колебаний см. учебники по классической механике). Когда a совершает малые колебания около своей равновесной величины a_0, радиальная скорость $\dot{a}$ определяет местную скорость жидкости (несжимаемой) в радиальном направлении на расстоянии r от центра как $\dot{a}a_0^2 r^{-2}$. Кинетическая энергия таких движений жидкости (а только ее мы и учитываем) равна (1/2) $(4\pi\rho_0 a_0^3)\,\dot{a}^2$. Здесь величина, заключенная в скобки, представляет собой «обобщенную массу» для рассматриваемого движения.

Соответствующая потенциальная энергия вычисляется на основе предположения, которое мы проверим позднее и которое состоит в том, что пузырьки колеблются достаточно медленно для того, чтобы плотность газа в них ρ_g можно было считать практически постоянной, хотя и совершающей малые колебания во времени относительно невозмущенного значения ρ_{g0}. Тогда относительное изменение разности ρ_g будет равно относительному изменению объема пузырька со знаком минус:

$$(\rho_g - \rho_{g0})/\rho_{g0} = -3\,(a - a_0)/a_0. \qquad (107)$$

В силу уравнения (50) соответствующая потенциальная энергия на единицу объема составляет

$$\frac{1}{2}\,(\rho_g - \rho_{g0})^2\, c_g^2 \rho_{g0}^{-1} = \frac{1}{2}\,\rho_{g0} c_g^2\,[3\,(a - a_0)/a_0]^2, \qquad (108)$$

что в объеме газа (4/3) πa_0^3 дает полную потенциальную энергию (1/2) $(12\pi\rho_{g0}c_g^2 a_0)\,[a - a_0]^2$. В последнем выражении величина, заключенная в круглые скобки, является «обобщенной жесткостью» для рассматриваемого движения. Может показаться, что изменения потенциальной энергии, связанные с поверхностным натяжением T (поверхностной энергией на единицу площади), тоже важны, но это не так: соответствующий линейный член просто смещает точку равновесия в точку с давлением, несколько превышающим давление жидкости, а на обобщенную жесткость влияет только квадратичный член, увеличивая ее

на величину $8\pi T$, что для пузырьков в воде радиуса свыше 0,1 мм дает поправку менее 1%.

В соответствии с общей теорией колебаний угловая частота моды колебаний пузырьков, определяющая звук в дальнем поле, представляется как

$$\omega = \left(\frac{\text{Обобщенная жесткость}}{\text{Обобщенная масса}}\right)^{1/2} = \left(\frac{12\pi\rho_{g0}c_g^2 a_0}{4\pi\rho_0 a_0^3}\right)^{1/2} = (c_g/a_0)\,(3\rho_{g0}/\rho_0)^{1/2}. \qquad (109)$$

Теперь мы убеждаемся в том, что из-за наличия множителя $(3\rho_{g0}/\rho_0)^{1/2}$ частота ω действительно мала по сравнению с характерной частотой c_g/a_0 распространения возмущений плотности внутри пузырька, так что предположение о том, что плотность газа остается приближенно постоянной, является допустимым. Условие акустической компактности, т. е. условие малости ωa_0 по сравнению с гораздо большей скоростью звука c в жидкости, тем более удовлетворяется.

Для пузырьков воздуха в воде при 20 °C имеем $c_g = 340$ м/с и $\rho_{g0}/\rho_0 = 0{,}0013$, что дает частоту

$$\omega/(2\pi) = (680 \text{ Гц см})/(2a_0). \qquad (110)$$

Таким образом, при колебании пузырьков звук в дальнем поле приближается к звуку, генерируемому точечным источником с частотой 680 Гц, деленной на диаметр пузырька в сантиметрах; часто это вполне музыкальный звук! Пульсации, однако, существенно затухают как вследствие теплопередачи от газа к жидкости, приводящей к отклонениям изменений плотности от тех, которые диктуются постоянством энтропии, так и в результате потерь энергии, обусловленных самой генерируемой акустической мощностью.

Обычно движения воды, которые сопровождаются шумом, генерируют звук посредством флуктуаций давления в потоке, *вызывая* пульсации пузырьков с такими модами, которые, как мы видели, являются главными в дальнем поле даже в тех случаях, когда имеются еще и различные моды колебаний *формы* пузырьков. Отдельные пузырьки создают музыкальные звуки; совокупность пузырьков, например, в бегущем потоке создает «плещущий» шум, включающий спектр частот, связанный с распределением их размеров. В гидравлических движениях часто содержатся пузырьки, механизмом возникновения которых служит «кавитация», при которой давление в потоке становится достаточно низким, так что растворенный в жидкости газ начинает выделяться или жидкость начинает испаряться. Шум кавитационных течений включают не только звуки, генерируемые

описанной выше пульсацией пузырьков, но и более мощные звуки, генерируемые схлопыванием пузырьков, попадающих в области более высокого давления.

Простейшим экспериментом, демонстрирующим усиление звука при наличии пузырьков, является вибрация жесткого стержня в воде, которая создает слабо слышимое дальнее поле диполя (см. разд. 1.7), связанное с пульсирующей силой между стержнем и водой; более сильного ближнего поля диполя при этом не слышно. Однако, если вдувать в ближнее поле пузырьки, они начинают пульсировать в ответ на большие флуктуации давления в нем и генерировать намного более сильный звук, поскольку их монопольное излучение (в разд. 1.9 будет показано, как его вычислить) имеет дальнее поле более сильное, чем ближнее. Обычно оказывается, что звуковая мощность потока с сильными флуктуациями давления в ближнем поле и слабыми флуктуациями в дальнем поле, что характерно для излучения диполей и в еще большей степени квадруполей (разд. 1.10), значительно усиливается при введении пузырьков в ближнее поле, причем пульсации объема создают более мощное дальнее поле монополя.

В данном разделе было показано, насколько простым и мощным является излучение от компактных областей источников в общем случае, когда сумма напряженностей монопольных источников не очень мала. Это условие удовлетворяется при колебании посторонних тел в жидкости или при изменениях объема в силу других причин, например нерегулярного горения. Однако весьма часто встречаются потоки с незначительными флуктуациями суммарного массового расхода. Они порождают более слабые и более сложные акустические дальние поля, к изучению которых мы должны теперь перейти, в частности потому, что они становятся важными при высокоскоростных движениях.

1.7. Компактные области источников с дипольными дальними полями

Для того чтобы исследовать компактные области при очень малых флуктуациях суммарного массового расхода, рассмотрим сначала (как на рис. 6) небольшую группу точечных источников, занимающих компактную область, но в частном случае, когда суммарная напряженность источников (скорость изменения массового расхода) в точности равна нулю. В этом случае «один точечный источник, расположенный в центральной точке», который показан на рис. 6, имеет нулевую напряженность, так

что соответствующее ему поле давления будет нулевым. Это придает новый смысл основному равенству, приведенному на рис. 6, которое теперь приравнивает суммарное поле давления от группы источников сумме полей диполей.

Отсюда следуют два вывода: первый, который очевиден из обсуждения, проведенного в разд. 1.6, состоит в том, что суммарное поле давления на расстояниях, много бо́льших диаметра области источников, теперь мало по сравнению с полями отдельных источников; второй, более полезный, вывод заключается в количественной оценке этого суммарного поля давления.

Чтобы найти ее, заметим, что на расстояниях, больших по сравнению с диаметром группы источников, поле каждой пары источник — сток на рис. 6 аппроксимируется полем диполя, описываемым уравнением вида (102). Вектор $\mathbf{r}$ здесь означает расстояние от диполя, который для данного приближенного равенства можно считать расположенным либо в источнике, либо в стоке (либо в некоторой промежуточной точке); в разд. 1.5 он располагался в «положительном» источнике, но здесь мы отдадим предпочтение отрицательному источнику (стоку), который для всех рассматриваемых диполей находится в одной и той же центральной точке. Поле давления (102) диполя линейно зависит от его напряженности $\mathbf{G}(t)$, и поэтому сумма всех полей различных диполей равна полю давления (102) одного диполя с напряженностью $\mathbf{G}(t)$, равной векторной сумме их напряженностей.

Это рассуждение справедливо только в том случае, когда сумма напряженностей диполей значительно отличается от нуля; такое требование необходимо по тем же причинам (обсуждавшимся в разд. 1.6), что и для суммы напряженностей источников. Поле каждого диполя в отдельности достаточно велико по сравнению с ошибкой, возникающей при аппроксимации поля соответствующей пары источник — сток полем диполя, но аналогичный вывод относительно их суммы можно сделать только в том случае, когда при сложении напряженностей диполей получается суммарная величина, не на много меньшая, чем напряженность каждого отдельного диполя.

В разд. 1.5 мы видели, что вектор напряженности $\mathbf{G}(t)$ диполя равен произведению напряженности $\dot{q}(t)$ источника и вектора расстояния от положительного источника до стока. В рассматриваемой здесь группе источников вектор расстояния $\mathbf{r}$ отсчитывается от стока в центральной точке для каждого диполя, напряженность которого соответственно равна величине $\dot{q}(t)\,\mathbf{r}$ для рассматриваемого положительного источника. Следовательно, суммарную напряженность диполей можно за-

писать как

$$\mathbf{G}(t) = \sum \dot{q}(t)\,\mathbf{r}, \tag{111}$$

где суммирование ведется по всем источникам данной группы. Векторную напряженность (111) одного диполя, эквивалентного группе источников, можно рассматривать как *момент* напряженностей источников относительно центральной точки; заметим, однако, что, поскольку суммарная напряженность источников равна нулю, величина (111) не зависит от выбора положения центральной точки.

Таким образом, компактная группа источников, изображенная на рис. 6, ведет себя *подобно одному источнику* с напряженностью, равной сумме их напряженностей, если последняя не мала; если же эта сумма равна нулю, то такая группа источников ведет себя *подобно одному диполю* с напряженностью, равной моменту напряженностей источников. В промежуточном случае, когда сумма напряженностей мала, но отлична от нуля, по-видимому, требуется представление, составленное путем комбинации точечного источника, расположенного в центральной точке, *и* диполя с напряженностью (111); при этом результирующие давления будут, возможно, сравнимыми даже в дальнем поле. Заметим также, что могут возникать и другие усложнения, включающие понятие «квадруполя» (см. разд. 1.10), если момент (111) равен нулю или мало отличается от нуля.

В разд. 1.6 мы видели, что реальные акустические области приходится представлять в виде комбинации точечных источников, описывающих локальные скорости изменения массового расхода жидкости, и диполей, описывающих приложенные к жидкости внешние силы. В случае когда суммарная напряженность точечных источников равна нулю, они в соответствии с изложенным выше создают поле давления, близкое к полю давления одного диполя с напряженностью (111), расположенного в центральной точке. Тогда суммарное поле давления на расстояниях, больших по сравнению с диаметром области источников, равно полю давления от этого центрального диполя плюс поля давления от всех диполей, представляющих внешние силы.

Последние *не* обязательно должны быть расположены в центральной точке, но если считать, что они смещены в нее, то вносимая при этом ошибка, вообще говоря, очень мала; это означает, как и прежде, что поля всех диполей можно сложить и получить поле одного диполя с напряженностью, равной векторной сумме напряженностей каждого из диполей. Ошибка при смещении каждого отдельного диполя будет мала, если область акустически компактна, поскольку изменение времени задержки r/c в выражении (102) приводит к малым изменениям соответст-

вующей величины G, причем изменения множителя сферического затухания $(4\pi r)^{-1}$ также малы. (Более точные утверждения об ошибке можно сделать, пользуясь понятием квадруполя, которое будет введено в разд. 1.10.) Следовательно, мы можем считать ошибку, получающуюся при использовании суммы полей смещенных диполей, малой (с обычной оговоркой, что при суммировании напряженностей диполей не происходит почти полного уничтожения слагаемых).

Напряженность поля одного диполя, которому эквивалентна целая компактная область источников на расстояниях, больших по сравнению с ее диаметром, тогда равна векторной сумме: (i) всех напряженностей диполей, которые представляют действующие на жидкость внешние силы (эта сумма, очевидно, равна результирующей всех этих сил), и (ii) поправки (111), равной моменту скоростей изменения массовых расходов. Физическую интерпретацию напряженности диполя при помощи внешних сил можно представить следующим образом: один-единственный диполь, которому эквивалентна целая сложная область источников, будет всегда иметь напряженность, равную результирующей всех внешних сил, действующих на жидкость; однако необходимо ввести поправку (111), равную моменту всех напряженностей точечных источников (сумма которых предполагается равной нулю), и в некоторых случаях она может быть очень важной.

Мы видели в разд. 1.6, что движение постороннего тела в жидкости создает акустические эффекты, эквивалентные непрерывному распределению: (i) источников, связанных с перемещением поверхности тела в направлении внешней нормали, и (ii) диполей, связанных с силой, с которой эта поверхность действует на жидкость. Суммарная напряженность источников равна $\rho_0 \ddot{V}(t)$, где $V(t)$ — объем тела, и поэтому случай нулевой суммарной напряженности источников, который нами рассматривается, соответствует весьма распространенному случаю, когда объем V тела практически постоянен. В этом важном случае, однако, момент распределенных источников, вообще говоря, не равен нулю. Этот момент распределенных скоростей перемещения объема может быть связан со скоростью центра инерции тела (см. ниже), а будучи умноженным на ρ_0 и продифференцированным по времени, он превращается в момент скорости изменения массового расхода.

Центр инерции тела определяется как точка, в которой находился бы центр масс, если бы плотность была постоянной, так что его радиус-вектор $\mathbf{r}_c$ равен моменту распределенных *объемов* тела, деленному на полный объем V. Отсюда следует, что

момент распределенной скорости перемещения точек тела равен *скорости изменения* суммарного момента $V\mathbf{r}_c$ распределенных объемов, т. е. $V\dot{\mathbf{r}}_c$, поскольку объем V постоянен. Следовательно, момент распределенного *массового* расхода равен $\rho_0 V\dot{\mathbf{r}}_c$, а момент распределенных напряженностей равен $\rho_0 V\ddot{\mathbf{r}}_c$.

Мы получили важный результат, гласящий, что *каждое компактное тело постоянного объема V, движущееся в жидкости плотности ρ_0, создает на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, поле давления, близкое к полю диполя напряженности*

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \rho_0 V\dot{\mathbf{U}}, \tag{112}$$

где $\mathbf{U} = \dot{\mathbf{r}}_c$ — скорость центра инерции, а $\mathbf{F}$ — результирующая сила, с которой тело действует на жидкость; при этом надо оговориться, что такое приближение портится, если слагаемые в (112) в значительной степени взаимно уничтожаются. Эта теорема справедлива как в дальнем поле, где определяется действительный излучаемый звук, так и в ближнем поле, где она эквивалентна теореме, доказываемой для несжимаемой жидкости (в которой опускается, однако, умножение на ρ_0 и дифференцирование по времени, вводимое в акустике в определения напряженностей источника и диполя). Заметим, что поправку $\rho_0 V\dot{\mathbf{U}}$ в (112) можно рассматривать как скорость изменения количества движения «жидкости, вытесненной телом».

Как мы увидим далее, формула (112) является основной при количественной оценке эффективности очень широкого диапазона механизмов генерирования звука, включая механизмы со сложными полями течений. Однако мы сначала продемонстрируем ее использование на простейшем случае колебания в покоящейся жидкости твердого тела, совершающего прямолинейные движения с частотой, удовлетворяющей условию компактности (91).

Сила $\mathbf{F}$, с которой такое колеблющееся тело действует на жидкость, обычно приближенно определяется членом $M_v\dot{\mathbf{U}}$, пропорциональным ускорению тела $\dot{\mathbf{U}}$. Здесь коэффициент M_v называется «присоединенной массой» жидкости в том смысле, что движение тела со скоростью $\mathbf{U}$ вызывает пропорциональное движение соседней жидкости с суммарным количеством движения $M_v\mathbf{U}$ (как будто масса M_v жидкости движется со скоростью $\mathbf{U}$ тела, а остальная жидкость остается в покое). Конечно, в действительности частицы жидкости движутся со скоростями, которые составляют некоторую часть от $\mathbf{U}$ и которые уменьшаются по мере увеличения расстояния от тела; масса M_v

получается сложением масс таких частиц жидкости с весами, соответствующими их скоростям. При таком вычислении может возникнуть проблема сходимости, но этого не произойдет (как и в разд. 1.5), если мы будем рассматривать только жидкость в большом цилиндре с осью, параллельной направлению движения; кроме того, тогда при вычислении силы $\mathbf{F}$ не может появиться никакой поправки к члену $M_v\dot{\mathbf{U}}$ за счет сил давления на поверхности цилиндра, которые будут иметь нулевую составляющую в направлении движения.

Если отвлечься от более сложных случаев (например, когда вязкие силы, пропорциональные $\mathbf{U}$, сравнимы с членом $M_v\dot{\mathbf{U}}$ или когда тело несимметрично относительно направления движения, что приводит к анизотропной присоединенной массе и к возможности появления силы, пропорциональной $\dot{U}$ по величине и перпендикулярной ей по направлению), можно заключить, что напряженность диполя (112) для такого колеблющегося тела принимает вид

$$\mathbf{G} = (M_v + \rho_0 V)\,\dot{\mathbf{U}}. \tag{113}$$

Два члена, стоящие в скобках, часто бывают сравнимыми по величине; например, легко показать (см. курсы гидродинамики), что для кругового цилиндра, совершающего поперечные колебания, $M_v = \rho_0 V$, в то время как для *сферы* радиуса a

$$M_v = \frac{1}{2}\rho_0 V, \quad \text{что дает} \quad \mathbf{G} = \frac{3}{2}\rho_0 V\dot{\mathbf{U}} = 2\pi\rho_0 a^3\dot{\mathbf{U}}. \tag{114}$$

Это значение (114) напряженности диполя, соответствующей движению сферы, при подстановке в (102) дает поле давления

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho_0 a^3\,[\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{U}}\,(t - r/c)/r^3] + \\ + \frac{1}{2}\rho_0 a^3\,[\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{U}}\,(t - r/c)/(r^2 c)], \tag{115}$$

которое в ближнем поле близко к величине, соответствующей классическому потенциалу

$$\varphi = -\frac{1}{2}a^3\,[\mathbf{r}\cdot\mathbf{U}\,(t)/r^3] \tag{116}$$

для сферы, движущейся в несжимаемой жидкости. С другой стороны, в дальнем поле главным в (115) является второй член, и он один описывает излучаемый звук.

Когда тело колеблется не в покоящемся, а в движущемся относительно тела воздухе, оба члена в (113) могут оказаться пренебрежимо малыми по сравнению с вкладами в напряжен-

ность диполя (112) *в фазе* со скоростью колебаний, которые обусловлены флуктуациями аэродинамических сил, возникающих в ответ на флуктуации скорости тела относительно воздуха. Такие силы могут иметь порядок $\rho_0 S U_0 \mathbf{U}$, где U_0 — невозмущенная относительная скорость, S — площадь поверхности тела, и будут превосходить величину (113) при частотах, меньших чем SU_0/V. Хороший пример такого типа генерации звука — жужжание крыльев насекомых.

Заметим, что хотя столь большие аэродинамические силы могут вызывать соответствующий «откат» центра инерции насекомого, оно, имея среднюю плотность ρ_m, много большую, чем плотность ρ_0 воздуха, будет двигаться со скоростью $\mathbf{U}$ своего центра инерции (здесь предполагается, что он совпадает с центром масс) с ускорением, определяемым силой $-\mathbf{F}$, действующей на насекомое со стороны воздуха, так что напряженность диполя, вычисленная по формуле (112), будет равна

$$\mathbf{F}\,(1 - \rho_0/\rho_m), \tag{117}$$

что незначительно отличается от $\mathbf{F}$. Наоборот, в океане существа со средней плотностью ρ_m, очень близкой к плотности окружающей их воды, и с быстро колеблющимися плавниками являются весьма неэффективными генераторами звука, поскольку напряженность диполя, вычисленная по формуле (117), в этом случае очень мала.

Очень часто источник звука обусловливается не какими-либо внешними колебаниями в потоке, а *неустойчивостью самого потока*, связанной с обтеканием разнообразных препятствий: телефонных проводов, ветвей деревьев и т. п. Пульсирующие силы $\mathbf{F}$, действующие между таким препятствием и потоком, являются следствием этой неустойчивости потока и генерируют звуковое поле диполя. Такая сила почти *не зависит* от того, в какой мере препятствию «дозволяется» колебаться под действием этой силы; даже если бы оно двигалось совершенно свободно, то напряженность диполя, вычисленная по формуле (117), была бы практически равна $\mathbf{F}$, но обычно препятствие не свободно, а соединено со столбом, стволом дерева и т. д. Резонанс с нормальной модой колебаний натянутого провода может, однако, оказывать влияние на генерируемый звук, сохраняя аэродинамические силы в фазе вдоль всего провода и создавая так называемые эоловы тона.

Винт самолета, вращающийся с большой угловой частотой ω, может не удовлетворять условию компактности (91), если в качестве l брать здесь диаметр диска винта, а каждый «элемент лопасти» (участок лопасти между расстояниями s и $s + ds$ от оси) может удовлетворять этому условию, потому что на та-

ком участке лопасти размер ее аэродинамического профиля мал по сравнению с c/ω. Тогда звуковое поле можно изучать как линейную суперпозицию связанных с различными элементами лопасти полей диполей, напряженности которых определяются по формуле (112); здесь важным членом в $\mathbf{F}$ является сила тяги, но и вкладом в член $\rho_0 V\dot{\mathbf{U}}$, обусловленным центростремительным ускорением элемента лопасти, пренебрегать нельзя.

1.8. Моделирование в волновой кювете

Можно получить экспериментальное подтверждение всех существенных результатов, приведенных в разд. 1.4—1.7, если позаботиться о хорошо калиброванных микрофонах в условиях, когда они регистрируют звук, порожденный лишь в области источника (что обычно требует работы в звукопоглощающей камере) и об оборудовании для измерения амплитуд любых колебаний посторонних тел в жидкости, а также аэродинамических сил, которые им противостоят. С другой стороны, эксперименты, которые связаны не столько с реализацией явлений генерирования звука, сколько с их *моделированием*, обладают некоторыми важными преимуществами, так как они позволяют понять основные принципы явления отчасти потому, что их гораздо легче провести, но главным образом потому, что они дают возможность простым визуальным наблюдением получить представление о явлении в целом.

При этом моделировании звуковые волны заменяются волнами ряби в кювете со стеклянным дном, наполненной водой на глубину 5 мм. Причина для специального выбора глубины 5 мм станет ясной в гл. 3, где объясняется тесная связь между звуковыми волнами и волнами ряби в воде определенной глубины; по существу, распространение таких волн ряби зависит от баланса между инерцией движения первоначально горизонтально расположенной воды в мелком слое и своего рода «заменителем сжимаемости», в котором силы тяжести и поверхностного натяжения сочетаются таким образом, что дают *понижение* давления всюду, где дивергенция горизонтальной составляющей скорости приводит к локальному уменьшению глубины, и *повышение* давления всюду, где отрицательная дивергенция вызывает увеличение глубины. При глубине 5 мм с достаточной точностью можно полагать, что комбинация указанных эффектов порождает волны ряби со скоростью, которая подобно скорости звуковых волн в воздухе не зависит от длины волны.

Однако волны ряби гораздо легче наблюдать в силу того, что скорость их распространения составляет 0,22 м/с (тогда как

скорость звука в воздухе при 20 °С равна 340 м/с); о распространении этих волн можно судить, рассматривая их отчетливые движущиеся тени, отбрасываемые на большой экран при помощи мощного источника света. Тот факт, что распространение двумерно, делает его гораздо проще для визуального наблюдения, чем в случае трехмерного распространения. Конечно, это означает, что представлены будут не собственно фундаментальные решения, исследованные в разд. 1.4—1.7 и основанные на особенно простой формуле (71) для частного случая трехмерного источника, а скорее соответствующие решения, основанные на формуле (75) для точечного источника в двумерном пространстве (где h — глубина слоя воды). Однако все качественные особенности решений, указанные в разд. 1.4—1.7, сохраняются: напряженность источника связана с расходом массы, а напряженность диполя — с силой; диполь создает поле, зависимость которого от направления определяется множителем $\cos\theta$, причем дальнее поле слабее ближнего, область компактных источников излучает или как один источник, или как один диполь в соответствии с критерием, указанным в разд. 1.6 и 1.7; в этих двух случаях посторонние тела представляются эквивалентной напряженностью источника (105) или эквивалентной напряженностью диполя (112) соответственно.

При таком моделировании явлений генерирования звука лучшим видом непрерывной записи является кинофильм. Такая запись движущихся теней волн сделана в части 44-минутного фильма «Аэродинамическое генерирование звука», созданного автором этой книги и проф. Дж. Э. Фоуксом Уильямсом при поддержке Национального комитета фильмов по динамике жидкости США. Информацию о приобретении или прокате фильма можно получить от распространителя (Корпорация Британской энциклопедии по образованию, 425 No, Мичиган-авеню, Чикаго, Иллинойс, США), с любезного разрешения которого в этот раздел включены несколько кадров из фильма. Эти кадры дают полезную картину многих явлений, хотя, если читателю представится возможность посмотреть кинокадры о явлениях в волновой кювете и другие материалы о генерации звука в этом фильме, ему стоит это сделать.

На рис. 7 показано моделирование излучения от точечного источника; в соответствующем месте кинофильма видны концентрические тени волн ряби, разбегающихся с постоянной скоростью 0,22 м/с. Зависимость амплитуд волн от направления не обнаружена. Практически роль источника играло постороннее тело, которое опускали в воду по вертикали и вынимали из нее, как показано на рис. 8; это тело, являясь компактным (много меньшим, чем длина λ генерируемых волн), почти экви-

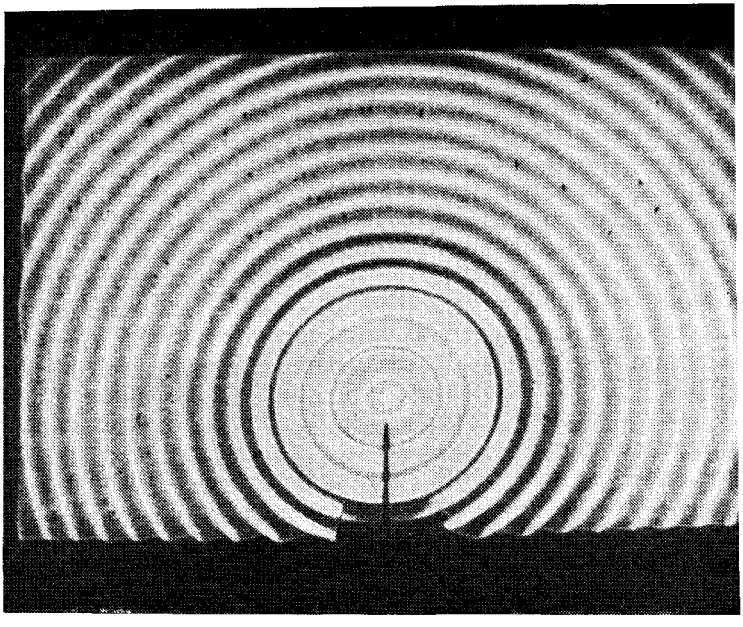

Рис. 7. Моделирование в волновой кювете излучения от точечного ист ника. (Любезно предоставлено Центром по развитию образо ния, Ньютон, Массачусетс, США.)

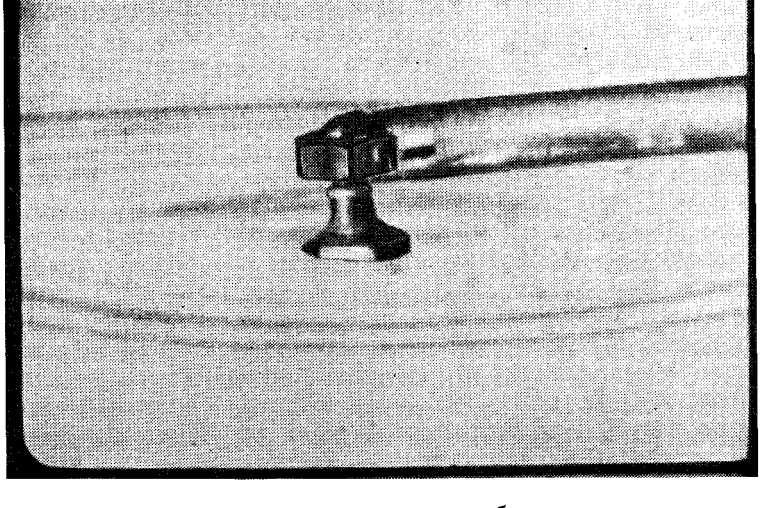

Рис. 8. Устройство для генерирования волн ряби, показанных на рис. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ны тон, шт. Массачусетс, США.)

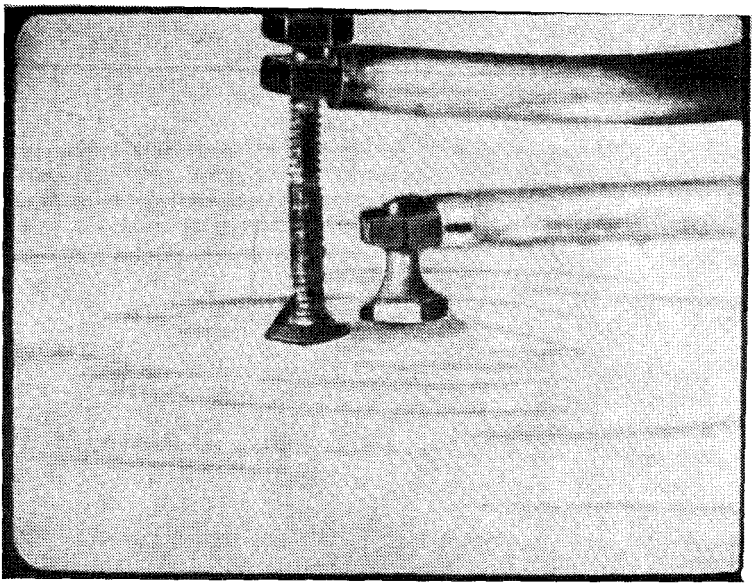

Рис. 9. Устройство для генерирования волн ряби, моделирующих поле диполя. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

валентно источнику, напряженность которого, выраженная через изменение погруженного объема $V(t)$, представляется формулой (105).

На рис. 9 показано взаимное расположение двух таких плунжеров, необходимых для создания поля пары источник — сток. Когда они поднимаются и опускаются с одинаковой частотой и с одинаковой амплитудой, но со сдвигом фазы на 180°, то в результате получается, как на рис. 10, волновое поле диполя (в кинофильме снова видны разбегающиеся тени волн). Направление оси пары источник — сток совпадает с направлением «север — юг» на рис. 10, на котором видна характерная для диполя зависимость от направления через $\cos\theta$; в частности, амплитуда убывает до нуля в направлении «восток — запад» ($\theta = \pm\pi/2$), где существует сдвиг фазы на 180° между волнами, для которых $\cos\theta$ положителен, и волнами, для которых $\cos\theta$ отрицателен.

Напротив, на рис. 11 показано действие трех плунжеров, колеблющихся с одинаковой частотой, но с разными амплитудами и фазами, в общем случае, когда сумма напряженностей источников *не* равна нулю. Хотя волновое поле вблизи плун-

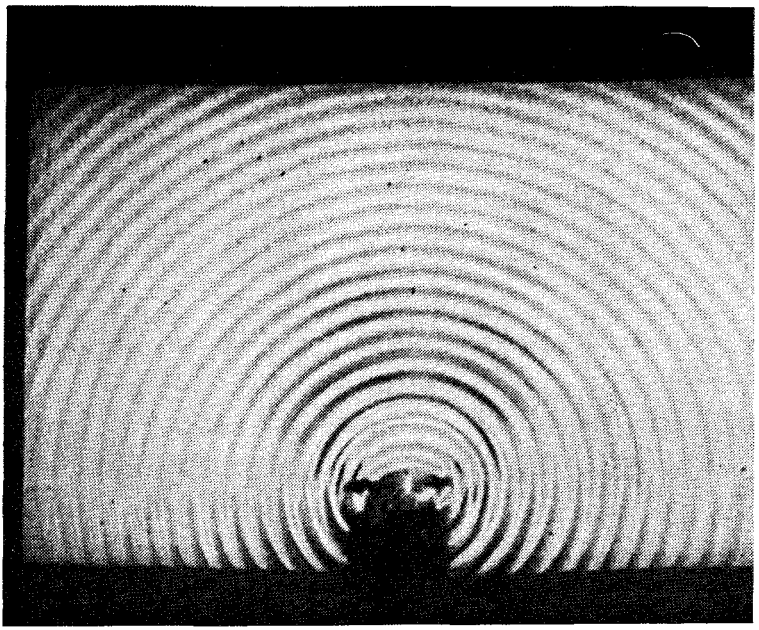

Рис. 10. Моделирование в волновой кювете излучения диполя. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

жеров имеет совершенно неправильную форму, дальнее поле близко к полю точечного источника. Второй эксперимент из этой же серии проводится в фильме с использованием одного плунжера, имеющего, однако, весьма неправильную форму; получающееся в результате волновое поле очень похоже на поле, представленное на рис. 11.

Звук в воздухе обычно генерируется движущимся через него цилиндрическим телом, например когда размахивают тростью. Он вызван флуктуациями *боковой силы* (силы, направленной под прямым углом к направлению движения), связанной с периодическим срывом вихрей с цилиндра. Слышимый звук имеет частоту этих флуктуаций боковой силы, а пренебрежимо слабый звук связан с много меньшими флуктуациями силы сопротивления с вдвое большей частотой. Такой слышимый звук также имеет сходный с дипольным направленный максимум в направлении этой боковой силы. Данное явление иллюстрируется в фильме кадрами поля, показывающими, что происходит в том случае, когда в волновой кювете проводят ребром

маленькой монетки. На рис. 12 показано получающееся в результате волновое поле диполя с направленным максимумом (показанным стрелкой) под прямым углом к направлению движения.

На рис. 13 и 14 представлена достаточно ясная картина для иллюстрации утверждения, что движение постороннего тела с постоянным погруженным объемом V порождает поле диполя, напряженность которого определяется результирующей силой $\mathbf{F}$, с которой тело действует на жидкость, вместе с поправочным членом $\rho_0 V\dot{\mathbf{U}}$, как в формуле (112). В действительности волновое поле диполя на рис. 13 порождается *парой* таких посторонних тел, а именно парой цилиндров с вертикальными осями, движущихся с равными амплитудами и фазами в направлении «север — юг», причем один из них все время остается к востоку от другого. В фильме показан еще один пример, когда цилиндр сам порождает поле диполя, почти неотличимое от изображенного на рис. 10. Удивительно, однако, что более сложная область источников на рис. 13, включающая два таких цилиндра, хотя и приводит в ближнем поле к отклонениям от чисто дипольного распределения, обладает дальним полем, почти эквивалентным полю точечного диполя.

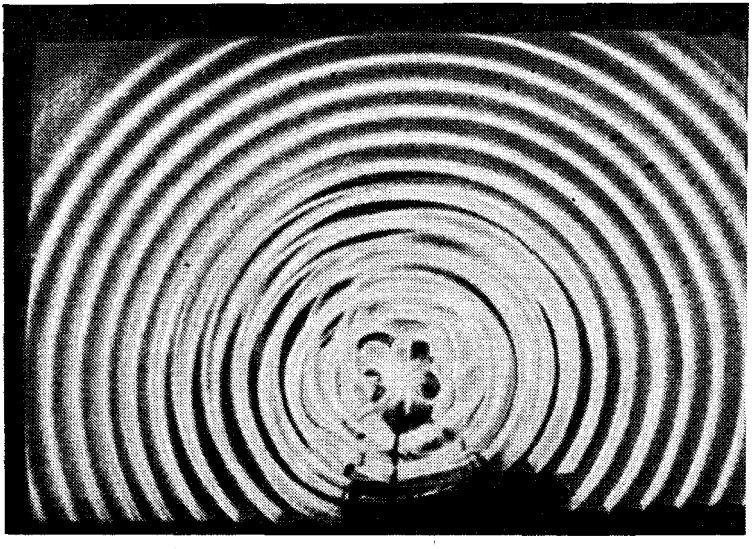

Рис. 11. Моделирование в волновой кювете поля нескольких точечных источников. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

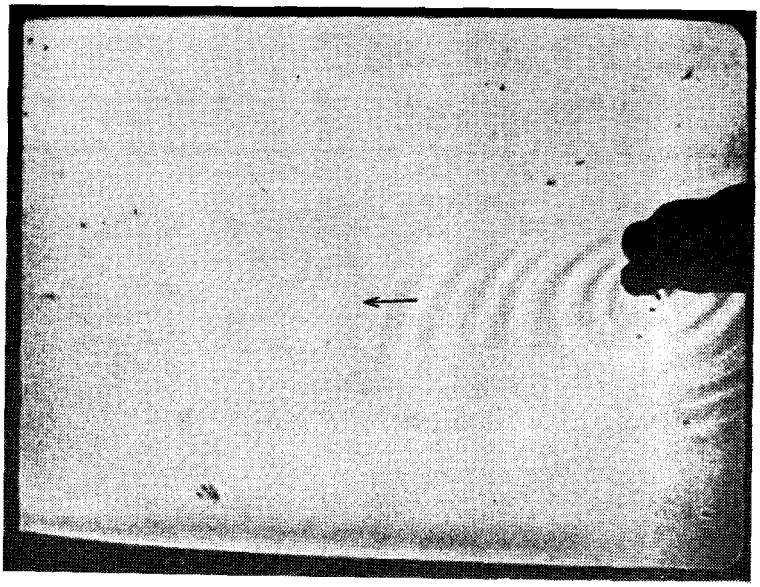

Рис. 12. «Поле диполя», возникающее в случае, когда по поверхности воды в волновой кювете проводят ребром маленькой монетки; максимум интенсивности волн находится в указанном стрелкой направлении, перпендикулярном направлению движения монетки. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

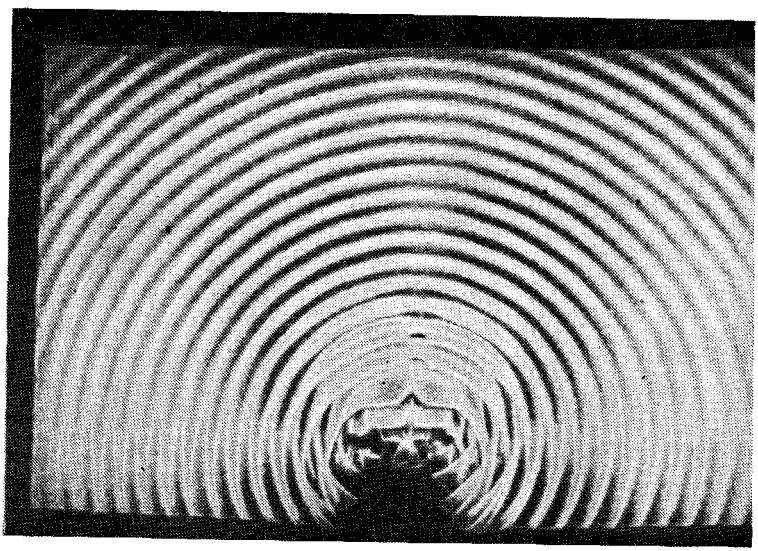

Рис. 13. Поле диполей, возникающее в волновой кювете при колебании с одинаковой фазой двух вертикальных цилиндров. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

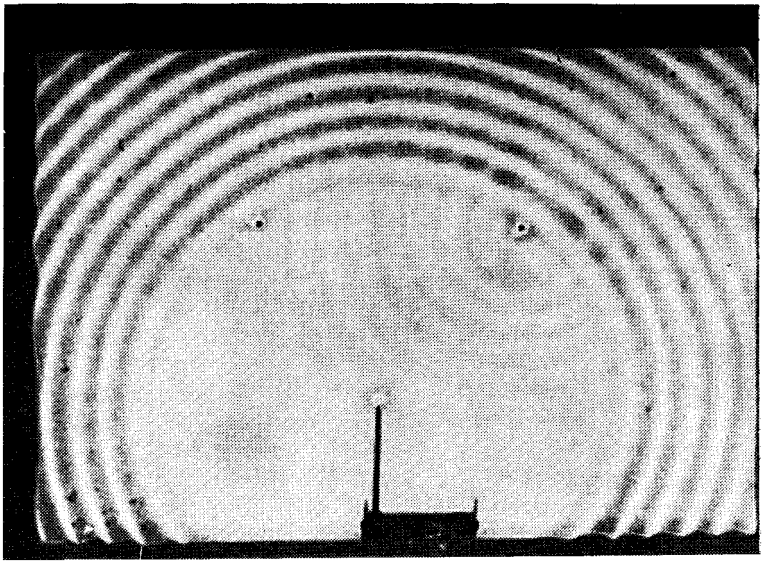

Рис. 14. Когда последние волны «волнового пакета» от точечного источника встречают на своем пути представленные черными точками объекты (свободно плавающее тело слева и тело, которое не может совершать свободного движения, справа), рассеяние волн происходит только на правом объекте. (Любезно предоставлено Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

На рис. 14 представлен отдельный кадр из части фильма, в которой противопоставляются случаи, когда в формуле (112) для напряженности диполя сила $\mathbf{F}$ действия тела на жидкость либо уничтожается поправочным членом $\rho_0 V\dot{\mathbf{U}}$, либо не уничтожается им. Более полное представление дает просмотр всего эпизода фильма, но здесь мы постараемся дать краткие пояснения, исходя из одного кадра.

На рис. 14 показаны последние волны «волнового пакета» от точечного источника (порожденные вертикальными колебаниями плунжера в течение ограниченного периода времени), когда они встречают на пути два объекта, представленные на рисунке черными точками. Точкой слева отмечено свободно плавающее тело, масса которого по закону Архимеда равна массе $\rho_0 V$ вытесненной воды. Если волны действуют на тело с силой $-\mathbf{F}$ (минус потому, что мы продолжаем использовать обозначение $\mathbf{F}$ для равной и противоположной по направлению силы действия тела на жидкость), то оно приобретает ускорение $\dot{\mathbf{U}}$, такое что $\rho_0 V\dot{\mathbf{U}} = -\mathbf{F}$, и при этом напряженность

диполя, согласно формуле (112), обращается в нуль. Это означает, что тело, расположенное слева, не может создавать волн, и, действительно, мы не видим кольцевых теней волн с центром в этой точке.

Точка справа представляет подобное тело, которое не может совершать свободного движения. Волны действуют на него с силой $-\mathbf{F}$, не вызывающей ускорения $\dot{\mathbf{U}}$, которое могло бы свести на нет или существенным образом уменьшить напряженность диполя, определяемую формулой (112). Поэтому не удивительно, что волновой пакет, встречая это тело на своем пути, заставляет его порождать волны, которые можно видеть в форме концентрических теней, окружающих правую точку. Это «поле рассеянных волн» несет ту часть энергии падающих волн, которую телу «удалось» рассеять. Теория явления *акустического* рассеяния, которое моделирует этот эксперимент, будет развита в разд. 1.9.

Приводя нашу последнюю картину волновой кюветы, мы не только заглядываем далеко вперед, затрагивая излучение квадруполя, которому будет посвящен разд. 1.10, но преследуем и еще одну цель: подтвердить допустимость проведенной в в разд. 1.7 процедуры смещения диполей, при которой предполагалось, что они сдвигаются в другую точку, находящуюся на расстоянии, много меньшем длины волны. Рис. 15 следует сравнить с рис. 13; на нем также представлен случай, когда два вертикальных стержня колеблются в направлении «север — юг» около неподвижных точек, одна из которых расположена «к востоку» от другой. Амплитуды движения обоих стержней снова совпадают и такие же, как на рис. 13. Однако на рис. 13 стержни двигались в фазе, тогда как на рис. 15 их фазы различаются на 180°.

Таким образом, если на рис. 13 представлена *сумма* волновых полей двух диполей, создающих, как указано выше, дальнее поле, близкое к полю точечного диполя, в подтверждение того, что «смещение» не вносит большой разницы, то рис. 15 дает дальнейшее обоснование такого утверждения, реально показывая *разность* между волновыми полями одинаковых диполей, расположенных в различных точках. Относительная интенсивность теней волн на двух рисунках позволяет усмотреть, что дальнее поле для этой *разности* (рис. 15) действительно оказывается слабым по сравнению с дальним полем *суммы* диполей (рис. 13).

Кроме того, рис. 15 показывает существенное ослабление излучения звука, которое имеет место при излучении от компактной области источников, когда *суммарная* напряженность

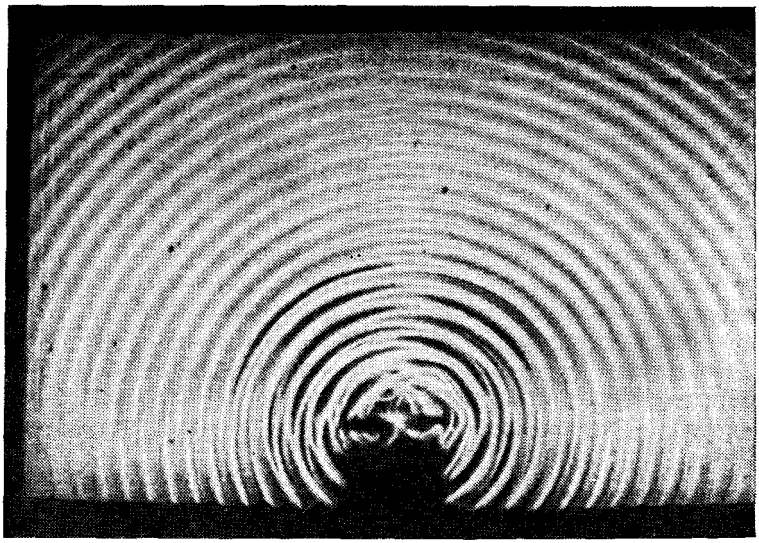

Рис. 15. Поле квадруполя, возникающее в волновой кювете при колебании двух вертикальных цилиндров с одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами. (*Любезно предоставлено* Центром по развитию образования, Ньютон, Массачусетс, США.)

диполей (а также суммарная напряженность источников) равна нулю. К такому виду излучения диполя с нулевой напряженностью обычно относится излучение звука *турбулентными потоками*, не содержащими каких-либо посторонних тел, которые могут оказывать силовое воздействие на поток воздуха. Волновая картина, приведенная на рис. 15, относится к специальному типу волн, характерных для излучений такого рода. Она называется картиной волн *квадруполя* по существу потому, что два равных и противоположных диполя можно рассматривать как совокупность четырех источников. Заметим, что здесь также существуют четыре направления (по диагоналям области источников), в которых волны наиболее интенсивны. Важность квадрупольного излучения при аэродинамическом генерировании звука будет кратко обсуждаться в разд. 1.10.

1.9. Рассеяние на компактных телах

Описанные в разд. 1.8 эксперименты в волновой кювете включали эксперимент по «рассеянию», иллюстрированный рис. 14. Он показал, что волны не рассеиваются на свободно плавающем теле (левая точка на фотографии). Объяснение состояло

в том, что такое тело, имея по закону Архимеда массу, равную массе вытесненной воды $\rho_0 V$, движется точно так же, как двигалась бы вода при отсутствии тела.

Соответствующий закон для случая распространения звука в жидкости состоит в том, что на теле с той же массой *и с той же сжимаемостью*, что и у вытесненной жидкости, рассеяния не происходит. Действительно, при распространении звука из всех характеристик жидкости важны только масса и сжимаемость: постороннее тело с теми же значениями этих величин, что и у вытесненной им жидкости, расширяется, сжимается и колеблется точно так же, как это делала бы жидкость, и поэтому играет ту же роль в распространении звука, что и жидкость. (Заметим, что аналогией сжимаемости при моделировании в волновой кювете является связь между локальным увеличением глубины воды и повышением давления; эта связь также не меняется при наличии плавающего тела.)

В этом разделе мы изучим рассеяние звуковых волн на компактных телах со значениями сжимаемости и плотности, отличными от значений для окружающей жидкости. Мы используем выводы, сделанные в разд. 1.6 и 1.7, чтобы рассчитать возникающий благодаря этим двум эффектам рассеянный звук как поле источника и поле диполя соответственно. Разность между изменениями объема тела и объема вытесненной жидкости создает рассеяние точечным источником; разность между изменениями их количества движения создает дипольное ассеяние.

Может показаться, что методы, развитие в разд. 1.6 и 1.7 для расчета генерирования звука областями источников, излучающих в *невозмущенную жидкость*, нельзя применять для изучения явлений, включающих поля *падающих звуковых волн*. Однако в рамках линейной теории эти методы *можно* использовать для расчета поля рассеянного звука, которое определяется как *разность* двух полей:

(i) звукового поля в случае, когда наличие тела возмущает падающие звуковые волны, и

(ii) звукового поля в случае, когда тело отсутствует и падающая волна распространяется в однородной жидкости.

В линейной теории такая разность двух звуковых полей должна удовлетворять уравнению распространения звуковых волн и стремиться к нулю при удалении от тела, где параметры поля (i) стремятся к тем же значениям для поля падающих волн, что и параметры поля (ii). Таким образом, указанную разность полей можно вычислить как поле звуковых волн, излучаемых в невозмущенную жидкость вследствие различий между воздействиями тела в случае (i) и замещающей его жидкости в случае (ii).

Из результатов разд. 1.6 и 1.7 следует, что такой излученный звук образуется наложением звука от точечного источника, напряженность которого $\dot{q}$ равна разности между величиной напряженности (105) для тела в случае (i) и для замещающей его жидкости в случае (ii), и звука от диполя, напряженность которого $\mathbf{G}$ равна разности между величинами напряженности (112) для этих двух случаев. Таким образом,

$$\dot{q} = (\rho_0 \ddot{V})_{\mathrm{i}} - (\rho_0 \ddot{V})_{\mathrm{ii}} \tag{118}$$

где $V(t)$ — объем тела в случае (i) или замещающей его жидкости в случае (ii), и

$$\mathbf{G} = (\mathbf{F} + \rho_0 V \dot{\mathbf{U}})_{\mathrm{i}} - (\mathbf{F} + \rho_0 V \dot{\mathbf{U}})_{\mathrm{ii}} = (\mathbf{F} + \rho_0 V \dot{\mathbf{U}})_{\mathrm{i}}, \tag{119}$$

где $\mathbf{F}(t)$ — сила, с которой тело действует на жидкость, а $\mathbf{U}$ — скорость его центра инерции. В формуле (119) мы использовали обстоятельство, уже отмеченное в разд. 1.8: напряженность диполя $\mathbf{F} + \rho_0 V \dot{\mathbf{U}}$ в случае (ii) обращается в нуль потому, что для массы жидкости $\rho_0 V$, замещающей тело в этом случае, выполняется закон Ньютона. Вычислим теперь напряженности (118) и (119) для сферического тела и вкратце укажем, как можно распространить эти вычисления на случай тел более общей формы.

Рассмотрим постороннее тело (твердое, жидкое или газообразное), в невозмущенном состоянии являющееся сферой радиуса a_0 и погруженное в однородную жидкость, по которой распространяются звуковые волны частоты ω, удовлетворяющей условию компактности

$$\omega a_0 / c \ll 1. \tag{120}$$

Это означает, что «падающая волна», определенная в случае (ii), пренебрежимо мало меняется по фазе во всем сферическом объеме жидкости, вытесненной телом: если в центре объема *давление* в падающей волне равно

$$p - p_0 = p_1 e^{i\omega t} \tag{121}$$

(подразумевается конечно, что в таком комплексном выражении для реальных величин берется действительная часть), то во всем этом объеме давление будет приближенно таким же. В результате изменение полного объема сферы V, занимаемой жидкостью в случае (ii), по сравнению с его невозмущенным значением

$$V_0 = \frac{4}{3} \pi a_0^3 \tag{122}$$

составит

$$(V-V_0)_{ii} = -V_0\,[(\rho-\rho_0)/\rho_0] = -V_0\,[(p-p_0)/(\rho_0 c^2)] = \\ = -V_0\,(p_1/(\rho_0 c^2))\,e^{i\omega t}. \qquad (123)$$

Здесь было использовано соотношение (37) для связи изменений давления и плотности при постоянной энтропии.

Соответствующее изменение объема самого тела в случае (i) вычисляется в предположении, что реакция на равномерное изменение давления p_s на его поверхности определяется средним значением сжимаемости тела K:

$$(V-V_0)_i = -V_0 K\,(p_s - p_0). \qquad (124)$$

Здесь K — относительное уменьшение объема при единичном изменении давления на поверхности. Соотношение (123) показывает, что для жидкостей $K = \rho_0^{-1}c^{-2}$, так что если нашим посторонним телом является пузырек газа, подобный рассматривавшемуся в разд. 1.6, то мы должны положить

$$K = \rho_{g0}^{-1} c_g^{-2}. \qquad (125)$$

В то же время для однородного твердого тела K представляет собой величину, обратную модулю всестороннего сжатия материала тела.

В случае (i) давление на поверхности p_s складывается из давления, обусловленного падающей волной (оно дается формулой (121)), и давления, обусловленного точечным источником с напряженностью $\dot{q}$, помещенным в центре сферы:

$$p_s - p_0 = p_1 e^{i\omega t} + \dot{q}\,(t)/(4\pi a_0). \qquad (126)$$

Здесь учтено, что в выражении (71) для обусловленного точечным источником избыточного давления при $r = a_0$ можно пренебречь отличием $t - a_0/c$ от t в силу условия компактности (120). (Таким образом, для представления искомого решения волнового уравнения мы *локально* используем решение (67) уравнения Лапласа.) Какое-либо влияние дипольного распределения избыточного давления в формуле (126) можно не учитывать, так как его среднее значение на поверхности сферы равно нулю; действительно, это распределение порождает только движение тела как целого.

Значение $(V - V_0)_i$, определяемое формулами (124) и (126), и значение $(V - V_0)_{ii}$, определяемое формулой (123), надо теперь подставить в соотношение (118), чтобы получить *дифференциальное уравнение для напряженности источника* $\dot{q}$:

$$\dot{q} = \rho_0 V_0 K\,[p_1\omega^2 e^{i\omega t} - \dddot{q}/(4\pi a_0)] - \rho_0 V_0\,[p_1/(\rho_0 c^2)]\omega^2 e^{i\omega t}, \qquad (127)$$

где два члена в правой части соответствуют двум членам в соотношении (118). Уравнение (127) является уравнением вынужденных колебаний системы с собственной частотой

$$[4\pi a_0/(\rho_0 V_0 K)]^{1/2}. \tag{128}$$

Заметим, что в случае пузырька формулы (125) для K и (122) для V_0 приводят к выражению для резонансной частоты, *идентичному* выражению (109), полученному совершенно другим методом. Решением уравнения (127) будет

$$\dot{q} = [1 - \rho_0 V_0 K\omega^2/(4\pi a_0)]^{-1} (K - \rho_0^- c^{1-2})\, \rho_0 V_0 p_1 \omega^2 e^{i\omega t}. \tag{129}$$

Здесь первый множитель указывает на резонанс при совпадении частоты ω падающего звука с собственной частотой (128). Как и в случае других резонансных систем, от особенности при этом значении ω можно избавиться только тогда, когда мы учтем затухание (в случае пузырька, как было указано в разд. 1.6, частично обеспечиваемое влиянием теплопроводности). Второй множитель в формуле (129) подтверждает, что если средняя сжимаемость тела K равна сжимаемости жидкости, то рассеяние на точечном источнике не имеет места.

Для тел с малой сжимаемостью формула (129) дает картину *слабого* поля точечного источника из-за появления множителя $(\omega/c)^2$ в случае $K \to 0$. Наоборот, для посторонних тел с большей сжимаемостью, включая пузырьки, напряженность рассеяния на монополе образует мощный пик при резонансной частоте (128).

Приведенное обоснование остается в силе и в случае, когда флуктуации давления в падающей волне отвечают некоторому «дальнему полю» породившего его источника, которое в действительности представляет собой плоскую волну в масштабах размера тела a_0, и в случае, когда они соответствуют *ближнему полю*. В обсуждении, проведенном после формулы (110), подчеркивалось, что пузырьки могут вызвать резонансный отклик точечного источника на флуктуации давления в ближнем поле диполя и усилить излучаемый звук. Формула (129) дает количественную оценку напряженности точечного источника, приведенного в действие этим механизмом.

Если мы вычислим напряженность диполя $\mathbf{G}$ для поля рассеянного звука тем же способом, что и напряженность источника, то мы не получим резонанса. Предположим, что поле скоростей $\mathbf{u}$ падающей волны в центре сферического объема жидкости, вытесненной телом, имеет вид

$$\mathbf{u} = u_1 e^{i\omega t}. \tag{130}$$

Заметим, что для бегущей плоской волны (или в более общем случае для дальнего поля) в силу формулы (22) или (81) вектор $\mathbf{u}_1$ должен иметь абсолютную величину $p_1/(\rho_0 c_0)$. Однако мы не ограничимся этими случаями.

Исходя из формулы (119), мы должны вычислить в случае (i) скорость $\mathbf{U}$ центра инерции тела (по предположению совпадающего с его центром масс) и силу $\mathbf{F}$, с которой оно действует на жидкость. Мы найдем их из двух уравнений, которым они должны удовлетворять. Во-первых, если тело имеет массу $\rho_m V_0$, так что его средняя плотность равна ρ_m, то его движение будет описываться уравнением

$$\rho_m V_0 \dot{\mathbf{U}} = -\mathbf{F}. \tag{131}$$

Во-вторых, сила $\mathbf{F}$ должна быть связана с присоединенной массой сферического тела, которая, согласно формуле (114), составляет

$$M_v = \frac{1}{2}\rho_0 V_0. \tag{132}$$

При обсуждении присоединенной массы, проведенном перед формулой (114) для тела, движущегося в покоящейся жидкости, устанавливалась связь между этой массой и силой. Чтобы применить результаты этого обсуждения к рассматриваемому случаю, в котором тело погружено в жидкость, движущуюся со скоростью (130), мы должны временно перейти в систему отсчета, движущуюся с этой скоростью.

В такой системе отсчета, совершающей прямолинейное ускоренное движение, в уравнение движения любой частицы (имеющей по предположению массу M) наряду с другими силами будет входить сила инерции

$$-M\, i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}. \tag{133}$$

Это известное свойство движущихся систем отсчета означает только то, что сумма остальных сил равна произведению массы частицы на ее полное ускорение, которое равно произведению этой массы на ускорение в движущейся системе отсчета плюс произведение массы на ускорение самой системы. Последний член, перенесенный с изменением знака в другую часть уравнения, к силам, становится эффективной силой инерции (133). Для частиц жидкости с плотностью ρ_0 величина этой силы на единицу объема будет

$$-\rho_0 i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}. \tag{134}$$

В жидкости любое такое однородное поле силы на единицу объема (например, поле силы тяжести) автоматически уравновешивается распределением давления с постоянным градиентом.

Градиент давления *равен* такой силе на единицу объема, определяемой здесь выражением (134). Заметим, что эта величина может быть получена другим способом из линеаризованного уравнения количества движения (4). Теперь закон Архимеда дает окончательное выражение для такого распределения давления по телу объема V_0. Оно представляется в виде

$$\rho_0 V_0 i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t} \tag{135}$$

и имеет величину, необходимую для уравновешивания силы, которая действовала бы на жидкость, вытесненную телом, при отсутствии последнего.

Кроме того, что в результате появления сил инерции тело действует на жидкость с силой, определяемой выражением (135) со знаком минус, оно в результате движения относительно окружающей его жидкости (которая в нашей системе отсчета покоится) со скоростью

$$\mathbf{U} - \mathbf{u}_1 e^{i\omega t} \tag{136}$$

сообщает ей за единицу времени количество движения

$$M_v\,(d/dt)\;(\mathbf{U} - \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}). \tag{137}$$

Следовательно, полная сила $\mathbf{F}$, с которой тело действует на жидкость, будет

$$\mathbf{F} = -\rho_0 V_0 i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t} + M_v\,(\dot{\mathbf{U}} - i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}). \tag{138}$$

Вместе с равенствами (131) и (132) это дает

$$\mathbf{F} = -V_0 \frac{3\rho_0\rho_m}{\rho_0 + 2\rho_m} i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}, \qquad \dot{\mathbf{U}} = \frac{3\rho_0}{\rho_0 + 2\rho_m} i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}, \tag{139}$$

откуда в силу формулы (119) для напряженности диполя получаем

$$\mathbf{G} = V_0 \frac{3\rho_0\,(\rho_0 - \rho_m)}{\rho_0 + 2\rho_m} i\omega \mathbf{u}_1 e^{i\omega t}. \tag{140}$$

Поле рассеянного звука складывается из поля источника с напряженностью (129) и поля диполя с напряженностью (140).

Из уравнения (140) видно, что напряженность диполя становится нулевой, когда средняя плотность сферы ρ_m равна плотности ρ_0, что было очевидно уже из формул (119) и (131). Другим интересным частным случаем является случай рассеяния *неподвижной сферой*: его можно описать как предельный случай сферы, плотность которой ρ_m стремится к бесконечности, так что ускорение ее в силу формул (139) равно нулю, что вполне естественно. В этом случае напряженность диполя (140) имеет ненулевой предел.

В приведенном выше обсуждении рассеяния на теле со средней плотностью ρ_m, отличной от плотности жидкости ρ_0, ничего не было сказано о влиянии силы тяжести, если она учитывается, т. е. об обусловленных ею вкладах в ускорение тела $\dot{\mathbf{U}}$ и в силу $\mathbf{F}$ действия тела на жидкость. Однако такие вклады носят стационарный, а не колебательный характер и поэтому не генерируют рассеянного звука частоты ω и, действительно, не создают дальнего поля диполя (103). Влияние движения тела под действием силы тяжести на акустическое дальнее поле сводится только к тому, что оно становится полем *движущегося* источника или диполя. Однако такое поле искажено пренебрежимо мало, если скорость тела мала по сравнению с c (об общих свойствах движущихся источников см. разд. 4.12).

Полную выходную мощность рассеянного звука можно получить сложением мощности точечного источника, вычисленной по формулам (83) и (129), и мощности диполя, вычисленной по формулам (104) и (140). Вся эта мощность в поле рассеянного звука, зависящая от квадратов амплитуд $|p_1|$ и $|u_1|$, отбирается у падающей волны.

Тела с малой сжимаемостью создают поле рассеянного звука с тем необычным свойством, что вклады источника и диполя имеют сравнимые величины. Это объясняется тем, что для таких тел напряженность источника (129) является малой. Рассмотрим, например, рассеяние *плоской звуковой волны*, описываемой формулой (22), на *неподвижной несжимаемой* сфере (предельный случай $\rho_m \to \infty$, $K \to 0$). В силу формул (71) и (103) дальнее поле в направлении, составляющем угол θ с направлением падающей волны, имеет вид

$$p - p_0 = V_0 p_1 (\omega/c)^2 \left(-1 + \frac{3}{2}\cos\theta \right) e^{i\omega(t-r/c)}/(4\pi r). \qquad (141)$$

Множитель $(-1 + 3/2 \cos\theta)$ показывает, насколько сравнимы вклады источника и диполя. Заметим, что они ослабляют друг друга в передней полусфере при $\theta < \pi/2$, но усиливают друг друга при $\theta > \pi/2$ (обратное рассеяние), порождая четко выраженный максимум численного значения при $\theta = \pi$.

Теория рассеяния общего вида для тел, малых по сравнению с длиной волны, в которой рассеяние падающих волн, удовлетворяющих волновому уравнению, приближенно описывается с использованием свойств (подобных присоединенной массе) решения уравнения Лапласа, применяется и в других разделах физики. В электромагнитной теории известно релеевское рассеяние, при котором, однако, в рассеянном поле не возникает монополя. Релей обнаружил также, что амплитуда рассеянного поля увеличивается с частотой как ω^2, и использовал это при

объяснении голубого цвета неба преимущественным рассеянием высокочастотных составляющих солнечного света на молекулах воздуха. С позиций квантовой механики эту теорию можно рассматривать как некоторый случай борновского приближения.

Вычисление напряженности диполя (119) непосредственно переносится на случай несферических тел, когда они обладают симметрией относительно направления колебаний поля скоростей (130) для падающих волн, такой, что силу **F** можно выразить через присоединенную массу M_v, как в формуле (138), которая вместе с уравнением (131) определяет **F** и $\dot{\mathbf{U}}$, а следовательно, и **G**. Для асимметричных тел, обладающих анизотропной присоединенной массой, необходимо провести несколько более сложные вычисления.

Для тела иной формы обобщение вычисления напряженности точечного источника сводится к замене величины $4\pi a_0$, которая входит в формулы (126)—(129), соответствующей постоянной. Эта постоянная C пропорциональна *электростатической емкости* рассматриваемого тела и такова, что решение для ближайшего поля в окрестности тела с суммарной напряженностью источников $\dot{q}$ и постоянным избыточным поверхностным давлением имеет вид

$$p_s - p_0 = \dot{q}/C. \tag{142}$$

Такое решение с постоянным избыточным давлением на поверхности согласуется с формулой (124) для изменения объема тела, поэтому можно использовать все соотношения (126)—(129), заменив в них $4\pi a_0$ на C.

В случае тела общей формы приведенное выше решение для ближайшего поля не будет описывать действительное поле вблизи тела, потому что *распределение* напряженности источника по поверхности становится, вообще говоря, неверным, поскольку не будет удовлетворено соответствующее граничное условие непрерывности нормальной составляющей скорости на поверхности. Правильное решение для ближайшего поля может быть получено введением поправки, которая является локальным решением уравнения Лапласа с такой величиной нормальной к поверхности составляющей скорости, которая необходима для устранения этого расхождения. Это решение, однако, дает нулевую полную напряженность источника, а также нулевую полную напряженность диполя (поскольку движение центра инерции тела учитывается отдельно при рассмотрении присоединенной массы), и поэтому выражением для дальнего поля можно пренебречь по сравнению с оставленными чле-

нами. Кроме того, распределение давления на поверхности обычно вызывает деформацию тела, соответствующее которой изменение объема оказывается малым по сравнению с основным членом (124).

1.10. Излучение квадруполя

Раздел 1.8, посвященный моделированию в волновой кювете, заканчивается кратким обсуждением излучения звука компактными областями источников в случае, когда суммарная интенсивность диполей, а также суммарная интенсивность источников равна нулю. Было указано, что обычно такой характер носит излучение звука *турбулентными потоками*, не содержащими посторонних тел, которые могли бы оказывать на воздух силовое воздействие.

Более простой пример представлен на рис. 15; звук, генерируемый двумя равными и противоположными диполями, описывается как излучение *квадруполя*. Его дальнее поле, как показывает сравнение рис. 13 и 15, слабее полей отдельных диполей по существу по той же причине, по которой дальнее поле компактной группы источников, суммарная интенсивность которых равна нулю (разд. 1.7), слабее полей отдельных источников.

В данном разделе указывается связь между этими двумя примерами и показывается, как турбулентное течение жидкости генерирует то же самое звуковое поле, что и некоторое *распределение квадруполей* с некоторой заданной напряженностью квадруполей на единицу объема. Заметим, что в то время как напряженность диполя включает направление (направление малого смещения от стока до источника) и соответственно является *векторной* величиной, напряженность квадруполя содержит *два направления* (не только направления равных и противоположных диполей, но и направление смещения между ними) и соответственно является *тензорной* величиной. Мы покажем, что тензорная напряженность квадруполя на единицу объема в турбулентном потоке принимает довольно простой вид.

Результирующее излучение квадруполя может иметь намного более слабое дальнее поле по сравнению с ближним полем, чем имеет даже излучение диполя. В некоторых случаях это может означать, что дальнее поле квадруполя вообще едва заметно. Однако в других случаях, когда напряженность квадруполя велика и на него не накладывается излучение монополя или диполя, такое квадрупольное излучение от турбулентности может вызывать очень неприятный шум, который важно исследовать количественно, чтобы найти способ его уменьшения.

Таким образом, исследование шума струи методами, основанными на теории данного раздела, должно дать ценные рекомендации для уменьшения шума.

Для того чтобы вычислить напряженность квадруполя на единицу объема, начнем с преобразования основных уравнений движения (2) и (3) в двух аспектах. Во-первых, потребуем, чтобы они описывали *локальную* скорость изменения $(\partial/\partial t)$ количества движения или массы на единицу объема; например, *сгруппируем* последние два члена в (3), записав их в виде члена $\nabla\cdot(\rho\mathbf{u})$, который с точностью до знака представляет локальную скорость изменения ρ. Во-вторых, примем индексные обозначения, что позволит легче использовать тензорные величины в дальнейшем; итак, в этом разделе координаты обозначаются как x_1, x_2, x_3, вектор скорости как (u_1, u_2, u_3), а повторение нижнего индекса в *любом* члене уравнения автоматически означает суммирование по нему от 1 до 3. Тогда уравнение (3) запишется как

$$\partial\rho/\partial t + \partial\,(\rho u_i)/\partial x_i = 0. \tag{143}$$

Аналогично уравнение (2) после такого второго преобразования принимает вид

$$\rho\partial u_i/\partial t + \rho u_j\partial u_i/\partial x_j + \partial p/\partial x_i = 0, \tag{144}$$

и мы достигнем цели первого преобразования, а именно получим уравнение для $\partial\,(\rho u_i)/\partial t$, если сложим уравнение (144) с уравнением (143), умноженным на u_i. Прежде чем сделать это, заменим в уравнении (143) индекс i на j (что не меняет смысл уравнения, поскольку *любой* нижний индекс, повторенный дважды в одном члене, означает суммирование от 1 до 3) и затем составим произведение

$$u_i\partial\rho/\partial t + u_i\partial\,(\rho u_j)/\partial x_j = 0. \tag{145}$$

После сложения уравнений (144) и (145) получаем требуемый вид уравнения:

$$\partial\,(\rho u_i)/\partial t + \partial\,(\rho u_i u_j)/\partial x_j + \partial p/\partial x_i = 0. \tag{146}$$

Преобразованные уравнения (143) и (146) имеют простой физический смысл и могут быть непосредственно выведены следующим образом. В уравнении (143) локальная скорость изменения плотности приравнивается дивергенции *вектора потока массы* ρu_i с обратным знаком. Это выражает закон сохранения массы, согласно которому скорость изменения массы в элементарной области равна скорости истечения массы из этой области. Аналогично скорость изменения плотности количества движения, согласно (146), равна взятой с обратным знаком

дивергенции *тензора плотности потока количества движения* $\rho u_i u_j$ плюс поправка (поскольку количество движения не сохраняется, а меняется со скоростью, равной приложенной силе), равная силе давления на единичный объем $-\partial p/\partial x_i$.

Действительно, последние два члена в уравнении (146) можно объединить и записать уравнение в виде

$$\partial(\rho u_i)/\partial t + \partial[\rho u_i u_j + (p - p_0)\,\delta_{ij}]/\partial x_j = 0, \qquad (147)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, который равен единице при $i = j$ и нулю при $i \neq j$. Смысл уравнения (147) заключается в том, что избыточное давление $p - p_0$ создает поток количества движения $(p - p_0)\,\delta_{ij}$, который, как показывает множитель δ_{ij}, является *изотропным* (т. е. равным во всех направлениях), поскольку избыточное давление действует во всех направлениях одинаково. Член в квадратных скобках в уравнении (147) представляет собой тензор *полного потока количества движения*, равный скорости переноса x_i-составляющей количества движения в направлении x_j и обусловленный: (i) конвекцией за счет составляющей скорости по оси x_j и (ii) действием избыточного давления $p - p_0$; таким образом, в уравнении (147) скорость изменения x_i-составляющей количества движения в элементарном объеме равна взятому с обратным знаком суммарному полному потоку количества движения через поверхность, ограничивающую этот объем.

Преобразование уравнений движения жидкости к специальному виду (143) и (147) дает возможность получить оценку для звука, генерируемого турбулентными течениями жидкости, которая следует из установления точного соответствия динамики жидкости и линейной теории звука. В линейной теории член в квадратных скобках в уравнении (147) принимает значение $c^2(\rho - \rho_0)\,\delta_{ij}$, так как связь между давлением и плотностью является линейной в силу соотношений (11) и (14) и отбрасывания малых величин вида $u_i u_j$. Уравнения движения жидкости *при такой аппроксимации тензора полного потока количества движения* сводится к линейному волновому уравнению для ρ, т. е. из (147) имеем

$$\partial(\rho u_i)/\partial t + c^2 \partial\rho/\partial x_i = 0, \qquad (148)$$

а исключив плотность количества движения ρu_i (для этого из производной $\partial/\partial t$ от уравнения (143) надо вычесть производную $\partial/\partial x_i$ от (148)), получим линейное волновое уравнение

$$\partial^2\rho/\partial t^2 - c^2\partial^2\rho/\partial x_i^2 = 0. \qquad (149)$$

При отсутствии действия на жидкость посторонних тел, погруженных в нее, это уравнение не будет давать излучения звука.

Таким образом, излучение звука потоком жидкости полностью обусловлено *отклонением* значения полного потока количества движения (член в квадратных скобках (147)) от его приближенного значения $c^2(\rho - \rho_0)\,\delta_{ij}$, даваемого линейной теорией. Если записать это отклонение как

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + [(p - p_0) - c^2(\rho - \rho_0)]\,\delta_{ij}, \qquad (150)$$

то становится ясным, что *избыточное значение потока количества движения* по сравнению с величиной, даваемой линейной теорией, описывается квадратичными членами и членами более высокого порядка малости, обусловленными как наличием малых величин вида $u_i u_j$, так и нелинейностью связи давления с плотностью. С учетом обозначения (150) уравнение количества движения (147) можно переписать в виде

$$\partial(\rho u_i)/\partial t + c^2 \partial\rho/\partial x_i = -\partial T_{ij}/\partial x_j \qquad (151)$$

и после исключения ρu_i с помощью этого уравнения и уравнения неразрывности (143) получить уравнение

$$\partial^2\rho/\partial t^2 - c^2\partial^2\rho/\partial x_i^2 = \partial^2 T_{ij}/\partial x_i \partial x_j, \qquad (152)$$

которое представляет собой линейное уравнение (149) с «вынуждающим членом» в правой части.

Этот «вынуждающий член» должен определять любое генерирование звука, т. е. флуктуации плотности ρ, распространяющиеся от турбулентного потока. Заметим, что величины T_{ij} можно считать пренебрежимо малыми вне области течения, где имеют место только таким образом генерируемые звуковые волны, для которых справедливы приближения линейной теории. Эти приближения с пренебрежимо малыми T_{ij} могут, однако, быть непригодными внутри потока, который составляет, следовательно, ограниченную область источника для генерируемого звука.

Уравнение (152) описывает распределенный источник звука. Мы можем установить соответствие его звукового поля и звукового поля, обусловленного изученными ранее механизмами генерирования звука (скоростью изменения массового расхода, генерирующего поле монополя, или силой, генерирующей поле диполя): и в то же время мы можем глубже понять эти механизмы, выводя аналогичные уравнения для описания распределенных монополя и диполя в линейной теории звука.

Гипотетическая идея распределения монопольных источников подразумевает распределенное *возникновение новой массы* со скоростью Q на единицу объема в единицу времени (как если бы точечные источники с массовым расходом q в единицу времени были распределены по конечному объему таким образом,

чтобы они давали такое возникновение массы на единицу объема в единицу времени). В правую часть уравнения (143), выражающего скорость изменения массы в элементарной области на единицу объема, требуется ввести член Q, обусловленный таким возникновением массы, так что

$$\partial\rho/\partial t + \partial(\rho u_i)/\partial x_i = Q. \tag{153}$$

Если теперь из этого уравнения и уравнения количества движения (148), выведенного в линейной теории, исключить ρu_i, то получится

$$\partial^2\rho/\delta t^2 - c^2\partial^2\rho/\partial x_i^2 = \partial Q/\partial t. \tag{154}$$

Это линейное волновое уравнение (149) с *напряженностью источника* (скорость изменения массового расхода) *на единицу объема* в правой части.

Иначе говоря, распределенные монопольные источники с напряженностью $\partial Q/\partial t$ на единицу объема создают поле плотности, удовлетворяющее линейному волновому уравнению, содержащему в правой части эту напряженность на единицу объема. Решение такого уравнения должно находиться как объемное распределение полей источников, даваемых уравнением (71). Таким образом, можно записать

$$c^2[\rho(\mathbf{x}) - \rho_0] = \int [\dot{Q}(\mathbf{y},\ t - r/c)/(4\pi r)]\, d\mathbf{y}, \tag{155}$$

где в левой части стоит соответствующая линейной теории величина $p - p_0$ в точке с радиусом-вектором $\mathbf{x}$, а в правой — интеграл по всей области распределенных источников. В точке $\mathbf{y}$ внутри этой области напряженность источника на единицу объема в момент времени t равна $\dot{Q}(\mathbf{y},\ t)$ (где $\dot{Q}$ означает $\partial Q/\partial t$), так что в силу (71) генерируемый звук определяется величиной, стоящей в квадратных скобках (снова на единицу объема), если

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \tag{156}$$

представляет собой расстояние от источника, расположенного в точке $\mathbf{y}$, до приемника в точке $\mathbf{x}$. Полученное таким образом решение (155) неоднородного волнового уравнения (154) совпадает с теми решениями, к которым приводят классические математические рассуждения (см. литературу по волновому уравнению); это является проверкой теории данной главы.

Рассмотрим далее звук, который генерируется без возникновения новой массы жидкости, а просто под действием распределенных внешних сил f_i на единицу объема жидкости. Тогда уравнение неразрывности принимает обычный вид (143), а в правую часть уравнения для скорости изменения количества дви-

жения на единицу объема требуется ввести член f_i, выражающий приложенную силу; таким образом, линеаризованное уравнение количества движения (148) запишется в виде

$$\partial(\rho u_i)/\partial t + c^2 \partial \rho/\partial x_i = f_i \tag{157}$$

и после исключения ρu_i из уравнений (157) и (143) получится уравнение

$$\partial^2 \rho/\partial t^2 - c^2 \partial^2 \rho/\partial x_i^2 = -\partial f_i/\partial x_i, \tag{158}$$

которое представляет собой линейное волновое уравнение с вынуждающим членом $-\partial f_i/\partial x_i$ в правой части.

Этот результат также служит проверкой теории данной главы. Согласно разд. 1.5, звуковое поле, генерируемое таким распределением внешних сил f_i на единицу объема, должно быть распределением полей диполей напряженности f_i на единицу объема. На первый взгляд из сопоставления уравнений (158) и (154) следует другой вывод, а именно что указанное звуковое поле представляет собой распределение полей точечных источников напряженности $-\partial f_i/\partial x_i$ на единицу объема. Можно показать, однако, что эти два описания всегда одинаковы.

В самом деле, поле источника с напряженностью $-\partial f_1/\partial x_1$ на единицу объема (одно из трех слагаемых суммы $-\partial f_i/\partial x_i$) является предельным случаем при $\varepsilon \to 0$ поля напряженности на единицу объема

$$\varepsilon^{-1} f_1(x_1, x_2, x_3) - \varepsilon^{-1} f_1(x_1 + \varepsilon, x_2, x_3). \tag{159}$$

Это соответствует размещению *каждой отдельной величины* $\varepsilon^{-1} f_1$ со знаком «плюс» в точке x_1, x_2, x_3 и со знаком «минус» в точке $(x_1 - \varepsilon, x_2, x_3)$, где второй член в (159) имеет то же численное значение. Комбинация таких двух величин, согласно разд. 1.5, представляет собой диполь с напряженностью $(f_1, 0, 0)$ на единицу объема. Проведя подобные рассуждения для $i = 2$ и $i = 3$, мы видим, что *распределение источников с напряженностью* на единицу объема $-\partial f_i/\partial x_i$, как и следовало ожидать, эквивалентно *распределению диполей* с напряженностью на единицу объема

$$f_i = (f_1, f_2, f_3). \tag{160}$$

Первое из этих двух эквивалентных представлений звукового поля, обусловленного распределенными источниками, является практически бесполезным: это распределение источников имеет суммарную нулевую напряженность (согласно теореме Остроградского — Гаусса, интеграл от $\partial f_i/\partial x_i$ по объему всей области источников равен нулю), так что свойства такого распределения, рассмотренные в разд. 1.7, позволяют в любом

случае ожидать появление представлений посредством диполей. Последнее представление, наоборот, позволяет построить решение для (159) в виде объемного распределения полей диполей, задаваемых уравнением (102); это решение получается в виде

$$c^2 [\rho (\mathbf{x}) - \rho_0] = -(\partial/\partial x_i) \int [f_i (\mathbf{y}, t - r/c)/(4\pi r)] \, d\mathbf{y}, \qquad (161)$$

в точности совпадающем с полученной ранее формулой (155). Далее на основании формулы (103) можно записать вид этого выражения для дальнего поля, соответствующий его дипольному характеру, как

$$c^2 [\rho (\mathbf{x}) - \rho_0] = \int [r_i \dot{f}_i (\mathbf{y}, t - r/c)/(4\pi r)] \, d\mathbf{y}, \qquad (162)$$

где $r_i = x_i - y_i$. В случае представления точечными источниками такая форма записи совсем не очевидна как приближенное выражение для дальнего поля.

Дальнейшей проверкой полученных выражений служит следующий факт: в силу того что интеграл (155) удовлетворяет уравнению (154), *интеграл* в правой части (161) является решением линейного волнового уравнения *с f_i в правой части*. Следовательно, выражение (161), которое представляет собой производную $-\partial/\partial x_i$ от упомянутого интеграла, удовлетворяет тому же самому линейному уравнению с правой частью $-\partial f_i/\partial x_i$, которая в самом деле совпадает с правой частью уравнения (158). Математически этот вывод справедлив, поскольку линейный волновой оператор $\partial^2/\partial t^2 - c^2 \partial^2/\partial x_i^2$ и оператор $\partial/\partial x_i$ перестановочны.

Только что описанные гипотетические распределенные источники и диполи, возможно, и нельзя непосредственно использовать, но полученные результаты подсказывают, как практически работать с важным уравнением (152) для звука, генерируемого турбулентным потоком. Так же как первая производная в правой части уравнения (158) свидетельствует о том, что при этом излучение имеет вид излучения диполя с напряженностью f_i на единицу объема, вторая производная в правой части уравнения (152) определяет излучение вида излучения *квадруполя* с напряженностью T_{ij} на единицу объема.

Действительно, полученные выше результаты для диполя показывают, что решение уравнения (152) представляет собой диполь с напряженностью $-\partial T_{ij}/\partial x_j$ на единицу объема, а именно диполь, соответствующий «эффективной силе», которая в уравнении количества движения (151) показывает, каким образом *градиенты* полного потока количества движения T_{ij} через

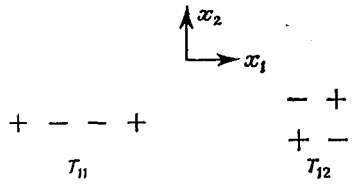

Рис. 16. Соответствие между диагональными элементами тензора T_{ij} и продольным квадруполем (диполи расположены вдоль прямой), а также между внедиагональными элементами этого тензора, и поперечным квадруполем (диполи сдвинуты в перпендикулярном направлении).

элементарную область приводят к изменению количества движения вследствие неравенства втекающего и вытекающего потоков. Кроме того, поле диполя с напряженностью $-\partial T_{i1}/\partial x_1$ на единицу объема (одно из трех слагаемых суммы) является пределом при $\varepsilon \to 0$ поля диполя с напряженностью на единицу объема, равной

$$\varepsilon^{-1} T_{i1}(x_1, x_2, x_3) - \varepsilon^{-1} T_{i1}(x_1 + \varepsilon, x_2, x_3), \qquad (163)$$

которая, как показывают рассуждения, приведенные после уравнения (159), эквивалентна распределению квадруполей на единицу объема, каждый из которых определяется как сумма диполя с векторной напряженностью $\varepsilon^{-1} T_{i1}$ в точке (x_1, x_2, x_3) и диполя с напряженностью $-\varepsilon^{-1} T_{i1}$ в точке $(x_1 - \varepsilon, x_2, x_3)$. Остальные элементы квадруполя T_{ij} соответствуют членам суммы с $j = 2$ и 3.

Такое определение показывает, каким образом входят два направления в напряженность квадруполя, соответственно являющуюся тензорной величиной. Заметим, что диагональный элемент этого тензора, например T_{11}, соответствует конфигурации диполей, расположенных вдоль прямой (рис. 16), обычно называемой продольным квадруполем, тогда как внедиагональный элемент, например T_{12}, соответствует конфигурации диполей, сдвинутых в перпендикулярном направлении, называемой поперечным квадруполем.

Результаты, приведенные в данном разделе, показывают, что возмущение без монопольного или дипольного излучения, например струя без флуктуаций массового расхода и при отсутствии внешних сил, действующих на жидкость, по-видимому, будет включать главным образом квадрупольное излучение, связанное с тензором *избыточного потока количества движе-*

ния T_{ij}. С этим связано чрезвычайно большое отношение интенсивности звука ближнего поля к интенсивности звука дальнего поля, как это было установлено экспериментально для турбулентных струй.

Соответствующим решением уравнения (152) является выражение

$$c^2 [\rho(\mathbf{x}) - \rho_0] = (\partial^2/\partial x_i \partial x_j) \int_V [T_{ij}(\mathbf{y}, t - r/c)/(4\pi r)]\, d\mathbf{y}, \qquad (164)$$

полученное просто как производная $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ от решения для линейного волнового уравнения с T_{ij} в правой части в соответствии с рассуждениями, приведенными после уравнения (162). Соответствующее дальнее поле представляется выражением

$$c^2 [\rho(\mathbf{x}) - \rho_0] = \int_V [r_i r_j \ddot{T}_{ij}(\mathbf{y}, t - r/c)/(4\pi r^3 c^2)]\, d\mathbf{y}, \qquad (165)$$

в которое входит вторая производная по времени, получающаяся в результате двукратного дифференцирования в (164) по времени запаздывания $t - r/c$. При увеличении скорости U струи флуктуации T_{ij}, определяемые выражением (150), увеличиваются как U^2, а их характеристическая частота также увеличивается как U, так что $\ddot{T}_{ij}$ в (165) увеличивается как U^4. Таким образом, амплитуды дальнего поля меняются как U^4, в то время как интенсивность и выходная мощность меняются как U^8. Такая удивительная зависимость акустической выходной мощности от столь высокой степени скорости струи является прямым следствием квадрупольного характера излучения.

В проведенных выше рассуждениях было использовано уравнение движения жидкости (2) без учета вязких напряжений, но оказывается, что включение последних дает малый дополнительный член в T_{ij} (см. разд. 1.13). Следует отметить также, что условие акустической компактности (91), оказывается, требует специальной формулировки для турбулентных течений: входящая в него величина l представляет собой эффективный размер *вихрей*, излучающих когерентно, а произведение ωl, как правило, является величиной порядка среднеквадратичной флуктуации скорости, которая обычно такова, что условие компактности $\omega l \ll c$ выполняется. Дальнейшее обсуждение этих и многих других вопросов, касающихся излучения звука потоками жидкости, можно найти в специальных монографиях и статьях.

1.11. Излучение от сфер

При обсуждении генерирования звука до сих пор основное внимание уделялось акустически компактным областям, которые (будучи, однако, сложными в других отношениях) позволяют с хорошей степенью аппроксимации задавать дальние поля при помощи довольно простых правил, например при помощи уравнений (105) или (112). Во введении в теорию звука уместно главное внимание уделять именно таким способам генерирования звука, которые допускают сравнительно простое рассмотрение, но необходимо дать некоторое представление и о поведении некомпактных областей источников.

Теории излучения от тел произвольной формы при отсутствии условия компактности утрачивают ту относительную простоту, которая характерна для разд. 1.6 и 1.7; они, действительно, чрезвычайно сложны. Тем не менее для некоторых частных форм тела, включая сферическую, анализ значительно упрощается и в то же время дает результаты, довольно типичные для широкого диапазона форм тела. Цель данного раздела, посвященного излучению от сфер, следовательно, состоит в том, чтобы выяснить, какие изменения в излучении звука происходят на слишком высоких частотах, когда условие компактности не удовлетворяется, а также предположить, что на очень высоких частотах (удовлетворяющих противоположному условию со знаком $\gg$ вместо $\ll$) возможно новое упрощение совершенно другого типа, которое играет важную роль в следующих главах этой книги.

Изучим прежде всего звук, генерируемый в том случае, когда сферическое тело совершает радиальные колебания. Предположим, что радиус сферы a совершает малые колебания около невозмущенного значения a_0, подобно сферическим пузырькам, рассмотренным в разд. 1.6, но теперь мы уже не будем предполагать, что сфера компактна.

Особая простота сферической формы тела в рассматриваемом случае *радиальных* колебаний вытекает из того очевидного факта, что звуковое поле должно быть сферически-симметричным относительно центра и, следовательно, может быть описано сферически-симметричным потенциалом скорости вида (63), где r — расстояние от центра сферы. Рассуждения, проведенные после этой формулы, показывают, что такой потенциал, если в него включить только бегущие от источника волны, всегда можно записать в виде (69), соответствующем точечному источнику, расположенному в центре сферы.

Здесь мы не предполагаем, что такой точечный источник с объемным расходом $m(t)$ «действительно находится» в центре

сферического тела, а предполагаем только, что жидкость *вне сферы* должна двигаться точно так же, как если бы такой точечный источник излучал в однородной жидкости. Искомое значение функции $m(t)$ может быть найдено из граничного условия, выражающего равенство радиальной скорости $\partial\varphi/\partial r$ жидкости и радиальной скорости $\dot{a}(t)$ поверхности тела при $r = a$. В линейной теории это граничное условие записывается как

$$(\partial\varphi/\partial r)_{r=a_0} = \dot{a}(t), \tag{166}$$

поскольку любая разница в значениях $\partial\varphi/\partial r$ при $r = a$ и $r = a_0$ меньше, чем

$$|a - a_0| \max |\partial^2\varphi/dr^2|, \tag{167}$$

и ею можно пренебречь как произведением малых величин.

Из соотношения (70) следует, что граничное условие (166) можно записать в виде дифференциального уравнения

$$m(t - a_0/c) + (a_0/c)\dot{m}(t - a_0/c) = 4\pi a_0^2 \dot{a}(t) = \dot{V}(t) \tag{168}$$

для функции $m(t)$, включающего либо заданную функцию $a(t)$, которая описывает малые изменения радиуса сферы, либо связанную с ней функцию $V(t)$, описывающую относительные изменения объема сферы по сравнению с его невозмущенным значением $(4/3)\pi a_0^3$. Из проведенных после соотношения (70) рассуждений следует, что в случае выполнения условия акустической компактности левая часть уравнения (168) с хорошей степенью приближения представляется функцией $m(t)$, так что искомая величина $m(t)$ объемного расхода источника будет близка к скорости изменения объема тела $\dot{V}(t)$, что, конечно, верно для любого компактного тела (соответствующая напряженность источника равна $\rho_0 \ddot{V}(t)$, как в (105)).

Если условие компактности не выполняется, то точное значение $m(t)$ как решение уравнения (168) достаточно легко найти *только для сфер*. Это решение получается при помощи интегрирующего множителя $\exp(ct/a_0)$ и имеет вид

$$m(t) = (c/a_0) \int_{-\infty}^{t} \dot{V}(T + a_0/c) \exp[c(T - t)/a_0]\, dT. \tag{169}$$

Другое решение уравнения (168) можно найти, заметив, что каждый член $V_1 \exp(i\omega t)$ в $V(t)$ порождает в $m(t)$ член

$$i\omega V_1 \exp(i\omega t) \frac{\exp(i\omega a_0/c)}{1 + i\omega a_0/c}. \tag{170}$$

Оба решения показывают, что если $V(t)$ меняется очень медленно, то $m(t)$ остается близким к $\dot{V}(t)$, например вследствие того, что при выполнении условия компактности ($\omega a_0/c$ мало) дробь в (170) можно представить как $1 - (1/2)(\omega a_0/c)^2 + O(\omega a_0/c)^3$. Однако если $\omega a_0/c$ превышает, скажем, 0,6, то ошибка становится едва ли допустимой.

Оба решения приводят также к другому интересному приближенному выражению, справедливому при больших значениях $\omega a_0/c$ (скажем, 6 и более); тогда

$$m(t) \approx (c/a_0)\, V(t + a_0/c). \tag{171}$$

Мы получаем эту приближенную формулу, пренебрегая в знаменателе выражения (170) единицей или заменяя в (169) (сравнительно) медленно меняющееся экспоненциальное выражение единицей.

Высокочастотное приближение (171) имеет интересные приложения. Давление в некоторой точке P, находящейся на расстоянии r от центра, представляется (при помощи формул (71) и (72) для точечного источника) в виде

$$p - p_0 = (\rho_0 c/a_0)\, \dot{V}[t - (r - a_0)/c]/(4\pi r), \tag{172}$$

где *время запаздывания* $(r - a_0)/c$ представляет собой время, необходимое для прихода в точку P *сигнала из ближайшей точки на сфере*. Отсюда вытекает (неожиданно, но верно), что при достаточно больших значениях $\omega a_0/c$ флуктуации давления в точке P происходят главным образом от сигналов, *прошедших наикратчайший путь* от поверхности сферы к точке P.

Далее, если в (172) заменить $\dot{V}(t)$ на $4\pi a_0^2 \dot{a}(t)$, то получится выражение

$$p - p_0 = (a_0/r)\, \rho_0 c \dot{a}[t - (r - a_0)/c], \tag{173}$$

которое интересным образом перекликается с формулой из одномерной теории. На поверхности сферы $r = a_0$ выражение (173) в точности совпадает с полученным в одномерном случае соотношением (17) между избыточным давлением и составляющей скорости в направлении распространения волны, т. е. между величинами, произведение которых равно мощности на единицу площади. Следовательно, при больших $\omega a_0/c$ сфера совершает работу над внешней жидкостью *с той же мощностью, с какой совершал бы ее* плоский поршень той же площади и с теми же флуктуациями скорости, создающими одномерные

волны в прямой трубе. Иначе говоря, свойство, отмеченное в конце разд. 1.4, а именно меньшая эффективность трехмерного генерирования по сравнению с одномерным, в этом высокочастотном пределе не имеет места.

Заметим, что на расстоянии $r - a_0$ (равном длине вышеуказанного наикратчайшего пути от поверхности тела до точки P) от такого поршня избыточное давление в прямой трубе будет принимать значение, даваемое выражением (173), но без понижающего множителя a_0/r. Заметим также, что этот понижающий множитель в выражении для избыточного давления приводит к множителю $(a_0/r)^2$ в выражении для интенсивности (82) (потока энергии на единицу площади), а это можно интерпретировать как следствие того факта, что энергия, поступившая через площадь поверхности сферы $4\pi a_0^2$, распределяется на расстоянии r на бо́льшую площадь, равную $4\pi r^2$.

Для частного случая пульсирующей сферы мы кратко остановились на весьма интересных результатах для высокочастотного предельного случая, наводящих на мысль о важности «лучей звука», которые напоминают изучаемые в геометрической оптике лучи света. Флуктуации давления в некоторой точке P передаются вдоль «луча», определяемого как кратчайший путь от поверхности тела до точки P. Если представить себе «трубку лучей», образованную пучком таких лучей, идущих к точке P и другим близким к ней точкам, то в такой трубке движения поверхности сферы будут создавать те же самые флуктуации давления, что и одномерные волны, генерируемые поршнем в прямой трубе, но уменьшенные при r/a_0 на множитель a_0/r, необходимый для того, чтобы поток энергии вдоль трубки лучей распределялся по площади поперечного сечения, увеличивающейся как r^2.

Таковы законы, совокупность которых составляет содержание так называемой «геометрической акустики» (по аналогии с геометрической оптикой), и в следующих главах мы часто будем заниматься выяснением условий их широкой применимости. Здесь же, предположив на основе единственного примера, что, по всей вероятности, законы геометрической акустики очень важны, мы продолжим изучение вопроса, проверив их на примере, который отличается от предыдущего в одном важном отношении.

В качестве второго примера рассмотрим излучение *твердой* сферой, колеблющейся вдоль прямой. Если функция $b(t)$ описывает перемещение центра сферы относительно фиксированного начального положения, то в сферических координатах, в которых θ представляет собой угол между направлением перемещения и радиусом-вектором, граничное условие, соответ-

ствующее формуле (166), запишется в виде

$$(\partial\varphi/\partial r)_{r=a_0} = \dot{b}(t)\cos\theta. \tag{174}$$

Таким образом, скорость эквивалентного поршня будет различной в различных точках сферы, а это обеспечивает более строгую проверку предположения, что при больших $\omega a_0/c$ флуктуации давления в точке P зависят от движения поршня в *ближайшей* к P точке на поверхности сферы.

Предыдущий пример, в котором граничное условие (166) удовлетворяется точно, если поместить источник в центре сферы, позволяет предположить, что граничному условию (174) можно удовлетворить, поместив там диполь. Поле давления диполя, напряженность которого имеет величину $G(t)$, а направление совпадает с направлением перемещения тела, дается формулами (92) и (90), и поэтому поле *радиального ускорения* будет описываться формулой

$$-\rho_0^{-1}\,\partial p/\partial r = (4\pi\rho_0)^{-1}\,[2r^{-3}\,G(t-r/c) + \\ + 2r^{-2}c^{-1}\,\dot{G}(t-r/c) + r^{-1}c^{-2}\,\ddot{G}(t-r/c)]\cos\theta. \tag{175}$$

Отсюда следует, что условие (174) выполняется точно, если $G(t)$ удовлетворяет уравнению

$$G(t-a_0/c) + (a_0/c)\,\dot{G}(t-a_0/c) + \frac{1}{2}(a_0/c)^2\,\dot{G}(t-a_0/c) = \\ = 2\pi\rho_0 a_0^3\,\ddot{b}(t). \tag{176}$$

Интересно, что в случае выполнения условия компактности, т. е. при малых $\omega a_0/c$, левая часть этого уравнения, согласно теореме Тейлора, будет приближенно равна функции $G(t)$ с погрешностью всего $O(\omega a_0/c)^3$, что служит проверкой результата (114) для сферы, полученного приближенными методами разд. 1.7. Можно удовлетворить соотношению (176) и в более общем случае, заметив, что каждый член вида $b_1 \exp(i\omega t)$ в перемещении сферы $b(t)$ порождает в $G(t)$ член

$$2\pi\rho_0 a_0^3\,(i\omega)^2\,b_1 \exp(i\omega t)\,\frac{\exp(i\omega a_0/c)}{1+i\omega a_0/c+(1/2)\,(i\omega a_0/c)^2}. \tag{177}$$

Основной интерес, однако, представляет поведение $G(t)$ и соответствующее поле давления при больших значениях $\omega a_0/c$. В этом предельном случае из (176) получаем

$$G(t) = 4\pi\rho_0 a_0 c^2 b\,(t + a_0/c) \tag{178}$$

и поле давления, определяемое по формуле (92), в которой при больших $\omega a_0/c$ главным является член дальнего поля при всех

$r > a_0$, представляется как

$$p - p_0 = (a_0/r)\,\rho_0 c\dot{b}\,[t - (r - a_0)/c]\cos\theta. \qquad (179)$$

Уравнение (179) для колеблющейся сферы при больших $\omega a_0/c$ подтверждает представления «геометрической акустики», в частности, что флуктуации давления в некоторой точке P распространяются вдоль луча, представляющего наикратчайший путь от P к поверхности тела (рис. 17). Это подтверждается не только величиной времени запаздывания $(r - a_0)/c$, но также и величиной $\dot{b}\cos\theta$ для скорости эквивалентного поршня, которая, как показывает формула (174), равна радиальной скорости ближайшей к P точки на поверхности сферы, в которой значение θ то же, что и в точке P. С другой стороны, в формулу (179), точно так же как и в формулу (173), входит множитель a_0/r, который учитывает, что поток энергии в трубке лучей будет распределяться по площади поперечного сечения, увеличивающейся как r^2.

Соображения в пользу справедливости таких представлений при высоких частотах будут высказаны в следующих главах, начиная с гл. 2, в которой приводятся аргументы, связанные с потоком энергии, и в гл. 3 и 4, в которых дается дальнейшее развитие понятия лучей. Все приведенные выше рассуждения

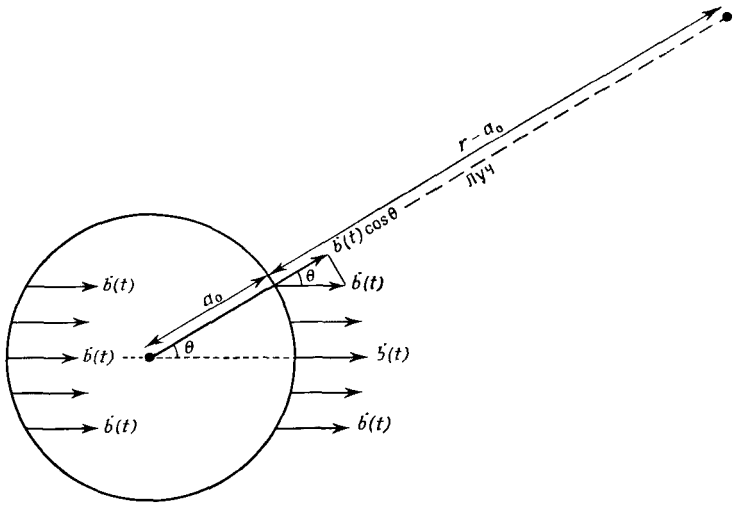

Рис. 17. Поле давления в точке P, обусловленное колеблющейся твердой сферой, в соответствии с законами геометрической акустики передается вдоль луча, представляющего собой наикратчайшее расстояние от точки P до поверхности сферы.

мы принимаем с одной оговоркой: основной вклад в флуктуации давления в точке P дается источниками, расположенными на минимальном расстоянии от P, отчасти потому, что группы источников с сильно меняющимся расстоянием от P дают флуктуации переменной фазы в P, которые стремятся взаимно уничтожить суммарный эффект («разрушающая интерференция»), в то время как флуктуации от источников, расстояние от которых до P почти постоянно, имеют почти постоянную фазу и эти когерентные флуктуации могут складываться в значительное суммарное поле.

Излучения звука при других движениях сферы, отличных от пульсации или колебания ее как твердого тела, обычно не представляют практического интереса. Заметим, однако, что граничные условия равенства радиальной скорости сферической гармонике второго порядка можно удовлетворить точно, если поместить квадруполь в центр сферы; такие условия соответствуют колебаниям, при которых мгновенные формы тела эллипсоидальны, но его объем остается постоянным и центр инерции покоится. Граничные условия общего вида можно разложить по сферическим гармоникам, и обычно более высокие гармоники связаны с мультиполями более высокого порядка. При этом оказывается, что в высокочастотных предельных случаях выполняются приведенные выше законы геометрической акустики.

1.12. Излучение от плоских стенок

Сравнительно нетрудно рассчитать звуковое поле, генерируемое в жидкости внутренней сферической границей, совершающей заданные малые перемещения (разд. 1.11), и полученные результаты можно использовать как для проверки общих теорий для компактных областей, так и для исследования характеристик излучения звука в высокочастотном предельном случае. Другой задачей об излучении звука, которую довольно легко исследовать при любых частотах, является задача об излучении в жидкости от *плоской* границы (достаточно большой, чтобы считать ее бесконечной), часть которой совершает заданные малые перемещения. Эта задача (подобно задаче, рассмотренной в разд. 1.11) представляется важной как с теоретической, так и с практической точек зрения и достойна включения даже во вводный курс акустики.

Таким образом, хотя рассчитать генерирование звука колеблющимися мембранами громкоговорителя в общем случае очень трудно, практически интересный случай колеблющейся мембраны, заделанной заподлицо с плоской стенкой, можно

исследовать при помощи изложенной здесь теории. Можно представить себе и другие технические приложения этой теории просто потому, что излучение от плоской стенки настолько просто рассчитать, что требуемую картину излучения звука можно воспроизвести с хорошей точностью (см. ниже) при помощи подобранного надлежащим образом набора мембран, заделанных заподлицо со стенкой.

С точки зрения теории анализ излучения от плоских стенок в высокочастотном предельном случае представляет особый интерес, как типичный случай, в котором приходится модифицировать правила лучей при расчете звука, генерируемого любой *плоской* частью поверхности. Сравнение с разд. 1.11 показывает, почему это так: когда излучает сфера, флуктуации давления в некоторой удаленной от нее точке P складываются из компонент, приходящих от всей поверхности, для одной из которых (дающей «стационарную фазу») величина фазы имеет отчетливо выраженный минимум. То же самое верно и при излучении от *плоской* части поверхности в точках P, не слишком удаленных от нее, когда в соответствии с законами, выведенными в разд. 1.11, получается *параллельный пучок* лучей. Однако с удалением на большие расстояния минимум становится все менее глубоким и, таким образом, перестает оказывать какое-либо влияние, в то время как энергия в параллельном пучке перераспределяется и (см. ниже) в конце концов сосредоточивается внутри *узкого конуса*.

Решение такого рода теоретических и практических вопросов легко получить, анализируя генерирование звука в жидкости, заполняющей область $x > 0$, в том случае, когда часть ограничивающей ее бесконечной плоской стенки $x = 0$ совершает заданные малые перемещения. Они задаются как такие перемещения, которые заставляют точку стенки с координатами $(0, Y, Z)$ в невозмущенном состоянии двигаться с нормальной скоростью $f(Y, Z, t)$ в положительном направлении оси x в момент времени t; в дальнейшем мы предположим, что вне конечной колеблющейся части стенки, линейный размер которой равен l, скорость f пренебрежимо мала.

В рассматриваемом случае плоской стенки результирующее звуковое поле можно точно (в рамках линейной теории) представить для всех частот в виде линейной комбинации полей точечных источников, таких, что каждый элемент плоскости $dY\,dZ$ генерирует суммарный массовый расход

$$q(t) = 2\rho_0 f(Y, Z, t)\,dY\,dZ. \tag{180}$$

Как и в разд. 1.11, где звуковое поле вне пульсирующей сферы определялось как часть более сильного звукового поля точеч-

ного источника в покоящейся жидкости, здесь мы будем определять звуковое поле колеблющейся плоскости как часть (часть $x > 0$) поля с распределением (180) по всей плоскости ($x = 0$) источников, излучающих в однородную жидкость.

В такой безграничной жидкости в силу симметрии расход массы должен быть поровну разделен между частью $x > 0$ и частью $x < 0$, которая должна поэтому иметь массовый расход на единицу площади, равный $\rho_0 f$. Следовательно, нормальная скорость жидкости вблизи стенки в части $x > 0$ будет включать:

(i) вклад $f(Y, Z, t)$, обусловленный массовым расходом от ближайших источников, но

(ii) нулевой вклад от удаленных источников, которые создают лишь касательное движение жидкости вблизи плоской стенки.

Из утверждений (i) и (ii) следует, что звуковое поле с распределением (180) точечных источников удовлетворяет необходимому граничному условию для нормальной скорости, хотя следует отметить, что такой вывод типичен только для плоских стенок, так как он зависит от утверждения (ii).

Распределение (180) точечных источников с полями (71) генерирует в точке (x, y, z) избыточное давление

$$p - p_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [2\rho_0 \dot{f}(Y, Z, t - r_s/c)/(4\pi r_s)]\, dY\, dZ, \qquad (181)$$

где r_s — расстояние до точки x, y, z от источника, расположенного в точке $(0, Y, Z)$:

$$r_s = [x^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2]^{1/2}. \qquad (182)$$

Хотя пределы интегрирования в (181) бесконечны, мы будем рассматривать излучение только от конечных областей, для которых функция f становится пренебрежимо малой, когда величина Y или Z превышает масштаб длины l.

Интегралы вида (181) могут оказаться весьма трудными для точного вычисления, но они существенно упрощаются в *дальнем поле*, когда расстояние

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad (183)$$

от начала координат настолько велико, что в разложении (181) по убывающим степеням r можно учитывать только главный член (пропорциональный r^{-1}). Это определяет главный член (пропорциональный r^{-2}) в аналогичном разложении интенсивности, а следовательно, как акустическую мощность, так и ее диаграмму направленности вдали от области источников.

Заметим прежде всего, что

$$r_s = r - (y/r)\,Y - (z/r)\,Z + O(r^{-1}) \tag{184}$$

при $r \to \infty$ в заданном направлении (т. е. с заданными отношениями y/r и z/r). Следовательно, соотношение (181) можно переписать как

$$p - p_0 = \frac{\rho_0}{2\pi r} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}\left(Y,\ Z,\ t - \frac{r}{c} + \frac{yY+zZ}{rc}\right) dY\,dZ + O(r^{-2}), \tag{185}$$

т. е. во всех дальних полях переменное расстояние r_s от источника в знаменателе (181) можно заменить фиксированным с ошибкой $O(r^{-2})$, но для получения ошибки того же порядка для времени запаздывания r_s/c нужно брать следующее приближение.

Действительно, при фиксированном r изменения времени запаздывания в (185) имеют порядок l/c. Только в том случае, когда выполнено условие компактности (91), можно пренебречь изменением $\dot{f}$ на интервале времени такого порядка и брать все значения $\dot{f}$ при одном и том же значении времени $t - r/c$. Тогда, как и в общей теории в разд. 1.6, все поле является полем единственного источника в начале координат, напряженность которого складывается из напряженностей всех источников и в данном случае равна удвоенной скорости изменения массового расхода от плоскости.

Заметим, что напряженность такого источника, соответствующего компактной совокупности мембран, вмонтированных в плоскую стенку больших размеров, вдвое больше, чем в случае, когда та же совокупность устанавливается на поверхности компактного тела. Интенсивность (82) дальнего поля будет вчетверо больше, хотя телесный угол здесь равен 2π вместо 4π; соответственно при установке мембран на таком большом плоском экране их выходная мощность просто *удваивается*.

Чтобы определить излучение от некомпактной совокупности мембран, заметим, что каждый член вида

$$f_1(Y,\ Z)\exp(i\omega t) \tag{186}$$

в распределении $f(Y,\ Z,\ t)$ нормальной скорости порождает в выражении давления (185) для дальнего поля член

$$[\rho_0 i\omega/(2\pi r)]\,F_1[\omega y/(rc),\quad \omega z/(rc)]\exp[i\omega(t - r/c)], \tag{187}$$

где

$$F_1(M,\ N) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(Y,\ Z)\exp(iMY + iNZ)\,dY\,dZ \quad (188)$$

представляет собой фурье-изображение функции $f_1(Y_1Z)$ (при двумерном преобразовании Фурье). Заметим, что эти формулы включают и компактную совокупность, так как в случае, когда ω/c, а следовательно, и M, и N малы по сравнению с $1/l$, функцию F_1 в (187) и (188) можно приближенно представить постоянной $F_1(0,\ 0)$, задающей поле давления точечного источника.

Однако в общем случае, флуктуации давления (187) в дальнем поле включают в себя зависимость *от направления*, т. е. от y/r и z/r, определяемую преобразованием Фурье распределения скорости на стенке. Как и в случае других дальних полей, можно использовать уравнение (81) для вывода интенсивности $(p - p_0)^2/(\rho_0 c)$, что приводит к *акустической интенсивности*

$$[\rho_0\omega^2/(8\pi^2r^2c)]\ |F_1[\omega y/(rc),\ \omega z/(rc)]\ |^2, \quad (189)$$

распределенной по направлениям и осредненной по времени (при таком осреднении квадраты синусов и косинусов ωt заменяются на $1/2$).

Сформулированные правила позволяют легко рассчитать набор мембран для некоторых частных случаев. Так, для одной круговой мембраны радиуса a, амплитуда колебаний скорости которой равна U, имеем $f_1 = U$ или $f_1 = 0$ в зависимости от того, какое из неравенств, $Y^2 + Z^2 < a^2$ или $Y^2 + Z^2 > a^2$, выполняется; тогда

$$F_1(M,\ N) = 2U\pi a(M^2 + N^2)^{-1/2}\mathrm{J}_1[a(M^2 + N^2)^{1/2}], \quad (190)$$

т. е. F_1 выражается через функцию Бесселя J_1. График безразмерной величины $(U\pi a^2)^{-1}F_1$ в зависимости от $a\ (M^2 + N^2)^{1/2}$ построен на рис. 18. В соответствии с формулой (187) это определяет зависимость флуктуаций давления от направления в виде функции от

$$\omega a(y^2 + z^2)^{1/2}/cr = (\omega a/c)\sin\theta, \quad (191)$$

где $\theta = \arccos(x/r)$ — угол с осью x.

Заметим, что при $\omega a/c \leqslant 3{,}83$ (первый нуль функции J_1) амплитуда является убывающей функцией θ при приближении любым способом к $\theta = \pi/2$. Однако при бóльших значениях $\omega a/c$ амплитуда обращается в нуль при значении угла

$$\theta_1 = \arcsin[3{,}83\,(\omega a/c)^{-1}] \quad (192)$$

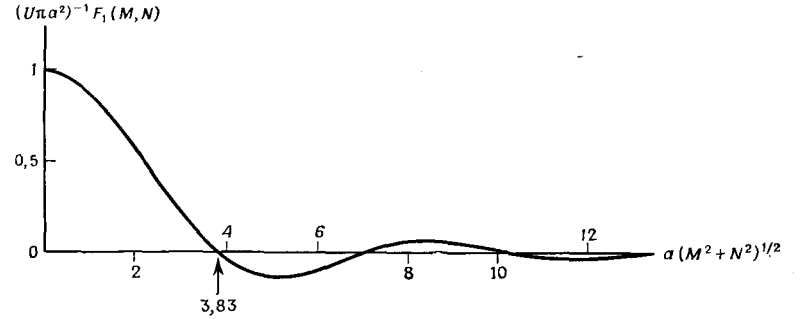

Рис. 18. Функция F_1, заданная формулой (190) и определяющая распределение давления (187) в дальнем поле колеблющейся с амплитудой скорости U круговой мембраны радиуса a в большой плоской стенке.

и большая часть излучения заключается внутри конуса $\theta < \theta_1$. Таким образом, одна мембрана громкоговорителя может излучать узкий конический пучок звука, если ее радиус a достаточно велик по сравнению с $c/\omega = \lambda/(2\pi)$. Однако индикатриса излучения включает также «боковые лепестки» с $\theta > \theta_1$ и пиковыми амплитудами в 13, 7, 4% и т. д. от центральной пиковой амплитуды.

Такие «боковые лепестки» характерны для большинства простых способов генерирования узких пучков звука. Однако для технических целей может потребоваться некоторая заданная индикатриса излучения, например без боковых лепестков; выражение (187) показывает, как это сделать при помощи набора мембран, аппроксимируя функцию распределения скорости обратным преобразованием Фурье:

$$f_1(Y,\ Z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(M,\ N) \exp(-iMY - iNZ)\, dM\, dN \tag{193}$$

с желаемым распределением излучения по направлениям.

В общем случае, когда функция $f_1(Y, Z)$ описывает колебания набора мембран, покрывающих площадь с линейным размером l, фурье-преобразование $F_1(M, N)$ должно стремиться к нулю при больших lM и lN (см. литературу по теории преобразований Фурье), и тогда выражение (187) означает, что при больших $\omega l/c$ излучение звука должно сосредоточиваться во все более узкой конической области. Интересно сравнить эти результаты при больших $\omega l/c$ для общего случая плоской

стенки с результатами, вытекающими из представлений геометрической акустики, приведенных в разд. 1.11.

Из геометрической акустики следует, что при больших $\omega l/c$ флуктуации давления в каждой точке P передаются вдоль луча, который определяет наикратчайший путь от плоской стенки до точки P, т. е. вдоль проходящей через точку нормали к стенке. Тогда геометрическая акустика предсказывает параллельный пучок лучей, а действительный конический пучок отклоняется от него на угол, который стремится к нулю при $\omega l/c \to \infty$.

С другой стороны, флуктуации давления, которые, согласно правилам геометрической акустики, передаются вдоль луча $y = Y$, $z = Z$ от «поршня», движущегося со скоростью (186), а именно со скоростью

$$\rho_0 c f_1(y, z) \exp[i\omega(t - x/c)], \tag{194}$$

не имеют ничего общего с формулой (187) дальнего поля даже в предельном случае больших $\omega l/c$. Здесь не только отсутствует коэффициент затухания r^{-1}, учитывающий тот факт, что лучи не остаются параллельными, а конически расходятся, но и распределение поперек пучка ошибочно описывается функцией f_1 вместо ее фурье-преобразования F_1.

Мы опускаем здесь подробное обсуждение главной из упомянутых трудностей, состоящей в том, что, когда геометрическая акустика предсказывает параллельный пучок, в дальнем поле ее выводы необходимо модифицировать. Можно, однако, вкратце указать, как разрешается это кажущееся противоречие между двумя теориями.

Тщательное исследование точной формулы (181) для поля давления показывает, что приближение (194) параллельного пучка геометрической акустики является почти точным на определенной длине пучка вблизи стенки, далее следует область перехода к зависимости (187) для конического пучка, в то время как на больших расстояниях дальнее поле почти точно описывается приближением конического пучка. Заметим, что переходная область — это область, в которой ширина пучка меняется от величины порядка l до величины порядка $rc/(\omega l)$ (при таких порядках величин y и z справедливы формулы (194) и (187) соответственно). В самой переходной области расстояние z от стенки имеет порядок $\omega l^2/c$.

В действительности оказывается, что геометрическая акустика дает хорошее приближение при $r \ll \omega l^2/c$; по существу это та область, в которой фаза полученного сигнала обладает достаточно четко выраженным минимумом, чтобы разрушающая интерференция имела место вдали от него. Аналогично аппроксимация (187) дальнего поля хороша там, где $r \gg \omega l^2/c$,

в то время как область перераспределения амплитуды от функциональной зависимости (194) с f_1 к виду (187) с F_1 охватывает промежуточные значения r порядка $\omega l^2/c$. Заметим, что такое перераспределение не вносит никаких изменений в полный поток энергии. Из теоремы Парсеваля следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(y,\ z)|^2\, dy\, dz = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(M,\ N)|^2\, dM\, dN \qquad (195)$$

(см. литературу по теории преобразований Фурье); потоки энергии в параллельном пучке (194) и в коническом пучке (187) равны величине (1/2) $\rho_0 c$, умноженной на левую и правую части этого равенства соответственно (как мы получаем, например, при интегрировании формулы (189) для определения интенсивности по всей площади поперечного сечения пучка).

1.13. Диссипация акустической энергии

Мы закончим эту главу изучением механизмов, которыми до сих пор пренебрегали и которые способствуют диссипации акустической энергии в тепло, а также остановимся на тех модификациях линейной теории, к которым приводит учет этих механизмов. Рассмотрим прежде всего плоские бегущие волны. Для обычных жидкостей мы найдем, что, хотя в случае таких волн, соответствующих слышимым или даже ультразвуковым частотам, достигающим нескольких мегагерц, потери энергии на каждой длине волны за счет диссипации очень малы на расстояниях, много больших длины волны, они приводят к экспоненциальному уменьшению амплитуды, называемому *затуханием*.

Для того чтобы учесть диссипацию при помощи полученных результатов для плоских волн, некоторые из положений теории, развитой в этой главе, нужно несколько видоизменить. Например, внутри компактной области источников и в окрестности этой области диссипация акустической энергии не может оказывать значительное влияние на процессы генерирования и распространения звука к порогу дальнего поля, так как он расположен на расстоянии всего одной-двух длин волн. Однако такое дальнее поле, будь то поле точечного источника или диполя, на каждой длине волны имеет характеристики плоской волны, за исключением множителя r^{-1}, учитывающего постепенное распределение энергии по площади, увеличивающейся как r^2. В частности, относительные потери акустической энергии на длине волны должны быть почти такими же, как и для

плоской волны, причем уменьшение амплитуды с расстоянием будет описываться произведением двух членов: экспоненциальным членом, учитывающим потери энергии так же, как в плоской волне, и множителем r^{-1}, который позволяет учесть распределение энергии по площади, увеличивающейся как r^2. Аналогично любые волны, рассматриваемые в геометрической акустике, при распространении вдоль трубок лучей обладают свойствами плоских волн на каждой длине волны, т. е. изменение их амплитуд описывается произведением той же самой экспоненциальной функции от расстояния и геометрического множителя, который учитывает распределение акустической энергии по меняющейся площади поперечного сечения трубки лучей.

Одним из механизмов диссипации энергии является вязкость, которая из-за внутренних напряжений в жидкости при неравномерных движениях приводит к различным потокам количества движения в различных направлениях. Эта анизотропия выражается *тензором напряжений* p_{ij}, элементы которого представляют собой скорость обусловленного напряжениями жидкости потока x_i-составляющей количества движения в направлении x_j через единичную площадку в единицу времени.

В гидростатике или в случае пренебрежимо малой вязкости тензор напряжений принимает изотропный вид

$$p_{ij} = p\delta_{ij}, \tag{196}$$

одинаковый во всех направлениях. Для учета анизотропного потока количества движения p_{ij}, обусловленного напряжениями в жидкости, и конвективного потока количества движения $\rho u_i u_j$, как в уравнении (147), необходимо применять нелинейные теории; таким образом, теория генерирования звука турбулентным потоком, рассмотренная в разд. 1.10, станет более точной, если в уравнении (147) и последующем определении T_{ij} (150) заменить $p\delta_{ij}$ точным тензором напряжений p_{ij}. В учебниках по кинетической теории показывается, что в совершенных газах, определяемых уравнением (23), тензор напряжений можно рассматривать как осредненный избыточный поток количества движения, конвективно переносимый большими флуктуациями скоростей молекул относительно средних значений, представляемых скоростью жидкости u_i.

В *линейной* теории учитывается только поток количества движения, обусловленный напряжениями p_{ij}, так как $\rho u_i u_j$ включает произведение малых величин. Для плоских волн, распространяющихся, например, в направлении x_1, на которых мы остановимся в силу соображений, приведенных выше, единственной важной составляющей p_{ij} оказывается p_{11}.

Действительно, все величины в такой плоской волне не зависят от x_2 и x_3, так что линеаризованное уравнение количества движения

$$\rho_0 \partial u_1/\partial t = -\partial p_{11}/\partial x_1 \tag{197}$$

выражает равенство скорости изменения x_1-составляющей количества движения и взятого с обратным знаком градиента x_1-составляющей потока количества движения, в то время как линеаризованное уравнение неразрывности (5) сводится к соотношению

$$\partial \rho/\partial t = -\rho_0 \partial u_1/\partial x_1, \tag{198}$$

связывающему только ρ и u_1. Из уравнений (197) и (198) вытекает довольно простое соотношение, связывающее ρ и p_{11}:

$$\partial^2 \rho/\partial t^2 = \partial^2 p_{11}/\partial x_1^2. \tag{199}$$

Если при малых возмущениях p_{11} отличается от невозмущенного давления p_0 на величину c^2 ($\rho - \rho_0$), кратную избыточной плотности, как это следует из соотношения (196) для невязких жидкостей и формулы (37) для обратимых (с постоянной энтропией) процессов, то уравнение (199) будет одномерным волновым уравнением. Однако можно получить более точное соотношение, если принять, что p_{11} может меняться не только в зависимости от ρ, но также и в зависимости или от $\partial\rho/\partial t$, или от $\partial u_1/\partial x_1$. Поскольку две последние величины в силу (198) пропорциональны, такую зависимость в линеаризованном виде можно записать как

$$p_{11} - p_0 = c^2 (\rho - \rho_0) + \delta \partial \rho/\partial t, \tag{200}$$

где первый коэффициент c^2 остается прежним, поскольку изменения, которые *не являются* слишком резкими, должны удовлетворять соотношениям для течений невязкой жидкости с обратимыми процессами.

С помощью коэффициента δ можно учесть вязкость (анизотропность тензора напряжений, позволяющую p_{11} превышать другие составляющие, когда производная $\partial u_1/\partial x_1$ отрицательна) или необратимость, обусловленную запаздыванием при установлении термодинамического равновесия (с помощью члена $\partial\rho/\partial t$, учитывающего отставание изменений плотности от изменений давления), но из уравнения (198) видно, что в экспериментах с плоскими звуковыми волнами эти два эффекта различить невозможно; это обстоятельство привело к такому термину, как «объемная вязкость», который используется для описания второго эффекта и который мы стараемся здесь *не употреблять*. Оба вклада в δ и менее очевидный вклад, обусловленный теплопроводностью, изучаются ниже после краткого

анализа следствий уравнения (200), касающихся распространения звука.

Для акустической энергии W на единицу объема, задаваемой в виде суммы (47) и (50), или, в частности, для плоских волн в виде

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 u_1^2 + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2 c^2 \rho_0^{-1}, \tag{201}$$

в силу формул (197), (198) и (200) получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= -u_1 \partial p_{11}/\partial x_1 - c^2(\rho - \rho_0)\,\partial u_1/\partial x_1 = \\ &= -\partial\,[(p_{11} - p_0)\,u_1]/\partial x_1 + [p_{11} - p_0 - c^2(\rho - \\ &\qquad - \rho_0)]\,\partial u_1/\partial x_1 = \\ &= -\partial I/\partial x_1 - \rho_0 \delta\,(\partial u_1/\partial x_1)^2,\end{aligned} \tag{202}$$

где I — поток энергии, обусловленный мощностью избыточного напряжения $p_{11} - p_0$; уравнения (200) и (198) использованы здесь для того, чтобы показать, что последний член существенно отрицателен. Таким образом, уравнение (202) помимо изменений, обусловленных потоком энергии I, дает дополнительную скорость диссипации акустической энергии на единицу объема, равную

$$\rho_0 \delta\,(\partial u_1/\partial x_1)^2. \tag{203}$$

Тот факт, что диссипация энергии пропорциональна *квадрату* градиента скорости, как в формуле (203), приводит, как будет видно, к двум следствиям. Для волн произвольной формы четко выраженные максимумы скорости диссипации всюду, где градиенты $\partial u_1/\partial x_1$ оказываются особенно большими, имеют тенденцию уменьшать такие большие градиенты. Кроме того, для бегущих волн синусоидальной формы влияние диссипации очень существенно зависит от *частоты* ω. Действительно, средняя скорость диссипации (203) для таких волн равна отношению $\delta\,(\omega/c)^2$ к средней акустической энергии (51), что на каждом периоде $2\pi/\omega$ распространения волны дает относительную потерю акустической энергии, равную

$$2\pi\omega\delta/c^2. \tag{204}$$

Как было указано выше, мы будем рассматривать только такие частоты, при которых относительные потери акустической энергии (204) за один период или на одной длине волны малы по сравнению с единицей. Тогда любое локальное соотношение между величинами в звуковой волне, подобно самой формуле (51), будет служить хорошим приближением в рассматриваемой теории.

Уравнение движения, выведенное из уравнений (199) и (200), имеет вид

$$\partial^2\rho/\partial t^2 = c^2\partial^2\rho/\partial x_1^2 + \delta\partial^3\rho/\partial x_1^2\partial t. \qquad (205)$$

Здесь оно записано для ρ, хотя из (198) и (197) нетрудно показать, что u_1 и ρ_{11} удовлетворяют такому же уравнению. Член вида $\rho_1(x_1)\exp(i\omega t)$ в разложении ρ, представляющий синусоидальные колебания с частотой ω, должен удовлетворять уравнению

$$(c^2 + i\omega\delta)\, d^2\rho_1/dx_1^2 = -\omega^2\rho_1 \qquad (206)$$

с решениями, пропорциональными $\exp(\pm \varkappa x_1)$, где

$$\varkappa = i\omega(c^2 + i\omega\delta)^{-1/2} \approx (i\omega/c)\left(1 - \frac{1}{2} i\omega\delta/c^2\right), \qquad (207)$$

что является хорошим приближением при малых значениях величины (204). Верхний и нижний знаки относятся к волнам, бегущим влево и вправо соответственно, и видно, что каждая волна теряет долю (204) своей энергии на своей длине $2\pi c/\omega$. Например, если волна бежит через $x_1 = 0$ в невозмущенную жидкость, заполняющую полупространство $x_1 > 0$, то

$$\rho_1(x_1) = \rho_1(0)\exp\left(-i\omega x_1/c - \frac{1}{2} x_1\omega^2\delta/c^3\right) \qquad (208)$$

и распределение энергии пропорционально $\exp(-x_1\omega^2\delta/c^3)$.

Члены вида $\rho_1(x_1)\exp(i\omega t)$ в $\rho(x_1, t)$ соответствуют решению

$$\rho(x_1, t) = (2\pi x_1\delta)^{-1/2} c^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(0, T)\exp\left[-\frac{c^3(T - t + x_1/c)^2}{2x_1\delta}\right] dT, \qquad (209)$$

найденному методом Фурье для волны, бегущей в заполняющую полупространство $x_1 > 0$ невозмущенную жидкость, с *произвольной* зависимостью от времени $\rho(0, t)$ при $x_1 = 0$. Это решение следует сравнить с решением для плоской волны без диссипации $\rho(0, t - x_1/c)$. Действительно, выражение (209) представляет собой *осреднение по времени* величины $\rho(0, T)$ с весом, соответствующим гауссовскому распределению с центром в $T = t - x_1/c$ и стандартным отклонением $(x_1\delta)^{1/2}c^{-3/2}$, так что влияние диссипации должно постепенно сглаживать нерегулярности, подобные локальным областям с большими градиентами, за счет осреднения величин на этом *увеличивающемся* интервале. Здесь имеется близкая аналогия со сглаживанием распределений за счет диффузии, и поэтому δ называют коэффициентом диффузии звука.

Для многих жидкостей справедлива *линейная* зависимость (204) относительных потерь акустической энергии на длине волны от частоты ω (во всяком случае, когда эти потери остаются малыми, как здесь предполагалось, но не настолько, чтобы их невозможно было измерить!). Для таких жидкостей измеренный наклон кривой этой зависимости определяет величину δ, так что можно предполагать, что формула (200) служит хорошей аппроксимацией в рассматриваемом интервале частот. Такой способ определения δ может оказаться практически более полезным, чем любая теория, учитывающая вклады в δ от эффектов вязкости, теплопроводности и запаздывания при установлении термодинамического равновесия, в частности потому, что эффекты запаздывания не легко оценить количественно посредством иных измерений. Тем не менее мы изложим теорию в общих чертах для частного случая совершенного газа в основном для того, чтобы показать, каким образом можно отделить эффекты вязкости и теплопроводности от эффектов запаздывания, и понять, почему для некоторых газов диссипация энергии на длине волны имеет более сложную зависимость от ω с «резонансными пиками».

Запишем

$$\delta = \delta_v + \delta_c + \delta_l, \tag{210}$$

где индексы v, c и l означают вклады вязкости, теплопроводности и запаздывания в изменения плотности ρ, а следовательно, и «среднего давления»

$$p_m = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}), \tag{211}$$

равного среднему значению нормальных напряжений в трех перпендикулярных направлениях. Для совершенного газа эти напряжения, как уже отмечалось, обусловлены потоком импульса при движении молекул относительно средней скорости u_i жидкости с собственными скоростями флуктуаций v_i, что определяет p_{11} суммированием Mv_1^2 на единицу объема, где M — масса молекулы. Отсюда суммированием на единицу массы величины

$$\frac{1}{2} M (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2), \tag{212}$$

т. е. поступательной составляющей внутренней энергии E на единицу массы, получаем $(3/2)\,(p_m/\rho)$. Каждый раз, когда работа сжатия увеличивает E на величину (25) в ответ на увеличение плотности $d\rho$, эта поступательная составляющая энергии $(3/2)\,(p_m/\rho)$ растет несколько быстрее, чем равновесная часть E, особенно при быстрых изменениях, так как для дру-

гих составляющих энергии (вращательная, колебательная) требуется больше времени, чтобы отреагировать на эти изменения, и фаза p_m опережает фазу ρ.

Хотя уравнение (200) не дает способа разделения вкладов вязкости и запаздывания в δ при достижении термодинамического равновесия, очевидная связь такого запаздывания со средним давлением p_m позволяет предположить, что в качестве истинно вязких эффектов следует рассматривать только отклонения тензора напряжений от изотропного вида $p_m\delta_{ij}$. Считая, что вязкость дает вклад только в p_{ij} и не вносит вклада в p_m, очевидно, нужно положить

$$p_{11} = -\rho_0\delta_v\partial u_1/\partial x_1, \qquad p_{22} = p_{33} = \frac{1}{2}\rho_0\delta_v\partial u_1/\partial x_1, \tag{213}$$

так как в силу симметрии $p_{22} = p_{33}$.

Не очевидно, каким образом связать эти законы с обычным определением вязкости μ, которое в параллельном сдвиговом движении $(u_1(x_2), 0, 0)$ дает касательное напряжение

$$p_{12} = p_{21} = \mu\partial u_1/\partial x_2, \tag{214}$$

но мы можем построить сдвиговое движение из *простого растяжения* $\partial u_1/\partial x_1$, добавляя к нему равное простое сжатие противоположного знака в перпендикулярном направлении, что дает

$$p_{22} = -\rho_0\delta_v\partial u_2/\partial x_2, \qquad p_{33} = p_{11} = \frac{1}{2}\rho_0\delta_v\partial u_2/\partial x_2, \tag{215}$$

где

$$\partial u_2/\partial x_2 = -\partial u_1/\partial x_1, \quad \partial u_3/\partial x_3 = 0. \tag{216}$$

В курсах гидродинамики показывается, что возникающее в результате движение без изменения плотности, называемое чистой деформацией, является параллельным сдвиговым движением в плоскости (x_1, x_2) в других осях (составляющих углы 45° с осями x_1 и x_2); система вязких напряжений (214) в этих осях запишется как

$$p_{11} = -2\mu\partial u_1/\partial x_1, \qquad p_{22} = -2\mu\partial u_2/\partial x_2, \qquad p_{33} = 0. \tag{217}$$

Сравнивая (217) и сумму (213) и (215), получаем величину вклада в коэффициент диффузии звука за счет вязкости

$$\delta_v = \frac{4}{3}\mu/\rho_0. \tag{218}$$

Прежде чем исследовать вклад от запаздывания, отметим несколько менее очевидный вклад, обусловленный коэффициен-

том теплопроводности k. Он определяется таким образом, что там, где кривая зависимости температуры T от расстояния x_1 обращена вогнутостью вверх, скорость увеличения внутренней энергии на единицу объема содержит положительный член

$$k\partial^2 T/\partial x_1^2, \tag{219}$$

а именно градиент *потока тепла* $-k\partial T/\partial x_1$ на единицу площади, возникающий в результате изменения температуры. Физически это объясняется тем, что при $\partial^2 T/\partial x_1^2 > 0$ средняя молекулярная энергия меньше средней энергии соседних молекул и, следовательно, имеется тенденция ее увеличения за счет диффузионных процессов.

Для того чтобы оценить, исходя из выражений (219), соответствующий вклад в медленное акустическое затухание, можно использовать соотношения между температурой, давлением и т. д. для незатухающих звуковых волн. Для данного избыточного давления $p - p_0$ избыточная температура в силу формул (26), (27) и (37) будет равна

$$T - T_0 = (1 - \gamma^{-1})\,(p - p_0)/(R\rho_0). \tag{220}$$

Следовательно, скорость увеличения внутренней энергии (219) можно выразить через $\partial^2 p/\partial x_1^2$, а с учетом (199) через $\partial^2\rho/\partial t^2$ следующим образом:

$$(1 - \gamma^{-1})\,[k/(R\rho_0)]\,\partial^2\rho/\partial t^2. \tag{221}$$

Согласно уравнению (26), при заданном $\partial\rho/\partial t$ это дает некоторый вклад в $\partial p/\partial t$, такой, чтобы соответствующий вклад в скорость увеличения внутренней энергии ρE на единицу объема

$$(c_v/R)\,\partial p/\partial t \tag{222}$$

принимал значение (221). Отсюда находим вклад в коэффициент диффузии звука в уравнении (200) за счет теплопроводности, равный

$$\delta_c = (1 - \gamma^{-1})\,k/(\rho_0 c_v). \tag{223}$$

Из всех элементов, входящих в δ в уравнении (200), мы определили коэффициент δ_v, учитывающий отклонение p_{11} от среднего давления p_m, и коэффициент δ_c, учитывающий отклонение от уравнения (25), предполагающего отсутствие притока тепла. Теперь предположим, что уравнение (25) и соотношения $p_{ij} = p_m\delta_{ij}$ выполняются, и найдем коэффициент δ_l, который учитывает запаздывание непоступательных составляющих внутренней энергии E по сравнению с изменением ее поступательной составляющей $^3/_2\,(p_m/\rho)$.

Предположим, что внутренняя энергия найдена в виде разложения по модам молекулярного движения, которые перенумерованы как 0, 1, 2, . . . и энергия которых меняется на величину $F_n d\,(p_m/\rho)$ при малых изменениях p_m/ρ, но только по истечении времени запаздывания τ_n. Здесь $n = 0$ относится к поступательной энергии, так что $F_0 = {}^3/_2$ и $\tau_0 = 0$, а значения $n > 0$ относятся к вращательным или колебательным модам, для которых $\tau_n > 0$.

В достаточно медленных процессах времена запаздывания пренебрежимо малы, и мы имеем обратимые изменения с $d\,(p_m/\rho) = R\,dT$; тогда

$$dE = \left(\sum F_n\right) R\,dT, \quad \text{откуда} \quad \sum F_n = c_v/R. \tag{224}$$

При изменениях более быстрых, но все еще медленных в масштабе времени запаздывания τ_n имеем

$$dE = \sum F_n\,(1 - \tau_n \partial/\partial t)\,d\,(p_m/\rho) =$$

$$= (c_v/R - \sum F_n \tau_n \partial/\partial t)\,d\,(p_m/\rho). \tag{225}$$

Для определения δ_l мы воспользуемся соотношением (25) в виде $dE = p_m \rho^{-2}\,d\rho$, как уже было указано выше. В результате получаем соотношение

$$p_m \rho^{-2}\,d\rho = (c_v/R)\,d\,(p_m/\rho) -$$

$$- (\sum F_n \tau_n)\,(\partial/\partial t)\,[(R/c_v)\,p_m \rho^{-2}\,d\rho]. \tag{226}$$

Здесь в последнем члене, который оказывает малое влияние на затухание, $d\,(p_m/\rho)$ было заменено соответствующим значением для незатухающих волн. Уравнение (226) можно переписать как

$$dp_m = c^2\,d\rho + \delta_l\,(\partial/\partial t)\,d\rho, \tag{227}$$

где c^2 определяется из (27), а

$$\delta_l = (R/c_v)^2\,p_m \rho^{-1} \sum F_n \tau_n = (\gamma - 1)^2\,(c^2/\gamma) \sum F_n \tau_n \tag{228}$$

является вкладом в коэффициент диффузии звука от запаздывания.

Все слагаемые (218), (223) и (228), входящие в δ, обратно пропорциональны плотности при заданной температуре, так как μ, k и F_n зависят только от температуры, в то время как времена запаздывания τ_n представляют собой величины, кратные среднему времени между столкновениями, т. е. обратно

пропорциональны плотности. Следовательно, относительная потеря энергии на длине волны (204) при заданной температуре будет зависеть от отношения частоты к давлению, которое может быть измерено в МГц/бар.

Для одноатомных газов вся внутренняя энергия состоит только из поступательной составляющей и, значит, $\delta_l = 0$. При $\delta = \delta_v + \delta_c$ (два сравнимых вклада) выражение (204) согласуется с результатами экспериментов в гелии и аргоне при отношениях частоты к давлению, *меньших* 100 МГц/бар, но *бо́льших* 1 МГц/бар; при этих условиях относительные потери энергии соответственно малы по сравнению с 1, но и достаточно велики, чтобы преобладать над другими эффектами, подобными обусловленным нелинейностью эффектам, которые изучаются в гл. 2.

Для некоторых двухатомных газов, например для азота, единственной непоступательной модой, оказывающей влияние на затухание, является вращательная, скажем $n = 1$ с $F_1 = 1$; измерения относительных потерь акустической энергии на длине волны при атмосферном давлении соответствуют времени запаздывания τ_1, равному примерно 0,9 нс или шести средним временам между столкновениями, т. е. требуется в среднем около шести столкновений для того, чтобы установилось равновесие вращательной и поступательной энергии молекул азота. Соответствующий вклад от учета запаздывания δ_l добавляет около 40% в $\delta_v + \delta_c$, и тогда выражение (204) дает хорошие результаты для отношений частот к давлению, равным примерно 10 МГц/бар и менее.

При значительных колебательных модах многоатомных молекул времена запаздывания получаются бо́льшими. Даже при температурах, при которых такая мода едва возбуждена и F_n настолько мало, что слабо влияет на удельную теплоемкость (224), она будет главной в δ, поскольку выражение (228) для ее вклада содержит большой множитель τ_n. При этом, однако, применимость изложенной теории ограничена из-за того, что $\omega\tau_n$ в приближенном соотношении (225) должно быть мало.

Более сложные теории затухания звуковых волн с более высокими частотами ω приводят к уравнениям вида (200), где величина δ и даже c^2 зависят от частоты. Несколько более точной аппроксимацией в смысле учета времени запаздывания в (225) является замена $(1 - \tau_n\partial/\partial t)$ на

$$(1 + \tau_n i\omega)^{-1} = (1 + \tau_n^2\omega^2)^{-1}(1 - \tau_n\partial/\partial t), \qquad (229)$$

что приводит вместо соотношения (228) к соотношению

$$\delta_l = (\gamma - 1)^2 (c^2/\gamma) \sum F_n\tau_n (1 + \tau_n^2\omega^2)^{-1}. \qquad (230)$$

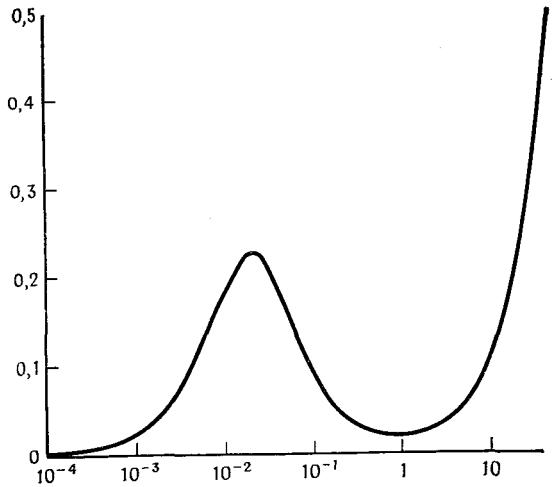

Рис. 19. Экспериментальная кривая относительных потерь энергии на длине волны для звуковых волн в CO_2 в зависимости от отношения частоты к давлению в МГц/бар. Эти результаты хорошо описываются формулой (204) с: (i) постоянными вкладами в δ (приводящими к быстрому подъему кривой при отношениях частоты к давлению свыше 1 МГц/бар), обусловленными вязкостью, теплопроводностью и запаздыванием в установлении равновесия вращательной энергии, и (ii) зависящим от частоты вкладом (230) (дающим резонансный пик), обусловленным запаздыванием в установлении равновесия колебательной энергии.

Этот вклад в коэффициент диффузии звука не зависит от частоты ω только при малых значениях $\omega\tau_n$.

Действительно, каждая мода дает вклад в относительную потерю энергии (204) на длине волны, который достигает максимума

$$\pi(\gamma-1)^2\gamma^{-1}F_n \qquad (231)$$

при $\omega = \tau_n^{-1}$, а затем снова убывает при увеличении частоты. Если построить кривую зависимости относительной потери энергии на длине волны от отношения частоты к давлению, подобно кривой для CO_2 на рис. 19, то на ней появится нечто похожее на резонансный пик (в данном случае величина пика равна 0,23) при характеристической частоте $\omega = \tau_n^{-1}$.

Происходят соответствующие изменения и в величине c^2. Когда $\omega\tau_n$ мало, квадрат скорости звука c^2 мало отличается от обычной величины; с увеличением $\omega\tau_n$ квадрат скорости звука возрастает (увеличиваясь в действительности на множитель

$1+(\gamma-1)^2\gamma^{-1}F_n$), а изменения колебательной энергии больше не дают вклада в c_v в уравнении (225) после проведения в нем замены (229). Это большее значение скорости звука, соответствующее изменениям столь быстрым, что величина колебательной энергии в газе остается постоянной или «замороженной» и уже не влияет на удельную теплоемкость, обычно называется *замороженной скоростью звука*.

Атмосферный воздух из-за влияния колебательной моды в кислороде имеет резонансный пик относительной потери энергии на длине волны, подобный тому, который изображен на рис. 19, хотя величина его на два порядка меньше и равна 0,0022 при 20° С (соответствующие изменения скорости звука едва заметны). Интересно отметить, что величина критической частоты τ_n^{-1} существенно зависит от концентрации *паров воды*, которые способствуют возбуждению этой моды.

Другие процессы, которые приводят к зависящим от температуры поправкам для распределения энергии в жидкости (например, испарение и конденсация в двухфазных смесях или ионизация и рекомбинация в газах при высоких температурах), могут также влиять на акустическое затухание на длине волны, давая пиковые значения при некоторой характерной для данного процесса частоте и последующий спад кривой, однако при этом изменение скорости звука (от равновесного до «замороженного» значения) мало. Заметим также, что затухание совершенно другого типа, связанное с касательными напряжениями (214), играет важную роль каждый раз, когда звуковые волны распространяются *по касательной к твердой стенке*, например при распространении звука в трубе с твердыми стенками; этот случай кратко рассматривается в гл. 2. За дальнейшими подробностями относительно процессов диссипации в жидкости следует обращаться к разд. 3.5.

Упражнения к главе 1

1. Используя одномерные решения (15) и (16), решить для волнового уравнения (13) следующую *задачу Коши*: при $t = 0$ скорость и давление жидкости заданы формулами

$$u = u_1(x), \quad v = w = 0, \quad p - p_0 = p_1(x);$$

показать, что в любой последующий момент времени t выполняется соотношение

$$p - p_0 = \frac{1}{2}[p_1(x-ct)+p_1(x+ct)]+\frac{1}{2}\rho_0 c\,[u_1(x-ct)-u_1(x+ct)],$$

и найти скорость жидкости.

2. Для жидкости, удовлетворяющей *уравнению состояния Ван-дер-Ваальса*

$$p = RT\rho\,(1 - b\rho)^{-1} - a\rho^2,$$

показать, что удельная теплоемкость c_v зависит только от температуры и что скорость звука c определяется формулой

$$c^2 = RT\,(1 - b\rho)^{-2}\,(1 + Rc_v^{-1}) - 2a\rho.$$

[Постоянные a и b, введенные в уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, учитывают два эффекта. Член $b\rho$ отражает увеличение переноса количества движения через поверхность в жидкости вследствие того, что доля $b\rho$ объема недоступна для движения молекулы из-за близкодействующего поля сил отталкивания, окружающего каждую из остальных молекул. И наоборот, член $a\rho^2$ отражает уменьшение давления при переходе через поверхность в жидкости, обусловленное дальнодействующим полем сил притяжения между двумя молекулами, расположенными по разные стороны от этой поверхности.]

3. Доказать, что из определения (77) следует равенство

$$(d/dt)^{1/2} \exp(i\omega t) = (i\omega)^{1/2} \exp(i\omega t).$$

Показать, что линейный источник длины h с периодически меняющимся массовым расходом $q(t) = q_1 \cos \omega t$, расположенный между двумя параллельными плоскостями и перпендикулярный к ним, генерирует среднюю акустическую выходную мощность, равную

$$\frac{1}{8}\rho_0^{-1}h^{-1}\omega q_1^2.$$

4. Показать, что в ближнем поле диполя с напряженностью $\mathbf{G}(t) = \dot{\mathbf{H}}(t)$ мощность, передаваемая через поверхность сферы радиуса r с центром в диполе, отличается от ее значения (104) в дальнем поле членом

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{12\pi\rho_0 c^3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{c}{r}\right)\mathbf{G}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)+2\left(\frac{c}{r}\right)^2\mathbf{G}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\mathbf{H}\left(t-\frac{c}{r}\right)+\left(\frac{c}{r}\right)^3\mathbf{H}^2\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\right\}.$$

Какой физический смысл можно приписать величине, стоящей в фигурных скобках?

5. Использовать понятия источников и диполей для решения общей задачи Коши в случае распространения звука в неограниченной жидкости, а именно положить, что при $t = 0$ скорость жидкости и давление заданы формулами

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \qquad p = p_0 + p_1(\mathbf{x}),$$

и найти давление в последующие моменты времени. Заметим, что покоящуюся жидкость с постоянным давлением $p = p_0$ можно мгновенно привести в состояние, описываемое указанными начальными данными, двумя способами: (i) при помощи распределенного *импульса* $\rho_0\mathbf{u}_1$ на единицу объема, приложенного в момент времени $t = 0$ (здесь под импульсом, конечно, подразумевается очень боль-

шая сила, действующая очень короткое время, так что интеграл от этой силы по времени равен указанному импульсу); (ii) при помощи распределенного *мгновенного массового расхода* $c^{-2}p_1$ на единицу объема; это задает начальную величину $\rho - \rho_0$ (под мгновенным массовым расходом мы снова понимаем очень большую скорость изменения массового расхода за очень короткое время, так что интеграл от этой скорости по времени дает суммарный массовый расход). Исходя из такого представления, получить выражение $p - p_0$ в любой точке P в любой момент времени $t > 0$. Показать, что оно может быть получено осреднением величины

$$p_1 + ct\,(\partial p_1/\partial n - \rho_0 c \nabla \cdot \mathbf{u}_1)$$

по поверхности сферы радиуса ct с центром в точке P (где $\partial/\partial n$ означает производную по внешней нормали к этой поверхности). Проверить, что результат согласуется с выводами упражнения 1.

6. Показать, что малые пульсации пузырька газа в жидкости на каждом периоде пульсации теряют в виде звука часть своей энергии, равную

$$2\pi\,(3\rho_{g0}/\rho_0)^{1/2}\,(c_g/c);$$

здесь ρ_0 и c — невозмущенная плотность и скорость звука для жидкости, а ρ_{g0} и c_g — невозмущенная плотность и скорость звука для газа. (Для пузырьков воздуха в воде при 20° С эта доля потерянной энергии составляет 0.095.)

7. Классическое решение (см. учебники по гидродинамике) задачи о схлопывании пустой сферической полости в жидкости дает

$$[\dot{a}\,(t)]^2 = \frac{2}{3}\,p_0\rho_0^{-1}\,\{a_0^3\,[a\,(t)]^{-3} - 1\}.$$

Здесь $a\,(t)$ — радиус полости в момент времени t, a_0 — значение радиуса до начала движения, p_0, ρ_0 — невозмущенные давление и плотность жидкости. Показать, что полость действует как акустический источник, напряженность которого можно записать в виде

$$\frac{4}{3}\,\pi\rho_0\,\{a_0^3\,[a\,(t)]^{-2} - 4a\,(t)\},$$

так что она отрицательна до тех пор, пока $a\,(t)$ не уменьшается до величины $2^{-2/3}a_0$, а затем становится положительной. [Заметим, однако, что при тех чрезвычайно малых значениях $a\,(t)/a_0$, при которых интенсивность источника стремится к $+\infty$, классическое решение неприменимо, поскольку в нем пренебрегалось внутренним противодавлением, обусловленным сжатием пара, которое непременно имеет место в реальной полости.]

8. Эоловы тона, создаваемые колеблющейся под действием ветра проволокой, связаны с флуктуациями подъемной силы (направленной под прямым углом к направлению ветра), обусловленными чередующимся срывом вихрей с верхней и нижней поверхностей проволоки. Предполагая, что диаметр проволоки компактен, а ее длина $2l$ некомпактна, найти результирующее акустическое поле в случае, когда собственные колебания проволоки находятся в фазе

с флуктуациями подъемной силы, равной $L_1 \cos \omega t$ на единицу длины проволоки. Считая, что подъемная сила действует в направлении y, а проволока расположена между точками $(0, 0, -l)$ и $(0, 0, l)$, показать, что на больших расстояниях

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

от средней точки проволоки поле давления задается формулой $p - p_0 = -[L_1 y z^{-1} \sin(\omega z l/(rc))]\,(2\pi r)^{-1} \sin[\omega(t - r/c)]$. В каком направлении амплитуда имеет наибольшее значение? В каких направлениях она обращается в нуль? (Последние ограничивают «боковые лепестки», подобные тем, о которых упоминалось в разд. 1.12.)

9. Показать, что компактная сфера, средняя сжимаемость которой K может быть больше (но не *во много* раз) или меньше сжимаемости $\rho_0^{-1} c_0^2$ окружающей жидкости, рассеивает плоскую волну в большей степени назад, чем вперед, тогда и только тогда, когда избыточная средняя сжимаемость сферы и ее избыточная средняя плотность имеют противоположные знаки. Каким образом нарушается это заключение, если $K\rho_0 c_0^2$ очень велико?

10. Обычно сирены работают при помощи пара. Если такая жидкость с плотностью ρ_s истекает с колеблющимся расходом в атмосферу, имеющую иную плотность ρ_0, то результирующую акустическую отдачу (для умеренных скоростей потока) можно вычислить двумя различными способами. Во-первых, можно считать, что переменный *объемный расход* $m(t)$ выталкивает окружающий *воздух* с *тем же самым* объемным расходом, и тогда дальнее поле можно вычислить с помощью методов разд. 1.6 как дальнее поле акустического источника напряженности $\rho_0 \dot{m}(t)$. Во-вторых, используя идеи разд. 1.10, можно рассматривать дальнее поле как дальнее поле точечного источника напряженности $\rho_s \dot{m}(t)$, равной скорости изменения массового расхода сирены, плюс дальнее поле распределения квадруполей напряженности (150) на единицу объема. Показать, что для умеренных скоростей потока дальнее поле распределения таких квадруполей совпадает с дальним полем распределения точечных источников напряженности $-\partial^2\rho/\partial t^2$ на единицу объема, суммарная напряженность которых $(\rho_0 - \rho_s)m(t)$ согласуется с результатами указанных двух способов вычисления.

11. Пусть жесткая сфера совершает малые колебания, при которых ее центр движется по одной и той же прямой, смещаясь на величину $b(t)$; показать, что напряженность эквивалентного диполя $G(t)$ определяется общей формулой

$$4\pi\rho_0 c a_0^2 \int_{-\infty}^{t} \ddot{b}(T + a_0/c) \exp[c(T-t)/a_0] \sin[c(t-T)/a_0]\, dT.$$

Заметим, что в случае, когда $\ddot{b}(t)$ меняется медленно на временном масштабе a_0/c, это выражение можно свести к приближенному виду

$G(t) = 2\pi\rho_0 a_0^3 \ddot{b}(t)$, поскольку распределение

$$\exp[c(T-t)/a_0]\sin[c(t-T)/a_0]$$

имеет центр при $T = t - a_0/c$ и дает интегральную величину $a_0/(2c)$.

12. Пусть в случае излучения звука от плоской стенки распределение (186) нормальной скорости поверхности существенно только при $Y^2 + Z^2 < l^2$. Показать, что на расстояниях r от начала координат, больших по сравнению с l, но не обязательно больших по сравнению с $\omega l^2/c$, результирующее звуковое поле хорошо аппроксимируется выражением (187), если $F_1(M, N)$ интерпретировать как фурье-преобразование не функции $f_1(Y, Z)$, а выражения

$$f_1(Y, Z)\exp\left[-\frac{1}{2}i\omega(Y^2+Z^2)/(cr)\right].$$

Это согласуется с предыдущим определением (188), если r действительно велико по сравнению с $\omega l^2/c$.

С другой стороны, если r *мало* по сравнению с $\omega l^2/c$, можно записать новое значение $F_1(\omega y/(rc), \omega z/(rc))$ как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(Y, Z)\exp[i\psi(Y, Z)]\,dY\,dZ,$$

где фаза

$$\psi(Y, Z) = [\omega/(cr)]\left(yY + zZ - \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2\right)$$

сильно меняется в области $Y^2 + Z^2 < l^2$ и стационарна при $Y = y$, $Z = z$. При этих условиях двойной интеграл можно вычислить методом стационарной фазы (см. ниже, разд. 3.7), взяв величину $f_1(Y, Z)$ в этой стационарной точке равной

$$-2\pi i\,|(\partial^2\psi/\partial Y^2)(\partial^2\psi/\partial Z^2)|^{-1/2} f_1(y, z)\exp[i\psi(y, z)].$$

Показать, что если $F_1(\omega y/(rc), \omega z/(rc))$ задать в таком виде при $r \ll \omega l^2/c$, то уравнение (187) для $p - p_0$ будет согласовываться с выводами геометрической акустики.

2. Одномерные волны в жидкостях

2.1. Продольные волны в трубах и каналах

Теория генерирования и распространения звука, основанная на суммировании решений волнового уравнения для простых источников, оказалась применимой (разд. 1.4—1.10) к широкому кругу задач, которые одновременно удовлетворяют условию *линейности* (т. е. возмущения настолько малы, что их квадратами можно пренебречь) и условию *компактности* (т. е. область источников мала по сравнению с длиной волны).

Если условие компактности не выполнено, то такой подход применим лишь к значительно более узкому кругу геометрически простых задач, вроде задач из разд. 1.11 и 1.12. Однако в этом случае напрашивается другой метод, основанный на прослеживании лучей, который можно использовать для решения многих задач при *противоположном* условии, а именно при условии, что геометрические размеры велики по сравнению с длиной волны.

Фундаментальные исследования, показывающие, почему в этом предельном случае лучи играют важную роль, излагаются в гл. 4, однако в этой главе правилу разд. 1.11, определяющему амплитуды в геометрической акустике исходя из *постоянства потока энергии* вдоль трубки лучей, будет дана критическая оценка как одному из аспектов распространения волн в трубах и каналах. Затем будет предпринято расширенное исследование условия *линейности* и изучены некоторые замечательные явления, связанные с нарушением этого условия.

Представляет интерес выяснить, при каких обстоятельствах постоянство потока энергии может быть нарушено продольной *неоднородностью* поперечного сечения трубки лучей (или даже плотности и температуры жидкости, через которую она проходит), что делает возможным *отражение* части акустической энергии вдобавок к ее диссипации, рассмотренной в разд. 1.13. В настоящей главе содержится общее исследование

распространения и отражения акустической энергии в трубах с учетом как внезапных, так и постепенных изменений площади поперечного сечения и состояния жидкости; это исследование, в частности, позволяет выяснить упомянутые выше обстоятельства (разд. 2.6). Здесь, однако, мы будем иметь дело с распространением волн *не только* по абстрактным «трубкам лучей», но также и по вполне осязаемым трубам с твердыми стенками...

Важным примером служит рупор громкоговорителя. Он позволяет вибрирующей мембране (настолько малой, что ее можно считать акустически компактной) генерировать звук не с низкой эффективностью, как в случае трехмерного излучения, а со значительно большей эффективностью плоской волны. Это достигается путем излучения вдоль трубы с твердыми стенками, постепенное возрастание площади поперечного сечения которой сохраняет поток энергии и передает его неизменным к открытому концу, достаточно широкому, чтобы эффективность излучения в окружающую среду была хорошей. Дополнительные причины, побуждающие исследовать звуковые волны в трубах, содержащих воздух или воду, связаны соответственно с задачами изучения духовых музыкальных инструментов или раздражающего явления «гидравлического удара» в водопроводных сетях.

Фактически здесь рассматривается всякое распространение волн в твердых заполненных жидкостью трубах, если оно является продольным в том смысле, что составляющие движения жидкости, параллельные оси трубы, обладают значительно большей кинетической энергией, чем любые составляющие, перпендикулярные этой оси. Позже в рассмотренной в разд. 4.13 теории волновода будет показано, что «основной модой» распространения звуковых волн любой частоты служит именно эта продольная мода, тогда как распространение других, отчасти поперечных мод возможно только при частотах, превышающих некоторое *критическое значение* (для которого длина волны сравнима с диаметром трубы). Продольные волны, изучаемые в гл. 2, являются, следовательно, *единственно* возможным типом распространения акустических возмущений с частотой ниже этой критической частоты, и, кроме того, они интересны при всех частотах.

При сделанных ограничениях теорию продольных движений легко обобщить, допустив, что стенка трубы растяжима, т. е. отвечает на изменение давления пропорциональным *изменением площади поперечного сечения* относительно ее локального значения в отсутствие возмущения. Это позволяет распространить теорию гидравлического удара на звуковые волны в тонкостенных эластичных трубах, заполненных жидкостью;

сжимаемость жидкости и растяжимость трубы можно непосредственно складывать (см. уравнение (10)), хотя последняя лишь в незначительной степени снижает скорость распространения возмущений для практически используемых водопроводных сетей.

Как ни странно, теория непосредственно применима к распространению пульсовой волны в артериях. Растяжимость артериальной стенки столь велика, что по сравнению с ней сжимаемостью крови можно пренебречь, и поэтому соответствующая скорость распространения (разд. 2.2) на два порядка меньше скорости звука. Тем не менее при прохождении пульсовой волны радиус артерии увеличивается и сокращается лишь на несколько процентов от его невозмущенного значения, а для этого достаточны радиальные движения, пренебрежимо малые по сравнению с продольными.

Мы видим, что понятие одномерных волн в жидкости — это весьма гибкое понятие! Оно охватывает волны в трубах или каналах, поперечное сечение которых может иметь весьма общий вид и к тому же изменяться в ответ на локальные изменения давления. Еще один неожиданный пример — это «длинные волны» в открытых каналах, заполненных водой.

Здесь нас интересуют каналы с произвольным поперечным сечением, заполненные до определенной высоты. Прохождение «длинной волны» (длина которой превышает глубину канала) представляет собой изменения уровня поверхности воды, вызывающие *как* изменения площади поперечного сечения, *так* и изменения давления на любом заданном уровне, синфазные колебаниям уровня и, следовательно, друг другу. Отсюда следует (разд. 2.2), что все допущения теории продольных волн выполнены. Чтобы избежать недоразумения, мы подчеркиваем, что описанные выше волны — это не общеизвестные *поверхностные волны* на воде, рассмотрение которых откладывается до гл. 3; они представляют собой *низкочастотные* явления, для которых длина волны может быть велика по сравнению с глубиной; крайний случай этой ситуации — приливные движения, вызванные Луной, период которых составляет половину суток.

Эти примеры неакустических продольных волн ставят не меньше вопросов, чем примеры из области акустики, относительно влияния постепенных изменений поперечного сечения: что, скажем, происходит, когда приливные движения распространяются вверх по сужающемуся эстуарию или когда пульсовая волна проходит по сужающейся артерии? Скачкообразные изменения также представляют интерес; существуют в то же время особые причины, заставляющие изучать распространение волн в *разветвленных* системах, таких, как сердечно-со-

судистая система или система притоков реки, и выяснять, какая часть энергии волны войдет в каждую из ветвей.

Линейная теория продольных волн в трубах и каналах излагается в разд. 2.1—2.7, начиная (в первых двух разделах) со случаев, в которых свойства трубы (или канала), а также жидкости, *однородны* вдоль нее. В следующих четырех разделах объектом изучения является влияние неоднородности этих свойств, как скачкообразной, так и постепенной, причем в разд. 2.4 рассматривается случай разветвленных систем. Диссипация энергии, которая в этих шести разделах считалась пренебрежимо малой, исследуется в разд. 2.7. Хотя механизмы диссипации, разобранные в разд. 1.13, описывают это явление как для абстрактных «трубок лучей», так и для труб с твердыми стенками, во втором случае появляется дополнительный, более мощный источник диссипации — торможение продольных движений у твердой стенки за счет трения.

Вся теория далее обобщается, чтобы учесть также нелинейные эффекты. Выясняется, что они обусловливают не просто количественное изменение поведения распространяющихся волн, но и некоторые качественно новые явления, имеющие замечательные свойства. В особенности следует отметить образование *разрывной* волны (например, ударной волны, или же гидравлического прыжка) из непрерывной волны. В разд. 2.8—2.12 излагается нелинейная теория распространения волн в однородных трубах или каналах, а в разд. 2.13 показывается, как ее можно обобщить, чтобы учесть продольную неоднородность поперечного сечения и свойств жидкости или же диссипацию, обусловленную трением; в разд. 2.14 продолжен вывод изменений, которые необходимо ввести в геометрическую акустику в связи с требованиями, налагаемыми нелинейностью. В частности, в этих разделах намечены принципы, позволяющие предсказать, в какие дни будет образовываться «бора» на реке Северн, или вычислить интенсивность звукового удара от сверхзвукового самолета.

Теории продольных волн как в абстрактных «трубках лучей», так и в твердостенных трубах, построенные с учетом или без учета неоднородностей, нелинейности или же вызванной трением диссипации, основаны на допущении, что изменения *избыточного давления*

$$p_e = p - p_0 \tag{1}$$

в пределах поперечного сечения пренебрежимо малы. Здесь p_0 — невозмущенное гидростатическое давление, так что ускорение жидкости вызвано градиентом именно избыточного давления p_e. Движения, порожденные продольными градиентами p_e,

могут быть велики по сравнению с порожденными поперечными градиентами, если только p_e пренебрежимо мало изменяется в пределах каждого поперечного сечения.

По причинам, указанным в разд. 1.2, мы будем и далее пренебрегать изменениями плотности ρ внутри любого поперечного сечения (определенного, скажем, его расстоянием x от одного из концов трубы) и считать, что как ρ, так и площадь поперечного сечения A связаны с локальным избыточным давлением p_e соотношениями

$$\rho = \rho\,(p_e,\ S), \quad A = A\,(p_e,\ x), \tag{2}$$

определяющими сжимаемость жидкости при данной энтропии S и растяжимость трубы или канала для данного расстояния x. Эти общие выражения охватывают, конечно, более простые особые случаи, вроде звуковых волн в жестких трубах (где A не зависит от p_e) или длинных волн в открытых каналах, заполненных водой (где ρ можно считать постоянной).

Во всех точках любого поперечного сечения наблюдается один и тот же продольный градиент p_e, а следовательно, одно и то же *ускорение* жидкости (если пренебречь тормозящими силами трения; об их влиянии см. разд. 2.7); поэтому, наконец, в этих точках будет одна и та же скорость жидкости u, удовлетворяющая уравнению

$$\rho\,(\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x) = -\,\partial p_e/\partial x, \tag{3}$$

представляющему собой формулировку утверждения о том, что плотность, умноженная на ускорение, равна силе, действующей на единицу объема (представленной здесь взятым со знаком минус градиентом избыточного давления). С другой стороны, уравнение неразрывности для продольных движений учитывает изменения площади поперечного сечения:

$$\partial\,(\rho A)/\partial t + \partial\,(\rho A u)/\partial x = 0 \tag{4}$$

— это уравнение, утверждающее, что скорость изменения ρA — *массы, приходящейся на единицу длины*, равна взятому со знаком минус продольному градиенту *массового расхода* $\rho A u$.

Заметим, что изменения площади поперечного сечения ограничивают массовый расход и поэтому входят в уравнение (4), так как масса не может пересекать границу трубы. С другой стороны, эти изменения не могут влиять на баланс количества движения и входить в уравнение (3), поскольку граница трубы действует на единицу площади элемента объема жидкости с той же *изменяющей количество движения силой* p_e, что и соседние с ним элементы жидкости.

Вся гл. 2, за исключением изложенного в разд. 2.7 учета обусловленной трением диссипации и кратких исследований ее влияния в других местах, основана на приведенных выше общих уравнениях для продольных волн в жидкостях (2)—(4) и уравнении сохранения энтропии для частицы жидкости (разд. 2.6). В разд. 2.1 и 2.2, однако, следствия из этих уравнений выводятся, во-первых, только при условии, что свойства жидкости, включая ее энтропию S, а также свойства трубы (или канала) считаются продольно однородными, так что уравнения (2) принимают вид

$$\rho = \rho\,(p_e), \quad A = A\,(p_e), \tag{5}$$

и во-вторых, в предположениях *линейной* теории, т. е. пренебрегая квадратами возмущений (скорости жидкости u и избыточного давления p_e).

В линеаризованном виде уравнения количества движения (3) и неразрывности (4) суть

$$\rho_0 \partial u/\partial t = -\partial p_e/\partial x, \quad \partial\,(\rho A)/\partial t = -\rho_0 A_0 \partial u/\partial x, \tag{6}$$

где ρ_0 и A_0 даются формулами (5) при $p_e = 0$. Исключая из них u, получаем

$$\partial^2 p_e/\partial x^2 = A_0^{-1}\partial^2(\rho A)/\partial t^2. \tag{7}$$

В рамках линейной теории это можно записать как одномерное волновое уравнение

$$\partial^2 p_e/\partial x^2 = c^{-2}\partial^2 p_e/\partial t^2, \tag{8}$$

где скорость волны c определяется выражениями

$$c^{-2} = A_0^{-1}\,[d\,(\rho A)/dp_e]_{p_e=0}. \tag{9}$$

Таким образом, если свойства жидкости и трубы (или канала) однородны в продольном направлении, то линейная теория приводит к тому же самому одномерному волновому уравнению, которое описывает плоские звуковые волны, с тем отличием, что значение скорости волны c оказывается измененным вследствие растяжимости трубы (или канала). Действительно, уравнение (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho^{-1}c^{-2} &= [(\rho A)^{-1}d\,(\rho A)/dp_e]_{p_e=0} = \\ &= [\rho^{-1}d\rho/dp_e + A^{-1}dA/dp_e]_{p_e=0} = K + D,\end{aligned} \tag{10}$$

где относительное увеличение плотности и относительное увеличение площади поперечного сечения, приходящиеся на единицу увеличения давления, называются соответственно *сжимаемостью* жидкости K и *растяжимостью* трубы (или канала) D.

Другими словами, все обстоит точно так же, как в теории плоских звуковых волн (где $\rho_0^{-1}c^{-2} = K$), если принять, что *эффективная* сжимаемость жидкости в трубе (или канале) является *суммой* истинной сжимаемости K и упомянутой растяжимости D. Примеры использования этого правила приведены в разд. 2.2.

В то же время скорость жидкости в направлении распространения *бегущей* волны равна $(\rho_0 c)^{-1} p_e$ (где $p_e = p - p_0$), в точности как в разд. 1.1. Например,

$$p_e = f(t - x/c) \tag{11}$$

— решение уравнения (8), описывающее волны, бегущие в *положительном* x-направлении, дает после его подстановки в линеаризованное уравнение количества движения формулу

$$u = (\rho_0 c)^{-1} p_e, \tag{12}$$

совсем как для плоских звуковых волн.

2.2. Примеры, относящиеся к эластичным трубам и открытым каналам

Для одного важного класса продольных волн, а именно для тех, которые возникают в открытых каналах и, вероятно, кажутся совершенно непохожими на звуковые волны, оказывается возможным удивительно просто рассчитать растяжимость D и, следовательно, применить линейную теорию из разд. 2.1 для однородного невозмущенного состояния. Можно считать, что поперечное сечение канала имеет произвольную *форму*, которая, однако, должна удовлетворять допущению о продольной однородности, т. е. быть одинаковой по всей длине канала. В невозмущенном состоянии жидкость покоится, ее свободная поверхность горизонтальна и имеет ширину b, а площадь каждого поперечного сечения, находящегося ниже уровня жидкости, равна A_0. При отсутствии возмущений распределение давления p_0 определяется согласно гидростатике: в системе координат, в которой z отсчитывается *вверх* от невозмущенной свободной поверхности (так что $-z$ есть расстояние вниз от нее),

$$p_0 = p_a - \rho_0 g z, \tag{13}$$

где p_a — атмосферное давление.

В момент времени t, когда это состояние претерпело *возмущение* и давление увеличено на некоторую величину p_e по всему

данному поперечному сечению (обозначаемому его координатой x), новая высота свободной поверхности

$$z = \zeta(x, t) \tag{14}$$

определяется из условия, согласно которому давление $p = p_0 + p_e$ должно равняться атмосферному давлению p_a при $z = \zeta$, что дает

$$p_e = \rho_0 g \zeta. \tag{15}$$

Следовательно, вся свободная поверхность данного поперечного сечения поднята на одно и то же расстояние $p_e/\rho_0 g$, необходимое для создания на этом расстоянии под ней избыточного давления p_e. Соответствующее увеличение площади поперечного сечения A заполненной части канала (если пренебречь квадратичными по ζ членами) есть

$$A = A_0 = b\zeta = b(\rho_0 g)^{-1} p_e. \tag{16}$$

Отсюда выводим, что растяжимость

$$D = A_0^{-1}(dA/dp_e)_{p_e=0} \tag{17}$$

дается формулой

$$D = b(\rho_0 g A_0)^{-1}. \tag{18}$$

Обычно эта растяжимость (18) настолько значительна, что в формуле (10) сжимаемостью жидкости K можно пренебречь, что дает

$$c = (gA_0)^{1/2} b^{-1/2} = (gh)^{1/2}, \tag{19}$$

где величина h для невозмущенного поперечного сечения есть его площадь A_0, разделенная на ширину его свободной поверхности b; тем самым получаем значение *глубины воды, усредненной по ширине* канала, известной под названием «гидравлической средней глубины» h. Заметим, что если h имеет значения примерно от 1 м до 100 м, характерные для ручьев, каналов и рек, то скорость волны принимает значения примерно от 3 до 30 м/с. Несущественность сжимаемости K в (10) подтверждается малостью этих значений по сравнению со скоростью звука (1400 м/с в воде).

Основное допущение одномерного распространения волн, состоящее в том, что продольные движения жидкости велики по сравнению с поперечными, можно теперь подвергнуть проверке. Среди поперечных движений в плоскости поперечного сечения преобладают вертикальные смещения свободной поверхности (14). Для всякой бегущей волны их можно связать с продольной скоростью u формулами (15) и (12), что дает

$$\zeta = cu/g = hu/c, \tag{20}$$

где второе выражение для ζ выведено из первого с использованием формулы (19). Поперечные движения порядка $\partial\zeta/\partial t$ будут тогда малы по сравнению с u, если характерная угловая частота ω (отношение характерного значения $\partial\zeta/\partial t$ к характерному значению ζ) удовлетворяет соотношению

$$\omega h/c \ll 1, \tag{21}$$

согласно которому гидравлическая средняя глубина h «компактна» по отношению, конечно, не к скорости звука, но к значительно более низкой скорости длинных волн в каналах (19).

Другими формами выражения (21) служат формулы

$$h \ll \lambda/(2\pi) \quad \text{и} \quad t_p \gg 2\pi\,(h/g)^{1/2}. \tag{22}$$

Первая из них требует, чтобы длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ была очень велика по сравнению со средней глубиной h; на самом деле, как будет показано в гл. 3, одномерная теория дает для скорости распространения ошибку меньше 3%, если $\lambda > 14h$. Эквивалентное ограничение на период $t_p = 2\pi/\omega$ требует, чтобы он был велик по сравнению с параметром, который для глубин от 1 до 100 м меняется от 2 до 20 с. Продольные волны в открытых каналах — это, следовательно, «длинные» волны (характерная длина волны которых велика по сравнению со средней глубиной), возбуждаемые силовыми воздействиями с длительными характерными периодами (по сравнению с этими стандартными значениями порядка нескольких секунд).

Покажем теперь, как можно оценить растяжимость тонкостенной эластичной трубы, чтобы затем использовать эту оценку для аналогичного изучения распространения волн. Если при отсутствии возмущений внутренний радиус трубы равен a_0, а толщина стенки h, то избыточное давление p_e, действующее изнутри, создаст *на единицу длины трубы окружное растяжение* $a_0 p_e$. Этот простой закон (один из многих, приписываемых Лапласу) проще всего понять, представив себе, что отрезок трубы, длина которого равна единице, разделен на две равные части полукруглого поперечного сечения; они отталкиваются друг от друга внутренним давлением p_e, действующим на разделяющую их поверхность площадью $2a_0$, что создает силу $2a_0 p_e$, уравновешенную окружным растяжением, приложенным к *обоим* соединениям между частями.

Это окружное растяжение $a_0 p_e$ действует на участок поверхности материала трубы площадью h (снова на единицу длины трубы), откуда получаем окружное растягивающее напряжение (силу, действующую на единичную площадку, нормальную к этой силе)

$$a_0 p_e/h. \tag{23}$$

Для тонкостенных труб (т. е. при $h \ll a$) окружное напряжение (23) значительно превосходит по величине радиальное напряжение (которое меняется от p_e внутри до 0 снаружи). В этом случае напряженное состояние материала стенки трубы приблизительно соответствует условиям простого «испытания на растяжение», проводимого в окружном направлении при напряжении (23).

Соответствующую окружную *деформацию* (относительное увеличение окружности трубы) можно записать в виде

$$a_0 p_e/(hE), \tag{24}$$

где упругие свойства материала стенки трубы при малых напряжениях описываются модулем E. Эта величина, если материал изотропен, есть модуль Юнга, в противном случае — модуль упругости при окружном растяжении. Относительное изменение площади поперечного сечения жидкости в трубе $(A - A_0)/A_0$ равно удвоенному относительному изменению окружности трубы (24), откуда, согласно определению растяжимости (17), получим формулу

$$D = 2a_0/(hE). \tag{25}$$

Этого достаточно, чтобы можно было применять всю линейную теорию распространения волн по однородным трубам, изложенную в разд. 2.1.

Однако, прежде чем это делать, нам хотелось бы отметить одно следствие окружного напряжения (23), с необходимостью сопровождающего окружную деформацию (24), а именно появление деформаций *противоположного* знака и несколько меньшей величины в направлениях, ортогональных этой деформации. Нет нужды комментировать радиальную деформацию, представляющую собой просто небольшое относительное уменьшение толщины стенки при $p_e > 0$. Некоторые интересные задачи возникают, однако, в связи с *продольной* деформацией сжатия стенки трубы, порождаемой таким избыточным давлением жидкости.

Ее величину можно определить по формуле

$$\partial\xi/\partial x = -\sigma a_0 p_e/(hE), \tag{26}$$

где ξ — продольное смещение частицы стенки трубы, а деформация $\partial\xi/\partial x$ представляет собой относительное изменение длины короткого отрезка трубы. Константа σ, если материал изотропен, есть *коэффициент Пуассона* (см. курсы теории упругости), тогда как для труб из произвольного материала $(-\sigma/E)$ — это коэффициент, связывающий продольное удлинение с окруж-

ным растягивающим напряжением. Типичные значения σ лежат в диапазоне от 0,2 до 0,5.

Таким образом, хотя продольные волны в заполненных жидкостью эластичных трубах могут вызывать продольные смещения ξ самих стенок трубы, инерция этих смещений не оказывает существенного влияния на законы распространения указанных волн. Это можно проверить, показав, что продольное напряжение сжатия p_l, которое необходимо для преодоления указанной инерции, мало по сравнению с (23) и не меняет характера системы напряжений в стенке трубы, в основном соответствующего простому растяжению.

Действительно, линеаризованное уравнение количества движения для продольных перемещений материала стенки трубы, имеющего по предположению плотность ρ_s, таково:

$$\rho_s \partial^2\xi/\partial t^2 = -\partial p_l/\partial x. \tag{27}$$

Согласно уравнениям (26) и (27),

$$\partial^2 p_l/\partial x^2 = (\rho_s \sigma a_0/(hE))\, \partial^2 p_l/\partial t^2 = (\rho_s \sigma a_0/(hE))\, c^2 \partial^2 p_e/\partial x^2, \tag{28}$$

откуда с помощью выражений (10) для c^2 и (25) для D получим

$$p_l/p_e = \frac{1}{2}\,\sigma\,[D/(D+K)]\,(\rho_s/\rho_0). \tag{29}$$

Это показывает, во-первых, что продольные напряжения имеют самое большее такой же порядок величины, как и радиальные, и поэтому столь же малы по сравнению с окружными напряжениями, использованными при вычислении растяжимости (25), и, во-вторых, что продольные напряжения стенки трубы синфазны давлению жидкости (а стало быть, скорость жидкости и скорость твердой стенки также синфазны); соответственно решения волнового уравнения (8), удовлетворяющие граничным условиям, наложенным на жидкость либо на свободном открытом конце (нулевое избыточное давление), либо на жестко закрепленном закрытом конце (нулевая скорость), должны также удовлетворять соответствующим граничным условиям, наложенным на материал стенки трубы, и, следовательно, быть приемлемыми в целом.

Другой тип продольного распространения волн в заполненных жидкостью эластичных трубах наблюдается, однако, если труба «зафиксирована» по отношению к продольным смещениям, т. е. закреплена снаружи таким образом, чтобы сделать их невозможными. Такая фиксация на самом деле весьма обычное свойство эластичных труб, по которым распространяются волны. Укажем кратко на явление, связанное с ним в случае

изотропности материала: фиксирующий механизм должен порождать компенсирующее напряжение, равное по величине (26) и противоположно направленное, создавая силы, вызывающие в стенке трубы продольное *растягивающее* напряжение $\sigma a_0 p_e/h$.

Это продольное напряжение сравнимо с окружным (23) и вызывает, как и оно, деформации в перпендикулярных направлениях, которые можно вычислить, умножив его на $(-\sigma/E)$. Добавление одной из них к окружной деформации (24) равносильно умножению ее на $(1 - \sigma^2)$. Окончательно получим, что растяжимость *закрепленной* трубы уменьшается до

$$D = 2a_0 (1 - \sigma^2)/(hE). \qquad (30)$$

Формулы (25) и (30) описывают волновые движения, существенно различные по механизму их распространения, хотя разница между вкладами растяжимости в выражение (10), определяющее $\rho_0^{-1} c^{-2}$, для этих двух случаев не очень велика и обусловлена множителем $(1 - \sigma^2)$.

Сжимаемость K для воды равна $5 \cdot 10^{-5}$ бар$^{-1}$(где 1 бар $= 10^5$ Н/м^2 — нормальное атмосферное давление), и это намного больше, чем растяжимость большинства металлических труб, для которых отношение диаметра к толщине стенки $2a_0/h$ едва ли может в (25) и (30) уравновесить влияние очень малого коэффициента податливости E^{-1}, имеющего порядок 10^{-6} бар$^{-1}$. Распространение по водопроводным сетям гидравлического удара (больших флуктуаций давления, вызванных быстрым закрытием крана) происходит, следовательно, со скоростями, близкими к скорости звука в воде (1400 м/с).

Напротив, скорость продольных волн может упасть существенно ниже этой величины для водопроводных труб, сделанных из более растяжимых материалов, например из пластмассы. Весьма крайний случай этой ситуации представлен эластомерами (вроде вулканизированной резины) с коэффициентами податливости E^{-1} порядка 10^{-1} бар$^{-1}$. Далее, если растяжимость D больше, скажем, еще на один порядок, то сжимаемостью K в выражении (10) можно совсем пренебречь и предсказываемая скорость волны будет всего лишь порядка 10 м/с.

Артерии млекопитающих обладают подобной растяжимостью (порядка 1 бар$^{-1}$), что соответствует увеличению площади просвета сосуда на 10% при изменениях давления порядка 10^{-1} бар, обнаруженному при нормальных физиологических условиях. Сложная композитная структура артериальной стенки включает волокна эластомера эластина, который допускает растяжения такого порядка при умеренных изменениях давления, а также образования (состоящие из более жестких

волокон коллагена и волокон гладкой мускулатуры), которые при более высоких давлениях существенно ограничивают прирост площади, вызванный изменением давления. На распространение сильных пульсовых волн подобная нелинейность отклика площади на давление может подействовать способами, которые будут изучены в разд. 2.8; пока что обсуждается только линейная теория распространения пульсаций.

Мягкие ткани, окружающие артерию, столь податливы, что внешнее давление непосредственно у артериальной стенки пренебрежимо мало откликается на пульсации, как и предполагалось при выводе окружного напряжения (23). Однако вероятно, что эти ткани ответственны за фиксацию артерии по отношению к продольным смещениям; в таком случае для вычисления D нужно применять выражение (30), где коэффициент Пуассона σ берется лишь немного меньше 0,5 — величины, характерной для материалов, податливость которых гораздо больше их сжимаемости; отношения толщины стенки к диаметру трубы лежат в диапазоне от 0,06 до 0,10.

Измерения скорости пульсовой волны в артериях лучше всего проводить, замеряя время прохождения искусственно вызванного резкого перепада давления, хорошо отличимого от *естественных* флуктуаций давления, содержащих (см. разд. 2.4) наряду с непосредственно проходящими волнами также некоторые отраженные волны. Сравнение с прямыми измерениями растяжимости D подтверждает справедливость приближенной формы выражения (10)

$$c = (\rho_0 D)^{-1/2}, \tag{31}$$

а измерения D и E в одинаковых условиях в целом согласуются с формулой (30), хотя их точность недостаточна для предпочтения этой формулы формуле (25). В аорте (главной артерии) крупных млекопитающих скорость волны может принимать столь низкое значение, как 5 м/с; в менее растяжимых периферических артериях она возрастает до приблизительно 10 м/с. Максимальная скорость движения *крови* значительно ниже, около 1 м/с.

Этот раздел, посвященный некоторым примерам, следует, вероятно, закончить простым напоминанием о том, что к одномерным волнам в трубах или каналах относятся *не только* те длинные волны в открытых каналах или эластичных трубах, которые здесь обсуждались довольно пространно, но также чрезвычайно важный случай обычных звуковых волн в абстрактно определенных «трубках лучей» или в реальных трубах с *пренебрежимо малой* растяжимостью.

2.3. Передача волн через сочленения

Влияние непостоянства свойств трубы (канала) или жидкости на одномерные волны будет изучено здесь в очень простом случае единственного и резкого разрыва в свойствах, что послужит введением в исследование разнообразных более сложных случаев, рассмотренных в следующих трех разделах. Мы проанализируем, что произойдет с бегущей одномерной волной (11), когда она достигнет сочленения, где труба (или канал), вдоль которой она бежит, соединяется с другой трубой (или каналом), обладающей иными свойствами и, возможно, содержащей другую жидкость.

Рис. 20 иллюстрирует разнообразие таких сочленений, соединяющих в каждом случае длинную трубу (или канал) № 1 с другой длинной трубой (или каналом) № 2. В случае *а* показано довольно резкое *расширение* трубы или канала, вызывающее изменение площади поперечного сечения от A_1 до A_2. На вопрос, насколько внезапными должны быть такие изменения, чтобы была справедлива их трактовка как разрыва, будет найден ответ, что они должны быть *компактными* (протяженность области изменения очень мала по сравнению с характерной длиной волны). Напротив, случай *б* иллюстрирует сильное сужение; здесь предполагается, что оно происходит совершенно внезапно.

Сочленение открытых каналов с различной средней глубиной h показано в случае *в*: здесь изменяются не только площадь поперечного сечения, но и скорость волны (19), скажем, от значения c_1 до c_2. Это горизонтальное сочленение не является тем местом, где плотность жидкости ρ могла бы внезапно измениться, потому что тогда невозмущенное состояние перед приходом волн не находилось бы в гидростатическом равновесии. Однако случаи *г* и *д*, относящиеся к распространению волн по вертикальной или наклонной трубе за счет сжимаемости жидкости, эластичности трубы, или из-за обоих факторов вместе, предусматривают наличие в сочленении горизонтальной границы раздела между различными жидкостями (или, возможно, между одной и той же жидкостью с различными значениями удельной энтропии), плотности которых ρ_1 и ρ_2. Невозмущенное давление p_0 имеет тогда линейное гидростатическое распределение, и уравнение (1) описывает, как обычно, любое избыточное давление p_e, возникающее из-за наличия волны. Для того чтобы методы этого раздела были применимы, изменения в случаях *г* и *д* также должны происходить в пределах компактной области, а это для случая *д* означает, что угол наклона трубы не должен быть слишком мал.

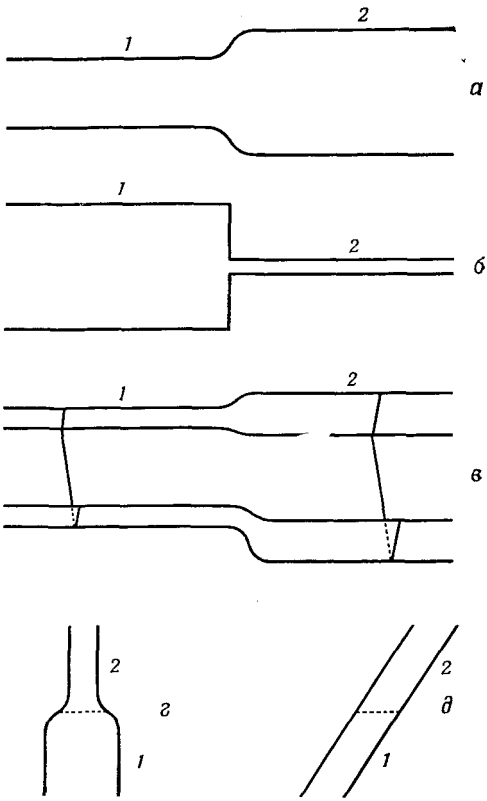

Рис. 20. Некоторые виды сочленений.
а — сравнительно быстрое расширение; *б* — скачкообразное сужение; *в* — одновременное изменение ширины и глубины канала; *г* — соединение, содержащее горизонтальную поверхность раздела (пунктирная линия) между различными жидкостями; *д* — наклоненная трубка с подобной поверхностью раздела, но без изменения поперечного сечения.

Прохождение волны через сочленение в самом общем случае зависит от шести параметров: A_1, ρ_1, c_1 и A_2, ρ_2, c_2 — площади поперечного сечения, плотности и скорости звука в трубах № 1 и 2 соответственно. Такую сложную зависимость от шести переменных (из которых можно образовать три независимых безразмерных переменных A_2/A_1, ρ_2/ρ_1, c_2/c_1) было бы трудно исследовать экспериментально, если бы не было следующих теоретических соображений, указывающих, что существенной является зависимость всего лишь от одной безразмерной переменной $(A_2/A_1)\,(\rho_2/\rho_1)^{-1}\,(c_2/c_1)^{-1}$.

Мы рассмотрим случай, когда сначала жидкость невозмущена везде в трубе № 2 *и* в трубе № 1 везде, кроме области, расположенной далеко слева от сочленения. Из этой области бегущая «падающая волна», заданная выражениями

$$p_e = f(t - x/c_1), \quad u = (\rho_1 c_1)^{-1} f(t - x/c_1) \tag{32}$$

(ср. (11) и (12)), приближается к сочленению, положение которого выбрано как $x = 0$, причем $x < 0$ в трубе № 1 и $x > 0$ в трубе № 2. Если $f(t) = 0$ для $t < 0$, то волна не достигает сочленения при $t < 0$ и жидкость в трубе № 2 остается невозмущенной, в то время как движения в трубе № 1 полностью описываются уравнениями (32).

Самое общее решение волнового уравнения для p_e в трубе № 1 есть

$$p_e = f(t - x/c_1) + g(t + x/c_1), \tag{33}$$

и можно ожидать, что после того, как волна достигнет сочленения, она содержит член $g(t + x/c_1)$, отвечающий возможному частичному *отражению* падающей волны у сочленения. Между тем, как только возмущение достигнет сочленения, в трубе № 2 может возникнуть бегущая волна

$$p_e = h(t - x/c_2) \tag{34}$$

с соответствующей скоростью распространения. С другой стороны, мы исключаем возможность появления в трубе № 2 каких-либо составляющих волны, зависящих от $t + x/c_2$, потому что такие составляющие будут представлять волны, бегущие в отрицательном x-направлении из области с большим положительным x, которая предполагается невозмущенной.

Очевидно, практически труба № 2 должна иметь некоторую конечную длину L. Это означает, что любая волна (34), бегущая в положительном x-направлении, может генерировать, когда она достигнет $x = L$, отраженную волну, бегущую в противоположном направлении. Однако при данном рассмотрении мы пренебрегаем этой волной, отраженной от дальнего конца трубы, *либо* потому, что мы ограничиваем анализ временем $t < 2L/c_2$, за которое волна не успеет вернуться и повлиять на условия у сочленения, *либо* потому, что мы предполагаем L настолько большим, что даже при том довольно малом коэффициенте ослабления волны, который может иметь место (разд. 1.13 и 2.7), волна, отраженная при $x = L$, станет пренебрежимо малой, дойдя до $x = 0$. Таким образом, мы рассматриваем только падающую волну f, волну g, отраженную от *сочленения*, и проходящую волну h.

Чтобы определить неизвестные функции g и h из известной (согласно предположению) функции f, требуется два уравне-

ния, из которых первое

$$f(t) + g(t) = h(t) \tag{35}$$

выражает необходимость непрерывности избыточного давления p_e, заданного формулой (33) для $x \leqslant 0$ и формулой (34) для $x \geqslant 0$. Тот факт, что изменение свойств около сочленения (если оно не происходит скачком при $x = 0$) происходит на расстоянии порядка l, удовлетворяющем условиям компактности

$$\omega l/c_1 \gg 1 \quad \text{и} \quad \omega l/c_2 \ll 1, \tag{36}$$

где ω — характерная частота, означает, что в любом из членов уравнений (33) и (34) в пределах l можно ожидать лишь небольших изменений; это наводит на мысль, что флуктуации давления также могут быть почти одинаковыми во всей области сочленения, и подтверждает условие непрерывности (35) (см. также (41) ниже).

Можно было бы предположить, что второе условие у сочленения должно состоять в непрерывности скорости жидкости u, величина которой

$$u = (\rho_1 c_1)^{-1} [f(t - x/c_1) - g(t + x/c_1)] \tag{37}$$

в трубе № 1 содержит член $(\rho_1 c_1)^{-1} p_e$ для каждого компонента волны *в направлении его распространения*; величина скорости в трубе № 2 аналогично равна

$$u = (\rho_2 c_2)^{-1} h(t - x/c_2). \tag{38}$$

Действительно, в случае, подобном показанному на рис. 20, *д*, *было бы* справедливо потребовать непрерывности при $x = 0$ скорости u, заданной формулами (37) для $x < 0$ и (38) для $x \geqslant 0$, так как скорость должна быть непрерывна при переходе через границу раздела двух жидкостей.

Тем не менее эти соображения становятся неверными в любом случае, когда происходит изменение площади поперечного сечения. Например, в случае *г* скорость действительно непрерывна при переходе через *границу* раздела, но скорость в середине области сужения больше, чем соответствующая скорость в широкой трубе, и меньше, чем соответствующая скорость в узкой трубе, где тот же самый объемный расход жидкости проходит через меньшее поперечное сечение. В общем случае, как и в вышеупомянутом, именно *объемный расход* Au непрерывен в сочленении; в основном потому, что в обеих жидкостях он меняется очень мало на рассматриваемом коротком расстоянии, а на самой поверхности раздела нет разрыва объемного расхода.

Строгая проверка этого утверждения требует оценки разности $A_1u_1 - A_2u_2$ между объемами жидкости, втекающей в область сочленения и вытекающей из нее в единицу времени. Запишем эту разность как интеграл по области сочленения

$$A_1u_1 - A_2u_2 = \int_V (K + D)\,(\partial p_e/\partial t)\,dV, \tag{39}$$

где V — объем жидкости в области сочленения, а $(K + D) \times (\partial p_e/\partial t)$ — относительная скорость его изменения за счет сжимаемости и растяжимости.

Используя выражение (10) для $K + D$ и принимая порядки $\partial p_e/\partial t$ и V равными соответственно $\omega(\rho_0 c)\,u$ и Al (где ρ_0, c, u и A — значения плотности, скорости звука, скорости жидкости и площади поперечного сечения в промежуточной точке), получим в качестве оценки правой части (39) величину $(\omega l/c)\,Au$, которой можно пренебречь по сравнению с каждым членом в левой части равенства (39) при условии компактности (36). Заметим, что аналогичные соображения приводят к получению из линеаризованного уравнения количества движения

$$\rho_0\,\partial u/\partial t = -\partial p_e/\partial x$$

выражения

$$p_{e1} - p_{e2} = \int_{-l/2}^{l/2} (\rho_0 \partial u/\partial t)\,dx. \tag{40}$$

Этот интеграл по длине сочленения l имеет порядок

$$\rho_0\,[\omega\,(\rho_0 c)^{-1} p_e]\,l = (\omega l/c)\,p_e, \tag{41}$$

что подтверждает корректность условия непрерывности давления.

Эти два условия отражают особую природу *жидкостей*, а именно их способность передавать *давление* неизменным от одного поперечного сечения к другому и подобным же образом, сохраняя *объемный расход*, изменять его структуру применительно к поперечному сечению с иной формой и размером. Волны в твердых телах подчиняются другим законам: продольные волны, бегущие вдоль металлического стержня, удовлетворяют при внезапном изменении поперечного сечения условиям непрерывности *силы* и *скорости*; например, полные продольные силы, приложенные к обеим сторонам малого элемента материала, расположенного в сочленении, должны эффективно уравновешивать друг друга, так как нет другой силы, чтобы сбалансировать их. Это соображение непригодно для жидко-

стей, потому что разность действующих на жидкость в сочленении продольных сил

$$p_{e1}A_1 - p_{e2}A_2,$$

уравновешена суммой реакций *стенки трубы* у ее сужения...

Из условия непрерывности объемного расхода Au при $x = 0$, который для $x < 0$ вычисляется по формуле (37) при $A = A_1$, а для $x > 0$ — по формуле (38) при $A = A_2$, следует, что

$$Y_1 [f(t) - g(t)] = Y_2 h(t), \tag{42}$$

где

$$Y_1 = A_1 (\rho_1 c_1)^{-1} \quad \text{и} \quad Y_2 = A_2 (\rho_2 c_2)^{-1} \tag{43}$$

— обозначения двух комплексов таких переменных, как площадь, плотность и скорость волн, которыми исчерпывается вхождение последних в условие (42). Так как (35) и (42), очевидно, определяют и отраженную волну g, и проходящую волну h, то этим подтверждается более раннее утверждение, что они зависят от указанных шести величин только в комбинации Y_2/Y_1.

Величины Y_1 и Y_2, важность которых показана этим анализом, называются *проводимостями* этих двух труб. Из уравнения (32) становится ясным, что для неискаженной бегущей волны

$$Y_1 = \text{Проводимость} = \frac{\text{Объемный расход в направлении распространения}}{\text{Избыточное давление}} \tag{44}$$

и из уравнений (34) и (38) следует та же самая физическая интерпретация для Y_2. Термин «проводимость» выбран по аналогии с электротехникой, где

$$\text{Проводимость} = \frac{\text{Ток}}{\text{Разность потенциалов}}. \tag{45}$$

В обеих упомянутых дисциплинах величина Y, называемая проводимостью, используется наряду с обратной ей величиной $Z = 1/Y$, называемой *сопротивлением*; позже будут выведены правила, позволяющие определить, в каких случаях одна из них более удобна для изучения волн в жидкости, чем другая.

Деление уравнения (42) на уравнение (35) дает

$$Y_1 \frac{f(t) - g(t)}{f(t) + g(t)} = Y_2 \tag{46}$$

— простое уравнение для отраженной волны g, решение которого есть

$$g(t)/f(t) = (Y_1 - Y_2)/(Y_1 + Y_2). \tag{47}$$

Это соотношение, согласно (35), означает, что

$$h(t)/f(t) = 2Y_1/(Y_1 + Y_2). \qquad (48)$$

В связи с этими результатами следует отметить первый особый случай: *если проводимости в точности согласованы* (т. е. хотя поперечные сечения, плотности, волновые скорости в двух трубах могут быть совершенно различны, их комбинации (43) равны одной и той же величине $Y_1 = Y_2$), *то отраженная волна отсутствует.* Тогда форма проходящей волны $h(t)$ идентична форме падающей волны $f(t)$. Это следует из того, что проводимость есть отношение объемного расхода к избыточному давлению в простой бегущей волне; соответственно простые бегущие волны в двух различных трубах могут сосуществовать, если проводимости труб равны, что делает *совместными* условия непрерывности для избыточного давления и для объемного расхода. «Согласование проводимостей» (называемое также «согласованием сопротивлений» при использовании обратных величин $Z_1 = 1/Y_1$ и $Z_2 = 1/Y_2$) является эффективным методом передачи волновой энергии из одной среды в другую без нежелательных отражений.

При наличии отраженной волны g того же знака, что и f, отношение объемного расхода к избыточному давлению при $x = 0$ в трубе № 1 уменьшается до величины

$$Y_1 \frac{f(t) - g(t)}{f(t) + g(t)}, \qquad (49)$$

которая представляет собой отношение левых частей (42) и (35). Это уменьшение вызвано тем, что отраженная волна увеличивает избыточное давление при $x = 0$ и в то же время уменьшает объемный расход в направлении распространения падающей волны на величину $Y_1 g(t)$. Из уравнения (46) следует, что для того, чтобы согласовать отношение (49) с проводимостью $Y_2 < Y_1$ в трубе № 2, необходимо *положительное* отражение (g должно быть того же знака, что и f). Крайний случай такой ситуации — это когда труба № 2 закрыта ($Y_2 = 0$), что требует $g = f$, т. е. происходит полное положительное отражение.

С другой стороны, если $Y_2 > Y_1$ (потому ли, что труба № 2 имеет большее поперечное сечение, более эластична или содержит более легкую жидкость), то уравнение (47) требует *отрицательного* отражения с $g/f < 0$. Крайний случай такой ситуации — это когда Y_2/Y_1 очень велико, например у открытого конца трубы (соединение между трубой и окружающей атмосферой), где объемный расход внутрь и наружу неограничен, но контакт с атмосферой делает избыточное давление очень

малым. (Это также можно представлять себе как сочленение открытого канала с большим резервуаром.) Тогда $g = -f$, т. е. имеет место полное отрицательное отражение.

В любой бегущей волне поток *энергии* очень просто связан с проводимостью. Скорость передачи энергии в направлении распространения есть *скорость*, умноженная на *силу*, равную площади поперечного сечения, умноженной на избыточное давление; другими словами, это объемный расход, умноженный на избыточное давление, что в свою очередь равно проводимости, умноженной на *квадрат* избыточного давления. Например, в падающей волне (32) скорость передачи энергии есть $Y_1 f^2 (t - x/c_1)$. Аналогично, в отраженной волне она равна $Y_1 g^2 (t + x/c_1)$, а в проходящей волне $Y_2 h^2 (t - x/c_2)$.

Сохранение энергии для сочленения $x = 0$ может быть легко проверено: отношение отраженного потока энергии к падающему равно

$$g^2(t)/f^2(t) = (Y_1 - Y_2)^2/(Y_1 + Y_2)^2, \tag{50}$$

а проходящего к падающему —

$$Y_2\, h^2(t)/(Y_1\, f^2(t)) = 4Y_1Y_2/(Y_1 + Y_2)^2. \tag{51}$$

Эти отношения являются неотрицательными числами, сумма которых равна 1, т. е. вся энергия, которая не отражается, проходит.

Заметим, что если проводимости согласованы лишь приблизительно (Y_2/Y_1 близко к 1, но не равно ей), то имеется все же почти идеальная передача энергии. Отношение энергий отраженной волны к падающей (50) в этом случае около $(1/4)\,(Y_2/Y_1 - 1)^2$, т. е. пропорционально *квадрату* ошибки согласования; этот результат используется далее в разд. 2.6.

Рассмотрим в заключение случай, когда труба № 2 хотя и не закрыта, однако Y_2 очень мало по сравнению с Y_1, как на рис. 20, *б*: понятно, что (согласно (47)) в этом случае величина g/f близка к 1 (значению этой величины для закрытой трубы, где $Y_2 = 0$), но (48) дает довольно удивительный результат, что h/f почти равно 2. Поскольку, согласно предположению, Y_2 мало, то поток энергии Y_2h^2 в трубе № 2 невелик; действительно, его отношение (51) к падающему потоку энергии всего лишь около 4 (Y_2/Y_1). Тем не менее амплитуда давления в проходящей волне приблизительно *в два раза больше*, чем в падающей волне; это имеет место, в сущности, потому, что на почти закрытом конце трубы № 1 происходит почти полное положительное отражение и, таким образом, создается почти удвоенная амплитуда давления, на что труба № 2 отвечает соответственно.

2.4. Распространение волн через разветвленные системы

Правила разд. 2.3, определяющие отраженную и проходящую волны, когда единственная волна падает на единственное сочленение, являются основными фактами, исходя из которых оказывается возможным рассчитать распространение волн вдоль трубы или канала, имеющих, скажем, *последовательность* таких сочленений, или даже (разд. 2.6) непрерывное распределение изменения свойств. Однако для разветвленных систем, подобных сердечно-сосудистой системе или реке с ее притоками, основные необходимые данные относятся не к сочленению *двух* различных труб или каналов, а к разветвлению, где встречается много труб или каналов. Необходимо знать, как такое разветвление (размеры которого опять же предполагаются компактными) прореагирует на падающую волну, достигнувшую его по одной из этих труб или каналов.

Чтобы проанализировать это, мы перенумеруем числами от 1 до N трубы или каналы, встречающиеся в таком разветвлении (показанном на рис. 21 для случая *разветвления на три части*, $N = 4$), и предположим, что в каждой из них первоначально отсутствуют какие-либо возмущения, кроме падающей волны (32), приближающейся к разветвлению по трубе № 1. После того как падающая волна достигнет разветвления, избыточное давление в этой трубе будет описываться общей формулой (33), включающей также отраженную волну. В остальных трубах, помеченных индексом n, изменяющимся от 2 до N, проходящая волна будет иметь вид

$$p_e = h\,(t - x/c_n), \tag{52}$$

как в (34), но, вообще говоря, с различными для разных труб скоростями волн c_n. Здесь $x \geqslant 0$ соответствует расстоянию, измеряемому от разветвления $x = 0$ вдоль любой трубы с $n > 1$, хотя в трубе № 1 мы выбираем $x \leqslant 0$ (как в разд. 2.3).

Отметим, что в (52) форма волны $h\,(t)$ одинакова для каждой трубы, потому что в разветвлении $x = 0$ давление должно быть непрерывным по причинам, сущность которых выражена уравнениями (40) и (41): значительное изменение давления при переходе через компактную область вызвало бы локальный поток жидкости, слишком большой по сравнению с локальными потоками в прилегающих трубах, что означало бы нарушение закона сохранения массы. Это условие непрерывности давления, так же как и прежде, приводит к уравнению (35).

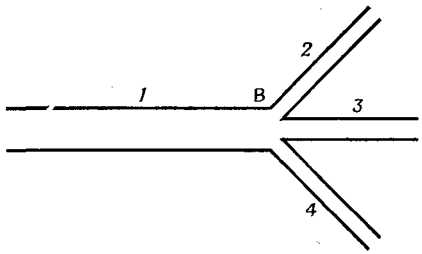

Рис. 21. Разветвление на три части.

Аналогичное требование непрерывности объемного расхода для разветвления дает, однако, не уравнение (42), а

$$Y_1 [f(t) - g(t)] = \left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right) h(t). \tag{53}$$

Левая часть, как и в (42), определяет объемный расход жидкости, вытекающей через сечение $x = 0$ из трубы № 1, где $x \leqslant 0$ и где отраженная волна, вообще говоря, существует. Правая часть представляет сумму объемных расходов жидкости, вытекающей из разветвления (в направлении увеличения x) вдоль каждой из труб, $n = 2, \ldots, N$. Здесь

$$Y_n = A_n (\rho_n c_n)^{-1} \tag{54}$$

(отношение объемного расхода к избыточному давлению в бегущей волне) является проводимостью n-й трубы.

Соответственно формы отраженной и проходящей волн $g(t)$ и $h(t)$ определяются уравнениями (35) и (53), точно так же, как уравнения (35) и (42) определяют их для простого сочленения, за исключением того, что проводимость Y_2 заменена теперь *суммой* $\sum_{n=2}^{N} Y_n$ *проводимостей* труб, отводящих проходящую волну. Отсюда следует, что все результаты разд. 2.3 для простых соединений могут быть применимы к разветвлениям при условии, что во всех них сделана замена Y_2 на $\sum_{n=2}^{N} Y_n$.

Например, решения (47) и (48) для $g(t)$ и $h(t)$ превращаются соответственно в

$$g(t)/f(t) = \left(Y_1 - \sum_{n=2}^{N} Y_n\right)\Big/\left(Y_1 + \sum_{n=2}^{N} Y_n\right) \tag{55}$$

и

$$h(t)/f(t) = 2Y_1/(Y_1 + \sum_{n=2}^{N} Y_n). \tag{56}$$

То же самое правило управляет отраженной и проходящей *энергией*, поскольку энергия, уносимая из $x = 0$ всеми проходящими волнами (52), представляется суммой

$$(\sum_{n=2}^{N} Y_n)\, h^2(t), \tag{57}$$

заменяющей $Y_2 h^2(t)$ из разд. 2.3. Следовательно, уравнения (50) и (51) снова позволяют определить, какая часть падающей энергии отражается и какая проходит, если Y_2 заменить на $\sum_{n=2}^{N} Y_n$, и снова согласуются с законом сохранения энергии.

Ценная особенность использования *проводимости* (54) (вместо, скажем, сопротивления $Z_n = 1/Y_n$) состоит в том, что трубы, *соединенные параллельно*, ведут себя точно так же, как одна труба с проводимостью, равной *сумме их проводимостей*. Это правило, выражающее тот факт, что объемные расходы таких труб складываются, а их избыточные давления одинаковы, упрощает рассмотрение передачи через разветвленные системы.

В сердечно-сосудистой системе важным разветвлением является *бифуркация аорты*, где аорта (главная артерия, выходящая из сердца), спустившись вниз к брюшной полости, разделяется на две подвздошные артерии. Поучительно рассмотреть, как на пульсовую волну, идущую от сердца, влияет встреча именно с этим разветвлением. Хотя такое рассмотрение игнорирует реальную сложность сердечно-сосудистой системы (для которой характерно большое число взаимодействующих ветвей и разнообразие их свойств), тем не менее его результаты показывают определенное сходство с наблюдаемым поведением в основном из-за важности той роли, которую играет это разветвление.

В данном случае $N = 3$ и сумма проводимостей Y_2 и Y_3 двух подвздошных артерий оказывается *меньше*, чем проводимость Y_1 самой аорты; частично это связано с тем, что сумма площадей их поперечных сечений заметно меньше (примерно на 20%, хотя это отношение варьируется в широких пределах для разных индивидуумов), а частично с тем, что аорта имеет большую растяжимость и, следовательно, более низкое значение скорости волны c, чем подвздошные и другие еще более периферийные артерии. Тогда из уравнения (55) следует наличие *положительного* отражения волны ($g/f > 0$).

Наблюдение флуктуаций давления в аорте согласуется с качественным заключением о положительной отраженной волне. Физиологическое значение возникающих в результате повышенных перепадов давления в относительно растяжимой аорте состоит в том, что они способствуют накоплению крови, выбрасываемой сердцем при каждом ударе, для обеспечения сравнительно постоянной периферийной циркуляции.

Выше, в грудной аорте, есть ряд сочленений совершенно другого типа, в каждом из которых две узкие *межреберные* артерии отводят из аорты небольшое количество крови, предназначенное для питания области, лежащей между двумя парами ребер. В этом случае $N = 4$, а проводимости Y_1 и Y_2 частей аорты, лежащих выше и ниже разветвления, по существу равны и очень велики по сравнению с проводимостями Y_3 и Y_4 межреберных артерий. Сумма в (56), следовательно, близка к Y_1, и соответственно имеет место почти полная передача пульсации. Этот результат, никоим образом не удивительный для непрерывной передачи вниз по аорте, заключает в себе нечто более интересное — флуктуации *давления*, распространяющиеся вдоль межреберных артерий, те же, что и в самой аорте.

В точности аналогичное рассмотрение применимо для длинной волны, которая распространяется вверх по устью реки, подходит к ее разветвлению или проходит в малые притоки. *Разветвление* вызывает положительное отражение, когда сумма проводимостей двух рек меньше, чем проводимость эстуария, который они образуют после слияния. (Для открытых каналов вообще, согласно (19) и (54), проводимость равна

$$Y = bh/(\rho(gh)^{1/2}) = bh^{1/2}/(\rho g^{1/2}), \tag{58}$$

т. е. пропорциональна ширине поверхности воды b и корню квадратному из средней глубины h.) Кроме того, по узким притокам, впадающим в эстуарий сбоку, проходят те же флуктуации уровня воды ($p_e/\rho g$), что и в любой длинной волне, распространяющейся вдоль эстуария.

В этом введении к прохождению волн через разветвленные системы мы будем избегать анализа сложных случаев, но сделаем следующий шаг после изучения одного разветвления и покажем, *как взаимодействуют два разветвления*, если расстояние между ними не предполагается компактным. Это приводит к качественно новым особенностям, тогда как множественные взаимодействия между ветвями в сложной системе лишь количественно увеличивают объем необходимых вычислений.

Рассмотрим (рис. 22) разветвление B, *в точности* подобное разветвлению на рис. 21, за исключением того, что труба № 1

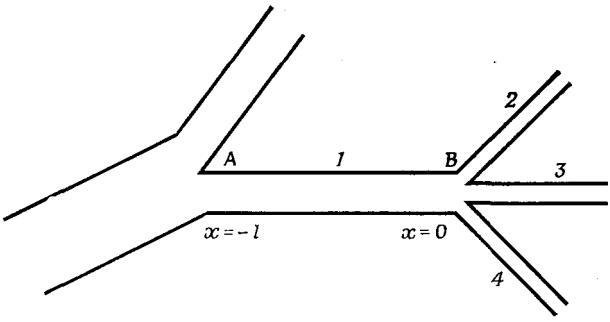

Рис. 22. Взаимодействия между разветвлением A (где $x = -l$) и развет влением B (где $x = 0$).

длиной l сама является одной из труб, получающих волны, проходящие через расположенное выше разветвление A. Отношение отраженной волны к падающей в разветвлении B (для которого $x = 0$, как и на рис. 21) по-прежнему определяется с помощью (55). Вычислим *эффективную проводимость* Y_1^{eff} трубы № 1 в разветвлении A (где $x = -l$). Она определяется как отношение объемного расхода $A_1 u$ к избыточному давлению p_e при $x = -l$. Принимая во внимание, как и в уравнениях (37) и (33), наличие волн *обоих* направлений в трубе № 1, получим

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1 \frac{f(t+l/c_1) - g(t-l/c_1)}{f(t+l/c_1) + g(t-l/c_1)}. \tag{59}$$

Если мы сможем вычислить раз и навсегда Y_1^{eff} — отношение объемного расхода в трубе № 1 к избыточному давлению в разветвлении A, полученное с учетом наличия второго разветвления B,— то исследование разветвления A можно будет проводить в точности по правилам, описывающим единственное разветвление, заменив Y_1 — проводимость трубы № 1 в A — на Y_1^{eff} при суммировании проводимостей всех труб, которые получают волны, проходящие через A.

Качественно новая особенность этой задачи — время запаздывания l/c_1 между приходом волн в A и B, которое в формуле (59) сдвигает f-волну (бегущую от A по направлению к B) и g-волну (бегущую от B по направлению к A) в противоположных направлениях. Это обстоятельство важно, потому что оно не позволяет непосредственно использовать уравнение (55), определяющее $g(t)/f(t)$, для вычисления (59).

Способ обойти эти трудности, общепринятый в исследованиях по распространению волн через разветвленные системы,— это фурье-анализ в классе комплексно-экспоненциальных вол-

новых форм, пропорциональных $e^{i\omega t}$. В рамках линейной теории, «вынуждающее воздействие», которое вызывает проходящие через систему волны (каково бы оно ни было), можно с помощью фурье-анализа представить в виде линейной комбинации членов вида $e^{i\omega t}$ с различными значениями ω, и если любая характеристика отклика системы может быть вычислена отдельно для каждого такого члена, то полный отклик должен быть *той же самой* линейной комбинацией этих отдельных откликов.

Например, *периодическое*, но не синусоидальное вынуждающее воздействие, подобное колебанию избыточного давления у аортальных клапанов (отделяющих сердце от аорты), разлагают в *ряд* Фурье, члены которого пропорциональны $e^{i\omega t}$, причем ω принимает значения, равные целому числу, умноженному на $2\pi/t_p$, где t_p — период. Апериодические вынуждающие воздействия представимы *интегралами* Фурье. Разложение избыточного давления у входа в устье содержит несколько членов вида $e^{i\omega t}$, где дискретные частоты соответствуют периодическим приливно-отливным силам астрономического происхождения, и апериодический член — интеграл Фурье, описывающий ветровой нагон (см. эпилог, часть 1).

Тот факт, что в рамках линейной теории компонента вынуждающего воздействия, пропорциональная $e^{i\omega t}$, вызывает повсюду в системе отклики, пропорциональные $e^{i\omega t}$, означает, что соответствующие значения $f(t)$ и $g(t)$ в уравнениях (55) и (59) сами пропорциональны $e^{i\omega t}$, что сразу дает

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1 \frac{\left(Y_1 + \sum_{n=2}^{N} Y_n\right) e^{i\omega l/c_1} - \left(Y_1 - \sum_{n=2}^{N} Y_n\right) e^{-i\omega l/c_1}}{\left(Y_1 + \sum_{n=2}^{N} Y_n\right) e^{i\omega l/c_1} + \left(Y_1 - \sum_{n=2}^{N} Y_n\right) e^{-i\omega l/c_1}}. \qquad (60)$$

Отражение и прохождение у разветвления A сигналов, пропорциональных $e^{i\omega t}$, можно, таким образом, вычислить с учетом наличия разветвления B, если в качестве эффективной проводимости трубы № 1 взять комплексное число (60), зависящее от ω.

Такое использование комплексных проводимостей, зависящих от частоты, вполне аналогично анализу электрических цепей переменного тока, где также принято результаты вычисления отклика обобщать с помощью фурье-анализа на произвольные вынуждающие воздействия.

Формула (60) для эффективной комплексной проводимости трубы № 1 у разветвления A при наличии разветвления B ста-

нет более удобной, если ее переписать в упрощенной форме:

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1 \frac{\left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right) + iY_1 \operatorname{tg}(\omega l/c_1)}{Y_1 + i\left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right) \operatorname{tg}(\omega l/c_1)}. \qquad (61)$$

Хотя в разд. 2.7 будет дана модификация формул (60) и (61), учитывающая *ослабление* волны (путем задания мнимой части ω/c_1), тем не менее простая формула (61) выявляет много важных свойств взаимодействия, когда l не очень велико.

Если l настолько мало, что выполняется условие компактности ($\omega l/c_1 \ll 1$), то равенство (61) вырождается в

$$Y_1^{\text{eff}} = \sum_{n=2}^{N} Y_n; \qquad (62)$$

это означает, что свойства короткой трубы $N = 1$ становятся несущественными: она просто является областью, где давление всюду одинаково, и которая функционирует в качестве части компактного разветвления А, осуществляющей доступ к трубам 2, . . ., N. Интересно отметить, что аналогичная «прозрачность» по отношению к распространению волны демонстрируется формулой (61) также и тогда, когда $\omega l/c_1$ приблизительно равно π: труба АВ, длина которой l составляет около половины длины волны, «передает» волну к разветвлению В с фазой, измененной на π, но во всем остальном так, как если бы этой трубы не было. Значения l, кратные полудлине волны, также обладают этим свойством «прозрачности», хотя в этом случае оно в довольно значительной степени видоизменяется влиянием ослабления.

Промежуточной между «прозрачными» значениями $\omega l/c_1$ (*около* 0 и *около* π) является область значений *около* $\pi/2$, когда труба № 1 имеет длину около *четверти длины волны* и характеристики ее проводимости являются *особенными*, так как тогда

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1^2 / \left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right). \qquad (63)$$

Так, если Y_1 *больше* $\sum_{n=2}^{N} Y_n$, то Y_1^{eff} также больше Y_1, если же Y_1 *меньше* $\sum_{n=2}^{N} Y_n$, то и Y_1^{eff} меньше Y_1.

По отношению к характерной основной частоте сердечного ритма длина аорты у здоровых людей равна примерно четверти длины волны. Таким образом, для этих частот эффективная про-

водимость аорты у аортального клапана *увеличена*, что является физиологически важным фактором, так как позволяет умеренным флуктуациям избыточного давления, создаваемым сердцем, порождать первую фурье-компоненту флуктуаций объемного расхода через клапан. Для некоторых фурье-компонент более высокого порядка длины волн могут быть достаточно малы, чтобы длина *подвздошных* артерий примерно равнялась четверти длины таких волн; это усиливает влияние уменьшенной проводимости подвздошных артерий, способствуя формированию положительного отражения от подвздошной бифуркации. Оказывается, что общий анализ распространения волн, подобный намеченному в этом разделе, но с учетом многократных взаимодействий между разветвлениями, существенно проясняет свойства сердечно-сосудистой системы.

2.5. Полости, сужения, резонаторы

Распространение волн по разветвленной системе можно, как мы видели, удобно описать, если представить себе произвольную волну разложенной на компоненты, пропорциональные $e^{i\omega t}$, и использовать *комплексную проводимость* Y, *зависящую от* ω, для определения отклика любой части системы на такие компоненты. Общая формула, которая, если пренебречь ослаблением волны, имеет вид (61), связывает эффективную проводимость у предыдущего разветвления с проводимостями у последующего разветвления. Многократное применение этой формулы в обратном порядке, начиная от наиболее отдаленных разветвлений и кончая самым первым, позволяет охарактеризовать свойства всей системы; подобным образом цепи переменного тока изучаются с помощью суммирования (в соответствии с законами Кирхгофа) зависящих от частоты комплексных проводимостей (или сопротивлений) «сосредоточенных элементов» сети. Эта аналогия вызывает вопрос, могут ли для одномерных волн в жидкости существовать какие-либо сосредоточенные элементы с чисто мнимой проводимостью, подобные таким обычным элементам электрической цепи, как емкости и индуктивности. В этом разделе мы найдем их близкие аналоги, укажем, как можно проанализировать системы с такими элементами, и исследуем условия резонанса, в некоторых случаях аналогичные условиям «колебательного контура».

Однако прежде всего мы укажем, как полученное в разд. 2.3 правило вычисления потока энергии в виде проводимости, умноженной на квадрат избыточного давления, должно быть изменено, когда проводимости комплексные. Конечно, любое

комплексное выражение, подобное $p_1 e^{i\omega t}$ или $Y p_1 e^{i\omega t}$ для избыточного давления или связанного с ним объемного расхода, означает, что следует взять *действительную часть*, а именно

$$\frac{1}{2}(p_1 e^{i\omega t} + \bar{p}_1 e^{-i\omega t}) \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}(Y p_1 e^{i\omega t} + \bar{Y}\bar{p}_1 e^{-i\omega t}) \tag{64}$$

соответственно, где черта обозначает комплексное сопряжение. Поток энергии, т. е. произведение двух выражений в (64), включает независимый от времени член

$$\frac{1}{4}(Y + \bar{Y})\, p_1 \bar{p}_1 = (\mathscr{R}Y)\left\{\frac{1}{2}|\, p_1|^2\right\} \tag{65}$$

(где $\mathscr{R}$ обозначает действительную часть), который является его *средним* значением, потому что оставшаяся часть выражения для потока энергии осциллирует с частотой 2ω. Вычисляя аналогично среднее от квадрата избыточного давления, равное величине в фигурных скобках в (65), мы выводим видоизмененное правило:

$$\frac{\text{Средний поток энергии}}{\text{Среднее квадрата избыточного давления}} = \mathscr{R}Y; \tag{66}$$

таким образом, только *действительная часть* $\mathscr{R}Y$ комплексной проводимости связана с любой усредненной передачей энергии.

В теории электричества емкость C определяется как заряд, накапливаемый системой при увеличении потенциала на единицу. Флуктуация потенциала $V_1 e^{i\omega t}$ вызывает флуктуацию накапливаемого заряда $CV_1 e^{i\omega t}$ и соответствующего тока (скорости изменения заряда) $Ci\omega V_1 e^{i\omega t}$, откуда следует, что проводимость $Y = Ci\omega$.

Аналогично в системах, проводящих одномерные волны, *полость* могла бы принять дополнительную жидкость, когда давление возрастает. Если полость компактна, так что изменения давления повсюду в полости находятся в фазе, то ее емкость C может быть определена как объем избыточной жидкости, которую она принимает при увеличении давления на единицу. Тогда флуктуация давления $p_1 e^{i\omega t}$ приводит к объемному потоку в полость $d\,(Cp_1 e^{i\omega t})/dt$, что дает проводимость

$$Y = Ci\omega. \tag{67}$$

Отметим, что действительная часть (66) этой проводимости Y равна нулю: избыточное давление и объемный расход жидкости, втекающей в полость, смещены на 90° по фазе, так что средний поток энергии в полость равен нулю и средняя энергия в этой полости сохраняется неизменной, если, конечно, пренебречь диссипацией.

Если V — объем жидкости, заполняющей полость в невозмущенном состоянии, то C/V представляет собой относительное увеличение количества жидкости в полости на единицу увеличения давления. Как и в уравнении (10), эту величину можно записать как сумму сжимаемости жидкости K и растяжимости *полости* D

$$C/V = K + D. \tag{68}$$

Только последнее слагаемое увеличивает фактический объем полости (на величину DV на единицу увеличения давления); но сжимаемость уменьшает объем, занимаемый уже содержащейся в полости жидкостью (на величину KV на единицу увеличения давления), что также позволяет принять дополнительную жидкость.

Другая формула для емкости полости

$$C = V\rho_0^{-1}c^{-2} \tag{69}$$

подсказывается уравнением (10), хотя оно, строго говоря, имеет смысл только для труб. Мы допускаем полости самой произвольной формы; тогда уравнение (69) будет справедливо, только если c понимать как скорость волны в *трубе*, имеющей ту же растяжимость D и содержащей жидкость с той же сжимаемостью K и невозмущенной плотностью ρ_0. В частности, формула (69) справедлива для звуковых волн в жестких полостях (при этом c равна скорости звука) или для длинных волн на поверхности воды в резервуаре (где c^2/g равно средней глубине h) при условии, что все полости компактны. Отметим также, что если на самом деле полость является трубой AB с закрытым концом B, то формула (69) может быть получена иным путем из (61). Считая проводимость $\sum_{n=2}^{N} Y_n$ в B нулем, а $\omega l/c_1$ — малой величиной, получим эффективную проводимость в A в виде

$$iY_1 \operatorname{tg}(\omega l/c_1) \approx i\,(A_1/(\rho_1 c_1))\,(\omega l/c_1) = Ci\omega, \tag{70}$$

где C принимает вид (69), если в качестве V взять объем трубы $A_1 l$.

Рассмотрим более общий случай. Пусть на рис. 22 (где AB по-прежнему компактна) проводимость $\sum_{n=2}^{N} Y_n$ в B не совсем нуль, как для закрытого конца, однако *достаточно мала* по сравнению с Y_1, чтобы пренебречь вторым членом в знаменателе (61) как произведением малых величин. Тогда

$$Y_1^{\text{eff}} = \sum_{n=2}^{N} Y_n + Ci\omega, \tag{71}$$

в точности так, как если бы труба № 1 действовала аналогично полости с проводимостью $Ci\omega$, подсоединенной *параллельно* с трубами № 2, . . ., N. Действительно, компактная полость *любой* формы, непосредственно предшествующая разветвлению, действует как дополнительная проводимость $Ci\omega$, подсоединенная параллельно, и, следовательно, она прибавляется к проводимостям труб, образующих разветвление, потому что флуктуации давления находятся в фазе по всей полости, в то время как объем дополнительной жидкости, втекающей в полость, есть сумма соответствующих объемов жидкости, накапливаемой в полости и той, которую проводят ветви.

Атеросклероз — болезнь, при которой аорта становится менее растяжимой и поэтому может вместить объем крови, выталкиваемый при каждом ударе, только если сердцем создается значительно более высокое давление. В этом случае нагрузка на сердце может быть уменьшена с помощью протеза, который эффективно добавляет параллельно к аорте, имеющей чрезвычайно низкую проводимость, полость с большой мнимой проводимостью $Ci\omega$; например (если это иммунологически приемлемо), с помощью наполненного газом баллона, помещенного в грудном отделе аорты, который освобождает место для значительного избытка крови, сплющиваясь при увеличении давления.

Уравнение (61) может быть полезным также в противоположном случае, когда AB — труба (не обязательно компактная), заканчивающаяся в B компактной выпуклой полостью (где, следовательно, $\sum_{n=2}^{N} Y_n = Ci\omega$); тогда эффективная проводимость в A дается формулой

$$Y_1^{\text{eff}} = iY_1 \frac{\operatorname{tg}(\omega l/c_1) + (C\omega/Y_1)}{1 - (C\omega/Y_1)\operatorname{tg}(\omega l/c_1)} = iY_1 \operatorname{tg}\left[\frac{\omega}{c_1}(l + l_0)\right], \qquad (72)$$

где

$$l_0 = (c_1/\omega) \operatorname{arc\,tg}(C\omega/Y_1). \qquad (73)$$

В выражении (72) Y_1^{eff} приравнено к значению, которое соответствует проводимости прямой трубы с увеличенной длиной $l + l_0$ и *закрытым* концом; значит, добавление полости равносильно увеличению длины трубы на l_0.

«Эффективная длина» l_0 *не* обязана удовлетворять условию компактности, даже когда для самой полости оно выполняется; например, если значения ρ и c в полости равны значениям ρ_1 и c_1, которые они имеют в трубе, то величина $C\omega/Y_1$ в (73) есть

$$(V\omega/(\rho_1 c_1^2))/(A_1/(\rho_1 c_1)) = (\omega/c_1)(V/A_1), \qquad (74)$$

что не обязательно мало, поскольку шарообразная полость объема V может быть компактна и без компактности отношения V/A_1 ее объема к площади поперечного сечения трубы. Действие полости равносильно изменению фазы отраженного сигнала, который, согласно (47), принимает вид

$$g(t) = f(t)\,(Y_1 - Ci\omega)/(Y_1 + Ci\omega), \tag{75}$$

и, стало быть, его можно записать как

$$g(t) = f(t)\exp(-2i\omega l_0/c_1), \tag{76}$$

где l_0 дается выражением (73). Такая форма записи соответствует положительному отражению без изменения амплитуды (и, следовательно, несущему в обратном направлении весь поток энергии), но с *задержкой* на время $2l_0/c_1$, т. е. на время, необходимое волне, чтобы пройти по трубе дополнительное расстояние l_0 и вернуться назад.

Электрические воздействия, во многом противоположные воздействиям емкости, вызываются сосредоточенным элементом, представляющим собой *индуктивность* L, определяемую как магнитный поток через контур, деленный на единичный ток в нем. Ток, изменяющийся как $j_1e^{i\omega t}$, вызывает изменяющийся магнитный поток $Lj_1e^{i\omega t}$ и, следовательно, по закону Фарадея, избыточный потенциал, равный скорости изменения магнитного потока $Li\omega j_1e^{i\omega t}$, что дает чисто мнимую проводимость $(Li\omega)^{-1}$ с *отрицательной* мнимой частью, *обратно* пропорциональной ω.

Аналогично, для одномерных волн узкое отверстие или *сужение* трубы требует избыточных давлений, необходимых для создания ускорений, если объемный расход через сужение предполагается флуктуирующим. Рис. 23, *а* иллюстрирует компактное сужение AB: его индуктивность L может быть определена как невозмущенная плотность ρ_0, умноженная на разность $\varphi_B - \varphi_A$ потенциалов скорости в A и B и деленная на объемный расход от A к B. Если этот объемный расход флуктуирует как $J_1e^{i\omega t}$, то

$$\rho_0(\varphi_B - \varphi_A) = LJ_1e^{i\omega t} \text{ и, следовательно, } p_A - p_B = Li\omega J_1e^{i\omega t}; \tag{77}$$

отсюда проводимость равна

$$(Li\omega)^{-1}. \tag{78}$$

Компактность сужения обеспечивает непрерывность объемного расхода через него, согласно уравнению (39) и следующим за ним рассуждениям, убедительность которых в данном случае даже увеличивается, потому что в *суженном* сочленении длины l

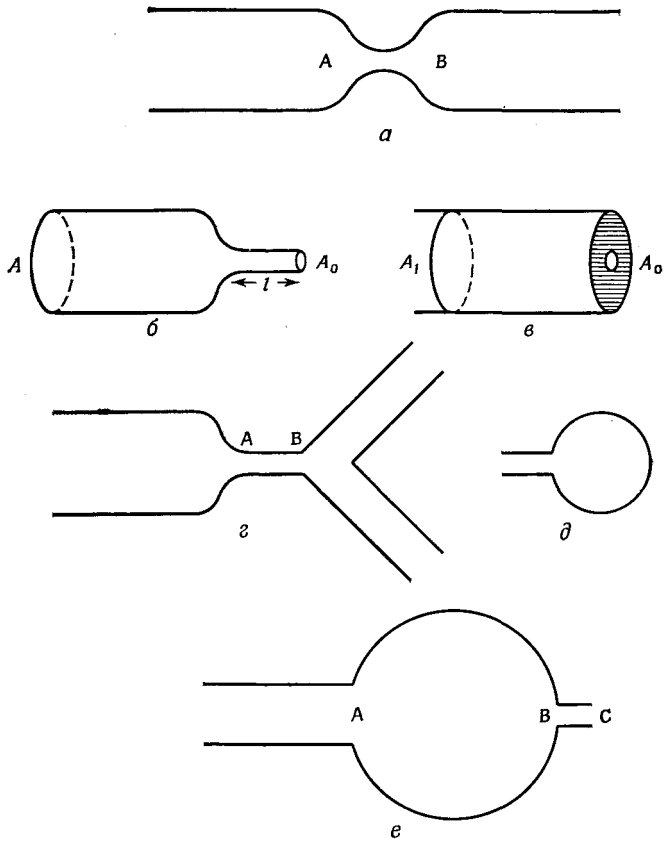

Рис. 23. Некоторые виды сужений:
а — очень короткое сужение, соединяющее две трубы; *б* — более длинное сужение, соединяющее трубу с атмосферой; *в* — маленькое отверстие в закрытом конце трубы; *г* — сужение, ведущее к разветвлению *B*; *д* — резонатор Гельмгольца (сужение, открывающееся в полость); *е* — сужение, соединяющее с атмосферой полость, расположенную на конце длинной трубы.

объем жидкости V меньше Al, если A — характерная площадь поперечного сечения вне этого сочленения. Таким образом, внутри компактного сужения имеется фактически несжимаемое течение с потенциалом скорости φ. Однако локальное уменьшение площади поперечного сечения увеличивает *ускорения*, что требует значительных изменений давления, даже несмотря на то, что сужение компактно. Таким образом, эта ситуация

противоположна ситуации с расширением в виде компактной полости, когда давление непрерывно, а объемный расход через полость терпит разрыв.

Особенно простым сужением является узкая труба (или канал) небольшой длины l с постоянной уменьшенной площадью поперечного сечения A_0, соединяющая некоторую более широкую трубу с внешней атмосферой или большим резервуаром (рис. 23, *б*). В сужении скорость на единицу объемного расхода есть $1/A_0$, что предполагает разность потенциалов от A к B приблизительно равной l/A_0 и, таким образом, дает

$$L \approx \rho_0 l/A_0. \tag{79}$$

Это приближенное значение может быть получено также при рассмотрении выражения (61) для эффективной проводимости в A трубы длины l в предельном случае, когда полная проводимость $\sum_{n=2}^{N} Y_n$ в B очень велика (как для большого резервуара), а $\omega l/c_1$ мало. Тогда

$$Y_1^{\text{eff}} \approx Y_1 [i \operatorname{tg} (\omega l/c_1)]^{-1} \approx (A_1/(\rho_1 c_1)) (i\omega l/c_1)^{-1} = (Li\omega)^{-1}, \tag{80}$$

где $L = \rho_1 l/A_1$ в соответствии с (79).

При более точном рассмотрении учитывается также, как изменяется φ в сливающихся течениях перед входом в область сужения и после выхода из нее. Для этого необходимо численное интегрирование уравнения Лапласа с учетом фактической геометрии слияний, но во многих случаях поправка с точностью до одной значащей цифры дается выражением

$$L = \rho_1 (l + 0{,}8A_0^{1/2})/A_0, \tag{81}$$

что может служить приближенным значением для сужений, длина которых *мала* по сравнению с характерным поперечным размером $A_0^{1/2}$, как на рис. 23, *в*.

На рис. 23, *г* показано сужение AB постоянного сечения, которое является компактным, но достаточно длинным, чтобы поправка (81) была важной. Сужение приводит к *разветвлению* B, где полная проводимость $\sum_{n=2}^{N} Y_n$ хотя и не бесконечна, но достаточно велика по сравнению с проводимостью Y_1 трубы AB, чтобы пренебречь вторым членом в числителе (61) как произведением малых величин. Это дает

$$(Y_1^{\text{eff}})^{-1} = \Big(\sum_{n=2}^{N} Y_n\Big)^{-1} + Li\omega. \tag{82}$$

В этой формуле впервые встречается закон такого типа, который в электрических цепях характеризует последовательное соединение сосредоточенных элементов и при котором суммируются *сопротивления* (величина, обратная проводимости, $Z = Y^{-1}$; здесь — избыточное давление, отнесенное к объемному расходу). Действительно, компактное сужение любой формы, непосредственно предшествующее разветвлению (или отдельной трубе, как на рис. 23, *а*), должно удовлетворять этому закону (82), так как объемный расход принимает в А то же значение, что и в В, а избыточное давление в А есть сумма избыточного давления в В и разности давлений $p_A - p_B$ при переходе через сужение.

Специальный случай (рис. 23, *д*) возникает, когда дальний конец В сужения является полостью с емкостью C, так что уравнение (82) принимает вид

$$(Y_1^{\text{eff}})^{-1} = (Ci\omega)^{-1} + Li\omega. \tag{83}$$

Тогда на некоторой *резонансной частоте* $\omega = \omega_0$ (определяемой той же формулой

$$\omega_0 = (LC)^{-1/2}, \tag{84}$$

что и для электрического колебательного контура) эффективное сопротивление (83) в А падает до нуля, а проводимость Y_1^{eff} оказывается бесконечной. Это означает резонанс в том смысле, что синусоидальные колебания с частотой ω_0, приводящие к большим объемным расходам жидкости, втекающей и вытекающей из полости (через сужение), могут быть вызваны чрезвычайно малыми колебаниями давления вне полости.

Конечно, много других систем действуют как резонаторы в этом смысле; например, как показывает (63), труба длиной в четверть длины волны с закрытым дальним концом ($\sum_{n=2}^{N} Y_n = 0$) имеет бесконечную проводимость, но она не компактна и резонирует на все частоты, равные произведению нечетного числа на основную частоту. Система на рис. 23, *д*, называемая резонатором Гельмгольца, обладает особыми свойствами; она эффективно резонирует только на одной частоте ω_0 и является вполне *компактной*; действительно, уравнения (69) и (81) показывают, что ее размер меньше c/ω_0 и отличается от этой величины множителем порядка корня квадратного из отношения размера полости к размеру сужения.

Можно полностью предотвратить вход волн с частотой ω_0 в какую-либо из труб, выходящих из некоторого разветвления, такого, например, как В на рис. 21, введением параллельно с этими трубами компактного резонатора Гельмгольца, так как

его бесконечная проводимость увеличит сумму ΣY_n в (56) до бесконечности и сведет проходящую волну $h(t)$ к нулю. Можно добиться того же эффекта в прямой трубе ABC с помощью резонатора Гельмгольца, сообщающегося с трубой в B; рассматривая B как разветвление, где энергия волны может или войти в резонатор, или пройти прямо в BC, или отразиться назад к A, мы видим из (55), что бесконечная полная проводимость в B вызовет полное отрицательное отражение. Проходящей в BC волны не будет, и колебания объемного расхода из AB будут полностью компенсированы потоками жидкости, втекающей и вытекающей из резонатора.

Противоположный эффект возникает, когда труба заканчивается (рис. 23, *е*) полостью AB, соединенной через сужение BC с атмосферой или с очень большим резервуаром. Уравнение (71) выражает тот факт, что проводимость полости $Ci\omega$ должна быть добавлена к проводимостям других элементов, которым она предшествует, что дает в этом случае

$$Y_1^{\text{eff}} = Ci\omega + (Li\omega)^{-1}. \tag{85}$$

Здесь именно *проводимость* Y_1^{eff} в A обращается в нуль при резонансной частоте, так что полость ведет себя подобно закрытому концу! Причина, по которой она может противостоять флуктуациям давления с частотой ω_0 у входа A, расположенного напротив сужения, без какого-либо потока в него, состоит просто в том, что полость при отсутствии такого отверстия может резонировать на этой частоте, т. е. могут возникнуть свободные колебания давления в полости с произвольной амплитудой, точно уравновешивающие потоки внутрь и наружу через сужение.

Аналогичное поведение обнаруживается, когда однородная труба или канал AB заканчивается сужением с индуктивностью L. Тогда уравнение (61) при $\sum_{n=2}^{N} Y_n = (Li\omega)^{-1}$ дает

$$Y_1^{\text{eff}} = iY_1 \frac{\operatorname{tg}(\omega l/c_1) - (L\omega Y_1)^{-1}}{1 + (L\omega Y_1)^{-1} \operatorname{tg}(\omega l/c_1)} = iY_1 \operatorname{tg}\left[\frac{\omega}{c_1}(l - l_1)\right], \tag{86}$$

где

$$l_1 = (c_1/\omega)\ \operatorname{arcctg}(L\omega Y_1). \tag{87}$$

В противоположность уравнению (72) теперь эффективное сопротивление трубы AB такое же, как трубы *уменьшенной* длины $l - l_1$, оканчивающейся закрытым концом! Это по существу вызвано тем, что AB обладает замыкающей частью CB длины l_1, которая вместе с сужением в B образует резонатор, оказывающий сопротивление любому колебательному движению с частотой ω в сечении C.

2.6. Линейная теория распространения волн при постепенном изменении физических характеристик жидкости и поперечного сечения

В разделах 2.3—2.5 описана линейная теория распространения продольных волн в системах, состоящих из однородных отрезков наполненных жидкостью труб или каналов, разделенных компактными элементами: сочленениями, разветвлениями, полостями, сужениями. Все изменения свойств (как трубы или канала, так и невозмущенной жидкости) происходили на ограниченном пространстве, занимаемом этими компактными элементами, а не на значительно более протяженных отрезках труб между ними.

Напротив, в этом разделе описываются (по-прежнему в рамках линейной теории) эффекты *постепенного* изменения плотности и сжимаемости жидкости или площади поперечного сечения и растяжимости вдоль *некомпактного* участка трубы или канала. Показано, что распространение волн в них регулируется настолько простым правилом, что оно позволяет непосредственно обобщить ранее полученные результаты, вроде уравнения (61), на системы, в которых разветвления разделяют участки с постепенным изменением состава и поперечного сечения. Мы сначала поясним это простое правило рядом грубых эвристических доводов с помощью результатов разд. 2.3, касающихся сочленений, а затем посредством более тонкого анализа, основанного на уравнениях (3) и (4).

Эвристические доводы содержат грубое предположение о том, что участок трубы с постепенным изменением состава и поперечного сечения может вести себя как предельный случай аппроксимирующей «лестницы» (рис. 24), состоящей из множества коротких однородных отрезков, разделенных «ступенчатыми» компакт-

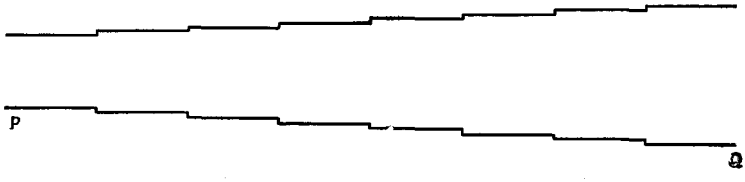

Рис. 24. Постепенно расширяющаяся труба PQ, аппроксимированная «лестницей» «ступенчатых» сочленений.

ными сочленениями, в каждом из которых отношение проводимостей Y_2/Y_1 близко к 1 и, следовательно, доля отраженной энергии (50) действительно очень мала. Переходя к пределу, мы получим, что энергия не отражается.

Этот предельный переход опирается на тот факт, что выражение (50) зависит от *квадрата* относительного изменения проводимости, т. е. квадрата $\delta Y/Y$ или $\delta(\ln Y)$. Действительно, доля отраженной энергии (50) всегда меньше

$$\frac{1}{4}(\ln Y_2 - \ln Y_1)^2, \tag{88}$$

что можно легко вывести, например, из теоремы о том, что среднее арифметическое превосходит среднее геометрическое. Если соответственно трубу PQ, где проводимость $Y = A/(\rho c)$ изменяется, скажем, монотонно от Y_P до Y_Q, аппроксимировать с помощью n труб неодинаковой длины, в каждой из которых $\ln Y$ претерпевает одно и то же малое изменение $n^{-1}(\ln Y_Q - \ln Y_P)$, то можно сказать, что доля потока энергии, которую волна, бегущая от P к Q, потеряет за счет отражения на любом сочленении, равна самое большее

$$\frac{1}{4}n^{-2}(\ln Y_Q - \ln Y_P)^2. \tag{89}$$

Это в свою очередь не больше, чем эта же доля (89) *начального* потока энергии, который втекает в трубу в P. Следовательно, отношение потока энергии в Q к потоку энергии в P по крайней мере не меньше

$$1 - \frac{1}{4}n^{-1}(\ln Y_Q - \ln Y_P)^2, \tag{90}$$

так как доля потерь при отражении на n сочленениях самое большее есть n, умноженное на (89), и так как любое дальнейшее отражение отраженной энергии может только увеличить это отношение.

Такую «лестницу» однородных участков трубы можно рассматривать как аппроксимацию, все более и более близкую к реальному непрерывному изменению значений $\ln Y$, когда $n \to \infty$; при этом отношение (90) стремится к 1. Исходя из этого предела, мы заключаем, что поток энергии от P передается с пренебрежимо малым отражением вдоль всего пути до Q. В случае трубы с постепенным изменением свойств общего вида мы сделаем подобное заключение о совершенной передаче потока волновой энергии для каждого ее участка с монотонным изменением Y и можем затем объединить полученные результаты, чтобы применить его к трубе в целом.

Эти грубые эвристические рассуждения приводят наконец к картине, согласно которой волна бежит от P к Q (скажем, в положительном направлении x) со скоростью c, меняющейся постепенно по x, но с *постоянным* потоком энергии, т. е. с постоянным Yp_e^2 — произведением проводимости на квадрат избыточного давления. Такая волна будет удовлетворять уравнению

$$p_e = [Y(x)/Y(0)]^{-1/2} f\left(t - \int_0^x c^{-1}\,dx\right), \tag{91}$$

где $f(t)$ — волновой профиль при $x = 0$ и $\int_0^x c^{-1}\,dx$ — время прохождения волны от 0 до x. Уравнение (91) обобщает уравнение (11), полученное для трубы или канала с однородными свойствами. Соответствующее выражение для волны, бегущей в отрицательном направлении x, будет

$$p_e = [Y(x)/Y(0)]^{-1/2} g\left(t + \int_0^x c^{-1}\,dx\right). \tag{92}$$

В обоих случаях объемный расход *в направлении распространения* будет равен $Y(x)\,p_e$.

Мы временно отложим более тонкие доводы в пользу высокой точности уравнения (91) для случаев, когда свойства меняются достаточно постепенно (смысл этого условия нуждается в уточнении), а пока что опишем следствия из него. Для длинных волн в заполненных водой каналах из (91) получим, что высота свободной поверхности $p_e/\rho g$ изменяется как $Y^{-1/2}$, где для поперечного сечения ширины b и средней глубины h, как и в (58),

$$Y = bh^{1/2}/\rho g^{1/2}. \tag{93}$$

Таким образом, при распространении волны вдоль канала с постепенным изменением b и h

$$\text{подъем уровня воды пропорционален } h^{-1/4}b^{-1/2}. \tag{94}$$

Этот результат известен более столетия как закон Грина.

Другой особый случай простого правила (91) — это один из принципов геометрической акустики: изменение амплитуды вдоль трубки лучей с постепенно меняющимся поперечным сечением определять исходя из постоянства потока энергии. Например, изменение амплитуды звука, излучаемого сферой достаточно большого радиуса a_0 в однородную невозмущенную жидкость, как было установлено в разд. 1.11, содержит мно-

житель a_0/r, что объясняется постоянством потока энергии вдоль трубки лучей, распределенного по площади поперечного сечения, увеличивающейся как r^2. Для других лучей (связанных, например, с другой формой тела) поток энергии на расстоянии x вдоль трубки лучей будет распределен по площади $A(x)$ с другим законом изменения, что приведет к изменению p_e, пропорциональному

$$[A(x)/A(0)]^{-1/2},$$

в соответствии с (91) для однородной невозмущенной жидкости.

Если свойства жидкости постепенно изменяются, то лучи снова могут оказаться другими; например, в гл. 4 будет показано, что изменения волновой скорости c вызывают рефракцию (преломление) лучей, так же как и в геометрической оптике, в сущности потому, что они изменяют условие стационарности фазы. С другой стороны, поток энергии вдоль трубки лучей, а именно произведение площади ее поперечного сечения A на акустическую интенсивность $I = p_e^2/\rho_0 c$, сохраняется постоянным тогда и только тогда, когда p_e изменяется как $(A/\rho_0 c)^{-1/2} = Y^{-1/2}$, опять как в (91). Эти соображения усиливают важность (91) как подходящего правила для определения распределения амплитуд во всех задачах геометрической акустики, как только лучевые трубки найдены.

В сердечно-сосудистой системе уравнение (91) применимо к распространению пульсовых волн по артериям, площадь поперечного сечения A и растяжимость D которых постепенно меняются. Вдоль аорты, например, как A, так и D постепенно *уменьшаются* с увеличением расстояния от сердца. Отсюда следует, что $Y = A/\rho_0 c$, принимающее, согласно уравнению (31), форму $A(D/\rho_0)^{1/2}$, также уменьшается, и, значит, амплитуда волны (91) *возрастет*, в данном случае пропорционально $A^{-1/2}D^{-1/4}$. Такое медленное увеличение амплитуды флуктуации давления вдоль аорты в действительности наблюдается с помощью катетера (тонкая трубка, присоединенная к датчику давления, введенная через периферийную артерию и продвинутая на известное расстояние по аорте).

Во всех *разветвленных* системах уравнение (61) для эффективной проводимости в A (где $x = -l$) трубы AB, в котором учтено отражение от разветвления B (где $x = 0$), может быть легко обобщено на случаи, когда свойства трубы постепенно меняются вдоль нее. В сущности это связано с тем, что один и тот же множитель $[Y(x)/Y(0)]^{-1/2}$ входит в формулу для прямой волны (91) и для отраженной волны (92), сокращаясь, следовательно, в выражении, подобном (59). Действительно, величина Y_1^{eff}, представляющая собой отношение объемного расхода

в А к избыточному давлению (причем последнее берется как сумма (91) и (92)), принимает вид

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1^{\text{A}} \frac{f(t+l/c_{\text{AB}}) - g(t-l/c_{\text{AB}})}{f(t+l/c_{\text{AB}}) + g(t-l/c_{\text{AB}})}, \tag{95}$$

где Y_1^{A} — проводимость $Y(-l)$ трубы АВ в точке А, а c_{AB} — средняя скорость волны вдоль АВ, определенная выражением

$$l/c_{\text{AB}} = \int_{-l}^{0} c^{-1}\, dx. \tag{96}$$

С другой стороны, уравнение (55), позволяющее найти отношение отраженной волны $g(t)$ к падающей волне $f(t)$ при $x = 0$ (разветвление В), применимо, если в этом уравнении вместо Y_1 взять проводимость $Y_1^{\text{B}} = Y(0)$ трубы АВ в В. Соответственно рассуждения, приводящие к уравнению (61), теперь дают немного измененное уравнение

$$Y_1^{\text{eff}} = Y_1^{\text{A}} \frac{\left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right) + iY_1^{\text{B}} \operatorname{tg}(\omega l/c_{\text{AB}})}{Y_1^{\text{B}} + i\left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right) \operatorname{tg}(\omega l/c_{\text{AB}})}, \tag{97}$$

которое можно столь же просто использовать для расчета свойств ветвящихся систем из труб с постепенно меняющимися свойствами, как уравнение (61) — для расчета систем из однородных труб. Например, прежнее условие резонанса (длина трубы равна четверти длины волны) превратится в условие $\omega l/c_{\text{AB}} = (1/2)\,\pi$, а резонансное значение эффективной проводимости в А (заменяющее (63)) будет даваться выражением $Y_1^{\text{A}} Y_1^{\text{B}} / \left(\sum_{n=2}^{N} Y_n\right)$.

Однако остается вопрос: насколько постепенно должны изменяться поперечное сечение и свойства жидкости, чтобы правило постоянства потока энергии (91) было хорошим приближением? Все приведенные выше примеры полезности этого правила показывают необходимость ответить на указанный вопрос. Однако использованные грубые рассуждения не слишком помогают это сделать; они лишь подсказывают, что изменения проводимости должны быть достаточно постепенными, чтобы их можно было рассматривать как последовательность очень малых изменений (возможно, они должны быть рассредоточены по некомпактной области, поскольку существенное изменение внутри компактной области, как было показано в разд. 2.2, предполагает непрерывность объемного расхода и избыточного давления, а не потока волновой энергии).

Мы должны вернуться назад, к полным уравнениям для продольных волн (2), (3) и (4), чтобы получить точный количественный ответ. Уравнение (2) напоминает нам, что при неоднородности свойств в отсутствие возмущений как ρ, так и A зависят, кроме p_e, также от других переменных (S и x соответственно). Однако уравнение (10) по-прежнему можно использовать для определения локальной скорости волны c, если считать, что оно означает следующее:

$$\rho_0^{-1}c^{-2} = K + D = [\rho^{-1}(\partial\rho/\partial p_e) + A^{-1}(\partial A/\partial p_e)]_{p_e=0}, \qquad (98)$$

где две частные производные вычислены при постоянных S и x соответственно. Величина $\rho_0(x)$ есть значение плотности ρ, когда $p_e = 0$ и S принимает свое локальное невозмущенное значение.

Теперь, так как продольные волны без диссипации удовлетворяют уравнению

$$\partial S/\partial t + u\,\partial S/\partial x = 0, \qquad (99)$$

выражающему сохранение энтропии для частицы жидкости, определение K (98) дает

$$\rho^{-1}(\partial\rho/\partial t + u\partial\rho/\partial x) = K\partial p_e/\partial t, \qquad (100)$$

где в линейной теории член $Ku\partial p_e/\partial t$ в правой части может быть опущен как *произведение* возмущений относительно состояния равновесия $u = 0$, $p_e = 0$. Дифференцируя площадь поперечного сечения A при постоянном x, получаем

$$A^{-1}\,\partial A/\partial t = D\,\partial p_e/\partial t. \qquad (101)$$

Следовательно, уравнение неразрывности (4), которое может быть записано как

$$\rho^{-1}(\partial\rho/\partial t + u\partial\rho/\partial x) + A^{-1}[\partial A/\partial t + \partial(Au)/\partial x] = 0, \qquad (102)$$

в линейной теории принимает вид

$$(K + D)\,\partial p_e/\partial t + A_0^{-1}\partial(A_0u)/\partial x = 0, \qquad (103)$$

что дает с помощью (98) уравнение

$$\partial p_e/\partial t = -\rho_0c^2A_0^{-1}\partial(A_0u)/\partial x = -cY^{-1}\,\partial J/\partial x, \qquad (104)$$

где $J = A_0u$ — линеаризованный объемный расход и $Y(x) = A_0/(\rho_0c)$ — проводимость. Но уравнение количества движения (3) в линеаризованной форме может быть записано как

$$\partial J/\partial t = -(A_0/\rho_0)\,\partial p_e/\partial x = -cY\,\partial p_e/\partial x. \qquad (105)$$

Исключая J из (104) и (105), получаем

$$\partial^2 p_e/\partial t^2 = cY^{-1}\,(\partial/\partial x)\,(cY\,\partial p_e/\partial x) \qquad (106)$$

— модифицированную форму уравнения (8), когда c и Y — функции x.

Это точное линейное уравнение (106) для продольных волн не имеет простого точного решения, однако степень неточности простого выражения вроде (91) может быть оценена через величину погрешности, с которой оно удовлетворяет (106). Результат подстановки (91) в правую часть (106) оказывается равным

$$[Y(x)/Y(0)]^{-1/2}\left\{\ddot{f}\left(t-\int_0^x c^{-1}\,dx\right)-\frac{1}{2}cY^{-1/2}(cY^{-1/2}Y')'\times\right.$$

$$\left.\times f\left(t-\int_0^x c^{-1}\,dx\right)\right\}, \qquad (107)$$

в то время как подстановка (91) в левую часть дает, очевидно, то же самое выражение, но в фигурных скобках сохраняется только первый член. Если ω^2 есть отношение характерных значений $\ddot{f}$ к f, то относительную ошибку (отношение второго члена к этому первому члену), расписав производную $(cY^{-1/2}Y')'$, можно оценить как

$$\frac{1}{2}\left[\frac{c'}{c}-\frac{1}{2}\frac{Y'}{Y}+\frac{Y''}{Y'}\right]\frac{Y'}{Y}\Big/\left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \qquad (108)$$

Если относительные скорости изменения c и Y, *а также* Y', которые входят здесь в квадратные скобки, *все* малы по сравнению с $\omega/c = 2\pi/\lambda$, то искомая ошибка будет малой величиной порядка квадрата этих относительных величин. Такое условие высокой точности обсуждаемого правила имеет тот же тип, что и ожидалось на основании рассмотренного в гл. 1 приближения геометрической акустики, которое является одним из случаев правила постоянства потока энергии. Однако важно отметить, что постепенности изменений поперечного сечения и состава (т. е. A_0, ρ_0, c и, следовательно, $Y = A_0/(\rho_0 c)$) недостаточно; эти изменения еще должны быть *гладкими* в том смысле, что производная Y' тоже меняется постепенно. С другой стороны, любая функция x, отличная от $Y^{-1/2}$, входящая в качестве множителя в (91), породила бы некоторый член с $\dot{f}$ в (107) и поэтому, вообще говоря, больший порядок ошибки.

Всякий раз, когда p_e задано согласно (91), уравнение (105) может быть решено для J точно, что дает

$$J = [Y(x)/Y(0)]^{-1/2}\left[Y(x) f\left(t - \int_0^x c^{-1}\,dx\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} cY'(x) f_1\left(t - \int_0^x c^{-1}\,dx\right)\right], \qquad (109)$$

где $df_1/dt = f(t)$. Поправка к грубому приближению $J = Yp_e$, включающая f_1, может быть, вообще говоря, существенной, так как ее относительный порядок больше, чем теоретическая погрешность (108). Она фактически дает зависящую от частоты мнимую часть локальной проводимости, так как когда $f(t)$ пропорционально $e^{i\omega t}$, отношение J/p_e становится равным

$$Y(x) - i\,[cY'(x)/2\omega]. \qquad (110)$$

Однако, как показывает уравнение (66), эта мнимая часть локальной эффективной проводимости не влияет на постоянство потока энергии.

Итак, при условиях, обеспечивающих высокую точность (91), к которым относится постепенность изменения Y', поток волновой энергии передается с хорошей точностью (что требуется, скажем, для рупора громкоговорителя). Напротив, *разрыв* производной $Y'(x)$ означает разрыв эффективной проводимости, что допускает *отражение* сигнала, которое можно рассчитать по формуле (47) из теории сочленений.

В другом предельном случае, когда изменения поперечного сечения и состава *компактны*, а соответствующие градиенты очень велики по сравнению с ω/c, производные по времени в левых частях уравнений (104) и (105) становятся пренебрежимо малыми. Это подтверждает предположение, что пространственные изменения как избыточного давления p_e, так и объемного расхода J невелики. Относительная ошибка, возникающая, если взять p_e не зависящим от x на длине l, может быть оценена из (106) как, самое большое, величина порядка

$$\omega^2 l^2 \max(c^{-1}Y)/\min(cY), \qquad (111)$$

которая близка к $(\omega l/c)^2$ — квадрату коэффициента компактности, за исключением областей, подобных сужениям (разд. 2.5), с большим отношением максимальной и минимальной площадей поперечных сечений.

Промежуточное поведение, когда $\omega l/c$ не мало и не велико, может быть проиллюстрировано точным решением (106) для специальных распределений $c(x)$ и $Y(x)$, дополняющим анало-

гичное рассмотрение специальных случаев в разд. 1.11. Рупор громкоговорителя *экспоненциального* типа удовлетворяет условиям

$$c = \text{const}, \quad Y = Y_1 e^{\alpha x} \tag{112}$$

и применяется, чтобы достичь изменения площади поперечного сечения настолько быстро, насколько это возможно без нарушения условия постоянства потока энергии, состоящего в малости (108). Для такого рупора уравнение (106) превращается в уравнение

$$\partial^2 p_e/\partial t^2 = c^2 (\partial^2 p_e/\partial x^2 + \alpha \partial p_e/\partial x). \tag{113}$$

Его решения, пропорциональные $e^{i\omega t}$, легко устанавливаются путем решения обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и независимой переменной x. Это приводит к выражению

$$p_e = p_1 \exp\left[i\omega t - i \left(\omega^2 c^{-2} - \frac{1}{4}\alpha^2 \right)^{1/2} x - \frac{1}{2}\alpha x \right] \tag{114}$$

для волны, распространяющейся в направлении возрастания x, в то время как уравнение (105) позволяет найти соответствующее решение для J, что дает

$$J/p_e = Y(x) [(1 - c^2\alpha^2/4\omega^2)^{1/2} - i (c\alpha/(2\omega))]. \tag{115}$$

Заметим, что характер этих решений меняется, когда $\omega < (1/2)\,\alpha c$ и квадратный корень становится мнимым.

Для высоких частот решение (114) отличается от решения (91), пропорционального $Y^{-1/2} \exp[i\omega (t - x/c)]$, как раз на ожидаемую в силу формулы (108) малую величину порядка $c^2\alpha^2/\omega^2$. Заметим, однако, что для этого рупора *амплитуда* вообще не проявляет отклонения от пропорциональности $Y^{-1/2}$, если только

$$\omega > \alpha c/2, \text{ т.е. } \alpha < 2\omega/c = 4\pi/\lambda. \tag{116}$$

Вернее, отклонение от (91) состоит в небольшом увеличении скорости движения гребня волны от c до $c\,(1 - c^2\alpha^2/(4\omega^2))^{-1/2}$; мы не будем задерживаться здесь на следствиях из этого факта, хотя и вернемся к нему в гл. 3. Более непосредственное значение имеет изменение эффективной проводимости (115): ее мнимая часть в точности согласуется со значением (110), даваемым общей теорией, но представляет интерес то, что происходит также менее существенное *уменьшение действительной части* проводимости. Поэтому рупор будет эффективен, только если условия (116) удовлетворены с существенным запасом; предельное значение $\omega = (1/2)\,\alpha c$ фактически является «пороговой частотой», при которой действительная часть эффективной про-

водимости падает до нуля, в результате чего, как следует из (66), рупор перестает передавать какую-либо энергию.

Другой предельный случай — это когда короткий участок трубы с экспоненциальным увеличением площади сечения и с большим $c\alpha/\omega$ образует компактное *сочленение*; тогда одно из двух возможных действительных значений — $i\,(\omega^2 c^{-2} - (1/4)\,\alpha^2)^{1/2} x$ в (114) становится близким к $+(1/2)\,\alpha x$, что соответствует изменениям в сочленении, при которых p_e практически не зависит от x, в то время как другое значение указанной величины близко к $-(1/2)\,\alpha x$, что соответствует изменениям, при которых J практически не зависит от x. Таким образом, этот пример «экспоненциального» рупора иллюстрирует низкочастотное поведение, характерное для компактных сочленений, а также демонстрирует на частотах выше пороговой режим с постоянным потоком энергии, который в основном и изучался в этом разделе.

2.7. Ослабление волны за счет трения

Подобно введению в линейную теорию звука (гл. 1), настоящее введение в линейную теорию одномерных волн в жидкости заканчивается обсуждением диссипации волновой энергии и ее последствий; к ним относятся ослабление волны (постепенное экспоненциальное уменьшение потока энергии бегущей волны) и некоторые связанные с ним явления в разветвленных и резонирующих системах. Возможно, что механизмы диссипации энергии, описанные в разд. 1.13, могут быть вполне действенными для одномерных волн в жидкости; в самом деле, если эта идея используется для описания распространения волны вдоль абстрактной трубки лучей, то указанные механизмы будут единственными. Однако в трубках или каналах с твердыми стенками значительно бо́льшая степень диссипации энергии и, следовательно, ослабления волны может быть, кроме того, вызвана трением.

В учебниках по динамике жидкости объясняется, что поскольку в безвихревых течениях на любой твердой границе обязательно существуют ненулевые касательные составляющие скорости жидкости, то такие течения могут приближенно изображать движения реальной жидкости, только если на твердой границе поместить тонкий вязкий пограничный слой. Поперек такого слоя касательная скорость падает от значения, задаваемого внешним безвихревым потоком, до нулевого значения, соответствующего непосредственному контакту жидкости с твердой поверхностью. Завихренность Ω является ненулевой в по-

граничном слое, толщину которого можно определить так. Завихренность, генерируемая на твердой поверхности, помимо конвективного переноса за счет движений в слое, имеющих в основном касательное направление, также диффундирует с коэффициентом диффузии

$$\nu = \mu/\rho, \tag{117}$$

равным отношению коэффициента вязкости к плотности (называемому кинематической вязкостью). Вязкие касательные напряжения (разд. 1.13) являются механизмом этой диффузии: они также диссипируют энергию в пограничном слое и порождают *силу трения* между твердой поверхностью и жидкостью.

Поэтому ослабление продольных волн за счет трения в трубах или каналах с твердыми стенками должно быть следствием вязкого замедления и связанной с ним диссипации энергии в пограничном слое, который отделяет безвихревые потоки, изученные в разд. 2.1—2.6, от твердых границ. Эти явления легко поддаются оценке, если, как предполагается в этом разделе, коэффициент диффузии (117) достаточно мал, чтобы пограничный слой был тонким по сравнению с размерами поперечного сечения.

Хорошее общее представление о толщине пограничного слоя и других его свойствах в случае синусоидальных колебаний с частотой ω можно получить, рассмотрев большой объем жидкости в области $z > 0$, ограниченный твердой *плоской* стенкой $z = 0$ и находящийся под действием градиента давления $\partial p_e/\partial x$ в направлении x, *пространственно однородного*, но синусоидально зависящего от времени. Мы здесь пренебрегаем любыми изменениями плотности ρ и коэффициента вязкости μ, вызванными по предположению малыми изменениями давления или температуры.

Движение жидкости, определенное этими условиями, является простым сдвиговым движением, в котором y- и z-составляющие скорости жидкости везде равны нулю, а x-составляющая $u\,(t, z)$ зависит только от времени и от расстояния z до твердой стенки. Вязкое касательное напряжение

$$p_{xz} = -\mu\,\partial u/\partial z \tag{118}$$

представляет собой (разд. 1.13) поток x-составляющей количества движения в направлении z через единичную площадку за единицу времени. Другой ненулевой составляющей касательного напряжения является p_{zx}, которая имеет то же самое значение, но не влияет на движение: только поток в направлении z может вызвать изменения количества движения, поскольку это единственное направление, по которому изменяются пото-

ки. Действительно, вязкая сила в направлении x, действующая на единицу объема, есть взятый со знаком минус градиент от (118),

$$\mu \partial^2 u/\partial z^2, \tag{119}$$

что представляет собой скорость изменения x-составляющей количества движения, вызванного различием потоков этой величины наружу и внутрь жидкого элемента.

Причины, приводящие к возникновению простого сдвигового движения, заключаются в том, что это движение удовлетворяет уравнению неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ для течений с постоянной плотностью и что полная сила, действующая на единицу объема каждого жидкого элемента,

$$-\partial p_e/\partial x + \mu \partial^2 u/\partial z^2 \tag{120}$$

направлена строго по оси x и не зависит от x и y и поэтому может порождать только x-составляющую количества движения, величина которой не зависит от x и y. Приравняв эту силу (120) плотности, умноженной на ускорение, т. е.

$$\rho\, \partial u/\partial t \tag{121}$$

(где любое конвективное ускорение тождественно равно нулю, потому что u не зависит от x), получим уравнение второго порядка «диффузионного» типа с коэффициентом диффузии (117) — уравнение, подходящее для согласования условий

$$u = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{122}$$

на твердой стенке с невозмущенным состоянием движения, наблюдаемым при больших положительных z.

Хотя полученное таким образом уравнение легко решить для любой зависимости $\partial p_e/\partial x$ от времени вблизи нулевого значения, но соответствующие выводы (как и прочие в этой главе) можно выразить наиболее ясно с помощью той формы, которую они принимают, когда $\partial p_e/\partial x$ пропорционально $\exp(i\omega t)$, как предполагалось вначале; другие зависимости можно исследовать затем методом Фурье. При этих обстоятельствах скорость u, определяемая приравниванием выражений (120) и (121), также изменяется как $\exp(i\omega t)$ и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\mu\, \partial^2 u/\partial z^2 - \rho i\omega u = \partial p_e/\partial x. \tag{123}$$

Его решение, удовлетворяющее граничному условию (122), имеет вид

$$u = (\rho i\omega)^{-1} (-\partial p_e/\partial x) \{1 - \exp[-z (i\omega/\nu)^{1/2}]\}, \tag{124}$$

где может присутствовать экспонента от *минус* $z\,(i\omega/\nu)^{1/2}$, так как при больших положительных z этот член становится пренебрежимо малым и, следовательно, решение (124) стремится к внешнему безвихревому решению

$$u_{ex} = (\rho i\omega)^{-1}\,(-\partial p_e/\partial x), \tag{125}$$

однако никакой член, содержащий со знаком *плюс* в показателе экспоненты эту величину $z\,(i\omega/\nu)^{1/2}$, имеющую положительную действительную часть, не может присутствовать в решении, потому что его величина будет неограниченно возрастать при $z \to \infty$.

Множитель в фигурных скобках в (124), которым, как обнаружил Стокс, решение внутри пограничного слоя отличается от колебательного безвихревого решения (125), изображен как функция $z\,(\omega/\nu)^{1/2}$ на рис. 25. Его действительная часть (сплошная линия) описывает колебания скорости, синфазные колебаниям внешнего течения: заметим, что эта величина меньше 1 во внутренней части пограничного слоя, где

$$z\,(\omega/\nu)^{1/2} < 2{,}2,$$

но слегка превосходит 1 (не более чем на 7%) во внешней его части. Толщину пограничного слоя можно произвольно определить выражением

$$5\,(\nu/\omega)^{1/2} \tag{126}$$

как толщину слоя, вне которого эта действительная часть отличается от 1 не более чем на 3%; множитель 5 в (126) уменьшился бы примерно до 2, если допустимое отклонение увеличить до 7% (при этом внешняя часть слоя окажется исключенной).

Тем не менее толщина пограничного слоя, как бы ни была она определена, изменяется как $(\nu/\omega)^{1/2}$, что ясно из равенства (124) и что можно ожидать по тем соображениям, что твердая граница генерирует завихренность, которая диффундирует от нее (см. (117)) с коэффициентом диффузии ν на расстояние порядка $(\nu/\omega)^{1/2}$ за время порядка $1/\omega$, связанное с периодом колебания напряженности источника завихренности. Действительно, можно показать, что значение этой напряженности источника завихренности на плоской стенке есть $(-\partial p_e/\partial x)$, а по фазе она опережает на 90° фазу внешнего безвихревого движения (125) и, следовательно, фазу движения, представленного сплошной линией на рис. 25. Завихренность, представляемая производной от этой сплошной линии, соответственно максимальна около стенки, где она генерируется с положительным знаком за полупериод, но падает до малых отрицательных значений в области $z\,(\omega/\nu)^{1/2} > 3{,}3$, где все еще преобладает влия-

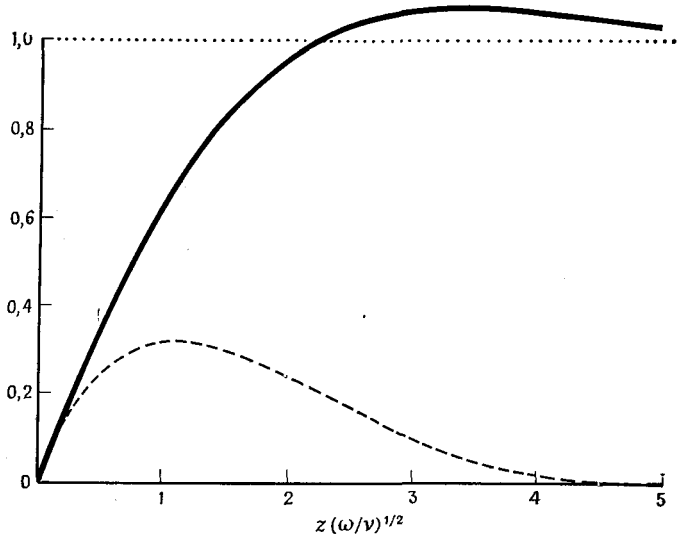

Рис. 25. Пограничный слой Стокса: колебательное движение, параллельное твердой стенке, видоизменено на малых расстояниях z от стенки за счет множителя, содержащегося в фигурных скобках в уравнении (124), действительная и мнимая части которого изображены соответственно сплошной линией (с асимптотой 1, пунктирная линия) и штриховой линией.

ние завихренности противоположного знака, выработанной в течение предыдущего полупериода.

Штриховая линия на рис. 25, будучи мнимой частью множителя в фигурных скобках из (124), представляет собой часть индуцированной внешним решением (125) скорости в пограничном слое, находящуюся в фазе с силой давления ($-\partial p_e/\partial x$). Такая синфазная силе составляющая скорости может возникнуть там, где сила уравновешена вязким сопротивлением, зависящим от мгновенной скорости, а не «*реактивной*» (зависящей от ускорения) силой инерции, которая вызывает отставание по фазе на 90° в (125). Соответствующая завихренность (производная от штриховой линии), находясь в фазе с напряженностью источника завихренности, положительна вблизи стенки, где она генерируется с положительным знаком в течение четверти периода, но влияние генерации с отрицательным знаком в течение предыдущего полупериода создает область отрицательной завихренности, расположенную ближе к стенке, чем в случае сплошной линии, а завихренность в этой области сильнее.

Мы отмечали в предыдущих разделах важность отклика объемного расхода на колебания избыточного давления. Пограничный слой Стокса (124) вызывает *дефицит* объемного расхода, отнесенного к единице ширины стенки, по отношению к объемному расходу в безвихревом движении, равный

$$\int_0^\infty (u_{\text{ex}} - u)\, dz = (\rho i\omega)^{-1} (-\partial p_e/\partial x) (\nu/i\omega)^{1/2}, \qquad (127)$$

где интегрирование проводится от 0 до ∞, но подинтегральное выражение, конечно, равно нулю вне пограничного слоя. Последний множитель в (127) таков (поскольку $i^{-1/2} = (1 - i)\, 2^{-1/2}$), что его действительная и мнимая части, соответствующие сплошной и штриховой линиям на рис. 25, вносят количественно равные вклады в дефицит объемного расхода: дефицит в фазе с u_{ex} (алгебраическая сумма площадей, заключенных между сплошной и пунктирной линиями, причем площадь над последней берется со знаком минус) равен дефициту, который отстает по фазе на 90° от u_{ex} (площади между осью абсцисс и штриховой линией).

Величина (127), будучи умножена на ρ, становится дефицитом *количества движения* жидкости на единицу площади стенки, скорость изменения которого

$$(-\partial p_e/\partial x) (\nu/i\omega)^{1/2} \qquad (128)$$

должна отвечать вязкой замедляющей силе, отнесенной к единице площади твердой стенки (в отличие от силы давления $(-\partial p_e/\partial x)$, действующей на единичный объем жидкости). Значит, (128) является составляющей $(-p_{xz})_{z=0}$ *вязкого касательного напряжения*; ее вычисление из (118) и (124) дает тот же результат. Тот факт, что компонента вязкой замедляющей силы (128), находящаяся в *фазе* с силой давления, равна компоненте, *отстающей на* 90°, отражен на рис. 25: сплошная и штриховая линии имеют одинаковый наклон в начале координат.

Однако сила давления $(-\partial p_e/\partial x)$, действующая на единицу объема, может совершать *работу* только потому, что скорость жидкости в пограничном слое содержит составляющую в фазе с ней (штриховая линия на рис. 25). Интеграл от этой составляющей по z находится из (127) в виде

$$(\rho\omega)^{-1} (-\partial p_e/\partial x) (\nu/(2\omega))^{1/2}, \qquad (129)$$

так как действительная часть $-i^{-3/2}$ есть $2^{-1/2}$. Соответственно средняя мощность, передаваемая жидкости на единицу пло-

щади твердой границы, есть

$$\frac{1}{2}(\rho\omega)^{-1}\,|\,\partial p_e/\partial x\,|^2\,(\nu/(2\omega))^{1/2}, \qquad (130)$$

что должно равняться средней скорости диссипации энергии за счет вязкости на единицу площади пограничного слоя, так как средняя энергия жидкости не меняется. Выведенную формулу (130) для средней энергии диссипации в единицу времени на единицу площади можно получить иначе из (124) интегрированием поперек пограничного слоя средней скорости диссипации энергии в единичном объеме

$$\frac{1}{2}\mu\,|\,\partial u/\partial z\,|^2=\frac{1}{2}(\rho\omega)^{-1}\,|\,\partial p_e/\partial x\,|^2[\exp\,[-z\,(2\omega/\nu)^{1/2}]. \qquad (131)$$

Результаты, даваемые выражениями (127) для дефицита объемного расхода и (130) для диссипации энергии, которые были здесь выведены точно при определенных упрощающих предположениях (в частности, неподвижная плоская стенка и постоянный по пространству градиент давления), можно применять с хорошей степенью приближения к колебательным движениям довольно общего вида в трубах и каналах. При условии, что твердые границы поперечных сечений имеют радиусы кривизны, большие по сравнению с толщиной расчетного пограничного слоя, его свойства будут подобны свойствам пограничного слоя на плоской стенке (более подробное обсуждение можно найти в курсах по теории пограничного слоя; заметим, что осевая неравномерность градиента давления в масштабе длины волны должна оказывать еще меньшее влияние). Приведенные выше уравнения можно использовать в качестве приближенных, если координату z рассматривать как *расстояние по нормали* от твердой границы даже тогда, когда эта граница колеблется.

В частности, тогда скорость диссипации энергии на единицу *площади* твердой границы равна приблизительно (130), или, на единицу длины трубы,

$$\frac{1}{2}s\,(p\omega)^{-1}\,|\,\partial p_e/\partial x\,|^2\,(\nu/(2\omega))^{1/2}, \qquad (132)$$

где s — твердая часть периметра поперечного сечения (периметр при исключении всякой *свободной* поверхности). Аналогично, линеаризованный объемный расход равен

$$J=(\rho i\omega)^{-1}(-\partial p_e/\partial x)\,[A_0-s\,(\nu/(i\omega))^{1/2}], \qquad (133)$$

где в квадратных скобках из члена A_0, появляющегося в результате интегрирования скорости безвихревого движения

по площади поперечного сечения, вычитается член, соответствующий «площади вытеснения», полученный умножением периметра s на (127), т. е. на дефицит объемного расхода, приходящийся на единицу ширины.

Для движений с частотой ω уравнение (133) можно записать как видоизмененную форму уравнения (105) следующим образом:

$$\partial J/\partial t = -cY\partial p_e/\partial x\,[1 - (\nu/(i\omega))^{1/2}\,(s/A_0)]. \qquad (134)$$

Действительная часть множителя в квадратных скобках представляет эффективную инерцию, увеличившуюся за счет дефицита объемного расхода, в то время как мнимая часть представляет тормозящее действие трения на стенке.

С другой стороны, продольные волны со сдвиговыми распределениями скорости по-прежнему удовлетворяют линеаризованному уравнению неразрывности, взятому в форме (104)

$$\partial p_e/\partial t = -cY^{-1}\,\partial J/\partial x, \qquad (135)$$

хотя его нельзя больше вывести исходя из уравнения (4), так как u меняется по поперечному сечению. Однако соображение, поясняющее, почему p_e меняется по поперечному сечению пренебрежимо мало (уравнение (1)), остается справедливым. Кроме того, относительная скорость изменения объема жидкого элемента из-за пульсации поперечного сечения A и зависимости местного объемного потока J от сечения может быть записана как

$$A^{-1}\,(\partial A/\partial t + \partial J/\partial x) \qquad (136)$$

и приравнена относительному изменению плотности, взятому со знаком минус и усредненному по элементу. Применяя черту для обозначения такого усреднения по данному поперечному сечению, эту последнюю величину можно записать как

$$-\rho^{-1}\,\overline{(\partial\rho/\partial t + u\,\partial\rho/\partial x)} = -K\,\partial p_e/\partial t, \qquad (137)$$

где уравнения (99) и (100) были использованы для каждой частицы жидкости отдельно. Уравнения (136) и (137) вместе с (101) теперь дают в линеаризованной форме

$$(K + D)\,\partial p_e/\partial t + A_0^{-1}\,\partial J/\partial x = 0, \qquad (138)$$

что с учетом (98) дает (135), как и прежде.

При условиях, изученных в разд. 2.6, когда поперечное сечение и состав меняются *постепенно* (если вообще меняются), было найдено, что уравнения (104) и (105) имеют приближенное решение (91) для p_e. Это позволяет легко получить решения уравнений (134) и (135), так как они имеют в точности ту же

форму, что (104) и (105), но с заменой c и Y соответственно на

$$c\,[1-(\nu/(i\omega))^{1/2}\,(s/A_0)]^{1/2} \quad \text{и} \quad Y\,[1-(\nu/(i\omega))^{1/2}\,(s/A_0)]^{1/2}. \tag{139}$$

Такая замена превращает cY в коэффициент перед $\partial p_e/\partial x$ в правой части (134), но величина cY^{-1} сохраняется неизменной.

Наиболее важное следствие этих изменений, вызванных введением множителей, предполагаемых лишь слабо отличающимися от 1, это изменение c^{-1}, так как оно производится под знаком *экспоненты* в (91) при $f(t)=\exp(i\omega t)$. В двучленном приближении влияние вязкого пограничного слоя (139) сводится к замене c^{-1} на

$$c^{-1}\left[1+\tfrac{1}{2}\,(\nu/(i\omega))^{1/2}(s/A_0)\right]=$$

$$=c^{-1}\left[1+\tfrac{1}{2}\,(\nu/(2\omega))^{1/2}\,(s/A_0)\right]-\tfrac{1}{2}ic^{-1}(\nu/(2\omega))^{1/2}\,(s/A_0), \tag{140}$$

где изменение действительной части означает незначительное уменьшение скорости волны из-за увеличения эффективной инерции, в то время как наличие мнимой части в c^{-1} описывает ослабление волны из-за сопротивления, вызванного трением.

Например, в однородной трубе или канале уравнение (140) означает, что бегущая волна имеет вид

$$p_e=p_1\exp\left\{i\omega t-i\omega xc^{-1}\left[1+\tfrac{1}{2}\,(\nu/(2\omega))^{1/2}(s/A_0)\right]-\right.$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}\,\omega xc^{-1}(\nu/(2\omega))^{1/2}(s/A_0)\right\}, \tag{141}$$

а связанный с ней средний поток энергии равен

$$\tfrac{1}{2}\,Yp_1^2\exp\{-\omega xc^{-1}(\nu/(2\omega))^{1/2}\,(s/A_0)\}. \tag{142}$$

Отметим, что это экспоненциальное затухание потока энергии согласуется с уравнением (132) для скорости диссипации энергии на единицу длины трубы, которая при приближенной замене $\partial p_e/\partial x$ на $(-i\omega/c)\,p_e$ становится равной

$$\tfrac{1}{2}\,s\rho^{-1}\omega c^{-2}|\,p_e|^2\,(\nu/(2\omega))^{1/2}=\tfrac{1}{2}\,Yp_1^2\omega c^{-1}\,(\nu/(2\omega))^{1/2}\,(s/A_0) \tag{143}$$

при $x=0$, что в точности совпадает со скоростью уменьшения (142) на единицу длины трубы.

Между прочим, из уравнения (143) следует, что относительная потеря энергии *на одной длине волны* приближенно равна отношению толщины пограничного слоя (126) к размеру сечения A_0/s. Напротив, скорость диссипации энергии при отсутствии твердых границ, рассмотренная в разд. 1.13, содержала

вклад за счет вязкости, пренебрежимо малый по сравнению с выше приведенным значением (143), потому что продольные волны в трубах или каналах с твердыми стенками подвержены вязкой диссипации, связанной с изменениями скорости по упомянутой толщине пограничного слоя, а не по длине волны.

Все результаты разд. 2.4—2.6 для разветвленных и резонирующих систем можно сразу обобщить, учтя ослабление волны за счет трения, если во всех формулах сделать простую замену c^{-1} на величину (140). Тогда, согласно уравнению (96), $\omega l/c_{\text{АВ}}$ имеет *отрицательную мнимую часть*, которая видоизменяет заключения, выводимые из основной формулы для разветвлений (97). В сущности это связанное с трением демпфирующее воздействие, как можно было ожидать, делает все резонансные пики конечными, ограничивая максимально возможную степень приближения комплексного числа $\omega l/c_{\text{АВ}}$ к полюсу $\operatorname{tg}(\omega l/c_{\text{АВ}})$, например к $\frac{1}{2}\pi$.

Подстановки (139) заставляют дополнительно сделать небольшие изменения значений проводимостей в правой части (97). Эти изменения включают, в двучленном приближении, замену каждого Y на

$$Y\left[1-\tfrac{1}{2}\,(\nu/(i\omega))^{1/2}\,(s/A_0)\right]. \qquad (144)$$

Влияние этой поправки часто пренебрежимо мало, однако она может нарушить хорошую согласованность проводимостей.

Сделанные выше замечания о том, как линейную теорию одномерных волн в жидкости следует изменить, чтобы принять во внимание вызванное трением ослабление волны, достаточно просто дополнить в большинстве случаев, но два вопроса, совершенно не затронутые здесь, могут потребовать обращения к специальной литературе. Первый из них таков: каким должен быть метод анализа, когда толщина пограничного слоя (126), значения которой показаны на рис. 26 для воды, крови и воздуха (ν приближенно равно соответственно 1, 4 и 15 $\text{мм}^2\text{с}^{-1}$), сравнима с размером поперечного сечения. Один из эффективных при этих обстоятельствах методов пригоден для круглых поперечных сечений, и он успешно применялся к пульсации крови в малых артериях.

Более радикальные изменения подхода необходимы, если масштаб движений таков, что преобладает *турбулентное* трение. Это применимо, например, к приливным движениям: хотя вязкий пограничный слой, рассчитанный на основании полусуточной периодичности приливных движений, будет, как показывает рис. 26, достаточно тонким (около 0,5 м), в движениях

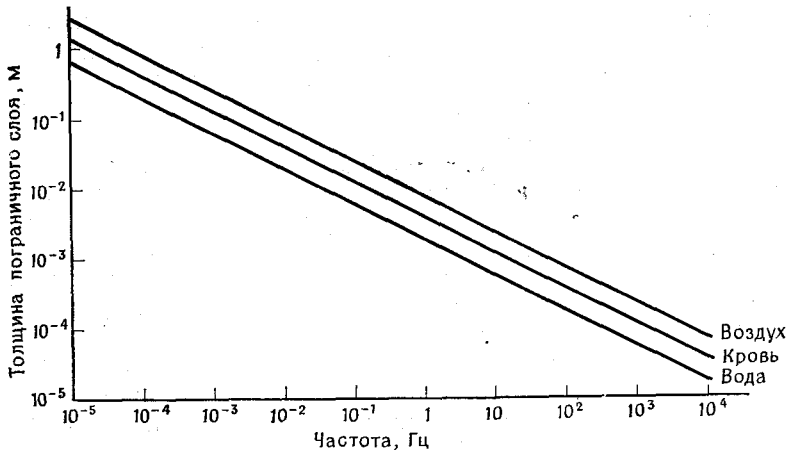

Рис. 26. Зависимость толщины пограничных слоев (126) для воды, крови и воздуха (с кинематической вязкостью соответственно 1, 4 и 15 $мм^2 \cdot с^{-1}$) от частоты $\omega/(2\pi)$, в герцах.

при таких больших числах Рейнольдса обнаружена гораздо более сильная диффузия за счет турбулентности. Для приближенной оценки ее влияния на распространение волн часто достаточно использовать, как показано выше, знание (в данном случае полученное экспериментально) дефицита объемного расхода турбулентного пограничного слоя в зависимости от давления и частоты.

2.8. Нелинейная теория плоских волн

Различные аспекты линейной теории одномерных волн в жидкости были весьма подробно изучены в первой половине гл. 2 после изложенного в гл. 1 введения в линейную теорию звуковых волн в трехмерном пространстве. Вторая половина гл. 2 посвящена *нелинейным* эффектам, которые до сих пор полностью игнорировались; теперь же постараемся проанализировать, что произойдет, если амплитуды волн *не* настолько малы, чтобы их квадратами и произведениями можно было пренебречь. Полученная информация полезна хотя бы просто для того, чтобы установить, при каких обстоятельствах нелинейными членами *действительно* можно пренебречь. К тому же она представляет и более широкий интерес, так как в результате обнаруживаются любопытные и немаловажные явления,

качественно отличные от всего, что можно объяснить в рамках линейной теории.

Однако подобное расширение области исследований с целью охвата дополнительных сложностей нелинейных явлений должно с самого начала сопровождаться жесткими ограничениями в других отношениях. В разделах 2.8—2.11 мы сосредоточим внимание на *плоских* звуковых волнах, хотя укажем в нескольких местах, что соответствующие результаты применимы также к продольным волнам общего вида в *однородных* трубах или каналах (если пренебречь трением), и в разд. 2.12 непосредственно возвратимся к случаю длинных волн в однородном открытом канале. Отбрасывая во всех этих пяти разделах любые усложнения, вызванные неоднородностью физических характеристик жидкости или поперечного сечения, ослаблением волны или влиянием эффектов трехмерности, мы сможем сфокусировать внимание непосредственно на характерных особенностях, привносимых нелинейными членами уравнений движения даже в те очень простые свойства плоских звуковых волн, которые уже полностью изучены с помощью линейной теории в разд. 1.1.

Блестящее математическое открытие, сделанное Риманом — одним из крупнейших математиков середины XIX столетия — заложило основу всей последующей работы по нелинейной теории плоских звуковых волн. Это открытие, равносильное преобразованию уравнений движения к форме, замечательно легко поддающейся изучению для волн любой амплитуды, привело в свое время к прекрасному уровню понимания предмета.

С другой стороны, сверкающее великолепие математической техники, использованной для проведения этого исходного преобразования, в течение долгого времени производило гипнотизирующее воздействие на акустиков. Это привело к некоторому застою в нелинейной теории звука, связанному с всеобщим убеждением, что весь успех в понимании предмета зависел от первоначального математически блестящего преобразования. В течение многих десятилетий это препятствовало обобщению результатов на любые другие условия распространения волн, и в том числе на важный случай одномерного распространения в трубах или каналах с постепенно меняющимися физическими характеристиками жидкости и поперечным сечением, потому что в этих случаях невозможно найти преобразование с подобными свойствами.

В этом разделе, чтобы избежать такого гипноза, предпошлем описанию самого математического преобразования Римана цепь простых физических соображений, приводящую в точности к тому же результату. Эти соображения, возможно,

смогут дать более ясное физическое понимание смысла теории Римана и следствий из нее и заложить прочный фундамент для последующего изложения в этой книге современных достижений нелинейной волновой теории, начиная с описания в разд. 2.13 нелинейного распространения волн в трубах или каналах с постепенно меняющимися физическими характеристиками жидкости и поперечным сечением; это описание будет в разд. 2.14 применено к нелинейному распространению вдоль трубок лучей геометрической акустики. Изложение дальнейшего развития нелинейной теории будет затем отложено до эпилога.

Далее мы рассмотрим волну с произвольной амплитудой и формой, которая является «плоской» в том смысле, что все движение жидкости происходит, скажем, в направлении x, причем x-составляющая скорости u, давление p и плотность ρ зависят только от x и времени t; мы предположим также, что диссипативными процессами можно пренебречь, так что энтропия на единицу массы S, которая первоначально берется однородной, сохраняется однородной и постоянной. Тогда возникает вопрос, можно ли предсказать развитие такой плоской волны с произвольной амплитудой в отсутствие диссипации при помощи простых физических соображений, предполагая только знание линейной акустики.

Разумно попытаться ответить на него, заметив, что для любого частного положения $x = x_1$ и времени $t = t_1$ должны существовать *некоторый* пространственный интервал около $x = x_1$ и *некоторый* временной интервал около $t = t_1$, оба настолько малые, что для x и t, принадлежащих этим интервалам, соответствующие возмущения u и p относительно значений u_1 и p_1, которые они имеют в (x_1, t_1), остаются достаточно малыми, чтобы *линейная* теория правильно описывала их поведение. Возможен случай, когда x-составляющая скорости u описывается малыми возмущениями от ненулевого значения u_1, а не от нуля, как предполагалось в линейной теории, развитой в гл. 1 и 2. Если, однако, мы исследуем возмущения в указанных интервалах относительно специальной системы отсчета, движущейся с постоянной скоростью u_1, причем местоположение в ней определяется новой пространственной координатой

$$x - u_1 t, \tag{145}$$

то скорость в *этой* системе будет равна $u - u_1$; в рассматриваемых интервалах эта величина везде остается малой (совсем как в линейной теории).

В то же время мы должны приписать скорости звука c на интервале частное «локальное» значение c_1 для этих малых возмущений давления p относительно его значения p_1 в (x_1, t_1).

При заданной постоянной энтропии S значение плотности $\rho = \rho_1$ соответствует $p = p_1$, а c_1^2 есть производная $\partial p/\partial \rho$, взятая при постоянной S (разд. 1.2) и *вычисленная при* $\rho = \rho_1$, $p = p_1$. Она возрастает при возрастании p_1 (и, следовательно, при постоянной S также при росте *температуры*).

Теперь линейная теория звука дает для малого возмущения давления $p - p_1$, а также для скорости жидкости $u - u_1$ в системе отсчета, в которой пространственной координатой является $x - u_1 t$, общее решение в виде плоской волны (разд. 1.1)

$$p - p_1 = f(x - u_1 t - c_1 t) + g(x - u_1 t + c_1 t), \tag{146}$$

$$u - u_1 = (\rho_1 c_1)^{-1} f(x - u_1 t - c_1 t) - (\rho_1 c_1)^{-1} g(x - u_1 t + c_1 t), \tag{147}$$

справедливое на тех интервалах, где эти величины, которые мы будем записывать как δp и δu соответственно, остаются очень малыми. Отсюда следует, что на этих малых интервалах

$$\delta u + (\rho_1 c_1)^{-1} \delta p \text{ есть функция только } x - (u_1 + c_1) t \tag{148}$$

и аналогично

$$\delta u - (\rho_1 c_1)^{-1} \delta p \text{ есть функция только } x - (u_1 - c_1) t. \tag{149}$$

В методе, существенно увеличивающем ценность этих результатов, используется интеграл, форму которого они подсказывают, а именно

$$\int_{p_0}^{p} (\rho c)^{-1} \, dp = P(p), \tag{150}$$

где p_0 — некоторое давление, взятое в качестве базисного, например начальное давление жидкости до появления плоской волны. Очевидно, при очень малом отклонении δp от $p = p_1$

$$\delta P = P'(p_1) \, \delta p = (\rho_1 c_1)^{-1} \delta p. \tag{151}$$

Величину, стоящую слева в утверждении (148), можно, следовательно, записать как соответствующее очень малое отклонение $\delta(u + P)$ величины $u + P(p)$ в малой окрестности точки (x_1, t_1) от ее значения в этой точке. Внутри этой малой окрестности указанное утверждение означает, что

$$\delta(u + P) = 0, \quad \text{когда} \quad \delta x - (u_1 + c_1) \, \delta t = 0, \tag{152}$$

где δx и δt — малые отклонения x и t от их значений x_1 и t_1. Это следует из того, что $\delta(u + P)$ является функцией только $x - (u_1 + c_1) t$; но она равна нулю в (x_1, t_1) и, следовательно, также во всех точках (x, t), в которых $x - (u_1 + c_1) t$ имеет то же самое значение, что и в точке (x_1, t_1).

Уравнение (152) означает, что мы рассматриваем некоторую *пространственно-временну́ю кривую* C_+, во всех точках которой выполнено дифференциальное соотношение

$$dx = (u + c)\,dt \quad \text{вдоль } C_+. \tag{153}$$

Очевидно, что C_+ является траекторией точки, которая всегда движется вперед с локальной волновой скоростью c в системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью с локальной скоростью u. Уравнение (152) устанавливает, что вдоль такой кривой C_+, проходящей через (x_1, t_1), величина $u + P$ является *стационарной* и равной ее значению в точке (x_1, t_1); это замечательный результат, потому что, как показывает (150), величина $u + P$ (p) определена совершенно независимо от выбора точки (x_1, t_1); поэтому все приведенные рассуждения применимы к малой окрестности любой *другой* точки кривой C_+! Так как функция, стационарная во *всех* точках кривой C_+, должна быть постоянной всюду вдоль C_+, получаем первый результат Римана:

$$u + P = \text{const} \quad \text{вдоль кривой } C_+: \quad dx = (u + c)\,dt. \tag{154}$$

Аналогичные рассуждения, примененные к (149) и снова использующие (151), дают второй результат Римана

$$u - P = \text{const} \quad \text{вдоль кривой } C_-: \quad dx = (u - c)\,dt. \tag{155}$$

Очевидно, что кривая C_- является траекторией точки, которая всегда движется назад (т. е. в *отрицательном* x-направлении) с локальной скоростью волны c в системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью с локальной скоростью u.

Отметим, что рассуждения, приводящие к этим важным результатам в нелинейной теории плоских звуковых волн, столь же справедливы для других видов продольных волн произвольной амплитуды, а именно для волн в трубах или каналах с *постоянным* поперечным сечением и *однородными* физическими характеристиками жидкости, потому что в соответствии с уравнением (12) эти волны определяются такими же локальными соотношениями между выражениями для избыточного давления и скоростью жидкости, как соотношения (146) и (147), и можно аналогично определить интеграл, в точности подобный (150). С другой стороны, приведенные рассуждения требуют *однородности жидкости*, и в частности постоянства *энтропии* S; в противном случае подинтегральное выражение (150) не является просто функцией p, а зависит также и от S, которая, вообще говоря, не постоянна вдоль кривых C_+ или C_-, а скорее имеет свойство сохранять постоянство вдоль траектории жидкой частицы $dx = u dt$. Если свойства поперечного сечения меняют-

ся в зависимости от x (и, следовательно, не могут оставаться неизменными вдоль C_+ и C_-), то вышеприведенные рассуждения теряют силу.

Теперь подтвердим справедливость утверждений (154) и (155), выведя их непосредственно из полных уравнений движения с помощью оригинального метода Римана, распространив его на случай одномерных волн общего вида в *однородных* трубах или каналах. Определим c для волн, имеющих произвольное избыточное давление p_e, в этом общем случае придав уравнению (9) вид

$$c^{-2} = A^{-1}\, d\,(\rho A)/dp_e, \tag{156}$$

где равенства (2), в которых энтропия S и свойства поперечного сечения считаются постоянными, задают ρ и A, а следовательно, также c как функции только p_e; определим P равенством

$$P = \int_0^{p_e} (\rho c)^{-1}\, dp_e. \tag{157}$$

Тогда уравнение количества движения (3), деленное на ρ, принимает вид

$$\partial u/\partial t + u\partial u/\partial x + c\partial P/\partial x = 0, \tag{158}$$

а уравнение неразрывности,

$$\partial\,(\rho A)/\partial t + u\partial\,(\rho A)/\partial x + \rho A\partial u/\partial x = 0 \tag{159}$$

(см. (4)), деленное на $\rho A/c$, запишется с помощью (156) и (157) так:

$$\partial P/\partial t + u\partial P/\partial t + c\partial u/\partial x = 0. \tag{160}$$

Складывая (158) и (160), получаем уравнение

$$\partial\,(u + P/\partial)\,t + (u + c)\,\partial\,(u + P)/\partial x = 0, \tag{161}$$

которое отличается от (154) только формой записи! Вычитая (160) из (158), получаем

$$\partial\,(u - P)/\partial t + (u - c)\,\partial\,(u - P)/\partial x = 0, \tag{162}$$

что аналогично доказывает (155). Эти доводы столь же убедительны, как и прежде, хотя они, конечно, совершенно не объясняют, откуда появился интеграл P.

В качестве первого указания на полезность утверждений (154) и (155), перед тем как в разд. 2.9 будут приведены дальнейшие примеры, рассмотрим следующую *задачу с начальными условиями*: пусть в начальный момент $t = 0$ вся жидкость, за исключением содержащейся в некотором слое (конечном

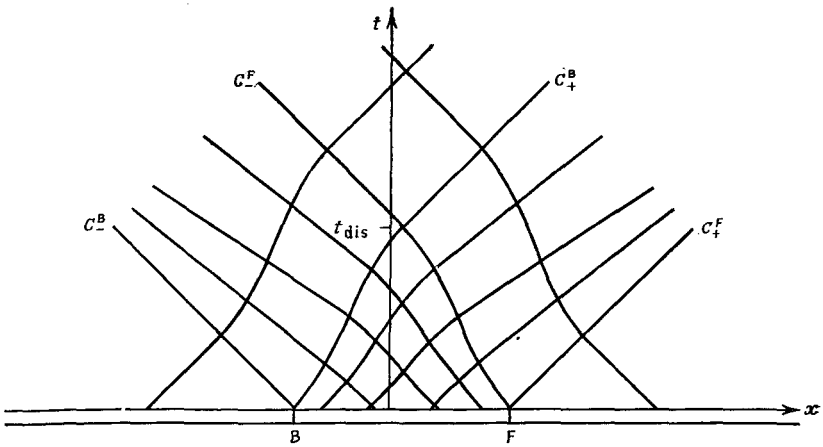

Рис. 27. Задача с начальными данными, решаемая методом Римана. Возмущение, первоначально ограниченное отрезком BF, расплетается при $t = t_{dis}$ на две простые волны (волну, заключенную между C_+^B и C_+^F, бегущую направо, и волну, заключенную между C_-^B и C_-^F, бегущую налево) с невозмущенной областью между ними.

интервале значений x), не возмущена (т. е. для нее u, $p_e = p - p_0$, а следовательно, также и P имеют нулевые значения), в то время как возмущения внутри слоя могут быть большими, но, конечно, с постоянной энтропией; тогда возникает вопрос: как будут распространяться возмущения впереди и позади этого слоя в последующем движении?

Чтобы решить эту задачу методом Римана, изобразим пространственно-временну́ю диаграмму на плоскости (x, t) (см. рис. 27). Возмущения при $t = 0$ заключены в слое между граничными точками B и F. Чтобы проанализировать последующее развитие течения, представим себе некоторое число кривых C_+ (для которых $dx/dt = u + c$), нанесенных на эту диаграмму, и выделим среди них C_+^B и C_+^F, начинающиеся при $t = 0$ соответственно в точках B и F, и аналогично кривых C_- (для которых $dx/dt = u - c$). Форма этих кривых заранее неизвестна, так как она зависит от того, как меняются u и c, однако определенные полезные сведения о них можно получить следующим образом.

Утверждение (155) означает, что вдоль каждой кривой C_- величина $u - P$ имеет постоянное значение, вообще говоря, конечно, различное для различных кривых C_-. Однако C_-^F и все кривые впереди нее начинаются из области впереди F,

где $u = P = 0$; постоянное значение $u - P$ на каждой из них поэтому может быть только нулем. Отсюда следует, что

$$u = P\ (p_e) = \int_0^{p_e} (\rho c)^{-1}\, dp_e \quad \text{впереди от} \quad C_-^{\mathrm{F}}. \tag{163}$$

Для всей этой области, лежащей впереди от C_-^{F} (которая по мере роста t *расширяется* и всегда содержит в себе ту «область впереди слоя», распространением возмущения в которой мы интересовались), уже установлено важное упрощающее соотношение (163), являющееся обобщением уравнения (12). Рассуждая аналогичным образом, получаем, что

$$u = P \quad \text{позади} \quad C_-^{\mathrm{B}}, \tag{164}$$

в то время как рассуждения для C_+ означают, что

$$u = -P \quad \text{позади} \quad C_+^{\mathrm{B}} \tag{165}$$

и что

$$u = -P \quad \text{впереди} \quad C_+^{\mathrm{F}}. \tag{166}$$

Действительно, определения (154) и (155) означают, что C_+^{F} должна лежать впереди C_-^{F}, так что во всей области (166) справедливо также равенство (163), которое может означать только одно: $u = P = 0$; очевидно, это та область пространства-времени, которая остается невозмущенной, поскольку волна ее достичь не может. Аналогичные замечания применимы к области (164), заключенной *внутри* области (165): эта область позади C_-^{B} является тогда также невозмущенной и в ней $u = P = 0$.

Более удивительным является то, что спустя определенное время $t = t_{\mathrm{dis}}$ (рис. 27), когда C_-^{F} пересечет C_+^{B}, возникает область, лежащая *между* этими кривыми, где применимы оба равенства (163) и (165), из которых снова получаем, что $u = P = 0$. В течение времени $0 < t < t_{\mathrm{dis}}$ возмущения «*расплетаются*» (disentangled) и далее распространяются как две «простые волны» (одна вперед, другая назад), разделенные невозмущенной областью.

Чтобы понять особые свойства этих «простых волн», рассмотрим простую волну, распространяющуюся вперед в области спереди от C_-^{F} между C_+^{B} и C_+^{F}. Из уравнения (163), справедливого в этой области, следует, что величина $u + P$, которая благодаря (154) постоянна вдоль каждой C_+, равна просто $2u$, так что сама u постоянна вдоль каждой C_+. Поэтому, благодаря (163), p_e постоянно, и поэтому c тоже постоянно. Сле-

довательно, для любой кривой C_+ в этой области простой волны из выражения (154) имеем

$$u + c = \text{const} \quad \text{вдоль} \quad C_+. \tag{167}$$

Поэтому эта кривая является прямой линией в плоскости (x, t), что и показано на рис. 27.

Вообще простые волны, которые изучаются в разд. 2.9, могут бежать либо *вперед* по отношению к жидкости, и тогда они необходимо содержат такие «кривые» C_+, которые все являются прямыми линиями и на каждой из которых скорость потока u и избыточное давление p_e принимают постоянные значения, связанные уравнением (163); либо назад (подобно другой простой волне на рис. 27), и тогда они содержат прямые линии C_-, вдоль которых u и p_e постоянны и связаны с помощью (165). Примечательность следствий из исследования Римана состоит не столько в том, что существуют простые волны, а в том, что любое конечное возмущение за конечное время t_{dis} распадется на пару простых волн, бегущих в противоположных направлениях и разделенных невозмущенной областью. Это следствие показывает, насколько мощен анализ с помощью кривых C_+ и C_-; более общую математическую трактовку этих кривых, при которой они рассматриваются как особые случаи характеристических кривых гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных, можно найти в учебниках по теории дифференциальных уравнений.

2.9. Простые волны

Выражение «простая волна» достаточно удачно обозначает весьма непосредственное обобщение понятия плоской бегущей волны (разд. 1.1), заимствованное из линейной теории, на возмущения с произвольной амплитудой. В разд. 2.9 исследуются механизмы генерирования простых волн, а также анализируются законы их распространения. Весьма интересно узнать, насколько просто рассчитать распространение этих нелинейных волн, но возникает и более глубокая проблема. Эта загадка, намек на которую, возможно, содержится на рис. 27 (а именно что́ произойдет, если две кривые C_+ пересекутся), шаг за шагом формулируется в настоящем разделе, хотя ответы на этот важный вопрос отложены до последующих разделов.

Выберем направление распространения простой волны в качестве положительного x-направления. Такая волна определяется как область, где постоянное значение (155) $u - p$ вдоль каждой кривой C_- в каждом случае равно нулю, как и в (163),

что дает

$$u = P(p_e) = \int_0^{p_e} (\rho c)^{-1}\, dp_e. \qquad (168)$$

Тогда соответствующие кривые C_+ являются прямыми линиями, вдоль каждой из которых u принимает постоянное значение, вообще говоря разное для каждой C_+; так же ведут себя на этих кривых p_e, c и (уравнение (167)) величина $u + c$, равная dx/dt. Заметим, что это краткое описание столь же применимо и к простой волне, движущейся назад (рис. 27), так как изменение знаков у x и у u, которое необходимо, чтобы сделать направление распространения *этой* волны положительным x-направлением, преобразует уравнение (165), которому удовлетворяет волна, к виду (168), и заставляет величину $u - c$, равную dx/dt на прямых, соответствующих этой волне и вдоль которых u и p_e постоянны, записать в виде $u + c$.

Простые волны отличаются от плоских бегущих волн линейной теории только тем, что, во-первых, теперь проводимость на единицу поперечного сечения $(\rho c)^{-1}$ является, как показывает (168), *дифференциальной* проводимостью, зависящей от избыточного давления p_e и представляющей собой увеличение скорости жидкости u на единицу увеличения p_e, и, во-вторых, различные избыточные давления распространяются с различными волновыми скоростями c, свойственными каждому из них, *относительно* собственной скорости жидкости, так что абсолютная скорость их распространения равна $u + c$.

Простые волны возникают не только как конечные результаты эволюции решений довольно общей задачи с начальными данными, как в разд. 2.8; они появляются также в граничных задачах определенного типа. В частности, если первоначально невозмущенную жидкость, заполняющую однородную трубу или канал, начинают возбуждать *с одного конца*, то возникающее возмущение жидкости сразу принимает форму простой волны (в этом случае только одной). На рис. 28 это показано для трех типов возбуждения: в каждом случае, если x возрастает вдоль трубы при удалении от места возбуждения, то вся труба наполнена кривыми C_-, берущими начало в невозмущенной жидкости, так что постоянное значение, которое $u - P$ имеет вдоль каждой C_-, должно быть нулем, как в простой волне.

Возбуждение давлением показано на рис. 28, *а*: волна возбуждается изменениями давления, происходящими на открытом конце, причем характерные частоты этих изменений таковы, что поперечные сечения трубы или канала являются при них

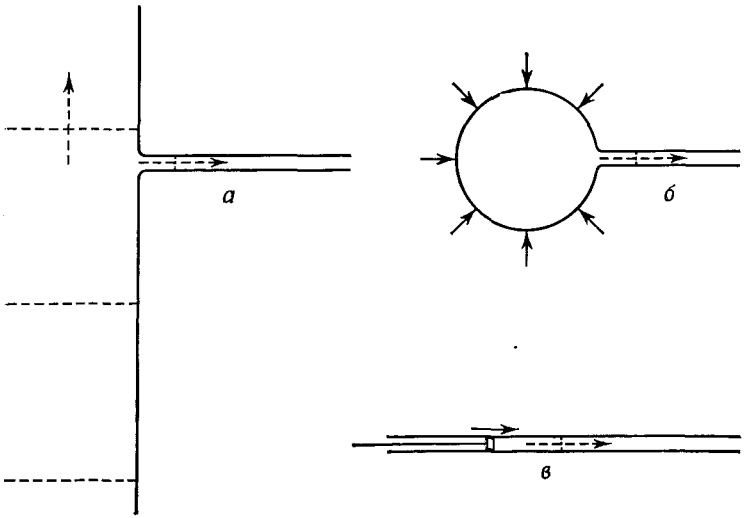

Рис. 28. Три способа возбуждения простых волн: *а* — изменениями давления, происходящими у конца, открытого в большой резервуар; *б* — объемным расходом из компактной полости; *в* — смещением поршня.

компактными. Такие изменения давления (они могут быть вызваны, например, распространением длинной волны в большом внешнем резервуаре) будут приближенно, но, как мы увидим, не точно непрерывными при проходе через сочленение с примыкающим каналом, компактность которого, с другой стороны, предотвращает сколько-нибудь значительные реакции движений в резервуаре на объемный расход через отверстие (сравни конфигурацию на рис. 20, *б*, изученную на основе линейной теории в конце разд. 2.3).

Возбуждение за счет объемного расхода показано на рис. 28,*б*; конец открыт в этом случае в полость, которая сама является компактной; изменение объема полости возбуждает волну тем, что вызывает определенный объемный расход через конец трубы. Это возбуждение напоминает выброс крови в аорту при сокращении сердца, но в весьма упрощенном виде, потому что на рис. 28,*б* труба предполагается однородной, а жидкость первоначально невозмущенной.

Возбуждение смещением показано на рис. 28,*в*; простая волна в этом случае возбуждается смещением *закрытого* конца, который можно рассматривать как поршень, перемещения которого в трубе (подобно движению мембраны громкоговори-

теля) приводят в движение первоначально невозмущенную жидкость. Этот рисунок иллюстрирует задачу с граничными условиями, определенными на *подвижной* границе, т. е. на поверхности поршня.

Для каждого из этих способов возбуждения возникающая простая волна полностью определяется через изменения избыточного давления или объемного расхода либо на открытом конце при $x = 0$, либо через смещение $x = H(t)$ поршня. Например, если избыточное давление p_e изменяется как $\tilde{p}_e(t)$ при $x = 0$, то соответствующие изменения $c = \tilde{c}(t)$ и $u = \tilde{u}(t)$ могут быть выведены соответственно из (156) и (168), так что прямые C_+, исходящие из $x = 0$ в момент времени $t = \tau$, полностью определяются уравнениями

$$p_e = \tilde{p}_e(\tau), \quad u = \tilde{u}(\tau), \quad c = \tilde{c}(\tau), \quad x = [\tilde{u}(\tau) + c(\tau)](t - \tau). \tag{169}$$

Заметим, что скорость последовательных сигналов $\tilde{u}(\tau) + \tilde{c}(\tau)$ увеличивается с ростом τ в волне сжатия (когда избыточное давление $\tilde{p}_e(\tau)$, переносимое последовательными сигналами, растет), а это приводит к загадке (ответ на которую мы откладываем): что произойдет, когда более поздние сигналы перегонят более ранние сигналы?

Возбуждение давлением на компактном конце, открытом в резервуар, предполагает непрерывность не самого избыточного давления (как было показано на основе *линеаризованного* уравнения количества движения (40) и вытекающего из него соотношения (41)), а более сложной величины

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \int_0^{p_e} \rho^{-1}\, dp_e \tag{170}$$

Это выражение выводится из *нелинейного* уравнения количества движения для безвихревого течения с постоянной энтропией, которое, как показано в учебниках по гидродинамике, означает, что градиент выражения (170) равен $-\partial\mathbf{u}/\partial t$. Из этого следует, что изменение величины (170) при переходе через компактное сочленение пренебрежимо мало; движение в резервуаре с *заданным значением* (170) в каждый момент времени t определяет давление $\tilde{p}(t)$ на конце трубы так, чтобы соответствующее значение выражения (170) (где $|\mathbf{u}|^2 = [\tilde{u}(t)]^2$ связано с $\tilde{p}_e(t)$ в соответствии с (168)) было одним и тем же. Однако на практи-

ке появление члена $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2$ не делает это условие сильно отличающимся от условия непрерывности давления.

Аналогично, при возбуждении изменением объемного расхода на компактном конце величина, для которой обеспечивается непрерывность, в нелинейной теории представляет собой, строго говоря, *массовый расход* $\rho A u$, который, согласно уравнению (4), имеет производную по x, равную $-\partial(\rho A)/\partial t$. Задание $\rho A u$ (причем ρA является функцией p_e, а соотношение (168) делает u функцией p_e) определяет $\tilde{p}_e(t)$ и приводит к тому же решению (169).

Возбуждение смещением поршня $x = H(t)$ задает скорость жидкости u на поршне как $\tilde{u}(t) = \dot{H}(t)$, откуда $\tilde{p}_e(t)$ выводится с помощью (168) и $\tilde{c}(t)$ с помощью (156). Тогда C_+-сигнал, возникающий в точке $x = H(\tau)$ в момент времени $t = \tau$, несущий избыточное давление $\tilde{p}_e(\tau)$ и распространяющийся с постоянной скоростью $\tilde{u}(\tau) + \tilde{c}(\tau)$, удовлетворяет уравнению

$$x = H(\tau) + [\tilde{u}(\tau) + \tilde{c}(\tau)](t - \tau). \tag{171}$$

Для такой трубы, которая, будучи ограничена поршнем, не может вместить новую жидкость, интересно проверить, что наше решение удовлетворяет закону сохранения массы. В фиксированное время t масса жидкости между последовательными C_+-сигналами (171), излученными во времена τ и $\tau + d\tau$, будет

$$\tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,[x(\tau) - x(\tau + d\tau)], \tag{172}$$

где $\tilde{\rho}(\tau)$ и $\tilde{A}(\tau)$ — плотность жидкости и площадь поперечного сечения соответственно, связанные с избыточным давлением $\tilde{p}_e(\tau)$, а расстояние между сигналами $x(\tau) - x(\tau + d\tau)$ может быть получено дифференцированием (171) по τ. С учетом равенства $\dot{H}(\tau) = \tilde{u}(\tau)$ приращение массы (172) можно выразить в виде

$$\tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,\tilde{c}(\tau)d\tau - \tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,[d\tilde{u}(\tau) + d\tilde{c}(\tau)]\,(t - \tau) = \\ = -d\{\tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,\tilde{c}(\tau)\,(t - \tau)\} \tag{173}$$

поскольку, согласно (168) и (156),

$$\tilde{\rho}\tilde{A}\,d\tilde{u} = (\tilde{c})^{-1}\tilde{A}\,d\tilde{p}_e = \tilde{c}d(\tilde{\rho}\tilde{A}). \tag{174}$$

Интегрирование (173) от τ до t определяет $\tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,\tilde{c}(\tau)\,(t-\tau)$ как массу жидкости, заключенную между сигналом, испущенным во время τ, и поршнем, который испускает свой

текущий сигнал в момент времени t. Закон сохранения массы прекрасно демонстрируется этим выражением, представляющим собой полную массу, которую за время $t - \tau$ пересекает C_+-сигнал, движущийся с *относительной* скоростью $\tilde{c}(\tau)$ через жидкость, масса которой на единицу длины равна $\tilde{\rho}(\tau)\tilde{A}(\tau)$. Подстановка $\tau = 0$ (время испускания сигнала, несущего нулевое возмущение) дает полную массу жидкости в волне во время t в виде $\rho_0 A_0 c_0 t$ при любом способе возбуждения. В случае открытого конца (169) соответствующее вычисление требует отбрасывания члена $H(\tau)$ в (171) и приводит к появлению в (172) добавочного члена $\tilde{\rho}(\tau)\tilde{A}(\tau)\tilde{u}(\tau)\,d\tau$, интеграл от которого от 0 до t является добавочной массой, вводимой на открытом конце.

Приведенные примеры показывают важность всех этих соотношений, которые связывают различные переменные в простой волне. В частности, соотношение (168) между u и p_e определяет давление, которое противостоит заданному движению поршня (или заданному объемному расходу жидкости, вводимой из сжимающейся полости) и, наоборот, определяет направленный внутрь объемный расход, сопровождающий изменения давления на открытом конце. Соответствующие значения c снова определяют распространение сигналов. Вычислим теперь эти соотношения явно в двух практически важных случаях.

Первым из них является случай плоских звуковых волн в совершенном газе. Как было показано в разд. 1.2, для такого газа (т. е. имеющего очень низкую плотность по сравнению с тем же веществом в конденсированной фазе) при процессах, протекающих с постоянной энтропией, справедливо уравнение

$$c^2 = dp/d\rho = \gamma p/\rho, \tag{175}$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей. В условиях, где γ сохраняется приблизительно постоянным (например, в одноатомном газе $\gamma = 5/3$, тогда как в атмосферном воздухе $\gamma = 1{,}40$ с точностью до двух десятичных знаков при температурах, лежащих примерно между 100 K и 1000 K), уравнение (175) дает

$$(p/p_0) = (\rho/\rho_0)^{\gamma}, \quad (c/c_0) = (\rho/\rho_0)^{(\gamma-1)/2} \tag{176}$$

если $\rho = \rho_0$, а $c = c_0$ при $p = p_0$. Из этого следует, что

$$P = \int_{p_0}^{p} (\rho c)^{-1}\,dp = \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{-1} c\,d\rho = 2(c - c_0)/(\gamma - 1). \tag{177}$$

Это простое линейное соотношение между P и c означает для совершенного газа с постоянным γ, что уравнение (168) для простой волны принимает вид

$$c = c_0 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\, u. \tag{178}$$

Для воздуха с $\gamma = 1{,}40$ это означает увеличение скорости распространения волны по отношению к жидкости, c, на одну пятую скорости жидкости u в направлении распространения. Абсолютная скорость сигнала $u + c$, таким образом, превосходит c_0 на величину

$$u + c - c_0 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\, u, \tag{179}$$

которая для $\gamma = 1{,}40$ на пять шестых обусловлена переносом за счет собственного движения жидкости и на одну шестую увеличением скорости распространения волны.

Соответствующие значения плотности и давления получаются из (176) такими:

$$\begin{aligned} \rho/\rho_0 &= \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\,(u/c_0)\right]^{2/(\gamma-1)}, \\ p/p_0 &= \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\,(u/c_0)\right]^{2\gamma/(\gamma-1)}. \end{aligned} \tag{180}$$

Рис. 29, где изображены эти соотношения, показывает, что для больших значений u/c_0 избыточное давление, тормозящее движение поршня в невозмущенный воздух, возрастает значительно быстрее, нежели пропорционально скорости поршня u. В качестве второго случая рассмотрим длинные волны в открытых каналах с постоянным поперечным сечением, которое может быть произвольным при условии, что *ширина* свободной поверхности b сохраняется постоянной для всех значений уровня свободной поверхности $z = \zeta$, встречающихся в волне. Это делает уравнение (16) точным, хотя уравнение (19) для скорости волны относительно жидкости принимает вид

$$c = (gA)^{1/2} b^{-1/2}, \tag{181}$$

когда площадь поперечного сечения воды изменяется от A_0 до A. Соответственно

$$P = \int_0^{p_e} (\rho_0 c)^{-1}\, dp_e = g^{1/2} b^{-1/2} \int_{A_0}^{A} A^{-1/2}\, dA = 2(c - c_0) \tag{182}$$

является другим линейным соотношением между P и c.

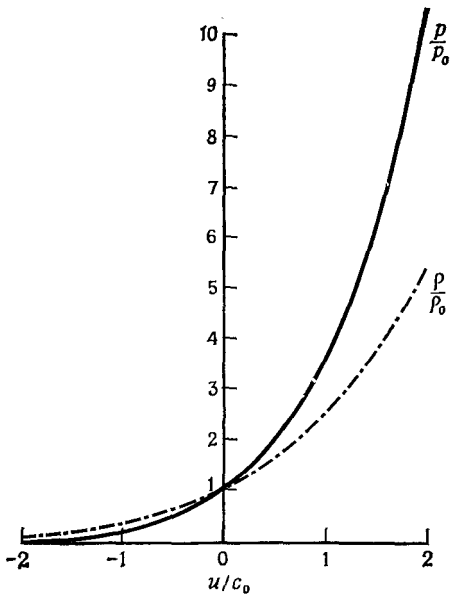

Рис. 29. Зависимость давления p и плотности ρ от скорости жидкости u в направлении распространения для простой волны в совершенном газе с отношением удельных теплоемкостей 1,40 при невозмущенных давлении, плотности и скорости звука p_0, ρ_0 и c_0 соответственно.

Простые волны в открытых каналах с постоянным поперечным сечением и с постоянной шириной свободной поверхности удовлетворяют поэтому уравнениям, очень похожим на (178), (179) и (180):

$$c = c_0 + \frac{1}{2}u; \quad u + c - c_0 = \frac{3}{2}u; \quad A/A_0 = \left(1 + \frac{1}{2}u/c_0\right)^2. \qquad (183)$$

Про уравнения (183) часто говорят, что описываемые ими простые волны ведут себя в точности как волны в совершенном газе с $\gamma = 2$, хотя такой газ вовсе не существует! Аналогия может быть действительно полезной в ограниченном контексте, т. е. применительно к простым волнам при выводе результатов для открытых каналов из результатов акустики с произвольным значением γ. Заметим, что избыток скорости сигнала $u + c - c_0$ здесь обусловлен на две трети переносом за счет собственного движения жидкости и на одну треть увеличившейся скоростью распространения волны.

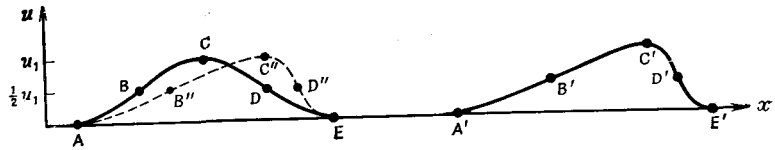

Рис. 30. Искажение волнового профиля в случае совершенного газа с постоянным отношением удельных теплоемкостей 1,40. Сплошные линии: перестройка волнового профиля ABCDE в A′B′C′D′E′ за время t, когда каждое значение u оказывается сдвинутым вправо на расстояние $c_0t + (1/2)(\gamma + 1)ut$ (например, расстояние CC′ равно $c_0t + (1/2)(\gamma + 1)u_1t$, а BB′ и DD′ равны $c_0t + (1/4)(\gamma + 1)u_1t$, тогда как AA′ и EE′ равны c_0t). Штриховая линия: все эти расстояния уменьшаются на c_0t, если волновой профиль построен как график зависимости от $X = x - c_0t$ (здесь AB″C″D″E), что делает искажение более наглядным.

Во всех случаях, когда имеются простые волны, наблюдается такое возрастание избыточной скорости сигнала при росте u; это свойство все более *искажает волновой профиль* по мере его продвижения. График зависимости u от x не может теперь в последующие моменты времени иметь ту же самую форму, что и в предыдущие (разд. 1.1); вместо этого сигналы, несущие большие значения скорости, смещаются вперед по отношению к сигналам с низкой амплитудой на величину, увеличивающуюся с ростом u. Для случаев, удовлетворяющих линейному соотношению (179), которое включает (183) как частный случай при $\gamma = 2$, волновой профиль испытывает *простое сдвиговое искажение* (рис. 30); за время t каждое значение u перемещается вправо на расстояние $c_0t + \frac{1}{2}(\gamma + 1)ut$ (сплошная линия), зависящее линейно от u.

Искажение волнового профиля, зависящее от времени, удобнее описывать в системе координат, которая движется со скоростью c_0 волн в невозмущенной жидкости. В этой системе сигнал движется со скоростью

$$v = u + c - c_0 \tag{184}$$

и пространственной координатой служит

$$X = x - c_0t. \tag{185}$$

Если избыток скорости сигнала v прямо пропорционален u, как в (179), то график зависимости u от X сдвинется за время t на величину $\frac{1}{2}(\gamma + 1)ut$ (штриховая линия на рис. 30), пропорциональную расстоянию над горизонтальной осью. В результате участки волнового профиля, имеющие положительный нак-

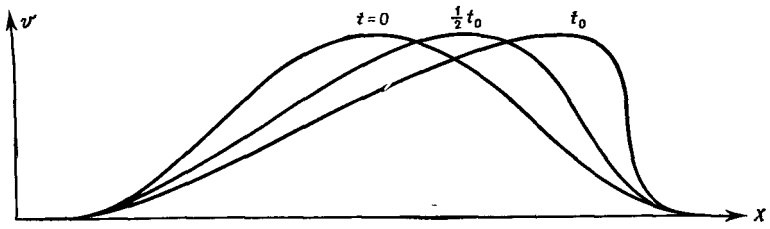

Рис. 31. Графики зависимости избыточной скорости сигнала v от $X = x - c_0 t$ показывают искажение произвольного волнового профиля. Спустя время t (здесь взяты значения 0, $t_0/2$ и t_0) каждое значение v будет находиться в точке, смещенной на расстояние vt вправо, так что волновой профиль подвергнется сдвигу с единичной скоростью.

лон, становятся положе, а участки с отрицательным наклоном — круче. Для этих последних участков, которым соответствуют волны *сжатия* (т. е. p_e со временем увеличивается), упомянутая выше загадка приобретает следующий вид: что же произойдет, когда отрицательный коэффициент наклона станет бесконечным?

Искажение простых волн самого общего вида, которые не обязательно удовлетворяют (179), оказывается равномерным сдвигом, если теперь переопределить «волновой профиль» как график зависимости v от X. Здесь скорость v постоянна (потому что u и c сами постоянны) вдоль линий C_+, удовлетворяющих уравнению $dX/dt = v$. Таким образом, в любой простой волне, рассматриваемой в этой системе координат (движущейся со скоростью c_0), переменная v удовлетворяет замечательному уравнению

$$\partial v/\partial t + v\partial v/\partial X = 0 \qquad (186)$$

которое устанавливает, что сигналы, несущие значение v, перемещаются со скоростью v.

На рис. 31 показано, что при этом любой волновой профиль имеет *единичную скорость сдвига*: спустя время t данное значение v находится в точке, смещенной на расстояние vt вправо, в то время как большее значение $v + \delta v$ оказывается на $(v + \delta v)\,t$ правее своего первоначального положения, и, следовательно, его расстояние δX от предыдущей точки *увеличивается* на $(\delta v)\,t$. Это означает, что величина $\delta X/\delta v$, *обратная коэффициенту наклона* волнового профиля, для данного v *увеличивается с единичной скоростью* во времени — важный результат, к которому можно прийти другим путем, дифференцируя (186)

по X и получая

$$(\partial/\partial t + v\partial/\partial X)\,[(\partial v/\partial X)^{-1}] = 1. \qquad (187)$$

Отсюда довольно неожиданно следует, что любое отрицательное значение величины, обратной коэффициенту наклона, должно за некоторое конечное время возрасти до нуля, что будет соответствовать бесконечному коэффициенту наклона. Это произойдет впервые для данного волнового профиля спустя время

$$t_0 = \min\,[-\,(\partial v/\partial X)^{-1}], \qquad (188)$$

и остается загадкой, что может произойти после этого момента времени; здесь, опять же, эта загадка лишь отмечается.

Искажение волнового профиля рассматривалось выше как изменение *пространственного* распределения в зависимости от времени; такое описание особенно удобно для задачи с начальными условиями, вроде задачи разд. 2.8. Для некоторых задач с граничными условиями, таких, как на рис. 28, *а* и *б*, искажение более удобно рассматривать как изменение *временно́го* распределения (например, заданного на открытом конце) в зависимости от расстояния x вдоль трубы. Это требует использования не движущейся пространственной координаты (185), зависящей от времени, а *временно́й* координаты, изменяющейся в зависимости от положения со скоростью, равной величине, *обратной* скорости сигнала. В самом деле, теория, как и прежде, будет иллюстрироваться посредством рис. 31, если волновой профиль рассматривать как график зависимости от модифицированной временной координаты

$$X_1 = c_0^{-1}x - t \qquad (189)$$

дефицита обратной скорости сигнала

$$v_1 = c_0^{-1} - (u + c)^{-1} \qquad (190)$$

(а не избыточной скорости сигнала v). Очевидно, что величина v_1 является постоянной вдоль линии C_+, для которой, *после замены переменной* x *на* t_1, уравнение (189) дает

$$\mathrm{d}X_1/dt_1 = c_0^{-1} - dt/dx = c_0^{-1} + (u + c)^{-1} = v_1, \qquad (191)$$

так что и закон искажения волнового профиля, проиллюстрированный на рис. 31, и уравнения (186) — (188) будут полностью применимы, если каждой переменной приписать индекс 1. В частности, уравнение (188) тогда дает *расстояние* вдоль тру-

бы, при котором впервые возникает загадка о временно́м волновом профиле с бесконечным коэффициентом наклона.

При возбуждении смещением (граничные условия поставлены и не для фиксированного времени, и не для фиксированного положения, а на движущемся поршне) задачу о том, как искажается однажды возникший волновой профиль, можно рассматривать с обеих точек зрения. С другой стороны, можно применять уравнение (173), описывающее приращение массы между двумя соседними линиями C_+, из которого следует, что две такие кривые впервые встретятся (что приводит к бесконечному коэффициенту наклона волнового профиля) в момент, когда (173) впервые обратится в нуль, а именно при

$$t = \min\{d\,[\tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,\tilde{c}(\tau)\,\tau]/d\,[\tilde{\rho}(\tau)\,\tilde{A}(\tau)\,\tilde{c}(\tau)]\}. \qquad (192)$$

Во всех этих задачах анализ вплоть до того момента, когда линии C_+ впервые встретятся, как мы видели, довольно понятен, однако концептуальные трудности продолжения его за этот момент представляются весьма значительными и должны быть подробно исследованы в следующих разделах.

2.10. Ударные волны

Более глубокое исследование, необходимое, чтобы разрешить вопрос, отмеченный в разд. 2.9, предлагается сначала для плоских звуковых волн, возбуждаемых простым движением поршня. Распространение анализа на более общие способы возбуждения и более общие типы продольных волн в жидкостях будет проведено соответственно в разд. 2.11 и 2.12.

На рис. 28, *в* изображено, каким образом поршень, имеющий первоначально *положительную* x-составляющую ускорения (направленную к жидкости), порождает звуковые волны, в которых более поздние сигналы, несущие более высокие избыточные давления, стремятся перегнать более ранние сигналы. Соответствующее искажение пространственного волнового профиля показано на рис. 31 вплоть до того момента времени (определяемого равенством (188)), когда сигналы впервые окажутся в одной точке и градиент станет бесконечным. Однако та же теория сдвигового искажения волнового профиля предсказывает в последующие моменты *невозможный* волновой профиль (рис. 32), для которого существуют три разных значения избыточной скорости сигнала для любого положения внутри определенного пространственного интервала (см. точки A, B, C на кривой при $X = X_1$ или точки D, E, F при $X = X_2$). В разд. 2.11 исследуется, что действительно произойдет в эти



Рис. 32. Волновой профиль, полученный в результате продолжения графика рис. 31 на более позднее время $t = (3/2)\,t_0$: физическая невозможность такого волнового профиля связана с наличием трех различных значений A, B и C для v при $X = X_1$ или трех значений D, E и F для v при $X = X_2$.

последующие моменты времени; при этом используются выводы из анализа более простого случая, проведенного в этом разделе.

Указанные трудности отсутствуют только в случае поршня, у которого x-составляющая ускорения всегда $\leqslant 0$ (рис. 33). Здесь более поздние сигналы слабее, чем более ранние, так что не может произойти их взаимодействие. Интересным особым случаем является импульсное движение поршня из жидкости, при котором поршень имеет нулевое ускорение, кроме очень

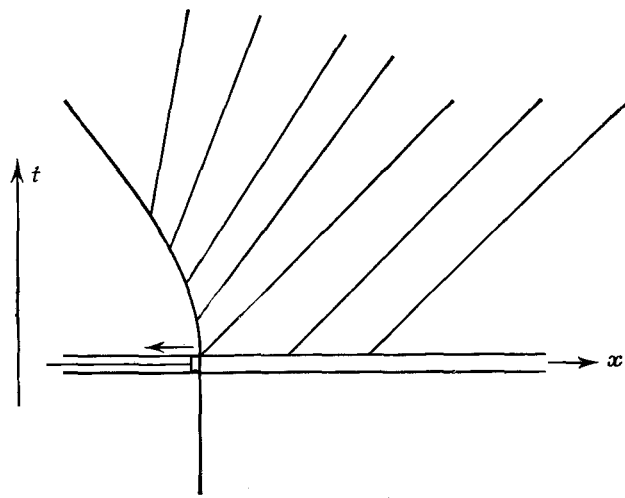

Рис. 33. Простая волна, вызванная поршнем, ускорение которого отрицательно (направлено *из* примыкающей жидкости).

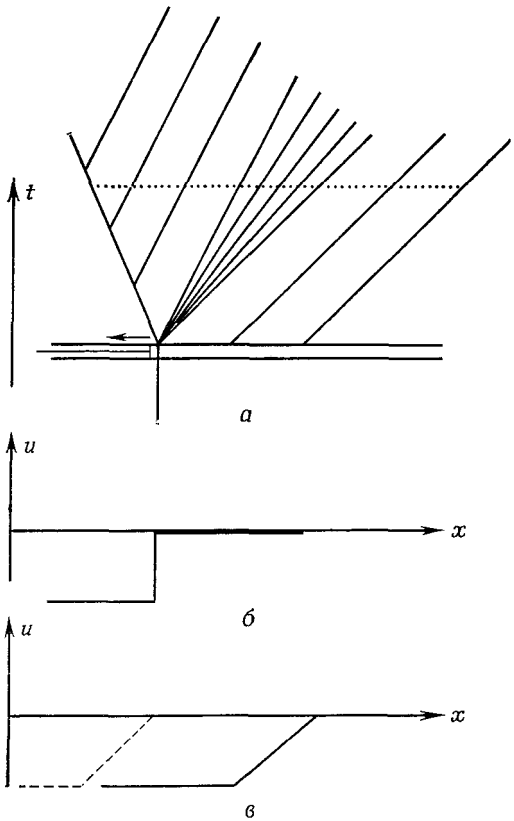

Рис. 34. Центрированная простая волна, вызванная внезапным движением поршня из примыкающей жидкости: *а* — линии C_+; *б* — начальный волновой профиль; *в* — волновой профиль в момент времени t, указанный также пунктирной линией на рис. *а*. Штриховая линия: другой способ изображения волнового профиля в момент времени t как функции от $X = x - c_0 t$.

кра́ткого интервала времени, когда его скорость в отрицательном x-направлении увеличивается чрезвычайно быстро (рис. 34). В течение этого короткого интервала он посылает веер сигналов с быстро уменьшающимися скоростями по существу из одной и той же точки. Такая «центрированная простая волна» изображена на рис. 34 для воздуха ($\gamma = 1{,}40$); здесь же (как и на рис. 30) приведены соответствующие пространственные волновые профили для моментов времени 0 и t. Первоначально разрывный волновой профиль становится значительно менее крутым в момент времени t; сигнал, несущий разрежение, затем

бежит в неподвижной системе отсчета направо (сплошная линия), хотя в системе, движущейся с невозмущенной скоростью звука (штриховая линия), сдвиг на расстояние (1/2) $(\gamma + 1)\,ut$ смещает сигналы, несущие отрицательные значения u, влево.

Резкий контраст выполаживанию крутых участков волнового профиля в волнах разрежения (рис. 33 и 34) представляет собой предсказанное для волн сжатия увеличение крутизны, показанное на рис. 31, которое приводит спустя конечное время к невозможному волновому профилю (рис. 32). В особом случае, аналогичном показанному на рис. 34, невозможная ситуация возникает немедленно (рис. 35): внезапное движение поршня в жидкость посылает опять по существу из одной точки веер сигналов с быстро *увеличивающимися* скоростями. Они сразу же перегоняют друг друга, и сразу же сдвиг порождает невозможный волновой профиль (рис. 35), поскольку то, что непосредственно этому предшествует для волновых профилей общего вида, а именно бесконечный наклон, показанный на рис. 31, порождается *с самого начала* подобным импульсным движением поршня.

Теперь рассмотрим, какие особенности реальных плоских звуковых волн предотвращают эти невозможные деформации волновых профилей в общем случае, а затем исследуем, принимая во внимание эти особенности, реальную волну, порожденную *импульсным* движением поршня в жидкость. Заметим, что единственными особенностями, которые могут изменить наши заключения о распространении простых волн, являются диссипативные процессы, так как теория Римана (разд. 2.8), лежащая в основе наших заключений, точна только для недиссипативных волновых процессов. Среди различных диссипативных процессов, рассмотренных в разд. 1.13 и 2.7, мы должны установить, следовательно, может ли какой-нибудь из них вызвать эффекты, достаточно большие и быстрые, чтобы противостоять мощной тенденции к быстрому преобразованию волнового профиля, показанному на рис. 31 и 32.

На первый взгляд это кажется маловероятным, так как было установлено, что диссипативные процессы производят в типичных случаях только постепенные изменения волнового профиля за счет ослабления волны, происходящие с умеренной скоростью из-за трения на стенке (разд. 2.7) и с обычно намного меньшей скоростью из-за диффузии звука δ (разд. 1.13). Мы хотим знать, однако, сможет ли какой-нибудь из этих процессов действовать достаточно мощно и быстро, когда коэффициент наклона волнового профиля станет крайне велик. В этой особой ситуации оказывается, что трение на стенке продолжает оставаться слишком слабым, но, что довольно любопытно, диф-

фузия вступает в свои права и становится чрезвычайно эффективной.

Причина этого в том, что коэффициент диффузии звука δ, определенный в разд. 1.13, дает добавку

$$\delta \partial\rho/\partial t \tag{193}$$

к продольному сжимающему напряжению p_{11}, добавку *сверх* значения, которое оно бы имело в недиссипативном движении. При нормальных скоростях изменения плотности $\partial\rho/\partial t$ это дополнительное сжимающее напряжение (193) весьма мало и медленно по своему воздействию (разд. 1.13). Напротив, там, где участок, соответствующий сжатию волнового профиля, становится *круче*, так что локальная скорость увеличения плотности стремится к *бесконечности* при приближении к определенному моменту, дополнительное сжимающее напряжение (193) растет пропорционально локальной скорости, пока оно не достигнет такого огромного локального значения, что вызовет остановку всего процесса увеличения крутизны (в сущности, за счет замедления сигналов позади этого участка и ускорения сигналов перед ним). Тогда для очень крутой волны сжатия, называемой «ударной волной», появится возможность продолжать распространяться со скоростью, промежуточной между скоростями сигналов за волной и перед ней с помощью уравновешивания процессов диссипации и увеличения крутизны; локальная крутизна волнового профиля саморегулируется так, чтобы мощное и быстрое стремление к увеличению крутизны компенсировалось сильными эффектами локальных напряжений (193).

При обсуждении этих процессов (здесь — для одного типа возбуждения и в разд. 2.11 — для более общих типов) мы не придаем особого значения вопросу о точном значении δ. Действительно, удвоение коэффициента диффузии вдвое уменьшает необходимую крутизну профиля в ударной волне и поэтому удваивает ее толщину; однако ударная волна остается настолько предельно тонкой по сравнению с другими характерными размерами, что ее поведение с учетом удваивания или без него — это в сущности то же самое разрывное изменение плотности. Соответственно всякие попытки улучшить линейную аппроксимацию (193) добавочных сжимающих напряжений или учесть действительную частотную зависимость вклада в δ, связанного с «запаздыванием» (разд. 1.13), здесь опущены.

Тот факт, что диссипация энергии с помощью механизмов разд. 1.13 может вызвать значительные эффекты при изменениях, настолько резких, что добавочное сжимающее напряжение (193) становится существенным, связан с тем обстоятельством,

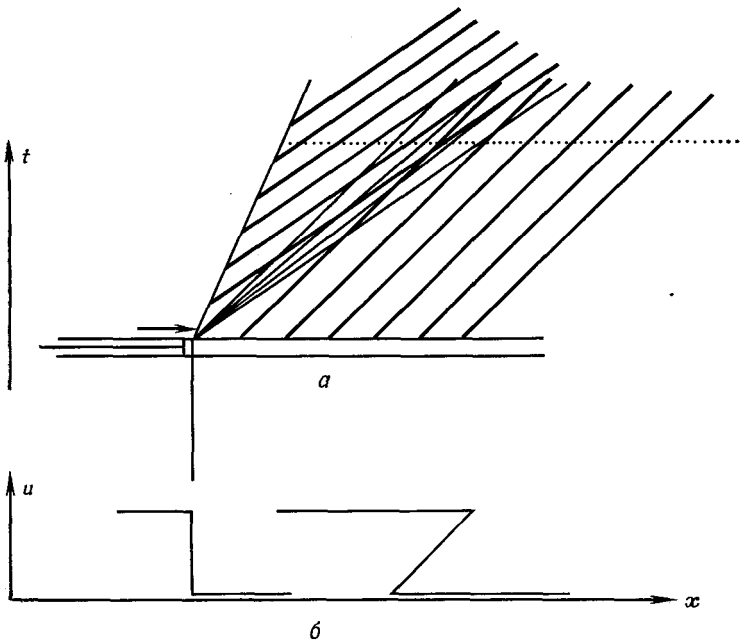

Рис. 35. Для внезапного движения поршня в невозмущенную жидкость теория простой волны немедленно предсказывает невозможные ситуации; *а* — пересечение линий C_+; *б* — формирование трехзначного волнового профиля.

что эти механизмы уменьшают, с одной стороны, энергию *синусоидальной* волны за один период на часть, пропорциональную $\omega\delta$, которая может быть существенной, если величина $\omega\delta$ достаточно велика. Высокие скорости изменения *уменьшают*, с другой стороны, эффективность механизма диссипации за счет трения (разд. 2.7); при этом относительная потеря энергии за период падает как $\omega^{-1/2}$ при увеличении ω (уравнение (142)). Таким образом, ударная волна, движение которой обусловлено конвективными процессами, хотя и может взаимодействовать с вязким пограничным слоем, по существу есть явление со слабым рассеиванием энергии.

Импульсное движение поршня в жидкость, на котором мы сейчас остановимся, *немедленно* порождает разрывный волновой профиль (рис. 35), для которого сигналы за ним движутся с большей скоростью, чем невозмущенная скорость c_0 сигналов перед ним, что сразу приводит при отсутствии диссипации к нереальным следствиям. Мы рассмотрим, может ли волна почти

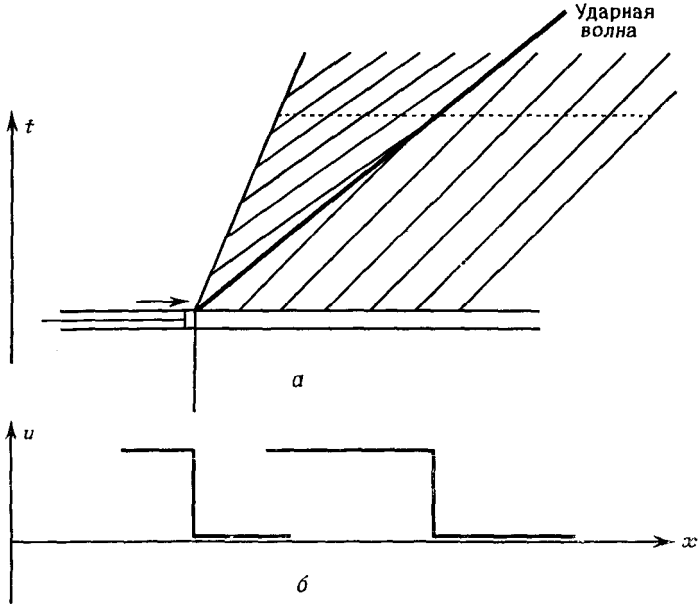

Рис. 36. Возникновение ударной волны при внезапном движении поршня в невозмущенную жидкость; добавочное сжимающее напряжение (193) в почти разрывной ударной волне достаточно велико, чтобы замедлить сигналы (распространяющиеся вдоль линий C_+) позади нее и ускорить сигналы перед ней (рис *а*), так что (рис. *б*) ударная волна может распространяться без изменения волнового профиля, показанного здесь также в более поздний момент времени, отмеченный на рис. *а* пунктирной линией.

мгновенно стабилизироваться в почти разрывной форме «ударной волны», т. е. переходной области с чрезвычайно малой толщиной, определенной так, что добавочное сжимающее напряжение (193) предотвращает дальнейшее увеличение крутизны, замедляя сигналы за ней и ускоряя сигналы перед ней, так что сама ударная волна распространяется с некоторой промежуточной скоростью в невозмущенную жидкость (рис. 36).

Теория будет развита в двух направлениях. В первом, которое при изучении ударных волн вполне достаточно для практических целей, рассматривают ударную волну как действительный разрыв (но с диссипацией), где скорость жидкости u изменяется мгновенно от нуля до постоянного значения u_1, которое она принимает в области между поршнем и ударной волной; при этом стремятся определить, используя закон сохранения массы и другие физические законы, как могут измениться другие переменные, такие, как давление и плотность. Во втором

направлении рассматривают действительную структуру ударной волны и ее толщину и подтверждают, что первое направление создает правильное представление о природе волны, когда она распространится на расстояния, намного большие, чем ее толщина.

Первая трактовка интересна тем, что показывает, как законы сохранения количества движения, массы и связанные с ними термодинамические принципы, получившие количественное выражение в случае непрерывных движений (в разд. 1.1 и 1.2 соответственно), могут быть также применены совершенно по-другому для анализа возможности существования *разрывных* движений жидкости. В случае, подобном изображенному на рис. 36, такой анализ позволяет определить скорость распространения разрывной волны U (которая может, как упоминалось раньше, *превосходить* c_0), а также давление p_1 и плотность ρ_1 в области за ней, если скорость жидкости u_1 в этой области равна скорости поршня.

Таким образом, масса невозмущенной жидкости с плотностью ρ_0, пересекаемая со скоростью U единицей площади ударной волны за единицу времени, равна

$$\rho_0 U. \tag{194}$$

Закон сохранения массы требует, чтобы эта жидкость выходила с тем же самым потоком массы за ударной волной с *относительной* скоростью $U - u_1$ и плотностью ρ_1, что дает

$$\rho_1 (U - u_1) = \rho_0 U. \tag{195}$$

Скорость приобретения этой жидкостью количества движения, а именно поток массы (194), умноженный на x-составляющую скорости u_1, которую она получает, можно приравнять к суммарной силе $p_1 - p_0$ в x-направлении, действующей на жидкость, пересекаемую единицей площади ударной волны, что дает

$$\rho_0 U u_1 = p_1 - p_0. \tag{196}$$

Представляет определенный интерес решить уравнения (195) и (196) относительно U и u_1, выразив эти величины только через давления и плотности:

$$U^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}, \qquad u_1^2 = \frac{(p_1 - p_0)(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 \rho_1}. \tag{197}$$

Здесь уравнение в «конечных разностях» для скорости ударной волны U является обобщением для случая разрывов с произвольной амплитудой дифференциального соотношения $c^2 = dp/d\rho$, к которому оно сводится для малых возмущений, в то время как уравнение для u_1 аналогично обобщает уравнение $u = (p - p_0)/(\rho_0 c)$. Действительно, законы сохранения мас-

сы и количества движения дают информацию того же типа, что и линейной теории (разд. 1.1), и ничего более; поэтому для завершения анализа необходимо рассмотрение соответствующих термодинамических принципов, как в разд. 1.2.

Поскольку внутри ударной волны диссипативные процессы важны, мы не можем считать, что энтропия сохраняется постоянной для жидкости, пересекаемой волной. Энтропия, согласно второму закону термодинамики, должна *возрастать* в результате превращения механической энергии в тепло. Тем не менее можно подсчитать баланс *полной энергии*, включающий как внутреннюю энергию жидкости, так и ее кинетическую энергию. Если внутренняя энергия на единицу массы изменилась с E_0 до E_1 при пересечении ударной волной, а кинетическая энергия возросла от 0 до $(1/2)\,u_1^2$, то при потоке массы (194) скорость изменения энергии жидкости, пересекаемой единицей площади ударной волны, будет

$$\rho_0 U\left(\tfrac{1}{2}u_1^2 + E_1 - E_0\right) = p_1 u_1. \tag{198}$$

Правая часть (198) выражает тот факт, что на такую жидкость действуют со стороны примыкающей жидкости силы p_1 сзади и p_0 спереди (см. (196)), из которых, однако, только жидкость за ударной волной находится в движении (со скоростью u_1) и, следовательно, производит работу (с мощностью на единицу площади $p_1 u_1$).

Подстановка в (198) выражений (197) для U и u_1 дает важный общий закон Гюгонио, связывающий изменение внутренней энергии поперек ударной волны со значениями давления и плотности впереди и позади нее:

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_0)(\rho_0^{-1} - \rho_1^{-1}). \tag{199}$$

Это уравнение лучше интерпретировать с помощью диаграммы давление — удельный объем (рис. 37), на которой изображены графики зависимости давления p от удельного объема ρ^{-1} *при постоянной энтропии* S. Согласно этой диаграмме, изменение внутренней энергии равно *площади под прямой*, соединяющей точки (ρ_0^{-1}, p_0) и (ρ_1^{-1}, p_1), которые изображают состояния жидкости впереди и позади ударной волны.

Заметим, что эти точки не могут, как точки A и B, лежать на одной и той же кривой постоянной энтропии, потому что вдоль такой кривой $dE = -p\,d\rho^{-1}$, что дает $E_1 - E_0$ в виде площади $\int_A^B p\,d\rho^{-1}$ под кривой между A и B. Эта кривая опре-

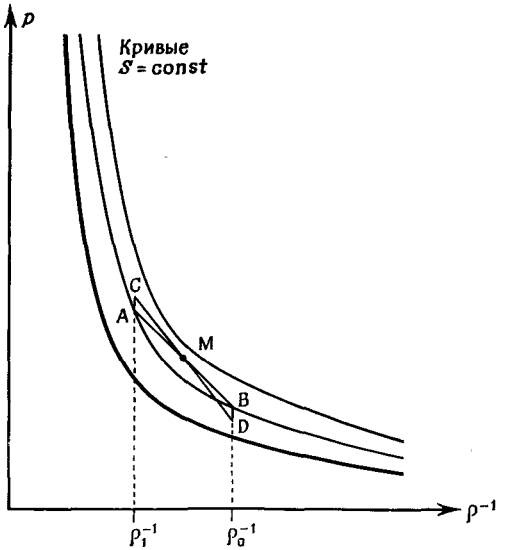

Рис. 37. На диаграмме давление — удельный объем увеличение внутренней энергии на ударной волне равно площади под прямой, соединяющей точки, изображающие состояния перед ударной волной и позади нее. Две точки A и B на одной и той же кривой постоянной энтропии не могут удовлетворить этому условию, но поворотом прямой AB вокруг ее средней точки M получим точки C и D, для которых оно выполнено.

деленно лежит ниже прямой AB, что означает, что уравнение (199) не может быть удовлетворено: сохранение энтропии поперек ударной волны невозможно.

Для того чтобы найти точки C и D, которые удовлетворяют уравнению (199), начнем вращать отрезок AB по часовой стрелке вокруг его средней точки M, что не изменит правую часть (199), но будет быстро увеличивать левую часть, так как E_1 возрастет на величину изменения энергии при постоянном объеме с возрастанием энтропии между A и C, в то время как E_0 уменьшится на величину, связанную с уменьшением энтропии между B и D. Вращение в эту сторону, таким образом, будет монотонно увеличивать $E_1 - E_0$, пока упомянутая нехватка (площадь между кривой AB и прямой AB) не скомпенсируется.

Этот способ получения решения (199) подтверждает, что энтропия на единицу массы S для любой ударной волны больше со стороны высокого давления, чем со стороны низкого давления. Другими словами, разрывные волны, приводящие

к росту давления, подчиняются второму закону термодинамики и могут быть названы «ударными волнами». Наоборот, разрывные волны, приводящие к падению давления, скажем от C до D, хотя они также удовлетворяют уравнению Гюгонио (199), никогда не могут появиться, потому что это означало бы уменьшение энтропии. Однако невозможность таких волн не вызывает удивления, так как мы знаем, что только волны *сжатия* (с увеличивающимся p) проявляют стремление к увеличению крутизны и, следовательно, к образованию ударной волны! Любые случайно возникшие разрывы, давление на которых мгновенно падает, сглаживаются, превращаясь в непрерывные возмущения (рис. 34).

На самом деле предположение, использованное для доказательства того, что скорость сигнала $u + c$ в простой волне *возрастает с ростом* p, не есть необходимое следствие термодинамических законов, но, по-видимому, является для жидкости общим правилом. Кроме того, оно *в точности* эквивалентно предположению, использованному выше при анализе рис. 37, а именно, что кривая постоянной энтропии в координатах (ρ^{-1}, p) вогнута вверх $(d^2\rho^{-1}/dp^2 > 0)$. Эта эквивалентность следует из уравнений $du = dp/(\rho c)$ и $dp = c^2 d\rho$ для простой волны, из которых может быть показано, что

$$d(u+c)/dp = \frac{1}{2}\rho^2 c^3 d^2\rho^{-1}/dp^2. \tag{200}$$

Это значит, что жидкости, в которых только волны сжатия могут увеличивать свою крутизну, образуя разрывы, *являются* жидкостями, в которых только разрывы, создающие сжатие, могут удовлетворять второму закону термодинамики.

Для важного частного случая совершенного газа с постоянной удельной теплоемкостью c_v, и поэтому с постоянной величиной

$$\gamma = (R + c_v)/c_v, \tag{201}$$

уравнение Гюгонио (199) может быть решено явно. В совершенном газе (разд. 1.2) изменение внутренней энергии $E_1 - E_0$ зависит только от изменения температуры $p/(R\rho)$, что при постоянной теплоемкости $c_v = (\gamma - 1)^{-1}R$ дает

$$E_1 - E_0 = c_v\,[p_1/(R\rho_1) - p_0/(R\rho_0)] = \\ = (\gamma - 1)^{-1}(p_1\rho_1^{-1} - p_0\rho_0^{-1}). \tag{202}$$

С использованием *интенсивности ударной волны*, определяемой как относительное увеличение давления

$$\beta = (p_1 - p_0)/p_0, \tag{203}$$

уравнения (199) и (202) могут быть разрешены для отношения плотностей, что дает

$$\rho_1/\rho_0 = [2\gamma + (\gamma + 1)\,\beta]/[2\gamma + (\gamma - 1)\,\beta] \tag{204}$$

— простое соотношение между точками, подобными C и D на рис. 37. Тогда уравнения (197) дают выражения

$$\frac{U}{c_0} = \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\beta\right)^{1/2}, \quad \frac{u_1}{c_0} = \frac{\beta}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\beta\right)^{-1/2} \tag{205}$$

для скорости ударной волны U (которая, как и предполагалось, оказывается всегда больше, чем невозмущенная скорость звука c_0) и для скорости жидкости u_1 за ударной волной. Скорость звука c_1 за ударной волной удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 + \frac{p_1/\rho_1}{p_0/\rho_0} &= (1+\beta)\frac{2\gamma+(\gamma-1)\,\beta}{2\gamma+(\gamma+1)\,\beta}, \\ \frac{u_1}{c_1} &= \frac{\beta}{\gamma}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\beta\right)^{-1/2}(1+\beta)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{206}$$

где первое выражение интересно потому, что оно представляет собой также *отношение температур* T_1/T_0 при переходе через ударную волну, а второе выражение может быть интерпретировано как *локальное число Маха* для движения жидкости за ударной волной.

Мы видим, что ударные волны существуют для любой положительной интенсивности β и что все приведенные выше соотношения являются возрастающими функциями β. При $\beta \to \infty$ отношение плотностей ρ_1/ρ_0 и число Маха u_1/c_1 асимптотически стремятся к $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ и $\{2/[\gamma(\gamma - 1)]\}^{1/2}$ соответственно, в то время как остальные отношения возрастают неограниченно. Все эти отношения изображены на рис. 38 для атмосферного воздуха с $\gamma = 1{,}40$; эти графики являются хорошими приближенными зависимостями для ударной волны при условии, что температуры T_0 и T_1 перед ударной волной и за ней *обе* лежат в области от 100 K до приблизительно 1000K.

При этих условиях рис. 38 или соответствующий график, построенный по закону Гюгонио (199) для других условий или других жидкостей, дает лишь слегка упрощенное описание всего движения жидкости, вызванного импульсным движением поршня со скоростью u_1 в невозмущенную жидкость (ее состояние обозначается индексом нуль). Это позволяет сразу найти интенсивность ударной волны $\beta = (p_1 - p_0)/p_0$ через заданное значение u_1/c_0, после чего скорость ударной волны U и значения плотности и температуры между поршнем и ударной волной могут быть немедленно определены. На рис. 38 показа-

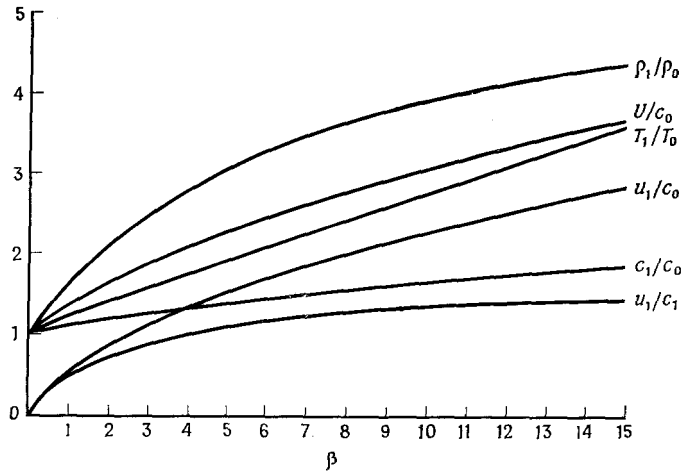

Рис. 38. Для ударной волны с интенсивностью β, движущейся в первоначально невозмущенном совершенном газе с отношением удельных теплоемкостей 1,40, изображены в диапазоне $0 < \beta < 15$ следующие безразмерные величины: скорость волны U и изменение некоторых функций при переходе через ударную волну (скорость жидкости изменяется от 0 до u_1, плотность — от ρ_0 до ρ_1, температура — от T_0 до T_1 и скорость звука — от c_0 до c_1).

но, в частности, что внезапные движения поршня со скоростями, сравнимыми с c_0 или бо́льшими, тормозятся чрезвычайно большими избыточными давлениями и вызывают очень высокие температуры воздуха.

Основное упрощение в этой картине — отсутствие какой-либо оценки толщины ударной волны. Мы закончим этот раздел описанием того, как может быть оценена толщина хотя бы *слабой* ударной волны.

Важный ключ дается законом Гюгонио (199), который определяет прямую линию, соединяющую начальное и конечное состояния на диаграмме давление — удельный объем (рис. 37). Дальнейшее рассмотрение показывает, что эта линия имеет и бо́льшую важность, как график зависимости продольного сжимающего напряжения p_{11} от удельного объема ρ^{-1} поперек ударной волны. Чтобы увидеть это, мы рассмотрим плоскость, движущуюся внутри ударной волны, на которой плотность все время имеет некоторое частное значение ρ; пусть продольное напряжение на этой плоскости будет p_{11}, а скорость жидкости u. Тогда законы сохранения массы и количества движения для жидкости, пересекаемой со скоростью U ударной вол-

ной, приводят к тем же уравнениям (195) и (196) для жидкости, проходящей через эту плоскость, если заменить в этих уравнениях ρ_1, p_1 и u_1 на ρ, p_{11} и u; как и прежде, они дают первое из уравнений (197), которое в виде

$$p_{11} - p_0 = \rho_0^2 U^2 (\rho_0^{-1} - \rho^{-1}) \qquad (207)$$

является вышеупомянутым линейным соотношением между p_{11} и ρ^{-1} внутри ударной волны.

Значит, зависимость продольного напряжения в ударной волне от ρ^{-1} представляется прямой линией, тогда как (рис. 37) аналогичные графики зависимости давления от ρ^{-1} в процессах с постоянной энтропией всегда имеют обращенную вниз выпуклость. Следовательно, *дополнительная часть* продольного напряжения p_{11}, являющаяся добавкой к значению, которое эта величина имеет для процесса с постоянной энтропией, и равная, согласно (193), $\delta\partial\rho/\partial t$, максимальна в середине ударной волны и падает до нуля на ее концах. Это определяет скорость, с которой плотность должна завершить свое изменение поперек ударной волны.

Рассмотрим подробно случай малого относительного изменения плотности поперек ударной волны, когда соображения о малости возмущений (разд. 1.13), приводящие к (193), должны быть наиболее оправданными и когда можно с хорошей степенью точности на рис. 37 взять в качестве прямой (207) отрезок AB; по существу это возможно из-за того, что изменение энтропии на ударной волне (превращающее эту прямую в прямую CD) пропорционально площади между отрезком AB и кривой AB, а эта площадь по порядку малости при стремлении A к B пропорциональна *кубу* полного изменения плотности, тогда как дополнительное напряжение (193), т. е. превышение отрезка AB над кривой AB, остается значительно большим (порядка *квадрата*).

Таким образом, уравнение для ρ, в котором оставлены только квадраты возмущений, имеет вид

$$\delta\partial\rho/\partial t = (U^2 - c_0^2)(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_0)/(\rho_1 - \rho_0), \qquad (208)$$

где правая часть равна расстоянию между прямой (207) и параболой, аппроксимирующей ту кривую с постоянной энтропией, которая пересекает ее в точках $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_1$ и для которой $dp/d\rho = c_0^2$ при $\rho = \rho_0$. Решение уравнения (208) для ударной волны с центром в точке $x = Ut$, а именно

$$\rho - \rho_0 = (\rho_1 - \rho_0)\{1 + \exp[(U^2 - c_0^2)(x - Ut)/(U\delta)]\}^{-1}, \qquad (209)$$

изображено на рис. 39.

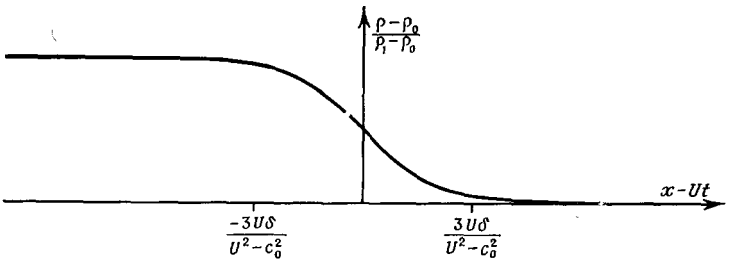

Рис. 39. Распределение плотности (209) внутри слабой ударной волны; обратите внимание на то, что 90% увеличения плотности происходит между отмеченными точками, а это означает, что для данного x время возрастания плотности (210) чрезвычайно мало.

Этот результат демонстрирует чрезвычайную быстроту изменений в ударной волне: время возрастания плотности, определенное как время, на которое приходится 90% увеличения плотности в центральной части ударной волны, равно

$$6\delta/(U^2 - c_0^2) \tag{210}$$

(что при нормальных атмосферных условиях составляет величину порядка 10^{-9}с, деленную на относительное возрастание плотности $(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0$). Обычно этот процесс является настолько быстрым, что только слагаемые δ_v и δ_c, обусловленные вязкостью и теплопроводностью, могут сделать свои полные вклады в δ (разд. 1.13). Более важно то, что возрастание плотности завершается за такое короткое время и на таких коротких расстояниях (скорость волны, умноженная на время возрастания), что рассмотрение ударной волны в сущности как разрыва, удовлетворяющего уравнениям (203) — (206), пригодно для всех практических целей.

2.11. Теория простых волн, содержащих слабые ударные волны

Взгляд на ударную волну как на разрыв, который распространяется в покоящийся воздух со скоростью волны U, значительно большей, чем невозмущенная скорость звука c_0, установлен в разд. 2.10 для очень частного случая ударной волны, достигающей своей полной интенсивности *немедленно*, как только импульсное движение поршня создает разрывный волновой профиль: ударная волна тогда остается по существу разрывной благодаря балансу между конвекцией и диффузией и сохраняет

свою интенсивность до тех пор, пока поршень продолжает двигаться со скоростью u_1, согласующейся с постоянными условиями за ударной волной.

Исследуем теперь возможность изучения значительно более общего типа распространения волн, когда искажение простой волны (разд. 2.9) происходит *непрерывно* вплоть до момента, при котором коэффициент наклона волнового профиля стремится к бесконечности, и диффузия может стать эффективной, способствуя формированию ударной волны, т. е. по существу опять *разрыва*, но разрыва, интенсивность которого может возрастать до максимума по мере дальнейшего сдвига волнового профиля и затем *уменьшаться*, после того как поршень прекратит совершать работу над жидкостью.

Для такого изучения необходимо иметь возможность, используя соответствующие физические законы, рассчитать движения жидкости, охватывающие области с постепенно меняющимися параметрами, *разделенные* подвижными разрывами. К счастью, для таких движений соотношения, которые выполняются на разрыве, остаются в сущности такими же, как и в разд. 2.10. Даже если интенсивность ударной волны и скорость могут меняться со временем, законы, определяющие скорости изменения массы, количества движения и энергии для жидкости, пересекаемой единицей площади ударной волны в каждый момент времени, по-прежнему имеют вид уравнений (195), (196) и (198), при условии, что индексы 0 и 1 в этих уравнениях заменены *индексами* a *и* b, отмечающими значения функций непосредственно *перед* ударной волной *и за* ней, и что в качестве скоростей ударной волны U и жидкости непосредственно за ней u_b выбраны скорости в такой системе координат, в которой скорость жидкости u_a непосредственно перед ударной волной равна нулю; таким образом, U и u_b являются скоростями *относительно* движения жидкости непосредственно перед ударной волной. Из полученных уравнений можно опять вывести закон Гюгонио (199), который после этих изменений станет таким:

$$E_b - E_a = \frac{1}{2}(p_b + p_a)(\rho_a^{-1} - \rho_b^{-1}). \tag{211}$$

Можно подумать, что соотношения, описывающие непрерывно меняющуюся часть движения жидкости, должны аналогично принимать форму уравнений простых волн, полученных в разд. 2.8 и 2.9. Однако такое утверждение не может быть вполне справедливо для области за ударной волной, так как выводы в этих разделах полностью основаны на предположении о том, что энтропия на единицу массы, S, сохраняется постоянной. Это предположение пригодно для жидкости, не испытав-

шей никакой диссипации (например, находящейся перед ударной волной), но из уравнения (211) следует, что вся жидкость, через которую прошла ударная волна, претерпевает увеличение S, величина которого зависит от интенсивности ударной волны $\beta = (p_b - p_a)/p_a$. Соответственно ударная волна с переменной интенсивностью β должна оставлять за собой движение жидкости с непостоянной энтропией S, где соотношения простой волны не могут выполняться точно.

К счастью, существует обширный класс важных волновых движений с участием ударных волн, где эти соотношения тем не менее выполняются с чрезвычайно высокой степенью точности, а именно те из них, в которых ударная волна остается относительно *слабой*. Мы отметили в конце разд. 2.10, что закон Гюгонио дает изменение энтропии на ударной волне порядка β^3, если ее интенсивность β мала; причина этого в сущности та, что площадь между прямой линией AB (рис. 37) и кривой оказывается *малой величиной порядка куба расстояния* AB при уменьшении последнего. Поэтому *слабая* ударная волна может вызывать лишь пренебрежимо малые изменения энтропии.

Например, в совершенном газе с постоянной удельной теплоемкостью c_v энтропия (разд. 1.2) удовлетворяет уравнению

$$TdS = dE + pd\rho^{-1} = c_v dT + pd\rho^{-1}, \quad \text{где} \quad T = p/(R\rho), \tag{212}$$

которое с учетом (201) означает, что

$$S = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + \text{const}; \tag{213}$$

это находится в соответствии с уравнением (176), согласно которому величина p/ρ^γ постоянна, если S постоянна. Изменение энтропии на ударной волне $S_b - S_a$, используя (204) для отношения плотностей ρ_b/ρ_a, можно поэтому записать как

$$(S_b - S_a)/c_v = \ln(1 + \beta) - \gamma \ln\{[2\gamma + (\gamma + 1)\beta]/[2\gamma + (\gamma - 1)\beta]\}. \tag{214}$$

Справедливость предположения о том, что изменение энтропии на ударной волне пропорционально β^3 при $\beta \to 0$, становится очевидной из выражения

$$(\gamma^2 - 1)\beta^2(1 + \beta)^{-1}[2\gamma + (\gamma + 1)\beta]^{-1}[2\gamma + (\gamma - 1)\beta]^{-1} \tag{215}$$

для производной по β от правой части (214), которое, очевидно, ведет себя как $(\gamma^2 - 1)\beta^2/(4\gamma^2)$ при $\beta \to 0$, хотя при больших β оно растет более медленно. Отсюда выводим, что изменение самой энтропии удовлетворяет соотношению

$$(S_b - S_a)/c_v \sim (\gamma^2 - 1)\beta^3/(12\gamma^2) \quad \text{при} \quad \beta \to 0, \tag{216}$$

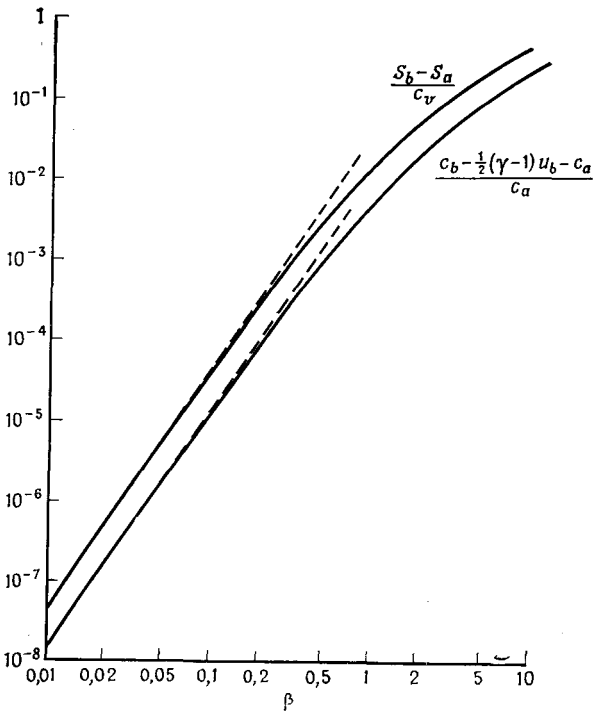

Рис. 40. Изменения энтропии S и величины $c - (1/2)(\gamma - 1)u$ в безразмерной форме (214) и (217) на ударной волне в совершенном газе с $\gamma = 1{,}40$, изображенные в логарифмических координатах как функции интенсивности ударной волны β. Штриховые линии: соответствующие изменения в предельном случае при $\beta \to 0$.

т. е. пропорционально кубу интенсивности ударной волны, хотя при больших β оно растет более медленно.

Рис. 40 подтверждает такое поведение изменения энтропии на ударной волне для атмосферного воздуха ($\gamma = 1{,}40$). Здесь построены как график зависимости от β точного выражения (214) для $(S_b - S_a)/c_v$, так и график зависимости предельного выражения (216), которое при $\beta \to 0$ превращается в $0{,}041\ \beta^3$. Обе зависимости хорошо согласуются при малых β, но при $\beta = 0{,}5$ точное значение $(S_b - S_a)/c_v$ достигнет только 0,0027, что составляет примерно половину значения, которое дает предельное выражение (216). Согласно уравнению (213), это означает, что ошибка при расчете давления по данной плотности с использованием изоэнтропического уравнения (176) будет всего лишь 0,27%, если интенсивность ударной волны $\beta =$

$= 0{,}5$, однако эта ошибка становится значительно большей при больших интенсивностях. Отсюда следует, что для течений, содержащих ударные волны, которые являются «слабыми» (в том смысле, что их интенсивность β меньше 0,5), ошибки, вносимые предположением о постоянстве энтропии во всем потоке, могут быть весьма малыми, даже если малые изменения энтропии, изображенные на рис. 40, являются результатом процессов диссипации энергии внутри ударной волны, которые существенны (разд. 2.10) для самого ее существования.

Следовательно, плоская волна, распространяющаяся в покоящемся воздухе, до тех пор, пока ударные волны в ней имеют интенсивность, меньшую 0,5, будет удовлетворять с высокой степенью точности в любой *непрерывной* части волны соотношениям, которые Риман вывел в предположении постоянства энтропии, а именно соотношениям для простых волн, включая равенство (178). Мы можем сделать независимую проверку этого заключения, так как оно означает, что с высокой степенью точности величина $c - (1/2)(\gamma - 1)u$ должна иметь одно и то же значение, равное c_0, по обе стороны такой ударной волны. Уравнения (205) и (206), с другой стороны, точно определяют относительное изменение этой величины поперек ударной волны как

$$\frac{c_b - (1/2)(\gamma-1)u_b - c_a}{c_a} = \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\beta\right)^{-1/2} \times \left[(1+\beta)^{1/2}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta\right)^{1/2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta\right] - 1 \qquad (217)$$

в системе координат, в которой скорость u_a непосредственно перед ударной волной равна нулю. Рис. 40 показывает, что эта величина чрезвычайно мала (меньше чем 0,001) при $\beta < 0{,}5$.

Это подтверждает сделанное ранее заключение, которое существенно облегчает изучение простых волн: даже после появления разрыва в форме слабой ударной волны все непрерывные части волны удовлетворяют тем же законам распространения, какие были установлены в разд. 2.9. Применение этих законов к расчету искажения волнового профиля после момента, при котором предсказанный коэффициент наклона оказывается бесконечным, теперь выглядит целесообразным, потому что, если даже волновой профиль в целом, рассчитанный таким способом, принадлежит к типу, описанному (рис. 32) как «невозможный», *каждая непрерывная часть* реального профиля должна быть частью волнового профиля, рассчитанного таким способом.

Поэтому этот реальный волновой профиль в целом должен содержать разрыв в каком-то месте того пространственного

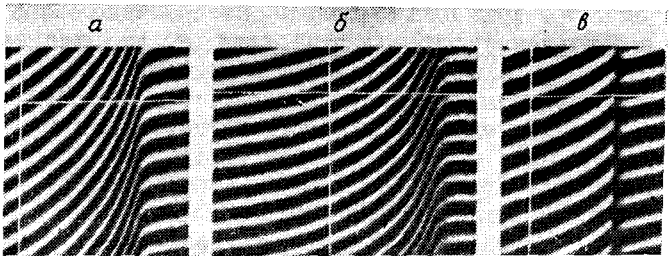

Рис. 41. Образование ударной волны в воздухе. Интерферограммы волнового профиля в последовательные моменты *а*, *б* и *в*. Каждая темная линия по существу представляет собой график зависимости плотности, взятой со знаком минус (в соответствующем масштабе), от расстояния. В момент *а* эти линии имеют умеренный наклон, в момент *б* они становятся круче, а в момент *в* — разрывными.

интервала, где рассчитанная простая волна трехзначна; на рис. 32, например, разрыв мог бы проходить от A до C, разделяя непрерывные части волнового профиля, лежащие справа от A и слева от C. Но он мог бы проходить и в другом месте профиля, например от D до F, разделяя его непрерывные части, лежащие справа от D и слева от F. Экспериментальное подтверждение того, что увеличение крутизны волнового профиля действительно приводит в конечном итоге к образованию волнового профиля, содержащего подобный разрыв, приведено на рис. 41.

В каждый момент распространения волны выбор между различными возможными положениями разрыва внутри этого пространственного интервала можно сделать на основании уравнений ударной волны, которые были выведены с помощью законов сохранения (баланса массы, количества движения и энергии), примененных к жидкости, пересекаемой разрывом. Естественная, но трудоемкая процедура, которая раньше представлялась единственно возможной,— это использовать выражение вроде

$$(\rho_b/\rho_a)^{1/2}(p_b - p_a)^{1/2}\,(\rho_b - \rho_a)^{-1/2} \qquad (218)$$

для скорости ударной волны (относительно жидкости непосредственно перед ней) для того, чтобы определить смещение ударной волны между последовательными моментами и, таким образом, рассчитать ее положение, продвигаясь малыми шагами вперед по времени от момента, когда она впервые появилась. Значительно более удобная процедура, открытая позднее,

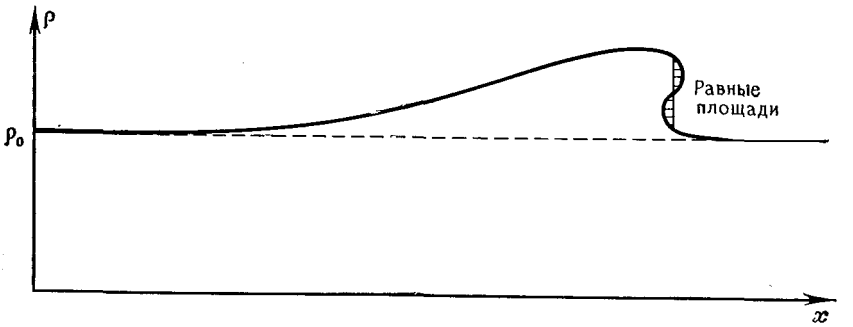

Рис. 42. Поскольку закон сохранения массы должен выполняться как для распределения плотности, выведенного из теории простых волн, так и для истинного распределения плотности при наличии ударной волны, соответствующий разрыв должен быть помещен туда, где его введение не изменит площади между графиком ρ и осью x.

использует закон сохранения массы непосредственно для определения положения ударной волны в любой момент времени независимо от каких-либо вычислений ее предшествующих положений.

Эта улучшенная процедура исходит из того факта, что любое решение в виде простой волны, включая даже невозможное, вроде показанного на рис. 32, является точным решением уравнений движения, к которым относится уравнение сохранения массы, или уравнение неразрывности. Другими словами, такое решение удовлетворяет закону сохранения полной массы жидкости на единицу площади поперечного сечения $\int \rho dx$. Плотность ρ в простой волне однозначно связана со скоростью жидкости u или с избыточной скоростью сигнала v (разд. 2.9), и поэтому, когда любой волновой профиль, аналогичный изображенному на рис. 32, определяется по правилам простого сдвигового искажения, поясненным на рис. 31, легко получить соответствующее распределение плотности как функцию от x.

На рис. 42 показано такое распределение плотности, выведенное для «невозможного» волнового профиля, приведенного на рис. 32, но с необходимостью удовлетворяющего условию, что интеграл $\int \rho dx$ (площадь между кривой и осью x) описывает неизменную полную массу жидкости на единицу площади поперечного сечения. С другой стороны, *реальный* волновой профиль, содержащий разрыв, должен удовлетворять тому же самому условию сохранения массы. Это позволяет удобным

и единственным образом фиксировать положение разрыва, как именно то, которое не вызывает изменения интеграла $\int \rho dx$. На рис. 42 показано, как легко на глаз провести вертикальный отрезок, который сохраняет неизменной площадь между кривой и осью x, потому что заштрихованные участки, заключенные между этим отрезком и кривой, лежат по разные стороны от него и *имеют одинаковую площадь*.

Дополнительное упрощение при практическом использовании этой процедуры связано с тем, что диапазоны изменения плотности внутри слабой ударной волны таковы, что характерное для простой волны соотношение между плотностью ρ и добавочной скоростью сигнала v можно с достаточной степенью точности считать линейным в этих диапазонах. Это означает, что построение, выполненное на графике зависимости ρ от x (рис. 42), можно непосредственно применять к графику зависимости v от X (рис. 32), что с хорошей степенью точности дает идентичный результат (приводя фактически к выбору отрезка DFE как правильного положения разрыва на рис. 32), так как *линейное преобразование ординаты* (переход от ρ к v) не может изменить равенства площадей двух заштрихованных сегментов на рис. 42.

Хотя здесь опущен полный анализ причин, по которым введение этого дополнительного упрощения лишь незначительно ухудшает точность теории, можно отметить, что слабая ударная волна даже интенсивности 0,5 (т. е. на верхнем пределе) вызывает в атмосферном воздухе изменение избыточной скорости сигнала v, равное 0,359 c_a, и что отношение плотностей при этом равно $\rho_b/\rho_a = 1{,}333$, что только на 2,6% больше получаемого в предположении о линейной зависимости плотности от v; это максимальная ошибка, выраженная в процентах, для $\beta \leqslant 0{,}5$. Кроме того, идея о том, что результат построения разрыва по участкам равной площади можно непосредственно применить к «невозможному» волновому профилю, заданному зависимостью от X, допускает проверку в особом случае (рис. 35) *импульсного* движения поршня в жидкость. Очевидно, это построение помещает разрыв точно в центре Z-образной фигуры на рис. 35, откуда следует, что избыточная скорость ударной волны $U - c_0$ равна половине избыточной скорости сигнала $u_1 + c_1 - c_0 = v_1$, наблюдаемой за ударной волной. Точные значения $(U - c_0)/(u_1 + c_1 - c_0)$, вычисленные по уравнениям (205) и (206), лежат между 0,500 и 0,543 при $0 < \beta < 0{,}5$; это подтверждает, что результаты теории «слабых ударных волн» являются хорошим приближением в этом диапазоне интенсивностей.

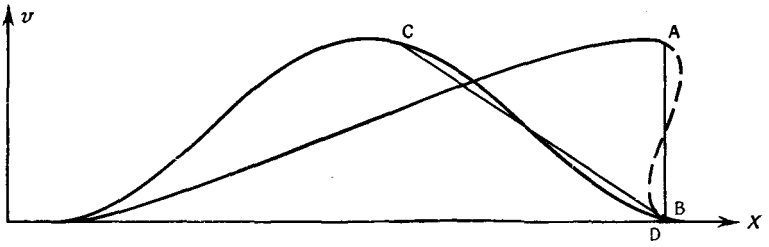

Рис. 43. Общее построение для относительно слабой ударной волны AB, сформировавшейся в ходе искажения волнового профиля (правило Уизема). Штриховые линии показывают отброшенные равновеликие участки волнового профиля, полученного в результате сдвига в течение времени t. В течение этого времени прямая CD, обратная величина коэффициента наклона которой равна $-t$, отсекающая равновеликие сегменты на исходном волновом профиле, превращается в вертикальную прямую AB.

Из предыдущих рассуждений вытекает очень простая процедура для определения искажения волнового профиля для простых волн, содержащих слабые ударные волны. Если рассматривать волновой профиль как график зависимости избыточной скорости сигнала v от $X = x - c_0 t$, то можно описать его искажение следующим образом (рис. 31): сдвиг происходит все время с единичной скоростью при условии, что там, где необходимо сохранить однозначность волнового профиля, вводится вертикальный разрыв, отсекающий участки равной площади с каждой стороны от него. На рис. 43 показано искажение волнового профиля за время t, рассчитанное этим способом; как и на рис. 31, каждое значение v находится в точке, смещенной на расстояние vt вправо; здесь, кроме того, изображены заштрихованные участки равной площади, которые отбрасываются при введении разрыва AB.

Полезно было бы узнать, какая именно прямая (обозначим ее CD), проведенная на исходном волновом профиле, будет переведена искажением сдвига, имеющим единичную скорость в эту вертикальную прямую линию AB спустя время t. Ответ на этот вопрос таков: во-первых, CD должна быть прямой, для которой величина, обратная коэффициенту наклона, равна $-t$, потому что единичный сдвиг, который увеличивает подобную величину для любой линии с единичной скоростью, должен увеличить ее до нуля за время t; во-вторых, площади сегментов, лежащих между CD и кривой по обе стороны от CD, должны быть равны, так как обе эти площади остаются неизменными в процессе сдвига, переводящего их в равные сегменты, лежащие между AB и искаженным волновым профилем.

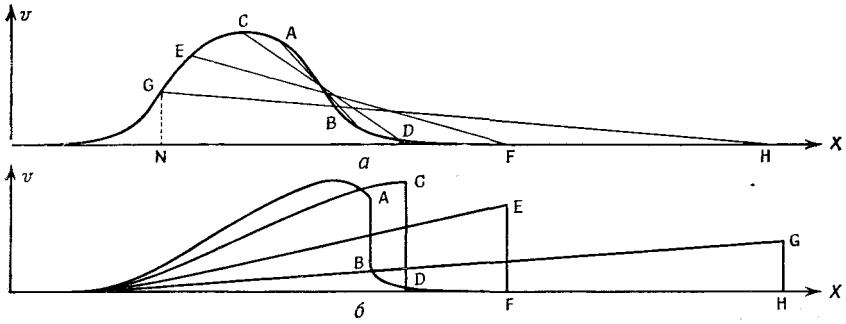

Рис. 44. Применение правила Уизема к волновому профилю, состоящему из единичного импульса сжатия; на исходном волновом профиле (рис. *а*) четыре линии, соответствующие различным значениям $-t$ (величины, обратной коэффициенту угла наклона), отсекающие участки равной площади, определяют разрывные изменения v на ударной волне в эти четыре различных момента времени t, когда искажения волнового профиля выглядят, как на рис. *б*.

Существование такой хорды CD на исходном волновом профиле, удовлетворяющей этим двум условиям (величина, обратная коэффициенту наклона, есть $-t$, а площади упомянутых сегментов равны), служит гарантией того, что спустя время t волновой профиль будет содержать ударную волну, в которой v увеличивается скачком от своего значения в точке D до своего значения в точке C.

Эти условия дают правило Уизема, гласящее, что определенное простое построение, выполненное на исходном волновом профиле, полностью определяет будущую историю образования, роста и затухания слабого скачка внутри волны в ходе ее развития. Для каждого из последовательных значений t, бóльших, чем время формирования ударной волны, нужно провести такую хорду, что величина, обратная ее коэффициенту наклона, равна $-t$, а площади двух сегментов, лежащих между этой хордой и исходным профилем по обе стороны от нее, равны между собой; тогда ординаты концов построенной хорды будут указывать значения U, между которыми эта величина в ударной волне в момент времени t изменится скачком.

На рис. 44, *а* показано такое построение, выполненное на исходном волновом профиле, состоящем из единичного импульса сжатия; здесь и избыточное давление, и избыточная скорость сигнала возрастают до положительного максимума, а затем снова убывают до нуля. Подобная волна создается, например, поршнем, вдвигаемым в жидкость на определенное расстояние

и опять останавливаемым. Каждая из диагональных прямых с отрицательным наклоном, выделяющая равновеликие сегменты по обе стороны от нее, указывает, какое скачкообразное изменение v должно произойти спустя время, равное величине, обратной коэффициенту ее наклона с отрицательным знаком. Обратите внимание, как ударная волна, имеющая нулевую интенсивность в момент ее формирования t_0 (соответствующий волновой профиль показан на рис. 31), вскоре, однако, становится существенным разрывом, на котором v меняется между своими значениями в точках A и B. Ударная волна достигает максимальной интенсивности (чему соответствует переход v от C к D) в более позднее время, равное величине, обратной коэффициенту наклона CD, взятой со знаком минус, а затем начинает затухать до более слабого разрыва EF; асимптотическое поведение ударной волны спустя большое время t определяется хордой GH с очень малым наклоном. Для этих четырех хорд соответствующие волновые профили показаны на рис. 44, *в*: видно, как ударная волна, первоначально сформировавшаяся внутри импульса сжатия, начинает продвигаться к его фронту в силу того, что ее скорость превосходит скорость сигнала перед ней, пока эта волна не превратится в *головную ударную волну* EF, движущуюся в невозмущенную жидкость впереди остальной части импульса.

Асимптотическое поведение этой головной ударной волны определяется приравниванием площади под *кривой* GH (рис. 44, *а*), которая в пределе есть полная площадь Q под исходным волновым профилем, к площади под *хордой* GH, которая в точности равна

$$\frac{1}{2}(\mathrm{NH})\,(\mathrm{NG}) = \frac{1}{2}\,t\,(\mathrm{NG})^2, \tag{219}$$

так как величина, обратная коэффициенту наклона GH, есть $-t$. Избыточная скорость сигнала $v_1 = \mathrm{NG}$ за головной ударной волной поэтому удовлетворяет соотношению

$$v_1 \sim (2Q/t)^{1/2}, \tag{220}$$

представляющему собой асимптотический закон затухания ударной волны: интенсивность *обратно пропорциональна квадратному корню* из времени. Асимптотически волновой профиль — это узкий *треугольник* (рис. 44, *б*), площадь которого постоянна, как требует закон сохранения массы; *длина возмущенной зоны* NH асимптотически равна

$$(2Qt)^{1/2}. \tag{221}$$

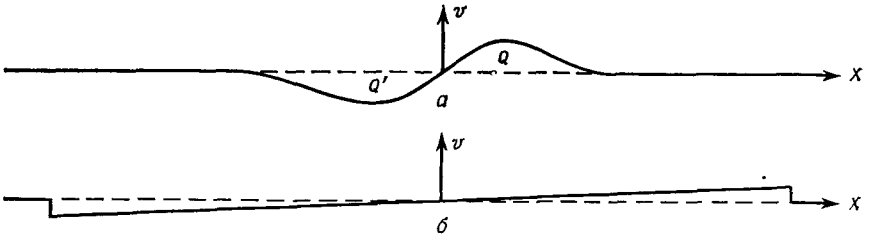

Рис. 45. Асимптотический волновой профиль при $t \to \infty$ для исходного волнового профиля, соответствующего сжатию с последующим разрежением (рис. *а*) является N-волной (рис. *б*).

Хотя масса тем самым сохраняется, полная волновая энергия в импульсе пропорциональна длине (221), умноженной на *квадрат* амплитуды (220), и поэтому стремится к нулю пропорционально $Q^{3/2}t^{-1/2}$; скорость ее уменьшения, следовательно, пропорциональна $(Q/t)^{3/2}$. Конечно, все рассеяние механической энергии в тепло происходит *внутри* ударной волны, а его скорость определяется увеличением энтропии, пропорциональным кубу интенсивности ударной волны. Тогда увеличение энтропии, согласно (220), будет пропорционально $(Q/t)^{3/2}$, и подробное вычисление коэффициентов (действительно выполненное ниже в формулах (263) — (269) для значительно более общего случая) показывает точное совпадение между скоростью изменения полной волновой энергии импульса и скоростью диссипации внутри ударной волны как в этом предельном случае (при $t \to \infty$), так и для более ранних времен.

Изучение многих интересных случаев искажения волнового профиля, при котором возникает более одной ударной волны, здесь ограничивается только одним случаем: исходным волновым профилем, для которого сжатие сменяется последующим разрежением, как на рис. 45. Здесь происходит формирование двух ударных волн, положение и время образования которых соответствует двум точкам перегиба, лежащим на участках с отрицательным наклоном волнового профиля. Правило Уизема показывает, что обе ударные волны возрастают до максимальной интенсивности, а затем начинают затухать; они становятся соответственно головной ударной волной, как на рис. 44, и *хвостовой ударной волной*, поднимающей пониженное давление воздуха на хвостовой части импульса до невозмущенного значения. Хвостовая ударная волна со скоростью, промежуточной между невозмущенным значением c_0 позади нее и уменьшенной скоростью сигнала впереди нее, движется постепенно назад

в системе координат, в которой $X = x - c_0 t$. Асимптотическая картина представляет собой так называемую N-волну, содержащую один треугольный импульс, удовлетворяющий условиям (220) и (221), как на рис. 44 (где Q — площадь части исходного волнового профиля, лежащей выше оси X), и следующий за ним *перевернутый* импульс длины $(2Q't)^{1/2}$ (где Q' — площадь части исходного волнового профиля, лежащей ниже оси X), заканчивающийся хвостовой ударной волной, где v изменяется на величину $(2Q'/t)^{1/2}$.

Мы видели, что нелинейные эффекты могут привести к радикальным преобразованиям акустических волновых профилей, при которых участки сжатия переходят в разрывы, а наклон участков разрежения асимптотически стремится к нулю (как $1/t$). Эти преобразования уничтожают большую часть информации, характеризующей исходный волновой профиль: в только что приведенном примере асимптотическое поведение зависит *только* от площадей Q и Q' его положительной и отрицательной частей.

Хотя эти примечательные свойства были установлены для временно́го искажения пространственного волнового профиля, мы закончим этот раздел, отметив, что существует полностью *аналогичная теория, описывающая изменения временно́го* волнового профиля, связанные с *положением* x. Определяя волновой профиль в этом случае (см. (189) и (190)) как зависимость дефицита v_1 — величины, обратной скорости сигнала,— от *модифицированной временно́й координаты*, которую запишем как X_1, заменив x на t_1, можно определить распространение всех непрерывных частей волны по правилу (уравнение (191)), согласно которому каждый сигнал, несущий частное значение v_1, движется вдоль траектории $dX_1/dt_1 = v_1$. Снова введение любого разрыва должно согласовываться с законом сохранения массы, который для временны́х волновых профилей требует сохранения полного *потока массы* $\int \rho u dt$ через любое сечение x. Для слабых ударных волн можно показать, как и выше, что соотношение между локальным потоком массы ρu и дефицитом v_1 (величины, обратной скорости сигнала) с хорошей степенью точности является линейным. Следовательно, любой разрыв может быть введен с помощью процедуры, использующей сохранение площади волнового профиля $\int v_1 dX_1$, и вся теория этого раздела может быть применена к анализу пространственного искажения временны́х волновых профилей при условии, что v, X и t всюду заменены на v_1, X_1 и t_1 соответственно.

2.12. Гидравлические прыжки

Теория простых волн, развитая в разд. 2.9 для *общего случая* продольного распространения волн в однородных трубах или каналах, привела к загадке, которая была разрешена в разд. 2.10 и 2.11 только для частного случая плоских звуковых волн (с помощью теории ударных волн). Хотя во вступительном описании теории нелинейных волн мы не намерены исчерпывающе анализировать все возможные варианты распространения разрывных волн, укажем теперь, как оно происходит в другом частном случае, а именно для длинных волн в открытых каналах постоянной ширины, когда явные соотношения между переменными, описывающими простую волну, задаются уравнениями (181) — (183). Различные особые свойства и некоторые общие черты, которые характеризуют разрывные волны там, где площадь поперечного сечения жидкости может меняться, будут показаны здесь на примере теории «гидравлического прыжка»— явления, часто встречающегося в естественных потоках и имеющего также практическое значение при проектировании гидравлических сооружений.

Обзор этой теории будет дан в порядке, несколько отличном от порядка в разд. 2.10: перед обсуждением механизмов, которые могли бы противостоять дальнейшему искажению волнового профиля, как только появляется нечто близкое к разрыву, перечислим условия, которым должно удовлетворять продольное движение в канале с постоянной шириной при любой разрывной волне. Как и в разд. 2.10, рассмотрим сперва разрывную волну, распространяющуюся в невозмущенную жидкость; такая волна может быть вызвана импульсным вдвиганием поршня в жидкость со скоростью u_1. Можно ожидать, исходя из обсуждения в разд. 2.11, что те же самые уравнения, правильно интерпретированные, будут применимы к разрывам, появляющимся внутри непрерывного волнового движения.

Разрывная волна, движущаяся со скоростью U в невозмущенную воду с площадью поперечного сечения A_0 и плотностью ρ_0, пересекает за единицу времени массу жидкости

$$\rho_0 A_0 U. \tag{222}$$

Закон сохранения массы требует, чтобы за разрывной волной эта жидкость выходила в том же самом количестве с *относительной* скоростью $U - u_1$ и с новой площадью поперечного сечения A_1, но с неизменившейся плотностью ρ_0, поскольку для течений в открытых каналах (разд. 2.2) сжимаемость пренебре-

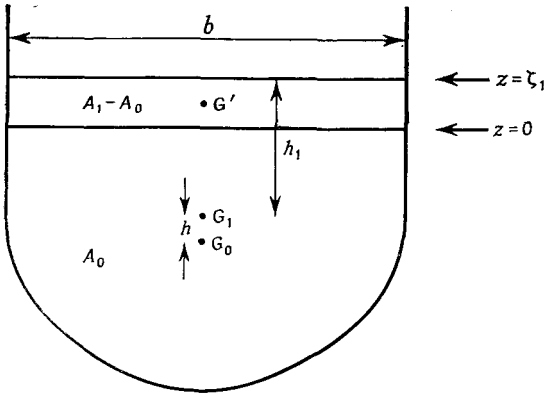

Рис. 46. Для гидравлического прыжка, движущегося вдоль канала постоянной ширины b, поперечное сечение воды перед прыжком A_0 ограничено уровнем невозмущенной воды $z = 0$ и имеет центр масс G_0, а поперечное сечение позади прыжка A_1 ограничено уровнем поднявшейся воды $z = \zeta_1$ и имеет центр масс G_1. Разность площадей $A_1 - A_0$ равна $\zeta_1 b$ и имеет центр тяжести G' при $z = (1/2)\,\zeta$.

жимо мала по сравнению с растяжимостью. Это дает уравнение

$$\rho_0 A_1 (U - u_1) = \rho_0 A_0 U, \tag{223}$$

очень похожее на уравнение (195) для ударной волны. Однако форма уравнения количества движения будет теперь более сложной, чем (196), по крайней мере для его правой части, потому что в открытых каналах давления перед разрывом и за ним приложены к различным площадям поперечного сечения, а также гидростатически изменяются по этим сечениям.

Непосредственно за разрывом избыточное давление (15) принимает значение $\rho_0 g \zeta_1$, где ζ_1 — превышение высоты свободной поверхности над невозмущенным уровнем. Суммарную силу в направлении x, действующую на жидкость, пересекаемую разрывом, можно разделить на две части (рис. 46): во-первых, на силу $\rho_0 g \zeta_1 A_0$, действующую на жидкость *ниже* уровня невозмущенной воды благодаря избыточному давлению, действующему по площади поперечного сечения A_0 этой жидкости, и, во-вторых, на силу

$$\int_0^{\zeta_1} \rho_0 g (\zeta_1 - z)\, b\, dz = \frac{1}{2} \rho_0 g \zeta_1^2 b, \tag{224}$$

действующую на жидкость, лежащую *выше* невозмущенного уровня воды. Последнее выражение получено интегрированием

по z силы, действующей на соответствующей этой высоте площади $b\,dz$, которая определяется разностью $\rho_0 g\,(\zeta_1 - z)$ между давлением жидкости позади разрыва и атмосферным давлением воздуха перед разрывом. Приравняв эту объединенную силу (после подстановки

$$\int \zeta_1 b = A_1 - A_0, \qquad (225)$$

как в (16)) скорости приобретения жидкостью количества движения (а именно к потоку массы (222), умноженному на x-составляющую скорости u_1, приобретаемой жидкостью), получим

$$\rho_0 A_0 U u_1 = \tfrac{1}{2}(A_0 + A_1)\,\rho_0 g \zeta_1 = \tfrac{1}{2}(A_0 + A_1)\,(\rho_0 g/b)\,(A_1 - A_0). \qquad (226)$$

Уравнения (223) и (226) легко разрешить относительно U и u_1, выразив их только через A_0 и A_1 (а также через постоянные g и b):

$$U^2 = \frac{gA_0}{b}\,\frac{A_1(A_1 + A_0)}{2A_0^2}, \qquad u_1^2 = \frac{g(A_1 - A_0)^2}{bA_0}\,\frac{A_1 + A_0}{2A_1}. \qquad (227)$$

В правой части каждого из этих равенств *первый сомножитель* есть величина, которую дает линейная теория для волны малой амплитуды, движущейся в невозмущенную жидкость; следует отметить, что, как и ожидалось, скорость U разрывной волны отличается от скорости $(gA_0/b)^{1/2}$ сигнала с малой амплитудой поправочным множителем, который увеличивается с увеличением отношения площадей A_1/A_0.

Эта зависимость уравнений (227) только от единственного отношения A_1/A_0 составляет резкий контраст соответствующим уравнениям для ударной волны (197), которые зависят от двух отношений, а именно от отношения давлений p_1/p_0 и отношения плотностей ρ_1/ρ_0, взаимосвязь которых определяется законом Гюгонио, выводимым из уравнения *энергии*. Для длинных волн в открытых каналах одно и то же отношение A_1/A_0 определяет *как* скорость приобретения количества движения (подобно p_1/p_0), *так* и равенство потоков массы (подобно ρ_1/ρ_0). Любая информация, которую мы могли бы получить в дальнейшем о переходе механической энергии в тепло на разрыве, не будет иметь отношения к определению U и u_1 через A_1/A_0 с помощью рассмотрения массы и количества движения, на которые совершенно не влияет возникающее в результате пренебрежимо малое возрастание температуры.

Разрывную волну, движущуюся вдоль открытого канала, в соответствии с уравнениями (227) обычно называют «гидравлическим прыжком» с интенсивностью

$$\beta = (A_1 - A_0)/A_0,$$

с помощью которой эти уравнения запишутся так:

$$U/c_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)^{1/2}(1+\beta)^{1/2},$$
$$u_1/c_0 = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\beta\right)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2}; \qquad (228)$$

здесь c_0 — невозмущенная скорость волны, равная $(gA_0/b)^{1/2}$. Эти отношения вместе с

$$c_1/c_0 = (1+\beta)^{1/2} \qquad (229)$$

изображены как функции β на рис. 47. Заметим, что гидравлический прыжок с интенсивностью, превосходящей 2,21, ускоряет воду до «сверхкритической» скорости u_1 (т. е. скорости, превышающей локальную скорость c_1 возмущений малой амплитуды). Рис. 47 дает возможность найти β — интенсивность гидравлического прыжка, вызванного любым импульсным движением поршня, исходя из u_1/c_0 — отношения скорости поршня к скорости волны в невозмущенной жидкости.

Вычислив теперь скорость, с которой масса жидкости, пересекаемая гидравлическим прыжком в единицу времени (222)

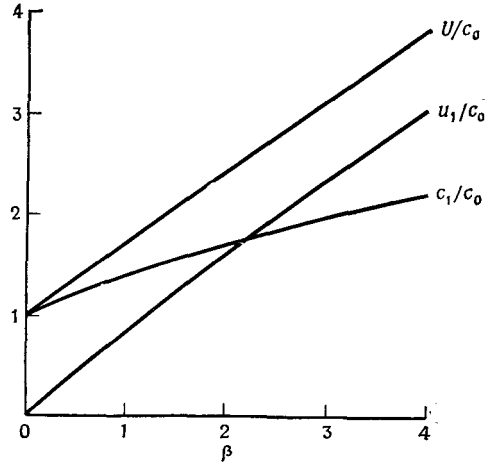

Рис. 47. Для гидравлического прыжка с интенсивностью в диапазоне $0 < \beta < 4$, движущегося в невозмущенной воде по каналу постоянной ширины, изображены безразмерная скорость прыжка U и другие величины, изменяющиеся поперек прыжка (скорость жидкости меняется от нуля до u_1, а волновая скорость — от c_0 до c_1).

теряет механическую энергию, получим

$$F_1 u_1 - \rho_0 A_0 U \left(\frac{1}{2} u_1^2 + gh\right). \tag{230}$$

Здесь $F_1 u_1$ — скорость, с которой производится работа над этой жидкостью *со стороны* жидкости за прыжком, толкающей ее со скоростью u_1, а $\frac{1}{2} u_1^2 + gh$ — сумма кинетической энергии и дополнительной потенциальной энергии, которые она приобретает на единицу массы (рис. 46). Эти утверждения требуют, чтобы h было вертикальным смещением центра масс поперечного сечения жидкости на прыжке и чтобы F_1 было интегралом по площади A_1 от величины $\rho g\,(\zeta_1 - z)$, на которую давление воды превосходит атмосферное давление; рассматривая только работу, совершаемую *разностью* давления жидкости и атмосферного давления, удается избежать необходимости вычитать работу, совершаемую поднимающейся жидкостью против силы атмосферного давления.

Очевидно, эта проинтегрированная разность давлений F_1 по площади A_1 принимает вид

$$A_1 \rho_0 g h_1, \tag{231}$$

где h_1 — *средняя* глубина точек в сечении A_1, отсчитанная от свободной поверхности, т. е. h_1 — глубина центра масс G_1 площади A_1. Так как площадь A_1 включает (рис. 46) часть с площадью A_0 с центром масс G_0, расположенным на расстоянии h ниже G_1, и часть с площадью $A_1 - A_0$ с центром масс G' на глубине $\frac{1}{2}\zeta_1$ ниже поверхности, то разность $h_1 - \frac{1}{2}\zeta_1$ можно записать как расстояние $A_0 h/(A_1 - A_0)$, на которое G_1 ниже G', что дает

$$F_1 = A_1 \rho_0 g \left[\frac{1}{2}\zeta_1 + A_0 h/(A_1 - A_0)\right]. \tag{232}$$

Для проверки этой важной формулы для силы, определяемой интегралом от давления за фронтом прыжка, можно с помощью аналогичных соображений записать силу, определяемую интегралом от давления по поперечному сечению A_0 перед фронтом прыжка, как

$$F_0 = A_0 \rho_0 g h_0 = A_0 \rho_0 g \left[-\frac{1}{2}\zeta_1 + A_1 h/(A_1 - A_0)\right], \tag{233}$$

где h_0 — глубина центра масс G_0 площади A_0, отсчитываемая вниз от *ее* свободной поверхности, так что $h_0 + \frac{1}{2}\zeta_1$ является расстоянием, на которое G_0 ниже G'; теперь заметим, что

разность

$$F_1 - F_0 = \frac{1}{2}(A_1 + A_0)\,\rho_0 g \zeta_1 \qquad (234)$$

согласуется с суммарной силой в правой части (226), вычисленной ранее другим методом.

Скорость потери механической энергии на прыжке (230) равна количеству, на которое скорость работы над жидкостью на прыжке превосходит скорость приобретения ею кинетической и потенциальной энергии. Скорость работы $F_1 u_1$, где F_1 дается выражением (232), а u_1 и ζ_1 представляется из (223) и (225) соответственно как $U(A_1 - A_0)/A_1$ и $(A_1 - A_0)/b$, имеет следующий вид:

$$F_1 u_1 = \frac{1}{2}\rho_0 U g (A_1 - A_0)^2/b + \rho_0 A_0 U g h. \qquad (235)$$

Следовательно, когда мы вычисляем разность (230), подставляя для u_1^2 выражение из (227), два члена $\rho_0 A_0 U g h$ взаимно уничтожаются, а другие члены дают в результате скорость потери механической энергии в гидравлическом прыжке

$$\rho_0 U g (A_1 - A_0)^3/4bA_1. \qquad (236)$$

Таким образом, несколько более сложные рассуждения приводят к довольно простому выражению для скорости потери механической энергии с зависимостью от *куба* изменения площади; эта зависимость даже более очевидна, чем соответствующие правила для ударных волн. Для гидравлических прыжков, с другой стороны, имеется гораздо большее разнообразие в способах, которыми можно осуществить требуемый отвод энергии.

Причина этого состоит в том, что в теории плоских волн звука пренебрегают только диссипативными эффектами, поэтому только они могут сбалансировать (см. разд. 2.10) конвективные эффекты, необходимые при образовании ударных волн; в теории длинных волн в открытых каналах пренебрегают также и другими эффектами.

К ним относятся эффекты, связанные с любым нарушением допущения о том, что волна является длинной, т. е. масштаб продольных изменений значительно больше средней глубины h. Очевидно, всякий раз, когда крутизна волнового профиля становится локально большой, можно ожидать некоторого ухудшения точности этого допущения. Его природа будет изучаться глубоко в дальнейшем начиная с гл. 3, но здесь мы предпошлем этому последующему обсуждению неизбежно упрощенный обзор основных выводов.

Обсуждение продольных волн в разд. 2.1 показывает, что если искаженный волновой профиль содержит (в смысле фурье-

анализа) весомые синусоидальные составляющие, длины волн которых *не* велики по сравнению с глубиной, то эти составляющие не обязаны двигаться со скоростью длинных волн c относительно скорости жидкости u. Действительно, в гл. 3 будет показано, что они движутся с *более низкой* скоростью. Это наводит на мысль о следующем способе отвода энергии с требуемой скоростью (236); сдвиговые искажения, вызывая образование чрезвычайно крутой части волнового профиля, производят все более и более весомые синусоидальные составляющие с малой длиной волны, которые отстают от распространения остальной части волны, пока в конце концов не возникнет некоторый равновесный волновой профиль, близкий к разрывному, причем энергия отводится назад с требуемой скоростью (236) шлейфом относительно коротких волн, следующих за прыжком.

Несколько моментов делают истинную картину более сложной, чем вышеописанная. Некоторые из них являются следствием на первый взгляд удивительного результата, приведенного в гл. 3: для волн, «фазовая скорость» которых (скорость распространения любой заданной фазы синусоидальной волны, например гребня) *уменьшается с уменьшением длины волны*, скорость распространения энергии оказывается *меньше* фазовой скорости. При равновесном распространении прыжка все образовавшиеся волны имеют на самом прыжке одну и ту же фазу; следовательно, их фазовые скорости равны скорости прыжка. Стало быть, они имеют фазовую скорость $U - u_1$ относительно жидкости за прыжком, и эта величина, будучи, как показывает рис. 47, меньше, чем скорость длинных волн c_1, определяет *длину* генерируемых волн: это волны такой длины, что каждый гребень может оставаться на постоянном расстоянии за прыжком. Их *энергия*, однако, распространяется более медленно и, таким образом, утекает назад относительно прыжка, а амплитуда этих волн должна подстраиваться так, чтобы эта *скорость* убыли энергии имела требуемое значение (236).

Помимо этих аспектов, полностью объясняемых в гл. 3, существуют и другие сложности (эпилог, часть 2): если амплитуда каких-либо волн только что описанного типа превысит определенное значение, значительная часть энергии будет рассеяна за счет вспенивания на гребнях (для морских волн это явление известно как «барашки».) Экспериментально настоящий «ундулярный прыжок» без заметного вспенивания, когда большая часть отводимой энергии передается посредством шлейфа волн за прыжком, встречается только при интенсивностях, меньших примерно 0,3. При бóльших интенсивностях вспенивание и связанная с ним турбулентность уже на самом первом гребне

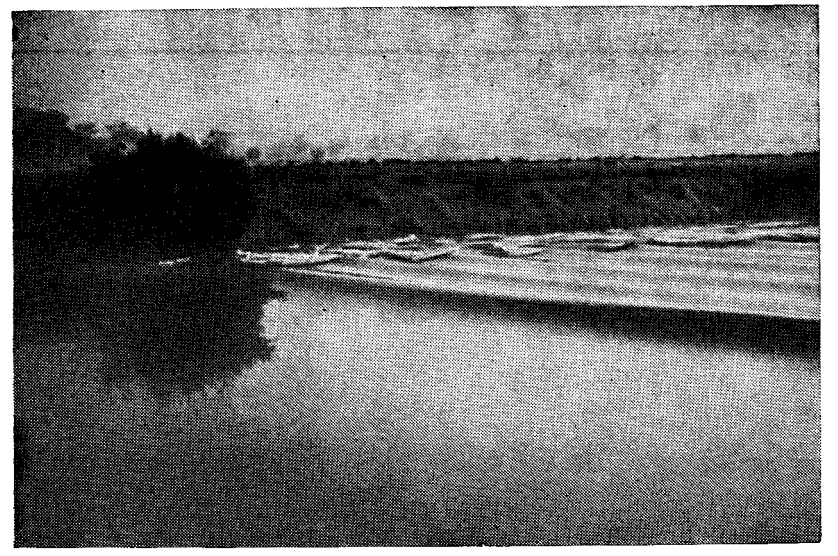

Рис. 48. Волнистая бора на реке Северн.

локально рассеивает большую часть упомянутой энергии, которую требуется отвести; лишь небольшая волнистость обнаруживается за прыжком при этих интенсивностях.

В Англии заметное искажение профиля приливной волны по мере ее продвижения вверх по постоянно сужающемуся эстуарию реки Северн вызывает во время высоких сизигийных приливов гидравлический прыжок, называемый в этой местности «борой», и это название широко используется вместо выражения «гидравлический прыжок». Приближенное практическое правило устанавливает, что *ундулярные* (*волнистые*) *боры* появляются при интенсивностях, меньших примерно 0,3; в большинстве случаев бора на реке Северн принадлежит к этому типу (рис. 48). Однако при определенных условиях (рис. 49) образуются более интенсивные *турбулентные боры* с более крутым, бешено пенящимся фронтом и с весьма слабым волновым шлейфом. Можно отметить два дополнительных усложняющих обстоятельства, которым в эпилоге будет дано полное объяснение с помощью уточненной нелинейной теории: хотя даже волновые движения позади боры подвержены существенно нелинейным влияниям и хотя некоторая доля требуемого отвода энергии теряется в каждой боре за счет турбулентной диссипации и эта доля зависит, помимо интенсивности, от других переменных, тем не менее существует довольно простой



Рис. 49. Турбулентная бора в другой части реки Северн. (Боры на рис. 48 и 49 были сфотографированы доктором Д. Х. Перегрином и воспроизводятся здесь с его любезного разрешения.)

математический подход, позволяющий рассматривать волны как нелинейные, но успешно определять их амплитуду как функцию интенсивности боры и этой требуемой потери энергии.

Несмотря на все сложности, связанные с ундуляцией и турбулентностью как способами отвода энергии гидравлического прыжка, для многих целей остается оправданным при приближенном анализе рассматривать гидравлический прыжок по существу как действительный разрыв, удовлетворяющий уравнениям (228) и (229). Именно мощные турбулентные боры более всего напоминают разрыв. Что касается ундулярных бор, то для них наблюдается как раз такой разрыв в *среднем* значении уровня воды, определяемого как уровень воды, усредненный по длине волны ундуляций. Используя это толкование, можно рассмотреть, осуществимо ли построение теории распространения простых волн, содержащих слабые боры в качестве разрывов, аналогичное построениям в разд. 2.11.

Это требует, чтобы соотношения для простых волн были удовлетворены во всех точках позади и впереди боры: допущение, которое можно проверить, найдя значение величины ($c - c_0$ —

$-(1/2)u)/c_0$ (равной нулю в теории простых волн) позади боры, удовлетворяющей (228) и (229); вычисление даст

$$\left(c_1 - c_0 - \frac{1}{2}u_1\right)\Big/c_0 = (1+\beta)^{1/2} - 1 - \\ -\frac{1}{2}\beta\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2}. \quad (237)$$

Выражение (237) принимает значения между 0 и $-0{,}0035$ для $0 < \beta < 0{,}5$. Отсюда следует, что теория слабой боры, идентичная теории слабой ударной волны из разд. 2.11, также может применяться в этом диапазоне интенсивностей. В такой теории закон сохранения массы использовался бы точно так же, как на рис. 42, но применительно к графику зависимости $\rho_0 A$ (масса на единицу длины) от x. Мы опять обнаруживаем, что соотношение, связывающее эту величину с избыточной скоростью сигнала v, достаточно близко к линеаризованному соотношению (в пределах 3,5% в диапазоне $0 < \beta < 0{,}5$), чтобы описанное выше построение можно было непосредственно применять к волновому профилю, определенному как зависимость v от X.

Полученный таким образом метод исследования распространения простых волн, содержащих слабые разрывы, в точности тот же, что и метод разд. 2.11; именно, упомянутый волновой профиль для v претерпевает сдвиговые искажения с единичной скоростью, а положения разрывов выбираются так, чтобы волновой профиль оставался однозначным и сохранял постоянство площади. Так как все следствия для случаев слабой боры и слабой ударной волны будут идентичными, то нет необходимости их повторять. Тем не менее мы закончим этот раздел проверкой результата, предсказанного этим методом для одного случая разрывной волны, точно рассчитанного ранее. В этом случае, описанном уравнениями (228) и (229), теория слабой боры, как и на рис. 35, дает значение 1/2 для отношения $(U - c_0)/(u_1 + c_1 - c_0)$ вместо точного значения

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)^{1/2}(1+\beta)^{1/2} - 1\right]\Big/\left[\beta\left(1+\frac{1}{2}\beta\right)^{1/2}(1+\beta)^{-1/2} + \right. \\ \left. + (1+\beta)^{1/2} - 1\right]; \quad (238)$$

но величина (238) изменяется только между 0,500 и 0,542 для гидравлических прыжков с интенсивностями между 0 и 0,5, что опять наводит на мысль, что это тот диапазон интенсивностей, для которого теория слабой боры может давать результаты, имеющие приемлемую точность.

2.13. Нелинейное распространение при постепенном изменении физических характеристик жидкости и поперечного сечения

Нелинейная теория распространения простой волны развита в предыдущих разделах 2.8—2.12 для любой жидкости, имеющей при отсутствии возмущений *однородные* физические характеристики, помещенной внутри трубы или канала с постоянным невозмущенным поперечным сечением. При этих условиях основные свойства простой волны, пока она остается непрерывной, легко устанавливаются для задач с начальными условиями с помощью уравнений (156)—(163), а для задач с граничными условиями — с помощью уравнений (168)—(171), в то время как соответствующий сдвиг волнового профиля развивается согласно уравнениям (184)—(191). Хотя образование *разрыва* проанализировано выше только в двух случаях (для плоских звуковых волн и длинных волн в открытых каналах), эти случаи наводят на мысль, что любое распространение простой волны, создающее лишь слабые разрывы, может быть описано с высокой точностью введением в полученный однородным сдвигом непрерывный волновой профиль (для обеспечения его однозначности) разрывов, *сохраняющих площадь*.

Зададим теперь вопрос, можно ли эту нелинейную теорию простых волн расширить настолько, чтобы она была применимой к случаям с неоднородными (в отсутствие возмущений) физическими характеристиками жидкости и переменным поперечным сечением, аналогичным случаям, проанализированным в рамках линейной теории в разд. 2.3—2.6. Ответ на этот вопрос для случаев, подобных тем из изученных в разд. 2.3—2.5, которые содержали разрывы проводимости, должен быть отрицательным: фундаментальное свойство простой волны, с ее тождественным равенством нулю величины $u - P$ вдоль *каждой* C_--характеристики (уравнение (168)), состоит в том, что отсутствует какое-либо распространение в отрицательном направлении x, сопровождающее волновое движение в положительном направлении x; очевидно, это свойство исключает возможность появления отраженных волн, которые обязательно возникают (разд. 2.3) на любом разрыве проводимости. Однако эти рассуждения не распространяются на случаи с постепенно меняющейся проводимостью, в которых, как было показано в разд. 2.6, изменение, достаточно постепенное в масштабе длины волны, по

существу *не* вызывает отраженной волны, по крайней мере согласно линейной теории.

Поэтому в этом разделе будет использовано сочетание идей из разд. 2.6 и 2.9 для построения нелинейной теории распространения импульса (по механизму простой волны) через некоторую трубу (или канал), поперечное сечение которой, а также, возможно, и физические характеристики заполняющей ее жидкости в отсутствие возмущений изменяются постепенно по длине трубы (или канала) в масштабе длины импульса. Однако ограничим себя относительно слабыми импульсами в смысле разд. 2.11, отчасти чтобы сделать анализ простым, а отчасти чтобы в случаях, когда предсказываемый волновой профиль является многозначным, иметь возможность расширения теории с помощью введения разрыва, сохраняющего его площадь.

Итак, нам нужно рассчитать влияние нелинейности на распространение относительно слабого импульса по трубе (или каналу), для которой поперечное сечение $A_0(x)$, а также волновая скорость $c_0(x)$ и плотность $\rho_0(x)$ содержащейся в ней жидкости в отсутствие возмущений меняются постепенно в масштабе длины импульса. Было бы весьма затруднительно решать эту задачу исходя из полных уравнений движения (2), (3), (4) и (99). Простые физические соображения, использованные в начале разд. 2.8 для получения результатов Римана (154) и (155), подсказывают более легкий подход.

Идея этого подхода состоит в том, что в локальной системе координат, движущейся со скоростью жидкости u, переменные локально изменяются в соответствии с *линейной* теорией; эта идея использовалась в разд. 2.8 для вывода уравнений (146) и (147), описывающих локальное поведение. Однако если при отсутствии возмущений физические характеристики жидкости и поперечное сечение испытывают постепенное пространственное изменение, то предсказанное линейной теорией поведение является таким, как описано в разд. 2.6; например, общее выражение для p_e по линейной теории есть сумма выражений (91) и (92). Комбинируя это выражение с аналогичным выражением для u (равным в действительности разности выражений (91) и (92), деленной на произведение плотности и скорости звука), можно получить результаты, характеризующие отношения изменений различных физических величин вдоль кривых

$$C_+: dx = (u + c)\,dt \quad \text{и} \quad C_-: dx = (u - c)\,dt, \tag{239}$$

и обобщающие выражения (152)—(155).

Однако некоторые осложнения, которые, как можно ожидать, появятся в этом обобщении благодаря зависимости от x невозмущенной проводимости $A_0/(\rho_0 c_0)$, в значительной степени

будут уменьшены в силу предположения о том, что весь импульс является коротким по сравнению с расстоянием, на котором происходят существенные изменения в A_0, ρ_0 и c_0. Тогда если импульс распространяется в положительном направлении x, то *та часть* любой кривой C_-, которая лежит внутри импульса, остается целиком в области, где A_0, ρ_0 и c_0 могут считаться эффективно постоянными. Это означает, что условием вдоль такой части кривой C_- можно придать вид (155), соответствующий однородным поперечному сечению и физическим характеристикам жидкости, и что в качестве константы можно взять нуль, как и в (163), потому что кривая C_- начинается в невозмущенной области перед импульсом.

Тогда соотношение между скоростью жидкости u и избыточным давлением p_e принимает тот же самый вид, что и в (163), за исключением того, что зависимости ρ и c от p_e могут меняться с расстоянием, т. е.

$$u(x, t) = \int_0^{p_e} \frac{dp_e}{\rho(p_e, x)\, c(p_e, x)} \qquad (240)$$

Значение x в правой части (240) принимается постоянным потому что при интегрировании уравнения $du = dp_e/\rho c$ вдоль кривой C_- от точки (x, t) до области $p_e = 0$ перед импульсом x меняется слишком мало, чтобы это повлияло на значения ρ и c. Значит, локально можно использовать соотношения для простой волны, связывающие скорость жидкости u и избыточное давление p_e, а, следовательно, также волновую скорость $c(p_e, x)$, соответствующие однородным поперечному сечению и физическим характеристикам жидкости.

Таким образом, установлен тот факт, что основные свойства распространения простой волны сохраняются, когда физические характеристики жидкости и поперечное сечение изменяются постепенно в масштабе длин импульса, а именно распространение происходит только в одном направлении в том смысле, что вдоль кривой C_- распространяется нулевой сигнал и локальные соотношения между различными переменными в простой волне остаются неизменными. Заметим, что к ним относится выражение для *скорости сигнала* $u+c$, т. е. значение dx/dt вдоль одной из таких кривых C_+, которые переносят сам импульс. Например, для совершенного газа с постоянной удельной теплоемкостью, заключенного в твердую трубу, вдоль которой меняются поперечное сечение и, возможно, невозмущенная температура газа (так что невозмущенная скорость звука $c(0, x) = c_0(x)$ зависит от расстояния), из (240) можно вывести

результат (178), правда в слегка измененной форме:

$$c = c_0(x) + \tfrac{1}{2}(\gamma - 1)u, \quad \text{что дает} \quad u + c = c_0(x) + \tfrac{1}{2}(\gamma + 1)u. \tag{241}$$

Те же самые уравнения, но с $\gamma = 2$, как в (183), будут справедливыми для открытых каналов шириной $b(x)$, постепенно меняющейся, но не зависящей от подъема уровня воды, если $c_0(x)$ есть невозмущенная волновая скорость, равная $[gA_0(x)/b(x)]^{1/2}$, а $A_0(x)$ — постепенно меняющееся невозмущенное поперечное сечение воды.

Результаты анализа до этого места, основанные на рассмотрении изменений вдоль кривых C_-, справедливы для импульса произвольной *амплитуды* при условии, что поперечное сечение и физические характеристики жидкости меняются постепенно в масштабе длины импульса. Однако рассмотрение изменений вдоль кривых C_+ требует ограничения сравнительно слабыми импульсами, если мы хотим получить метод, достаточно простой для введения в теорию нелинейных эффектов. Заметим, что кривая C_+, в отличие от любой кривой C_-, остается внутри импульса на протяжении больших расстояний, так что изменениями в поперечном сечении и физических характеристиках жидкости пренебречь *нельзя*. Отметим также, что хотя для относительно слабого импульса отклонения скорости сигнала $u + c$ от предсказываемой линейной теорией скорости волны $c_0(x)$ могут быть лишь незначительными (уравнение (241)), воздействие искажений, вызванных такими малыми отклонениями при распространении на большие расстояния, будет, однако, как показано в разд. 2.9, весьма существенным. Далее, проанализируем *противоположные* влияния искажающих волновой профиль постепенных изменений физических характеристик жидкости и поперечного сечения, с одной стороны, и относительно слабых нелинейных эффектов — с другой.

Идея о том, что вдоль кривой C_+ (следуя за сигналом, движущимся относительно локальной скорости жидкости u с волновой скорстью c) переменные должны локально изменяться в соответствии с линейной теорией, теперь будет использована с учетом того, что распространение, как уже было установлено, происходит только в одном направлении (в положительном направлении оси x). Соответствующее изменение избыточного давления в рамках линейной теории дается уравнением (91): в неизменном виде распространяется вперед не p_e само по себе, а величина $p_e Y^{1/2}$, где проводимость Y постепенно изменяется в зависимости от x.

Для относительно слабых волн представляется вполне оправданным подобное использование приблизительных выводов линейной теории о влиянии постепенных изменений поперечного сечения и физических характеристик жидкости. Двусмысленность здесь отсутствует, т. е. для малых амплитуд зависимость проводимости Y от расстояния вдоль трубы или канала можно считать заданной формулой $A_0(x)/[\rho_0(x)c_0(x)]$, как *при отсутствии возмущений*. Тогда распределение избыточного давления подчиняется правилу

$$p_e[A_0(x)/(\rho_0(x)c_0(x)]^{1/2} = \text{const} \quad \text{вдоль} \quad dx = (u + c)dt, \quad (242)$$

где u связано с p_e уравнением (240); это заставляет такое распределение претерпевать на больших расстояниях значительные изменения, обусловленные как искажением волнового профиля, так и влиянием изменения проводимости; но любые модификации, связанные с попытками учета «возмущенного» значения Y, вызовут лишь сравнительно малые изменения этого распределения.

Правило (242), применимость которого эти рассуждения делают правдоподобной, будет подвергнуто дальнейшей проверке на состоятельность в следующем разделе (уравнения (263)—(269)); математически оно может быть потверждено только как предельный случай значительно более сложной теории, здесь не рассматриваемой.

Довольно просто исследовать, как повлияет на сдвиг волнового профиля, рассмотренный в разд. 2.9 при условиях постоянства поперечного сечения и физических характеристик жидкости, член в квадратных скобках в уравнении (242). Во-первых, нужно решить, следует ли описывать искажения во времени *пространственного* волнового профиля, рассмотренные в разд. 2.9 с помощью переменных v (уравнение (184)) и $X = x - c_0t$, или описывать искажения (в зависимости от расстояния) *временно́го* волнового профиля, что было сделано с использованием v_1 (уравнение (190)) и

$$X_1 = c_0^{-1}x - t.$$

На самом деле должна быть выбрана вторая возможность: хотя *нелинейные* эффекты можно описывать общими способами, поперечное сечение и физические характеристики зависят от *расстояния* и вызывают изменения волнового профиля, зависящие скорее от расстояния, чем от времени; более того, в линейной теории эти изменения были описаны посредством переменной $\int c_0^{-1}dx - t$ (уравнение (91)), которая является естественным обобщением X_1.

С использованием переменной v_1 («дефицит величины обратной скорости сигнала») величина, обратная скорости сигнала $(u + c)^{-1}$, есть $c_0^{-1} - v_1$, что означает, что уравнение (242) можно записать в виде

$$[(c_0^{-1} - v_1)\,\partial/\partial t + \partial/\partial x]\,[v_1/V_0(x)] = 0, \qquad (243)$$

где функция $V_0(x)$ определена так, что в предельном случае слабых возмущений

$$p_e\,[A_0(x)/(\rho_0(x)c_0(x))]^{1/2} = [v_1/V_0(x)] \times \text{const}. \qquad (244)$$

Например, в любом случае, приводящем к равенствам (241) (ограниченный твердыми стенками совершенный газ с постоянными теплоемкостями или вода в открытом канале с шириной, не зависящей от подъема воды), для слабых вомущений выполняется

$$v_1 = c_0^{-1} - (u+c)^{-1} \sim \frac{1}{2}(\gamma+1)\,u/c_0^2 \sim \frac{1}{2}(\gamma+1)\,p_e/(\rho_0 c_0^3), \qquad (245)$$

так что можно принять

$$V_0(x) = A_0^{-1/2}(x)\,\rho^{-1/2}(x)\,c_0^{-5/2}(x). \qquad (246)$$

Уравнение (243) решается с помощью преобразования переменных, уже отчасти знакомого. Обобщая уравнение (189), выберем

$$X_1 = \int_0^x c_0^{-1}\,dx - t, \qquad (247)$$

и используем в качестве новой зависимой переменной

$$V_1 = v_1/V_0(x). \qquad (248)$$

Далее имеет смысл определить

$$T_1 = \int_0^x V_0(x)\,dx \qquad (249)$$

как новую времяподобную переменную (интеграл по переменной x от функции, размерность которой есть величина, обратная скорости, т. е. от масштабной функции $V_0(x)$ для дефицита v_1 — величины, обратной скорости сигнала). Использование новых независимых переменных (247) и (249) преобразует частные производные в (243) в производные

$$\partial/\partial t = -\partial/\partial X_1 \text{ и } \partial/\partial x = c_0^{-1}\,\partial/\partial X_1 + V_0\,\partial/\partial T_1, \qquad (250)$$

что дает для выражения в первых квадратных скобках в (243)

$$[(c_0^{-1} - v_1)\,\partial/\partial t + \partial/\partial x] = v_1\,\partial/\partial X_1 + V_0\,\partial/\partial T_1. \qquad (251)$$

Окончательно с заменой зависимой переменной (248) уравнение (243) принимает вид

$$\partial V_1/\partial T_1 + V_1\,\partial V_1/\partial X_1 = 0. \qquad (252)$$

Удивительно, что этот подход привел для довольно общей и весьма сложной задачи этого раздела к тому же самому уравнению (186), которое, как было показано в разд. 2.9, описывает однородный сдвиг волнового профиля! Пока волновой профиль остается непрерывным, все результаты в рассматриваемом случае оказываются точно такими, как было изображено на рис. 31, но с заменой переменных t, x, v на T_1, X_1, V_1. В частности, величина, обратная наклону, т. е. $(\partial V_1/\partial X_1)^{-1}$, растет (при данном значении V_1) с единичной скоростью по отношению к изменению T_1. Если волновой профиль задан при $x = 0$ (т. е. при $T_1 = 0$), то это означает, что тангенс угла наклона этого профиля впервые станет бесконечным при значении T_1, определяемом равенством

$$T_1 = \min\,[-(\partial V_1/\partial X_1)^{-1}]_{T_1=0}, \qquad (253)$$

аналогичным равенству (188). С помощью равенств (247) — (249) это дает уравнение

$$\int_0^x [V_0(x)/V_0(0)]\,dx = \min\,[(\partial v_1/\partial t)^{-1}]_{x=0}, \qquad (254)$$

определяющее расстояние x, на котором впервые должен появиться бесконечный тангенс угла наклона волнового профиля (что неизбежно вызывает образование разрыва), заданного при $x = 0$.

Уравнение (254) показывает, что образование разрыва *задерживается*, *если* $V_0(x)$ — *убывающая функция*; тогда, очевидно, *возрастает* значение x, при котором левая часть принимает указанное значение (определяемое минимумом по времени величины, обратной тангенсу угла наклона волнового профиля при $x = 0$). Например, когда $V_0(x)$ задается формулой (246), *увеличение площади поперечного сечения* оказывает подобное влияние; за счет уменьшения амплитуды сигнала и, следовательно, также избыточной скорости сигнала оно тормозит увеличение крутизны волнового профиля.

В случае рупора громкоговорителя, площадь поперечного сечения которого имеет распределение $A_0(x)$, левая часть (253)

будет равна $\int_0^x [A_0(0)/A_0(x)]^{1/2}\,dx$, а эта величина легко может расти достаточно медленно, чтобы сделать невозможным образование каких-либо ударных волн в пределах длины рупора. Действительно, в рупоре с экспоненциально увеличивающейся площадью $A_0(x) = A_0(0)\,e^{\alpha x}$ (разд. 2.6) этот интеграл никогда не может превзойти величины

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x/2}\,dx = 2\alpha^{-1}, \tag{255}$$

сколь велика ни была бы длина рупора; поэтому, согласно (245) и (254), ударная волна может образоваться в нем *только* в случае, когда

$$\max\,(\partial p_e/\partial t)_{x=0} > \rho_0 c_0^3 \alpha/(\gamma+1), \tag{256}$$

что является очень сильным ограничением.

Напротив, когда $V_0(x)$ является *возрастающей* функцией, расстояние x, при котором должно быть выполнено условие образования разрыва (254), *уменьшается*. Это происходит, например, в случае, когда приливная волна распространяется вверх по *постепенно* сужающемуся эстуарию (однако не по эстуарию с внезапными изменениями поперечного сечения, которые, как показано в разд. 2.3, отражают значительную часть энергии). Хотя период приливной волны настолько велик, что производная по времени в правой части уравнения (254) весьма мала, однако левая часть этого уравнения может быть выражена в виде

$$\int_0^x [b(0)/b(x)]^{1/2}\,[h(0)/h(x)]^{7/4}\,dx \tag{257}$$

через среднюю глубину $h(x) = A_0(x)/b(x)$, а этот интеграл может возрасти в результате постепенного уменьшения $b(x)$ и $h(x)$ до таких больших значений, что условие образования разрыва легко может быть выполнено.

Благодаря этим рассуждениям легко понять, как образуется бора, когда приливная волна распространяется вверх по постепенно сужающемуся эстуарию, подобному эстуарию реки Северн. На самом деле при этом вероятность образования боры несколько переоценивается, потому что в этих рассуждениях совершенно не учитывается диссипация потока волновой энер-

гии за счет турбулентности. В левую часть выражения (242), представляющую собой квадратный корень из потока энергии в приближении линейной теории, следует ввести поправку, обусловленную ослаблением волны, в виде множителя, отражающего медленное экспоненциальное затухание с расстоянием (этот множитель, обусловленный турбулентной диссипацией, аналогичен ослабляющему множителю (142), обусловленному вязкой диссипацией); в силу (244) этот самый множитель нужно включить в $V_0(x)$; тем самым он будет ограничивать рост левой части (254). Этот метод анализа оказался весьма успешным при объяснении, почему бора на Северне образуется только при более высоких сизигийных приливах.

Преобразование, описываемое равенствами (247) — (249), сводит каждую задачу к случаю однородных физических характеристик жидкости и постоянного поперечного сечения (уравнение (252)) не только при том условии, что волна остается непрерывной. Можно легко приспособить рассуждения, проведенные в конце разд. 2.11, чтобы показать, что если в переменных T_1, X_1, V_1 процесс равномерного сдвига приводит к многозначному непрерывному волновому профилю, то для превращения волны в однозначную нужно ввести именно *сохраняющий площадь разрыв*. Для каждого положения x (т. е. для каждого данного T_1) общий поток массы $\int \rho A u\, dt$ в импульсе должен принимать одно и то же значение как для реального движения, так и для строго непрерывного (но многозначного) вычисленного движения. Поскольку в каждом положении x соотношение между $\rho A u$ и v_1 для слабых импульсов линейно, сохранение $\int \rho A u\, dt$ означает *сохранение площади волнового профиля* $\int V_1\, dX_1$. Следовательно, все выводы разд. 2.11, так же как и разд. 2.9, применимы без всяких изменений, если использовать переменные T_1, X_1 и V_1.

В частности, показанный на рис. 44 метод для построения по одному исходному волновому профилю всех возможных разрывов последующих волновых профилей применим в этих переменных непосредственно. Отсюда для единичного импульса сжатия, имеющего при $x = 0$ (т. е. при $T_1 = 0$) площадь

$$Q = \left(\int V_1\, dX_1\right)_{T_1=0} = \left(\int v_1\, dt\right)_{x=0} \Big/ V_0(0), \qquad (258)$$

получим для больших x *асимптотический* волновой профиль с движущейся впереди головной ударной волной, на которой V_1 возрастает от 0 до $(2Q/T_1)^{1/2}$, как в (220), вызывая возрастание

v_1 от 0 до

$$V_0(x)\left[2\left(\int v_1\,dt\right)_{x=0}\Big/\left(V_0(0)\int_0^x V_0(x)\,dx\right)\right]^{1/2}. \qquad (259)$$

За этой ударной волной следует *треугольный* импульс (сигнал, уменьшающийся до нуля с постоянной скоростью), продолжительность которого (или, в переменной X_1, длина которого) возрастает, как и в (221), согласно формуле

$$(2QT_1)^{1/2} = \left\{2\left(\int v_1\,dt\right)_{x=0}\int_0^x [V_0(x)/V_0(0)]\,dx\right\}^{1/2}. \qquad (260)$$

Эти чрезвычайно общие асимптотические правила (259) и (260), описывающие нелинейное распространение импульса (ряд интересных частных случаев их применения приведен в следующем разделе), иллюстрируют мощность метода преобразования при решении задач с постепенно меняющимися физическими свойствами жидкости и поперечным сечением.

2.14. Нелинейная геометрическая акустика

Различные теории одномерных волн в жидкости не ограничены своими приложениями к жидкостям, заключенным внутри материальных труб или каналов. Они играют другую важную роль, как указывалось в разд. 2.1: распространение звука в трехмерных системах, геометрические размеры которых значительно превосходят характерную длину волны, можно аппроксимировать, рассматривая соответствующие сигналы как одномерные волны, бегущие вдоль абстрактных *трубок лучей*, определенных так, чтобы для каждого луча время прихода сигнала в заданную точку было минимальным. Это условие выделяет основной сигнал, достигающий этой точки, по причине, подробно изучаемой в гл. 3 и 4 (вкратце потому, что сигналы, близкие к сигналу с минимальным временем, почти постоянны по фазе; поэтому их *когерентные* флуктуации при объединении составляют намного большую величину, чем результат *взаимоуничтожающей* интерференции сигналов, сильно отличающихся по фазе).

Для случая распространения звука через однородную жидкость, разобранного в гл. 1, такие пути с минимальным временем представляют собой кратчайшие пути; другими словами, лучи являются прямыми линиями. В противоположность этому распространение звука через жидкость, где невозмущенная

скорость звука испытывает пространственные изменения, постепенные в масштабе длин волн, происходит по *криволинейным* путям с минимальным временем. Криволинейные лучи могут быть рассчитаны в соответствии с геометрической оптикой и описаны как подчиняющиеся законам *преломления*, обсуждаемым далее в гл. 4.

Изменение акустической амплитуды вдоль трубки лучей было исследовано на основе линейной теории в разд. 2.6: поток энергии остается постоянным в процессе прохождения волны вдоль трубки (которая физически не существует и поэтому не может вызывать какое-либо ослабление потока энергии за счет трения о стенки как в разд. 2.7). Из этого следует (уравнение (91)), что

$$p_e Y^{1/2} = p_e \left[A_0 (x)/(\rho_0 (x)\, c_0 (x))\right]^{1/2} \tag{261}$$

остается постоянной при изменениях x и t, удовлетворяющих уравнению $dx = c_0 (x)\, dt$, т. е. при изменениях, которые сохраняют величину $t - \int c_0^{-1} dx$ постоянной. В преобразованных переменных T_1, X_1 и V_1, определенных формулами (244) — (249), это означает, что *волновой профиль* (график зависимости V_1 от X_1) в рамках линейной теории остается неизменным при изменениях T_1.

Видоизменение этого результата, учитывающее нелинейные эффекты для сравнительно слабых возмущений, было предложено в разд. 2.13, а именно сигнал, несущий неизменное значение (261) вдоль трубки, распространяется с видоизмененной скоростью $dx/dt = u + c$, которая больше для бóльших значений p_e и меньше для меньших. Это искажает импульс таким образом, что в преобразованных переменных T_1, X_1, V_1 непрерывный исходный волновой профиль вместо того, чтобы оставаться неизменным, подвергается однородному сдвигу с единичной скоростью по отношению к T_1, до тех пор пока T_1 не примет значение (253), которому соответствует бесконечный тангенс угла наклона. После этого волновой профиль необходимо подвергнуть дальнейшему видоизменению, введя *ударные волны* таким образом, чтобы он оставался однозначным, а площадь под ним сохранялась неизменной. Асимптотически любой начальный импульс сжатия стремится к *треугольному* волновому профилю, определенному выражениями (259) и (260).

Эти результаты непосредственно применимы к оценке влияния нелинейности на трехмерное распространение сравнительно слабых возмущений. Заметим, что здесь используется по тем же самым причинам, что и прежде, основная идея геометрической акустики о том, что сигналы следуют вдоль лучей, т. е. вдоль

путей, отвечающих минимальному времени. Мы также опять используем траектории лучей, рассчитанные исходя из линейной теории, т. е. на основании пространственного распределения *невозмущенной* скорости звука c_0. Любая попытка использовать для относительно слабых возмущений истинную скорость сигнала приведет лишь к малым изменениям этих траекторий, а, следовательно, также к малым отклонениям распределения площади поперечного сечения $A_0(x)$ в (261) в зависимости от расстояния x вдоль лучевой трубки. Эти изменения будут несущественными по сравнению с большими изменениями величин в квадратных скобках в (261), которые определяются вдоль любой трубки лучей по линейной теории. Правильным подходом будет, следовательно, использование истинной скорости сигнала там, где сравнительно малая добавка к этой величине вызовет значительный *кумулятивный* эффект (посредством смещения волнового профиля), но не там, где ее влияние (за счет искажения лучей) остается относительно малым.

При таком подходе к нелинейной геометрической акустике представляет интерес исследование потока энергии вдоль трубки лучей после той точки, где формирование ударной волны вызывает диссипацию. Мы, однако, проведем здесь эти вычисления только для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями и в асимптотическом предельном случае, когда равенства (259) и (260) справедливы. Для этих равенств соотношение (245) между v_1 и u позволяет записать

$$\left(\int v_1\, dt\right)_{x=0} = \frac{1}{2}(\gamma+1)c_0^{-2}(0)\,H, \qquad H = \left(\int u\, dt\right)_{x=0}, \tag{262}$$

где H является мерой общего смещения вперед жидкости в импульсе, которое вычисляется в начальной точке $x = 0$ трубки лучей. Опять, используя (245) вместе с (205), получим, что асимптотическое значение интенсивности сравнительно слабой ударной волны равно величине $2\gamma c_0(x)/(\gamma+1)$, умноженной на (259); это дает выражение

$$\beta \sim 2\gamma\,[c_0(x)/c_0(0)]\,[V_0(x)/V_0(0)] \times \times \left\{H/(\gamma+1)\int_0^x [V_0(x)/V_0(0)]\,dx\right\}^{1/2}, \tag{263}$$

определяющее зависимость асимптотического затухания интенсивности головной ударной волны вдоль трубки лучей от H и от функции (246). Продолжительность (260) треугольного импульса, следующего за этой головной ударной волной, опреде-

ляется аналогично:

$$t_p \sim \left\{(\gamma+1)\,H\int_0^x [V_0(x)/V_0(0)]\,dx\right\}^{1/2}/c_0(0). \qquad (264)$$

Отметим, что при некотором фиксированном положении x избыточное давление p_e в импульсе асимптотической треугольной формы изменяется линейно от $p_0(x)\beta$ до 0 за время t_p, а в каждый момент времени поток волновой энергии через это сечение равен квадрату величины (261). Интеграл от этой величины по времени на интервале продолжительностью t_p (т. е. общая волновая энергия, которую импульс проносит через сечение x) будет соответственно

$$\frac{1}{3}\,t_p p_0^2(x)\,\beta^2\,[A_0(x)/(\rho_0(x)\,c_0(x))], \qquad (265)$$

что, согласно (263), (264) и (246), где $p_0(x) = \gamma^{-1}\rho_0(x)c_0^2(x)$, равно

$$\frac{4}{3}(\gamma+1)^{-1/2}\,\rho_0(0)\,c_0^2(0)\,A_0(0)\left\{H^3\Big/\int_0^x [V_0(x)/V_0(0)]\,dx\right\}^{1/2}. \qquad (266)$$

Из этого следует что волновая энергия, проходящая через сечение x, является монотонно убывающей функцией от x. Ее производная по пространственной переменной, взятая с обратным знаком,

$$\frac{2}{3}(\gamma+1)^{-1/2}\,\rho_0(0)\,c_0^2(0)\,A_0(0)\,[V_0(x)/V_0(0)]\times$$

$$\times\left\{H\Big/\int_0^x [V_0(x)/V_0(0)]\,dx\right\}^{3/2} \qquad (267)$$

должна представлять собой волновую энергию, диссипированную на единицу длины трубки лучей.

Такая диссипация может возникнуть только *внутри* ударной волны, где возрастание энтропии на единицу массы дается для слабой ударной волны, согласно уравнению (216), в виде

$$c_v\,(\gamma^2-1)\beta^3/(12\gamma^2). \qquad (268)$$

Умножив (268) на невозмущенную температуру $T_0(x)$, где $c_v T_0(x) = c_0^2(x)/[\gamma(\gamma-1)]$, получим диссипацию энергии за счет ударной волны на единицу массы жидкости; умножив эту величину на массу $\rho_0(x)A_0(x)$, приходящуюся на единицу длины трубки лучей, получим диссипацию волновой энергии

на единицу длины в виде

$$(\gamma+1)\,\rho_0(x)c_0^2(x)A_0(x)\beta^3/(12\gamma^3). \qquad (269)$$

К нашему удовлетворению использование формул (263) для β и (246) для $V_0(x)$ показывает точное совпадение между (267) и (269) — выражений для этой диссипации на единицу длины, полученных двумя *независимыми* путями.

В изотермической атмосфере невозмущенная скорость звука является постоянной, что упрощает формулы, приведенные выше, не только потому, что $c_0(x)$ может быть заменена постоянной c_0, но и потому, что в этом случае все лучи являются прямыми линиями. Для *прямых* лучей распределение площади сечения тонкой трубки лучей с необходимостью подчиняется простому квадратичному закону

$$\frac{A_0(x)}{A_0(0)} = \frac{\partial(y+x\eta,\ z+x\zeta)}{\partial(y,\ z)} = \begin{vmatrix} 1+x\,\partial\eta/\partial y & x\,\partial\eta/\partial z \\ x\,\partial\zeta/\partial y & 1+x\,\partial\zeta/\partial z \end{vmatrix} = 1+\Delta x+jx^2, \qquad (270)$$

где $(\eta,\ \zeta)$ является двумерным векторным полем проекций на поперечное сечение $x = 0$ единичных векторов вдоль направлений луча, в то время как Δ и j — значения дивергенции этого поля $\partial\eta/\partial y + \partial\zeta/\partial z$ и якобиана $\partial(\eta,\ \zeta)/\partial(y,\ z)$ в начале координат соответственно. Асимптотическая форма импульса сжатия, возникающая при смещении вперед на H в такой трубке лучей, является импульсом треугольной формы, продолжительность которого, согласно (246), (264) и (270), равна

$$t_p \sim \left\{(\gamma+1)\,H\int_0^x [\rho_0(x)/\rho_0(0)]^{-1/2}\,(1+\Delta x+jx^2)^{-1/2}\,dx\right\}^{1/2}\Big/ c_0. \qquad (271)$$

Он следует за головной ударной волной, интенсивность которой, согласно (263), равна

$$\beta \sim 2\gamma\,[\rho_0(x)/\rho_0(0)]^{-1/2}\,(1+\Delta x+jx^2)^{-1/2}\,(H/c_0t_p). \qquad (272)$$

Отметим дальнейшие упрощения, возможные в случае эффективно постоянной невозмущенной плотности. Крайний случай этих упрощений возникает, когда, кроме того, $j = 0$, что дает линейный закон расширения площади сечения трубки лучей (см. (270)). Это характерно для распространения *цилиндрического* импульса, например импульса, который может быть порожден взрывающейся проволочкой. Продолжительность t_p асимпто-

тического треугольного импульса при $x \to \infty$ дается формулой

$$t_p \sim \{2(\gamma+1)H\Delta^{-1}[(1+\Delta x)^{1/2}-1]\}^{1/2}/c_0 \sim$$
$$\sim [2(\gamma+1)H]^{1/2}(x/\Delta)^{1/4}/c_0, \qquad (273)$$

а интенсивность ударной волны в том же предельном случае

$$\beta \sim \gamma[2H/(\gamma+1)]^{1/2}\Delta^{-1/4}x^{-3/4}. \qquad (274)$$

Таким образом, получаем интересный закон асимптотического затухания цилиндрических ударных волн, согласно которому интенсивность ударной волны *обратно* пропорциональна расстоянию *в степени три четверти*. (Заметим, что здесь не рассматривается особый случай, $\Delta = j = 0$, когда лучи локально параллельны, поскольку, как установлено в разд. 1.12, геометрическая акустика *неприменима* асимптотически, если площадь трубки лучей не увеличивается.)

В более общем случае $j > 0$, когда площадь трубки лучей увеличивается с расстоянием квадратично (как, например, при распространении сферического импульса), интеграл в (271) растет только *логарифмически* при больших x и продолжительность импульса t_p (пропорциональная *квадратному корню* из этого интеграла) увеличивается поэтому очень медленно: нелинейные искажения формы волнового профиля накапливаются весьма медленно, потому что скорость искажения непрерывно и существенно уменьшается при сферическом затухании. Аналогично, в соответствии с (272), скорость затухания ударной волны выше скорости затухания сигналов, даваемой линейной теорией, благодаря множителю $H/(c_0 t_p)$, убывающему очень медленно (обратно пропорционально квадратному корню из логарифма расстояния).

В этом разделе до сих пор рассматривались системы с геометрическими масштабами, значительно превосходящими характерную длину волны: это основное предположение геометрической акустики. Однако такой же подход может быть использован для некоторых систем, только часть которых удовлетворяет этим предположениям.

Любая *компактная* область источников, конечно, удовлетворяет противоположным условиям: ее размеры малы по сравнению с длиной волны. В разд. 1.6 показано на основе линейной теории, что ее *дальнее поле* при некоторых довольно общих предположениях может быть аппроксимировано полем *одного точечного источника* с напряженностью $q(t)$, равной скорости изменения полного потока массы из области источника. В разд. 1.4 установлены соотношения для *дальнего поля* любого точечного источника, описанные позднее (разд. 1.11) как соотношения геометрической акустики; но, как подчеркивалось при рас-

смотрении рис. 1, сигнал, распространяющийся вдоль каждой трубки лучей, для дальнего поля пропорционален $\dot{q}$; напротив, он пропорционален q, когда условия геометрической акустики применимы всюду (как при излучении больших сфер, изученном в разд. 1.11).

Было показано, что для сравнительно слабых возмущений протяженность распространения должна превысить несколько длин волн, прежде чем нелинейные эффекты вызовут существенное искажение волнового профиля. Это предполагает, что превращение потока массы q, характерной для ближнего поля, в сигналы дальнего поля должно адекватно описываться линейной теорией, в то время как дальнейшее распространение на большие расстояния таких сигналов в дальнем поле (пропорциональных $\dot{q}$) может рассматриваться с помощью геометрической акустики в версии этого раздела, учитывающей нелинейные эффекты. Однако заметим, что эти сигналы обычно не могут состоять из одиночного импульса сжатия; например, если полный массовый расход из источников возрастает до положительного максимума $q_{\max}$, а затем падает до нуля, то дальнее поле с напряженностью q будет состоять (рис. 1) из одного импульса сжатия и следующего за ним импульса разрежения с той же площадью, которые нелинейные эффекты превратят (рис. 45) в N-волну.

Таким образом, в атмосфере с однородными невозмущенными плотностью и скоростью звука распределение скорости дальнего поля точечного источника

$$u = \dot{q}\,(t - r/c_0)/\,(4\pi r \rho_0 c_0) \tag{275}$$

создает на расстоянии r_0 (которое для применения вышеописанного анализа мы выбираем в качестве начального поперечного сечения трубки лучей $x = 0$ (так что $x = r - r_0$)) смещение

$$H = \left(\int u dt\right)_{x=0} = q_{\max}/(4\,\pi r_0 \rho_0 c_0) \tag{276}$$

для участка сжатия волнового профиля и равное и противоположное смещение для участка разрежения. Отношение площадей лучевой трубки (270) равно $(r_0 + x)^2/r_0^2$ и, таким образом, асимптотическая форма импульса представляет собой N-волну, состоящую из переднего импульса треугольной формы, длительность которого, согласно (271), равна

$$t_p \sim \left\{(\gamma+1)\,H \int_0^x r_0 (r_0 + x)^{-1}\,dx\right\}^{1/2} \Big/ c_0 =$$

$$= \{(\gamma+1)\,q_{\max}\,[\ln (r/r_0)]/(4\pi\rho_0 c_0^2)\}^{1/2}, \tag{277}$$

и равного и противоположного хвостового импульса треугольной формы. Асимптотическая величина интенсивности (272) обеих ударных волн равна

$$\beta \sim 2\gamma r_0 (r_0 + x)^{-1} H/(c_0 t_p) =$$

$$= 2\gamma [q_{max}/(4\pi (\gamma + 1) \rho_0 c_0)]^{1/2}/r [\ln (r/r_0)]^{1/2}. \quad (278)$$

Эти приближенные формулы лишь слабо чувствительны к выбору значения радиуса r_0, при котором по предположению начинается нелинейное искажение дальнего поля.

Аналогичное рассуждение применимо к двумерному распространению цилиндрического импульса от длинной однородной линии компактных источников: линейная теория может быть использована, чтобы оценить образование сигнала дальнего поля, в этом случае пропорционального (рис. 1) *производной порядка* 1/2 от $q(t)$, в то время как нелинейная геометрическая акустика описывает его последующее развитие. В результате снова получается N-волна, так как даже чисто положительный массовый расход (например, от взрывающейся проволочки), как видно на рис. 1, порождает дальнее поле, содержащее как фазу сжатия, так и фазу разрежения.

Хотя для большинства областей, содержащих источники, лучи распространяются по всем направлениям, существуют некоторые примечательные исключения из этого правила: любая область источников, *движущаяся со скоростью* U, *большей чем невозмущенная скорость звука* c_0, испускает лучи только под острым углом

$$\theta = \arccos (c_0/U) \quad (279)$$

к направлению его движения; это лучи, несущие знаменитый «звуковой удар». Мы исследуем это явление главным образом для изотермической атмосферы, в которой c_0 является постоянной.

В такой атмосфере звуки, излученные источником, когда его расстояние от наблюдателя *уменьшается со скоростью, превышающей* c_0, будут услышаны наблюдателем *в обратном порядке* («пап пеп пип поп пуп» будет слышно как «пуп поп пип пеп пап»!), потому что относительно более быстрое приближение источника оставляет позади звуки, излученные в более ранние времена. Между этой довольно необычной ситуацией и обыкновенным случаем, когда звуки будут слышны в правильном порядке, потому что удаленность источника от наблюдателя уменьшается *медленнее*, чем c_0, лежит критическое условие. Когда расстояние между источником и наблюдателем уменьшается *точно* со скоростью c_0, *все* звуки (гласные и согласные) будут слышны вместе как один хлопок («удар»).

Это условие выполняется для источника, движущегося вдоль прямолинейной траектории с постоянной скоростью $U > c_0$ и неподвижного наблюдателя, *не* находящегося на этой траектории, когда угол θ между траекторией и прямым лучом, соединяющим источник и наблюдателя, принимает значение (279); тогда составляющая скорости источника $U \cos\theta$ *по направлению* к наблюдателю равна c_0. Это позволяет «удару» распространяться вдоль указанного луча.

Закон, определяющий лучи как прямые, составляющие угол (279) с траекторией источника, на самом деле всего лишь частный случай общего подхода к лучам, как к траекториям, отвечающим минимальному времени; момент, в который излученные сигналы достигают наблюдателя, становится все более и более ранним, пока расстояние от источника до наблюдателя уменьшается со скоростью, превышающей c_0, но начинает становиться все более поздним для сигналов, излученных после того, как скорость уменьшения расстояния становится меньше c_0. Если эта скорость в точности равна c_0, то сигналы, излученные под углом (279), усиливают друг друга, потому что в том месте, где находится наблюдатель, они удовлетворяют условию стационарной фазы.

Заметим, что лучи, испущенные в каждый момент времени, заполняют раскрытый вперед *конус* с полууглом (279), имеющий своей осью траекторию источника. Лучи *всех* таких конусов (каждый из которых соответствует некоторому моменту времени) заполняют все пространство; где бы ни был наблюдатель, он должен быть на одном таком луче. Этот луч и все близкие к нему лучи образуют «трубку лучей», площадь поперечного сечения которой A_0 увеличивается линейно, прямо пропорционально расстоянию от траектории источника. Это означает, что в уравнении (270) $j = 0$; отсюда следует, что в *однородной* атмосфере интенсивность звукового удара падает обратно пропорционально расстоянию в степени три четверти, как в уравнении (274).

При проектировании сверхзвукового самолета для оценки интенсивности сверхзвукового удара на уровне земли важно учитывать большое различие между относительно высокой невозмущенной *плотностью* ρ_0 *вблизи земли* и ее существенно меньшими значениями на тех высотах, где полет со сверхзвуковыми скоростями может быть экономичным. Это различие значительно уменьшает интенсивность удара на уровне земли, что уже учитывается в формуле (272) при помощи множителя в квадратных скобках.

Вкратце покажем, как этот эффект можно количественно оценить в случае полета с постоянной скоростью по прямолинейной

траектории на высоте $x = h$. Для лучей в плоскости, проходящей через эту траекторию и составляющей угол ψ с вертикалью, направленной вниз, высота точки, находящейся на расстоянии r вдоль луча, равна

$$z = h - r \sin\theta \cos\psi, \tag{280}$$

где θ — угол (279) между лучом и траекторией. Атмосфера с постоянной скоростью звука c_0 удовлетворяет уравнению

$$-g\rho_0 = dp_0/dz = \gamma^{-1}c_0^2 d\rho_0/dz, \tag{281}$$

что дает

$$\rho_0 \exp(\gamma g c_0^{-2} z) = \text{const}. \tag{282}$$

Таким образом, с помощью (280) получаем

$$\rho_0(r)/\rho_0(r_0) = \exp[\gamma g c_0^{-2}(r - r_0)\sin\theta\cos\psi]. \tag{283}$$

Если r_0 в этом выражении является начальным значением r в дальнем поле источников, так что при $r > r_0$ применима геометрическая акустика, то при площади сечения трубки лучей, пропорциональной r, можно заменить уравнение (270) на

$$A_0(r)/A_0(r_0) = r/r_0. \tag{284}$$

После этих подстановок уравнение (271), где $x = r - r_0$, дает следующее выражение для асимптотической продолжительности фазы сжатия импульса, созданного самолетом:

$$t_p \sim \left\{(\gamma+1)H_1 \int_{r_0}^{r} \exp\left[-\frac{1}{2}\gamma g c_0^{-2}(r - r_0)\sin\theta\cos\psi\right] \times \right.$$
$$\left. \times r^{-1/2}\,dr\right\}^{1/2} \Big/ c_0. \tag{285}$$

Здесь

$$H_1 = r_0^{1/2} H = r_0^{1/2}\left(\int u\,dt\right)_{r=r_0}, \tag{286}$$

а эта величина в дальнем поле, согласно линейной теории, не зависит от точного выбора r_0; действительно, изменение $r_0^{1/2}u$ описывается, как на рис. 1, кривой, пропорциональной производной порядка 1/2 от массового расхода (который здесь обусловлен тем, что воздух «расталкивается» в стороны передней частью самолета и засасывается обратно у его хвоста), а H_1 — площадь положительного участка этой кривой.

Значение (285) на уровне земли, когда входящая в эту формулу экспонента обычно уменьшается до 0,3, близко к значению, полученному заменой верхнего предела интегрирования на ∞. Заметим также, что радиус r_0 может быть заменен в этом

интеграле на 0 с небольшой потерей точности, потому что величина $gc_0^{-2}r_0$ мала по сравнению с 1. С учетом этих двух упрощений получаем

$$t_p \sim [(\gamma + 1)H_1/c_0]^{1/2} [2\pi/(\gamma g \sin\theta \cos\psi)]^{1/4}. \qquad (287)$$

Вводя второе упрощение также и в (272), получим на уровне земли (где $r \sin\theta \cos\psi = h$)

$$\beta \sim 2\gamma \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma g h/c_0^2\right) [H_1/((\gamma+1)c_0 h)]^{1/2} \times$$
$$\times [\gamma g (\sin^3\theta \cos^3\psi)/(2\pi)]^{1/4} \qquad (288)$$

— асимптотическую величину интенсивности ударной волны, которая бежит впереди импульса сжатия. За этим импульсом сжатия движется импульс разрежения примерно такой же площади, и оба эти импульса вместе образуют N-волну, включающую две ударные волны интенсивности (288), разделенные интервалом равномерного падения давления длительностью $2t_p$.

Экспоненциальный член (в 288) помогает обеспечить значения β ниже 0,001 для сверхзвуковых транспортных самолетов на характерной высоте сверхзвукового полета 17 км. Заметим, что интенсивность звукового удара достигает максимума непосредственно под траекторией полета (где $\psi = 0$) и спадает до половины этого максимального значения там, где $\psi = 70°$, т. е. примерно на расстоянии 40 км по обе стороны от траектории. Продолжительность звукового удара $2t_p$ меняется менее заметно, и ее типичная величина составляет около 0,5 с.

Чтобы достичь большей точности, могут быть сделаны различные улучшения приведенного выше приближенного метода расчета. В линейную теорию дальнего поля может быть внесено усовершенствование: распределение точечных источников, связанное с потоком массы от каждой точки траектории полета, который является положительным, когда передняя часть самолета проходит через нее, и отрицательным после этого, можно сочетать с распределением вертикальных диполей, связанных с подъемной силой самолета в воздухе; их дальнее поле имеет направленное распределение, пропорциональное $\cos\psi$, которое (к сожалению) усиливает сигнал в основном вертикально *вниз* ($\psi = 0$). С другой стороны, изменение в невозмущенной скорости звука c_0 (которая падает с 340 м/с на земле до приблизительно 300 м/с на высоте полета) приводит к полезному уменьшению интенсивности звукового удара на землю благодаря возрастанию отношения $V_0(x)/V_0(0)$ в формуле (263). Это обусловлено влиянием множителя $c_0^{-5/2}$ в (246), на которое накладывают-

ся изменения в $A_0^{-1/2}$ (так как лучи преломляются таким образом, что происходит уменьшение их углов наклона к горизонту, особенно при малых углах).

Упражнения к главе 2

1. Мы видели, что при анализе распространения одномерных волн нет необходимости рассчитывать поперечные движения, так как их энергия слишком мала, чтобы повлиять на распространение. Тем не менее мы предлагаем читателю попытаться провести такой расчет.

В рамках линейной теории распространения длинных волн вдоль открытых каналов (разд. 2.2) показать, что продольная скорость u удовлетворяет уравнению

$$\partial u/\partial x = -b\dot{\zeta}/A_0,$$

где b — ширина свободной поверхности и A_0 — невозмущенная площадь поперечного сечения воды. Вывести из этого первое приближение для поперечных скоростей v и w, используя выражения

$$v = \partial\varphi/\partial y \text{ и } w = \partial\varphi/\partial z;$$

здесь $\partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$ принимает значение $b\dot{\zeta}/A_0$, не зависящее от y и z, в то время как нормальная производная от φ обращается в нуль на твердой границе поперечного сечения и принимает значение $\partial\varphi/\partial z = \dot{\zeta}$, не зависящее от y, на свободной поверхности $z = 0$. Заметим, что эти значения совместны в силу двумерной теоремы о дивергенции (формулы Грина). Показать, что

$$\Phi = \varphi - \dot{\zeta}z - (b\dot{\zeta}/(4A_0))(y^2 + z^2)$$

является четной функцией z, удовлетворяющей двумерному уравнению Лапласа

$$\partial^2\Phi/\partial y^2 + \partial^2\Phi/\partial z^2 = 0,$$

так что стандартные методы решения двумерного уравнения Лапласа пригодны для нахождения поперечных движений.

Для полукруглого поперечного сечения использовать полярные координаты

$$y = r\cos\theta, \quad z = -r\sin\theta \quad \left(0 < r < \frac{1}{2}b,\ 0 < \theta < \pi\right),$$

чтобы найти решение в форме

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{2n}\cos 2n\theta.$$

Получить граничное условие для Φ при $r = (1/2)b$ в виде

$$\partial\Phi/\partial r = \dot{\zeta}(\sin\theta - 2\pi^{-1}) \quad (0 < \theta < \pi)$$

и показать, что

$$a_n = -2\dot{\zeta}\left(\frac{1}{2}b\right)^{1-2n}\Big/[\pi n(4n^2 - 1)].$$

В заключение воспользоваться тем фактом, что первый член ряда для Ф является главным, чтобы получить очень грубый набросок линий тока поперечного течения при $\dot{\zeta} > 0$.

2. У разветвления В однородная труба АВ длиной l_1 и площадью поперечного сечения A_1 соединяется с двумя однородными трубами; одна из них имеет площадь поперечного сечения A_2 и длину l_2, а другая — площадь A_3 и длину l_3; концы обеих труб закрыты. Для звуковых волн в воздухе с постоянными плотностью ρ_0 и скоростью звука c найти эффективную проводимость системы Y_1 в сечении А. Показать, что резонансные частоты ω удовлетворяют уравнению

$$\sum_{n=1}^{3} A_n \operatorname{tg}(\omega l_n/c) = 0,$$

когда А — закрытый конец. Получить также условие резонанса, когда А — открытый конец.

3. Показать, что для достаточно длинных волн в воде с плотностью ρ_0 резервуар, в котором горизонтальная поверхность воды имеет площадь S, ведет себя подобно емкости $S/(\rho_0 g)$.
Пусть такой резервуар соединен с открытым морем каналом с постоянными шириной b и глубиной h. При приливной частоте ω наблюдается резонанс, несмотря на то что длина канала только $(1/4)\,\pi\omega^{-1}\,(gh)^{1/2}$. Доказать, что значение S близко к $b\omega^{-1}\,(gh)^{1/2}$.

4. Стеноз, который представляет собой любое сужение артерии, может, например, быть следствием внешнего давления со стороны какого-нибудь увеличенного органа. Рассмотреть синусоидальную составляющую пульсовой волны, имеющую частоту ω и волновую скорость c, которая падает на сужение длины l, причем $\omega l/c$ мало. Вывести для доли отраженной волновой энергии следующую формулу:

$$\frac{(\overline{A_1/A})^2\,(\omega l/c)^2}{4+(\overline{A_1/A})^2\,(\omega l/c)^2},$$

где A_1 — площадь поперечного сечения сосуда без сужения и $\overline{A_1/A}$ — среднее значение A_1/A в области сужения.

5. Для грубой оценки приливно-отливных движений западную часть Средиземного моря можно считать сужением (Гибралтарский пролив) эффективной длиной 50 км и площадью поперечного сечения 4 км^2, продолжающимся на восток в виде длинного канала шириной 160 км и площадью поперечного сечения 160 км^2, который еще дальше на восток достаточно постепенно расширяется, чтобы можно было пренебречь отражением энергии прилива. Показать, что для этой модели со стороны Средиземного моря амплитуда перепада уровней прилива и отлива с периодом 12,5 часов в Гибралтарском проливе будет примерно в три раза меньше, а время высокой воды наступит почти на 2 часа позже, чем со стороны Атлантического океана. Показать, что дальнейшее уменьшение амплитуды прилива в два раза будет ожидаться там, где ширина канала увеличивается

до 500 км, а площадь поперечного сечения — до 800 км^2 (около острова Майорка).
[Замечание: эта грубая модель позволяет в первом приближении понять, почему приливы в Средиземном море являются столь умеренными, и дает хорошую оценку (5×10^6 м^3/с) амплитуды флуктуаций объемного расхода в проливе, но она нуждается в уточнении, учитывающем наличие некоторого отражения. В действительности амплитуды приливов несколько меньше, а время запаздывания значительно меньше.]

6. Распределение площади поперечного сечения A вдоль «экспоненциального» рупора есть

$$A = A_1 \exp(\alpha x) \quad (x \geqslant 0).$$

Показать, что для частот, значительно меньших пороговой частоты, рупор ведет себя как индуктивность $L = \rho_0 \alpha^{-1} A_1^{-1}$, так что его отклик на волну, падающую со стороны $x < 0$, является таким же, как отклик сужения длины α^{-1} с постоянным поперечным сечением A_1.

7. Показать, что для конического рупора не существует пороговой частоты.
Пусть звуковая волна $p_e = f(t - x/c)$ распространяется вдоль трубы с площадью поперечного сечения A, имеющей постоянное значение A_1 при $x < x_1$ и равной $A_1 x_1^{-2} x^2$ при $x > x_1$. Показать, что проходящая волна в коническом рупоре при $x > x_1$ имеет избыточное давление

$$p_e = x_1 x^{-1} f(t - x/c) - \frac{1}{2} c x^{-1} \int_{-\infty}^{t - x/c} f(T) \exp\left[\frac{1}{2} c x_1^{-1} (T - t + x/c)\right] dT,$$

и найти отраженную волну.

8. Воздух при температуре 20° С в очень длинной трубе постоянного поперечного сечения, ограниченный слева (при $x = 0$) поверхностью точно пригнанного поршня, первоначально находится в покое. Затем поршень быстро разгоняется (по направлению из воздуха) до скорости $u = -U$, которая достигается за время τ, когда поверхность поршня находится на расстоянии $x = -l$. После этого поршень движется с постоянной скоростью $u = -U$. Для любого времени $t > \tau$ найти протяженность участка трубы, на котором воздух движется со скоростью $u = U$. Показать, что она совпадает с протяженностью участка $x \leqslant -l$, если U около 280 м/с. Определить температуру на этом участке.

9. Площадь поперечного сечения воды в канале имеет постоянное значение A_0 в невозмущенном состоянии и значение $A_0 + b\zeta$ (где b — постоянная) там, где уровень воды поднимается на высоту ζ. Показать, что в простой волне, распространяющейся вдоль канала, постоянная Бернулли (170) равна $c_0 u + (3/4)\, u^2$, где $c_0 = (g A_0)^{1/2} b^{-1/2}$ — невозмущенная скорость волны, а u — скорость жидкости.
Канал открывается в большой резервуар с постоянной глубиной h_R и скоростью длинных волн $c_R = (g h_R)^{1/2}$. Показать, что волна,

распространяющаяся вдоль прямолинейной стенки резервуара мимо устья канала, вызывает в канале простую волну. Найти уравнение, связывающее скорость жидкости в канале непосредственно у его открытого конца $u(t)$ со скоростью жидкости вне канала $u_R(t)$, индуцированной волной в резервуаре.

10. Показать, что вязкое затухание продольных волн в трубах или каналах, изученное в рамках линейной теории в разд. 2,6, порождает явления, которые можно описать с помощью введенной позднее в (185) координаты $X = x - c_0 t$ следующим образом. Затухание синусоидального сигнала $p_e = p_1 \exp(-ikX)$ при этом описывается выражением

$$p_e = p_1 \exp[-ikX - \varepsilon (ik)^{1/2} t],$$

где величина

$$\varepsilon = \frac{1}{2} s A_0^{-1} (\nu c)^{1/2}$$

пропорциональна длине s твердой части периметра поперечного сечения. Показать, что если в качестве независимых переменных используются X и t, то затухание импульса *произвольной* формы описывается уравнением

$$\partial p_e/\partial t = -\varepsilon [\partial/\partial(-X)]^{1/2} p_e.$$

Вывести отсюда, что теория, учитывающая *как* слабое нелинейное искажение формы импульса, *так* и постепенное затухание в вязком пограничном слое на твердых стенках, должна быть основана на следующем уравнении, заменяющем (186):

$$\partial v/\partial t + v \partial v/\partial X = -\varepsilon [\partial/\partial(-X)]^{1/2} v;$$

это уравнение можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v(X, t)\frac{\partial}{\partial X}\right] v(X,t) = \varepsilon \int_X^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} v(\xi, t) \frac{d\xi}{[\pi(\xi - X)]^{1/2}}.$$

11. Ударные волны для экспериментальных целей часто генерируются с помощью *ударной трубы* — устройства, принцип действия которого таков. Тонкая мембрана ($x = 0$) разделяет две первоначально покоящиеся жидкости: *рабочую*, имеющую давление p_0 и плотность ρ_0, и *толкающую* ($x < 0$), имеющую значительно большее давление p_2 и плотность ρ_2. В некоторый момент мембрана разрывается. Предполагая, что поверхность раздела между двумя жидкостями мгновенно приходит в движение с постоянной скоростью u_1, показать, что это порождает ударную волну только в рабочей жидкости. Что образуется в толкающей жидкости?

Если рабочая жидкость является совершенным газом с постоянными удельными теплоемкостями, а их отношение равно γ_0, показать, что давление p_1 на поверхности раздела связано с u_1 уравнением

$$u_1 = (p_1 - p_0)\left\{\frac{1}{2}\rho_0[(\gamma_0 + 1)p_1 + (\gamma_0 - 1)p_0]\right\}^{-1/2}.$$

Рассматривая движение толкающей жидкости, являющейся совершенным газом с постоянными удельными теплоемкостями, отно-

шение которых равно γ_2, показать, что

$$u_1 = 2(\gamma_2 - 1)^{-1}(\gamma_2 p_2/\rho_2)^{1/2}[1 - (p_1/p_2)^{(\gamma_2-1)/(2\gamma_2)}].$$

Доказать, что эти два уравнения однозначно определяют интенсивность возникающей ударной волны $\beta = (p_1 - p_0)/p_0$.
[Предположение о том, что скорость поверхности раздела достигается *мгновенно*, впоследствии подтверждается выводами из этого предположения: все динамические уравнения удовлетворены, а скорость жидкости и давление непрерывны поперек поверхности раздела между двумя жидкостями. Кроме того, этот результат можно предсказать на основании анализа размерностей; данные настоящей задачи позволяют определить величины с размерностью *скорости*, например $(p_2/\rho_2)^{1/2}$ и $(p_1/\rho_1)^{1/2}$, но не величины с размерностью *времени*.]

12. Используя правило Уизема, рассмотреть развитие следующей простой волны. В момент времени $t = 0$ единичный импульс сжатия, имеющий площадь Q_1 под кривой зависимости избыточной скорости сигнала v от расстояния X, движется вперед позади более слабого импульса сжатия, имеющего под соответствующей кривой площадь $Q_2 < Q_1$. Расстояние l между *хвостовыми концами* импульсов сжатия достаточно велико, чтобы импульсы были разделены невозмущенной областью. Показать графически, как правило Уизема приводит к построению, определяющему процесс *объединения* ударных волн, при котором после того, как хвостовая ударная волна переднего импульса сомкнется с головной ударной волной заднего импульса, они объединятся в одну ударную волну.
Показать также, что для достаточного большого l объединение произойдет, когда время t удовлетворит уравнению

$$l = (2Q_1 t)^{1/2} - (2Q_2 t)^{1/2},$$

и что после этого скачок добавочной скорости сигнала v будет равен

$$[2(Q_1 + Q_2)/t]^{1/2}.$$

Каковы будут скачки добавочной скорости сигнала для двух ударных волн непосредственно перед их объединением?

13. Гидравлический прыжок часто появляется как *стационарное* явление в установившемся потоке, и для потока постоянной ширины b при наклоне дна α он может быть приближенно исследован следующим образом. В том месте, где глубина потока равна h, средняя скорость течения u по поперечному сечению принимается равной $J_0/(bh)$, где J_0 — постоянный объемный расход потока. Затем полагают $u\,du/dx = g(\alpha - dh/dx) - fu^2/h$, приравнивая грубую оценку $u\,du/dx$ для среднего ускорения жидкости к разности между составляющей ускорения силы тяжести, параллельной свободной поверхности, и грубой оценкой силы сопротивления на единицу массы за счет турбулентного трения. Показать, что эти уравнения можно объединить в уравнение

$$dh/dx = (\alpha h^3 - f h_c^3)/(h^3 - h_c^3),$$

где h_c — *критическая глубина*, при которой скорость потока равна скорости длинной волны.
Это дифференциальное уравнение ставит вопрос, аналогичный загадке, изученной в разд. 2.9—2.12, а именно градиент dh/dx становится бесконечным при $h = h_c$. С другой стороны, этот градиент

становится нулевым там, где h принимает установившееся значение

$$h_c\,(f/\alpha)^{1/3} = h_s.$$

Читателю предлагается начертить интегральные кривые: (i) когда $\alpha < f$, так что $h_s > h_c$, и (ii) когда $\alpha > f$, так что $h_s < h_c$. Заметим, что в случае (i) возможен гладкий переход от установившегося течения при $h = h_s$ к асимптотическому решению $dh/dx \to \alpha$ с горизонтальной свободной поверхностью (соответствующему втеканию в резервуар). Показать также, что такой гладкий переход невозможен в случае (ii).

Заметим, что в случае (ii) установившееся течение при $h = h_s$ является сверхкритическим (скорость течения превосходит скорость длинной волны). Это означает, что гидравлический прыжок, распространяющийся *вверх* по потоку, может удерживаться в неизменном положении этим противоположно направленным стационарным потоком. Показать, что глубина h_1 за этим стационарным гидравлическим прыжком удовлетворяет уравнению

$$h_1 h_s\,(h_1 + h_s) = 2h_c^3,$$

у которого имеется только одно положительное решение, превосходящее h_c. Выяснить, каким образом это однозначно определяет переход от решения $h = h_s$ к упомянутой интегральной кривой, которая стремится при больших x к некоторому постоянному уровню горизонтальной свободной поверхности.

14. Иллюстрацией нелинейной геометрической акустики с квадратичной зависимостью площади сечения A_0 трубок лучей от расстояния (разд. 2.14) служит звуковое поле, создаваемое *тормозящимся снарядом, летящим со сверхзвуковой скоростью*. Мы предлагаем читателю рассчитать в этом случае излучение в воздух с эффективной постоянной плотностью ρ_0.

Рассмотреть конусы лучей, исходящие из такого снаряда в моменты времени t и $t + \delta t$, когда его скорость равна U и $U - f\delta t$ соответственно; здесь f — величина торможения. Показать, что площадь $A_0\,(r)$ поперечного сечения между этими конусами изменяется с расстоянием от вершины конуса пропорционально

$$r + (r^2/l),$$

где

$$l = (U^2 - c_0^2)\,U\,(c_0 f)^{-1}.$$

Вывести, что если $r_0 \ll l$ является начальным значением r в дальнем поле источников, так что геометрическая акустика применима при $r > r_0$, то при больших r/r_0 продолжительность $2t_p$ порожденной снарядом N-волны дается формулой

$$t_p = \{(\gamma+1)\,H_1 l^{1/2} \ln\,[1 + 2\,(r/l + r^2/l^2)^{1/2} + 2\,(r/l)]\}^{1/2}/c_0,$$

где H_1 определяется уравнением (286). Заметим, что это выражение позволяет сделать *переход* от поведения при $r \ll l$, когда

$$t_p \approx \{2\,(\gamma+1)\,H_1 r^{1/2}\}^{1/2}/c_0,$$

аналогичным случаю цилиндрического импульса (273), к поведению при $r \gg l$, когда

$$t_p \approx \{(\gamma+1)\,H_1 l^{1/2} \ln\,(4r/l)\}^{1/2}/c_0,$$

аналогичному случаю (277) сферического импульса. Объяснить такой переход с помощью геометрии конусов лучей.

3. Волны на воде

3.1. Поверхностные гравитационные волны

Даже при первоначальном изучении волн в жидкостях необходимо рассматривать *дисперсионные* эффекты — сложную группу явлений, наблюдаемых в большинстве процессов распространения волн в жидкостях. Речь идет о тех процессах, в которых скорость волны *c изменяется в зависимости от длины волны* и, возможно, также от направления ее распространения. Таким образом, даже если амплитуды остаются настолько малыми, что можно применить линейную теорию, скорость распространения принимает различные значения для различных синусоидальных составляющих общего решения.

Главы 3 и 4 посвящены в основном изложению общего взгляда на линейную теорию дисперсии. Хотя отдельные волновые системы, описанные в этих главах (прежде всего гравитационные волны), и сами по себе весьма важны, они используются в основном для иллюстрации явления дисперсии; нелинейные эффекты не учитываются.

Напротив, в гл. 2 рассматривались недиспергирующие системы с фиксированной скоростью волны c, не зависящей от длины волны для всех возмущений очень малой амплитуды. Но в ней развивались нелинейные теории, учитывающие зависимость скорости сигнала от его интенсивности. В таком нелинейном анализе недиспергирующих систем со скоростью сигнала, не зависящей от длины волны, но зависящей от интенсивности, содержатся трудности приблизительно того же порядка, что и в излагаемом далее *линейном* анализе *диспергирующих* систем, в которых интенсивность сигнала слишком мала, чтобы влиять на его скорость, зависящую, однако, от длины волны (и, возможно, от направления распространения). Оба эти метода целесообразно изложить в основном тексте, а гораздо более сложный нелинейный анализ волн с дисперсией (учитыва-

ющий «конкуренцию» зависимостей скорости сигнала от длины волны и от его интенсивности), который требует использования намного более развитых методов, отложить до эпилога.

В главе 3 исследуется изотропная дисперсия, при которой скорость волны c не зависит от направления распространения, но меняется с длиной волны. Теория систем волн такого рода дана в разд. 3.1—3.5. В следующих трех разделах изложена теория замечательного и важного свойства таких систем волн, заключающегося в том, что фундаментальную роль в их распространении играет *групповая скорость*, совершенно отличная от скорости волны c, с которой движутся отдельные гребни и впадины волн. В разд. 3.9 и 3.10 эта теория применяется для изучения конкретных систем волн.

Естественное обобщение этой теории на случай *анизотропных* диспергирующих волн, скорость которых c зависит и от направления распространения, и от длины волны, будет дано в гл. 4. Существенную роль снова будет играть групповая скорость, которая будет отличаться теперь от скорости гребней и впадин как по величине, так и по *направлению*. Это понятие вектора групповой скорости оказывается основным в обобщенной теории трубок лучей и их свойств, которая позволяет распространить результаты, полученные в гл. 1 и 2 в пределе геометрической акустики, на случай общих *линейных* систем и сделать их более обоснованными.

Основными примерами диспергирующих волн в гл. 3 и 4 являются *гравитационные волны*, движение которых определяется взаимодействием между инерцией жидкости и ее стремлением вернуться под действием силы тяжести в состояние устойчивого равновесия в случае, когда более тяжелая жидкость располагается ниже более легкой. В гл. 4 рассматриваются волны такого типа внутри жидкости, плотность которой в невозмущенном равновесном состоянии *непрерывно* уменьшается с увеличением высоты; это так называемые внутренние гравитационные волны. Метеорологами установлено, что стратификация плотности внутри различных частей атмосферы такова, что появляются внутренние гравитационные волны, существенно влияющие на некоторые наблюдаемые процессы. Океанографы в свою очередь показали, что в частях океана с существенной стратификацией плотности внутренние гравитацонные волны имеют важное значение. Поскольку сила тяжести, как возвращающая сила, действует в одном фиксированном направлении, нет оснований для изотропии (т. е. «равноправия всех направлений») при распространении гравитационных волн, и было найдено, что внутренние гравитационные волны являются заметно анизотропными.

Существование сплошной среды в жидкой и газообразных фазах допускает также и совершенно другой тип устойчивого равновесия, когда более тяжелая среда находится ниже более легкой; например, однородная жидкость (скажем, вода) отделена горизонтальной поверхностью от находящегося сверху однородного газа (скажем, воздуха). Тогда плотность меняется разрывным образом при переходе через некоторую *поверхность* — «поверхность воды» (или в общем случае, поверхность раздела жидкости и газа). Возмущения этого равновесного состояния проявляются в виде *поверхностных гравитационных волн*, которые не могут распространяться вдаль от поверхности: как мы увидим, они удаляются от поверхности не дальше, чем на расстояние одной длины волны. Лишь в горизонтальных направлениях они распространяются на расстояния, во много раз большие длины волны. Так как в поле вертикальной возвращающей силы различные *горизонтальные* направления ничем не отличаются, эти волны изотропны в горизонтальном направлении (все горизонтальные направления их распространения равноправны). Тем не менее эффективная инерция жидкости, связанная с зависящей от длины волны глубиной проникновения возмущения, вызывает *дисперсию* — зависимость скорости волны от ее длины.

Мы рассмотрим поверхностные гравитационные волны на плоской границе между водой и воздухом (хотя та же теория применима и для поверхностей раздела между другими жидкостями и газами). Волны на плоской поверхности воды, изученные в гл. 2, являются исключительно «длинными» волнами; глубина воды составляет малую долю длины волны. В случае таких волн возмущения могут распространяться по всей глубине, и это не нарушает запрета на проникновение волн на глубину более одной длины волны. Действительно, в разд. 2.2 установлено, что избыточное давление приблизительно постоянно по всему поперечному сечению. Для малых возмущений поверхности воды эффективная инерция жидкости не зависит тогда от длины волны, и волны являются недиспергирующими. В разд. 3.3 мы снова получим это распространение без дисперсии как один предельный случай линейной теории поверхностных гравитационных волн, предсказывающей дисперсию во всех *остальных* случаях.

В общей линейной теории гравитационных волн в однородном водоеме сжимаемость оказывается пренебрежимо малой, так что плотность воды можно считать постоянной величиной ρ_0. Этот вывод был уже сделан для длинных волн в разд. 2.2, где показано, что величина изменения площади поперечного сечения воды на много порядков превышает величину ее сжимаемости.

Этот результат равносилен утверждению о малости скорости волны c по сравнению со скоростью звука. Кроме того, в разд. 3.3 мы проверим, что при данной глубине воды h наибольшей возможной скоростью распространения волны c является скорость длинных волн $(gh)^{1/2}$, которая мала по сравнению со скоростью звука c_s при условии, что

$$h \ll c_s^2 g^{-1} = (1400 \text{ м/с})^2 (9{,}8 \text{ м/с}^2)^{-1} = 200 \text{ км}. \qquad (1)$$

Все известные водоемы удовлетворяют этому условию, гарантирующему возможность пренебрежения сжимаемостью, что и оправдывает использование приводимого ниже уравнения (5). В этом разделе мы пренебрегаем также вязкостью и другими диссипативными эффектами, отложив их изучение до специального разд. 3.5, в котором (как и в разд. 1.13 и 2.7 предыдущих глав) рассматривается *затухание* волн на воде.

Еще раз используем обозначения из разд. 2.2; в системе координат с осью z, направленной *вверх* от свободной поверхности, невозмущенное распределение давления определяется уравнением гидростатики

$$p_0 = p_a - \rho_0 g z, \qquad (2)$$

где p_a — атмосферное давление. Избыточное давление, обусловленное возмущением, определяется как

$$p_e = p - p_0. \qquad (3)$$

Линеаризованное уравнение количества движения может быть записано в виде

$$\rho_0 \partial \mathbf{u}/\partial t = -\nabla p_e. \qquad (4)$$

Так же как в начале гл. 1, в этом уравнении опущен нелинейный инерционный член $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$. «Взяв ротор», мы заключаем, что в рамках линейной теории поле вихрей не зависит от времени: «Завихренность остается фиксированной, однако при этом многие другие величины могут распространяться». «Вращательная часть» поля скоростей, порожденная этим стационарным полем вихрей, не зависит от времени; ей соответствует избыточное давление $p_e = 0$ (как следует из уравнения (4)), и она, таким образом, не возмущает плоскую поверхность воды. Оставшаяся часть поля скоростей является безвихревой и поэтому может быть записана в виде градиента $\nabla\varphi$ потенциала скорости φ; только эта часть возмущает поверхность воды или проявляет себя в колебаниях, связанных с распространением волн.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$, и из него для безвихревой части поля скоростей,

соответствующей поступательному движению, следует уравнение Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{5}$$

Это уравнение может быть сопоставлено с волновым уравнением для звуковых волн (разд. 1.1), в правой части которого содержится член $c_s^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2$. Однако в случае волн на воде, распространяющихся горизонтально с волновой скоростью c, каждый член в левой части уравнения (фактически — вторая производная по направлению распространения) имеет порядок $c^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2$. Эта величина гораздо больше, чем $c_s^{-2}\partial^2\varphi/\partial t^2$, при выполнении условия (1), гарантирующего неравенство $c \ll c_s$. *Таким образом, уравнение Лапласа (5) является прекрасным приближением для описания волн на воде.*

Уравнением Лапласа нельзя описать распространение волн в жидкости, полностью ограниченной стационарными поверхностями, но это можно сделать, если добавить к нему условия, которые выполняются на *свободной* поверхности воды. Как показано в разд. 2.2, эти условия требуют, чтобы избыточное давление удовлетворяло равенству

$$p_e = \rho_0 g \zeta \tag{6}$$

на возмущенной поверхности воды

$$z = \zeta(x, y, t), \tag{7}$$

с тем чтобы (2) и (3) давали на этой поверхности для величины $p = p_0 + p_e$ значение атмосферного давления p_a. Налагая это условие, мы подразумеваем, что *единственной* силой, которая стремится придать поверхности плоскую форму, является сила тяжести. Таким образом, мы игнорируем разрыв давления поперек поверхности раздела «воздух — вода», обусловленный поверхностным натяжением. Позднее (в разд. 3.4) будет показано, что им можно пренебречь при рассмотрении всех волн, кроме «волн ряби» (очень коротких).

Безвихревой поступательной части поля скоростей $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ отвечает в силу уравнения (4) поле избыточного давления, выражаемое, как и в теории звука, формулой

$$p_e = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t. \tag{8}$$

Тогда из (6) и (7) следует

$$[\partial\varphi/\partial t]_{z=\zeta} = -g\zeta. \tag{9}$$

Это условие является сложным ввиду того, что форма свободной поверхности $z = \zeta$ заранее неизвестна. Однако в линейной тео-

рии это условие упрощается и может быть записано в виде

$$[\partial\varphi/\partial t]_{z=0} = -g\zeta, \tag{10}$$

поскольку разность между левыми частями уравнений (9) и (10) по теореме о среднем значении равна произведению малого возмущения ζ свободной поверхности и другой малой величины, а именно значения второй производной $\partial^2\varphi/\partial t\partial z$ в точке, расположенной между невозмущенной и возмущенной поверхностями ($z = 0$ и $z = \zeta$).

Второе граничное условие связывает безвихревую поступательную часть поля скоростей $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ с соответствующим ей вертикальным смещением ζ свободной поверхности. Скорость изменения величины ζ, определяемая движением частиц жидкости, равна вертикальной составляющей $\nabla\varphi$ на поверхности:

$$\partial\zeta/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\zeta = [\partial\varphi/\partial z]_{z=\zeta}\ . \tag{11}$$

В линейной теории уравнение (11) может быть упрощено как за счет отбрасывания в левой части конвективной составляющей $\mathbf{u}\nabla\zeta$, являющейся произведением величин малых возмущений, так и за счет замены значения величин в правой части при $z = \zeta$ ее значением при $z = 0$, как было сделано при выводе соотношения (10). Это дает

$$\partial\zeta/\partial t = [\partial\varphi/\partial z]_{z=0}. \tag{12}$$

Соотношения (10) и (12) представляют собой линейные граничные условия на фиксированной границе $z = 0$ области $z \leqslant 0$, в которой должно быть справедливо уравнение Лапласа (5). Дифференцируя соотношение (10) по t, можно исключить из них ζ и получить граничное условие для потенциала скорости φ:

$$\partial^2\varphi/\partial t^2 = -g\partial\varphi/\partial z \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{13}$$

Решениями уравнения (5) в области $z \leqslant 0$, удовлетворяющими граничному условию (13), будут поверхностные гравитационные волны. Смещение поверхности ζ определяется через потенциал скорости φ из соотношений (10) или (12).

3.2. Синусоидальные волны на глубокой воде

Установив, что в рамках линейной теории поверхностных гравитационных волн задача сводится к решению известного уравнения Лапласа (5) для безвихревого течения несжимаемой жидкости при специальном граничном условии (13) на невозму-

щенной свободной поверхности $z = 0$, изучим прежде всего решения, описывающие бегущие синусоидальные волны. Именно эти решения демонстрируют явление дисперсии — зависимость скорости волны от ее длины. С другой стороны, мы увидим, что влияние дисперсии часто приводит к необходимости рассматривать возмущения общего вида (несинусоидальные) и требует определения различных синусоидальных составляющих его в некоторые последующие моменты времени *в различных точках*. Это, очевидно, тот механизм, под действием которого поверхность воды может локально принимать почти синусоидальную форму (однако в разд. 3.6 нас ожидают некоторые сюрпризы, касающиеся особенностей действия этого механизма).

В данном рассмотрении предполагается, что искомое решение уравнения Лапласа в виде синусоидальных волн в заполненной водой области $z \leqslant 0$ удовлетворяет условию (13) на верхней границе $z = 0$. Мы должны также наложить подходящее граничное условие на нижней стационарной границе массы воды; для безвихревого течения этим условием будет стремление к нулю нормальной составляющей скорости жидкости, т. е. *производной* по нормали потенциала скорости φ. Любое полученное таким образом решение для безвихревого течения дает, однако, ненулевое значение тангенциальной составляющей скорости на границе. В случае вязкой жидкости оно должно быть согласовано с точным граничным условием равенства нулю скорости жидкости на стационарной твердой поверхности посредством введения тонкого диссипативного пограничного слоя (разд. 2.7) между поверхностью и безвихревым потоком.

Хотя в разд. 3.3 решения уравнения Лапласа в виде синусоидальных волн строятся так, чтобы они удовлетворяли не только верхнему, но и нижнему граничному условию, а в разд. 3.5 изучается соответствующий вязкий пограничный слой, мы опишем сначала более простое явление — волны на поверхности столь глубокой воды, что точное граничное условие выполняется снизу автоматически, поскольку связанное с поверхностными волнами возмущение не может проникнуть так глубоко вниз. Поверхностные волны такого рода называют «волнами на глубокой воде»; для любого водоема с глубиной, превосходящей длину волны (как указано в разд. 3.1), нижнее граничное условие удовлетворяется.

Это утверждение легко проверить. Потенциал скорости, описывающий распространение синусоидальной волны в положительном направлении оси x со скоростью волны c, имеет вид

$$\varphi = \Phi(z) \exp[i\omega(t - x/c)] = \Phi(z) \exp[i(\omega t - kx)], \qquad (14)$$

где ω и k — угловая частота и волновое число, которые выражаются через период t_p и длину волны $\lambda = ct_p$ так:

$$\omega = 2\pi/t_p, \quad k = \omega/c = 2\pi/\lambda. \tag{15}$$

Функция $\Phi(z)$ описывает зависимость амплитуды волны (возможно комплексной) от расстояния $(-z)$ вниз от поверхности. Выражение (14) (из которого, конечно же, ясно, что его *действительная часть* представляет собой потенциал скорости φ) удовлетворяет уравнению Лапласа (5), если $\Phi(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi''(z) - k^2\Phi(z) = 0. \tag{16}$$

Общим решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является линейная комбинация решений e^{kz} и e^{-kz}. *Первое* из них удовлетворяет граничному условию глубокой воды; возмущение, которое им описывается, становится все слабее и слабее в точках, расположенных далеко вниз от поверхности, где z отрицательно и велико. Действительно, на нижней границе, где $z < -\lambda$, возмущение становится меньше, чем $e^{-2\pi} = 0{,}00187$, т. е. пренебрежимо малым.

Так что для волн на глубокой воде мы должны положить

$$\Phi(z) = \Phi_0 e^{kz}, \tag{17}$$

где Φ_0 — постоянная (значение Φ при $z = 0$). Член, содержащий e^{-kz}, должен быть исключен, поскольку он экспоненциально растет там, где z велико и отрицательно (превышая $e^{2\pi} = 535$ на глубине, большей длины волны).

Очевидно, из (14) и (17) следует, что $\partial^2\varphi/\partial t^2$ равно $-\omega^2\varphi$, а $\partial\varphi/\partial z$ равно $k\varphi$, так что граничное условие (13) на $z = 0$ дает следующее соотношение между частотой и волновым числом для гравитационных волн на глубокой воде:

$$\omega^2 = gk. \tag{18}$$

Это *дисперсионное соотношение* в силу (15) может быть также записано через скорость волны c в виде

$$c = \omega/k = (g/k)^{1/2} = (g\lambda/(2\pi))^{1/2}. \tag{19}$$

Такая зависимость скорости волны от корня квадратного из длины волны означает весьма существенное изменение скорости в представляющем интерес диапазоне длин волн. Величина коэффициента $(g/2\pi)^{1/2}$ равна 1,25 м$^{1/2}$/с, поэтому *если λ измеряется в метрах*, c — в м/с, а период $t_p = \lambda/c$ в секундах, то из (19) получаем

$$c = 1{,}25\ \lambda^{1/2}, \quad t_p = 0{,}80\ \lambda^{1/2}. \tag{20}$$

Тогда в диапазоне длин волн от 1 до 100 м, типичном для поверхностных гравитационных волн, скорость волны c изменяется от 1,25 м/с до 12,5 м/с, а период t_p — от 0,8 до 8,0 с. Более того, в разд. 3.4 показано, что поверхностные волны с длиной λ, принимающей довольно малые значения, вплоть до 0,1 м (при этом $c = 0{,}4$ м/с, $t_p = 0{,}25$ с), все еще являются почти чисто гравитационными (в том смысле, что эффект поверхностного натяжения остается для них очень малым), а волны с таким большим значением λ, как 1000 м (при этом $c = 40$ м/с, $t_p = 25$ с), в районах океана с глубиной в несколько километров все еще остаются волнами на глубокой воде. Таким образом, синусоидальные волны на глубокой воде представляют интерес для большого диапазона значений скоростей и периодов.

Сидя на берегу водоема, можно наблюдать следующие друг за другом гребни волн с интервалом, скажем, около 8 с. Если предположить, что эти гребни представляют собой преобразованные при распространении на прибрежном мелководье гребни синусоидальных волн, которые подходят к береговой линии через области глубоких вод, то на основании соотношений (20) можно заключить, что длина этих синусоидальных волн составляет 100 м (что и соответствует $t_p = 8$ с). В разд. 3.3 и 3.6 мы увидим, что такое заключение в основе своей правильно. Уменьшение длины волны от таких больших значений для глубокой воды до величины, в несколько раз меньшей у самого берега, происходит из-за эффектов, связанных с мелководьем.

Волны на глубокой воде отличаются от «длинных» волн (т. е. волн, длинных по сравнению с глубиной) прежде всего относительными величинами, характеризующими движение в вертикальном и горизонтальном направлениях: если в случае длинных волн движение в вертикальном направлении намного слабее, чем в горизонтальном (разд. 2.2), то для волн на глубокой воде они равны по амплитуде. Действительно, из (14) и (17) для составляющей скорости по оси x (горизонтальная составляющая) и по оси z (вертикальная составляющая) получаем

$$\begin{aligned} \partial\varphi/\partial x &= -ik\Phi_0 e^{kz} \exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right], \\ \partial\varphi/\partial z &= k\Phi_0 e^{kz} \exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Они меняются со временем синусоидально с *одинаковой амплитудой* $k\Phi_0 e^{kz}$. Эта амплитуда зависит, конечно, от координаты; как указывалось ранее, она экспоненциально убывает с расстоянием $(-z)$ вниз от поверхности. Однако в любой *фиксированной* точке осциллирующие составляющие вектора скорости, как видно из формул (21), отличаются только фазами; горизонтальная составляющая $\partial\varphi/\partial x$ *отстает* от вертикальной

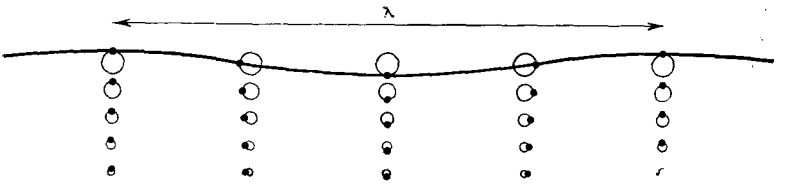

Рис. 50. Движение частиц жидкости (по линейной теории) в синусоидальной волне длины λ, распространяющейся слева направо по глубокой воде. Наибольший подъем поверхности составляет $0{,}02\lambda$; частицы на поверхности описывают окружности с радиусами такой же величины. Частицы, показанные на глубинах со средними значениями $0{,}05\lambda$, $0{,}1\lambda$, $0{,}15\lambda$ и $0{,}20\lambda$, описывают окружности с радиусами $0{,}0146\lambda$, $0{,}0106\lambda$, $0{,}0078\lambda$ и $0{,}0057\lambda$ соответственно. В каждом случае показано мгновенное положение частицы на ее круговой траектории.

$\partial\varphi/\partial z$ на $90°$ (что выражается множителем $-i$). Это означает, что *вектор скорости вращается по часовой стрелке, всегда сохраняя одну и ту же величину* $k\Phi_0 e^{kz}$, а его вертикальная и горизонтальная составляющие колеблются со сдвигом фаз в $90°$.

Линейная теория синусоидальных волн на глубокой воде предсказывает в таком случае, что величина *скорости* жидкости остается в каждой фиксированной точке постоянной, в то время как *направление* движения вращается с угловой скоростью ω. Можно принять, что скорость жидких частиц, которые могут испытывать смещающие их из данной точки малые колебания, подчиняется тому же закону, так как, согласно линейной теории, разностью между малыми значениями скоростей в данной точке и в точке, смещенной от первой на малое расстояние, можно пренебречь как произведением малых величин. Таким образом, частица жидкости, смещенная волной из точки (x, y, z), движется со скоростью, имеющей постоянную величину $k\Phi_0 e^{kz}$ и направление, вращающееся с угловой скоростью ω. Другими словами, она описывает окружность радиуса

$$\omega^{-1} k\Phi_0 e^{kz}. \tag{22}$$

Заметим, что, согласно (21), фаза движения не зависит от z, поскольку множитель e^{kz} везде действителен и положителен. В каждой же вертикальной плоскости $x = \text{const}$ такое движение порождает вращение всех частиц жидкости с одинаковой фазой, но с различными радиусами, зависящими, как это видно из (22), от расстояния $(-z)$ вниз от поверхности. При увеличении x фаза движения, конечно, убывает; ее уменьшение на единицу длины составляет величину $k = 2\pi/\lambda$. На рис. 50 показано это

приближенное в рамках линейной теории движение частиц жидкости в синусоидальных волнах на глубокой воде.

Избыточная энергия волн на воде (как и звуковых волн), согласно линейной теории, поровну разделена между: (i) кинетической энергией и (ii) энергией, связанной с восстанавливающими силами; для гравитационных волн это потенциальная энергия в поле тяготения ρgz на единицу объема [1]). Очевидно, что соответствующая величина потенциальной энергии на единицу площади горизонтальной поверхности в точке, где глубина воды равна h, получается интегрированием выражения $\rho gz\,dz$ от дна $z = -h$ до свободной поверхности $z = \zeta$:

$$\int_{-h}^{\zeta} \rho gz\,dz = \frac{1}{2}\rho g(\zeta^2 - h^2). \tag{23}$$

Тогда в этой точке избыточное *значение потенциальной энергии* в расчете *на единицу площади горизонтальной поверхности* по отношению к его значению на невозмущенной свободной поверхности ($\zeta = 0$) дается выражением

$$\frac{1}{2}\rho g\zeta^2, \tag{24}$$

которое, как и следует ожидать в линейной теории, пропорционально *квадрату* отклонения от состояния устойчивого равновесия. Заметим, что в то время как *повышение* свободной поверхности порождает вклад в потенциальную энергию за счет добавления нового слоя жидкости *над* поверхностью $z = 0$ (что соответствует положительной потенциальной энергии), *понижение* свободной поверхности дает вклад в потенциальную энергию за счет удаления жидкости *ниже* уровня $z = 0$ (что соответствует отрицательной потенциальной энергии).

С точки зрения общей линейной теории колебаний (см. курсы по динамике) выражение (24) для приращения потенциальной энергии на единицу площади горизонтальной поверхности означает, что локально подходящей *обобщенной координатой*, описывающей распространение гравитационных волн, могло бы быть смещение свободной поверхности ζ при условии, что кинетическая энергия на единицу площади горизонтальной поверхности может быть записана соответственно как величина, кратная $(\partial\zeta/\partial t)^2$. И действительно, такая формула легко выводится для синусоидальных волн.

---

[1]) В разд. 2.1 было показано, что изменением плотности в волнах на воде можно пренебречь, поэтому в оставшейся части гл. 3 в обозначении ρ_0 индекс опущен.

Общее выражение для кинетической энергии потока жидкости с потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа (5), имеет вид

$$\frac{1}{2}\rho \int (\varphi\, \partial\varphi/\partial n)\, dS, \tag{25}$$

где поверхностный интеграл берется по границе жидкости, а оператор $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по внешней нормали. Это утверждение доказывается в курсах по механике сплошной среды с помощью теоремы о дивергенции, позволяющей преобразовать выражение (25) в объемный интеграл от величины $(1/2)\rho\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)$, которая представляет собой, если только удовлетворено уравнение (5), кинетическую энергию на единицу объема $(1/2)\,\rho\cdot(\nabla\varphi)^2$. В случае волн на воде вклад в интеграл (25) на нижней границе, где $\partial\varphi/\partial n = 0$, отсутствует, а вклад в него на свободной поверхности, согласно линейной теории, может быть приближенно заменен таким же интегралом по невозмущенной свободной поверхности $z = 0$. С допустимой в линейной теории погрешностью третьего порядка относительно малых возмущений это дает для кинетической энергии на единицу площади горизонтальной поверхности выражение

$$\frac{1}{2}\rho\,[\varphi\, \partial\varphi/\partial z]_{z=0}. \tag{26}$$

Далее, согласно (12), при $z = 0$ величины $\partial\varphi/\partial z$ и $\partial\zeta/\partial t$ равны, а из (14) и (17) для синусоидальных волн на глубокой воде находим $\varphi = k^{-1}\,\partial\varphi/\partial z$. Таким образом, их *кинетическая энергия на единицу площади горизонтальной поверхности* будет

$$\frac{1}{2}\rho k^{-1}(\partial\zeta/\partial t)^2. \tag{27}$$

Здесь наличие множителя k^{-1} отвечает тому факту, что перемещение поверхности $\partial\zeta/\partial t$ вовлекает в движение слой жидкости (см. рис. 50) снизу от поверхности с толщиной, пропорциональной длине волны $2\pi/k$ (хотя и несколько меньшей этой длины).

Можно считать, что выражения (24) и (27) определяют для синусоидальных волн на глубокой воде обобщенную жесткость ρg (коэффициент перед $(1/2)\,\zeta^2$ в выражении для потенциальной энергии) и обобщенную массу ρk^{-1} (коэффициент перед $(1/2)(\partial\zeta/\partial t)^2$ в выражении для кинетической энергии) на единицу площади поверхности воды. Соотношение (18) в терминах общей теории может быть интерпретировано следующим образом: квадрат частоты колебаний ω^2 равен отношению обобщенной жесткости к обобщенной массе, в данном случае gk (так что кинетическая и потенциальная энергии будут иметь одинаковые *средние* значения).

Если профиль свободной поверхности имеет форму $\zeta = a\cos(\omega t - kx)$ с амплитудой a и связанными соотношением (18) ω и k, то полная энергия волны на единицу площади горизонтальной поверхности (сумма (24) и (27)) будет равна постоянной

$$W = \frac{1}{2}\rho g a^2. \tag{28}$$

(При этом имеем $\Phi_0 = i\omega a/k$.) Для поверхностных волн, которые могут распространяться лишь в горизонтальном направлении, энергия волны на единицу площади W является аналогом энергии W на единицу *объема* для звуковых волн (разд. 1.3).

Этот раздел мы можем завершить вопросом: насколько точным является дисперсионное соотношение (18) для волн, не имеющих в точности синусоидальную форму (14)? Заметим, что в выражении (14) нет зависимости от координаты y, что дает чисто двумерное движение, одинаковое для каждой плоскости (такой, как изображена на рис. 50), параллельной плоскости xz. Гребни волн, например, должны неограниченно простираться под прямыми углами к такой плоскости. Однако для того чтобы синусоидальные волны с хорошей точностью удовлетворяли соотношению $\omega^2 = gk$, достаточно того, чтобы их зависимость от y была настолько плавной, что член $\partial^2\varphi/\partial y^2$ в уравнении Лапласа (5) был бы намного меньше, чем остальные два члена (при выводе формул (16) — (18) они полагаются в точности уравновешивающими друг друга). Вообще говоря, это означает, что волны имеют «длинные» гребни, согласованно простирающиеся в направлении оси y на расстояние многих длин волны. Лишь упомянув здесь об этом, мы отложим до разд. 3.6 обсуждение случаев *отклонения* от поведения чисто синусоидальных волн.

3.3. Синусоидальные волны на воде произвольной, но постоянной глубины

Исходя из линейной теории, мы установили, что: (i) волны на «глубокой» воде (в том смысле, что ее глубина везде превосходит длину волны λ) обладают свойством *дисперсии*: скорость волны зависит от λ, меняясь в зависимости от нее, как $(g\lambda/2\pi)^{1/2}$ (разд. 3.2); (ii) «длинные» волны (в том смысле, что λ во много раз больше глубины) *дисперсией не обладают*, т. е. скорость волны не зависит от λ, принимая значение $(gh)^{1/2}$ в воде посто-

янной глубины h (разд. 2.2). В этом разделе мы изучим переходный между этими крайностями случай и определим скорость волны на воде *произвольной*, но постоянной глубины h, наложив соответствующее безвихревому потоку граничное условие нулевой нормальной составляющей скорости у твердого дна:

$$\partial\varphi/\partial z = 0 \quad \text{при} \quad z = -h. \tag{29}$$

Мы отложим рассмотрение вязких пограничных слоев до разд. 3.5, где (как и в разд. 2.7) мы обнаружим, что их влияние на волны сводится в основном к затуханию.

Вычисления с граничным условием (29) отличаются от проведенных в разд. 3.2 только другим специальным выбором решения обыкновенного дифференциального уравнения (16) для амплитуды $\Phi(z)$ синусоидальной волны общего вида (14). Вместо решения (17), которое стремится к нулю при больших отрицательных z, выделяется решение, удовлетворяющее условию $\Phi'(-h) = 0$. Это означает, что в общей линейной комбинации частных решений уравнения (16)

$$\Phi_1 e^{kz} + \Phi_2 e^{-kz} \tag{30}$$

мы имеем

$$\Phi_1 e^{-kh} = \Phi_2 e^{kh}, \tag{31}$$

Полагая обе части равенства (31) равными $(1/2)\,\Phi_0$, мы можем записать решение в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0 \operatorname{ch}[k(z+h)]. \tag{32}$$

Здесь и далее мы используем классические обозначения для гиперболических функций

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{sh} x = d(\operatorname{ch} x)/dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{th} x. \tag{33}$$

Их графики показаны на рис. 51. Заметим, что нулевой наклон графика $\operatorname{ch} x$ при $x = 0$ подтверждает, что функция (32) удовлетворяет условию $\Phi'(-h) = 0$.

Поскольку уравнение (14) требует (в точности, как в разд. 3.2), чтобы $\partial^2\varphi/\partial t^2 = -\omega^2\varphi$, то вместе с соотношением (32) это означает, что при $z = 0$ выполняется равенство

$$\partial\varphi/\partial z = [\Phi'(0)/\Phi(0)]\,\varphi = (k \operatorname{th} kh)\,\varphi, \tag{34}$$

так что граничное условие (13) на свободной поверхности дает соотношение между частотой ω и волновым числом k для гра-

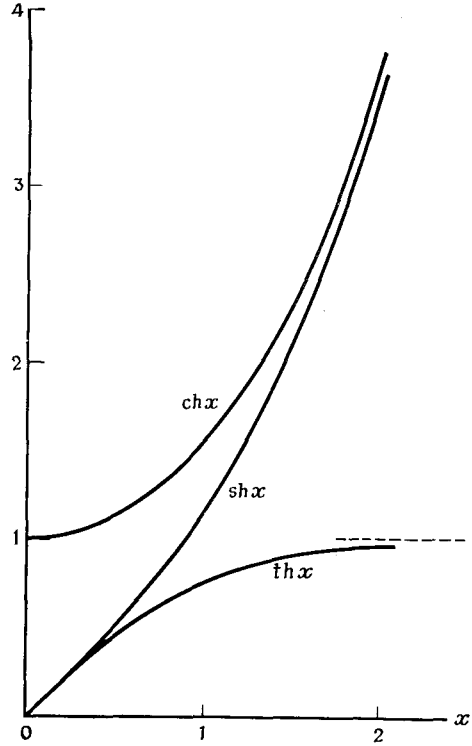

Рис. 51. Сплошные линии — графики гиперболических функций ch x, sh x, th x. Штриховая линия — асимптотическое значение th x при больших x, равное 1.

витационных волн на поверхности воды произвольной, но постоянной глубины h:

$$\omega^2 = gk \text{ th } kh. \tag{35}$$

Полученное дисперсионное соотношение может быть записано через скорость волны c в виде

$$c = \omega/k = (gk^{-1} \text{ th } kh)^{1/2}. \tag{36}$$

Этот результат согласуется с *обоими* предельными выражениями, полученными выше: $(g/k)^{1/2}$ в пределе для глубокой воды (kh велико) и $(gh)^{1/2}$ в пределе для длинных волн (kh мало), поскольку при этих предельных переходах th kh асимптотически стремится соответственно к 1 и к kh (рис. 51).

При $kh > 1{,}75$ численное значение $(\text{th } kh)^{1/2}$ лежит между 0,97 и 1. С учетом соотношения $\lambda = 2\pi/k$ это означает, что

формула (36) дает для скорости c величину, которая не более чем на 3% меньше значения для глубокой воды $(g\lambda/2\pi)^{1/2}$ при условии, что

$$h > 0{,}28\ \lambda. \tag{37}$$

Это условие, необходимое для того, чтобы теория глубокой воды описывала дисперсию с хорошей точностью, может показаться удивительным, так как возмущения, предсказанные этой теорией, уменьшаются на глубине 0,28 λ только до 17% их значения на поверхности. Однако (как мы увидим) более существенно то, что их вклад в кинетическую энергию (27) (а следовательно, и инерционный член) уменьшается на том же расстоянии до 3%.

На другом конце интервала изменения скорости значение $(\text{th}\ kh)^{1/2}/(kh)^{1/2}$ лежит между 0,97 и 1 при $kh < 0{,}44$. С учетом соотношения $\lambda = 2\pi/k$ это означает, что выражение (36) дает для скорости c величину, которая не более чем на 3% меньше, чем значение для длинных волн $(gh)^{1/2}$, при условии, что

$$h < 0{,}07\ \lambda. \tag{38}$$

Как предсказывалось в разд. 2.2, для того, чтобы скорость волны с хорошей точностью определялась выражением $(gh)^{1/2}$, не зависящим от λ и выведенным в предположении существенно одномерного движения, глубина h должна составлять небольшую часть (менее 7%) длины волны.

Таким образом, зависимость c от λ, которая, согласно формуле (36), имеет вид

$$c = [(g\lambda/(2\pi))\ \text{th}\ (2\pi h/\lambda)]^{1/2}, \tag{39}$$

значительно отличается от *обеих* предельных формул только лишь в диапазоне глубин *между* 0,07 λ и 0,28 λ (соответственно в диапазоне длин волн между 14 h и 3,5 h). На рис. 52 это демонстрируется графиком зависимости c от λ для фиксированного h по формуле (39); видно, как «параболическая» предельная зависимость $(g\lambda/2\pi)^{1/2}$ для $\lambda < 3{,}5\ h$ плавно переходит к постоянному асимптотическому значению $(gh)^{1/2}$ для $\lambda > 14\ h$.

Интересно также представить на графике зависимость скорости волны c от глубины h при фиксированной *частоте* ω, прежде всего в связи с тем (см. разд. 3.8), что частота синусоидальных волн на глубокой воде, приближающихся к береговой линии, при прохождении волнами участков со все меньшей и меньшей глубиной стремится к постоянной величине (при этом число гребней волн, достигающих берега за единицу времени, равняется их числу при приближении к береговой линии).

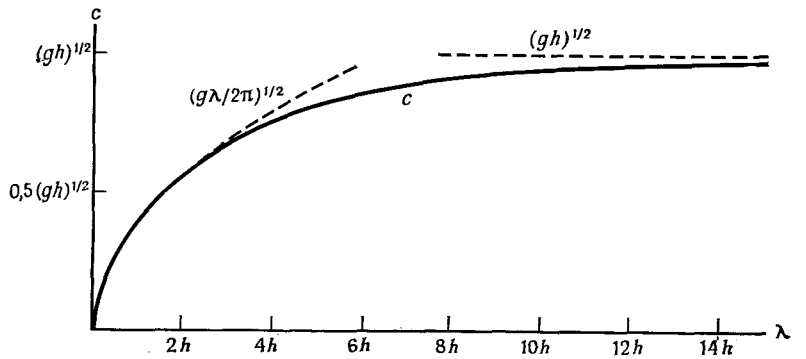

Рис. 52. Зависимость скорости волны c по линейной теории от длины волны λ в воде при постоянной глубине h. Обратите внимание на переход от зависимости $(g\lambda/2\pi)^{1/2}$ для случая глубокой воды к зависимости $(gh)^{1/2}$ для случая длинных волн.

Соотношение (35) после замены k на ω/c может быть записано в виде

$$c\omega/g = \text{th}\ (\omega h/c) \tag{40}$$

и использовано для определения изменения c при постоянной частоте ω и постепенном уменьшении h. Очевидно, имеет место переход от предельного случая глубокой воды, когда правая часть соотношения (40) равняется 1 и $c = g/\omega$, к предельному случаю длинных волн, когда правая часть соотношения (40) стремится к $(\omega h/c)$ и тогда $c = (gh)^{1/2}$. Этот переход можно видеть на рис. 53.

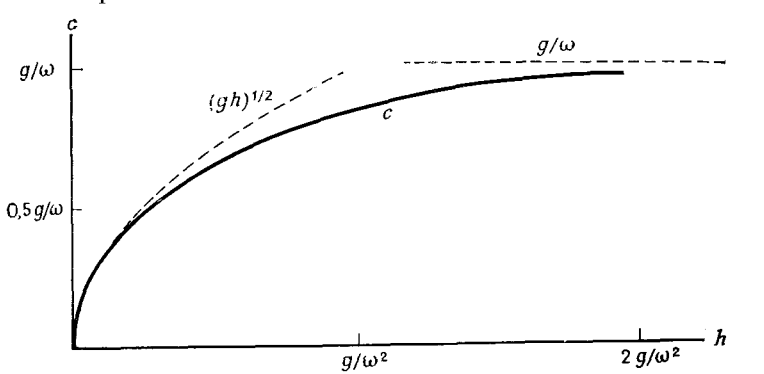

Рис. 53. Зависимость скорости волны c от постепенно меняющейся глубины h для волн с частотой ω. Обратите внимание на переход от зависимости $(gh)^{1/2}$ для случая длинных волн к зависимости g/ω для случая глубокой воды.

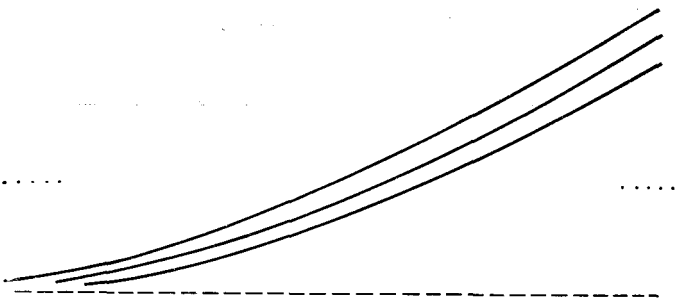

Рис. 54. Разворот гребней в прибрежных водах с постоянным наклоном дна. Штриховой линией отмечена кромка воды, пунктирной — место, где глубина составляет $\lambda/(2\pi)$ (так что $kh = 1$).

В разд. 3.2 показано, что волна с периодом, например, 8 с имеет на глубокой воде скорость $c = 12{,}5$ м/с и длину волны $\lambda = 100$ м. Однако при прохождении волны по все более мелкой воде, что соответствует движению *вниз вдоль кривой* на рис. 53, и скорость, и длина волны *уменьшаются*. Вблизи берега при глубине, скажем, 1 м скорость c уменьшается (для волны с периодом 8 с) до 3,1 м/с, а λ — до 25 м, т.е. в четыре раза.

Гребни приближающихся к берегу волн обычно почти параллельны ему, хотя они могут быть порождены гребнями волн на глубокой воде, движущихся под значительным углом к береговой линии. Выравнивание гребней вдоль направления изобат возле берега является следствием понижения скорости волны при уменьшении глубины. При движении гребня волны под углом к береговой линии те его части, которые первыми входят в область мелководья, замедляют движение, в то время как части на глубокой воде продолжают быстро двигаться вперед, и в результате гребень разворачивается (рис. 54).

Выписав некоторые дисперсионные соотношения (для воды произвольной глубины), мы изучим теперь (как было сделано для глубокой воды в разд. 3.2) связанное с волнами движение воды. Из (14) и (32) получаем составляющие скорости в горизонтальном и вертикальном направлениях

$$\partial\varphi/\partial x = -i\{k\Phi_0 \operatorname{ch}[k(z+h)]\} \exp[i(\omega t - kx)], \qquad (41)$$

$$\partial\varphi/\partial z = \{k\Phi_0 \operatorname{sh}[k(z+h)]\} \exp[i(\omega t - kx)], \qquad (42)$$

показывающие, что представленные выражениями в фигурных скобках амплитуды синусоидальных изменений *различны*. Из графиков функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ (рис. 51) видна степень различия: обе амплитуды становятся почти равными там, где $k(z+h)$

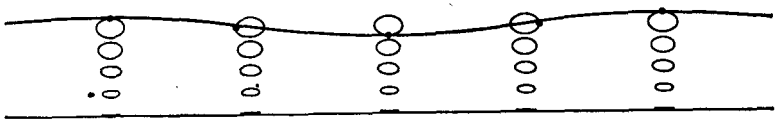

Рис. 55. Траектории частиц жидкости в синусоидальной волне с длиной λ, распространяющейся слева направо по воде глубины $h = 0{,}16\lambda$. Как и на рис. 50, наибольший подъем поверхности составляет $0{,}02\lambda$. Мгновенные положения частиц на их эллиптических траекториях показаны здесь только для частиц в верхнем ряду, однако частицы, находящиеся на одной и той же вертикали, движутся с одинаковой фазой.

велико, т. е. в пределе глубокой воды (kh велико), за исключением области вблизи дна $z = -h$ (где движение всегда относительно очень мало). В другом предельном случае длинных волн (kh *мало*) амплитуда вертикального движения остается малой по сравнению с амплитудой горизонтального движения (как предполагалось в одномерной теории в гл. 2). Их отношение $\operatorname{th}[k(z+h)]$ изменяется между 0 и $\operatorname{th}(kh)$ при $-h < z < 0$. Эта величина составляет, например, самое большее 0,41 для волн с $h = 0{,}07\,\lambda$, для которых одномерная теория дает скорость волны с ошибкой 3%, а для более длинных волн погрешность еще меньше.

В каждой фиксированной точке, совсем как для волн на глубокой воде, колебания составляющих скорости (41) и (42) отличаются по фазе на 90°: колебания горизонтальной составляющей $\partial\varphi/\partial x$ отстают на 90° от колебаний вертикальной составляющей $\partial\varphi/\partial z$ (что выражается множителем $-i$). В линейной теории *те же* выражения (41) и (42) записываются для составляющих скорости жидкой частицы, которая может колебаться с малой амплитудой около этой точки. Из этого мы можем, как и в разд. 3.2, заключить, *что если бы обе амплитуды скорости были равны* $k\Phi_0 \operatorname{ch}[k(z+h)]$, то частица должна была бы описывать окружность радиуса $\omega^{-1}k\Phi_0 \operatorname{ch}[k(z+h)]$. Однако действительное движение частицы с уменьшенной в $\operatorname{th}[k(z+h)]$ раз амплитудой вертикальной составляющей скорости происходит по круговой треактории, сжатой в вертикальном направлении в такое же число раз, т. е. по эллипсу с большой и малой полуосями

$$\omega^{-1}k\Phi_0 \operatorname{ch}[k(z+h)] \quad \text{и} \quad \omega^{-1}k\Phi_0 \operatorname{sh}[k(z+h)]. \tag{43}$$

Рис. 55 иллюстрирует это приближенное описание линейной теорией движения частиц жидкости в волне длины λ на воде с глубиной $h = 0{,}16\ \lambda$. Это значение глубины лежит *между*

величинами 0,07 λ и 0,28 λ, для которых пределы длинных волн и глубокой воды дают приемлемые приближения. Горизонтальное движение на поверхности на 54% интенсивнее, чем у дна, что не согласуется *ни* с предположением о приблизительно равномерном распределении в одномерном случае, *ни* с предположением об относительно малом движении у дна в случае глубокой воды. (О влиянии вязкого пограничного слоя между твердым дном и горизонтально движущейся прилегающей жидкостью см. разд. 3.5.) Вертикальное движение у поверхности на 18% интенсивнее, чем горизонтальное движение у дна, тогда как отношение амплитуд вертикального и горизонтального движений меняется от значения 0 у дна до значения 0,76 у поверхности, не приближаясь к предельному значению 1 в случае глубокой воды и не оставаясь малым, как в линейной теории.

В гораздо более глубокой воде эллипсы, показанные на рис. 55, будут, как на рис. 50, очень близкими к окружностям везде, кроме придонной области, где они будут сильно сплющенными, но относительно малыми. В намного *более мелкой* воде все они будут сильно сплющенными с почти одинаковыми длинами больших осей.

Избыточная потенциальная энергия на единицу площади горизонтальной поверхности для волн на воде произвольной глубины принимает значение (24), полученное из (23). Аналогично, кинетическая энергия на единицу площади горизонтальной поверхности всегда принимает значение (26), но соотношение между φ и $\partial\varphi/\partial z$ при $z = 0$ для воды произвольной глубины h изменяется согласно (34). Это соотношение совместно с условием (12), приравнивающим $\partial\varphi/\partial z$ и $\partial\zeta/\partial t$, дает тогда выражение для кинетической энергии волн на единицу площади горизонтальной поверхности:

$$\frac{1}{2}\rho\,(k\ \mathrm{th}\ kh)^{-1}\,(\partial\zeta/\partial t)^2. \tag{44}$$

Таким образом, обобщенная масса на единицу площади водной поверхности *увеличивается* по сравнению с величиной для случая глубокой воды ρk^{-1} до величины

$$\rho\,(k\ \mathrm{th}\ kh)^{-1}. \tag{45}$$

Используя эту новую величину и прежнее значение обобщенной жесткости ρg, можно интерпретировать дисперсионное соотношение (35) как определение квадрата частоты ω^2, равного отношению жесткости к массе. Отсюда следует равенство *средних* значений кинетической и избыточной потенциальной энергий и та же, что и ранее, формула (28) для полной энергии W волны на единицу площади.

Для волн на глубокой воде появление обобщенной массы ρk^{-1} на единицу площади интерпретировалось в разд. 3.2 как явление, обусловленное движением поверхности со скоростью $\partial\zeta/\partial t$, вызывающим заметные перемещения в слое жидкости толщиной, пропорциональной k^{-1}. В соответствии с этим может показаться удивительным, что наличие твердого дна, ограничивающего глубину жидкости, способной двигаться, *увеличивает* обобщенную массу и уменьшает таким образом частоту. Объяснение состоит в том, что $\partial\zeta/\partial t$ представляет собой *вертикальную* составляющую движения поверхности: при уменьшении kh увеличение отношения интенсивностей горизонтального движения к вертикальному создает большее изменение в кинетической энергии на единицу площади для данного значения $\partial\zeta/\partial t$, чем то, которое вызывается уменьшением наличного объема жидкости.

Например, в предельном случае длинных волн амплитуда скорости горизонтального движения на поверхности в $(kh)^{-1}$ раз больше амплитуды скорости вертикального движения и отношение соответствующих кинетических энергий на единицу объема составляет $(kh)^{-2}$; отсюда с учетом того, что масса на единицу площади равна ρh, получается обобщенная масса $\rho h\,(kh)^{-2}$, которая согласуется с предельным переходом в точной формуле (45) для случая длинных волн. Конечно, если за обобщенную координату принять горизонтальное смещение поверхности жидкости, то обобщенная масса в предельном случае длинных волн будет иметь не зависящее от длины волны значение ρh, но обобщенная жесткость преобразуется к виду $\rho g\,(kh)^2$; это снова приводит к соотношению $\omega^2 = ghk^2$, которое соответствует недиспергирующим волнам со скоростью $(gh)^{1/2}$. Дальнейшие важные сведения об энергетических соотношениях для волн на воде произвольной глубины h даны в разд. 3.8.

3.4. Волны ряби

При рассмотрении поверхностных волн в разд. 3.1—3.3 сила тяжести считалась единственной силой, стремящейся вернуть поверхности раздела «воздух — вода» $z = \zeta$ плоскую форму. Считалось, что давление воды на поверхности раздела совпадает с атмосферным давлением p_a, так что приращение давления p_e над невозмущенной величиной $p_0 = p_a - \rho gz$ принимает на границе значение $\rho g\zeta$ (формула (6)). В данном анализе теория видоизменяется из-за учета дополнительной силы, стремящейся вернуть поверхности раздела плоскую форму,— силы *поверхностного натяжения*, которая порождает разрыв меж-

ду давлением в воздухе и в воде, пропорциональный *кривизне* поверхности раздела. Пропорциональная кривизне поверхности раздела итоговая поправка к величине p_e, отнесенная к пропорциональному смещению поверхности раздела неподправленному члену $\rho g \zeta$, составляет величину, обратно пропорциональную квадрату длины волны. Таким образом, она важна только для достаточно коротких волн, называемых *волнами ряби*. Практически это волны с длиной, меньшей приблизительно 0,1 м, для которых, однако, как мы увидим, поправка существенно меняет характер дисперсионного соотношения.

Простейшее определение поверхностного натяжения T получается из рассмотрения двух соседних элементов поверхности жидкости, разделенных прямолинейной границей. Они действуют друг на друга с равными и противоположными силами T на единицу длины этой границы под прямым углом к ней. Здесь T измеряется в ньютонах на метр; для воды $T = 0{,}074$ Н/м. Перед тем как кратко описать связь этого представления с общей физикой жидкостей, мы покажем, насколько просто с его помощью можно модифицировать теорию поверхностных волн.

Для бегущих в направлении оси x волн с длинными гребнями сила T, приходящаяся на единицу длины границы, параллельной гребням волн (т.е. оси y), имеет *вертикальную составляющую*, которая в линейной теории может быть записана в виде

$$T \partial \zeta / \partial x \tag{46}$$

и которая представляет собой малую составляющую в направлении оси z силы T, действующей по касательной к поверхности с тангенсом угла наклона $\partial \zeta / \partial x$. Из этого следует, что на полосу водной поверхности, ограниченную двумя прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние δx, действует суммарная вертикальная сила

$$T \left(\partial^2 \zeta / \partial x^2\right) \delta x, \tag{47}$$

представляющая собой разность величин вертикальных составляющих силы натяжения, выражаемых по формуле (46) в точке, скажем, $x + \delta x$, и противодействующей силы в точке x. Так как площадь такой полосы водной поверхности ширины δx и единичной длины составляет δx, то действующая на нее направленная вверх *сила на единицу площади* должна быть равна $T \partial^2 \zeta / \partial x^2$. Она, очевидно, должна быть уравновешена силой давления воздуха, превышающего давление воды на поверхности. Инерционные члены не входят в уравнение такого баланса, поскольку в тонком поверхностном слое масса на единицу площади стремится к нулю при уменьшении толщины слоя.

Граничное значение давления воды $p_0 + p_e$ *меньше*, таким образом, атмосферного на величину $T \partial^2 \zeta / \partial x^2$, пропорциональ-

ную линейной аппроксимации кривизны поверхности. Вместе с гидростатическим соотношением $p_0 = p_a - \rho g z$ это означает, что при $z = \zeta$ избыточное давление будет

$$p_e = \rho g \zeta - T \partial^2 \zeta / \partial x^2. \tag{48}$$

Для синусоидальных волн с волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ граничное условие (48) принимает более простой вид:

$$p_e = (\rho g + T k^2)\, \zeta. \tag{49}$$

Здесь можно было бы просто повторить все доводы, приведенные при выводе формул (6) — (13) для поверхностных гравитационных волн, начав, однако, с этого видоизмененного граничного условия (49), а не с условия (6). Тогда дисперсионное соотношение выводилось бы последовательно тем же способом, что и соотношение (18) для случая глубокой воды или соотношение (35) для воды произвольной, но постоянной глубины. Однако полный вывод был бы напрасной тратой времени!

Все можно сделать гораздо быстрее: формула (49) имеет такой же вид, что и (6), если в ней

$$g \quad \text{заменить на} \quad g + \rho^{-1} k^2 T. \tag{50}$$

Это значит, что для синусоидальных волн с волновым числом k влияние поверхностного натяжения точно такое же, как влияние увеличения ускорения свободного падения g в соответствии с заменой (50). Поэтому мы можем определить все свойства волн, как только сделаем такую замену в выводах предыдущего раздела.

В частности, выраженное через частоту дисперсионное соотношение (18) для поверхностных волн на глубокой воде с учетом поверхностного натяжения и тяготения путем подстановки в него выражения из (50) становится таким:

$$\omega^2 = (g + \rho^{-1} T k^2)\, k, \tag{51}$$

тогда как формула для скорости волны (19) принимает вид

$$c = [(g + \rho^{-1} T k^2)/k]^{1/2}. \tag{52}$$

Заметим, что в этих формулах влияние замены (50) будет пренебрежимо мало, когда поправочный член $\rho^{-1} T k^2$, обратно пропорциональный, как указывалось ранее, квадрату длины волны $\lambda = 2\pi/k$, будет очень мал по сравнению с самой величной g, т. е. если k мало по сравнению с

$$k_m = (\rho g / T)^{1/2}. \tag{53}$$

Это условие того, чтобы волны по существу были чисто гравитационными в смысле сравнительной малости поверхностного

натяжения, эквивалентно требованию, чтобы длина волны λ была велика по сравнению с

$$\lambda_m = (2\pi/k_m) = 2\pi\,(T/(\rho g))^{1/2}. \qquad (54)$$

Например, для воды при $T = 0{,}074$ Н/м и $\rho = 1000$ кг/м^3 получаем

$$k_m = 360 \text{ м}^{-1} \quad \text{и} \quad \lambda_m = 0{,}017 \text{ м}, \qquad (55)$$

т. е. подтверждается высказанное ранее утверждение о том, что волны, длина которых превышает 0,1 м, являются чисто гравитационными. Действительно, ошибка при вычислении значения $(g/k)^{1/2}$ для гравитационных волн составляет менее 3%, если $\lambda > 0{,}07$ м. Термин «волны ряби» будет относиться к волнам, для которых влияние поверхностного натяжения *значительно*, т. е. к волнам с длиной менее 7 см.

Выбор индекса m связан с тем, что формула (52) для скорости волны принимает при $k = k_m$ (или $\lambda = \lambda_m$) *минимальное* значение:

$$c = c_m = (2g/k_m)^{1/2} = 0{,}23 \text{ м/с} \quad \text{для воды}. \qquad (56)$$

Такой минимум появляется из-за влияния на квадрат скорости волны c^2 как *поверхностного натяжения*, так и тяготения. Скорость становится большой, когда волновое число k становится соответственно большим или малым. Оба влияния в точности равны, а суммарный эффект минимален при $k = k_m$.

На рис. 56 для волн на глубокой воде показана графическая зависимость c от λ (52), из которой следует, что: (i) минимум скорости волны c_m достигается при $\lambda = \lambda_m$, (ii) при $\lambda > 4\,\lambda_m$ данная кривая близка к кривой, отвечающей гравитационным волнам, (iii) скорость волны снова возрастает, когда отношение λ/λ_m становится очень малым. Когда $\lambda < (1/4)\,\lambda_m$, с погрешностью до 3% верны упрощенные формулы, получающиеся из (51) и (52) при пренебрежении тяготением:

$$\omega^2 = \rho^{-1}Tk^3, \quad c = (\rho^{-1}Tk)^{1/2}. \qquad (57)$$

Такие волны, в которых единственная значительная восстанавливающая сила обусловлена поверхностным натяжением, связанным с «капиллярным притяжением», часто называют «капиллярными волнами».

Капиллярные волны на воде — это волны с $\lambda < 4$ мм. Их частота $\omega/2\pi$ принимает значения, превышающие 70 Гц, т. е. лежит в акустическом диапазоне, так что их легко возбудить, ударив по камертону и опустив его концы в воду. Например, камертон для скрипичной струны А с частотой $\omega/(2\pi) = 440$ Гц,

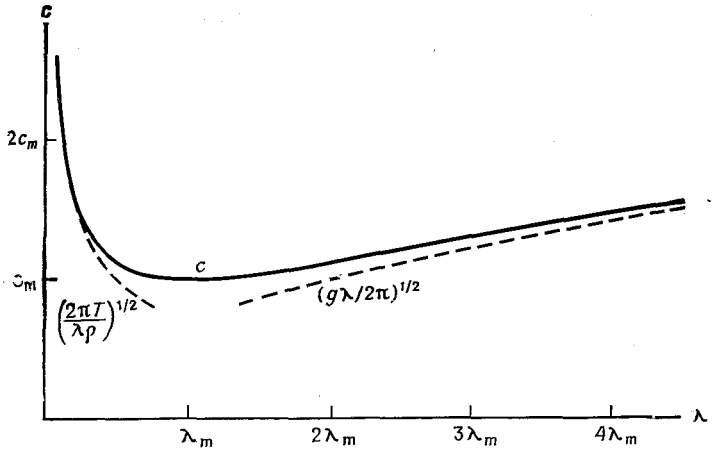

Рис. 56. Скорость волны c для волн ряби на глубокой воде. Обратите внимание на переход от значения для капиллярных волн $(2\pi T/(\lambda\rho))^{1/2}$ к значению для гравитационных волн $(g\lambda/(2\pi))^{1/2}$. Он происходит в окрестности значения $\lambda = \lambda_m$, которое соответствует минимальной скорости волны и дается формулой (55).

в соответствии с формулами (57), генерирует волны с длиной $\lambda = 1{,}3$ мм, бегущие со скоростью 0,57 м/с. Такие волны наблюдаются на опыте, но только достаточно близко от концов камертона. По причинам, указанным в разд. 3.5, волны такой высокой частоты испытывают чрезвычайно быстрое затухание, и вследствие этого их нельзя увидеть вне круга радиуса в несколько сантиметров.

Заметим, что характер *траекторий частиц жидкости в волнах на глубокой воде не изменится по сравнению с тем*, что изображено на рис. 50, если мы сделаем замену (50), чтобы учесть влияние поверхностного натяжения. Кроме того, тем же самым остается предельное значение, которое должна превышать глубина для обеспечения точности результатов теории глубокой воды. Это значение порядка длины волны λ, если граничное условие должно удовлетворяться с повышенной точностью, или — около 0,28 λ, если за критерий берется выполнение дисперсионного соотношения с точностью 3% (условие (37)).

По существу это означает, что на воде некоторой «обычной» глубины, превышающей несколько сантиметров, все *волны ряби* (длина которых не может, как мы видели, превышать 7 см) могут считаться волнами на глубокой воде. Другими словами, влияние конечности глубины (разд. 3.3) и поверхностного натяжения (разд. 3.4) видоизменяет теорию гравитационных волн

на глубокой воде (разд. 3.2) в *различных* интервалах длин волн, а именно в случаях больших и малых длин волн соответственно.

Тем не менее есть особая причина, в силу которой желательно изучить дисперсионное соотношение для волн ряби на воде произвольной, но постоянной глубины, а именно возможность выбора много *меньшей*, чем «обычная» глубина воды в волновой кювете с тем, чтобы (разд. 1.7) рябь имитировала звуковые волны, обладая по возможности малой дисперсией. Идея состоит в том, что глубина выбирается таким образом, чтобы уничтожить противодействующие отклонения в скорости от длинноволновой асимптотики: уменьшение (рис. 52) скорости за счет уменьшения λ до величин, сравнимых с глубиной, и увеличение ее (рис. 56) за счет уменьшения λ до величин, при которых эффективное значение g повышается из-за влияния поверхностного натяжения.

Действительно, если мы используем замену (50) в (36), мы получим дисперсионное соотношение для волн ряби на воде произвольной, но постоянной глубины h:

$$c^2 = (g + \rho^{-1}Tk^2)\, k^{-1}\mathrm{th}\, kh. \tag{58}$$

Разлагая правую часть в ряд по возрастающим степеням k (что соответствует убывающим степеням величины λ), мы получаем

$$gh + \left(-\frac{1}{3}gh^3 + \rho^{-1}Th\right)k^2 + O(k^4), \tag{59}$$

где два слагаемых в множителе при k^2 отвечают соответственно двум противоположным только что упомянутым тенденциям. Очевидно, что они взаимно уничтожаются при глубине, равной

$$h = (3T/\rho g)^{1/2} = 5 \text{ мм для воды.} \tag{60}$$

В разд. 1.7 упоминалось, что это значение используется при имитации звуковых волн в волновой кювете.

Из рис. 57, на котором приведены зависимости c от $\lambda = 2\pi/k$ для различных значений глубины в соответствии с точным дисперсионным соотношением (58), видно, что при глубине $h = 5$ мм скорость c сохраняет значение, близкое к постоянному, при уменьшении длины волны настолько, насколько это возможно. Точность 3% достигается при значениях λ, превышающих 2 см (это больше глубины в 4 раза вместо 14 раз по условию (38) для чисто гравитационных волн). При соответствующей волновой скорости около 22 см/с можно визуально наблюдать моделирование акустических явлений в чрезвычайно замедленном темпе (разд. 1.7).

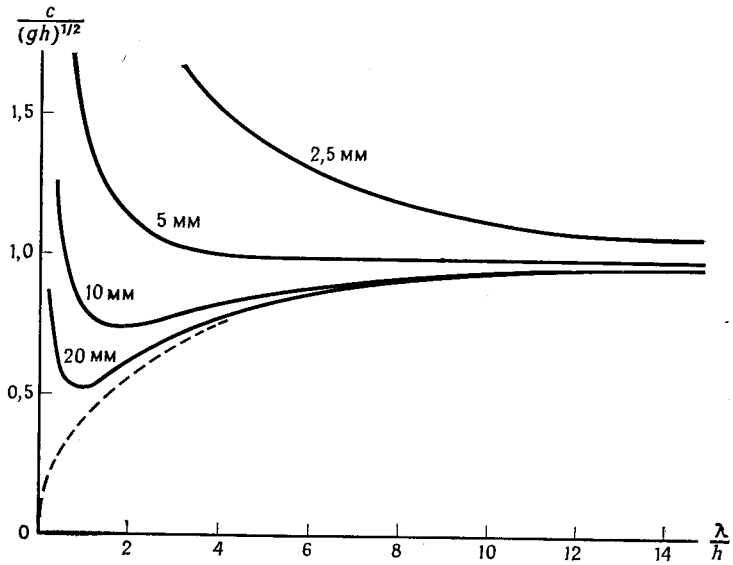

Рис. 57. Отношение скорости волны c к ее предельному значению для длинных волн $(gh)^{1/2}$ в случае волн ряби на мелкой воде глубины h, равной соответственно 2,5, 5, 10 и 20 мм. Для сравнения штриховой линией показана кривая для чисто гравитационных волн (рис. 52).

Мы закончим этот раздел обсуждением переноса энергии волнами ряби и кратким описанием связи между понятием поверхностного натяжения и общей физикой жидкости. Вклад во внутреннюю энергию жидкости производится как средней кинетической энергией, связанной с тепловым движением молекул, так и средней потенциальной энергией, связанной с силами взаимодействия между молекулами. Это вклады разного знака, поскольку за исключением статистически редкого случая необычно малого расстояния между молекулами силы взаимодействия являются *притягивающими* и создают отрицательную потенциальную энергию. Реально внутренняя энергия на единицу массы, обозначаемая здесь, как и в разд. 1.2, через E, намного меньше (например, для воды на три порядка), чем кинетическая энергия на единицу массы, огромная величина которой почти уничтожается сложением с численно примерно равной *отрицательной* потенциальной энергией на единицу массы.

Все точки жидкости дают статистически однородный вклад в отрицательную потенциальную энергию жидкости за одним исключением. Молекулы, расположенные в *непосредственной*

близости от свободной поверхности, могут взаимодействовать только *с меньшим, чем среднее, числом* молекул. Поэтому вклад в отрицательную потенциальную энергию, производимый такими расположенными исключительно близко от поверхности молекулами, численно составляет лишь часть вклада, который в общем случае делается молекулами. Это обстоятельство влияет на величину полной внутренней энергии жидкости: к статистически однородному, а следовательно пропорциональному массе вкладу, добавляется *положительная* поправка, пропорциональная площади свободной поверхности и связанная с отсутствием отрицательного вклада от молекул, образующих на свободной поверхности слой толщиной примерно в 1 молекулярный диаметр. Этот чрезвычайно тонкий слой может дать весьма существенный вклад, поскольку уменьшение отрицательной потенциальной энергии на одну молекулу численно гораздо больше, чем *суммарная* внутренняя энергия на одну молекулу.

В соответствии с этим внутренняя энергия жидкости массы M с площадью свободной поверхности A может быть записана в виде

$$ME + AT, \tag{61}$$

где E — внутренняя энергия на единицу массы жидкости, а T — необходимая положительная поправка на единицу площади свободной поверхности. Отсюда следует, что малое изменение формы жидкого объема фиксированной массы M влечет изменение энергии $T\delta A$, пропорциональное малому приращению δA площади его свободной поверхности. Другими словами, работа, которую надо произвести, чтобы растянуть свободную поверхность, в точности принимает значение $T\delta A$, получающееся на основе рассмотрения препятствующей растяжению силы *поверхностного натяжения* T на единицу длины границы свободной поверхности. Мы видим, что величину T можно рассматривать *либо* как эффективную силу натяжения на единицу длины границы, действующую по касательной к свободной поверхности и измеряемую в Н/м (ньютон на метр), *либо* как добавочную потенциальную энергию на единицу площади свободной поверхности, измеряемую в Дж/м^2 (джоуль на квадратный метр). Хотя во втором случае смысл величины T становится физически более ясным, первое, более простое объяснение должно приводить к тем же самым заключениям.

Для простоты изложения приведенное выше обсуждение неявно основывалось на том допущении, что изменение *внутренней энергии* при растяжении свободной поверхности дает величину проделанной работы. Заканчивая обсуждение, за-

метим, что с точки зрения термодинамики изменение *свободной энергии* (внутренняя энергия минус произведение температуры на энтропию) равно количеству произведенной работы (исключая случай неизотермического подвода тепла). Следовательно, из соображений строгости надо исправить выражение (61) таким образом, чтобы T было изменением *свободной энергии* при единичном изменении площади для данной массы жидкости, и рассматривать прирост свободной энергии, который вызывается этим изменением, как вклад поверхности в потенциальную энергию волны.

Любые синусоидальные волны на поверхности воды увеличивают ее поверхность пропорционально величине, которая при усреднении по длине волны может быть записана как среднее от величины

$$[1 + (\partial \zeta/\partial x)^2]^{1/2} - 1. \tag{62}$$

В предположении малости амплитуды это равно среднему от величины $(1/2)(\partial \zeta/\partial x)^2$, которое для волн с волновым числом k может быть выражено через среднее от квадрата вертикального смещения $\overline{\zeta^2}$ как

$$\frac{1}{2} k^2 \overline{\zeta^2}. \tag{63}$$

Эта добавочная площадь поверхности (63), отнесенная к единице площади, после умножения на силу поверхностного натяжения T дает добавочную потенциальную энергию на единицу площади. Вместе с гравитационным вкладом $(1/2)\rho g \overline{\zeta^2}$ получаем для полной потенциальной энергии на единицу площади выражение

$$\frac{1}{2} (\rho g + Tk^2) \overline{\zeta^2}. \tag{64}$$

Мы приходим, таким образом, к заключению, что влияние поверхностного натяжения на энергию волны, так же как и на *другие* характеристики синусоидальных волн на воде, будет правильно учитываться, если сделать замену (50) в формулах для чисто гравитационных волн. Обобщенная жесткость свободной поверхности увеличивается в $[1 + (\rho g)^{-1} Tk^2]$ раз; квадрат частоты для соответствующих колебаний, даваемый формулой (51), увеличивается (как и ожидалось из общих соображений) также в то же число раз. Наконец, если сделать замену (50) в формуле (28), то найдем полную энергию волны W.

3.5. Затухание

Синусоидальные волны на поверхности воды, описанные в разд. 3.1—3.4, испытывают затухание из-за действия трех основных процессов диссипации энергии, каждый из которых в чем-то подобен одному из механизмов затухания, уже изученных ранее в разд. 1.13 и 2.7. Во-первых, когда глубина воды существенно меньше длины волны и волны вызывают заметное горизонтальное движение вблизи дна (рис. 55), наиболее важным является *трение о дно* (оно разбирается в этом разделе в первую очередь). Связанная с ним диссипация энергии происходит так же, как и для описанных в разд. 2.7 длинных волн, у твердого дна в пограничном слое толщины δ, представленной (для ламинарного течения) на рис. 26 кривой с надписью «вода».

Во-вторых, волны на глубокой воде не вызывают движения, а следовательно, и диссипации за счет трения возле дна. Их затухание происходит с относительно малой скоростью. Оно связано с механизмом *внутренней диссипации*, обусловленной вязкими напряжениями, действующими в волне. Так же как вклад вязкости в затухание звуковых волн, разобранный в разд. 1.13, он становится существенным только при достаточно малых длинах волн.

В-третьих, мы опишем *поверхностную диссипацию* — источник затухания, связанный с отклонением поверхностного натяжения T от величины, которую оно принимает в условиях равновесия. Этот механизм, напоминающий вклад запаздывания в акустическое затухание (разд. 1.13), может оказаться особенно важным, когда поверхность воды покрыта тонкой пленкой примеси.

Оценим прежде всего затухание волн за счет трения о дно, предположив, что пограничный слой ламинарный, хотя наш метод оценки оказывается пригодным и для таких движений, в которых преобладает турбулентное трение. Как было показано в разд. 2.7, синусоидальные колебания градиента давления ($-\partial p_e/\partial x$) возле плоской стенки порождают в тонком ламинарном пограничном слое показанное на рис. 25 изменение составляющей скорости u в зависимости от *расстояния от стенки* (обозначенного там через z, что соответствует $z + h$ в этой главе). Штриховой линией представлена часть, находящаяся в фазе с силой ($-\partial p_e/\partial x$), которая непосредственно нейтрализует вязкое сопротивление этому движению; сплошной линией представлено движение, которое отстает по фазе от силы на 90°, поскольку она действует инерциально, так же как

безвихревое внешнее по отношению к пограничному слою движение со скоростью

$$u_{ex} = (\rho i\omega)^{-1} (-\partial p_e/\partial x). \tag{65}$$

Внутри пограничного слоя толщины δ суммарный дефицит объемного расхода на единицу ширины стенки относительно объемного расхода в безвихревом движении составляет

$$\int_{-h}^{-h+\delta} (u_{ex} - u)\, dz = (\rho i\omega)^{-1} (-\partial p_e/\partial x) (\nu/i\omega)^{1/2}. \tag{66}$$

Действительная и мнимая части выражения (66) равны по величине: дефицит объемного расхода, находящийся в фазе со скоростью u_{ex} (суммарная площадь, получающаяся вычитанием площади под пунктирной линией из площади под сплошной кривой), равен дефициту, который отстает по фазе на 90° от u_{ex} (площадь под штриховой кривой).

Влияние такого пограничного слоя на волны в воде глубиной h, которая предполагается намного большей, чем толщина пограничного слоя, легко оценить с помощью математического понятия *толщины вытеснения* δ_1, определяемой уравнением

$$\int_{-h}^{-h+\delta} (u_{ex} - u)\, dz = u_{ex}\delta_1. \tag{67}$$

Из соотношений (65) и (66) имеем

$$\delta_1 = (\nu/i\omega)^{1/2} = (\nu/2\omega)^{1/2} (1 - i). \tag{68}$$

При таком подходе заключаем, что *безвихревое* движение вне пограничного слоя, примыкающего к стенке $z = -h$, точно такое же, какое получается без учета вязкости в области с границей

$$z = -h + \delta_1, \tag{69}$$

на которой налагается условие непротекания через границу: $\partial\varphi/\partial z = 0$. Это действительно так, поскольку из (67) следует, что объемный расход в пограничном слое равен

$$\int_{-h}^{-h+\delta} u\, dz = u_{ex} (\delta - \delta_1), \tag{70}$$

т. е. в точности совпадает с величиной, которая получается при предположении, что во всем пограничном слое скорость принимает значение скорости внешнего безвихревого потока u_{ex}, а нижняя граница сдвигается в положение $-h + \delta_1$. Так как

задание положения границы в виде (69) при расчете безвихревого течения без учета влияния вязкости дает правильное распределение объемного расхода потока, параллельного границе, то условие непротекания на ней здесь вполне может применяться.

Кратко описанное выше понятие толщины вытеснения подробно развивается в курсах по гидродинамике, по крайней мере для *стационарных* пограничных слоев. В этом случае δ_1 — действительное число, и это понятие имеет простую физическую интерпретацию: влияние пограничного слоя на внешний безвихревой поток как раз такое, какое оказало бы смещение границы в жидкость на расстояние δ_1 при отсутствии эффектов вязкости. На первый взгляд может показаться странным, что толщина пограничного слоя в колеблющемся потоке комплексна и поэтому такая простая физическая интерпретация не может быть использована. Тем не менее математическая идея о тождественности между внешним к пограничному слою потоком и течением, описываемым решением уравнения для безвихревого потока с границей (69), остается верной и является еще одной иллюстрацией эффективности описания колебаний и волн с помощью комплексных чисел.

Для синусоидальных волн с волновым числом k частота, полученная из решения уравнения Лапласа (5) для чисто безвихревого течения в воде глубины h, будет

$$\omega_{\text{irr}} = [(g + \rho^{-1}Tk^2)\, k \operatorname{th} kh]^{1/2}. \tag{71}$$

Отсюда следует, что частота ω при наличии вязкого пограничного слоя определяется выражением (71), но с заменой глубины h на мало отличающуюся от нее $h - \delta_1$. Для ω получаем выражение

$$\omega = \omega_{\text{irr}} [1 - \delta_1 \partial (\ln \omega_{\text{irr}})/\partial h] =$$

$$= \omega_{\text{irr}} [1 - (\nu/(2\omega))^{1/2} (1 - i)\, k/(\operatorname{sh} 2kh)]. \tag{72}$$

Малая отрицательная действительная часть поправочного множителя в квадратных скобках сравнительно неважна; она означает малое относительное увеличение периода колебаний по сравнению с величиной $2\pi/\omega_{\text{irr}}$ из-за действия вязкости. Напротив, малая положительная мнимая часть выражения в квадратных скобках соответствует, согласно формуле (14), экспоненциальному затуханию амплитуды со временем. Хотя в течение каждого периода $2\pi/\omega_{\text{irr}}$ происходит только малое относительное уменьшение амплитуды

$$2\pi (\nu/(2\omega))^{1/2}\, k/(\operatorname{sh} 2kh), \tag{73}$$

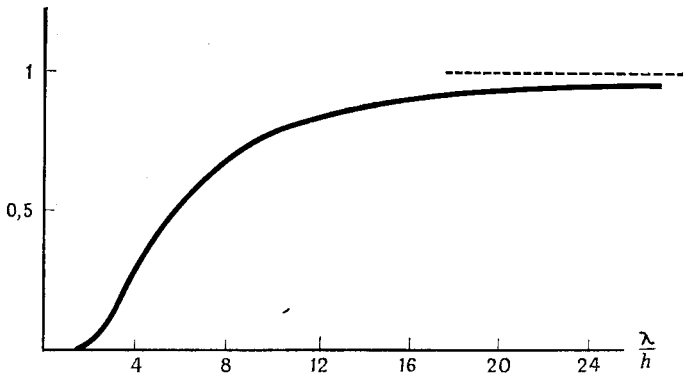

Рис. 58. Отношение потерь энергии за счет трения о дно к ее значению в пределе длинных волн, изображенное в зависимости от отношения длины волны к глубине λ/h. (Это график изменения множителя в фигурных скобках в выражении (74).)

тем не менее результирующее накопленное за много периодов затухание может быть очень большим.

Относительная потеря *энергии* за период, которая, конечно, является удвоенной величиной (73), может быть записана в виде

$$[2\pi\,(\nu/(2\omega))^{1/2}h^{-1}]\,\{(2kh)/(\mathrm{sh}\,2kh)\}. \qquad (74)$$

Величина в квадратных скобках в выражении (74) представляет собой относительную потерю волновой энергии за каждый период из-за трения о дно, как было вычислено в предельном случае длинных волн в разд. 2.7; она с достаточно хорошей точностью представляет отношение толщины пограничного слоя (график с надписью «вода» на рис. 26) к глубине. Выражение (74) еще раз подтверждает правильность этого предельного значения, поскольку при $kh \to 0$ множитель в фигурных скобках стремится к 1. На рис. 58 показано, как этот множитель уменьшается от 1 при уменьшении λ/h до чрезвычайно низких значений, когда относительные потери энергии за период становятся значительно меньше величины для длинноволнового предела, так как все меньше и меньше энергии волн сосредоточивается там, где может происходить ее диссипация в результате трения о дно.

Рис. 58 подтверждает, что для волн на *глубокой* воде, скажем, при $h > 0{,}5\,\lambda$, затухание за счет трения о дно, как и ожидалось, незначительно. Эти волны *не* вызывают вблизи дна какого-либо движения, которое могло бы привести к особенно

сильной сдвиговой деформации, влекущей за собой существенную вязкую диссипацию энергии в пограничном слое у дна. Следовательно, основной причиной затухания может быть внутренняя диссипация при сдвиговом движении в толще воды.

Точно так же как использование понятия толщины вытеснения δ_1 упрощает анализ затухания волн на воде, обусловленного вязкой диссипацией внутри пограничного слоя (результаты, как и в разд. 2.7, могут быть проверены прямым вычислением скорости диссипации), так и специальные упрощающие соображения, выдвинутые Стоксом, позволяют без труда определить затухание за счет вязкой диссипации *вне* пограничного слоя в воде произвольной глубины. Соответствующая скорость потери энергии волны может быть просто добавлена к скоростям потерь из-за диссипации внутри пограничного слоя, хотя обычно одна из них является доминирующей.

Синусоидальные волны, распространяющиеся в направлении оси x, вызывают, как мы видели, движение воды только в направлении осей x и z, удовлетворяющее, разумеется, уравнению неразрывности

$$\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0. \tag{75}$$

Используем понятия отклонений (см. разд. 1.13) от «среднего давления» p (обозначаемого там p_m), возникающих благодаря скоростям деформаций сдвига $\partial u/\partial z$ и $\partial w/\partial x$ или благодаря такой комбинации равных и противоположных по знаку скоростей деформаций простых растяжений $\partial u/\partial x$ и $\partial w/\partial z$, которые отвечают деформационному движению в направлении различных осей; тогда составляющие тензора напряжений, соответствующие осям x и z, принимают для такого движения вид

$$p_{xx} = p - 2\mu\partial u/\partial x, \quad p_{xz} = -\mu\,(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x),$$
$$p_{zx} = -\mu\,(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x), \quad p_{zz} = p - 2\mu\partial w/\partial z. \tag{76}$$

Напомним также данное в разд. 1.13 определение составляющих (76), согласно которому p_{xx} и p_{xz}, например, являются составляющими по осям x и z скорости изменения потока количества движения в направлении оси x через единичную площадку в единицу времени. Дивергенция этого потока, в соответствии с (75) и (76) равная

$$\partial p_{xx}/\partial x + \partial p_{xz}/\partial z = \partial p/\partial x - \mu\nabla^2 u, \tag{77}$$

дает суммарную скорость потерь составляющей количества движения в направлении оси x в единице объема жидкости. Таким образом, вязкие напряжения приводят линеаризованное урав-

нение (4) количества движения в проекции на ось x к виду

$$\rho_0 \partial u/\partial t = -\partial p_e/\partial x + \mu \nabla^2 u \tag{78}$$

и аналогично в проекции на ось z:

$$\rho_0 \partial w/\partial t = -\partial p_e/\partial z + \mu \nabla^2 w. \tag{79}$$

Стокс отметил, что эти уравнения движения вязкой жидкости точно удовлетворяются, если мы описываем волны на воде решением уравнения Лапласа (5) для безвихревого течения. Так, дифференцируя уравнение (5) по x и z соответственно, мы получаем, что члены с коэффициентом μ в соотношениях (78) и (79) тождественно равны нулю. *И только граничным условиям*, присущим вязкой жидкости, это решение не может удовлетворять, например, из-за наличия ненулевого горизонтального движения у дна. Мы объясним, как исправить этот недостаток путем введения пограничного слоя.

С другой стороны, можно *представить себе* некий эксперимент, в котором пограничный слой не появится вследствие того, что растяжимое твердое дно совершает такое же горизонтальное движение вперед и назад в своей собственной плоскости, какое, как предполагается, совершают частицы жидкости возле дна (рис. 55) в соответствии с теорией безвихревого течения. В таком воображаемом движении *без* придонного пограничного слоя не может быть никакой диссипации энергии, кроме *внутренней* диссипации, которую мы теперь и собираемся вычислить. Заметим, что такое движение дна в своей собственной плоскости не будет производить никакой работы над жидкостью, поскольку в безвихревом потоке, в соответствии с формулами (76), величина тангенциального напряжения

$$p_{xz} = -2\mu \partial^2 \varphi/\partial x \partial z \tag{80}$$

обращается в нуль при $z = -h$, где $\partial\varphi/\partial z = 0$ для всех x.

Однако в таком воображаемом эксперименте безвихревой поток не будет все же точно удовлетворять граничному условию на *свободной поверхности*. Например, тангенциальное напряжение (80) *не* обращается в нуль на этой поверхности. Оно представляет собой x-составляющую силы на единицу площади, с которой вода действует на тонкий поверхностный слой, равновесие которого возможно, таким образом, лишь тогда, когда к этому слою приложена внешняя сила с равной по величине, но противоположной по знаку составляющей по оси x. Опять же, наше граничное условие для безвихревого движения (а именно условие (48), где учтено поверхностное натяжение) выведено в предположении, что z-составляющей силы на единицу площади, с которой вода действует на тонкий поверхностный слой

(противодействуя другой силе $p_0 - T\partial^2\zeta/\partial x^2$), является давление $p = p_0 + p_e$. Формулы (76) показывают, однако, что правильное значение z-составляющей силы на единицу площади превышает p на величину

$$-2\mu\partial w/\partial z = -2\mu\partial^2\varphi/\partial z^2, \tag{81}$$

и мы опять же делаем вывод, что движение может поддерживаться только тогда, когда к поверхностному слою приложена внешняя сила с равной и противоположной по знаку составляющей по оси z.

Сохранение безвихревого движения в линейной теории поверхностных волн требует, таким образом, не только такого движения у дна, которое удовлетворяло бы условию прилипания, но также и наличия внешней силы

$$(2\mu\partial^2\varphi/\partial x\partial z,\ 0,\ 2\mu\partial^2\varphi/\partial z^2), \tag{82}$$

приложенной к единице площади свободной поверхности. В отличие от движения у дна эта сила производит над жидкостью *работу*, которая в расчете на единицу времени и на единицу площади равна

$$2\mu[(\partial\varphi/\partial x)\ \partial^2\varphi/\partial x\partial z + (\partial\varphi/\partial z)\ \partial^2\varphi/\partial z^2]_{z=0}. \tag{83}$$

Здесь в соответствии с линейной теорией значение на свободной поверхности может быть заменено на значение при $z = 0$, поскольку различие составляет величину третьего порядка от возмущений.

Остроумная идея Стокса заключалась в том, чтобы признать, что среднее значение выражаемой формулой (83) мощности, необходимой для поддержания незатухающего безвихревого движения синусоидальных волн, должно в точности уравновешивать скорость, с которой эти самые волны при свободном распространении теряли бы энергию за счет внутренней диссипации! Более того, среднее значение выражения (83) в случае синусоидальных волн с волновым числом k совпадает со средним значением выражения

$$2\mu[k^2\varphi\partial\varphi/\partial z + k^2\varphi\partial\varphi/\partial z]_{z=0}, \tag{84}$$

в котором два члена из (83) сведены к одинаковой форме посредством записи среднего от произведения производных по x синусоидальных величин в виде умноженного на k^2 среднего от произведения самих величин и замены $\partial^2\varphi/\partial z^2$ на $k^2\varphi$ (уравнение (16)).

Таким образом, поверхностные волны теряют энергию за счет внутренней диссипации со скоростью на единицу площади, равной среднему значению выражения (84). В соответствии с

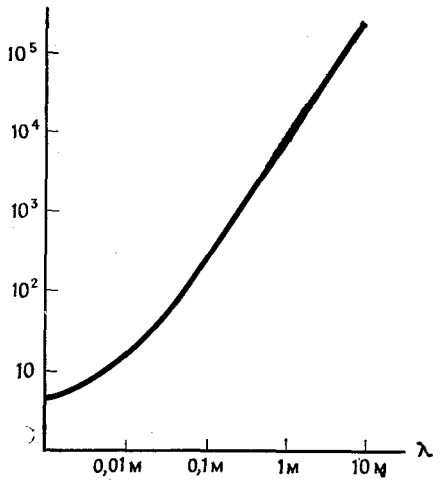

Рис. 59. Число периодов, необходимых для уменьшения в e раз энергии синусоидальных волн длины λ на глубокой воде за счет внутренней вязкой диссипации.

формулой (26) эта скорость равна произведению $8\nu k^2$ на среднюю кинетическую энергию на единицу площади или произведению $4\nu k^2$ на полную энергию волны (ровно половина которой приходится на кинетическую энергию). Поэтому внутренняя диссипация производит *относительную* потерю энергии волны $4\nu k^2$ за единицу времени, или

$$8\pi\nu k^2\omega^{-1} \qquad (85)$$

за период. Эту величину можно непосредственно добавить к потерям (74) за счет трения о дно, которого, однако, нет в волнах на глубокой воде.

На рис. 59 показано, сколько периодов требуется для уменьшения в e раз энергии синусоидальных волн на глубокой воде за счет внутренней диссипации, т.е. обратная выражению (85) величина изображена как функция длины волны. Оказывается, что обычные гравитационные волны затухают очень слабо: время, необходимое для уменьшения в e раз энергии волн длины 1 и 10 м, составляет 8000 и 250 000 периодов соответственно. Даже для достаточно коротких гравитационных волн с $\lambda = 0{,}1$ м все еще требуется 250 периодов. Волны с $\lambda = 0{,}01$ м в тяжелой жидкости при наличии поверхностного натяжения затухают намного быстрее, для затухания в e раз требуется только 16 периодов, а для чисто капиллярных волн с очень малой длиной 0,001 м требуется 4 периода. Эти результаты мож-

но суммировать в виде уже сделанного в разд. 3.4 замечания: среди волн на глубокой воде самыми чувствительными к вязкому затуханию являются *волны ряби*.

Все приведенные выше результаты сформулированы в терминах времени затухания (в периодах) для бесконечно протяженной цепочки синусоидальных волн. Мы пока что не изучали свойства цепочки волн с пространственным градиентом амплитуды; они рассматриваются в следующих за этим разделах. Было бы естественным предположить, что волны, порожденные некоторым фиксированным источником, колеблющимся с фиксированной частотой, теряют энергию по мере удаления от него с той же относительной скоростью *на единицу длины волны*, с которой теряет ее бесконечная цепочка волн *за период* (т. е. со скоростью потерь, равной величине (74) для трения о дно и величине (85) для внутренней диссипации). Такое предположение было бы, однако, ошибочным: в нем неявно подразумевается, что энергия переносится со скоростью волны c, а не со скоростью, рассчитанной ниже (разд. 3.6 и 3.8) и изменяющейся от значения $(1/2)\,c$ для гравитационных волн до значения $(3/2)\,c$ для капиллярных волн. В этих двух случаях изображенная на рис. 59 величина должна быть соответственно уменьшена или увеличена на 50%, чтобы получилось число *длин волн*, за которое энергия, переносимая распространяющимся волновым сигналом, уменьшится в e раз. Так, для $\lambda > 30$ м это расстояние может достигать половины длины земного экватора; это действительно доказывает, что можно наблюдать гравитационные волны с длинами в указанном диапазоне, распространяющиеся на такие океанические расстояния, как $2 \cdot 10^7$ м, несмотря на то что некоторые дополнительные *нелинейные эффекты* взаимодействия с волнами другой длины на таких больших расстояниях могут рассеивать энергию.

Предыдущее обсуждение, основанное на воображаемом эксперименте по поддержанию незатухающего безвихревого движения синусоидальных волн с помощью приложения сил на границе, включая приложение силы (82) к единице площади свободной поверхности, наводит на вопрос: за счет чего *помимо* затухания волновое движение при обычных условиях (без приложения внешних сил) может отклоняться от такого безвихревого движения? Как, например, происходит изменение тангенциального напряжения p_{xz} от значения (80) для безвихревого потока до значения 0 на поверхности?

Ответ легко найти, заметив, что производные от u и w в выражении для p_{xz} удовлетворяют уравнениям точно такой же формы, как и уравнения (78) и (79) для скорости. Он состоит в том, что p_{xz} уменьшается от своего значения для внешнего

безвихревого потока до нуля на поверхности в соответствии с законами стоксовского пограничного слоя, представленными графически на рис. 25. Пограничные слои на поверхности, где падает до нуля касательное напряжение, и у дна, где уменьшается до нуля тангенциальная составляющая скорости, имеют одинаковую структуру и одинаковую малую толщину δ, которая дается графиком с надписью «вода» на рис. 26.

То обстоятельство, что связанная с касательным напряжением диссипация внутри этого очень тонкого пограничного слоя уменьшается до нуля от своего «внутреннего» уровня в самой волне, *не* влияет существенно на затухание волны за счет внутренней диссипации. Однако мы закончим этот раздел указанием обстоятельств, при которых внутри пограничного слоя на поверхности может возникать очень *сильная диссипация*.

Такая диссипация на поверхности может вызываться отклонением поверхностного натяжения T от своей равновесной величины. В той жидкости, в которой малое волновое движение порождает малое изменение натяжения T, ее составляющая по оси x

$$(\partial T/\partial x)\,\delta x \tag{86}$$

должна действовать на полосу поверхности ширины δx с параллельными оси y границами единичной длины, хотя по линейной теории те же самые малые изменения не производят изменения в составляющей силы по оси z (47). Таким образом, в пограничном слое на поверхности тангенциальное напряжение отличается от величины (80), стремясь не к нулю, а к величине

$$p_{xz} = -\partial T/\partial x, \tag{87}$$

которая должна уравновешивать составляющую в направлении оси x поверхностной силы на единицу площади $(\partial T/\partial x)$.

Существуют условия, при которых в пограничном слое на поверхности тангенциальные напряжения настолько сильно возрастают по величине от внутреннего значения (80) до значения (87) на поверхности, что возникающая при этом *поверхностная диссипация* (дополнительная вязкая диссипация из-за *повышенных* касательных напряжений в пограничном слое на поверхности) намного превосходит скорость внутренней диссипации. Этот механизм объясняет известное явление гашения волн маслом.

Физика явления изменения поверхностного натяжения очень сложна. Качественное объяснение изменения T при стягивании и растягивании поверхности воды волнами основано на физическом принципе, согласно которому свободная энергия в состоянии термодинамического равновесия имеет *минимум*. Сле-

довательно, если площадь водной поверхности A *быстро* растягивается до величины $A + \delta A$, то увеличение свободной энергии может существенно превысить ту величину, которую она принимала бы при медленном обратимом изменении. С количественной точки зрения возникающее увеличение поверхностного натяжения в растянутой поверхности оказывается особенно большим для воды, покрытой чрезвычайно тонким слоем такой примеси, как масло.

3.6. Введение в теорию групповой скорости

Волны синусоидальной формы рассматривались в разд. 3.2—3.5. Было получено детальное описание движения воды в волнах малой амплитуды (рис. 50 и 55), энергетических соотношений для них, а также оценки (рис. 58 и 59) скорости, с которой их энергия может рассеиваться. Кроме этого, показано, как *скорость волны* изменяется в зависимости от её длины (рис. 52, 56 и 57), т. е. выяснены «дисперсионные» свойства волн на воде.

Причины такого внимания к очевидно очень частному случаю синусоидальных волн указаны в разд. 3.1 и 3.2. С одной стороны, волны на поверхности воды нередко обнаруживают форму, *приблизительно* сходную с синусоидальными волнами малой амплитуды; в частности, как отмечено в разд. 3.2, они могут иметь «длинные гребни» по сравнению с длиной волны, так что они приближенно удовлетворяют уравнению, выведенному на основе рассмотрения бесконечно длинных гребней.

Кроме того, стремление понять поведение синусоидальных волн малой амплитуды на поверхности воды вызвано еще тем обстоятельством, что превосходным (а часто и единственным) способом изучения реакции поверхности воды на малое возмущение более сложной формы является *анализ Фурье*. Он позволяет рассматривать такое возмущение как линейную комбинацию различных синусоидальных возмущений, каждое из которых в отдельности ведет себя так, как описано в разд. 3.2—3.5. Более того, линейность уравнения, описывающего малые возмущения на поверхности воды (уравнение Лапласа (5) с граничным условием (13), выполняющимся при $z = 0$), означает, что такая *линейная комбинация* различных синусоидальных решений также будет решением.

Между двумя указанными выше причинами изучения синусоидальных волн существует интересная связь. Предположим,

например, что какой-то локализованный шторм ограниченной продолжительности породил океанские волны. Тогда мы обнаружим, что *различные синусоидальные составляющие*, на которые может быть разложено вызванное им возмущение на поверхности воды, будут в некоторый более поздний момент времени *обнаружены в совсем разных местах*. Мы можем сказать, что волны «рассеялись» *в обычном смысле* этого слова и что последовательность волн на воде подвержена «рассеянию» в научном смысле (т. е. она обладает дисперсией — существует зависимость скорости волн от их длины). Волны с определенными длиной и направлением распространения будут обнаружены в некоторый более поздний момент вблизи некоторого определенного места. Это и есть одна из возможных причин (другие будут указаны в разд. 3.9 и 3.10), по которым, как ранее было отмечено, наблюдаемые в некотором месте волны могут иметь приблизительно синусоидальную форму.

Заметим, что такое рассеяние первоначальной энергии на большие площади уменьшает величину энергии, приходящуюся *на единицу площади*, что в свою очередь уменьшает в соответствии с формулой (28) амплитуду волн. Поэтому для описания упомянутых выше более поздних стадий развития возмущений (часто называемых распространением «зыби» из штормового района) *может* быть использована теория малых амплитуд. Возмущения во время самого шторма могут быть велики, и это заставляет использовать намного более сложные граничные условия, чем их линеаризованная форма (13). Тем не менее энергия волн все же рассеивается по большой площади, так что по истечении определенного времени для изучения распространения «зыби» становится пригодной линейная теория.

Подобным образом брошенный в пруд большой камень порождает сложное начальное возмущение, но вскоре мы видим более правильную картину разбегающихся концентрических круговых гребней волн. Форма водной поверхности между двумя гребнями приблизительно совпадает с формой синусоидальной волны. Мы обнаруживаем бóльшую длину волны в окрестности внешнего края картины и меньшую — возле центра. Это как раз то, что мы могли бы ожидать как следствие того факта, что скорость волны увеличивается с ее длиной (рис. 52).

Действительно, вполне естественно предположить, что через время t после начального возмущения волна, имеющая скорость c, будет обнаружена на расстоянии близком к ct от места этого возмущения. Такое предположение было бы, однако, грубой ошибкой. Довольно удивительно, что эта оценка (для не очень мелкого пруда) является завышенной примерно в 2 раза. Небольшая группа волн, имеющих скорость волны c, будет об-

наружена в действительности на расстоянии, близком к Ut от места начального возмущения, где U — величина, называемая *групповой скоростью*, которая для «волн на глубокой воде» составляет $(1/2)c$.

Гл. 3, как говорилось в ее начале, знакомит не только со свойствами волн на воде, но и со свойствами групповой скорости. Мы найдем, что эта групповая скорость U отлична от скорости волны c во всех *диспергирующих* системах (в которых c изменяется с длиной волны). В разд. 3.6—3.8 дана общая теория групповой скорости для *изотропных* диспергирующих систем (в которых c не зависит от направления). Именно здесь представленные в предыдущих четырех разделах обширные данные о дисперсионных (и других) свойствах синусоидальных волн на воде находят еще одно важное применение: они идеально подходят для иллюстрации этой общей теории.

По-видимому, самое главное свойство групповой скорости может быть упомянуто сразу, хотя обоснование его откладывается до разд. 3.8. Энергия синусоидальных волн переносится *не* со скоростью волны c, а с групповой скоростью U.

Это утверждение никоим образом не противоречит приведенному в разд. 1.3 доказательству того, что поток энергии плоских звуковых волн имеет величину произведения c на плотность энергии, так что энерия звуковых волн переносится со скоростью волны c. В действительности для *недиспергирующих* волн, включая звуковые волны, групповая скорость U и скорость волны c совпадают.

Вероятно, каждый, чьи знания количественных характеристик волн ограничены недиспергирующими системами, должен найти свойства групповой скорости весьма удивительными. *В конце концов поразительной особенностью волн является их* способность переносить энергию на большие расстояния. Кроме того, для многих типов волн вполне очевидно, какова скорость гребней и впадин. Тогда естественно представить себе, что эта «скорость волны» c совпадает со скоростью, с которой энергия переносится волнами. Однако для большинства возникающих в природе волновых движений скорость волны, с которой распространяются гребни и впадины, совершенно отлична от групповой скорости, с которой переносится энергия.

В гл. 3 рассматриваются изотропные системы, в которых (как мы увидим) энергия переносится под прямым углом к гребням. Если гребни образуют картину из концентрических окружностей, как в случае большого камня, брошенного в пруд, настолько глубокий, что на образовавшиеся волны не влияет непостоянство глубины, то энергия возмущения должна переноситься от центра в радиальном направлении. Тогда, как ска-

зано ранее, самые длинные образовавшиеся волны (обычно в несколько раз более протяженные, чем камень) оказываются на краю расширяющейся концентрической картины.

Чрезвычайно поучительно наблюдать эти крайние волны. Каждый, кто наблюдает (только очень внимательно) развитие одного из таких гребней, неожиданно теряет его из виду! Сначала это кажется обманом зрения, возможным результатом ошибки, связанной с идентичностью этого гребня со следующим за ним сзади, на который переносится теперь взгляд наблюдателя. Но потом этот последующий гребень тоже исчезает! Тем временем следом идут широкие и быстрые гребни. Действительно, на внутреннем крае концентрической картины новые гребни получаются «из ничего», т. е. из успокоившейся теперь в центре воды.

Неожиданность, с которой гребни довольно большого размера исчезают на внешнем краю картины, исключает постепенное затухание (разд. 3.5) как механизм этого явления. Правильное объяснение, как мы увидим, состоит в том, что гребни движутся со скоростью волны c, вдвое большей (для «волн на глубокой воде»), чем групповая скорость U, с которой переносится вперед *энергия* в волнах данной длины. Гребень каждой волны опережает, таким образом, в своем продвижении связанную с ним энергию, так что такие гребни могут уцелеть, только эволюционируя в гребни более длинных волн. Это, однако, невозможно для волн на внешнем краю группы (так как первоначальное возмущение не производит энергии в волнах с *большей* длиной), и поэтому гребни здесь могут только исчезнуть.

В решении этих важных вопросов, касающихся групповой скорости, помогают по крайней мере четыре различных метода исследования. Мы отложим сейчас исследование с помощью двух уже упомянутых методов — анализа Фурье и метода энергетических потоков — до разд. 3.7 и 3.8 соответственно, отложим также еще более общий подход до гл. 4 и проведем в этом разделе достаточно простой анализ, который, по крайней мере в ограниченном числе случаев, укажет, каковы существенные свойства групповой скорости и как найти ее величину.

Простой анализ приемлем для изучения только той поздней стадии, когда, как описано выше, распространяющиеся от начального возмущения волны принимают вид протяженной группы гребней с постепенно меняющейся длиной волны (расстоянием между последовательными гребнями). Спрашивается, как *меняется во времени* это пространственное распределение гребней и длин волн.

Метод связан в основном с изотропным распространением волн. Тем не менее он является в определенном смысле одно-

мерным: исследуется пространственное распределение только под прямым углом к гребням. Таким образом, в случае распространения изотропных волн в двух измерениях (скажем, волн на воде с концентрическими круговыми гребнями) с его помощью изучается радиальное распределение гребней и волн различной длины. Аналогично, с его помощью изучается радиальное распределение для сферически симметричного распространения волн в изотропной трехмерной системе. Метод применим также в общем случае одномерной диспергирующей системы. Волны на воде могут сами образовывать такую систему, например, когда цепочка волн на воде с параллельными прямолинейными гребнями распространяется под прямым углом к линии гребней (возможно, вдоль канала). Во всех этих случаях мы используем x в качестве координаты, отсчитываемой под прямым углом к линии гребней.

В методе предполагается, что может быть определена *фаза* α, поскольку длина волны изменяется лишь постепенно (на малую долю ее самой от одной волны к последующей). Фаза является величиной, значение которой на каждом гребне равно числу π, умноженному на четное число, т. е. она равна $2n\pi$, где целое n *возрастает на* 1 для каждого последующего гребня, проходящего через данную точку. Между гребнями фаза α меняется плавно; во впадинах, например, α равно числу π, умноженному на нечетное число. Скорость изменения α во времени равна величине 2π, деленной на период волны, т. е. равна частоте ω, измеряемой в радианах в секунду.

Фаза α зависит не только от времени, но и от координаты x (расстояния в направлении под прямым углом к линии гребней волн). В фиксированный момент времени фаза α уменьшается вместе с x со скоростью, равной волновому числу k и измеряемой в радианах на метр. (Так как $k = 2\pi/\lambda$, то это соответствует тому, что α уменьшается вместе с x на 2π между гребнями, отдаленными на расстояние λ; фаза α *уменьшается*, поскольку она была определена так, что гребни, приходящие позже, имеют большее значение α.) Таким образом, $\alpha(x, t)$ является функцией, удовлетворяющей соотношениям

$$\partial\alpha/\partial x = -k, \quad \partial\alpha/\partial t = \omega. \tag{88}$$

Использование этой плавно меняющейся фазовой функции $\alpha(x, t)$ позволяет смещение поверхности воды представить в форме

$$\zeta = \zeta_1(x, t) \exp[i\alpha(x, t)], \tag{89}$$

где $\zeta_1(x, t)$ — положительная плавно меняющаяся амплитуда. В окрестности фиксированной точки x_0 и фиксированного мо-

мента времени t_0 фазовая функция почти линейна; действительно,

$$\alpha(x, t) \approx \alpha(x_0, t_0) - k_0(x - x_0) + \omega_0(t - t_0), \qquad (90)$$

где $-k_0$ и ω_0 — значения производных в (88) в точке (x_0, t_0). Тогда *локально* в силу (89) при медленно меняющейся амплитуде ζ_1 получается, что ζ становится *почти синусоидальной волной* (с волновым числом k_0 и частотой ω_0), как и предполагалось ранее.

Из (88) находим соотношение между волновым числом и частотой:

$$\partial k/\partial t + \partial \omega/\partial x = 0, \qquad (91)$$

которое можно трактовать как *уравнение неразрывности* для фазы, поскольку k — своего рода плотность фазы (фаза на единицу длины), а ω — своего рода скорость изменения потока фазы (фаза, переносимая через данную точку за единицу времени). Подстановка $\omega = kc$, где c — скорость волны, делает соотношение (91) особенно похожим на гидродинамическое уравнение неразрывности (см. разд. 2.1, где ρA соответствует k, а u соответствует c), и действительно, скорость волны иногда называют «фазовой скоростью».

Дисперсионное соотношение для изотропной системы определяет либо c как функцию $k = 2\pi/\lambda$, либо (как в формулах (18) или (35)) $\omega = kc$ как функцию от k. Мы воспользуемся последней формулой,

$$\omega = \omega(k), \qquad (92)$$

и предположим, что это дисперсионное соотношение, выведенное для чисто синусоидальных волн, с хорошей точностью выполняется и для исследуемых здесь волн (которые локально имеют почти синусоидальную форму).

Подстановка (92) в (91) сразу дает

$$\partial k/\partial t + U\partial k/\partial x = 0, \qquad (93)$$

где величина

$$U = U(k) = d\omega/dk \qquad (94)$$

будет называться *групповой скоростью*. Уравнение (93) означает, что k постоянно вдоль кривых в плоскости (x, t), удовлетворяющих соотношению $dx/dt = U$. Но если k постоянно, то и U постоянно, так что кривые являются прямыми линиями

$$x - Ut = \text{const}. \qquad (95)$$

(Это рассуждение знакомо, конечно, по разд. 2.8 и 2.9.)

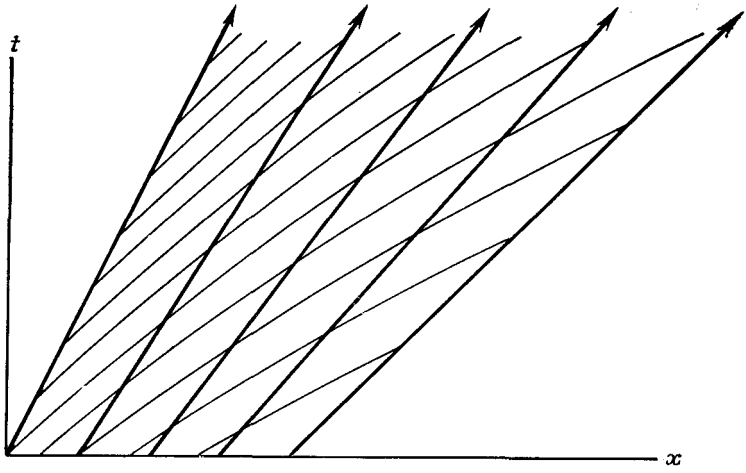

Рис. 60. Изображение группы волн на плоскости (x, t). Тонкие линии указывают траектории гребней волн, которые возникают «из ничего» сзади группы и исчезают на фронте. Вдоль жирных прямых линий $x - Ut = \text{const}$ длина волны $\lambda = 2\pi/k$ остается постоянной.

Таким образом, основной факт, касающийся групповой скорости в рассматриваемом случае, уже получен. Как показано на рис. 60, волны данной длины $2\pi/k$ находятся в точках, расположенных вдоль прямых, даваемых соотношением (95), и для каждой длины волны имеется своя прямая. По истечении времени t точка, в которой может быть обнаружена волна с этой длиной, продвигается на расстояние Ut. Тот, кто воображает, что волны с длиной $2\pi/k$ наблюдались бы через время t на расстоянии ct из-за того, что гребни движутся со скоростью $c = \omega/k$, не нашел бы их! Он нашел бы там волны какой-либо совершенно другой длины. Если же он остановит взгляд строго на точке, движущейся с групповой скоростью $U = d\omega/dk$, то обнаружит, что постоянно наблюдает волны одной и той же длины.

В частном случае гравитационных волн на глубокой воде уравнение (92), связывающее ω и k, принимает простой вид (18) и приводит к соотношению

$$U = d\omega/dk = d\,[(gk)^{1/2}]/dk = \frac{1}{2}(g/k)^{1/2} = \frac{1}{2}(\omega/k) = \frac{1}{2}c. \quad (96)$$

Таким образом, групповая скорость в этом случае имеет упомянутый выше удивительно простой вид: она составляет *половину* скорости волны.

В противоположность этому в любой недиспергирующей системе скорость волны c не зависит от k. Тогда $\omega = ck$ равно величине k, умноженной на *постоянную*, и поэтому

$$U = d\omega/dk = d\,(ck)/dk = c. \tag{97}$$

К этим недиспергирующим волнам, для которых не существует различия между групповой скоростью и скоростью волны, относятся не только звуковые волны, но и «длинные» волны (с $c = (gh)^{1/2}$) на воде постоянной глубины h.

Мы можем воспользоваться формулами из разд. 3.3 для общего случая гравитационных волн на воде постоянной глубины, чтобы установить переход от соотношения (96) для волн на глубокой воде к (97) для длинных волн. Дифференцируя (35), получаем

$$2\omega\,\frac{d\omega}{dk} = g\left(\operatorname{th} kh + \frac{kh}{\operatorname{ch}^2 kh}\right), \tag{98}$$

так что

$$\frac{U}{c} = \frac{k}{\omega}\,\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh}\right). \tag{99}$$

Эта зависимость изображена на рис. 61, *а*. Заметим, что U/c возрастает от значения 0,5 для глубокой воды довольно медленно и даже при значении длины волны $14h$, использованном в разд. 3.3 как критерий «длинных» волн, групповая скорость все еще на 6% меньше скорости волны.

Другой подход к получению этих результатов основан на записи общего выражения (94) для U с помощью соотношения между $c = \omega/k$ и $\lambda = 2\pi/k$ в виде

$$U = d\,(kc)/dk = c + k\,dc/dk = c - \lambda\,dc/d\lambda. \tag{100}$$

Это означает, что, имея кривую зависимости c от λ, мы можем найти групповую скорость U для данного λ как ординату точки пересечения вертикальной оси координат и касательной, проведенной из точки кривой, соответствующей длине волны λ. Это построение показано на рис. 61, *б*, который по-новому характеризует постепенный рост U/c с увеличением λ.

Из соотношения (100) следует еще и то, что для любых волн, у которых *с уменьшается* с увеличением λ, выполняется условие $U > c$. Таким образом, для волн ряби «на глубокой воде» (рис. 56) групповая скорость превышает скорость волны, когда $\lambda < \lambda_m$. Действительно, для «капиллярных волн» (волны ряби с $\lambda \ll \lambda_m$) из (57) следует, что

$$U = d\,[(\rho^{-1}Tk^3)^{1/2}]/dk = \frac{3}{2}\,(\omega/k) = \frac{3}{2}\,c. \tag{101}$$

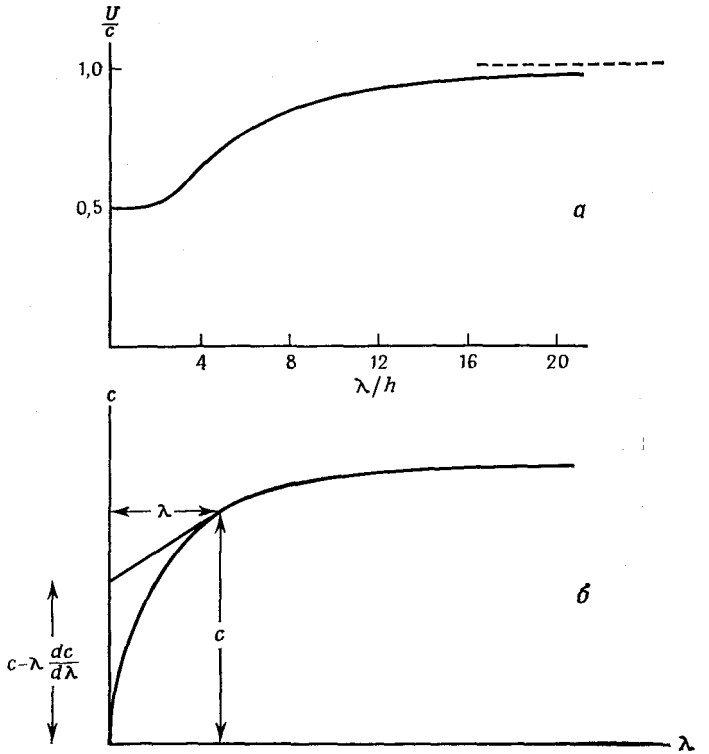

Рис. 61. *а* — зависимость отношения групповой скорости U к скорости волны c от отношения длины волны к глубине λ/h. *б* — общее геометрическое построение для определения U из графика зависимости c от λ иллюстрируется здесь для случая гравитационных волн.

Это означает, что скорость распространения энергии капиллярных волн данной длины превышает скорость c гребней в 3/2 раза. На самом деле весьма высокая скорость затухания капиллярных волн (разд. 3.5) затрудняет простое наблюдение такого соотношения для волн, порожденных начальным локальным возмущением; однако наглядное экспериментальное подтверждение того, что для капиллярных волн $U > c$, описано в разд. 3.9.

Заключение о том, что касательная к графику на рис. 56 пересекает вертикальную ось координат при значении ординаты, равном групповой скорости, означает, что *минимум групповой скорости* соответствует точке перегиба, в которой $\lambda =$

$= 2{,}54\lambda_m$, $c = 1{,}21c_m$ и $U = 0{,}767c_m$. Тогда в соответствии с (56) минимальное значение групповой скорости волн на глубокой воде составляет 0,18 м/с (и достигается при $\lambda = 44$ мм и $c = 0{,}28$ м/с). Вся энергия волн, порожденных брошенным в пруд камнем, переносится быстрее, так что вскоре в центре возникает спокойная зона, окруженная волнами длиной от 4 до 5 см. Кажется, что гребни этих волн (так как $c > U$) возникают «из ничего», т. е. из этой центральной спокойной области.

Напротив, в условиях мелкой воды в волновой кювете (см. кривую с отметкой $h = 5$ мм на рис. 57) график зависимости c от λ является почти горизонтальным для длин волн, превосходящих 2 см. В соответствии с этим рябь с такими длинами волн испытывает пренебрежимо малую дисперсию, что, конечно, и делает ее подходящей для визуального представления звуковых волн.

В этом разделе было дано введение в теорию групповой скорости, приводящее достаточно простым, хотя и не вполне строгим путем к заключению о том, что точка, в которой находится волна с данным волновым числом k, движется вперед со скоростью $U(k)$. Читатели, впервые приступившие к изучению групповой скорости, могут быть уверены, что их понимание явления станет намного глубже, если они продолжат изучение разных подходов, приведенных в двух следующих разделах.

3.7. Исследование диспергирующих систем методом Фурье

Не только в волнах малой амплитуды на воде, но и во многих других диспергирующих системах синусоидальные волны, каждая со своим волновым числом, имеют определенную скорость волны (хотя не одну и ту же для всех волн), и это наводит на мысль, как отмечено в начале разд. 3.6, использовать метод Фурье для описания развития возмущений произвольной формы. Такие возмущения действительно могут быть представлены *линейной комбинацией* синусоидальных волн, и мы обнаружим, что их *асимптотическая оценка* для больших значений времени, с одной стороны, позволяет строго доказать установленные в разд. 3.6 свойства групповой скорости и, с другой стороны, пойти еще дальше, определив, например, асимптотическое поведение амплитуды ζ_1 и фазы α в неком выражении, подобном (89).

Для того чтобы развить основные идеи, не обременяя себя сложностями многомерного анализа Фурье, мы ограничимся в этом разделе строго одномерным движением. Таким образом, мы рассматриваем изменения только в направлении оси x. Предположим также (игнорируя до конца раздела затухание), что синусоидальная волна вида

$$a \exp [i (\omega t - kx)] \tag{102}$$

(с постоянной амплитудой a) является точным решением линеаризованной системы уравнений движения при условии, что ω и k связаны дисперсионным соотношением (92).

Для волн на воде это означает, что исследуются только не зависящие от y возмущения, создающие цепочку волн с прямолинейными гребнями, параллельными оси y. Подобные волны могут быть порождены, например, погружением широкой баржи в глубоком канале (со сторонами, параллельными оси x). Другие примеры одномерных диспергирующих систем приведены в разд. 4.13. Хотя распространение волн *более* чем в одном измерении имеет больший практический интерес, строгое исследование одномерного случая в этом разделе поможет быстрому и глубокому пониманию групповой скорости. Оно подготовит читателя также к более полному изучению движения в двух и трех измерениях в гл. 4; мы увидим, что асимптотическое поведение волн в случае изотропного распространения, такого, как на концентрической картине волн на воде, близко к имеющему место в одномерном случае; исключение состоит в том, что амплитуда содержит дополнительный множитель $x^{-1/2}$, соответствующий переносу энергии волн от центра в расширяющихся окружностях длины $2\pi x$.

Правильное понимание того, как свойства линейной комбинации синусоидальных волн могут подтвердить концепцию групповой скорости, получается наложением только двух волн с одинаковыми амплитудами и *примерно* равными волновыми числами. Формула сложения косинусов показывает, что

$$\begin{aligned} a \cos (\omega_1 t - k_1 x) + a \cos (\omega_2 t - k_2 x) = \\ = \left\{ 2a \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) t - \frac{1}{2} (k_2 - k_1) x \right] \right\} \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1) t - \frac{1}{2} (k_2 + k_1) x \right]. \end{aligned} \tag{103}$$

Здесь множитель в фигурных скобках — медленно меняющаяся (с *малым* волновым числом $(1/2)(k_2 - k_1)$) амплитуда представленных последним косинусом колебаний, имеющих во много раз большее волновое число $(1/2)(k_2 + k_1)$. Линейная

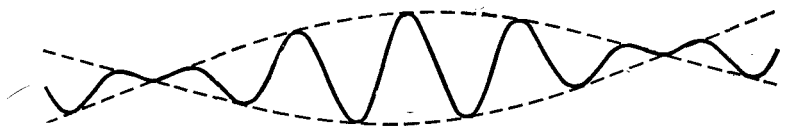

Рис. 62. Сплошная линия — линейная комбинация (103) двух синусоидальных волн с одинаковыми амплитудами и примерно равными волновыми числами как функция от x. Штриховая линия — огибающая модуляции, ограничивающая «пакеты» волн, которые движутся вперед со скоростью, определяемой формулой (104).

комбинация имеет поэтому форму (рис. 62) ряда «волновых пакетов», движущихся со скоростью

$$(\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1) \tag{104}$$

и не обменивающихся между собой энергией через узловые точки, где их амплитуда равна нулю. Это наводит на мысль, что в представленном интегралом Фурье возмущении общего вида, в котором синусоидальные составляющие с близкими волновыми числами действительно имеют примерно одинаковые амплитуды, энергия, соответствующая этим волновым числам, может переноситься со скоростью (104), предел которой при $k_2 \to k_1$ является, в соответствии с (94), групповой скоростью.

Хотя приведенное выше рассуждение является чересчур специальным, оно содержит идею, пригодную для применения в намного более общих случаях. Удовлетворяющая условию

$$x/t = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1) \tag{105}$$

точка, в которой «амплитуда» (член в фигурных скобках в (103)) принимает наибольшее значение $2a$, передвигается со скоростью (104) по следующей простой причине: в ней *остаются равными фазы* $\omega_1 t - k_1 x$ и $\omega_2 t - k_2 x$ обоих косинусов в левой части равенства (103), так что оба косинуса достигают своих максимумов всегда вместе, и тогда эти максимумы усиливают друг друга. Здесь мы еще раз (как в конце разд. 1.1) пришли к предварительному представлению (чтобы уточнить его в этом разделе) о том, что различные синусоидальные волны вместо того, чтобы взаимодействовать, ослабляя друг друга, могут накладываться с усилением там, где их *фазы стационарны*.

Теперь мы перейдем от сложения только двух волн к сложению их бесконечного числа, рассмотрев интеграл Фурье

$$\zeta = \int_0^\infty F(k) \exp\{i[\omega(k)\, t - k\boldsymbol{x}]\}\, dk. \tag{106}$$

Эта комбинация синусоидальных волн вида (102) принимает начальное значение [1])

$$f(x) = \int_0^\infty F(k) \exp(-ikx)\, dk \tag{107}$$

в момент $t = 0$. Мы исследуем асимптотическое поведение интеграла (106) для больших t в случае, когда начальное возмущение $f(x)$ локализовано в ограниченной области.

Строго говоря, мы не рассматриваем здесь наиболее общую линейную комбинацию одномерных волн вида (102): дисперсионное соотношение имеет обычно *более* чем одно решение для ω; часто, как в соотношениях (18) или (37), имеется *два решения*, равных по величине и противоположных по знаку. Тогда к общей линейной комбинации (106) волн, бегущих в положительном направлении оси x, может быть добавлена комбинация волн, бегущих в отрицательном направлении оси x:

$$\int_0^\infty G(k) \exp\{i[-\omega(k)\, t - kx]\}\, dk; \tag{108}$$

действительно, ее следует добавить, если необходимо удовлетворить надлежащие граничные условия (определяющие *как* ζ, *так и* $\partial\zeta/\partial t$, т. е. в случае волн на воде — положение и скорость поверхности). Так как, однако, задачи нахождения асимптотической оценки при больших t двух последовательностей волн вида (106) и (108) математически эквивалентны, мы будем рассматривать только выражение (106) для волн, движущихся в положительном направлении оси x.

В (106) мы перепишем фазу в виде $t\psi(k)$, где

$$\psi(k) = \omega(k) - kx/t. \tag{109}$$

Тогда интеграл принимает вид

$$\zeta = \int_0^\infty F(k) \exp[it\psi(k)]\, dk, \tag{110}$$

и мы будем изучать его поведение, когда t становится большим, *для фиксированного значения* x/t. Это соответствует представле-

[1]) Как принято в этой книге, физическая величина $f(x)$ дается действительной частью выражения в правой части равенства (107), в котором не только экспонента, но и амплитуда может быть комплексной (см. ниже (112)). Действительно, это то же самое, что сказать: $2f(x)$ равно интегралу (107), взятому от $-\infty$ до ∞, где $F(-k)$ равно (см. опять (112)) величине, комплексно сопряженной $F(k)$.

нию (разд. 3.6) о «взгляде наблюдателя», движущегося с фиксированной скоростью.

Мы докажем, что при больших t интеграл (110) принимает асимптотическую форму, которая полностью определена набором точек, *в которых фаза* $t\psi(k)$ *стационарна*, т. е. величиной (или величинами) k, при которых $\psi'(k) = 0$. В силу выражения (109) это будет выполняться там, где

$$\omega'(k) = x/t. \tag{111}$$

Это соответствует точкам, по которым, как ожидалось, бежит с групповой скоростью (94) взгляд наблюдателя. Физически идея стационарной фазы состоит в том, что отмечалось выше: большое число различных синусоидальных волн, линейную комбинацию которых образует интеграл типа (110), может иметь довольно широкий набор фаз, что ведет к большому количеству взаимосокращений из-за ослабляющего воздействия всюду, *за исключением* тех точек, где стационарность фазы дает возможность взаимного усиления соседних волновых составляющих.

С математической точки зрения возможно наиболее ясное доказательство этого следует из теоремы Коши. При доказательстве предполагается, что $\omega(k)$, а значит, и $\psi(k)$ являются аналитическими функциями от k. Если начальное возмущение $f(x)$ локализовано в ограниченной области, то из (107) следует, что его преобразование Фурье

$$F(k) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ikx)\, dx, \tag{112}$$

даваемое интегралом только по конечному интервалу, также является аналитической функцией. Следовательно, к интегралу (110) может быть применена теорема Коши с тем, чтобы заменить путь интегрирования вдоль действительной оси k, на которой $\psi(k)$ действительна, на путь, на котором $\psi(k)$ имеет положительную мнимую часть. *Положительность* нужна для того, чтобы уменьшить абсолютную величину подинтегрального выражения в интеграле (110) при больших t.

Действительно, такое изменение пути интегрирования легко сделать во всех точках, кроме стационарных точек функции $\psi(k)$. Предположим, например, что стационарных точек нет, т. е. всюду $\psi'(k) > 0$ (обычно это имеет место, скажем, при $x = 0$). Тогда мы *поднимаем* путь интегрирования, т. е. к каждому действительному k мы добавим малую положительную мнимую часть, которая (из-за того, что $\psi' > 0$) сделает мнимую часть функции $\psi(k)$ положительной.

Заметим, что на пути интегрирования, на котором мнимая часть функции $\psi(k)$ равна по крайней мере δ, абсолютная величина $\exp[it\psi(k)]$ не превышает $\exp(-t\delta)$. Тогда интеграл (110) также экспоненциально мал для больших t. Действительно, его величина составляет $O[\exp(-t\delta)]$ в том смысле, что ее абсолютное значение удовлетворяет неравенству

$$\left|\int_0^\infty F(k)\exp[it\psi(k)]\,dk\right| \leqslant [\exp(-t\delta)]\int_0^\infty |F(k)|\,dk \qquad (113)$$

в силу теоремы о том, что абсолютное значение любого *интеграла* не превышает интеграла от абсолютной величины подинтегральной функции. Таким образом, в тех случаях, когда фаза $\psi(k)$ не имеет стационарных точек, ослабляющее взаимодействие настолько интенсивно, что возмущения становятся экспоненциально малыми.

Доказательство для случая, когда всюду $\psi'(k) < 0$ (как может оказаться при *больших* x/t), проводится аналогично, за исключением того, что теперь путь интегрирования должен быть *опущен*, чтобы мнимая часть функции $\psi(k)$ стала равна положительной величине δ. Действительно, чтобы достичь этого, необходимо добавить к k мнимую часть, приближенно равную

$$\delta/\psi'(k) \qquad (114)$$

и являющуюся отрицательной, если $\psi'(k) < 0$.

Ситуация, однако, в корне меняется, если $\psi(k)$ обладает стационарной точкой k_0, в которой $\psi'(k_0) = 0$. С одной стороны от точки k_0, где $\psi'(k) < 0$, путь интегрирования должен быть опущен, а с другой стороны, где $\psi'(k) > 0$, он должен быть поднят. Поэтому непрерывность требует, чтобы путь проходил через саму точку k_0, но это противоречит необходимости роста мнимой части по закону, аналогичному (114) при $\psi'(k) \to 0$.

Типичное гиперболическое поведение в окрестности стационарной точки k_0 кривых, на которых мнимая часть от ψ равна δ, показано на рис. 63 для случаев, когда *а* $\psi''(k_0) < 0$ и *б* $\psi''(k_0) > 0$. Формы кривых соответствуют тому, что разложение Тейлора для $\psi(k) - \psi(k_0)$ имеет вид

$$\psi(k) - \psi(k_0) = \frac{1}{2}(k-k_0)^2\psi''(k_0) + O(k-k_0)^3. \qquad (115)$$

Для эффективной оценки интеграла (110) путь интегрирования должен быть изменен так, как это показано на рис. 63.

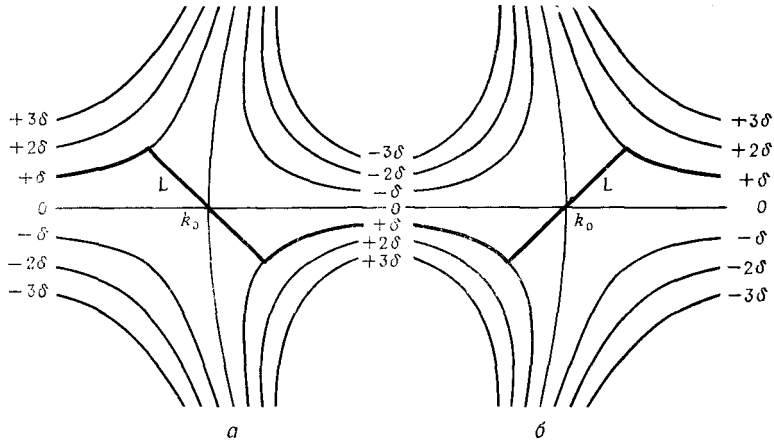

Рис. 63. Типичное поведение фазовой функции $\psi(k)$ в окрестности стационарной точки k_0. На комплексной плоскости k изображены кривые, на которых $\psi(k)$ имеет постоянную мнимую часть (-3δ, -2δ, $-\delta$, 0, $+\delta$, $+2\delta$, $+3\delta$). Случай *а*: $\psi''(k_0) < 0$ (максимум). Случай *б*: $\psi''(k_0) > 0$ (минимум).
Мы можем изменить путь интегрирования в интеграле (110) на такой, на котором мнимая часть функции $\psi(k)$ составит $+\delta$ везде, *за исключением* окрестности такой стационарной точки, где должен быть использован связующий отрезок L, чтобы перескочить с одного пути интегрирования на другой (жирные линии). Случай двух стационарных точек, в котором за максимумом $\psi(k)$ *следует минимум, сводится к комбинированию случаев а и б*. Тогда путь интегрирования в интеграле (110) может быть изменен на тот, который получается *соединением* жирных линий на обоих графиках.

Таким образом, во всех точках, удаленных от стационарной, путь интегрирования заменяется на кривую, на которой мнимая часть функции ψ равна по меньшей мере δ. Это дает очень малый вклад порядка $O[\exp(-t\delta)]$ в интеграл (110), как результат ослабляющего взаимодействия. С другой стороны, возле любой стационарной точки на отрезке L, соединяющем две такие кривые, делается добавочный вклад (который *не* является экспоненциально малым).

Если кривые на рис. 63 рассматривать как «линии уровня», на которых абсолютная величина выражения $\exp[it\psi(k)]$ имеет уменьшенное значение $\exp(-t\delta)$, то отрезок L, показанный для каждого случая, можно считать «траекторией наискорейшего спуска» от k_0 к этим линиям уровня. По этой причине метод изменения пути интегрирования часто называют *методом наискорейшего спуска*.

В случае *б*, например, когда $\psi''(k_0) > 0$, для отрезка L справедлива формула

$$k - k_0 = s \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\right), \tag{116}$$

где s — действительное, и тогда из соотношения (115) получаем

$$\exp[it\psi(k)] = \exp\left[it\psi(k_0) - \frac{1}{2}ts^2\psi''(k_0) + O(ts^3)\right]. \tag{117}$$

Абсолютная величина этого выражения *быстро уменьшается* как для положительных, так и для отрицательных s. Вклад в интеграл (110) за счет интегрирования по отрезку L может быть записан в виде

$$\int_L^{s} \{F(k_0) + O(s)\} \exp\left[it\psi(k_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}ts^2\psi''(k_0)\right](1 + O(ts^3))\, ds \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\right), \tag{118}$$

где $F(k)$ заменено выражением в фигурных скобках и использованы соотношения (116) и (117). Здесь пределы интервала интегрирования расширяются в область, где величина подинтегрального выражения есть $O[\exp(-t\delta)]$ и, как мы уже предположили, мала. Так что не будет совершена ошибка большего порядка, чем эта, если мы оценим интеграл от

$$\exp\left[-\frac{1}{2}ts^2\psi''(k_0)\right]$$

на всем интервале, где он имеет смысл; это будет гауссовский интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}ts^2\psi''(k_0)\right] ds = [2\pi/(t\psi''(k_0))]^{1/2}. \tag{119}$$

Учет величин порядка $O(s)$ и $O(ts^3)$ дает в отличие от этого вклады в интеграл (118) порядка $O(t^{-1})$. Тогда окончательно интеграл по отрезку L с погрешностью $O[\exp(-t\delta)] + O(t^{-1})$ равен

$$F(k_0)[2\pi/(t\psi''(k_0))]^{1/2} \exp\left\{i\left[t\psi(k_0) + \frac{1}{4}\pi\right]\right\}. \tag{120}$$

Таков асимптотический вклад в интеграл (110) от любой стационарной точки функции ψ, в которой $\psi''(k_0) > 0$.

На рис. 63,*а* видно, что у стационарной точки, в которой $\psi''(k_0) < 0$, для отрезка L должна быть справедлива формула

$$k - k_0 = s \exp\left(-\frac{1}{4}\pi i\right). \tag{121}$$

Тогда соотношения (117)—(120) справедливы при замене $\exp[(1/4)\pi i]$ на $\exp[-(1/4)\pi i]$ и $\psi''(k_0)$ на $-\psi''(k_0)$ (величина которой в этом случае совпадает с $|\psi''(k_0)|$. Используя функцию $\operatorname{sign}\psi''(k_0)$, которая равна $+1$ при $\psi''(k_0) > 0$ (так что при k_0 будет минимум ψ) и -1 при $\psi''(k_0) < 0$ (так что при k_0 будет максимум), мы можем сказать, что общий асимптотический вклад от стационарной точки составляет

$$F(k_0)\,[2\pi/(t\,|\,\psi''(k_0)\,|)]^{1/2}\exp\left\{i\left[t\psi(k_0)+\frac{1}{4}\pi\operatorname{sign}\psi''(k_0)\right]\right\}. \tag{122}$$

Интеграл (110) асимптотически равен величине (122) в стационарной точке k_0 (где $\psi'(k_0) = 0$), если она только одна, или в противном случае сумме величин (122) по всем стационарным точкам при условии, что $\psi''(k_0)$ не равно нулю ни в одной из них. О видоизменениях анализа для случая, когда $\psi''(k_0)$ равно нулю (а это означает, что угол наклона траектории наискорейшего спуска должен выбираться по-другому), см. разд. 4.11.

После использования подстановки (109) получаем асимптотическую форму интеграла (106) для больших t

$$F(k_0)\,[2\pi/(t\,|\,\omega''(k_0)\,|)]^{1/2}\exp\left\{i\left[\omega(k_0)\,t-\right.\right.$$
$$\left.\left.-k_0x+\frac{1}{4}\pi\operatorname{sign}\omega''(k_0)\right]\right\}, \tag{123}$$

где k_0 — волновое число, для которого

$$\omega'(k_0) = x/t. \tag{124}$$

Таким образом, как и ожидалось, волны с волновым числом k_0 находятся в точках, движущихся вперед с групповой скоростью $\omega'(k_0)$. Заметим также, что если уравнение (124) имеет два решения (как в случае волн ряби со значениями длин волн, лежащих по обе стороны от того, при котором достигается минимум групповой скорости), то вклад вида (123) существует для каждого из них: волны с различными волновыми числами, но с одинаковой групповой скоростью находятся в одном и том же месте.

С использованием обозначения (89) выражение (123) означает, что в каждом случае амплитуда ζ_1 возникших волн принимает вид

$$\zeta_1(x,\ t) = |F(k_0)|\,[2\pi/(t|\omega''(k_0)|)]^{1/2}, \tag{125}$$

тогда как их фаза α будет

$$\alpha(x,\ t) = \omega(k_0)\,t - k_0x + \arg F(k_0) + \frac{1}{4}\pi\ \operatorname{sign}\omega''(k_0), \tag{126}$$

где k_0 определяется из уравнения (124). Заметим, что такая фаза α действительно асимптотически удовлетворяет уравнениям (88), так как для малых изменений x и t мы имеем

$$d\alpha = [\omega'(k_0)\, dk_0]\, t + \omega(k_0)\, dt - (dk_0)\, x - k_0\, dx + O(t^{-1}), \quad (127)$$

где первый и третий члены в правой части взаимно уничтожаются в силу (124). Отсюда легко получить

$$\omega''(k_0)\, dk_0 = t^{-1}\, [dx - \omega'(k_0)\, dt]. \quad (128)$$

Это выражение дает ошибку при изменениях $\arg F(k_0)$ в (127). (*Эти* изменения отсутствуют, однако, если начальное возмущение $f(x)$ симметрично относительно точки $x = 0$, в силу чего $F(k)$ становится действительной согласно (112).) Интерпретация амплитуды $\zeta_1(x, t)$ на основе энергетического анализа дана в разд. 3.8.

Выше были приведены рассуждения для незатухающих волн. Легко, однако, выработать видоизмененную теорию в предположении, что затухание имеется, но мало (как для большинства волн на воде). Результатом будет то же выражение (123), но с дополнительным множителем, описывающим рассеяние волн с волновым числом k_0 за время t.

Действительно, если $\exp[-t\sigma(k)]$ — такой дополнительный множитель, дающий уменьшение за время t амплитуды волны вида (102) с волновым числом k, то этот множитель должен быть включен в интеграл (106), даже если формула (107) для начального возмущения остается неизменной. Тогда анализ асимптотического поведения интеграла (110) проводится с сохранением фазы $t\psi(k)$ в подынтегральной функции, но с заменой амплитуды $F(k)$ на $F(k) \exp[-t\sigma(k)]$; конечным результатом будет выражение (123) с такой же заменой для $F(k)$. Тогда фаза цепочки волн не отличается от фазы (126), но формула (125) для амплитуды заменится на такую:

$$\zeta_1(x,t) = |F(k_0)|\, \{\exp[-t\sigma(k_0)]\}\, [2\pi/(t|\omega''(k_0)|)]^{1/2}. \quad (129)$$

Все результаты этого раздела могут быть доказаны совершенно другим способом с использованием теории функций действительного переменного. Идея состоит в замене переменной интегрирования в интеграле (110) на ψ, так что интеграл становится преобразованием Фурье от $F(k)dk/d\psi$ относительно ψ. Здесь используется общая теория асимптотического поведения преобразования Фурье, для того чтобы это преобразование асимптотически выразить суммой членов, соответствующих точкам сингулярности функции $F(k)\, dk/d\psi$, в которых $d\psi/dk = 0$.

Однако в этом разделе принято доказательство, основанное на теореме Коши, так как в ней используются более доступные понятия, нежели понятия общей теории.

3.8. Скорость переноса энергии

Согласно результатам двух последних разделов, групповая скорость

$$U(k) = d\omega/dk$$

является скоростью переноса *энергии* в волнах с волновым числом k. Такая интерпретация основывается на представлении о том, что в системе, описываемой линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, энергия не может передаваться от одной части спектра к другой. Поэтому траектория вида (95), в точках которой находятся волны с волновым числом k, должна быть траекторией, вдоль которой переносится энергия волн с этим волновым числом.

Формула (129) основательно подтверждает эту гипотезу. Для любой распространяющейся волны, описываемой линейными уравнениями, полная энергия волн E_w должна зависеть от квадрата возмущения и иметь вид

$$E_w = \int_{-\infty}^{\infty} C\zeta^2\, dx, \tag{130}$$

где множитель C не должен зависеть от x для однородной системы. (Например, для гравитационных волн, движущихся в канале ширины b, будет $C = \rho g b$, так как энергия волн на единицу площади составляет удвоенную потенциальную энергию, вычисленную по формуле (24).) Соотношение (107) для начальной формы волны дает, таким образом, по теореме Парсеваля формулу

$$E_w = C \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\pi C \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2\, dk = \pi C \int_{0}^{\infty} |F(k)|^2\, dk; \tag{131}$$

правая часть формулы (131) является интегралом от четной функции от k, так как в силу соотношения (112) $F(-k)$ есть комплексно сопряженная для $F(k)$.

Формула (131) означает, что энергия волн с волновыми числами, заключенными между k_0 и $k_0 + dk$, после умножения на множитель затухания $\exp[-2t\sigma(k_0)]$ будет равна

$$\pi C \mid F(k_0) \mid^2 \exp[-2t\sigma(k_0)]\, dk. \tag{132}$$

Если *эта энергия в асимптотическом смысле сосредоточена* в интервале от $x = t\omega'(k_0)$ до $x = t\omega'(k_0 + dk)$ длиной

$$|t\omega'(k_0) - t\omega'(k_0 + dk)| = t\,|\omega''(k_0)|\,dk, \tag{133}$$

то на единицу длины приходится энергия

$$\pi C\,|F(k_0)|^2 \{\exp[-2t\sigma(k_0)]\}/(t|\omega''(k_0)|). \tag{134}$$

Но в силу (130) энергия на единицу длины равна умноженному на C среднеквадратичному значению ζ или $(1/2)\,C\zeta_1^2$ для синусоидальных волн с амплитудой ζ_1. Сравнение этого выражения с (134) дает

$$\zeta_1 = |F(k_0)| \{\exp[-2t\sigma(k_0)]\}\,[2\pi/(t|\omega''(k_0)|)]^{1/2}, \tag{135}$$

что полностью согласуется с формулой (129) и довольно серьезно косвенно подтверждает энергетическую гипотезу!

Более того, простая теория из разд. 3.6 может быть расширена и на неоднородные системы, а результаты все еще будут согласованы с представлением о том, что U является скоростью переноса энергии. Рассмотрим, например, уже упомянутые в разд. 3.3 волны, распространяющиеся на воде уменьшающейся глубины. Предположим, что глубина h уменьшается настолько медленно в масштабе длины волны, что дисперсионное соотношение (35), полученное для случая воды постоянной глубины h, служит хорошим приближением в каждой точке с локальным значением h. Предположим далее, что $h = h(x)$, так что глубина меняется только в перпендикулярном гребням направлении. Тогда (35) принимает вид *неоднородного дисперсионного* соотношения

$$\omega = \omega(k, x). \tag{136}$$

Для любой системы, в которой справедливо соотношение типа (136), определим групповую скорость как нечто, связанное со свойствами волны *при фиксированном* x:

$$U(k, x) = \partial\omega(k, x)/\partial k. \tag{137}$$

Теперь мы, очевидно, не можем вывести уравнение (93) для k из уравнения (91). Однако можно, умножив уравнение (91)

на U и использовав тот факт, что

$$U\,\partial k/\partial t = \partial\omega/\partial t \tag{138}$$

(так как x сохраняется постоянным в обеих этих производных по времени, а *также* в частной производной (137)), получить

$$\partial\omega/\partial t + U\,\partial\omega/\partial x = 0. \tag{139}$$

Уравнение (139) означает, что ω сохраняется неизменным вдоль траекторий на плоскости $(x,\ t)$, удовлетворяющих равенству

$$dx/dt = U, \tag{140}$$

хотя в неоднородном случае эти траектории и не являются, вообще говоря, прямыми линиями (рис. 64), так как из уравнений (136) и (137) мы не можем сделать вывод, что или U, или k постоянны вдоль траекторий.

Изменение скорости U может быть проще описано, если мы перепишем (136) в виде $k = k\ (\omega,\ x)$, выразив волновое число через частоту. Тогда

$$U^{-1} = \partial k(\omega,x)/\partial\omega, \tag{141}$$

так что траектории (140), на которых ω постоянна, могут быть рассчитаны по формуле

$$t = t_0(\omega) + \int_0^x U^{-1}\,dx = t_0(\omega) + \int_0^x [\partial k(\omega,\ x)/\partial\omega]\,dx, \tag{142}$$

где $t_0\ (\omega)$ — момент времени, в который волна с частотой проходит через точку $x = 0$.

Изменение k представляет собой «преломление» в неоднородной среде. Иллюстрация этого была дана в разд. 3.3, где урав-

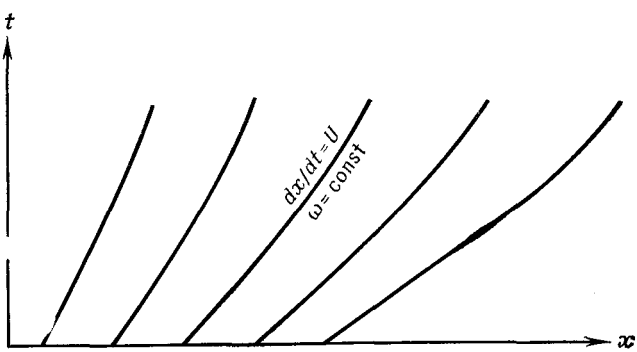

Рис. 64. Явление дисперсии в неоднородной среде изображено на плоскости $(x,\ t)$. Траектории (140) являются кривыми, вдоль которых *частота* ω остается постоянной.

нение (40) использовалось для того, чтобы показать, как волны на глубокой воде с периодом 8 с уменьшаются по длине от 100 до 25 м, когда глубина воды постепенно уменьшается до 1 м.

Однако даже для пространственно неоднородной системы в общей теории малых нормальных колебаний предполагается, что не может быть обмена энергией между модами различной частоты. Поэтому заключение о том, что ω принимает постоянное значение в точках, движущихся вперед с групповой скоростью U, согласуется с представлением о том, что U является скоростью переноса энергии синусоидальными волнами.

Теперь мы проверим эту гипотезу прямым вычислением для синусоидальных гравитационных волн с *постоянным* волновым числом k, распространяющихся по воде *постоянной* глубины h. При исследовании дисперсии эти вычисления уместны, поскольку в группе диспергирующих волн волновое число меняется настолько постепенно, что скорость переноса энергии должна быть локально близка к величине, вычисленной при постоянном k. В теориях, подобных только что рассмотренной, предполагается, что глубина h изменяется настолько постепенно, что локальные свойства волн близки к свойствам волн при постоянном h.

Мы запишем приходящийся на единицу длины гребня поток энергии через вертикальную плоскость $x = \text{const}$ в направлении движения гребней в виде

$$\int_{-h}^{0} p_e \, (\partial\varphi/\partial x) \, dz, \tag{143}$$

где p_e — избыточное давление из формулы (8), а $\partial\varphi/\partial x$ — составляющая скорости в положительном направлении оси x. Интеграл (143), представляющий собой мощность, с которой вода, расположенная в области $x < 0$, действует на воду, расположенную в области $x > 0$, имеет, как и ожидалось, порядок квадрата от возмущения, тогда как любым дополнительным интегралом от $z = 0$ до $z = \zeta$ (высоты свободной поверхности по отношению к ее невозмущенному положению $z = 0$) можно пренебречь, как величиной третьей степени от возмущений.

Для волны, распространяющейся со скоростью c, соотношения (8) и (14) дают

$$p_e = -\rho \, \partial\varphi/\partial t = +\rho c \partial\varphi/\partial x, \tag{144}$$

так что выражение (143) для потока энергии на единицу длины гребня может быть записано в виде

$$2c \int_{-h}^{0} \left[\tfrac{1}{2} \rho \, (\partial\varphi/\partial x)^2 \right] dz, \tag{145}$$

т. е. как произведение $2c$ на кинетическую энергию на единицу площади горизонтальной поверхности, обусловленную только *горизонтальной составляющей* скорости движения воды. Скорость переноса энергии (которую мы обозначим через U, предвидя ее равенство групповой скорости) будет

$$U = \frac{\text{Средняя величина потока энергии на единицу длины гребня}}{\text{Средняя величина энергии волны на единицу площади горизонтальной поверхности}}; \qquad (146)$$

усреднение проводится здесь за период волны. В формуле (146) энергия волны является удвоенной величиной кинетической энергии *как* вертикального, *так и* горизонтального движений (удвоенной потому, что средние значения потенциальной и кинетической энергий равны между собой). Поэтому в силу (145) имеем

$$\frac{U}{c} = \frac{\text{Средняя величина кинетической энергии горизонтального движения}}{\text{Средняя величина кинетической энергии движения воды}}. \qquad (147)$$

Отсюда легко понять, что: (i) $U/c = 1/2$ для глубокой воды, где горизонтальное и вертикальное движения обладают равными средними кинетическими энергиями (см. рис. 50), и (ii) $U/c = 1$ для длинных волн, где почти вся кинетическая энергия обусловлена горизонтальным движением (разд. 2.2). Более того, правая часть легко вычисляется в случае водоема произвольной глубины с использованием формул (41) и (42); она равна

$$\int_{-h}^{0} \operatorname{ch}^2[k(z+h)]\,dz \Big/ \int_{-h}^{0} \{\operatorname{ch}^2[k(z+h)] + \operatorname{sh}^2[k(z+h)]\}\,dz =$$

$$= \int_{-h}^{0} \frac{1}{2}\{\operatorname{ch}[2k(z+h)] + 1\}\,dz \Big/ \int_{-h}^{0} \operatorname{ch}[2k(z+h)]\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\{1 + (2kh)/(\operatorname{sh} 2kh)\} \qquad (148)$$

и в точности совпадает с величиной U/c из формулы (99), полученной совершенно другим методом.

Проведенные выше вычисления потока энергии помимо подтверждения гипотезы о равенстве групповой скорости и скорости переноса энергии дают возможность рассчитать изменение амплитуды волны, движущейся по воде с постепенно уменьшающейся глубиной. Мы знаем, что волна с периодом 8с испытывает четырехкратное уменьшение скорости от 12,5 до 3,1 м/с,

когда глубина уменьшается от больших значений до 1 м (рис. 53). Тем не менее групповая скорость при этом уменьшается только вдвое: от $U = (1/2)\,c = 6{,}2$ м/с на глубокой воде до $U = c = 3{,}1$ м/с длинных волн ($\lambda = 25$ м, а $h = 1$ м). По формуле (146) поток энергии (на единицу длины гребня) равен умноженной на U энергии на единицу площади. Следовательно, для *данного* значения потока энергии (на единицу длины гребня) в направлении к берегу энергия волны на единицу площади W *увеличивается* вдвое при уменьшении глубины до 1 м. Поэтому в силу формулы (28) амплитуда a (наибольший подъем поверхности воды) также увеличивается, правда, только в $\sqrt{2}$ раз. С другой стороны, максимальная крутизна поверхности воды составляет ka и увеличивается в намного большее число раз — в $4\sqrt{2}$ раза. Глаз замечает в первую очередь именно крутизну поверхности воды, и этим объясняется, почему волны кажутся намного большими, когда они начинают двигаться на неглубокой воде.

Осталась еще одна трудная загадка. Почему скорость переноса энергии, которая была определена и вычислена для случая чисто синусоидальных волн с *фиксированным* волновым числом k и фиксированной частотой ω, должна быть равна групповой скорости, все свойства которой были выведены в разд. 3.6 и 3.5 из ее определения как $d\omega/dk$ — отношения *приращений* частоты и волнового числа для близких решений уравнений движения? Наша проверка того, что формулы (148) и (99) дают одинаковый результат, не разрешила этой загадки, так как эти формулы были получены совершенно разными способами: одна — интегрированием $\mathrm{ch}^2\,[k\,(z+h)]$ и $\mathrm{sh}^2\,[k\,(z+h)]$, а другая — дифференцированием $k\,\mathrm{th}\,kh$.

Очевидно, желательно в *общем случае* найти доказательство того, что чисто синусоидальными волнами энергия переносится со скоростью $d\omega/dk$. При этом мы ограничимся (как в разд. 3.7) одномерным распространением в однородной системе без затухания. Тогда синусоидальная волна вида

$$\xi = a \exp\,[i\,(\omega t - kx)] \tag{149}$$

является точным решением линейных уравнений движения, если только ω и k связаны дисперсионным соотношением, которое в этом доказательстве используется в виде

$$k = k\,(\omega). \tag{150}$$

Надо ответить на трудный вопрос: как в такой волне поток энергии через плоскость, например $x = 0$, может быть определен через *приращения* k и ω при переходе к близкому решению волнового типа?

Вот хороший ответ: «Путем введения малой силы, порождающей диссипацию энергии, которая может вызвать малые, *чисто мнимые* изменения в k или ω». Легко можно представить себе достаточно общий путь, как достигнуть этого. Предполагается, что движению каждой частицы среды оказывается сопротивление с силой, равной и противоположной умноженному на β количеству движения. Здесь β — постоянная, намного меньшая, чем ω, которая в конце анализа будет устремлена к нулю.

Будет показано, что для движения с пропорциональной $\exp(i\omega t)$ интенсивностью и с определенной действительной частотой ω постепенное затухание (уменьшение амплитуды по мере движения волны в положительном направлении оси x) обусловлено этой дополнительной диссипативной силой, которая изменяет уравнение движения каждой частицы среды в системе следующим образом. Консервативные силы, действующие на частицу, уравновешиваются не просто инерциальным членом

$$-M\omega^2\mathbf{r}, \tag{151}$$

(где M — масса частицы и $\mathbf{r}$ — вектор ее перемещения), а членом

$$-M\omega^2\mathbf{r} + \beta Mi\omega\mathbf{r}, \tag{152}$$

т. е. инерциальным членом минус демпфирующее сопротивление, равное и противоположное по направлению умноженному на β количеству движения. Изменение, сделанное в выражении (152), по сравнению с (151) *точно такое же, каким оно было бы, если бы* ω^2 было везде заменено (в системе, неизменной в других отношениях) на $\omega^2 - i\beta\omega$. При $\beta \ll \omega$ это равносильно замене ω на $\omega - (1/2)\, i\beta$. Для фиксированного действительного ω система теперь такова, что k заменяется на

$$k(\omega) - \frac{1}{2} i\beta k'(\omega), \tag{153}$$

и мы можем заметить, что здесь появляется желанная производная $dk/d\omega$!

Теперь формула (149) принимает вид

$$\zeta = a \exp\left\{i\left[\omega t - k(\omega)x\right] - \frac{1}{2}\beta k'(\omega)\, x\right\} \tag{154}$$

и показывает существование предусмотренного пространственного затухания (здесь, как и везде, существенна действительная часть выражения справа). Это возмущение имеет при $x > 0$ только конечную энергию, которая может быть вычислена по

формуле (130) как среднее от величины

$$C\int_0^\infty \zeta^2\,dx, \tag{155}$$

которая в свою очередь (поскольку среднее значение $\cos^2(\omega t - kx)$ составляет 1/2) равна

$$\frac{1}{2}C\int_0^\infty a^2\exp\{-\beta k'(\omega)\,x\}\,dx = \frac{1}{2}Ca^2/(\beta k'(\omega)). \tag{156}$$

Теперь легко вычислить поток энергии через плоскость $x = 0$. Так как энергия при $x > 0$ конечна и постоянна, поток энергии через плоскость $x = 0$ должен точно уравновешивать скорость диссипации энергии при $x > 0$. Она равна для каждой частицы величине $\beta M\dot{\mathbf{r}}^2$, так как сила сопротивления равна и противоположна по направлению вектору $\beta M\dot{\mathbf{r}}$. Поэтому суммарная скорость диссипации энергии при $x > 0$ равна умноженной на 2β кинетической энергии или умноженной на β полной (кинетической и потенциальной) энергии. Это равно умноженной на β правой части равенства (156), и в пределе при $\beta \to 0$ (отвечающему случаю точных синусоидальных волн) мы все еще будем иметь конечную величину

$$\frac{1}{2}Ca^2/k'(\omega) \tag{157}$$

для этого потока энергии, которую сравним с энергией на единицу длины (1/2) Ca^2. Таким образом, показано, что скорость переноса энергии, являющаяся отношением этих двух величин, равна в такой *общей* диспергирующей системе величине

$$1/k'(\omega) = d\omega/dk, \tag{158}$$

которая представляет собой групповую скорость.

В разд. 3.6—3.8 была сделана попытка воздать должное емкости понятия групповой скорости путем изучения ее свойств с разных точек зрения. Возможно, разнообразные методы окончательно связываются воедино доказательством, которым только что было завершено это изучение.

3.9. Картины волн, создаваемые препятствиями в стационарном потоке

Волны, изучаемые в большей части этой книги, представляют собой явления *нестационарные* — связанные с ними движения жидкости изменяются во времени; иногда это почти

синусоидальные волны, иногда гораздо менее регулярные. Мы видели, как звук может быть порожден различными нестационарными движениями предмета, погруженного в жидкость. Аналогично, волны на воде могут быть порождены или подобными движениями погруженного предмета, или различными нестационарными возмущениями поверхности воды (штормы, погружение твердого тела и т. д.).

В противоположность этому в настоящем разделе мы опишем очевидно парадоксальный случай волн, которые образуют *совершенно стационарное течение.* Во всех точках потока (включая и те, в которых находятся волны) течение является стационарным: скорость жидкости не меняется со временем. Хотя подъем поверхности и может локально обнаруживать правильное, почти синусоидальное изменение в пространстве, он не обнаруживает никакого изменения во времени: гребни волн всегда остаются на тех же самых местах при движении потока. *Стационарная картина волн порождается* совершенно неподвижным препятствием в потоке. Это препятствие может быть закреплено в потоке или лежать на дне, оно может быть просто местной особенностью дна.

В своем стихотворении «Ручей, текущий к западу» Роберт Фрост [1]) писал

Чернеющие воды, налетая
На затонувший камень, разбивались
И вспять бежали белою волной.
Так белая на черных мчалась вечно,
Не наступая и не отступая...

Постоянство потока поразило его воображение:

Волна та отражается от камня
С тех пор, как реки по земле текут.

Он увидел, что распространение гребня вверх по потоку может в точности сводиться на нет течением вниз по потоку:

Мы все перечим. Белою волной
Ручей течет наперекор себе.

Он образно объяснил происхождение явления:

Вот это устремленье вспять, к истоку,
Наперекор теченью, что несет нас,
Есть дань теченья своему истоку.

---

[1]) Перевод А. Сергеева из книги: Роберт Фрост. Из девяти книг.— М.: ИЛ, 1963.

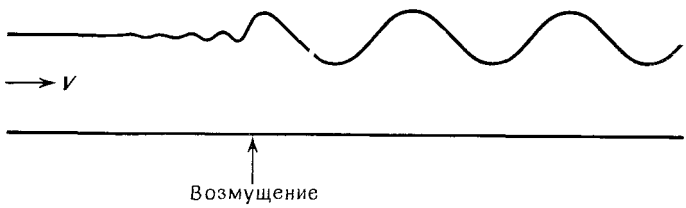

Рис. 65. Схематическое изображение стационарных волн, генерируемых неподвижным препятствием в стационарном потоке, имеющем скорость V. Масштаб вертикального смещения невозмущенной поверхности воды увеличен так, чтобы были отчетливо видны и волны ряби вверх по потоку от препятствия, и большие гравитационные волны вниз по потоку. Препятствие может иметь форму ступеньки дна или цилиндрического тела. Последнее может находиться на дне, в середине толщи воды или на поверхности.

Фрост сравнил ручей с временем, которое несет людей к морю забвения. Возможно, с этих позиций его стихи являются своего рода описанием стационарной картины волн.

Мы изучим сначала очень простую стационарную картину волн — такую, в которой все гребни волн перпендикулярны направлению потока. Такое движение гребней со скоростью волны c в направлении, противоположном потоку, имеющему скорость V, может быть стационарным тогда и только тогда, когда

$$c = V. \tag{159}$$

«Цилиндрическое» препятствие или «ступенька» дна, преграждающие под прямым углом путь потоку, могут породить картину такого типа (рис. 65).

Дисперсионные свойства волн на воде полностью определяют существование картины: скорость c меняется вместе с длиной волны, поэтому с помощью равенства (159) среди всех длин волн отбирается одна (или самое большее две), при которой волны могут быть стационарными.

Заметим, что в соответствии с условием (56) такие волны не могут существовать в *очень медленном* потоке со скоростью $V < 0{,}23$ м/с. Действительно, стационарное распространение гребней волн не прямо вверх по потоку, а под некоторым углом θ к нему также исключается в этом случае из-за того, что должно удовлетворяться равенство

$$c = V \cos\theta, \tag{160}$$

чтобы составляющая скорости потока $V \cos\theta$ в направлении под прямым углом к гребням могла свести на нет движение гребня со скоростью волны c. Равенство (160) показывает, что

$c \leqslant V$ для всех стационарных волн, так что существование стационарной картины в потоке, скорость которого V меньше минимальной скорости волн c_m, невозможно.

Возвращаясь теперь к случаю $\theta = 0$ (гребни перпендикулярны потоку), рассмотрим поток с V, несколько большей, чем c_m. Тогда из рис. 56 следует, что существуют два различных значения длины волны, при которых удовлетворяется условие (159). Это, казалось, должно означать, что мы можем наблюдать не правильные синусоидальные волны, а весьма нерегулярную картину, образованную суперпозицией двух синусоидальных волн несоизмеримой длины.

Тем не менее мы обнаруживаем, что влияние дисперсии (как и ранее) гарантирует, что локально наблюдаемые волны практически синусоидальны. Решающим свойством диспергирующих волн является здесь отличие групповой скорости U, с которой переносится энергия, от скорости волн c. Волны с $\lambda > \lambda_m$ имеют $U < c$, так что энергия переносится в воде со скоростью U, меньшей, чем скорость потока $c = V$. Энергия в таких волнах всегда, таким образом, передается *вниз по потоку*. Соответственно волны обнаруживаются вниз по потоку от препятствия, которое является источником волн. Наоборот, волны с $\lambda < \lambda_m$ имеют U, бóльшую, чем $c = V$, так что их энергия передается *вверх по потоку* от препятствия. В соответствии с этим очень короткие волны ряби и более длинные гравитационные волны находятся *в разных местах*: вверх и вниз по потоку от препятствия соответственно (рис. 65).

Другой, тесно связанный с приведенным способ рассуждений использует систему отсчета, *движущуюся с потоком*. В этой системе отсчета препятствие движется со скоростью V (в направлении «вверх по потоку») в воде, которая находится в покое, за исключением вызванного движением препятствия возмущения. Возникшие более длинные волны со скоростью волны $c = V$, *большей* скорости переноса их энергии U, остаются тогда за препятствием: каждый джоуль энергии волны после того, как он произведен, отстает от препятствия все больше и больше, а энергия волн, находящихся в каждый момент времени непосредственно сзади от него, произведена в последнюю очередь. Энергия таких более длинных волн (по существу гравитационных волн) обычно затухает достаточно медленно (разд. 3.5) и может быть поэтому обнаружена на значительном расстоянии за препятствием. Напротив, энергия волн ряби, для которых c равно V и меньше, чем U, переносится вперед от препятствия, но скорость их затухания гораздо выше, поэтому они не могут уйти далеко вперед от препятствия, не претерпев при этом существенного затухания (рис. 65).

Мощность P_w, которую должно расходовать препятствие, чтобы породить эти волны, может быть легко выписана. Мы обозначали через W энергию на единицу площади, которая, согласно (28), равна (1/2) $\rho g a^2$ для гравитационных волн с амплитудой a и имеет такое же значение для волн ряби, если увеличить g в соответствии с подстановкой (50). Энергия на единицу площади W_d волн, движущихся *вниз по потоку* от препятствия, переносится от него со скоростью $V - U_d$ (где U_d — групповая скорость этих более длинных волн со скоростью волны $c = V$). Энергия W_u на единицу площади волн, движущихся *вверх по потоку* от препятствия, переносится от него со скоростью $U_u - V$. Поэтому мощность, необходимая для образования обеих последовательностей волн, равна

$$P_w = b\,(V - U_d)\,W_d + b\,(U_u - V)\,W_u. \qquad (161)$$

Здесь b — ширина потока, так что скорость возникновения новой возмущенной волнами *поверхности* вверх и вниз по потоку от препятствия составляет $b\,(V - U_d)$ и $b\,(U_u - V)$ соответственно.

Эта мощность P_w не равна, разумеется, полной мощности, необходимой для продвижения препятствия в воде. Дополнительная мощность «трения» P_f связана с возникающим пограничным слоем и спутным следом. «Лобовое сопротивление», или сила сопротивления движению препятствия, часто записывается в виде

$$D = D_w + D_f, \text{ где } VD_w = P_w, \text{ а } VD_f = P_f, \qquad (162)$$

т. е. как сумма «волнообразующего» сопротивления и сопротивления трения. Дополнительная сила *тяги*, которую нужно приложить к препятствию для преодоления не связанного с трением сопротивления D_w, создает мощность $P_w = VD_w$, необходимую для образования волн.

При рассмотрении в *первоначальной* системе отсчета, когда препятствие покоилось, выписанные выше выражения (161) и (162) остаются потенциально полезными: они дают силу, с которой поток действует на препятствие, находящееся, как предполагалось выше, в потоке. В то же время проведенные вычисления для препятствия, движущегося в покоящейся воде, могут быть прямо применены для решения вопроса о сопротивлении движению по каналу широкой баржи, почти полностью заполняющей его по ширине.

Во многих практических случаях важны только движущиеся вниз по потоку гравитационные волны. Это обусловлено тем, что при скорости V, существенно большей, чем $c_m = 0{,}23$ см/с,

капиллярные волны, скорость которых удовлетворяет равенству (159), имеют чрезвычайно малую длину (рис. 56). Препятствия существенных размеров не могут по существу возбуждать такие короткие волны (которые в действительности наблюдаются в основном впереди малых препятствий в относительно медленном потоке). Наоборот, мы увидим, что большое препятствие в потоке или движущаяся вдоль канала широкая баржа могут возбуждать позади себя гравитационные волны с весьма большой амплитудой и с удовлетворяющей равенству (159) скоростью. Как мы укажем при проведении вычислений в одном частном случае в конце этого раздела, для этого требуется, чтобы продольные размеры препятствия хорошо согласовывались с длиной этих волн.

Некоторые интересные следствия вытекают из того факта, что скорость волн на воде глубины h (рис. 52) не может превышать $(gh)^{1/2}$. Это означает, что если скорость потока $V > (gh)^{1/2}$, то не существует решения (159), описывающего волны с перпендикулярными направлению распространения гребнями. Препятствия общей формы еще могут создавать волны с наклонными к направлению движения гребнями, так как уравнение (160) еще может иметь решение. С другой стороны, препятствие, близкое по форме к перекрывающему поток цилиндру и создающее значительные волны с гребнями под прямым углом к потоку, когда $V < (gh)^{1/2}$, не может породить такие волны, когда $V > (gh)^{1/2}$, и обычно создает только слабые наклонные волны. Аналогично, широкая баржа, почти перекрывающая канал, по которому она движется, испытывает внезапное понижение сопротивления, когда ее скорость превышает $(gh)^{1/2}$. Главный член в волнообразующем сопротивлении D_w исчезает, и сохраняется только намного меньший член, обусловленный возникновением наклонных волн по бокам баржи.

Скотт Рассел писал в 1844 г.: «Насколько мне известно, это явление было случайно открыто на канале малых размеров Глазго — Ардроссан. Горячая лошадь, впряженная в лодку Уильяма Хаустона, эсквайра, одного из владельцев предприятия, испугалась и понесла, волоча лодку за собой, и, к своему удивлению, м-р Хаустон увидел, что пенящаяся кормовая волна, которая обычно опустошала берега, исчезла и судно шло по воде сравнительно плавно с очень сильно уменьшенным сопротивлением. М-р Хаустон обладал практичностью и осознал коммерческое значение этого факта для компании канала, с которой он был связан». Он посвятил себя внедрению на этом канале судов, движущихся с такими высокими скоростями, как 9 миль в час, что влекло за собой «большое увеличение доходов владельцев канала».

Для волн *малой* амплитуды механизмы диссипации энергии перечислены в разд. 3.5; однако волны с амплитудой, превышающей некоторое значение, теряют энергию дополнительно за счет вспенивания гребней, как в явлении «белых барашков» на море или как упомянуто в цитате Скотта Рассела. Часто вспенивается только одна, ближайшая к препятствию волна (как фростовская «белая волна»), теряя при этом энергии достаточно для того, чтобы уменьшить амплитуду волн, движущихся дальше вниз по потоку, ниже значения, при котором возникает вспенивание.

Волны, порожденные цилиндрическими препятствиями, либо лежащими поперек стационарного потока, либо, что равносильно, перекрывающими канал, полный воды, по которой они движутся, имеют (как мы видели) много свойств, легко выводимых из дисперсионного соотношения. Расчет их амплитуды может быть, однако, более трудным. Мы завершим описание этих волн, проведя такой расчет в не слишком сложном случае. Мы попытаемся провести вычисления таким образом, чтобы пролить свет на проблему стационарной картины волн в одномерной диспергирующей системе в общем виде и чтобы прояснить природу взаимосвязи между амплитудой волн и продольными размерами препятствия.

Мы изучим волны, возникшие из-за того, что форма дна имеет вид

$$z = -h + f_1(x), \quad f_1'(x) = f(x). \tag{163}$$

Мы придерживаемся линейной теории, предполагая, что как $h^{-1}f_1(x)$, так и *коэффициент наклона* дна $f(x)$ малы. Очевидно, что форма дна «цилиндрическая» (не зависит от y) и вызывает только малые возмущения потока. Возникшие *волны* должны быть сопоставлены с безвихревой частью этих возмущений (разд. 3.1), т. е. с частью, внешней по отношению к придонному пограничному слою. Соответствующее граничное условие для потенциала скорости φ этих возмущений будет

$$[\partial\varphi/\partial z]_{z=-h} = Vf(x), \tag{164}$$

где V — скорость потока вне пограничного слоя, а $f(x)$ — малый коэффициент наклона дна. Заметим, что, поскольку $h^{-1}f_1(x)$ также мало, граничное условие для φ может быть с достаточной точностью наложено и на фиксированном уровне $z = -h$ вместо переменного уровня (163).

Мы укажем метод исследования для одномерной диспергирующей системы общего вида без затухания, в которой волны вида

$$\zeta = a \exp[i(\omega t + kx)], \tag{165}$$

распространяющиеся в *отрицательном* направлении оси x, могут быть сделаны стационарными под действием потока, имеющего скорость V в *положительном* направлении оси x. Мы предполагаем, что для этих волн вида (165) с произвольными ω и k некоторое граничное значение равно

$$\eta = aB(\omega, k) \exp[i(\omega t + kx)] \tag{166}$$

и что диспергирующая система определяется граничным условием $\eta = 0$, так что дисперсионное соотношение имеет вид

$$B(\omega, k) = 0. \tag{167}$$

Таким образом, для волн на воде постоянной глубины h мы могли бы использовать граничное значение

$$\eta = [\partial\varphi/\partial z]_{z=-h} \tag{168}$$

и, применив методы разд. 3.3, легко вычислить из соотношений (10) и (12), что для гравитационных волн

$$B(\omega, k) = i\omega^{-1}(\omega^2 \operatorname{ch} kh - gk \operatorname{sh} kh) \tag{169}$$

(если надо принять во внимание поверхностное натяжение, то должна быть сделана замена (50)). Как и предвиделось, дисперсионное соотношение (35) может быть записано в виде (167).

Теперь мы рассмотрим возникновение стационарных волн в потоке, имеющем скорость V, считая, как и в соотношении (164), что η отлично от нуля и не зависит от времени:

$$\eta = Vf(x) = V\int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx)\, dk. \tag{170}$$

Волны вида (165) в потоке, имеющем скорость V, становятся стационарными, если

$$\omega = kV, \tag{171}$$

так как наложение на систему постоянной скорости V равносильно замене координаты x на $x - Vt$. Следовательно, стационарная синусоидальная волна $\zeta = a \exp(ikx)$ подчиняется граничному условию $\eta = aB(kV, k) \exp(ikx)$. И наоборот, граничное условие $\eta = VF(k) \exp(ikx)$ определяет волну вида $\zeta = VF(k)[\exp(ikx)]/B(kV, k)$, а более общее граничное условие (170) определяет волну вида

$$\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF(k) \exp(ikx)}{B(kV, k)}\, dk. \tag{172}$$

Как и в разд. 3.7, мы находим, что лучший способ оценки этого интеграла — применение теоремы Коши. Для $x > 0$

путь интегрирования должен быть *поднят* на некоторое расстояние $\varkappa$, что придает величине k положительную мнимую часть $\varkappa$, а интеграл становится величиной порядка $O[\exp(-\varkappa x)]$. Для $x < 0$ путь интегрирования должен быть *опущен*, что придает величине k мнимую часть $(-\varkappa)$, а интеграл опять становится малой величиной порядка $O[\exp(\varkappa x)]$. С точностью до этих погрешностей интеграл можно представить *вычетами* подинтегральной функции в *полюсах*, проходимых при деформировании пути. Эти последние, являясь значениями k, при которых $B(kV, k) = 0$, определяют стационарные волны.

В этой очевидно простой программе есть одна маленькая, но очень важная и известная трудность: рассматриваемые полюсы лежат *на* исходном пути интегрирования по k (на действительной оси). Это порождает очевидную неоднозначность ответа, зависящего от того, берется ли исходный интеграл (172) слева или справа от какого-либо полюса (или даже как комбинация этих двух случаев в некоторой произвольной пропорции).

Эта математическая неоднозначность отвечает действительно имеющей место физической неоднозначности задачи при проведенном выше анализе. К волнам, *действительно* порожденным стационарным возмущением потока вида (170), может быть добавлена *произвольная* цепочка стационарных волн, удовлетворяющих условию $\eta = 0$ для всех x (положительных и отрицательных). Они определяются решениями уравнения $B(kV, k) = 0$, и энергия этих волн может быть произведена либо при $x = +\infty$, либо при $x = -\infty$, в зависимости от того, больше или меньше групповая скорость, чем величина V.

Очевидно, математическая задача, определяемая соотношением (170) и имеющая решение вида (172), не является полным представлением физической задачи, которая формулируется так: найти волны, действительно порожденные самим возмущением и подчиняющиеся условию, часто называемому «условием излучения»: волновая энергия «на бесконечности» не создается.

Существует несколько эффективных математических процедур, эквивалентных наложению этого условия излучения; некоторые из них прямо используют понятие групповой скорости. Другие принимают во внимание *затухание* волн, которое всегда должно существовать и которое однозначно сдвигает полюсы с действительной оси. Желательно, однако, иметь метод, который работает даже если затухание не принимается во внимание. Из всех методов следующий, как оказывается, применим во многих полезных случаях (гл. 4).

Идея основана на том, что волны, действительно порожденные стационарной «выпуклостью дна», можно легче всего выде-

лить, если представить, что выпуклость медленно поднимается до своей настоящей высоты в первоначально невозмущенном потоке. Хорошее общее представление этой идеи дается введением медленного экспоненциального возрастания граничного значения η:

$$\eta = [\exp(\varepsilon t)]\, Vf(x) = [\exp(\varepsilon t)]\, V \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx)\, dk. \quad (173)$$

Отыскивая только такие волны, которые возрастают пропорционально $\exp(\varepsilon t)$, но не зависят от времени каким-либо другим образом, мы исключаем опасность получить решение, включающее другие волны с энергией, произведенной «на бесконечности». (Здесь ε — малая величина, которая в конце вычислений будет устремлена к нулю.) Условие (171) заменяется на

$$\omega = kV - i\varepsilon, \quad (174)$$

а решение (172) — на

$$\zeta = [\exp(\varepsilon t)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF(k) \exp(ikx)}{B(kV - i\varepsilon,\ k)}\, dk. \quad (175)$$

Этот интеграл вдоль действительной оси k может быть оценен однозначно, так как полюсы слегка сдвинулись с оси интегрирования. Нуль функции $B(kV - i\varepsilon,\ k)$, соответствующий каждому действительному k_0, удовлетворяющему уравнению

$$B(k_0 V,\ k_0) = 0, \quad (176)$$

находится примерно там, где выполнено условие

$$[(k - k_0)\, V - i\varepsilon]\, [\partial B/\partial\omega]_{k=k_0} + (k - k_0)\, [\partial B/\partial k]_{k=k_0} = 0, \quad (177)$$

т. е. при

$$k = k_0 + i\varepsilon/(V - U), \quad (178)$$

где

$$U = [-(\partial B/\partial k)/(\partial B/\partial\omega)]_{k=k_0} \quad (179)$$

является групповой скоростью (выражением $d\omega/dk$, вычисленным с учетом связи (167)).

Тогда для $x > 0$ путь интегрирования пересекает при поднятии только те полюсы, определяемые формулой (178), для которых $U < V$ (групповая скорость меньше скорости потока). Это дает вклад, равный вычету в каждом из них, умноженному на $2\pi i$. В пределе при $\varepsilon \to 0$ это будет

$$\zeta = \sum_{U<V} \frac{2\pi i VF(k_0) \exp(ik_0 x)}{[V\partial B/\partial\omega + \partial B/\partial k]_{k=k_0}} + O[\exp(-\varkappa x)] \text{ для } x > 0 \quad (180)$$

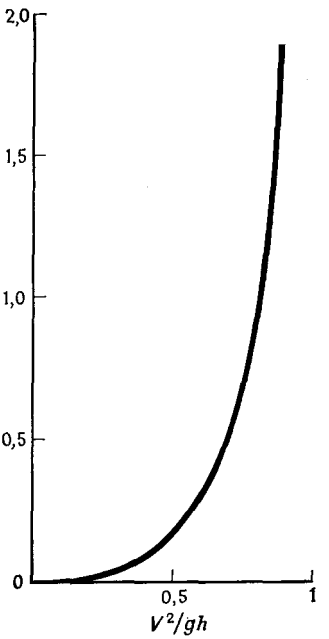

Рис. 66. Зависимость обусловленного неоднородностью дна множителя $\mathrm{sh}\,(k_0h)/[\mathrm{sh}\,(2k_0h) - 2k_0h]$ в выражении (182) для возмущения поверхности воды в стационарном потоке со скоростью V и глубиной h от числа Фруда V^2/gh.

(суммирование проводится по решениям уравнения (176) с положительными или отрицательными k_0 и с $U < V$). Аналогично, для $x < 0$ путь интегрирования при понижении пересекает полюсы с $U > V$. Это дает вклад, равный вычету в каждом из них, умноженному на $-2\pi i$. В пределе это будет

$$\zeta = \sum_{U>V} \frac{(-2\pi i)\, VF(k_0) \exp(ik_0x)}{[V\,\partial B/\partial\omega + \partial B/\partial k]_{k=k_0}} + O[\exp(\varkappa x)] \quad \text{для} \quad x < 0. \quad (181)$$

Эти соотношения подтверждают, что волны с групповой скоростью, превышающей скорость волны (например, короткие волны ряби), расположены вверх по потоку от возмущения, тогда как такие волны, как гравитационные с $U < c$, расположены вниз по потоку.

Единственная новая информация в соотношениях (180) и (181) касается амплитуды волн. В выражении для амплитуды наиболее существен множитель $F(k_0)$. Наличие этого множителя означает, что волны, появившиеся с некоторым волновым

числом k_0, при котором они остаются стационарными, имеют амплитуду, пропорциональную составляющей разложения Фурье волнообразующего возмущения *с волновым числом* k_0. Этим объясняется, почему возмущения больших продольных размеров порождают по существу только гравитационные волны.

Гравитационные волны, возникающие из-за наличия наклона дна формы $f(x)$, в соответствии с формулами (180) и (169), описываются выражением

$$\zeta = \frac{4\pi\left[F(k_0)\exp(ik_0x) + F(-k_0)\exp(-ik_0x)\operatorname{sh}(k_0h)\right.}{\operatorname{sh}(2k_0h) - 2k_0h},$$

где

$$\frac{V^2}{gh} = \frac{\operatorname{th}(k_0h)}{k_0h}. \tag{182}$$

На рис. 66 показано, что это выражение имеет тенденцию к существенному возрастанию для величин V^2/gh, приближающихся к 1 (для которых k_0h относительно мало), однако когда V^2/gh превышает 1, такие перпендикулярные потоку гребни волн наблюдаться не могут (как было обнаружено Уильямом Хаустоном).

3.10. Корабельные волны

В разд. 3.9 мы рассмотрели картину волн, создаваемую неподвижным препятствием в стационарном потоке, и (по существу идентичную) картину волн, создаваемую при движении такого же препятствия в неподвижной воде для ограниченного ряда случаев: гребни волн почти перпендикулярны направлению потока (или движению препятствия), поскольку препятствие практически перегораживает поток (или канал). В этом разделе такое ограничение снимается, и мы изучим намного более общую картину волн, включающую наклонные волны, которые удовлетворяют условию (160) и распространяются под некоторым углом θ к направлению потока (или направлению движения препятствия). Мы будем изучать главным образом картину волн, расходящихся в продольном и поперечном направлениях на большие расстояния, сравнимые с продольными и поперечными размерами препятствия.

Хотя методы анализа дают информацию, прямо применимую к изучению картины волн, создаваемых неподвижным препятствием в потоке (случай, на который делался упор в разд. 3.9), название этого раздела —«Корабельные волны» означает, что он в основном посвящен (по существу идентичной) картине волн,

порожденных *движением* корабля с постоянной скоростью V на широких просторах *спокойной* воды. Эта тема имеет большое практическое значение, так как P_w — мощность, требуемая для создания волн, бегущих от корабля, может составлять значительную часть полной выходной мощности корабельных двигателей.

В этом разделе мы изучим различные свойства корабельных волн, непосредственно следующие из дисперсионного соотношения для волн на воде. Мы укажем также некоторые общие характеристики мощности P_w, включая методы ее определения из модельных экспериментов. Однако мы отложим обсуждение проблемы вычисления мощности P_w или амплитуды корабельных волн, от которой она зависит, до тех пор, пока в гл. 4 не будут развиты некоторые методы.

Формулой (160) устанавливается, что волны с любой скоростью $c \leqslant V$ могут быть стационарными в потоке, имеющем скорость V, при условии, что они распространяются под углом

$$\theta = \arccos(c/V) \tag{183}$$

к направлению потока. Тогда скорость потока имеет перпендикулярную гребню составляющую, равную $V\cos\theta$ и гасящую движение гребня со скоростью волны c.

Условие (183) применяется и к любым волнам, порожденным движением корабля с постоянной скоростью V по спокойной воде. Наиболее очевидный способ убедиться в этом основан на таком доводе: в системе отсчета, в которой корабль покоится, мы имеем обтекающий его стационарный поток воды с невозмущенной скоростью V, и любые гребни волн в этом стационарном потоке должны быть неподвижны. Условие (183) может быть, однако, выведено так же, как эквивалентное условие для излучения звука сверхзвуковым самолетом (разд. 2.14) было выведено из рассмотрения стационарной фазы: фаза сигналов, излученных кораблем в последовательные моменты времени, стационарна в точке P, если составляющая скорости корабля $V\cos\theta$ в направлении к P равна скорости волны.

В случае любых *недиспергирующих* систем (с фиксированной скоростью c), включая акустические, условие (183) при $V \geqslant c$ определяет *единственное* направление излучения. Теоретически недиспергирующая система может иметь место для корабельных волн в предельном случае «длинных волн», когда все излученные волны очень длинны по сравнению с глубиной воды h. Практически, однако, длина волны должна составлять (см. соотношение (38)) по меньшей мере $14h$, и оказывается невозможным рассматривать на воде глубины h настолько длинный корабль, чтобы он порождал волны длиной $14h$ и более!

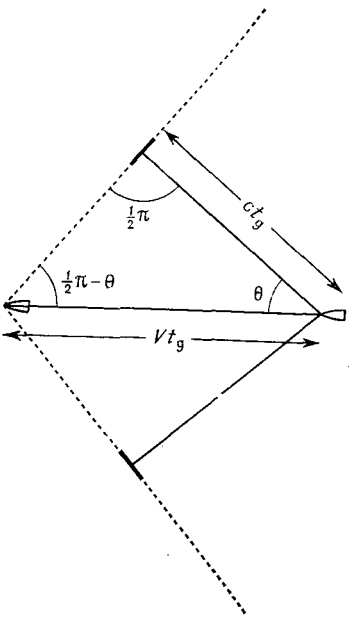

Рис. 67. Волны с постоянной скоростью c, возникшие в волновой кювете при движении маленькой модели корабля со скоростью V. Волны излучаются под фиксированным углом θ, который определяется формулой (183). Жирная линия: волна, которая возникла t_g секунд назад, когда модель была на расстоянии Vt_g сзади. Пунктирная линия: геометрическое место точек всех таких волн. (Заметим, что треугольник с помеченными углами *должен* быть прямоугольным, так как в силу формулы (183) $\cos\theta$ есть отношение катета к гипотенузе.)

С другой стороны, волновая кювета, имеющая глубину 5 мм (разд. 3.4), является весьма пригодной для демонстрации единственности направления излучения по формуле (183) недиспергирующих волн, возбужденных моделью корабля длиной около 50 мм, который движется со скоростью около 0,30 м/с по кювете (скорость волн ряби здесь составляет около 0,22 м/с). При этом возникает почти прямолинейный, подобный «сверхзвуковому удару» сигнал, бегущий от модели под углом (183) по обеим сторонам ее траектории движения через кювету. Действительно, заметим, что в любой момент времени та часть волны, которая возникла t_g секунд назад, продвинулась на расстояние ct_g в направлении, определяемом формулой (183), тогда как модель прошла расстояние Vt_g. Таким образом, с помощью простого построения определяем (рис. 67), что эта часть волны рас-

полагается на прямой линии, проведенной к модели под углом $(1/2)\,\pi - \theta$ (известным в аэродинамике как угол Маха).

Для корабельных волн намного более интересен *другой* предельный случай (волн на глубокой воде), так как обычно длина корабля, движущегося по воде глубины h, такова, что он создает только волны с $\lambda < 3{,}5\ h$. Для таких волн выполняется (см. условие (37)) простое дисперсионное соотношение

$$c = (g\lambda/(2\pi))^{1/2}.$$

Для таких диспергирующих волн соотношение (183) показывает, что волны с различной длиной λ (и следовательно, с различной скоростью c) движутся в различных направлениях, определяемых углом θ. Однако можем ли мы заключить, что так же, как на рис. 67, в каждый момент времени часть волны, возникшая t_g секунд назад, прошла со скоростью c расстояние ct_g в направлении под углом, определяемым формулой (183), тогда как корабль прошел расстояние Vt_g от A до B (рис. 68,*а*)? Если да, то волна находится в точке (скажем) C_1, или C_2, или C_3, и в каждом случае угол ACB прямой (что необходимо, если и $AB\cos\theta = Vt_g\cos\theta$, и AC имеют одно и то же значение ct_g). В силу известного свойства диаметра окружности геометрическим местом точек C, таких, что ACB образует прямой угол, является окружность с диаметром AB (рис. 68,*а*).

Каждый прочитавший четыре предыдущих раздела, несомненно, ответит на поставленный в последнем абзаце вопрос решительным «нет»! Такой читатель знает, что за t_g секунд энергия, вкладываемая в волны, имеющие скорость c, *не* переносится на расстояние ct_g; она переносится на расстояние Ut_g, где U — групповая скорость. Для волн на глубокой воде $U = (1/2)\,c$; следовательно, вся энергия волны, произведенная t_g секунд назад, переносится точно на половину расстояния, указанного на рис. 68,*а*.

Действительное место сосредоточения энергии волн получится поэтому (рис. 68,*б*), если мы с коэффициентом 1/2 сожмем в направлении точки A найденное ранее геометрическое место точек (окружность с диаметром AB). Оно становится окружностью с диаметром AD, где D — середина отрезка AB, а волны находятся в точках (скажем) E_1, или E_2, или E_3, на полпути до точек C_1, или C_2, или C_3, которых они *достигли бы*, если бы энергия переносилась со скоростью распространения гребней. Волны, находящиеся в E_1, распространяются под относительно малым углом θ к направлению движения корабля и имеют относительно высокую скорость волны $c = V\cos\theta$, а следовательно, являются более длинными в картине волн, тогда как

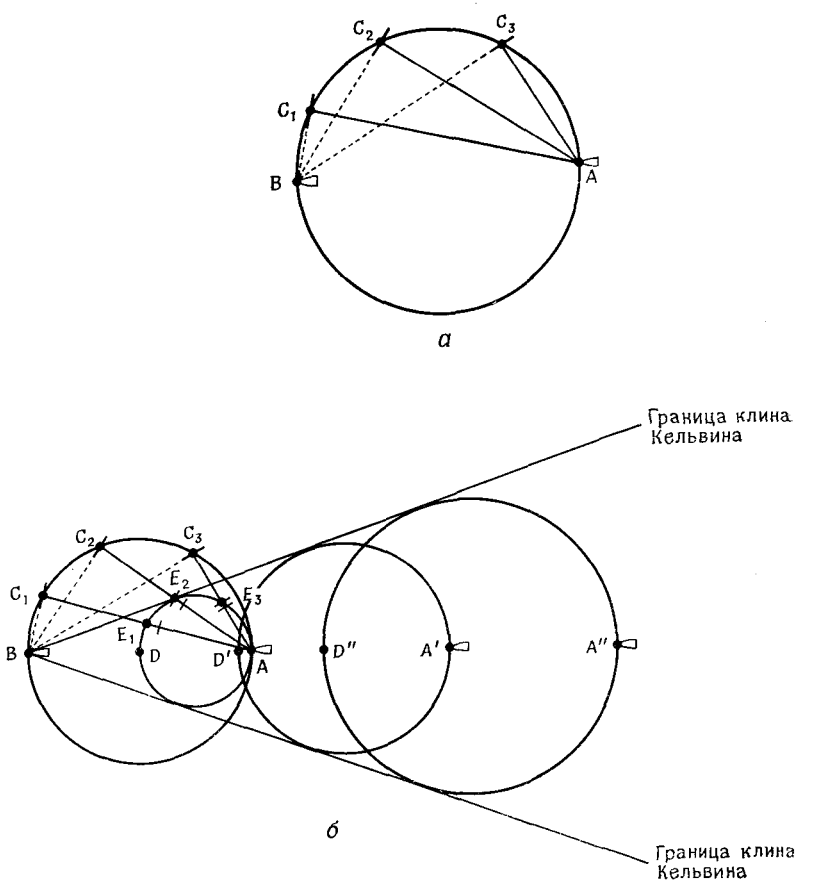

Рис. 68. Волны на глубокой воде, созданные кораблем B. Случай *а*: положения C_1, C_2, C_3 волн, созданных t_g секунд назад (когда корабль был в точке A), если бы их энергия переносилась на расстояние ct_g. Случай *б*: действительные положения E_1, E_2, E_3 этих же волн, полученные с учетом того, что их энергия переносится на расстояние только $(1/2)\,ct_g$. В каждом случае показана зависимость длины волны от направления излучения, которая следует из формулы (183). Окружность с диаметром AD является геометрическим местом точек всех таких волн. На других таких окружностях с диаметрами A′D′ и A″D″ находятся теперь волны, возникшие тогда, когда корабль был в точках A′ и A″. Все такие окружности лежат внутри клина Кельвина с углом полураствора, даваемым формулой (184).

волны, находящиеся в E_3, имеют *меньшую* скорость c и *много* меньшую длину $\lambda = 2\pi c^2/g$.

В каждый момент времени полная картина корабельных волн охватывает волны, созданные во все предыдущие мгновения. Те волны, которые были созданы, когда корабль находился в каждой конкретной точке A, A′, A″, . . . своего пути, лежат на окружностях с диаметрами AD, A′D′, A″D″, . . ., где D, D′, D″, . . . находятся точно на полпути до B, настоящего местоположения корабля.

Касательная к окружности диаметра AD, проведенная через точку B, образует с траекторией корабля угол

$$\arcsin(1/3) = 19{,}5^\circ, \tag{184}$$

поскольку BD = AD, так что центр этой окружности удален от точки B на расстояние трех радиусов (1/2) AD. Полная картина распределения волновой энергии, охватывающая все окружности, лежит поэтому внутри клина (*клин корабельных волн Кельвина*) с углом полураствора 19,5°. Все окружности, показывающие распространение энергии волн, возникающих в различные моменты времени, касательны к этому клину.

Волны на границе самого клина (например, в точке E_2) распространяются под углом

$$\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right] = 35^\circ \tag{185}$$

к траектории корабля со скоростью волны $c = 0{,}816\ V$ и длиной волны, равной двум третям от максимальной длины волны $2\pi V^2/g$. Эти граничные волны (их гребни составляют с траекторией корабля угол (1/2) $\pi - \theta = 55^\circ$) видны на картине волн наиболее отчетливо, поскольку внутри клина наложение более длинных (таких, как в точке E_1) и более коротких волн (таких, как в точке E_3) может образовывать сложную структуру.

Исключения из сделанного утверждения могут возникнуть в случае, когда длина корабля l *велика по сравнению* с V^2/g. Как показано для более простого случая в разд. 3.9, движение корабля порождает волны преимущественно с теми длинами, которые преобладают в разложении Фурье произведенного им возмущения воды, а они оказываются величинами того же порядка, что и длина корабля l. Если последняя *велика* по сравнению с V^2/g, то в картине волн должны преобладать те из них, которые имеют длину, близкую к максимально возможной $2\pi V^2/g$, и движутся под *малыми* углами к траектории корабля.

Еще одно исключение появляется, когда l мало по сравнению с V^2/g, как в случае быстроходного катера. Тогда в картине

волн преобладают те из них, длина которых много меньше максимальной $2\pi V^2/g$. Это волны, распространяющиеся под большим углом к траектории корабля, т. е. подобные волнам, находящимся в точке E_3, *гребни* которых образуют малые углы с траекторией.

Сделанные выше замечания говорят о том, что природа картины волн решающим образом зависит от отношения

$$V^2/(gl), \tag{186}$$

часто называемого *числом Фруда*. В случае малых чисел Фруда могут преобладать более длинные волны с почти перпендикулярными к траектории корабля гребнями, а в случае больших чисел Фруда — более короткие волны, гребни которых образуют малые углы с траекторией корабля. С другой стороны, для широкого диапазона промежуточных значений числа Фруда может быть хорошо видна полная клинообразная картина волн, а наиболее заметными являются гребни, находящиеся на ее границе и образующие с траекторией корабля угол 55°.

Вывод о том, что картина корабельных волн зависит от числа Фруда (186), имеет большое практическое значение. Он означает, что при разработке новой конструкции корпуса корабля хорошая оценка P_w — мощности, необходимой для создания корабельных волн,— может быть сделана в результате экспериментов с уменьшенными моделями, имеющими форму корпуса. Для геометрически подобной модели корпуса с длиной, сокращенной во много раз по сравнению с l, число Фруда (186) будет тем же самым (т. е. будет давать геометрически подобную картину волн), если V^2 уменьшено в такое же число раз (скажем, при движении измененной в масштабе 1/100 модели скорость уменьшается в десять раз).

Такое же заключение получается с помощью формального метода теории размерностей. Мощность P_w, расходуемая геометрически подобными моделями длиной l, движущимися со скоростью V, на создание картины *гравитационных* волн на глубокой воде с плотностью ρ должна зависеть только от 4 переменных: l, V, g и ρ. Поэтому отношение

$$P_w/(\rho V^3 l^2) \tag{187}$$

является *безразмерной* величиной, зависящей только от этих 4 переменных. Согласно теории размерностей, каждая безразмерная величина, зависящая только от этих 4 переменных, должна быть функцией любой одной безразмерной величины, поскольку $4 - 3 = 1$. В частности, отношение (187) должно быть функцией числа Фруда (186).

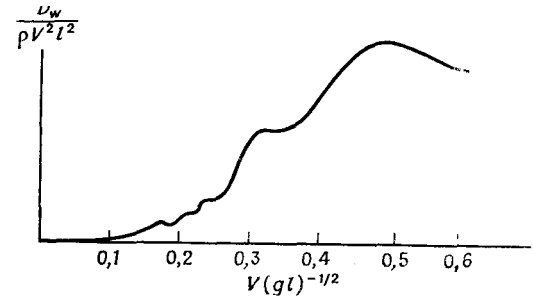

Рис. 69. Типичные результаты измерений зависимости коэффициента волнового сопротивления (188) от $V/(gl)^{-1/2}$ — корня квадратного из числа Фруда (186) — для корабля длины l, движущегося со скоростью V. (Заметим, что число Фруда определяют по-разному и часто величину $V(gl)^{-1/2}$ также называют числом Фруда.) Масштаб по оси ординат не приведен, поскольку он изменяется в зависимости от особенностей формы корабля (таких, как отношение ширины к длине) в гораздо большей степени, чем показанная типичная зависимость от числа Фруда.

Для опыта с моделями отношение (187) обычно переписывают в виде коэффициента волнового сопротивления

$$D_w/(\rho V^2 l^2), \tag{188}$$

где $D_w = V^{-1}P_w$ — волнообразующая составляющая полного сопротивления движению корабля D (как и в формуле (162)). Чтобы найти D_w, необходимо измерить D и вычесть из него сопротивление трения D_f, т. е. сопротивление, которое испытывала бы модель, если бы она не порождала волн. Один из способов измерения сопротивления трения для погруженной части корпуса состоит в добавлении к ней перевернутой, но совпадающей с ней в других отношениях формы, которая является ее зеркальным отражением относительно поверхности воды; эта сдвоенная модель продвигается в глубокой кювете со скоростью V в условиях полного погружения. Волны при этом не образуются, и измеренное сопротивление составляет $2D_f$.

На рис. 69 показаны типичные результаты измерения зависимости коэффициента волнового сопротивления (188) от числа Фруда (186). Для грузовых судов экономическое преимущество повышения скорости (больше рейсов в год) начинает сводиться на нет из-за больших дополнительных расходов горючего вследствие повышения волнового сопротивления при числе Фруда, несколько меньшем тех значений, при которых кривая

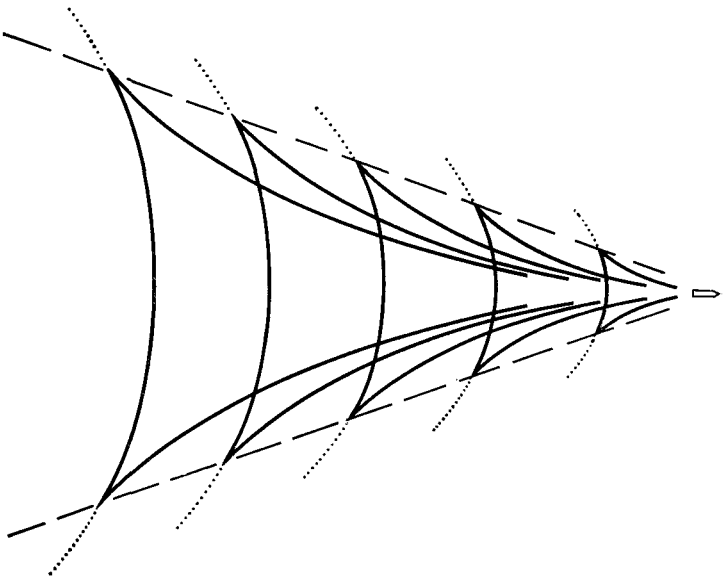

Рис. 70. Сплошные линии — картина корабельных волн Кельвина. Штриховые линии — граница клина Кельвина. Пунктирные линии — продолжения волн за границу клина Кельвина согласно теории, изложенной в разд. 4.11 и 4.12.

начинает круто возрастать. Это вынуждает конструировать корпус с такими формами, при которых указанный крутой рост сдвинут в сторону относительно *больших* значений числа Фруда. Некоторые теоретические исследования, имеющие отношение к конструированию таких корпусов, приведены в гл. 4.

Мы завершим этот обзор простых следствий из дисперсионного соотношения расчетом формы гребней в картине корабельных волн Кельвина. Если начало координат поместить в точку настоящего местоположения корабля (который, как предполагается, движется в отрицательном направлении оси x), то волны, возникшие в момент, когда он был в точке, скажем,

$$x = Vt_g = X, \tag{189}$$

находятся теперь в точках

$$x = X\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta\right) \quad y = \frac{1}{2}X\cos\theta\sin\theta, \tag{190}$$

где θ, как и ранее,— угол, определяющий направление распространения волны. Это следует из того, что на рис. 68,*а* расстоя-

ние AC равно $X\cos\theta$, и поэтому на рис. 68,*б* расстояние AE равно $(1/2)\,X\cos\theta$.

Если нам нужно начертить форму гребней в картине корабельных волн, мы должны принять во внимание, что гребень, проходящий через точку (190), образует с осью x угол $(1/2)\,\pi - \theta$. Следовательно, тангенс угла его наклона будет

$$dy/dx = \operatorname{ctg}\theta. \tag{191}$$

Двигаясь вдоль гребня, мы видели бы его части, которым соответствуют различные точки его возникновения $(X, 0)$ и направления распространения θ. Однако в каждой точке тангенс угла наклона гребня должен удовлетворять равенству (191). Подставляя в равенство (191) выражения (190) для x и y, мы получаем после некоторых упрощений

$$dX/d\theta = -X\operatorname{tg}\theta. \tag{192}$$

Это простое дифференциальное уравнение, связывающее изменение X и θ вдоль гребня, имеет решение

$$X = X_1\cos\theta, \tag{193}$$

где X_1 — постоянная. Тогда в силу (190) форма гребней дается параметрическими уравнениями

$$x = X_1\cos\theta\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta\right), \qquad y = \frac{1}{2}X_1\cos^2\theta\sin\theta. \tag{194}$$

На рис. 70 показаны кривые, определяемые уравнениями (194) при нескольких различных значениях постоянной X_1; они дают представление о форме гребней в картине корабельных волн Кельвина. Конфигурации всех гребней имеют точки возврата на границе клина. Пунктирными линиями представлены их продолжения за пределы этой границы, поскольку, как мы увидим в гл. 4, амплитуда волны за этой границей — «каустикой»— не спадает скачком до нуля, а убывает экспоненциально. Внутри клина более длинные волны, распространяющиеся под малыми углами θ, и более короткие, распространяющиеся под большими углами θ, часто налагаются друг на друга при промежуточных числах Фруда (рис. 71). Однако при малых числах Фруда преобладают более длинные волны, и, наоборот, при больших числах Фруда, характерных для движения быстроходного катера, преобладают более короткие волны. Методы исследования изменения картины корабельных волн Кельвина при действии эффектов мелкой воды (за счет которых клин становится шире) приведены в гл. 4.

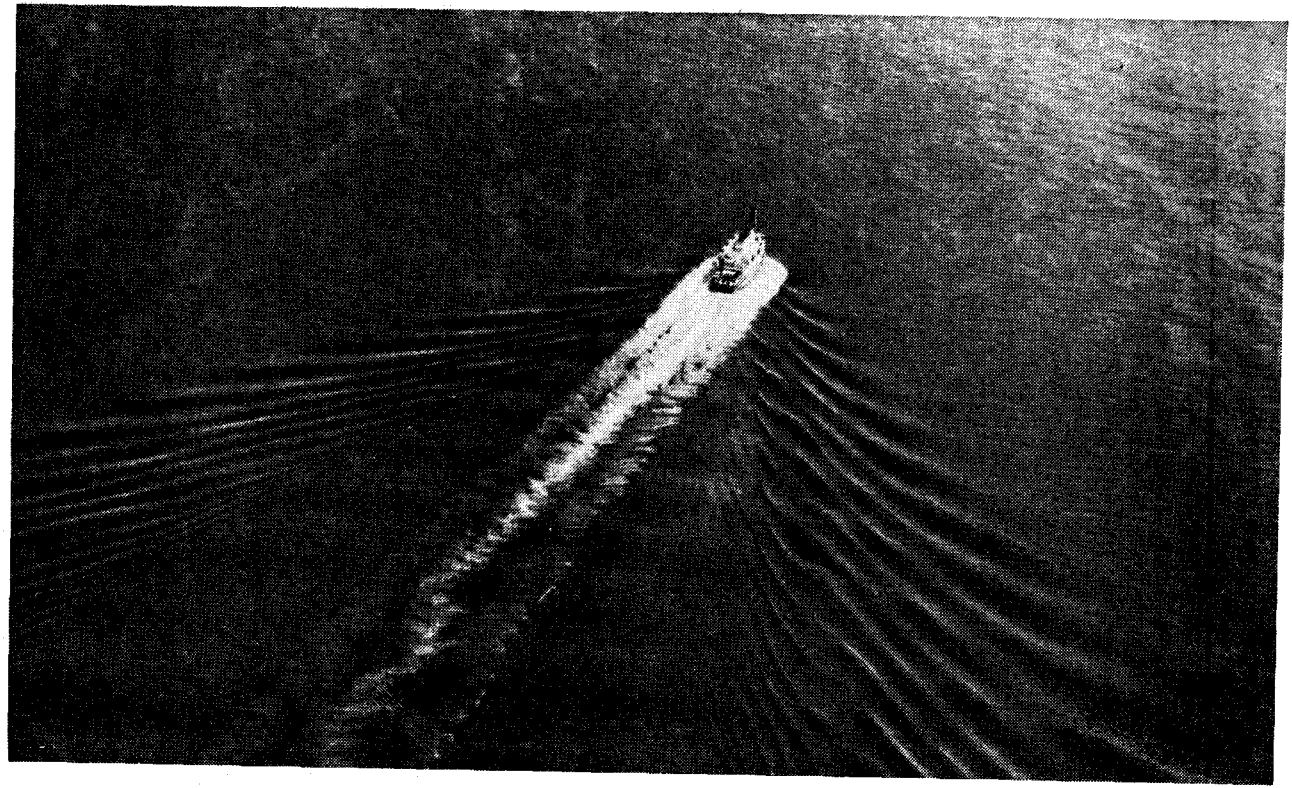

Рис. 71. Наблюдаемая картина корабельных волн. [Любезно предоставлено Aerofilms Ltd.]

Упражнения к главе 3

1. Общей характеристикой линейных теорий волнового движения является то обстоятельство, что в них линейная комбинация волн равной амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях, может образовывать *стоячую волну*. (Такие стоячие волны не надо, конечно, путать со *стационарными* волнами из разд. 3.9.) Найти потенциал скорости стоячих волн на глубокой воде, если вертикальное смещение свободной поверхности принимает вид

$$\zeta = ae^{i\omega t}\cos kx.$$

Показать, что каждая из линий тока определяется формулой

$$e^{kz}\sin kx = \text{const}$$

и начертить эти кривые. С какой амплитудой колеблется частица, среднее положение которой (x, y, z), на линии тока, проходящей через эту точку?

2. *Прямоугольная глубокая кювета длины l и ширины $b \ll l$ заполнена* водой. Выписать зависимость потенциала скорости φ от произведения тригонометрических функций от x и y, удовлетворяющую граничным условиям на сторонах кюветы $x = 0$, $x = l$, $y = 0$ и $y = b$. Показать, что резонансные частоты кюветы ω имеют вид

$$(g\pi)^{1/2}\,(n^2l^{-2} + m^2b^{-2})^{1/4},$$

где n и m — целые.
При какой наименьшей глубине воды *все* эти резонансные частоты с точностью до 3% даются теорией глубокой воды?

3. На основе линейной теории могут быть правильно вычислены помимо энергии и другие *квадратичные* величины. Предлагаем доказать, что синусоидальная волна, распространяющаяся на глубокой воде со смещением поверхности

$$\zeta = a\cos(\omega t - kx),$$

обладает средним количеством движения в направлении распространения $(1/2)\rho\omega a^2$ на единицу площади горизонтальной поверхности.
На первый взгляд правильность такого вычисления может показаться сомнительной, поскольку такая величина, как количество движения, получаемая интегрированием *первой* степени составляющей скорости, могла бы иметь какое-либо слагаемое порядка a^2, видоизмененное поправками второго порядка к линейной теории. Покажите с помощью следующего метода, что это, однако, невозможно.
Сначала докажите, что периодические волны на глубокой воде должны иметь точно периодический потенциал скорости. Действительно, покажите, что если φ — решение уравнения Лапласа в плоскости (x, z) с периодической составляющей скорости $\partial\varphi/\partial x$ (принимающей в точке $(x + \lambda, z)$ такое же значение, что и в точке (x, z)), то φ может отличаться от периодической функции самое большее на член вида $xf(z)$, который, однако, должен обращаться в нуль, если необходимо, чтобы он удовлетворял уравнению Лапласа

и имел нулевой градиент при $z = -\infty$. Докажите, следовательно, что полное количество движения в каждой фиксированной горизонтальной плоскости $z = \text{const}$ равно нулю. Это означает, что количество движения, подобно приращению потенциальной энергии (24), появляется только потому, что верхняя граница жидкости не является фиксированной горизонтальной плоскостью. Таким образом, количество движения зависит от *произведения* малых величин возмущений состояния покоя и горизонтального положения свободной поверхности и может быть правильно вычислено как величина второго порядка в рамках линейной теории.

Тот же самый метод дает еще больше информации. Покажите, что частицы жидкости, которые в невозмущенном состоянии находились на уровне $z = z_0 < 0$, лежат по линейной теории в момент t на поверхности

$$z = z_0 + ae^{kz_0}\cos(\omega t - kx).$$

Выведите, что те частицы жидкости, которые в невозмущенном состоянии лежали *ниже* уровня $z = z_0$, обладают средним количеством движения

$$\frac{1}{2}\rho\omega a^2 e^{2kz_0}$$

на единицу площади горизонтальной поверхности. Получите затем среднее значение количества движения на единицу объема для частиц жидкости невозмущенного уровня z_0 дифференцированием, дающим их *среднюю горизонтальную скорость* в виде

$$\omega a^2 k e^{2kz_0}.$$

[Эта средняя скорость движения, известного как «стоксовский дрейф», дает поправку второго порядка к траекториям частиц жидкости, которые для линейной теории изображены на рис. 50. В течение каждого периода $2\pi/\omega$ движение частицы жидкости составлено из ее движения по окружности радиуса

$$ae^{kz_0}$$

и из продвижения вперед на расстояние

$$2\pi k a^2 e^{2kz_0},$$

изменяющегося как квадрат этого радиуса. (Этот результат мы можем получить, хотя, может быть, с меньшей убедительностью, по-другому: путем вычисления с учетом членов второго порядка траекторий частиц в поле скоростей, определяемых формулами (21).)

Суммарное продвижение частиц вперед в волнах на глубокой воде вблизи поверхности легко наблюдается в кювете, в которой волны генерируются у одного конца и рассеиваются у другого. Однако с уменьшением глубины воды изложенный выше метод расчета распределения количества движения становится все менее и менее пригодным. Действительно, доказательство строгой периодичности φ становится неверным, и ничто не может предотвратить добавления *равномерного потока* второго порядка к основному, полученному в первом приближении движению жидкости.

Например, в волновой кювете только что упомянутого типа непрерывный «стоксовский дрейф» поверхности воды вызывает подъем

жидкости вблизи пологого берега, что создает градиент давления, порождающий обратное течение жидкости. Оба эти обстоятельства уменьшают поверхностный дрейф и уравновешивают его противоположным течением вблизи дна. Ситуация еще более осложняется тем, что пограничный слой, связанный с этой имеющей одно направление составляющей потока вблизи дна, может стать намного толще «стоксовского пограничного слоя», связанного (разд. 3.5) с периодической компонентой... Все это означает, что вычисление среднего количества движения для периодических волн является простым делом *только* в случае глубокой воды.]

4. Показать, что в воде постоянной глубины h скорость волны может быть стационарной как функция волнового числа тогда и только тогда, когда волновое число k связано с соответствующей величиной для глубокой воды k_m (см. (53)) следующим образом:

$$\frac{k}{k_m}=\left[\frac{\operatorname{sh}(2kh)-2kh}{\operatorname{sh}(2kh)+2kh}\right]^{1/2}.$$

Нарисовать график этой функции, отметив ее поведение при больших и малых kh. Использовать полученную таким образом информацию для проведения доказательства того, что скорость волны имеет только один экстремум (минимум) при любой глубине, большей чем $3^{1/2}k_m^{-1}$ (≈ 5 мм), но не имеет экстремумов для глубин, меньших указанной.

5. Для синусоидальных волн, распространяющихся по воде постоянной глубины h, составляющая скорости по оси x в стоксовском пограничном слое может быть записана в виде

$$u = u_{ex}\{1 - \exp[-(z+h)(i\omega/\nu)^{1/2}]\},$$

где скорость внешнего потока u_{ex} сама пропорциональна $\exp[i(\omega t - kx)]$. Использовать уравнение неразрывности, чтобы найти w — составляющую скорости по оси z — внутри и сразу за границей пограничного слоя.
Вычислить w также и в случае отсутствия какого-либо касательного напряжения, когда мы просто берем $u = u_{ex}$, но налагаем условие нулевой нормальной составляющей скорости ($w = 0$) при $z = -h + \delta_1$. Проверить, что оба расчета дают одинаковые распределения скорости вне пограничного слоя при условии, что δ_1 имеет значение, вычисленное по формуле (68).

6. Большое число одинаковых *математических маятников* длины l с грузами (массы M), расположенными точно вдоль прямой горизонтальной линии L, находится в равновесии. Вдоль прямой L расположена пружина, натяжение которой равно T и к которой прикреплены все грузы.
Масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой грузов. Показать, что поперечные смещения грузов, при которых перпендикулярное к L смещение n-го груза составляет y_n, удовлетворяют уравнениям

$$-M\ddot{y}_n = -Mgl^{-1}y_n + T(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}),$$

если за единицу расстояния принят промежуток между грузами. Рассмотреть распространение волны со смещениями y_n, пропорциональными $\exp[i(\omega t - kn)]$, которое, как можно полагать, имеет *фазовую скорость* $c = \omega/k$. Найти эту фазовую скорость c. Показать, что групповая скорость имеет величину

$$[gl^{-1} + 2M^{-1}T(1 - \cos k)]^{-1/2} M^{-1}T \sin k,$$

и доказать, что она с необходимостью *меньше* фазовой скорости. На основе этого описать, что произойдет с рядом маятников, если по одному из грузов будет сделан слабый поперечный удар.
[Этот эксперимент был придуман Рейнольдсом, который использовал его, чтобы дать аудитории наглядную демонстрацию группы волн, движущейся вперед более медленно, чем отдельные гребни... Интересен предельный случай $T = 0$, при котором групповая скорость уменьшается до нуля. Рейнольдс показывал, что, когда волна распространялась вправо и натяжение пружины неожиданно ослабевало, маятники продолжали колебаться (теперь с частотой, близкой к единственному значению $(g/l)^{1/2}$), так что еще была *видимость* движения гребней направо. Тем не менее движение уже не передавалось к каким-либо маятникам помимо тех, которые уже были в него вовлечены.]

7. Показать, что если метод наискорейшего спуска для оценки интеграла (110) при больших t используется для следующего приближения, то результатом будет асимптотическое выражение (122), которое должно быть умножено на величину

$$1 + \frac{i}{2t}\left[\frac{5\psi'''^2}{12\psi''^3} - \frac{\psi''''}{4\psi''^2} - \frac{F'\psi'''}{F\psi''^2} + \frac{F''}{F\psi''}\right],$$

где все функции вычислены в стационарной точке k_0 (и предполагается, что величины F и ψ'' не равны нулю). Убедиться, что это добавляет к амплитуде (122), которая имеет порядок $t^{-1/2}$, поправку порядка $t^{-3/2}$. Почему эта поправка меньше по порядку величины, чем *возможная* максимальная ошибка $O(t^{-1})$, допустимая при получении оценки (122)?
[Читателю рекомендуется выполнить вычисления в случае $\psi''(k_0) > 0$. Случай $\psi''(k_0) < 0$ приводит к такому же результату, что легче всего увидеть, если поменять знак у $\psi(k)$ и взять комплексно сопряженную величину.]

8. В рамках линейной теории волн на воде решить следующую задачу Коши: считая, что вертикальное смещение водной поверхности ζ и вертикальная скорость $w = \partial\zeta/\partial t$ принимают начальные значения, зависящие только от x, найти вид получившихся в результате волн. Показать, что если

$$\zeta = \int_0^\infty Z(k) \exp(-ikx)\, dk, \qquad w = \int_0^\infty W(k) \exp(-ikx)\, dk$$

в момент $t = 0$, то для получившейся в результате волны (106), распространяющейся в положительном направлении оси x,

$$F(k) = \frac{1}{2}\{Z(k) - i[W(k)/\omega(k)]\}.$$

Поверхность воды переводится из состояния покоя в положение

$$\zeta = 2\varepsilon x\,(x^2 + x_0^2)^{-1}.$$

Здесь x_0 достаточно велико по сравнению с λ_m, чтобы можно было пренебречь поверхностным натяжением (разд. 3.4), но достаточно мало по сравнению с глубиной воды (разд. 3.3), чтобы можно было использовать результаты теории глубокой воды. Представив $F(k)$ как $i\varepsilon \exp(-kx_0)$, показать, что если x и t велики и положительны, то

$$\zeta \sim \varepsilon t\,(\pi g)^{1/2} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{1}{4} gt^2 x_0 x^{-2} + i\left(\frac{1}{4} gt^2 x^{-1} + \frac{1}{4}\pi\right)\right].$$

Вывести, что точка максимума амплитуды волны движется вперед со скоростью $((1/3)\,gx_0)^{1/2}$. Проверить также, что гребни волны движутся в этой точке с вдвое большей скоростью.
Проверить, наконец, что полная энергия волн при $x > 0$ составляет половину начальной потенциальной энергии смещенной поверхности воды. Куда исчезла вторая половина?

9. Показать, что в линейной теории волн на воде часть потока энергии в положительном направлении оси x на единицу длины гребня, получающаяся за счет прямого действия поверхностного натяжения T, составляет

$$(-T\partial\zeta/\partial x)\,\partial\zeta/\partial t.$$

Проверить, что для волн, движущихся по воде глубины h под влиянием тяготения и поверхностного натяжения, эта добавка в выражение (145) для потока энергии в жидкости повышает средний поток энергии до величины UW, где U и W — групповая скорость и средняя энергия волны на единицу площади горизонтальной поверхности.
Выписать *относительную долю* этого среднего потока энергии, которая вкладывается прямым переносом энергии за счет поверхностного натяжения, и показать, что в случае глубокой воды эта доля может быть записана в виде

$$2\lambda_m^2/(3\lambda_m^2 + \lambda^2).$$

[Таким образом, она составляет точно 1/2, когда λ равно длине волны λ_m, соответствующей минимуму скорости волны, и возрастает до 2/3 в пределе капиллярных волн (λ/λ_m мало).]

10. В стационарном потоке, имеющем скорость V и глубину h, стационарные волны могут возникнуть там, где по поверхности ударяет стационарная струя воздуха. Рассмотреть случай, когда плоская воздушная струя создает на поверхности воды распределение давления, изменяющееся только по x (по координате в направлении потока). Использовать теорию разд. 3.9, когда за граничную величину η принимается разность между давлением воздуха на поверхности и невозмущенным атмосферным давлением p_a. Показать, что величина $B(kV, k)$, появившаяся ранее в формуле (172), равна тогда

$$B(kV, k) = (\operatorname{th} kh)^{-1}\,\rho V^2 k - \rho g - Tk^2.$$

Показать, что если V превышает минимальную скорость волны $(4gT/\rho)^{1/4}$, но является существенно меньшей, чем длинноволновая скорость $(gh)^{1/2}$, то уравнению $B(kV, k) = 0$ удовлетворяют два положительных значения величины k, близкие к значениям

$$k_1 = (2T)^{-1}\,[\rho V^2 - (\rho^2 V^4 - 4\rho g T)^{1/2}],$$

$$k_2 = (2T)^{-1}\,[\rho V^2 + (\rho^2 V^4 - 4\rho g T)^{1/2}],$$

полученным при замене $\operatorname{th} kh$ на 1.

Показать, что когда струя воздуха действует с суммарной силой G на единицу ширины потока, соответствующей распределению давления $\pi^{-1} G x_0 (x^2 + x_0^2)^{-1}$, то волны, близкие по форме к волне вида

$$\zeta = -2G(\rho^2 V^4 - 4\rho g T)^{-1/2}\, e^{-k_1 x_0} \sin(k_1 x),$$

распространяются вниз по потоку от струи воздуха, тогда как волны с ζ, близкой к

$$\zeta = -2G\,(\rho^2 V^4 - 4\rho g T)^{-1/2}\, e^{-k_2 x_0} \sin(k_2 x),$$

распространяются вверх по потоку. Показать, что при скорости потока 0,30 м/с длина возникших волн составляет около 0,05 м для волн, распространяющихся вниз по потоку, и около 0,006 м для волн, распространяющихся вверх по потоку; амплитуда последних в $\exp(970 x_0)$ раз меньше, где x_0 измеряется в метрах.

[Таким образом, волны вверх по потоку могут становиться трудно наблюдаемыми при x_0, больших 5 мм.]

11. В разд. 3.4 и 3.6 соответственно мы показали, что волны на воде с длиной, меньшей 4 мм, являются капиллярными и что отношение их групповой скорости к скорости волны составляет 3/2. Предлагаем выполнить аналогичное проведенному в разд. 3.10 исследование порождения таких капиллярных волн стационарным движением по воде со скоростью V твердого тела (размеры которого не должны превышать 1 или 2 мм, чтобы точность исследования была хорошей).

Показать, что эти волны находятся повсюду вокруг препятствия. В системе координат с началом в точке мгновенного положения препятствия и отрицательным направлением оси x, совпадающим с направлением его движения, найти мгновенное положение волн, которые были испущены под углом θ к этому направлению, когда препятствие находилось в точке $(X, 0)$.

Показать, что вдоль каждого отдельного гребня величины X и θ меняются таким образом, что $X \cos^3\theta$ принимает постоянное значение, скажем X_1. Установите, что форма гребня описывается параметрическими уравнениями

$$x = X_1 \sec\theta \left(\operatorname{tg}^2\theta - \frac{1}{2}\right), \qquad y = \frac{3}{2} X_1 \sec\theta \operatorname{tg}\theta.$$

Нарисовать эту кривую, заметив, что она проходит через точки $(-0{,}5X_1, 0)$ и $(0, \pm 1{,}3X_1)$ и имеет асимптоты $y = \pm 1{,}5X_1^{1/3} x^{2/3}$.

[Эти формы гребней, вогнутых к препятствию, легко наблюдать, скажем, в случае, когда вязальная спица движется в воде, хорошо освещенной сверху.]

4. Внутренние волны

4.1. Введение в теорию внутренних гравитационных волн

Представления о дисперсии и групповой скорости были развиты в гл. 3 для *изотропных* случаев, когда скорость c волны не зависит каким-либо образом от направления распространения волны, хотя и меняется с ее длиной. При этом волновая энергия распространяется под прямым углом к гребням волн с групповой скоростью U.

В этой главе ставятся три цели. Первая состоит в том, чтобы дать общий анализ диспергирующих систем, которые удовлетворяют линейным уравнениям, допускающим зависимость скорости c волны как от направления ее распространения, так и от ее длины; в таких *анизотропных* системах групповая скорость должна рассматриваться как вектор $\mathbf{U}$ и не должна быть обязательно перпендикулярной гребням волн. Вторая цель состоит в иллюстрации общей теории, главным образом на примере внутренних волн в стратифицированной среде; это случай, важный в океанографии и метеорологии (разд. 4.3) и совершенно отличный от изотропных случаев: в нем волновая энергия распространяется с групповой скоростью $\mathbf{U}$ *параллельно* гребням! Третья цель заключается в том, чтобы придать единство *содержанию книги в целом путем использования общего анализа для обоснования и обобщения*: (i) идей геометрической акустики, изложенных в гл. 1 и гл. 2, а также (ii) некоторых подходов, используемых для расчета волн на воде и описанных в гл. 3.

Мы начинаем данную главу с описания внутренних гравитационных волн как примера существенно анизотропной волновой системы, важного для понимания окружающей нас природной среды. Мы видели в гл. 3, как сила тяжести стремится восстановить плоскую форму поверхности раздела воды и воздуха и как баланс между этой восстанавливающей силой и инерцией воды определяет распространение волн по такой

поверхности. Существует много других систем с легкой жидкостью, расположенной над тяжелой жидкостью, которые *устойчивы* в том смысле, что возмущениям (при которых тяжелая жидкость может проникать в легкую и наоборот) противодействует сила тяжести. В любых таких устойчивых системах распространение волн оказывается возможным вследствие баланса между гравитационной восстанавливающей силой и полной инерцией жидкости.

Прежде чем перейти к основному материалу этого раздела (гравитационные волны в непрерывно стратифицированной жидкости), мы остановимся на значительно более простом случае внутренних волн, который легко исследовать при помощи методов, развитых в гл. 3. Во многих глубоких эстуариях (таких, как норвежские фиорды) пресная речная вода обычно движется по направлению к морю *над* более тяжелой соленой водой; происходит это главным образом потому, что приливно-отливные движения слишком слабы, чтобы преодолеть гравитационную устойчивость поверхности раздела между пресной и соленой водой за счет «турбулентного перемешивания» (по крайней мере в тех случаях, когда поверхность моря сравнительно спокойна). Мы изучим динамику такой внутренней поверхности, полагая, что в идеализированном случае она представляет собой тонкую поверхность раздела между тяжелой жидкостью с постоянной плотностью ρ_2 и более легкой жидкостью с постоянной плотностью $\rho_1 < \rho_2$. Таким образом, никакие эффекты *диффузии* соленой воды в лежащую выше пресную воду не будут учитываться.

При этом не потребуется какой-либо сложный анализ: понятия обобщенной жесткости и обобщенной массы, объясняемые в разд. 3.2, сразу дают дисперсионное соотношение. Если $z = 0$ представляет невозмущенное положение поверхности раздела, то ее подъем до уровня $z = \zeta$ увеличивает потенциальную энергию нижней жидкости на $(1/2)\,\rho_2 g \zeta^2$ на единицу площади, как и в разд. 3.2. Однако, как показывает тот же метод расчета, этот подъем *уменьшает* потенциальную энергию верхней жидкости на $(1/2)\,\rho_1 g \zeta^2$. Обобщенная жесткость поверхности раздела (коэффициент при $(1/2)\,\zeta^2$ в выражении для потенциальной энергии) поэтому равна

$$(\rho_2 - \rho_1)\, g \tag{1}$$

на единицу горизонтальной площади; она зависит от *разности* плотностей двух жидкостей.

Кроме того, любое движение поверхности раздела вызывает в нижней жидкости движение с кинетической энергией $(1/2)\,\rho_2 k^{-1} (\partial \zeta/\partial t)^2$ на единицу площади, как и в разд. 3.2. Одно-

временно оно вызывает аналогичное (хотя и обратное) движение в верхней жидкости с кинетической энергией $(1/2)\,\rho_1 k^{-1}\,(\partial\zeta/\partial t)^2$. Эти выражения являются хорошими приближениями при условии, что как дно, так и свободная поверхность находятся, по крайней мере, на расстоянии $0{,}28\lambda$ от поверхности раздела, так что они существенно не влияют на эти движения. Обобщенная масса поверхности раздела (коэффициент при $(1/2)\,(\partial\zeta/\partial t)^2$ в выражении для кинетической энергии) поэтому равна

$$(\rho_2 + \rho_1)\,k^{-1} \tag{2}$$

на единицу горизонтальной площади; она зависит от *суммы* плотностей двух жидкостей. Для того чтобы получить дисперсионное соотношение, мы запишем ω^2 (квадрат угловой частоты) как отношение обобщенной жидкости (1) к обобщенной массе (2), т. е. как

$$\omega^2 = gk\,[(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)]. \tag{3}$$

Очевидно, что волновые движения для заданной длины волны $2\pi/k$ будут в точности такими же, как в гравитационных поверхностных волнах, но только с частотой ω (и поэтому также со скоростью волн $c = \omega/k$), которая *уменьшилась* за счет коэффициента, равного корню квадратному из отношения, записанного в квадратных скобках. Для речной воды, лежащей над морской водой, этот коэффициент принимает значения примерно от $0{,}11$ до $0{,}12$. Поэтому может оказаться, что хотя корабль и движется настолько медленно по сравнению со своей длиной, что не возбуждает никаких поверхностных волн (разд. 3.10), он при этом движется *быстро* по сравнению со скоростями волн (имеющих длины, соответствующие длине корабля) на такой поверхности раздела в эстуарии. Это означает, что при входе в эстуарий корабль может испытывать существенно возросшее сопротивление. Такое дополнительное сопротивление представляет собой в точности волновое сопротивление, связанное с энергией, необходимой для возбуждения внутренних волн (даже если корабль при этом не порождает *видимых* волн на свободной поверхности).

Мы перейдем теперь от волн на поверхности раздела между двумя однородными жидкостями к волнам в жидкости с непрерывной стратификацией. В дальнейшем (разд. 4.3) мы убедимся в том, что результат (3) действительно согласуется с предельной формой результатов для непрерывно стратифицированной жидкости.

Мы изучим малые возмущения равновесного распределения плотности $\rho_0\,(z)$ в атмосфере или в океане. Здесь ρ_0 является

непрерывно убывающей функцией высоты z. Равновесное распределение давления $p_0(z)$ должно также убывать с высотой согласно гидростатическому закону:

$$dp_0(z)/dz = -\rho_0(z)\, g. \tag{4}$$

Это распределение давления влияет на гравитационную восстанавливающую силу. Предположим, например, что частица жидкости на высоте z с плотностью $\rho_0(z)$ совершает небольшое движение так, что ее высота увеличивается до $z + \zeta$. Это переносит ее в область, где равновесная плотность имеет меньшее значение

$$\rho_0(z) + \zeta\rho_0'(z), \quad \text{где} \quad \rho_0'(z) < 0, \tag{5}$$

и где давление уменьшается до

$$p_0(z) - \rho_0(z)\, g\zeta. \tag{6}$$

В обратимом процессе это понижение давления должно происходить при постоянной энтропии. Поэтому собственная плотность частицы уменьшается до

$$\rho_0(z) - \rho_0(z)\, g\zeta\, [c_0(z)]^{-2}, \tag{7}$$

где величина $[c_0(z)]^2$, являющаяся квадратом невозмущенной скорости звука при давлении $p_0(z)$ и плотности $\rho_0(z)$, равна отношению приращения давления к приращению плотности при постоянной энтропии.

Избыток плотности частицы над плотностью окружающей жидкости равен поэтому разности между (7) и (5), а именно

$$\{-\rho_0(z)\, g\, [c_0(z)]^{-2} - \rho_0'(z)\}\,\zeta. \tag{8}$$

Умножение этого выражения на g дает избыток веса частицы над выталкивающей силой на единицу объема жидкости; иначе говоря, гравитационная восстанавливающая сила равна

$$\{-\rho_0(z)\, g\, [c_0(z)]^{-2} - \rho_0'(z)\}\, g\zeta. \tag{9}$$

Это простое рассуждение показывает, что гравитационная устойчивость *не* обеспечивается просто требованием $\rho_0'(z) < 0$, как в (5); восстанавливающая сила (9) положительна только тогда, когда

$$\rho_0'(z) < -\rho_0(z)\, g\, [c_0(z)]^{-2}. \tag{10}$$

Таким образом, стратифицированная атмосфера или океан устойчивы только тогда, когда относительная скорость уменьшения плотности с высотой $-\rho_0'/\rho_0$ превосходит gc_0^{-2}. Более полное обсуждение этого важного условия устойчивости содержится в разд. 4.3.

Когда условие (10) для устойчивой стратификации выполняется, восстанавливающую силу на единицу объема (9) можно записать в виде

$$\rho_0(z)\,[N(z)]^2\,\zeta, \tag{11}$$

где положительная величина $N(z)$ с размерностью частоты определяется формулой

$$N(z) = \{[-g\rho_0(z)/\rho_0(z)] - g^2\,[c_0(z)]^{-2}\}^{1/2}. \tag{12}$$

Очевидно, что потенциальная энергия и обобщенная жесткость (каждая на единицу объема), связанные с этой гравитационной восстанавливающей силой (11), соответственно равны

$$\frac{1}{2}\rho_0(z)\,[N(z)]^2\,\zeta^2 \quad \text{и} \quad \rho_0(z)\,[N(z)]^2. \tag{13}$$

Легко видеть, что величина $N(z)$, которую часто называют частотой Вяйсяля — Брента, представляет собой своего рода максимальную частоту колебаний под действием силы тяжести. Это видно из того, что при вертикальном перемещении ζ, рассматриваемом как обобщенная координата, обобщенная масса имеет *минимальное* значение $\rho_0(z)$ на единицу объема. Этот минимум достигается в том случае, когда колебания чисто вертикальны, а кинетическая энергия на единицу объема составляет

$$\frac{1}{2}\rho_0(z)\,(\partial\zeta/\partial t)^2. \tag{14}$$

Любые горизонтальные компоненты в движениях должны просто добавлять соответствующие слагаемые к кинетической энергии (14). Это увеличит обобщенную массу до значений, превосходящих $\rho_0(z)$, и уменьшит квадрат частоты, т. е. величину ω^2 (отношение обобщенной жесткости к обобщенной массе), до значений, меньших $[N(z)]^2$. Например, при колебаниях, таких, что все движения жидкости направлены под углом θ к вертикали, обобщенная масса будет равна $\rho_0(z)\sec^2\theta$, а частота, следовательно, должна быть равной

$$\omega = N(z)\cos\theta. \tag{15}$$

Полная корректность этих предварительных заключений будет показана в два этапа. На первом этапе используются уравнения движения в приближенной форме, принадлежащей Буссинеску. В этом случае предполагается, что для внутренних гравитационных волн так же, как и для поверхностных гравитационных волн (разд. 3.1), можно упростить уравнение неразрывности, пренебрегая сжимаемостью. На втором этапе, о котором пойдет речь в разд. 4.2, используются полные урав-

нения для сжимаемой жидкости и поэтому допускается возможность существования как звуковых, так и внутренних волн; с другой стороны, доказывается, что они распространяются независимо при некотором условии (уже указанном в конце разд. 1.2), которое обычно выполняется.

В этом разделе мы ограничимся исследованием, основанным на приближении Буссинеска. Смысл его состоит в том, что, хотя избыточная плотность (8) и создает значительную гравитационную восстанавливающую силу (9), которая должна быть учтена в уравнении количества движения жидкости, возникающие в результате колебания происходят со столь низкой частотой, что влияние *скорости изменения* избыточной плотности на уравнение неразрывности будет пренебрежимо малым.

Если p_e и ρ_e обозначают избыточное давление $p - p_0$ и избыточную плотность $\rho - \rho_0$, то уравнение количества движения в линеаризованной форме имеет вид

$$\rho_0 \partial \mathbf{u}/\partial t + \nabla p_e = \rho_e \mathbf{g}, \tag{16}$$

где вектор ускорения силы тяжести $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ направлен вниз. Эта форма уравнения получена уже с учетом уравнения гидростатического равновесия $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$. Если пренебречь членом $\partial \rho_e/\partial t$ (как обсуждалось выше), то уравнение неразрывности примет вид

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \tag{17}$$

Выписывая дивергенцию от (16) и используя (17), мы получаем

$$\nabla^2 p_e = -g\, \partial \rho_e/\partial z. \tag{18}$$

Если теперь обозначить через q направленную вверх составляющую потока массы (т. е. составляющую вектора $\rho_0 \mathbf{u}$ по оси z), то из уравнения (16) будет следовать равенство

$$\partial q/\partial t + \partial p_e/\partial z = -g\rho_e, \tag{19}$$

а из уравнений (18) и (19) мы получим, что

$$\nabla^2 (\partial q/\partial t) = g\partial^2 \rho_e/\partial z^2 - g\nabla^2 \rho_e = -g\,(\partial^2 \rho_e/\partial x^2 + \partial^2 \rho_e/\partial y^2). \tag{20}$$

Заметим, что правая часть уравнения (20) положительна в тех точках данного уровня (при фиксированном z), где ρ_e имеет локальный максимум. Следствием такой локальной положительности значения $\nabla^2 (\partial q/\partial t)$ является *отрицательность* в соседних точках значений самой производной $\partial q/\partial t$, т. е. появление направленных вниз ускорений, которые и следовало ожидать в окрестности максимума избыточной плотности.

К тому же значение (8) для избыточной плотности ρ_e вместе с определением (12) функции $N(z)$ дает

$$g\partial\rho_e/\partial t = [N(z)]^2\,\rho_0(z)\,\partial\zeta/\partial t = [N(z)]^2\,q; \tag{21}$$

поэтому, согласно (20),

$$\nabla^2(\partial^2 q/\partial t^2) = -[N(z)]^2(\partial^2 q/\partial x^2 + \partial^2 q/\partial y^2). \tag{22}$$

Мы получили интересное уравнение в частных производных для восходящего потока массы q. Его *анизотропный* характер очевиден из-за появления не только трехмерного оператора Лапласа ∇^2, но и двумерного оператора Лапласа $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Мы отложим до следующих разделов изучение решений уравнения (22) с функцией $N(z)$ общего вида, а пока заметим, что в случае, когда $N(z)$ не зависит от z, это уравнение имеет решения в виде простых плоских волн, а именно в виде

$$q = q_1 \exp[i(\omega t - kx - ly - mz)], \tag{23}$$

где

$$\omega^2 = N^2(k^2 + l^2)/(k^2 + l^2 + m^2). \tag{24}$$

Это волны, гребни которых и другие поверхности постоянной фазы являются плоскостями $kx + ly + mz = \text{const}$, перпендикулярными волновому вектору (k, l, m). Уравнение (24) показывает, как и предсказывалось раньше, что частота ω такой волны самое большее равна N.

Действительно, на рис. 72 видно, что уравнение (24) в точности согласуется с результатом $\omega = N\cos\theta$, данным в (15). Из уравнения неразрывности (17) следует, что в решении типа плоской волны (23) вектор скорости $\mathbf{u}$ *перпендикулярен* волновому вектору (k, l, m). Это означает, что все движения жидкости происходят параллельно поверхностям постоянной фазы. Мы можем, однако, сказать и больше: все колебательные движения жидкости происходят вверх и вниз в направлении самого крутого подъема на такой поверхности постоянной фазы. Это объясняется тем, что в силу уравнения (16) вектор $\rho_0\partial\mathbf{u}/\partial t$ компланарен с волновым вектором (направление ∇p_e) и вертикалью (направление $\rho_0\mathbf{g}$); иначе говоря, хотя градиенты избыточного давления, перпендикулярные к поверхности постоянной фазы, и *могут* объединиться с вертикальными гравитационными силами, чтобы сообщить жидкости ускорения, параллельные этой поверхности, они *должны* иметь направление самого крутого подъема. Поэтому плоские волны включают в себя однонаправленные колебания жидкости под углом θ к вертикали, где

$$\sin\theta = |m|\,(k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2}. \tag{25}$$

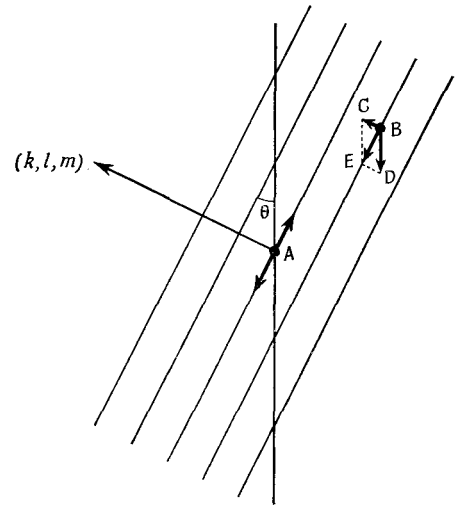

Рис. 72. Из уравнения неразрывности следует, что движения каждой жидкой частицы A в синусоидальной внутренней волне должны быть перпендикулярны волновому вектору (k, l, m) и происходят поэтому на поверхностях постоянной фазы. Результирующая сила, действующая на жидкость, является суммой вертикальной гравитационной силы BD и силы BC, обусловленной градиентом давления и перпендикулярной поверхностям постоянной фазы. Поэтому их равнодействующая BE может сама лежать на этих поверхностях, но должна действовать вверх или вниз в направлении самого крутого подъема.

При этом уравнение (24) согласуется с результатом (15), полученным из рассмотрения обобщенной жесткости и обобщенной массы для колебаний, происходящих под указанным углом θ.

Приведенный выше геометрический вывод легко проверяется вычислением p_e и $\rho_0\mathbf{u}$ из (21), (18) и (16). Это дает

$$p_e = -\omega m\,(k^2 + l^2)^{-1} q_1 \exp\,[i\,(\omega t - kx - ly - mz)] \qquad (26)$$

и

$$\rho_0\mathbf{u} = [-km\,(k^2+l^2)^{-1},\ -lm\,(k^2+l^2)^{-1},\ 1]\,q_1\,\exp\,[i\,(\omega t - kx - ly - mz)], \qquad (27)$$

где вектор $\mathbf{u}$ перпендикулярен волновому вектору (k, l, m) и компланарен с ним и с направлением z.

Тот факт, что p_e и $\mathbf{u}$ совпадают по фазе, означает, что волны создают ненулевой *поток волновой энергии*

$$\mathbf{I} = p_e\mathbf{u} = (p - p_0)\,\mathbf{u}. \qquad (28)$$

Мы знаем из разд. 1.3, что для звуковых волн такой поток волновой энергии (28) называется акустической интенсивностью

и, подобно скорости частицы **u**, направлен под прямым углом к гребням (поверхностям постоянной фазы). Наоборот, для внутренних волн скорость частицы **u** *параллельна* поверхностям постоянной фазы, так что и поток волновой энергии (28) должен быть также направлен параллельно поверхностям фазы. Этот неожиданный результат будет подтвержден в следующем разделе, а многие из его следствий предполагается обсудить более обстоятельно в оставшейся части настоящей главы.

4.2. Объединенная теория звуковых и внутренних волн

Методика вывода дисперсионного соотношения для внутренних волн, изложенная в разд. 4.1 (использующая уравнения движения, чтобы получить (24), или энергетические соображения вместе с геометрическими, приведенными на рис. 72, чтобы получить (15)), достаточно проста. Тем не менее изложенные методы, возможно, не вполне убедительны, поскольку они принимают во внимание избыточную плотность, являющуюся следствием вертикального перемещения, в *одном* случае (влияние силы тяжести в уравнении количества движения), но пренебрегают скоростью ее изменения в *другом* случае (уравнение неразрывности).

Один из путей нахождения условий, при которых эти методы могут дать хорошее приближение,— это сравнение отбрасываемого члена $\partial\rho_e/\partial t$, который, согласно (21), равен $g^{-1}N^2q$, с одним из членов, сохраняемых в уравнении неразрывности (17), а именно с $\partial q/\partial z$. Это наводит на мысль о том, что *волновые числа должны быть большими по сравнению с* $q^{-1}N^2$, чтобы сохраняемый член был большим по сравнению с пренебрегаемым членом. Может также возникнуть мысль о необходимости спросить, имеем ли мы основание предполагать, что избыточные плотности ρ_e возникают *только* вследствие вертикального перемещения до некоторого уровня с другим гидростатическим давлением p_0. Сжимаемость жидкости допускала бы *дополнительные* изменения плотности $c_0^{-2}p_e$, возникающие из-за изменения давления p_e на фиксированном уровне. Из уравнения (18), однако, следует, что это могло бы внести незначительное изменение в ρ_e для *волновых чисел, больших по сравнению с* gc_0^{-2} (так как решение уравнения (18) для p_e было бы тогда величиной меньшего порядка, чем $c_0^2\rho_e$).

Эти два предварительных условия для точности приближения Буссинеска тесно связаны между собой, так как, согласно

(12), величины $g^{-1}N^2$ и gc_0^{-2} складываются:

$$g^{-1}N^2 + gc_0^{-2} = [-\rho_0'(z)/\rho_0(z)], \tag{29}$$

образуя относительную скорость уменьшения плотности с высотой. Для *волновых чисел, больших по сравнению с этой суммой*, *оба* условия поэтому выполнены.

Два фактора, о которых только что упоминалось в связи с тем, что они не учитывались в приближении Буссинеска, являются, конечно, основными факторами, определяющими распространение *звука*; в этом случае сжимаемость связывает с каждым локальным изменением давления локальное изменение плотности, которое в свою очередь влияет на дивергенцию поля скоростей. Таким образом, *только* благодаря пренебрежению этими эффектами в разд. 4.1 можно было исключить звуковые волны из решений наших уравнений.

Есть три мотива, которые побуждают к изучению в этом разделе полных линеаризованных уравнений для стратифицированной сжимаемой жидкости, чтобы найти решения, которые могут включать как внутренние гравитационные волны, *так и* звуковые волны. Один мотив состоит в том, чтобы проверить наши предварительные условия для волнового числа, обеспечивающие правильность дисперсионного соотношения (24) для внутренних волн. Второй мотив состоит в том, чтобы найти условия, при которых звуковые волны не подвержены воздействию гравитации. Случай постоянной энтропии на единицу массы был рассмотрен в конце разд. 1.2; в этом случае $p_0'(z) = [c_0(z)]^2\rho_0'(z)$ и в силу уравнений (4) и (12) $N = 0$, так что внутренние волны отсутствуют. Затем было сделано заключение о том, что уравнения звуковых колебаний являются точными для волновых чисел $2\pi/\lambda$, больших по сравнению с $gc_0'^2$. В настоящем разделе мы расширим этот результат, показывая, что если звуковые волны должны испытывать пренебрежимо малое воздействие гравитации, то для любого N волновое число должно быть, кроме того, большим по сравнению с $g^{-1}N^2$. Таким образом, одна и та же пара ограничений на волновое число позволяет нам пренебречь *как* влиянием сжимаемости на внутренние волны, *так и* влиянием гравитации на звуковые волны: при этих условиях звуковые и внутренние волны полностью «разделены». Это наводит на мысль о третьей цели настоящего исследования: получить основу для анализа, особенно в разд. 4.13, случаев, когда (из-за нарушения этих условий) существует связь между звуковыми и внутренними волнами.

Мы начнем с того, что выпишем полное линеаризованное уравнение неразрывности в виде

$$\partial\rho_e/\partial t + \nabla\cdot(\rho_0\mathbf{u}) = 0. \tag{30}$$

Если воспользоваться уравнением (30) вместо (17), то после взятия дивергенции от линеаризованного уравнения количества движения (16) получится

$$\nabla^2 p_e = \partial^2\rho_e/\partial t^2 - g\partial\rho_e/\partial z. \tag{31}$$

Можно заметить, что первый член в правой части является значением $\nabla^2 p_e$ для чисто звуковых волн, а второй член — его значением (18) для чисто внутренних волн.

Нам необходимо также иметь полное линеаризованное уравнение, утверждающее, что в обратимом процессе скорость изменения давления в движущейся частице равна квадрату скорости звука, умноженному на соответствующую скорость изменения плотности. Точный (*нелинеаризованный*) вид этого уравнения таков:

$$\partial p/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla p = c^2(\partial\rho/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho), \tag{32}$$

где c — локальная скорость звука. Если в этом уравнении $\mathbf{u}$, $p - p_0$, $\rho - \rho_0$ и $c - c_0$ являются малыми величинами, так что произведениями любых двух из них можно пренебречь, и если p_0, ρ_0 и c_0 зависят только от z, то уравнение принимает вид

$$\partial p_e/\partial t + w dp_0/dz = [c_0(z)]^2[\partial\rho_e/\partial t + w d\rho_0/dz], \tag{33}$$

где $w = q/\rho_0$ — направленная вверх составляющая вектора $\mathbf{u}$. С учетом гидростатического закона (4) и определения (12) величины $N(z)$ получаем

$$\partial\rho_e/\partial t = [c_0(z)]^{-2}\partial p_e/\partial t + g^{-1}[N(z)]^2 q. \tag{34}$$

Как и прежде, мы видим, что первый член в правой части является значением $\partial\rho_e/\partial t$ для чисто звуковых волн в однородной жидкости, а второй член — значением этой производной, определяемой для чисто внутренних волн формулой (21).

Мы можем исключить ρ_e из наших уравнений, используя уравнение (19), являющееся проекцией уравнения количества движения на ось z. Для (34) это дает

$$\partial^2 q/\partial t^2 + [N(z)]^2 q = -\partial^2 p_e/dz\,\partial t - g[c_0(z)]^{-2}\partial p_e/\partial t, \tag{35}$$

в то время как уравнение (31), в котором $\partial^2\rho_e/\partial t^2$ и $g\partial\rho_e/\partial z$ заменены их выражениями, полученными из (34) и (19) соответственно, записывается в виде

$$\partial^2 p_e/\partial x^2 + \partial^2 p_e/\partial y^2 - [c_0(z)]^{-2}\partial^2 p_e/\partial t^2 = \\ = \partial^2 q/\partial z\partial t + g^{-1}[N(z)]^2\,\partial q/\partial t. \tag{36}$$

Уравнения (35) и (36) описывают совместное распространение звуковых волн и внутренних волн в стратифицированной жидкости.

Прежде чем искать условия, при которых волны двух типов не связаны друг с другом, мы проверим, что наши уравнения не противоречат сохранению волновой энергии. По соображениям, впервые изложенным в разд. 1.3, мы воспользуемся уравнением (28), чтобы определить $\mathbf{I} = p_e\mathbf{u}$ как поток волновой энергии, т. е. вектор, составляющая которого $\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}$ в направлении любого единичного вектора $\mathbf{n}$ представляет собой скорость, с которой волновая энергия переносится в направлении $\mathbf{n}$ через единицу площади малого плоского элемента, нормального к вектору $\mathbf{n}$ благодаря мощности $p_e\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})$, развиваемой избыточным давлением p_e. Можно полагать, что соответствующая волновая энергия на единицу объема будет равна

$$W = \frac{1}{2}\,[\rho_0(z)]\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + \\ + \frac{1}{2}\,[c_0(z)]^{-2}\,[\rho_0(z)]^{-1}\,p_e^2 + \frac{1}{2}\,[\rho_0(z)]\,[N(z)]^2\,\zeta^2, \quad (37)$$

т. е. сумме кинетической энергии, акустической потенциальной энергии и потенциальной энергии внутренних волн (13). Теперь мы проверим, что скорость изменения плотности W этой волновой энергии всегда будет в точности равна взятой с обратным знаком дивергенции потока волновой энергии (28).

Для этой цели нам потребуется выражение

$$\zeta = \int \omega\,dt = [\rho_0(z)]^{-1}\int q\,dt \quad (38)$$

для вертикального смещения ζ. Проинтегрировав затем уравнение (34) по времени, получим

$$[N(z)]^2\zeta = g\,[\rho_0(z)]^{-1}\,\{\rho_e - [c_0(z)]^{-2}p_e\}. \quad (39)$$

К тому же замена в (33) выражения, стоящего во второй квадратной скобке, выражением $-\rho_0\nabla\cdot\mathbf{u}$ в силу уравнения неразрывности (30) дает

$$\partial p_e/\partial t = wg\rho_0(z) - [c_0(z)]^2\,(\rho_0(z)]\,\nabla\cdot\mathbf{u}. \quad (40)$$

Скорость изменения волновой энергии (37) равна

$$\partial W/\partial t = \mathbf{u}\cdot[\rho_0(z)\,\partial\mathbf{u}/\partial t] + [c_0(z)]^{-2}\,[\rho_0(z)]^{-1}\,p_e\partial p_e/\partial t + \\ + [\rho_0(z)]\,[N(z)]^2\,\zeta w, \quad (41)$$

что может быть представлено в виде суммы: (i) скалярного произведения вектора $\mathbf{u}$ на уравнение количества движения (16),

(ii) произведения $[c_0(z)]^{-2}[\rho_0(z)]^{-1}p_e$ на (40) и (iii) произведения $[\rho_0(z)]w$ на (39). В результате получаем

$$\partial W/\partial t = \{-\mathbf{u}\cdot\nabla p_e - wg\rho_e\} + \{[c_0(z)]^{-2}wgp_e - p_e\nabla\cdot\mathbf{u}\} + \{wg\rho_e - [c_0(z)]^{-2}wgp_e\}, \quad (42)$$

где три выражения в фигурных скобках соответствуют (i), (ii) и (iii). В правой части четыре члена взаимно уничтожаются и, так как

$$\nabla\cdot\mathbf{I} = \nabla\cdot(p_e\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla p_e + p_e\nabla\cdot\mathbf{u}, \quad (43)$$

оставшиеся члены дают ожидаемое уравнение

$$\partial W/\partial t = -\nabla\cdot\mathbf{I}. \quad (44)$$

Таким образом, мы проверили, что линеаризованные уравнения, которыми мы пользуемся, обеспечивают сохранение энергии, если поток волновой энергии определяется вектором $\mathbf{I} = p_e\mathbf{u}$ (как в звуковых волнах), а плотность волновой энергии W дается выражением (37), в котором потенциальные энергии, связанные со звуковыми и внутренними волнами, просто суммируются.

Эти линеаризованные уравнения, в которых исключены все переменные, кроме p_e и q, образуют систему двух уравнений второго порядка — уравнений (35) и (36). Теперь мы исследуем свойства решений этих уравнений, устанавливая, в частности, условия, при которых их решения имеют вид не связанных между собой звуковых и внутренних гравитационных волн.

Точные решения, в которых функции $N(z)$ и $c_0(z)$, входящие в уравнения (35) и (36), имеют самый общий вид, получить невозможно. Однако многие сведения о волновых решениях этих уравнений можно почерпнуть из *локального дисперсионного соотношения*. Это — соотношение

$$\omega = \omega(k, l, m, z), \quad (45)$$

меняющееся с высотой z и связывающее между собой частоту и три составляющие волнового вектора в решениях, которые локально изменяются как

$$p_e = p_1\exp[i(\omega t - kx - ly - mz)], \quad q = q_1\exp[i(\omega t - kx - ly - mz)]. \quad (46)$$

Для того чтобы вывести локальное дисперсионное соотношение, нужно пренебречь скоростями изменения амплитуд p_1 и q_1 в зависимости от положения по сравнению со скоростью изменения синусоидально колеблющегося множителя. При этом

уравнение (35) принимает вид

$$(\omega^2 - N^2)\, q_1 = \omega\,(m + igc_0^{-2})\, p_1, \tag{47}$$

а уравнение (36) — вид

$$(c_0^{-2}\omega^2 - k^2 - l^2)\, p_1 = \omega\,(m + ig^{-1}N^2)\, q_1. \tag{48}$$

Существуют интересные случаи, когда уравнения (35) и (36) имеют *точное* решение (46), в котором p_1, q_1, ω, k, l и m — постоянные, удовлетворяющие уравнениям (47) и (48). Это случаи, когда $c_0(z)$ и $N(z)$ постоянны. Они включают случай *атмосферы с постоянной температурой* T_0 и с постоянным отношением удельных теплоемкостей γ. Тогда $c_0 = (\gamma R T_0)^{1/2}$ является постоянной величиной (разд. 1.2), и уравнение гидростатического равновесия (4) при $p_0 = RT_0\rho_0$ дает

$$\rho_0'(z)/\rho_0(z) = -g/(RT_0) = -\gamma g c_0^{-2}, \tag{49}$$

так что (12) принимает вид

$$N = (\gamma - 1)^{1/2} g c_0^{-1}. \tag{50}$$

Например, в случае воздуха с температурой от 20 до —60° С это выражение для изотермической частоты Вяйсяля — Брента дает значения, меняющиеся от 0,018 до 0,015 $с^{-1}$ (что соответствует переходу колебаний от 6 до 7 минут).

Более того, для многих других случаев, когда $c_0(z)$ и $N(z)$ медленно меняются в масштабе длины волны, в разд. 4.5 мы убедимся в том, что, как и в одномерном случае (разд. 3.8), можно проследить распространение волновой энергии, если всюду известно локальное дисперсионное соотношение (45). В таких случаях к тому же можно установить и природу волн при помощи проведенного ниже анализа этого дисперсионного соотношения.

Исключение p_1 и q_1 из (47) и (48) дает дисперсионное соотношение в виде

$$c_0^{-2}\omega^4 - [(k^2 + l^2 + m^2) + im\,(gc_0^{-2} + g^{-1}N^2)]\,\omega^2 + \\ + (k^2 + l^2)\,N^2 = 0. \tag{51}$$

Мы исследуем решения уравнения (51), рассматривая его как квадратное уравнение относительно ω^2 при условиях, предложенных в начале этого раздела. Иначе говоря, предположим, что

волновое число $(k^2 + l^2 + m^2)^{1/2}$ велико по сравнению с

$$[-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]; \tag{52}$$

в силу (29) это означает, что волновое число велико по сравнению *как* с $g^{-1}N^2$, *так* и с gc_0^{-2} и поэтому велико и по сравнению с их средним геометрическим $c_0^{-1}N$.

При этих условиях квадратное уравнение (51) для ω^2 обладает тем свойством, что коэффициент при ω^2 приближенно равен $k^2 + l^2 + m^2$ и много больше среднего геометрического $c_0^{-1}N\,(k^2 + l^2)^{1/2}$ двух других коэффициентов. Но корни любого квадратного уравнения, в котором коэффициент при линейном члене много больше среднего геометрического двух других коэффициентов, с достаточно высокой точностью можно вычислить следующим образом: больший корень получается, если пренебречь последним членом уравнения, а меньший — если пренебречь его первым членом. В данном случае поэтому больший и меньший корни приближенно равны соответственно

$$\omega^2 = c_0^2\,(k^2 + l^2 + m^2), \tag{53}$$

$$\omega^2 = N^2\,(k^2 + l^2)/(k^2 + l^2 + m^2). \tag{54}$$

Здесь (53) представляет собой обычное соотношение, отражающее тот факт, что звуковые волны *не диспергируют* (их скорость c_0 не зависит от волнового числа), а уравнение (54) является дисперсионным соотношением (24) для внутренних волн. Мы, следовательно, доказали, что при условии (52) (т. е. при медленном изменении невозмущенной плотности $\rho_0\,(z)$ в масштабе длины волны) эти два типа волн совершенно не связаны друг с другом; ни на один из них не влияет наличие другого.

Может оказаться также полезным, как мы выяснили в разделах 3.3 и 3.8, рассчитать, какое значение должно принимать волновое число при заданной частоте ω. Мы покажем (разд. 4.5) что волны, распространяющиеся в стратифицированной атмосфере, сохраняют постоянную частоту ω (как и волны на воде, движущиеся к берегу), а также что в атмосфере, где невозмущенная плотность ρ_0 и другие свойства меняются только с вертикальной координатой z, единственное, что может меняться в зависимости от положения, это m — составляющая волнового вектора по оси z; другие составляющие, k и l, подобно ω остаются постоянными. В связи с этим при решении уравнения (51) относительно m интересно посмотреть, как может меняться m в зависимости от $c_0\,(z)$ и $N\,(z)$ при фиксированных ω, k и l.

Используя уравнение (29), мы можем выписать решение уравнения (51) для m:

$$m = \frac{1}{2}\,i\,\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} + \left\{(k^2+l^2)\,\frac{[N(z)]^2-\omega^2}{\omega^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{[c_0(z)]^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)}\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{55}$$

Появление в m мнимой части $1/2i\rho_0'/\rho_0$ даже при условии, что она, согласно (52), пренебрежимо мала, может показаться странным, однако его легко объяснить. В случае когда (46) представляет собой точное решение линеаризованных уравнений (случай с постоянными $N(z)$ и $c_0(z)$), член $(1/2)\ i\rho_0'(z)/\rho_0(z)$ в силу (29) также является постоянным и, таким образом, добавляет к $\exp(-imz)$ множитель, *пропорциональный* $[\rho_0(z)]^{1/2}$, но для сохранения энергии, как мы покажем ниже, в этом случае как раз и требуется, чтобы амплитуды функций p_e и q изменялись в зависимости от z точно пропорционально $[\rho_0(z)]^{1/2}$.

Между тем вещественная часть m дает точную величину вертикальной составляющей волнового вектора, равную квадратному корню из выражения, стоящего в фигурных скобках в формуле (55). В этом выражении при частотах ω, *меньших* частоты Вяйсяля — Брента $N(z)$, преобладает первый член, давая простое дисперсионное соотношение для внутренних волн (54). Сравнение показывает, что другие члены имеют порядок *квадратов* малых величин $c_0^{-1}N$ и ρ_0'/ρ. Действительно, из уравнения (29) следует, что при $\omega < N$ сумма этих членов алгебраически меньше, чем

$$c_0^{-2}N^{-2} - \frac{1}{4}(g^{-1}N^2 + gc_0^{-2})^2 = -\frac{1}{4}(gc_0^{-2} - g^{-1}N^2)^2, \qquad (56)$$

так что она *отрицательна*. Теоретически это дает нижнюю границу горизонтальной составляющей $(k^2 + l^2)^{1/2}$ волнового вектора, при которой могут существовать внутренние волны; однако если выполняется условие (52), то волновые числа лежат намного выше этой нижней границы.

Наоборот, если ω велико по сравнению с N, то в выражении, стоящем в фигурных скобках в формуле (55), преобладают члены $-(k^2 + l^2) + \omega^2 [c_0(z)]^{-2}$, приводящие к акустическому соотношению (53). Теоретически при значениях ω, только *немного* превосходящих $N(z)$, и распространение звука становится *анизотропным* из-за наличия дополнительного члена

$$(k^2 + l^2)\ [N(z)]^2\ \omega^{-2}; \qquad (57)$$

однако это проявление анизотропии не противоречит условию (52), так как при указанных частотах волновые числа просто имеют тот же порядок, что и $[-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]$. Если же отношение волнового числа к этому выражению, а, следовательно, также и к Nc_0^{-1}, велико, то член $-(k^2 + l^2)$ в фигурных скобках в (55) превосходит член (57) на *квадрат* этого отношения.

Проведенный выше анализ члена в фигурных скобках в выражении (55) показывает, что несвязанность между собой

звуковых и гравитационных волн проявляется весьма четко: ошибка всегда *квадратична* относительно малого отношения величины $[-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]$ к волновому числу. Наоборот, к мнимой части (55) следует относиться более серьезно, так как она пропорциональна этому отношению. Однако детальное исследование, которое будет проведено ниже, показывает, что такая малая мнимая часть в локальном дисперсионном соотношении может (если ее использовать слишком примитивно) привести в общем случае к результатам, вводящим в заблуждение, хотя она, конечно, дает правильный ответ в частном случае, когда (46) является точным решением и при надлежащей ее интерпретации может дать полезные результаты в более широком классе случаев.

Волны с фиксированной действительной частотой ω должны иметь плотность энергии W, не зависящую от t в любом фиксированном положении. Поэтому, согласно (44), дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{I}$ равна нулю. Это означает, что в атмосфере, свойства которой меняются только в направлении z, *направленная вверх составляющая*

$$p_e w = [\rho_0(z)]^{-1} p_e q \tag{58}$$

потока волновой энергии $\mathbf{I}$ не может изменяться по z. Но, согласно (48), для волн, которые локально представимы в виде (46), часть функции p_e, совпадающая по фазе с q, равна

$$\{[c_0(z)]^{-2}\omega^2 - k^2 - l^2\}^{-1}\omega m q, \tag{59}$$

что дает среднее значение направленного вверх потока энергии (58) в виде

$$\frac{1}{2}[\rho_0(z)]^{-1}\{[c_0(z)]^{-2}\omega^2 - k^2 - l^2\}\omega q_1^2. \tag{60}$$

Это выражение не зависит от z тогда и только тогда, когда амплитуда q_1 меняется как

$$[\rho_0(z)]^{1/2} \mid [c_0(z)]^{-2}\omega^2 - k^2 - l^2 \mid^{1/2} m^{-1/2}. \tag{61}$$

В случае когда (46) является *точным* решением при постоянных $N(z)$, $c_0(z)$ и m, это и означает пропорциональность амплитуды величине $[\rho_0(z)]^{1/2}$, как указывает мнимая часть (55).

В дальнейшем мы действительно убедимся (разд. 4.5) в том, что в общих случаях, когда свойства жидкости медленно меняются в масштабе длины волны, рассуждения, приводящие к получению изменения амплитуды из потока энергии, как было сделано выше (или в разд. 2.6), дают надежные решения; более того, хотя для внутренних волн полученный результат

не является простой пропорциональностью величине $[\rho_0(z)]^{1/2}$, тем не менее этот множитель представляет собой, как следует из (55), то основное изменение, которое необходимо внести в результаты, полученные из приближения Буссинеска. Иначе говоря, ошибки в приближении Буссинеска значительно уменьшаются, если значения p_e и q, которые оно дает, умножить на коэффициенты, пропорциональные $[\rho_0(z)]^{1/2}$.

4.3. Внутренние волны в океане и атмосфере

На фоне основ теории внутренних волн (разд. 4.1) и условий, при которых они не связаны со звуковыми волнами (разд. 4.2), мы коротко остановимся сначала на природе и значении внутренних волн в океане, а затем на их несколько иных природе и значении в атмосфере.

Все океанические внутренние волны совершенно не связаны со звуковыми волнами. Действительно, условие (52) вполне выполняется даже при длинах волн, сравнимых с океаническими глубинами, так как изменение плотности воды в океане не превосходит 4%. Это максимальное изменение является главным образом результатом огромных давлений, около 10^8 Н/м^2, обнаруженных на самых больших океанических глубинах порядка 10 км.

Плотность морской воды в действительности представляет собой функцию

$$\rho(p, T, \chi) \tag{62}$$

давления p, температуры T и *солености* χ (относительного содержания массы растворенных солей). Состав этих солей меняется, но столь мало, что не вызывает изменений плотности, существенных для динамики океана.

Температурные изменения в океане от точки замерзания морской воды 271 К до значений порядка 300 К вызывают изменения плотности порядка 0,5%. Изменения солености в пределах от $\chi = 0{,}034$ до $\chi = 0{,}037$ вызывают изменения плотности порядка 0,2%.

Парадоксально, что изменения плотности, обусловленные колебаниями температуры и солености, играют в динамике океана гораздо более важную роль, чем превосходящие их изменения плотности вплоть до 4%, обусловленные колебаниями давления. В действительности на динамику океана доминирующее влияние оказывает распределение не фактической

плотности (62), а величины

$$\rho_a\,(T,\ \chi) = \rho\,(p_a,\ T,\ \chi), \tag{63}$$

определяемой как плотность, которую имела бы вода заданной температуры T и солености χ, если бы давление в ней было доведено до атмосферного давления p_a без изменения T и χ. Чтобы определить изменение T и χ с глубиной, океанографы спускают с исследовательских кораблей самописцы температуры, солености и глубины; тогда распределение ρ_a с глубиной можно снять с диаграмм, подобных приведенным на рис. 73.

Здесь мы объясним доминирующую роль ρ_a для внутренних волн, динамика которых, согласно (22), определяется распределением частоты Вяйсяля — Брента (12). Мы покажем, что если $T_0\,(z)$ и $\chi_0\,(z)$ представляют собой невозмущенные распределения температуры и солености с глубиной $(-z)$, а

$$\rho_{a0}\,(z) = \rho_a\,(T_0\,(z),\ \chi_0\,(z)) \tag{64}$$

является соответствующим распределением плотности с поправкой на атмосферное давление, то с большой точностью

$$N\,(z) = [-g\rho'_{a0}(z)/\rho_{a0}(z)]^{1/2}. \tag{65}$$

Это означает, что динамика внутренних волн зависит только от вертикального распределения ρ_a.

Физически это происходит потому, что при океанических температурах обратимые изменения в *воде* очень близки к изотермическим (разд. 1.2). Жидкость, поднимающаяся на более высокий уровень, сохраняет свою соленость и, с высокой степенью приближения, свою температуру. Поэтому она сохраняет свое начальное значение величины ρ_a, так что восстанавливающая сила (11) зависит в первую очередь от любого превышения величины ρ_a над ее невозмущенным значением на новом уровне давления.

Формально мы можем выразить это, записав

$$d\,(\ln\rho_0)/dz = p'_0\,(z)\,\partial\,(\ln\rho)/\partial p + T'_0\,(z)\,\partial\,(\ln\rho)/\partial T + \\ + \chi'_0\,(z)\,\partial\,(\ln\rho)/\partial\chi, \tag{66}$$

где $p'_0\,(z) = -g\rho_0\,(z)$ и где производная $\partial\rho/\partial p$ при постоянных T и χ равна c_N^{-2}, т. е. величине, обратной квадрату «ньютоновой» скорости звука (разд. 1.2). Поэтому формула (12) для $N\,(z)$ дает

$$[N\,(z)]^2 = g^2\,(c_N^{-2} - c_0^{-2}) - g\,\{T'_0\,(z)\,\partial\,(\ln\rho)/\partial T + \\ + \chi'_0\,(z)\,\partial\,(\ln\rho)/\partial\chi\}. \tag{67}$$

Приближение (65) получено за счет: (i) пренебрежения первым членом в правой части и (ii) замены выражения, стоящего

в фигурных скобках в (67), его значением $\rho'_{a0}(z)/\rho_{a0}(z)$ при атмосферном давлении.

Пользуясь соотношениями разд. 1.2 для разности между скоростью звука c_0 и ее ньютоновым значением c_N, мы можем выразить ошибку, вносимую за счет допущения (i), через удельную теплоемкость морской воды (около 3950 дж/кг·К$^{-1}$) и ее коэффициент расширения α, а именно в виде

$$g^2\alpha^2 T/c_p. \tag{68}$$

Наибольшее значение коэффициента α в океане, обнаруженное в самых теплых водах, равно приблизительно $3\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$; при этом величина (68) составляет примерно $7\cdot10^{-7}$ с$^{-2}$. Если мы сравним это с характерным приращением значения величины N^2 в таких теплых водах, равным приблизительно $3\cdot10^{-5}$ с$^{-2}$, то увидим, что получающаяся при этом максимальная ошибка в N едва превосходит 1%.

Для холодной воды на больших глубинах преобладает ошибка, возникающая в результате замены (ii): при таких низких температурах коэффициент расширения $\alpha = -\partial(\ln\rho)/\partial T$, хотя всегда и неотрицательный для морской воды, является весьма малой величиной, порядка $1\cdot10^{-4}$ К$^{-1}$, и увеличивается примерно на $2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ при давлениях, доходящих до 10^8 Н/м^2. Хотя получающаяся при этом *процентная* ошибка для N на таких глубинах возрастает до 10%, абсолютная ошибка в N^2 оказывается меньшей, чем ранее (самое большее $4\cdot10^{-7}$ с$^{-2}$, что получается, если ошибку в $g\alpha$ умножить на характерный для глубоких вод температурный градиент, доходящий до двух градусов на километр). Эти оценки указывают, что динамику океана можно достаточно точно исследовать при помощи упрощенного выражения (65) для $N(z)$.

Восстанавливающая сила (11) положительна только тогда, когда величина $[N(z)]^2$ положительна. Распределения $T_0(z)$ и $\chi_0(z)$ (температуры и солености) могут быть устойчивы, следовательно, только тогда, когда величина

$$\rho'_{a0}(z) = T'_0(z)\,\partial\rho_a/\partial T + \chi'_0(z)\,\partial\rho_a/\partial\chi \tag{69}$$

отрицательна. Устойчивости способствуют как положительный температурный градиент $T_0(z)$, так и отрицательный градиент солености $\chi_0(z)$.

В руководствах по океанографии говорится, что проводящиеся во всем мире наблюдения за распределением температуры и солености по глубине дают ключ к пониманию океанической циркуляции. Результаты таких наблюдений позволили идентифицировать отдельные водные массы, например в Северной Атлантике: Североатлантические глубокие воды, Североатлан-

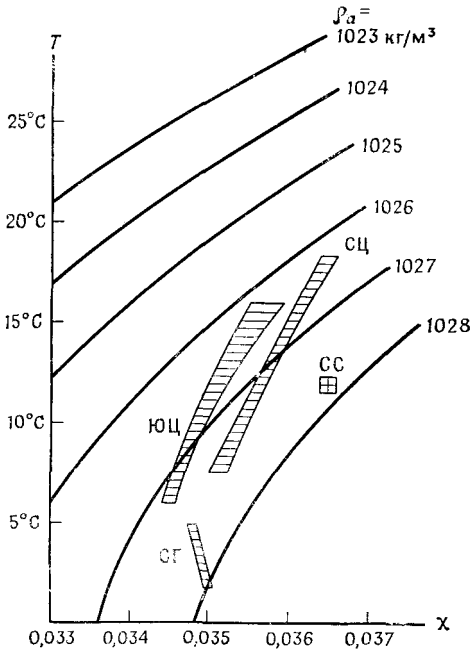

Рис. 73. Приведенная к атмосферному давлению плотность ρ_a воды при данной температуре T и солености χ. Заштрихованные области представляют собой участки диаграммы «температура — соленость», характерные для некоторых водных масс, находящихся в Северной Атлантике: Североатлантические глубокие воды (СС), Североатлантические центральные воды (СЦ), Южноатлантические центральные воды (ЮЦ) и Средиземноморский сток (СС).

тические центральные воды, Южноатлантические центральные воды, Средиземноморский сток, представленные заштрихованными областями на диаграмме «температура — соленость» (рис. 73). Географическое расположение каждой из них может дать ключ к пониманию циркуляционных движений на различных глубинах; к тому же существование отчетливо выраженных течений может служить признаком «геострофического» влияния горизонтальных градиентов температуры T и солености χ. Океанографы изучают также, каким образом различные факторы (охлаждение, нагрев, испарение, приток пресных вод и ледообразование) влияют на изменение распределений T и χ.

Важный аспект всех этих исследований состоит в том, чтобы знать, когда распределение T и χ по вертикали будет устойчивым и, наоборот, когда его неустойчивость по отношению

к вертикальным движениям будет способствовать развитию перемешивания и тенденции к большей однородности. При $T_0'(z) < 0$ и $\chi_0'(z) > 0$ неустойчивость несомненна, так как оба члена в (69) положительны. Когда выполнено только *одно* из этих условий, сумма (69) может тем не менее быть положительной, что приводит к сильной неустойчивости: любые вертикальные смещения жидкости ускоряются гравитационными силами. Наблюдалось, например, что в Тулонском заливе охлаждение поверхности мистралем вызывает перемешивание жидкости и приводит к тому, что жидкость постепенно становится однородной по всей глубине залива.

В действительности распределение температуры и солености по вертикали, по-видимому, является полностью устойчивым только тогда, когда *как* $T_0'(z) \geqslant 0$, *так и* $\chi_0'(z) \leqslant 0$. Последние исследования показали, что в случае, когда выполнено только одно из этих условий, океаническая стратификация остается неустойчивой по отношению к некоторым вертикальным перемещениям весьма специального вида, даже если сумма (69) отрицательна. Например, при $T_0'(z) > 0$ и $\chi_0'(z) > 0$ наблюдаются характерные виды нисходящего перемещения верхних вод (более соленых и теплых). Получающиеся при этом образования, известные под названием «солевых пальцев», имеют такую форму, что по мере их опускания из них диффундирует тепло (коэффициент диффузии которого примерно в сто раз больше коэффициента диффузии соли); тогда их плавучесть, обусловленная тем, что они теплее окружающей жидкости, перестает превосходить избыточный вес, обусловленный их большей соленостью.

В силу ряда причин, подобных этой, в наблюдаемых распределениях T и χ обычно обнаруживают возрастание температуры *и* убывание солености при уменьшении глубины. Оба эти фактора вносят положительные добавки в $[N(z)]^2$, в силу чего возможно существование внутренних волн.

Практически важным является следующий вариант такой картины распределения T и χ. Изменения температуры и солености, инициированные на поверхности, могут часто вызывать неустойчивость в пределах верхнего слоя океана, который поэтому хорошо перемешивается. В таком *хорошо перемешанном слое* (перемешиванию которого часто помогают поверхностные волны) значение $N(z)$ может быть практически равным нулю (потому что T_0 и χ_0 почти постоянны). Ниже этого слоя (толщина которого имеет порядок 10^2 м) может существовать область резкого перехода, называемая *термоклином*, где с увеличением глубины температура резко падает, а соленость может несколько увеличиваться. В термоклине $N(z)$ принимает

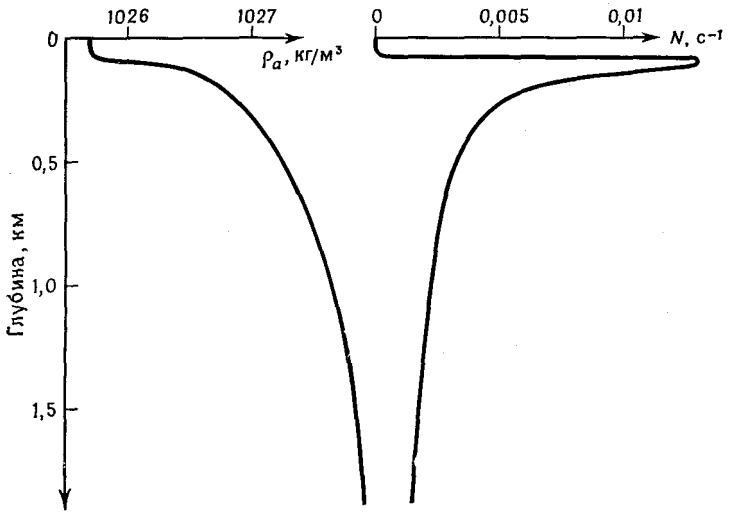

Рис. 74. Типичное среднее изменение ρ_a в океане в зависимости от глубины и соответствующее изменение частоты Вяйсяля — Брента N.

довольно большие значения, порядка 10^{-2} с$^{-1}$ или больше, уменьшаясь до обычных положительных значений на больших глубинах (рис. 74).

При этих условиях внутренние волны могут оказаться *захваченными* областью термоклина. В разд. 4.1 мы установили, что $N(z)$ можно рассматривать как наибольшую возможную частоту локальных колебаний. Поэтому, если бы некоторое колебательное вынуждающее воздействие имело частоту ω, находящуюся в интервале наибольших значений N на рис. 74, то можно было бы ожидать, что оно вызовет колебания только в тонком слое, где $N(z) \geqslant \omega$. Эти колебания оказались бы захваченными этим тонким слоем и могли бы распространяться только горизонтально.

Исследование, основанное на уравнении (22), показывает, что эти ожидания в основном оправдываются, хотя возмущение все-таки проникает немного и в область, где $N(z) < \omega$. Уравнение (22) имеет решения

$$q = Q(z) \exp[i(\omega t - kx)], \tag{70}$$

представляющие волны, распространяющиеся горизонтально в направлении x со скоростью ω/k при условии, что

$$\omega^2 Q''(z) + k^2 \{[N(z)]^2 - \omega^2\} Q(z) = 0. \tag{71}$$

(Для упрощения анализа мы исключаем зависимость от координаты y; заметим, однако, что (при надлежащем выборе оси x) в виде (70) можно записать волны, распространяющиеся в любом горизонтальном направлении.)

Уравнение (71) имеет именно тот вид, который нужен для представления захваченных волн. Всюду, где $N(z) > \omega$, это уравнение имеет вид, аналогичный уравнению простых гармонических колебаний; оно, действительно, должно иметь «волнистые» решения, *везде обращенные вогнутостью к оси* z, так как Q'' обязательно имеет знак, противоположный Q. С другой стороны, там, где $N(z) < \omega$, Q'' обязательно имеет тот же самый знак, что и Q, и решения ведут себя как экспоненты (возрастая или убывая). Захватываться будут те волны, для которых $Q(z)$ экспоненциально *убывает* на обеих сторонах интервала z, где $N(z) > \omega$.

В курсах теории дифференциальных уравнений показывается, что любое уравнение вида (71), где $N(z) > \omega$ только в одном интервале значений z, имеет указанные решения типа захваченных волн для значений k, образующих некоторую возрастающую последовательность $k_0, k_1, k_2, \ldots$. Более того, график решения $Q = Q_n(z)$, соответствующего $k = k_n$, пересекает ось точно в n точках (каждая из которых, согласно (71), является точкой перегиба).

Мы опустим детали этого классического анализа и приведем только (на рис. 75) наиболее существенные доводы, доказывающие существование такой последовательности. В области $N(z) > \omega$, где решение обращено вогнутостью к оси z, значение k определяет, насколько резко возрастает его кривизна при перемещении от этой оси, что в свою очередь определяет степень его «волнистости». Но любое решение, *экспоненциально убывающее* при больших отрицательных z (подобно поверхностным волнам гл. 3), должно достигать точки перегиба там, где $N(z)$ становится равным ω. Заметим, что все такие решения должны отличаться одно от другого постоянным целочисленным множителем и, следовательно, иметь вполне определенное значение отношения $Q'(z)/Q(z)$ в указанной точке перегиба. Возникает вопрос, будет ли для такого решения, когда оно достигнет другого конца интервала, где $N(z) > \omega$, достигаться значение $Q'(z)/Q(z)$, нужное для того, чтобы соответствовать решению, экспоненциально убывающему, когда z растет за пределами этого интервала. Для различных значений k, определяющих степень «волнистости» решения (увеличение кривизны при удалении от оси), выполнить это оказывается возможным: (i) при отсутствии пересечений с осью для небольшого по величине значения k_0, (ii) при одном пересечении для значительно

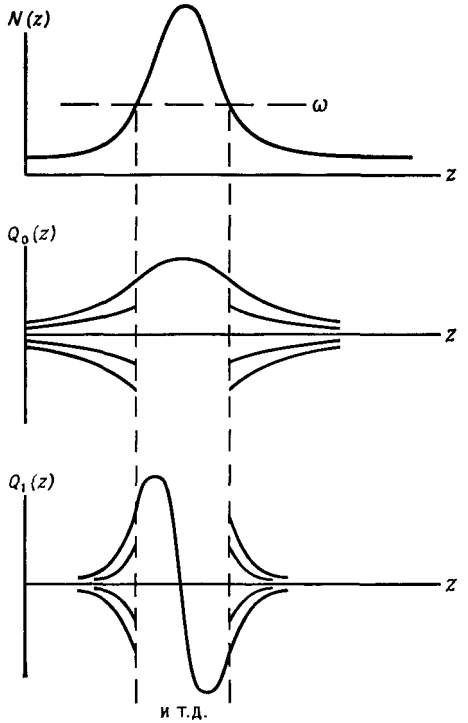

Рис. 75. Графики решений уравнения (71), стремящихся к нулю при больших z (положительных или отрицательных). Штриховые прямые выделяют область $N(z) > \omega$ «волнистых» решений, обращенных вогнутостью к оси z. При помощи такого «волнистого» решения, имеющего 0, 1, . . ., пересечений с осью, для определенных значений k, равных k_0, k_1, . . ., можно «склеить» одно из решений, стремящихся к нулю при больших отрицательных z, с одним из решений, стремящихся к нулю при больших положительных z.

большего значения k_1, (iii) при двух пересечениях для еще большего значения k_2 и т. д.

Наибольшая горизонтальная скорость распространения волн ω/k получается при наименьшем волновом числе $k = k_0$. Соответствующее распределение вертикального массового расхода $Q_0(z)$ положительно для всех z. Это означает, что вся область термоклина поднимается и опускается в одинаковой фазе; при этом говорят, что она совершает *«волнообразные»* ('sinuous') колебания. Попутно следует заметить, что волновое число k_0 меняется вместе с ω; эти горизонтально распространяющиеся

волны, следовательно, проявляют изотропную дисперсию, определяемую групповой скоростью $U = [k_0'(\omega)]^{-1}$ в соответствии с общей теорией, изложенной во второй части гл. 3.

Значительно меньшая скорость распространения волн получается при $k = k_1$. Соответствующее распределение $Q_1(z)$ меняет знак в середине области термоклина. Колебания в этом случае называют *варикозными*: там, где поднимается верхняя часть термоклина, нижняя часть опускается, и наоборот; таким образом, область термоклина меняется по толщине. Все более медленные колебания с $k = k_2, k_3 \ldots$ являются все более сложными; для каждого из них групповая скорость равна $[k_n'(\omega)]^{-1}$.

Читатели, знакомые с квантовой механикой, могут заметить, что уравнение (71) похоже на уравнение Шредингера

$$[\hbar^2/(2M)]\,\psi''(z) + [E - V(z)]\,\psi(z) = 0, \qquad (72)$$

которому удовлетворяет волновая функция $\psi(z)$ для частицы с массой M и энергией E в «потенциальной яме» $V(z)$. Для данного энергетического уровня между верхом и дном этой ямы возможно существование аналогичной бесконечной последовательности «состояний» захваченных волн для возрастающих значений массы M. Чаще физики полагают M фиксированным и устанавливают последовательность энергетических уровней E, для которых существуют захваченные волны, хотя такая последовательность может быть только конечной. Следует заметить, что последняя процедура возможна и для уравнения (71): она соответствует нахождению последовательности частотных уровней $\omega_0, \omega_1, \ldots$ для фиксированного k, где $\omega_0(k)$, например, является просто функцией, обратной к $k_0(\omega)$.

В предельном случае чрезвычайно крутого термоклина, разделяющего области с малым или нулевым градиентом плотности, внутренние волны при «волнообразной» моде $k = k_0$ становятся идентичными волнам на разрыве плотности, упомянутым в начале этой главы. Чтобы это понять, заметим, что искомые решения уравнения (71) должны быть пропорциональными $\exp(kz)$ ниже этого слоя и $\exp(-kz)$ выше его. Поэтому Q'/Q должно изменяться от $+k$ до $-k$ в пределах слоя, а для моды $k = k_0$ это изменение должно быть монотонным убыванием от $+k$ до $-k$. Если толщина слоя мала по сравнению с $1/k$, то это распределение Q'/Q может вызывать только малые пропорциональные изменения Q. Поэтому, согласно уравнению (71), изменение Q'/Q приблизительно равно интегралу по толщине слоя от Q''/Q, а именно

$$-k^2 \int \{\omega^{-2}[N(z)]^{-2} - 1\}\,dz \approx -k^2\omega^{-2} \int [N(z)]^2\,dz, \qquad (73)$$

где интеграл от 1 равен толщине слоя, которой уже пренебрегли по сравнению с $1/k$. Приравнивая (73) приращению $-2k$, обусловленному уменьшением от $+k$ до $-k$, и используя (12), мы выразим квадрат частоты через плотности ρ_1 и ρ_2 выше слоя и ниже его:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} gk \int [-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]\, dz = \frac{1}{2} gk \ln(\rho_2/\rho_1). \qquad (74)$$

Интересно, что выражение (74), основанное на приближенной теории внутренних волн, очень близко к точному значению (3): легко проверить, что ошибка имеет порядок куба разности плотностей, т. е. $(\rho_2 - \rho_1)^3$. Это показывает, что даже чрезвычайно большие локальные значения $\rho_0'(z)/\rho_0(z)$ не должны нарушить точности приближения Буссинеска при условии, что общее относительное изменение плотности остается малым.

Приведенное выше обсуждение внутренних волн в океане касалось тех волн сравнительно высокой частоты (с периодом не свыше 30 минут), которые имеют тенденцию оказаться захваченными вблизи термоклина. Мы, однако, должны заметить, что существуют и волны намного более низких частот. Эти волны более свободно распространяются через толщу океана и вообще проявляют большее сходство с внутренними атмосферными волнами, которые будут описаны ниже. Об их роли в обмене количеством движения между течениями на разных уровнях будет сказано в разд. 4.6.

Атмосфера во многом отличается от океана в отношении внутренних волн. Прежде всего, по мере увеличения высоты плотность уменьшается во много раз (почти беспредельно). Тем не менее в силу того, что $[-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]$ принимает значения в интервале от 0,08 до 0,16 км$^{-1}$, большинство внутренних волн (с длинами волн вплоть до 1 или 2 км) достаточно хорошо удовлетворяет условию (52), при котором они совершенно не связаны со звуковыми волнами. Только в одном важном случае, который будет обсуждаться в разд. 4.13, существует очень сильная связь между внутренними гравитационными волнами и звуковыми волнами; это происходит там, где возмущения давления распространяются горизонтально таким образом, что над каждой точкой Земли движения воздуха на всех высотах z находятся в фазе. Такие волны имеют длины настолько большие, что, не удовлетворяя условию (52), они скорее аналогичны «длинным волнам» гл. 2.

Следующее отличие от океана состоит в том, что, в то время как $N(z)$ для океана может иметь вблизи термоклина распределение с четко выраженным пиком, многие устойчиво стратифицированные области атмосферы имеют более плавно изме-

няющееся распределение $N(z)$, как, например, в *стратосфере*, представляющей обширную область с основанием (*тропопаузой*), расположенным на высоте около 10 км над уровнем моря (а в тропиках значительно выше). В таких случаях внутренние волны с длинами порядка от 10^2 до 10^3 м можно исследовать при помощи изложенных в следующих двух разделах траекторно-лучевых методов, основанных на предположении, что $N(z)$ медленно меняется в масштабе длины волны.

К тому же в атмосфере воздушные потоки (ветры) оказывают влияние на внутренние волны и взаимодействуют с ними еще в большей мере, чем течения в океане. Именно по этой причине мы включаем разд. 4.6 о прослеживании луча в воздушном потоке с приложениями к распространению как внутренних, так и звуковых волн в неоднородных воздушных потоках.

Стационарные внутренние волны могут порождаться препятствиями (горы и пр.) в стационарном воздушном потоке. Подобно поверхностным гравитационным волнам в стационарном потоке (разд. 3.9), они обнаруживаются вниз по потоку от препятствия и поэтому известны как «подветренные волны». Часто конденсация в гребнях делает их ясно видимыми. Такие волны будут обсуждаться в разд. 4.12.

Упоминание о конденсации приводит нас к последнему основному различию между атмосферой и океаном в отношении внутренних волн. Содержащиеся в атмосфере водяные пары подвергаются фазовым изменениям, при которых высвобождается или поглощается скрытая теплота. Эти тепловые процессы могут изменить выражение (8) для избыточной плотности, а поэтому также и условие устойчивости (10).

В сухом воздухе (в котором может содержаться некоторое количество водяного пара, но нет конденсации) критерий устойчивости (10) легко преобразовать в условие для «вертикального градиента» (скорости падения *температуры* $T_0 = p_0/(R\rho_0)$ с высотой):

$$-T_0'(z) < c_p^{-1} g; \tag{75}$$

здесь удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна $c_p = 1000$ Дж/кг·К$^{-1}$. Условие (75) можно получить еще проще: непосредственно из термодинамической зависимости для совершенного газа, согласно которой при обратимых изменениях $c_p\, dT = \rho^{-1}\, dp$; поэтому воздух, испытывающий понижение давления $\rho g \zeta$, охлаждается на величину $c_p^{-1} g \zeta$ и опускается тогда и только тогда, когда эта величина превосходит понижение $[-T_0'(z)]\,\zeta$ температуры окружающего воздуха. Это предельное для устойчивости значение вертикального градиента (75) приближенно равно 1 градусу на 100 м. Когда указанное

значение производной становится больше, начинают усиливаться вертикальные перемещения; они вызывают быстрое перемешивание, которое продолжается до тех пор, пока оно не уменьшит вертикальный градиент до значения ниже предельного.

Во влажном воздухе (например, в облаках), в котором парциальное давление водяного пара в воздухе равно *давлению насыщенного пара* p_v и в котором имеются капельки конденсированной воды, критический вертикальный градиент для устойчивости намного меньше. Это проще всего объяснить тем, что эффективное c_p для такой смеси значительно возрастает. Причина этого состоит в том, что при росте температуры увеличивается p_v и поэтому требуется, чтобы подводимое тепло расходовалось не только на подогрев воздуха, но и на испарение достаточного количества воды для необходимого увеличения парциального давления водяного пара. Руководства по метеорологии указывают, что в условиях на уровне моря при 20 °C это почти *удваивает* c_p и поэтому *вдвое уменьшает* критическое для устойчивости значение вертикального градиента (это уменьшение несколько меньше при низких температурах, хотя и слегка возрастает с падением давления).

Кучевые облака представляют собой области вертикального движения, интенсивно возбуждаемого при условиях насыщения, когда вертикальный градиент $-T_0'(z)$ превосходит свое критическое значение для влажного воздуха. Видимые облака появляются там, где воздух поднимается и охлаждается, что приводит к конденсации; просветы между ними находятся там, где воздух опускается и нагревается, что приводит к испарению. Часто устойчивый слой над кучевым облаком может быть областью интенсивного распространения внутренних волн, вызываемого резкими вертикальными движениями ниже его.

4.4. Введение в анизотропную дисперсию

Для исследования внутренних гравитационных волн удобны два основных метода. Когда частота Вяйсяля — Брента $N(z)$ имеет распределение с четко выраженным пиком, как в термоклине, часто оказывается полезным метод захваченных волн (разд. 4.3). Захваченные волны распространяются по горизонтали, поэтому дисперсия изотропна; для данной частоты наибольшая скорость распространения волн обнаруживается в «волнообразных» колебаниях, которые являются естественным обобщением гравитационных волн на поверхности разрыва.

Другой метод исследования, применимый в том случае, когда $N(z)$ медленно меняется в масштабе длины волны, основывается на трехмерном обобщении понятия групповой скорости, развитого в гл. 3. Этот второй метод, который будет описан полностью в разд. 4.5, используется довольно широко; в самом деле, даже при пиковом распределении частоты $N(z)$ он может дать поразительно хороший учет (см. разд. 4.11) всех колебаний захваченных волн со скоростями распространения, меньшими, чем для «волнообразных» колебаний; кроме того, он еще более широко применяется в случаях медленно меняющихся градиентов плотности.

Читатели, которым природа изотропной дисперсии уже знакома, могут тем не менее обнаружить совершенно неожиданные свойства вектора групповой скорости для внутренних волн и других анизотропных систем. По этой причине (как и в гл. 3) мы начинаем общее изложение в следующих разделах с особенно простого анализа некоторого типичного случая, а именно *однородной* системы с постоянным N, для которой в разд. 4.1 были получены синусоидальные решения типа плоских волн (23).

Причины, по которым особое внимание уделяется синусоидальным волнам, те же, что и в разд. 3.6. В частности, хотя мы и откладываем до разд. 4.8 трехмерный анализ Фурье генерирования волн локальным возмущением сложной формы, мы можем анонсировать выводы этого раздела, отмечая, что различные компоненты в виде синусоидальных плоских волн через некоторое (довольно продолжительное) время *обнаруживаются в совершенно различных местах.* Поэтому волны, наблюдаемые в каком-то определенном месте, приближенно могут считаться синусоидальными.

В случае постоянного N мы видели (разд. 4.1), что волны определенной частоты $\omega \leqslant N$ имеют поверхности постоянной фазы, образующие определенный угол $\arccos(\omega/N)$ с вертикалью. Если бы мы предположили, что волны, которые локализованный источник излучает в любом направлении, имеют свои поверхности постоянной фазы под прямым углом к этому направлению, то следовало бы ожидать, что мы обнаружим волны частоты ω в направлениях, образующих этот угол $\arccos(\omega/N)$ с *горизонталью*... Однако из гл. 3 нам известно, что такие грубые выводы по аналогии с результатами, полученными при отсутствии дисперсии, ненадежны, а в данном случае мы покажем, что едва ли может быть что-либо более ошибочное! Первый признак того, что это так, уже был дан результатом (конец разд. 4.1), согласно которому поток волновой энергии направлен *параллельно* поверхностям постоянной фазы. Это означает (и, как мы увидим, правильно), что волны, обнаружен-

ные в определенном направлении от источника, имеют свои поверхности постоянной фазы, параллельные этому направлению; поэтому волны частоты ω находятся в направлениях, образующих угол $\arccos(\omega/N)$ с *вертикалью*.

Настоящий раздел имеет тот же смысл для анизотропной дисперсии, что и разд. 3.6 и 3.8 для изотропной дисперсии. Мы начнем (по возможности просто) с вывода свойств вектора групповой скорости при помощи метода, пригодного для более поздних стадий дисперсии, когда волны со значительно различающимися волновыми числами далеко отстоят одна от другой; тогда они так сильно диспергированы, что между ними волновой вектор медленно меняется в масштабе длины волны. Указанный метод применим для любой *однородной* анизотропной системы; это значит, что частота может зависеть произвольно от величины и направления локального волнового вектора, но не может отдельно зависеть от положения. (В силу последнего предположения для внутренних волн, удовлетворяющих дисперсионному соотношению (24), требуется, чтобы N было постоянным.) Мы закончим проверкой (как и в разд. 3.8), что групповая скорость, выведенная таким способом, представляет собой то же самое, что и скорость распространения энергии для синусоидальных волн.

Простой метод анализа, подобный методу, использованному в разд. 3.6, основывается на определении локальной фазы α. Действительно, так как предполагается, что модуль волнового вектора (k, l, m) меняется медленно (лишь на малую долю своей величины $2\pi/\lambda$ на одной длине волны λ), физическая величина q в волнах может быть представлена в приближенной синусоидальной форме

$$q = Q(x, y, z, t)\exp[i\alpha(x, y, z, t)]; \qquad (76)$$

здесь Q — положительная медленно меняющаяся амплитуда, а $\alpha(x, y, z, t)$ — фаза. В фиксированной точке (x, y, z) уравнение (76) требует, чтобы эта фаза увеличивалась на 2π на одном периоде волны, так что $\partial\alpha/\partial t$ может рассматриваться как локальная частота ω в радианах в секунду. Таким же образом при заданном времени α показывает убывание по x со скоростью, равной k (составляющей локального волнового вектора по оси x) в радианах на метр. Аналогичные результаты получаются для y и z, что дает

$$\partial\alpha/\partial x = -k, \quad \partial\alpha/\partial y = -l, \quad \partial\alpha/\partial z = -m, \quad \partial\alpha/\partial t = \omega. \qquad (77)$$

Уравнения (77) для α гарантируют, что локально волна имеет примерно синусоидальную форму (23). Действительно, вблизи некоторого положения (x_0, y_0, z_0) и в некоторый момент

t_0 фазовая функция почти линейна:

$$\alpha(x, y, z, t) \approx \alpha(x_0, y_0, z_0, t) - k_0(x - x_0) - l_0(y - y_0) - m_0(z - z_0) + \omega_0(t - t_0); \quad (78)$$

здесь $-k_0$, $-l_0$, $-m_0$ и ω_0 являются значениями производных (77) в точке (x_0, y_0, z_0, t_0). Таким образом, *локально* в выражении (76) с медленно меняющейся фазой $\alpha(x, y, z, t)$ величина q почти пропорциональна $\exp[i(\omega_0 t - k_0 x - l_0 y - m_0 z)]$, как в синусоидальной плоской волне.

Когда производные (77) фазовой функции α удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\omega = \omega(k, l, m), \quad (79)$$

определяющему локальную частоту ω как функцию от величины и направления локального волнового вектора (k, l, m), мы можем вывести значение и основные свойства вектора групповой скорости в «двух строчках» (уравнения (83) и (84) ниже). Для внутренних волн дисперсионное соотношение (79) принимает несколько специальную форму (24), которая зависит *только* от направления, а не от величины (k, l, m), но в дальнейшем мы найдем много примеров более общей зависимости. В каждом случае фаза α определяется таким образом, что одна определенная физическая величина q имеет свои «гребни» (максимумы) там, где α — величина, кратная 2π; некоторая *другая* физическая величина может иметь свои максимумы при других значениях фазы, но всегда при некотором фиксированном положении в цикле (например, во внутренних волнах вертикальное перемещение ζ или избыточная плотность ρ_e *имели бы свои максимумы там, где* $\alpha = \pi/2$ *является величиной*, кратной 2π).

Анализ, который будет дан сейчас (а обобщен в следующем разделе) аналогичен анализу, проведенному в разд. 1.10, в том смысле, что его легче всего будет провести, если воспользоваться индексными обозначениями. Поэтому, когда мы описываем анизотропные волны в общем случае, мы используем координаты (x_1, x_2, x_3) и волновой вектор (k_1, k_2, k_3), а также считаем, что по индексу, встречающемуся дважды в любом члене уравнения, автоматически производится суммирование от 1 до 3. Только в том случае, когда в качестве иллюстрации мы используем внутренние волны (для которых вертикальное направление z является особым), мы снова возвращаемся к координатам (x, y, z).

В индексных обозначениях фаза α может быть записана как $\alpha(x_1, x_2, x_3, t)$, причем

$$\partial\alpha/\partial x_i = -k_i, \quad \partial\alpha/\partial t = \omega, \quad (80)$$

а дисперсионное соотношение

$$\omega = \omega(k_1, k_2, k_3) \tag{81}$$

принимает вид

$$\partial\alpha/\partial t = \omega(-\partial\alpha/\partial x_1, -\partial\alpha/\partial x_2, -\partial\alpha/\partial x_3). \tag{82}$$

Тогда «двухстрочечное» доказательство свойств групповой скорости начинается с дифференцирования этой функции ω трех переменных по x_i. Это дает

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\,\partial t} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_j}\right)\left(-\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\,\partial x_j}\right), \tag{83}$$

где, согласно договоренности о суммировании, правая часть представляет сумму трех членов с $j = 1$, 2 и 3. Эти члены представляют собой скорость изменения $\omega(k_1, k_2, k_3)$, обусловленную скоростями изменения k_1, k_2 и k_3 соответственно, при изменении x_i (с сохранением других координат и времени постоянными). В силу равенств (80) уравнение (83) можно записать в виде

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0 \tag{84}$$

где

$$U_j = \partial\omega/\partial k_j \tag{85}$$

определяется как вектор групповой скорости.

Уравнение (84) является трехмерным эквивалентом известного уравнения $\partial k/\partial t + U\partial k/\partial x = 0$ для одномерных систем. Его интерпретация аналогична: оно означает, что волновой вектор k_i постоянен при изменениях, удовлетворяющих уравнению

$$dx_j/dt = U_j. \tag{86}$$

Как и в разд. 3.6, мы можем представить себе наблюдателя, позволяющего точке (x_1, x_2, x_3), за которой он следит, двигаться согласно уравнению (86), т. е. двигаться с групповой скоростью U_j; тогда уравнение (84) означает, что он будет всегда наблюдать волны с одним и тем же волновым числом k_i. Более того, уравнения (81) и (85) показывают, что при постоянном k_i групповая скорость U_j также постоянна. Таким образом, траектория (86) обязательно является прямой

$$x_j - U_j t = \text{const}, \tag{87}$$

движение вдоль которой происходит с постоянной скоростью U_j.

Для однородных систем основное положение, касающееся групповой скорости U_j, было уже получено. Волны с заданным волновым вектором k_i (величина которого равна $2\pi/\lambda$, а направ-

ление перпендикулярно поверхностям постоянной фазы) находятся в точках, движущихся с постоянной скоростью U_j вдоль прямолинейных траекторий (87), причем различным волновым числам соответствуют различные траектории.

Траектории (87) в трехмерных системах называют *лучами*; это слово уже использовалось в гл. 1 и 2 для подобных прямолинейных траекторий, вдоль которых распространяется звуковая энергия в однородной акустической среде. В самом деле, лучи в недиспергирующей системе представляют собой простой частный случай общего понятия лучей, которое будет сейчас развито. Итак, звуковые волны с постоянной скоростью c_0 и волновым вектором k_i имеют частоту

$$\omega = c_0 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}, \tag{88}$$

так что из (85) следует, что

$$U_j = c_0 k_j (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{-1/2}. \tag{89}$$

Этот вектор групповой скорости имеет постоянную величину c_0 и направлен вдоль волнового вектора (т. е. перпендикулярен поверхностям постоянной фазы) в соответствии с результатами, относящимися к скорости и направлению распространения акустической энергии, которые нам уже известны из разд. 1.3.

В случае внутренних волн мы возвращаемся к координатам (x, y, z) и к вектору волнового числа (k, l, m). При этом групповая скорость

$$\mathbf{U} = (\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l, \partial\omega/\partial m) \tag{90}$$

является *градиентом частоты в пространстве волновых чисел*. Если дисперсионное соотношение записано в виде (24), то групповую скорость (90) можно представить так:

$$\mathbf{U} = \frac{Nm}{k^2+l^2+m^2}\left[\frac{(km,\ lm,\ -k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^{1/2}(k^2+l^2+m^2)^{1/2}}\right]; \tag{91}$$

легко видеть, что множитель в квадратных скобках является единичным вектором, перпендикулярным волновому вектору (k, l, m).

И без выкладок можно было предвидеть, что $\mathbf{U}$, градиент частоты (24) в пространстве волновых чисел, должен быть перпендикулярен волновому вектору, ибо составляющая этого градиента в направлении вектора (k, l, m) должна быть скоростью изменения ω, когда меняется величина, а *не* направление вектора (k, l, m), но (24) показывает, что эта скорость равна нулю.

То обстоятельство, что волны с заданным волновым числом (k, l, m) продолжают находиться в точках, перемещающихся

с постоянной скоростью **U**, свидетельствует о том, что *энергия* в волнах с этим волновым числом должна переноситься с той же скоростью. Мы сейчас проверим, что в синусоидальных волнах **U** действительно является скоростью распространения энергии, причем сначала для частного случая внутренних волн, а затем для общих анизотропных систем.

Для синусоидальных внутренних волн на основании (27) нетрудно видеть, что поток волновой энергии $\mathbf{I} = p_e\mathbf{u}$ имеет то же самое *направление*, что и вектор групповой скорости (91), т. е. направление, перпендикулярное волновому вектору и компланарное с ним и вертикалью. Более того, поток волновой энергии, осредненный по периоду, равен осредненному произведению **u** на избыточное давление (26), а в силу того, что квадрат косинуса имеет среднее значение 1/2, это произведение равно

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\rho_0^{-1}q_1^2\frac{Nm}{k^2+l^2}\left[\frac{(km,\ lm,\ -k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^{1/2}(k^2+l^2+m^2)^{1/2}}\right], \tag{92}$$

где значение ω было подставлено из (24). Осредненная волновая энергия на единицу объема W должна быть средним значением величины $\rho_0\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$ (удвоенной кинетической энергии), что вместе с (27) дает

$$W = \frac{1}{2}\rho_0^{-1}q_1^2\frac{k^2+l^2+m^2}{k^2+l^2}. \tag{93}$$

(Последняя дробь в (93) равна величине $\sec^2\theta$, которая показывает, во сколько раз возрастает кинетическая энергия одних вертикальных движений, когда колебания наклонены под углом θ к вертикали.) Уравнения (91), (92) и (93) ясно показывают, что скорость распространения энергии $\mathbf{I}/W$ такова же, как и групповая скорость **U**.

То обстоятельство, что групповая скорость внутренних волн параллельна поверхностям постоянной фазы, означает, что внутренние волны, генерируемые локализованным источником, никогда не могут иметь уже знакомый вид (рис. 7) концентрических кольцевых гребней с центром в источнике. Вместо этого гребни и другие поверхности постоянной фазы *расходятся* по *радиусам от* источника (рис. 76), так как волновая энергия распространяется вдоль лучей, параллельных этим поверхностям.

Для источника с определенной частотой $\omega \leqslant N$ (разд. 4.1) все эти поверхности направлены под определенным углом $\theta = \arccos(\omega/N)$ к вертикали; поэтому вся волновая энергия, генерируемая в области источника, распространяется под этим углом к вертикали. Таким образом, она распространяется по поверхности двойного конуса с полууглом раствора θ.

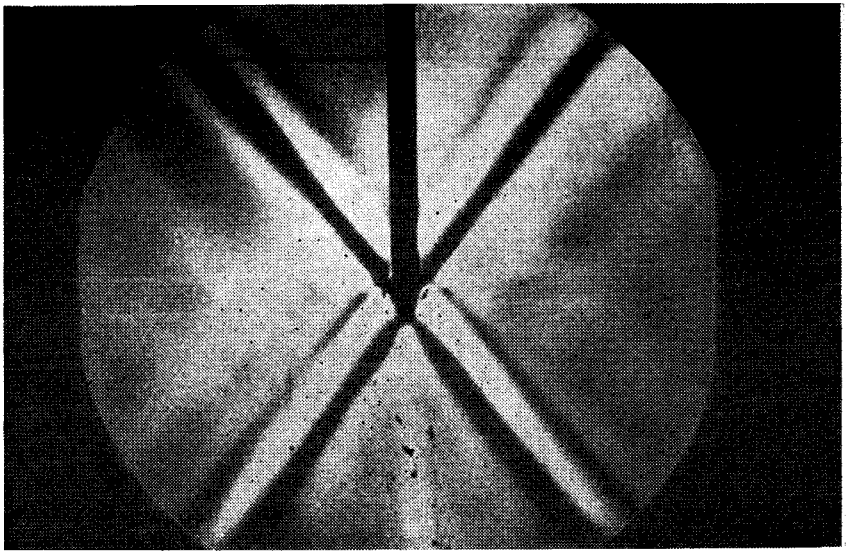

Рис. 76. Шлирен-фотография волн, генерируемых в стратифицированной жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента N колебаниями горизонтального цилиндра с частотой 0,70 N. Заметим, что поверхности постоянной фазы расходятся по радиусам от источника. (Фотография Д. Моубрея.)

Лабораторные эксперименты с внутренними волнами часто проводятся в стратифицированном солевом растворе с везде одинаковым вертикальным градиентом солености $-\chi_0'(z)$, дающим постоянную частоту Вяйсяля — Брента N. Оптические шлирен-системы очень чувствительны к двумерным изменениям плотности. Рис. 76 представляет собой шлирен-фотографию картины двумерного (в плоскости снимка) распространения волн, генерируемых вертикальным колебанием с частотой ω горизонтального цилиндра (ось которого перпендикулярна снимку). Поверхностями постоянной фазы являются при этом плоскости под углом $\arccos(\omega/N)$ к вертикали, образующие, как иногда говорят, «андреевский крест».

Фотография, представленная на рис. 76, хорошо показывает радиальный характер поверхностей постоянной фазы, однако не показывает их движения. Киносъемка подтверждает, что точно так же, как во всех движущихся волнах с длиной волны λ, гребни и другие поверхности постоянной фазы движутся перпендикулярно самим себе с волновой скоростью $c =$

$= \omega\lambda/(2\pi)$, которая для этих волн равна

$$c = [N\lambda/(2\pi)] \cos\theta. \tag{94}$$

Заметим, что *направление* этого перпендикулярного движения можно легко предсказать: уравнение (91) показывает, что *вертикальная* составляющая групповой скорости всегда имеет знак, *противоположный* знаку вертикальной составляющей волнового вектора. Внутренние волны поэтому подчиняются парадоксальному правилу, согласно которому распространение энергии происходит с *направленной вверх* составляющей, когда движение гребней имеет составляющую, *направленную вниз*, и наоборот. На рис. 76, например, движение гребней, перпендикулярное им самим, направлено *вниз* в верхней половине снимка, где энергия распространяется *вверх*, и направлено вверх в нижней половине, где лучи направлены вниз. В любой момент времени можно видеть только одну или две длины волны, так как, когда гребни пройдут совсем небольшой путь, они уже покинут андреевский крест (размеры которого сравнимы с размерами цилиндра), в пределах которого заключена вся энергия.

Величина групповой скорости (91) определяется выражением

$$U = N \mid m \mid (k^2 + l^2 + m^2)^{-1} = [N\lambda/(2\pi)] \sin\theta. \tag{95}$$

Синусоидальная зависимость от угла θ между поверхностями постоянной фазы и вертикалью означает, что групповая скорость стремится к нулю для тех вертикальных колебаний жидкого столба, которые могут иметь место при самой частоте Вяйсяля — Брента. Наоборот, любые очень медленные колебания при $\omega \ll N$ вызывают почти горизонтальные движения, энергия которых распространяется почти горизонтально с групповой скоростью $N\lambda/(2\pi)$, пропорциональной расстоянию λ между соседними (почти горизонтальными) гребнями.

Пропорциональность групповой скорости величине λ при любом заданном θ означает, что, когда локализованное возмущение ограниченной продолжительности генерирует волны различных длин λ и частот ω, волны, которые будут обнаружены в определенном направлении θ через время t (конечно, с частотой $\omega = N \cos\theta$), должны разойтись пропорционально длине волны; действительно, волны с длиной λ пройдут расстояние $(N\lambda t/2\pi) \sin\theta$, пропорциональное самой величине λ. Соседние гребни находятся на расстоянии λ; поэтому угол между гребнями равен

$$[2\pi/(Nt)] \operatorname{cosec}\theta \tag{96}$$

с вершиной в источнике. Тот факт, что этот угол не зависит от λ, согласуется с тем, что гребни радиальны. Заметим также,

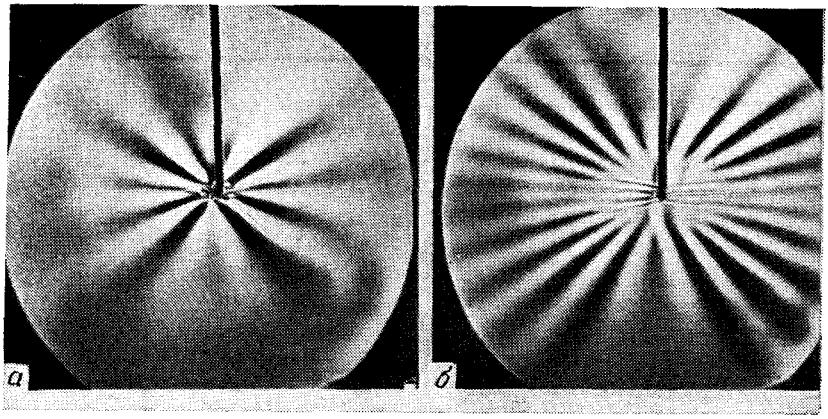

Рис. 77. Шлирен-фотографии волн, генерируемых непродолжительным горизонтальным перемещением кругового цилиндра через 10 секунд (*а*) и через 25 секунд (*б*). Заметим, что угол между гребнями уменьшается со временем и в каждый момент времени принимает наибольшее значение для ближайших к вертикали гребней. (Фотография Т. Стивенсона.)

что угол (96) между гребнями *уменьшается со временем*, начиная с момента, когда возникло возмущение, и что в каждый момент времени он принимает наибольшее значение для ближайших к вертикали гребней. Рис. 77 демонстрирует все эти свойства, показывая волновую картину в два различных момента времени после того, как волны первоначально были возбуждены непродолжительным перемещением цилиндра в стратифицированном солевом растворе. Для более детального ознакомления с количественной стороной анализа этого явления надо обратиться к разд. 4.8.

Мы завершаем этот раздел доказательством того, что для синусоидальных волн

$$q = a \exp\left[i\left(\omega t - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3\right)\right] \qquad (97)$$

в любой однородной анизотропной системе групповая скорость (85) является скоростью распространения энергии. Достаточно доказать, что равны их составляющие в направлении оси x_1; очевидно, что для этой самой общей системы доказательства равенства составляющих по x_2 или составляющих по x_3 могут быть получены из первого заменой индексов.

Нам требуется, таким образом, доказать, что составляющая по x_1 скорости распространения энергии равна $\partial\omega/\partial k_1$, т. е. скорости изменения ω по k_1 *при сохранении* k_2 *и* k_3 *постоянными.*

Эти последние слова и в самом деле подсказывают очень простое доказательство. Если в системе фиксированы значения k_2 и k_3 (составляющие волнового вектора, перпендикулярные направлению x_1), она практически становится одномерной системой, для которой величина q пропорциональна $\exp[i(\omega t - k_1 x_1)]$ и дисперсионное соотношение, связывающее ω и k_1, одномерно. В этом случае проходит доказательство, приведенное в конце разд. 3.8, с заменой k и x на k_1 и x_1; каких-либо других изменений не требуется. (Например, так как k_2 и k_3 остаются фиксированными, k_1 теперь следует заменить выражением $k_1(\omega) - (1/2)\, i\beta k_1'(\omega)$.) В конечном итоге оказывается, что скорость распространения энергии, перпендикулярная плоскости $x_1 = 0$, равна $d\omega/dk_1$ при постоянных k_2 и k_3, что, по определению, является частной производной $\partial\omega/\partial k_1$.

Таким образом, в однородных анизотропных системах свойства вектора групповой скорости (включая его тождественность скорости распространения энергии) являются прямыми обобщениями свойств скалярной групповой скорости, присущих изотропным системам. Наоборот, в следующем разделе мы покажем, что волновая дисперсия в неоднородных анизотропных системах проявляет свойства, которые ни в каком случае не являются простыми обобщениями свойств изотропного поведения.

4.5. Общая теория прослеживания луча

Мы подходим сейчас к центральному разделу всей книги: разделу, описывающему общую теорию прослеживания луча в неоднородных анизотропных диспергирующих волновых системах. Этот раздел центральный потому, что: (i) он содержит как частные случаи многое из того, о чем уже шла речь выше: теорию неоднородных одномерных систем (разд. 2.6 и 3.8), теорию прослеживания луча в геометрической акустике (разд. 1.11 и 2.14) и теорию однородных систем в изотропных (разд. 3.6) и анизотропных случаях (разд. 4.4); (ii) в нем излагается довольно просто общая теория, которая находит много приложений к различным волновым системам, рассматриваемым в настоящей главе и в первой части эпилога; кроме того, эта теория развивается дальше, включая взаимодействие с установившимися течениями (разд. 4.6 и 4.7); она содержит некоторую дополнительную информацию, которую может дать анализ Фурье (разд. 4.8—4.11), и учет нелинейных эффектов (вторая часть эпилога).

Настоящая теория по аналогии с разд. 4.4 исследует волны, которые стали настолько диспергированными, что в них волно-

вой вектор медленно меняется в масштабе длины волны. В однородной системе это дает возможность использовать для таких волн (уравнение (76)) обычную форму

$$q = Q(x_1, x_2, x_3, t) \exp[i\alpha(x_1, x_2, x_3, t)], \tag{98}$$

которая с высокой точностью является локально синусоидальной; фаза α в (98) удовлетворяет уравнениям

$$\partial\alpha/\partial x_i = -k_i, \quad \partial\alpha/\partial t = \omega, \tag{99}$$

а локальная частота ω и волновое число k_i связаны дисперсионным соотношением (81). Та же самая форма (98) для этих волн остается пригодной и в неоднородной системе при условии, что свойства жидкости, определяющие дисперсионное соотношение (например, N и c_0), меняются в пространстве тоже медленно в масштабе длины волны. В этом случае волны локально будут приближенно синусоидальными с волновым числом k_i и частотой ω, которые определяются соотношениями (99), однако ω задается для данного k_i в виде, который также меняется с координатой x_i; фактически дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega = \omega(k_1, k_2, k_3, x_1, x_2, x_3). \tag{100}$$

Кроме того, локальная скорость распространения энергии должна иметь приближенно значение

$$U_j = \partial\omega/\partial k_j, \tag{101}$$

которое, как мы только что показали, она принимает для точно синусоидальных волн. Выражение (101) имеет, однако, смысл, несколько отличный от (85); в силу (100) оно представляет собой скорость изменения ω по k_j при сохранении постоянными не только других компонент волнового числа, но также и *положения* (x_1, x_2, x_3). В этом фиксированном положении для волн, которые приближенно являются синусоидальными и удовлетворяют локальному дисперсионному соотношению, выражение (101) дает с хорошим приближением скорость распространения энергии.

В неоднородной системе мы можем ожидать (разд. 3.8), что волновая энергия, распространяющаяся с групповой скоростью (101), будет испытывать рефракцию, т. е. изменения волнового числа вследствие неоднородности. Наоборот, частота ω должна оставаться неизменной; действительно, анализ Фурье показывает, что в любой системе, удовлетворяющей линейным уравнениям, коэффициенты которых не зависят явно от времени, не может происходить энергообмена между различными частотами. Эти ожидания подтверждаются следующим простым анализом.

Используя (99), чтобы записать (100) в виде

$$\partial\alpha/\partial t = \omega\,(-\partial\alpha/\partial x_1,\ -\partial\alpha/\partial x_2,\ -\partial\alpha/\partial x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_3), \qquad (102)$$

мы сначала продифференцируем это уравнение по x_i. Результат представляет собой почти то же самое, что и уравнение (83), но включает один дополнительный член; наряду с тремя членами, содержащимися в (83) и появляющимися вследствие изменения k_1, k_2 и k_3 при изменении x_i, существует дополнительный член $\partial\omega/\partial x_i$, появляющийся вследствие прямой зависимости ω от x_i при *постоянных* k_1, k_2 и k_3. Таким образом,

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\,\partial t} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_j}\right)\left(-\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial x_i}. \qquad (103)$$

С учетом (99) и (101) уравнение (103) можно записать в виде

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial\omega}{\partial x_i}. \qquad (104)$$

Здесь левая часть представляет скорость изменения k_i по времени в точке, движущейся с групповой скоростью U_j, т. е. в точках, удовлетворяющих уравнениям

$$dx_j/dt = U_j. \qquad (105)$$

Вдоль таких траекторий, следовательно,

$$dk_i/dt = -\partial\omega/\partial x_i. \qquad (106)$$

Уравнение (106) определяет *рефракцию волновой энергии*, т. е. скорость изменения волнового числа вдоль траекторий (105), проходимых со скоростью распространения энергии U_j, одним словом, вдоль *лучей*.

Уравнения, определяющие эти в общем случае *криволинейные* лучи, примут более симметричную форму, если записать (105) в виде

$$dx_i/dt = +\partial\omega/\partial k_i. \qquad (107)$$

Доказательство того, что *частота* ω, как мы и ожидали, остается постоянной вдоль луча, следует при этом, если: (i) выписать скорость изменения величины (100) по времени при произвольных скоростях изменения k_i и x_i в виде

$$d\omega/dt = (\partial\omega/\partial k_i)\,(dk_i/dt) + (\partial\omega/\partial x_i)\,(dx_i/dt), \qquad (108)$$

а затем (ii) воспользоваться уравнениями (106) и (107), чтобы убедиться в том, что для реальных скоростей изменения правая часть уравнения (108) равна нулю.

Мы теперь сделаем краткое отступление по поводу аналогий с другими областями исследований. Читатели, знакомые с классической динамикой, могут узнать в уравнениях (106) и (107)

характеристическую *форму* (симметричную, за исключением знака минус в (106)) уравнений Гамильтона для консервативной динамической системы. Эти уравнения записываются через *функцию Гамильтона*

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n), \tag{109}$$

которая представляет собой полную энергию системы (кинетическую плюс потенциальную), выраженную через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и соответствующие обобщенные импульсы $p_1, p_2, \ldots, p_n$; уравнения Гамильтона имеют вид

$$dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i, \quad \partial q_i/dt = \partial H/\partial p_i \tag{110}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$. Уравнения (106) и (107) имеют точно такой же вид при $n = 3$ и при

$$k_i,\ x_i \text{ и } \omega, \text{ заменяющих } p_i,\ q_i \text{ и } H. \tag{111}$$

Более того, проверка с помощью уравнения (108) факта постоянства ω вдоль луча является точным аналогом проверки того обстоятельства, что для любого решения уравнений движения (110) полная энергия H остается постоянной.

Одно, отчасти очевидное, следствие аналогии (111) состоит в том, что три декартовы координаты x_i, для «пакета» волновой энергии, движущегося вдоль своего луча, соответствуют обобщенным координатам q_i в динамической системе; в самом деле, эти x_i являются естественным выбором обобщенных координат, описывающих положение волнового пакета. Два других менее очевидных следствия состоят в том, что

$$\text{волновое число } k_i \text{ соответствует обобщенному импульсу } p_i \tag{112}$$

и что

$$\text{частота } \omega \text{ соответствует энергии } H. \tag{113}$$

Однако читатели, знакомые с квантовой механикой, поймут утверждения (112) и (113) как часть «принципа соответствия». В квантовой механике специально подчеркивается тот факт, что *частицы ведут себя подобно волнам*, а именно волнам, волновое число которых k_i и частота ω, умноженные на некоторую постоянную $\hbar$, дают импульс и энергию частицы. И обратно, здесь мы подчеркиваем, что *волны ведут себя подобно частицам* (движущимся вдоль лучей); действительно, волновой пакет изменяет положение и волновое число в соответствии с уравнениями (106) и (107), которые могут рассматриваться как уравнения для «частицы», соотношение между энергией и импульсом

которой в каждом положении точно соответствует соотношению между частотой и волновым числом (дисперсионному соотношению) для волн.

Этим завершается краткое отступление, к которому в конце книги мы еще сделаем небольшое примечание. Однако, может быть, следует отметить, что система шести дифференциальных уравнений первого порядка (106) и (107), описывающая движение волнового пакета вдоль лучей и рефракцию волновой энергии, обладает многими практическими полезными свойствами уравнений движения частицы, в частности возможностью быстро *вычислить* решения при заданных начальных значениях x_i и k_i.

Существенное отличие настоящей теории от соответствующей теории для *одномерных* неоднородных систем состоит в том, что уравнение

$$\omega = \text{const вдоль луча}, \tag{114}$$

полученное выше из (108) и справедливое в равной степени для одномерных систем (рис. 64), имеет различный смысл в этих двух случаях. В трехмерных системах одно уравнение (114) никак не может заменить три уравнения (106), описывающие рефракцию волновой энергии. В соответствии с этим нельзя проследить луч, зная только его *направление* (уравнения (107)) и используя правило (114). Это оказывается возможным для одномерных неоднородных систем (разд. 3.8), где (107) и (114) представляют собой два уравнения для двух неизвестных k и x. Однако для трехмерных систем уравнений (107) и (114) недостаточно, поскольку они представляют собой только 4 уравнения для 6 неизвестных k_i и x_i ($i = 1, 2, 3$). Таким образом, в общем случае лучи определяются системой уравнений шестого порядка (106) и (107), и эти уравнения, самое большее, можно свести к системе пятого порядка, если использовать (114).

Следует также заметить, что уравнения (106) и (107) уже имеют такой вид, который позволяет использовать стандартные машинные программы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, чтобы быстро получить их решения при большом наборе различных начальных условий. В этих вычислениях уравнение (114) может иметь огромное значение для проверки точности.

Прослеживание лучей имеет большое значение не только потому, что оно дает информацию о пространственном распределении волнового вектора k_i, но также и потому, что вдоль лучей распространяется волновая *энергия*; поэтому прослеживание лучей можно использовать для того, чтобы найти распределение амплитуды волн. Понятие «трубок лучей», уже введен-

ное в разд. 1.11 и широко использованное в разд. 2.14, часто является прекрасным средством, позволяющим это сделать.

В диспергирующих системах метод трубок лучей можно использовать каждый раз, когда исследуются волны фиксированной частоты ω. Такой случай может возникнуть *либо* тогда, когда все волны в системе генерируются колебаниями с фиксированной частотой ω, *либо* тогда, когда уже проведено разложение в ряд Фурье по частоте.

Для волн с фиксированной частотой волновая картина стационарна по времени. Поэтому уравнение

$$\partial W/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0, \tag{115}$$

связывающее для общей диспергирующей системы плотность волновой энергии и поток волновой энергии

$$\mathbf{I} = W\mathbf{U}, \tag{116}$$

сводится к уравнению

$$\nabla \cdot (W\mathbf{U}) = 0, \tag{117}$$

из которого следует, что $\mathbf{I}$ образует соленоидальное векторное поле. Уравнение (117) можно записать через площадь поперечного сечения A тонкой трубки лучей (образуемой лучами цилиндрической поверхности, к которой вектор групповой скорости $\mathbf{U}$, само собой разумеется, всюду касателен). В этом случае оно принимает вид

$$WUA = \text{const вдоль трубки лучей.} \tag{118}$$

Физически это выражает сохранение энергии, проходящей вдоль трубки, через вариации плотности волновой энергии W, величины скорости распространения энергии U и площади сечения трубки лучей A.

Для недиспергирующих систем этот метод упрощается тем, что трубки лучей одинаковы для всех частот. Например, для звуковых волн, удовлетворяющих (88) при c_0, являющемся функцией координат x_i, уравнения (106) и (107) для лучей принимают вид

$$\begin{aligned} dk_i/dt &= -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}\partial c_0/\partial x_i, \\ dx_i/dt &= c_0 k_i\,(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{-1/2}, \end{aligned} \tag{119}$$

и если задана какая-то лучевая картина для одного фиксированного значения ω, то та же самая лучевая картина должна удовлетворять уравнениям (88) и (119) и при ω, k_1, k_2 и k_3, умноженных на одну и ту же постоянную.

Для диспергирующих систем, которые не были еще проанализированы методом Фурье по времени, должно использоваться

полное уравнение (115). С учетом (116) его можно записать в виде

$$dW/dt = -W \nabla \cdot \mathbf{U} = -W \partial U_j/\partial x_j, \qquad (120)$$

где левая часть $\partial W/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla W$ представляет скорость изменения W вдоль луча. Однако не совсем ясно, как решать уравнение (120); например, его нельзя непосредственно интегрировать вдоль лучей вместе с другими обыкновенными дифференциальными уравнениями (106) и (107), так как для того, чтобы определить частные производные в правой части, надо знать *соседние* решения. Неудобство этого подхода и привело к тому, что обычно предпочитают метод трубок лучей (которому предшествует, если это необходимо, разложение в ряд Фурье), за исключением однородных систем, для которых имеется хороший альтернативный метод, который будет описан в разд. 4.8.

В конце этого раздела мы проиллюстрируем общую теорию примером внутренних волн в стратифицированной жидкости, удовлетворяющих уравнению (24) с частотой Вяйсяля — Брента $N(z)$, которая меняется по z медленно в масштабе длины волны. Однако до этого мы покажем, насколько существенно упрощается общая теория *каждый раз, когда* в дисперсионное соотношение (100) входит явно только одна координата (скажем, $x_3 = z$). При этом уравнения (106) для k_1 и k_2 переходят в уравнения $dk_1/dt = 0$ и $dk_2/dt = 0$, показывающие, что k_1 и k_2, так же как и ω, остаются вдоль лучей постоянными. Эти *три* условия действительно эквивалентны *трем* уравнениям (106); в данном случае не только существует нужное число условий, но в силу уравнения (108) имеет место еще и точная эквивалентность. Таким образом, трехмерные системы, неоднородность которых зависит только от одной координаты, во многих отношениях сохраняют простоту, присущую одномерным системам.

В стратифицированной атмосфере или океане мы используем координаты (x, y, z) с вертикальной осью z. Тогда для волн любого типа, свойства которых не зависят от x и y, лучи могут быть описаны посредством уравнений

$$\omega = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad l = \text{const}. \qquad (121)$$

Вместе с дисперсионным соотношением

$$\omega = \omega(k, l, m, z) \qquad (122)$$

эти уравнения определяют m как функцию z. Тогда правило, согласно которому направление луча является направлением групповой скорости (90), можно записать в виде

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial\omega/\partial k}{\partial\omega/\partial m}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{\partial\omega/\partial l}{\partial\omega/\partial m}, \qquad (123)$$

где правые части являются известными функциями от z; эти уравнения можно проинтегрировать, чтобы получить изменение x и y вдоль луча.

В таких случаях метод трубок лучей для колебаний с фиксированной частотой ω принимает особенно простую форму, так как *сечения трубки* лучей *любой горизонтальной плоскостью имеют одну и ту же площадь*. Это следует из того, что решения уравнений (123) с произвольными начальными значениями x_0, y_0 на высоте z_0 имеют вид

$$x = x_0 + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial\omega/\partial k}{\partial\omega/\partial m} \right) dz, \quad y = y_0 + \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial\omega/\partial l}{\partial\omega/\partial m} \right) dz \qquad (124)$$

на высоте z; здесь интегралы всегда представляют одни и те же горизонтальные смещения $(x - x_0, y - y_0)$ для различных лучей. Применяя теорему о дивергенции в части трубки лучей, ограниченной двумя горизонтальными плоскостями, к соленоидальному векторному полю $W\mathbf{U}$, мы приходим к заключению, что его составляющая по оси z не зависит от z:

$$W\,\partial\omega/\partial m = \text{const вдоль луча.} \qquad (125)$$

В физических терминах это означает, что для колебаний с фиксированной частотой ω каждый луч несет определенные значения не только горизонтальных составляющих волнового вектора k и l, но также и направленной вверх составляющей потока плотности волновой энергии.

Для звуковых волн в стратифицированной атмосфере уравнения (123) при

$$\omega = (k^2 + l^2 + m^2)^{1/2} c_0\,(z) \qquad (126)$$

дают довольно простую информацию:

$$dx/dz = k/m, \quad dy/dz = l/m, \qquad (127)$$

означающую, что лучи параллельны волновому вектору. Они могут быть построены при помощи *закона Снелла*, утверждающего, что синус угла θ между лучом и вертикалью принимает значение

$$\sin\theta = (k^2 + l^2)^{1/2}\,(k^2 + l^2 + m^2)^{-1/2} = (k^2 + l^2)^{1/2}\,\omega^{-1} c_0\,(z), \qquad (128)$$

которое (при условиях (121)) меняется с высотой пропорционально скорости звука $c_0\,(z)$. Звуковые амплитуды получаются как следствие того факта, что восходящая составляющая потока плотности волновой энергии

$$Wc_0 \cos\theta \qquad (129)$$

постоянна вдоль луча.

Для внутренних волн лучи, параллельные групповой скорости (91), удовлетворяют уравнениям

$$dx/dz = -km\,(k^2 + l^2)^{-1}, \qquad dy/dz = -lm\,(k^2 + l^2)^{-1}, \tag{130}$$

означающим, что каждый луч перпендикулярен волновому вектору и компланарен с ним и вертикалью. Аналог закона Снелла состоит в том, что угол θ между лучом и вертикалью удовлетворяет условию

$$\sec\theta = [1 + (dx/dz)^2 + (dy/dz)^2]^{1/2} = \\ = (k^2 + l^2 + m^2)^{1/2}\,(k^2 + l^2)^{-1/2} = \omega^{-1}N\,(z), \tag{131}$$

которое по существу является подтверждением уравнения (15), показывающим, что $\sec\theta$ изменяется с высотой пропорционально частоте Вяйсяля — Брента $N\,(z)$. Постоянная по величине восходящая составляющая (125) потока плотности волновой энергии принимает вид

$$-WNm\,(k^2 + l^2)^{1/2}\,(k^2 + l^2 + m^2)^{-3/2}; \tag{132}$$

при помощи (93) это выражение может быть записано через волновую амплитуду q_1 как

$$-\frac{1}{2}\rho_0^{-1}q_1^2Nm\,(k^2+l^2)^{-1/2}\,(k^2+l^2+m^2)^{-1/2} \tag{133}$$

или с учетом (24) как

$$-\frac{1}{2}\rho_0^{-1}q_1^2m\omega\,(k^2+l^2)^{-1}. \tag{134}$$

Очевидно, что при условии (52), когда звуковые и внутренние волны не связаны друг с другом, выражение (134) является прекрасным приближением значения (60) для восходящей составляющей потока плотности энергии в случае полностью связанных волн.

В океане относительные изменения ρ_0 пренебрежимо малы, и поэтому постоянство (134) означает, что q_1^2m постоянно вдоль луча. При условии $\partial\alpha/\partial z = -m$ для фазы α это дает приближенное решение

$$q = Cm^{-1/2}\exp\left[i\left(\omega t - kx - ly - \int_{z_0}^{z} m\,dz\right)\right], \tag{135}$$

где C — постоянная, а m, согласно (24), имеет вид

$$m = (k^2 + l^2)^{1/2}\,\{\omega^{-2}\,[N\,(z)]^2 - 1\}^{1/2}. \tag{136}$$

Мы можем сравнить этот результат в случае $l = 0$ с решениями вида (70). Функция $Q\,(z)$, согласно (71) и (136), должна

удовлетворять уравнению

$$Q''(z) = -m^2 Q(z), \tag{137}$$

но (135) дает, что

$$Q(z) = Cm^{-1/2} \exp\left(-i \int_{z_0}^{z} m\, dz\right). \tag{138}$$

Почти так же, как и в разд. 2.6, мы оценим ошибку в выражении (138), подставив его в левую часть (137). При этом получаем

$$\left[-m^2 - \frac{1}{2}(m''/m) + \frac{3}{2}(m'/m)^2\right] Q(z). \tag{139}$$

Это выражение удовлетворяет (137) с ошибкой порядка *квадрата* отношения относительной скорости изменения величины m (т. е. m'/m или $(m''/m)^{1/2}$) к самому m; заметим, что для того, чтобы ошибка была величиной порядка *квадрата* этого отношения, в (138) был введен множитель $m^{-1/2}$. Когда m изменяется очень незначительно по сравнению с самим собой в пределах расстояния $1/m$, такое приближение должно быть превосходным.

Заметим, однако, что приближение (138) не может быть использовано для захваченных волн; ошибка становится неприемлемой всюду, где $N(z)$ убывает до значения ω, так что m стремится к нулю (и лучи имеют точки возврата с вертикальной касательной). Мы отложим до разд. 4.11 анализ тонкостей, связанных с прослеживанием лучей, который позволяет использовать его также и в этих случаях.

Мы увидим, что для внутренних волн в атмосфере, где ρ_0 меняется значительно, выводы из приближения Буссинеска (138) относительно того, что амплитуда меняется приближенно как $m^{-1/2}$, могут быть недостоверными; фактически их нужно модифицировать так (поскольку выражение (134) должно оставаться постоянным), чтобы изменение происходило по закону $\rho_0^{1/2} m^{-1/2}$. Это подтверждает предположение, высказанное в конце разд. 4.2, о том, что пренебрежение множителем $\rho_0^{1/2}$ в выражениях для q и p_e составляет основную ошибку приближения Буссинеска.

4.6. Прослеживание луча в воздушном потоке

Волны в жидкости отличаются от волн других типов в одном важном отношении: жидкая среда, через которую распространяются волны, может быть вовлечена в крупно-

масштабное течение. Такое течение обычно порождается некоторой причиной, не зависящей от волн; в этом разделе, например, мы проанализируем влияние атмосферных потоков на распространение звуковых и внутренних волн. Мы уже, однако, отмечали некоторое взаимное влияние распространения волн на течение. В следующем разделе мы будем изучать течения, полностью генерируемые распространением волн.

Мы описали ранее (разд. 3.9) волны в потоке воды, который, однако, представляет собой просто равномерное течение, на которое накладываются эти волны. В некоторой системе отсчета вода находится в состоянии покоя, за исключением этих волн, генерируемых движущимся в данной системе отсчета объектом.

В этом разделе мы будем изучать распространение волн в неравномерных потоках, в которых проявляется способность жидкости к неограниченным деформациям. Хотя в каждой точке система отсчета может быть выбрана локально так, что среднее течение будет отсутствовать и волны будут распространяться в покоящейся жидкости, требуемая система отсчета при этом будет различной в разных точках. Это, как мы увидим, изменяет энергетику распространения волн.

В то же самое время мы ограничимся течениями, которые неравномерны, но меняются только плавно в масштабе длины волны. Сначала мы покажем, как можно расширить общую теорию прослеживания лучей (разд. 4.5), чтобы применить ее к распространению волн довольно общего типа в движущейся жидкости при условии, что ее свойства (включая поле скоростей течения, а также и свойства, которые влияли бы на волны даже в покоящейся жидкости) меняются медленно в масштабе длины волны. В качестве основных иллюстраций мы используем распространение звуковых и внутренних волн в неравномерном воздушном потоке. Мы ссылаемся также на результаты, относящиеся к распространению волн в неравномерном потоке воды.

Во всех случаях мы обнаружим, что уравнения, относящиеся к энергии (разд. 4.5), изменяются, так как имеет место энергообмен между волнами и средним течением. Мы дадим простую теорию этого энергообмена, применимую к звуковым волнам, волнам на воде и внутренним гравитационным волнам и пригодную также для изучения течений, генерируемых волнами (раздел 4.7); в дальнейшем (вторая часть эпилога) мы увидим, что один из основных результатов (сохранение волнового *действия*) является принципом очень большой общности, который может быть использован как ключ для анализа энергообмена в гораздо более широком классе случаев.

Мы используем

$$\mathbf{V} = (V_1,\ V_2,\ V_3) \tag{140}$$

для обозначения поля средних скоростей, через которое распространяются волны. Волны часто будут рассматриваться в локальной системе отсчета, движущейся с определенным значением (140) скорости среднего течения. В этой системе отсчета воздушный поток локально отсутствует и волны имеют частоту

$$\omega_r = \omega_r\,(k_1,\ k_2,\ k_3,\ x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{141}$$

соответствующую покоящейся жидкости. Индекс r в (141) можно рассматривать как обозначение *покоя* (rest) или же *относительности* (relative): ω_r является частотой колебаний относительно локальной средней скорости. Так же как и в разд. 4.5, мы предположим, что свойства жидкости меняются столь медленно, что только их локальные значения влияют на локальное дисперсионное соотношение (141). Аналогично этому мы будем предполагать, что изменения среднего течения в пределах длины волны настолько малы, что их влиянием на дисперсионное соотношение можно пренебречь.

Существует простое соотношение между абсолютной частотой ω (частотой колебаний, происходящих в некоторой фиксированной точке пространства) и относительной частотой ω_r (частотой колебаний, происходящих в точке, движущейся со скоростью V_j). Абсолютная частота ω и волновой вектор k_i даются частными производными (80) от фазовой функции $\alpha\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$. Относительная частота ω_r представляет собой скорость

$$\partial\alpha/\partial t + V_j\,\partial\alpha/\partial x_j, \tag{142}$$

с которой изменяется фаза в точке, движущейся со скоростью V_j; поэтому

$$\omega_r = \omega - V_j k_j. \tag{143}$$

Уравнение (143), связывающее частоты одних и тех же волн в двух различных системах отсчета, является очень важным для прослеживания лучей в воздушном потоке, а также имеет и другие приложения. Например, волны, генерируемые в покоящейся жидкости *движущимся источником*, который осциллирует с частотой ω, имеют относительно жидкости частоту ω_r, которая удовлетворяет (143) при условии, что V_j является скоростью источника с *обратным* знаком; иначе говоря, V_j (как и выше) представляет собой скорость жидкости относительно системы отсчета, в которой измеряется ω. В случае движущихся источников уравнение (143) уже давно называется соотноше-

нием Допплера, и естественно его называть этим именем также и для волн, распространяющихся в неравномерно движущейся жидкости.

Для звуковых волн, волновой вектор которых k_i (перпендикулярный гребням волн) образует угол Θ со скоростью воздушного потока V_j, обычное акустическое соотношение

$$\omega_r = c_0 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}, \tag{144}$$

которому удовлетворяет ω_r, означает, что

$$V_j k_j = V (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2} \cos \Theta = \omega_r (V/c_0) \cos \Theta, \tag{145}$$

где V — скорость воздушного потока. Поэтому уравнение (143) дает

$$\omega_r = \frac{\omega}{1 + (V/c_0)\cos \Theta}. \tag{146}$$

Такая запись соотношения Допплера означает, что для острых углов Θ (распространение по потоку) волны данной частоты ω имеют относительные частоты ω_r, которые постепенно уменьшаются (соответствуя *увеличению* длин волн), когда скорость потока увеличивается. То же самое уравнение (146) дает обычную уменьшенную частоту ω_r звука, воспринимаемого наблюдателем в спокойном воздухе от звукового источника с частотой ω, *удаляющегося* от наблюдателя со скоростью V (в направлении, образующем угол Θ с прямой, соединяющей источник и наблюдателя). И наоборот, эффект Допплера делает ω_r больше ω в тех случаях, когда либо (i) движущийся источник приближается к наблюдателю в спокойном воздухе, либо (ii) волны распространяются против потока.

Построение лучей в воздушном потоке начинается с комбинации уравнений (141) и (143):

$$\omega = k_j V_j (x_1, x_2, x_3) + \omega_r (k_1, k_2, k_3, x_1, x_2, x_3). \tag{147}$$

Затем это соотношение между производными (80) от фазовой функции α приводит, как и в общей теории, начинающейся с уравнения (100), к уравнениям (106) и (107) для скоростей изменения вдоль лучей. Скорость (107) волнового пакета вдоль его луча выражается как

$$dx_i/dt = V_i + \partial \omega_r / \partial k_i = V_i + U_i, \tag{148}$$

что является просто *векторной суммой* скорости воздушного потока и групповой скорости в покоящейся жидкости. Как и следовало ожидать, волновой пакет перемещается с локальной групповой скоростью относительно локального воздушного потока.

Уравнение (147) показывает также, что в воздушном потоке закон (106), описывающий рефракцию, принимает вид

$$dk_i/dt = -k_j\,\partial V_j/\partial x_i - \partial\omega_r/\partial x_i. \qquad (149)$$

Здесь первый член представляет рефракцию, обусловленную градиентами воздушного потока, а второй — рефракцию, обусловленную изменением свойств жидкости (таких, как c_0 и N).

Как и в общей теории, из результата (108) следует, что частота ω остается вдоль лучей постоянной. Однако *относительная* частота ω_r может изменяться; действительно,

$$\begin{aligned} d\omega_r/dt &= (\partial\omega_r/\partial k_i)\,dk_i/dt + (\partial\omega_r/\partial x_i)\,dx_i/dt = \\ &= -U_i k_j\,\partial V_j/\partial x_i + V_i\,\partial\omega_r/\partial x_i. \end{aligned} \qquad (150)$$

Существует поразительная связь между изменениями относительной частоты и волновой энергии. Из разд. 4.5 нам известно, что в покоящейся жидкости волновая энергия переносится неизменной вдоль лучей. Это не так для волн в неравномерно движущейся жидкости, главным образом потому, что эти волны сами по себе не составляют консервативную систему: они могут обмениваться энергией со средним течением.

Это можно быстро понять, если воспользоваться в каждой точке локальной системой отсчета, движущейся с локальной средней скоростью V_j. Мы обозначим плотность волновой энергии через W_r, чтобы напомнить себе, что это — значение W при движениях волн *относительно* локального потока. Поэтому W_r связано с амплитудой и волновым числом так же, как в покоящейся жидкости, поскольку это есть значение W в той локальной системе отсчета, в которой невозмущенная жидкость находится в состоянии покоя.

Общий принцип механики (уже использованный в разд. 1.9) утверждает, что частица массы M, движущаяся в *ускоренной* системе отсчета, ведет себя так, как если бы помимо всех обычных сил, действующих на нее, к ней была приложена дополнительная сила, так называемая *сила инерции*. Эта сила инерции равна произведению $-M$ на ускорение системы отсчета. (Сила инерции по существу представляет собой член, равный произведению массы на ускорение, который, будучи опущен в выражении второго закона движения Ньютона, в которое были включены только ускорения *относительно* системы отсчета, должен появиться в «силовой» стороне этого уравнения с противоположным знаком.)

Если движение жидкости исследуется в системе отсчета, различной в каждой точке и имеющей при (x_1, x_2, x_3) скорость $V_i(x_1, x_2, x_3)$, то на частицу, которой волновые движения

сообщают скорость u_i, будут действовать все силы, присущие этим волновым движениям в покоящейся жидкости, плюс еще одна дополнительная сила, а именно сила инерции, равная

$$-\rho u_i \, \partial V_j/\partial x_i \tag{151}$$

на единицу объема, где ρ — масса частицы на единицу объема, а

$$u_i \, \partial V_j/\partial x_i \tag{152}$$

— ускорение системы отсчета, связанной со скоростью частицы u_i. Соответственно локальная скорость изменения волновой энергии $\partial W_r/\partial t$ на единицу объема равна *сумме* обычного значения

$$-\nabla \cdot \mathbf{I} = -\partial \, (W_r U_i)/\partial x_i \tag{153}$$

и мощности

$$-\overline{\rho u_i u_j} \, \partial V_j/\partial x_i \tag{154}$$

силы инерции на единицу объема (151), действующей на частицу жидкости, имеющую скорость u_j. Черта в (154) означает осреднение по периоду волны.

Мы узнаем здесь уже встречавшуюся в разд. 1.10 величину $\rho u_i u_j$ как тензор *потока количества движения*, представляющий, например, скорость переноса x_j-й составляющей количества движения (ρu_j) в направлении x_i. *Осредненный поток количества движения*, входящий в выражение (154), может перераспределить количество движения среднего течения; на рис. 78 показывается, что эта величина действует на среднее течение как приложенное извне *напряжение* (сила на единицу площади), которое совершает работу, соответствующую мощности

$$+\overline{\rho u_i u_j} \, \partial V_j/\partial x_i \tag{155}$$

на единицу объема. Мы приходим к заключению, что локальная волновая энергия меняется со скоростью на единицу объема, определяемой двумя процессами, в каждом из которых энергия сохраняется: (i) член (153) представляет перенос волновой энергии W_r с групповой скоростью U_i относительно локального среднего течения; (ii) член (154) представляет обмен со средним течением, который происходит со скоростью, равной и противоположной по знаку скорости изменения энергии (155).

Мы называем $\overline{\rho u_i u_j}$ *напряжением Рейнольдса*. Рейнольдс первый показал, что турбулентные изменения скорости жидкости около среднего течения действуют с эффективным напряжением на это среднее течение; распространение волн в среднем течении действует таким же образом, и выражение для эффективного напряжения в точности то же самое.

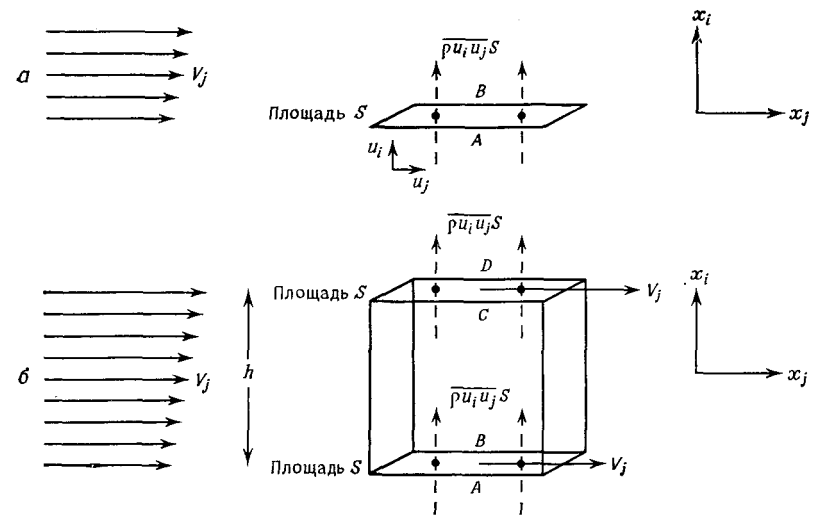

Рис. 78. Волновые движения со скоростями u_i относительно неравномерного среднего течения со скоростью V_j. *а* — эти движения переносят x_j-ю составляющую количества движения ρu_j на единицу объема в направлении x_i через площадку S со средней интенсивностью $\overline{\rho u_i u_j} S$. Поэтому $\rho \overline{u_i u_j}$ действует как среднее напряжение (сила на единицу площади). *б* — результирующая сила на элемент объема, соответствующая этой составляющей напряжения, равна разности $-h[\partial(\overline{\rho u_i u_j})/\partial x_i]\ S$ между силами, действующими на две противолежащие грани элемента, имеющие площадь S и находящиеся на расстоянии h одна от другой. Соответствующая средняя мощность, с которой совершается работа сил, действующих на этот элемент, составляет

$$-V_j[\partial(\rho \overline{u_i u_j})/\partial x_i]$$

на единицу объема. Средний *энергообмен* через поверхности отвечает части этой величины, а именно $-\partial\,[V_j\,(\overline{\rho u_i u_j})]/\partial x_i$ на единицу объема, обусловленной разностью между мощностями $V_j\,(\overline{\rho u_i u_j} S)$, с которыми совершается работа сил на двух противолежащих гранях элемента, разделенных расстоянием h. Оставшаяся часть, представляемая выражением (155), составляет чистое среднее приращение энергии на единицу объема, получаемое средним течением.

В линейной теории можно пренебречь кубами возмущений в энергии или скорости ее изменения; поэтому напряжение Рейнольдса, входящее в выражение (154), можно записать в виде

$$\rho_0 \overline{u_i u_j}. \tag{156}$$

В общем случае, как показано в разд. 1.10, тензор потока количества движения может включать также и изотропный член

$(p - p_0)\,\delta_{ij}$; поэтому волны, которые создают среднее избыточное давление второго порядка (что может быть справедливо для звуковых волн, так как график зависимости давления от плотности обращен вогнутостью вверх), могут вызывать дополнительное взаимодействие типа напряжения со средним течением. В этой главе, однако, мы ограничимся средними течениями с малым числом Маха и нулевой дивергенцией $\partial V_i/\partial x_i$. При этом изотропные напряжения (с коэффициентом δ_{ij}) не могут совершать никакой работы против градиента скорости $\partial V_j/\partial x_i$, и поэтому взаимодействие с таким средним течением полностью описывается напряжением Рейнольдса (156).

Кроме того, в этой главе мы ограничимся системами, в которых внешняя сила (а именно сила тяжести) может либо не учитываться, как в звуковых волнах (разд. 4.2), либо не имеет составляющей в направлении среднего течения; таким образом, стратификация, допускаемая в теории внутренних волн, совместима только с горизонтальными средними воздушными потоками, и в то же время любые стационарные течения, которые могут взаимодействовать с волнами в воде, должны быть горизонтальными. Поэтому для каждой составляющей напряжения Рейнольдса (156), которая могла бы влиять на мощность (154) вследствие неравенства нулю V_j, внешняя сила, действующая в j-м направлении, равна нулю, так что локальная скорость изменения величины $\rho_0 u_j$ в системе отсчета, движущейся с локальным потоком, равна

$$\partial\,(\rho_0 u_j)/\partial t = -\partial p_e/\partial x_j. \tag{157}$$

Тогда

$$\rho_0 u_j = \omega_r^{-1} k_j p_e \tag{158}$$

и напряжение Рейнольдса (156) принимает значение

$$\omega_r^{-1} k_j \overline{p_e u_i} = \omega_r^{-1} k_j I_i. \tag{159}$$

Интересно, что это выражение для среднего потока количества движения напоминает аналоги (112) и (113): чтобы получить средний поток количества движения, мы убираем из выражения для среднего потока энергии I_i множитель, равный частоте, и вводим множитель, равный волновому числу.

Итак, во всех этих случаях уравнение для скорости изменения плотности волновой энергии в локальной системе отсчета (сумма (153) и (154)) будет иметь вид

$$\partial W_r/\partial t = -\partial\,(W_r U_i)/\partial x_i - \omega_r^{-1} k_j I_i \partial V_j/\partial x_i. \tag{160}$$

Это уравнение можно записать также через скорости изменения вдоль луча:

$$dW_r/dt = -W_r\,\partial U_i/\partial x_i + W_r \omega_r^{-1}\, d\omega_r/dt, \tag{161}$$

где второй член получается из уравнения (150), записанного в системе координат, движущейся с локальным средним потоком (так что $V_i = 0$, а $I_i = W_r U_i$).

Уравнение (161) приводит к удивительно простому закону

$$d\,(W_r \omega_r^{-1})/dt = -\,(W_r \omega_r^{-1})\,\partial U_i/\partial x_i, \tag{162}$$

утверждающему, что *волновое действие*, определяемое так, что его значение на единицу объема равно $W_r \omega_r^{-1}$ (волновая энергия, деленная на относительную частоту), переносится неизменным вдоль лучей. Хотя в приведенном выше выводе и были сделаны различные ограничительные предположения, в эпилоге мы покажем, что этот принцип имеет очень большую общность; в частности, для волн, распространяющихся в среднем потоке, он играет ту же самую роль, что и принцип сохранения волновой энергии для волн в покоящейся жидкости.

Сохранение волнового действия означает, что волновая энергия *возрастает* (за счет среднего течения) всюду, где лучи входят в области возрастающих ω_r; с другой стороны, волновая энергия теряется (питая среднее течение) всюду, где ω_r убывает. Уравнение (143) показывает, что изменения составляющей среднего течения, параллельной k_i (т. е. перпендикулярной гребням и имеющей направление их движения), вызывают противоположные изменения ω_r и, следовательно, волновой энергии. Например, волны в воде, движущиеся из области покоя в область встречного течения, получают приращение волновой энергии.

Принцип (162) легче всего применять к волнам с фиксированной частотой, когда колебания в любой фиксированной точке пространства носят стационарный периодический характер (ср. с разд. 4.5). В таком случае в исходной системе координат, когда скорость среднего течения равна V_i, этот принцип записывается в виде

$$\partial\,[W_r \omega_r^{-1}\,(U_i + V_i)]/\partial x_i = 0. \tag{163}$$

Уравнение (163) показывает, что вектор, записанный в квадратных скобках и называемый *потоком волнового действия*, является соленоидальным; иначе говоря, его величина меняется вдоль трубок лучей обратно пропорционально площади их поперечного сечения. Волны с фиксированной частотой ω имеют меняющийся поток энергии вдоль трубки лучей и меняющуюся относительную частоту ω_r, но их отношение (поток волнового действия вдоль трубки лучей) является постоянным.

Мы завершаем настоящий раздел (как и разд. 4.5), демонстрируя, как упрощается изложенная теория в случае страти-

фицированной атмосферы, когда дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega_r = \omega_r(k, l, m, z), \tag{164}$$

зависящий только от вертикальной координаты z. Изложение теории будет дано для случая воздушного потока, направленного в одну сторону, но обладающего сдвигом

$$\mathbf{V} = (V(z), 0, 0). \tag{165}$$

Читатель убедится, что эту теорию нетрудно распространить и на случай, когда, кроме составляющей вдоль оси x, средний поток имеет также составляющую вдоль оси y; однако, как пояснялось выше, составляющая вдоль оси z была бы несовместима с постоянной стратификацией в невозмущенном состоянии.

Выражение (147) для ω принимает вид

$$\omega = kV(z) + \omega_r(k, l, m, z). \tag{166}$$

Как и в общей теории, для волн, удовлетворяющих соотношению (122) между частотой и волновым числом, зависящими только от одной координаты z, уравнения рефракции в точности эквивалентны соотношениям (121), утверждающим, что ω, k и l сохраняют постоянные значения вдоль луча. Тогда уравнение (166) определяет m как функцию z, а уравнения (148) дают направление лучей в виде

$$\frac{dx}{dz} = \frac{V(z) + \partial\omega_r/\partial k}{\partial\omega_r/\partial m}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\partial\omega_r/\partial l}{\partial\omega_r/\partial m}, \tag{167}$$

где правые части являются известными функциями z; эти уравнения можно проинтегрировать, чтобы получить изменение x и y вдоль луча.

Как и в разд. (4.5), мы заключаем, что сечения трубки лучей любой горизонтальной плоскостью имеют одну и ту же площадь, и получаем из уравнения (163), что восходящая составляющая потока волнового действия

$$W_r \omega_r^{-1} \, d\omega_r/\partial m \tag{168}$$

постоянна вдоль луча. Если лучи уже определены, то при помощи этого принципа легко найти амплитуды волн.

Для звуковых волн мы запишем составляющие волнового вектора в виде

$$k = k_H \cos\psi, \quad l = k_H \sin\psi, \quad m = k_H \operatorname{ctg}\theta, \tag{169}$$

где k_H — постоянная горизонтальная составляющая этого вектора, ψ — его постоянный азимутальный угол с направлением воздушного потока, а θ — его *переменный* угол с вертикалью.

Тогда

$$\omega_r = c_0(z)\,(k^2 + l^2 + m^2)^{1/2} = c_0(z)\,k_H \operatorname{cosec}\theta, \qquad (170)$$

так что уравнение (166) дает

$$\sin\theta = \frac{c_0(z)}{\omega k_H^{-1} - V(z)\cos\psi} \qquad (171)$$

как аналог закона Снелла (128). Рефракция, обусловленная температурными изменениями и изменениями воздушного потока, представляется числителем и знаменателем выражения (171) соответственно. Траектории лучей, когда угол θ уже определен как функция высоты z, получаются из уравнений (167) в виде

$$dx/dz = V(z)\,[c_0(z)]^{-1}\sec\theta + \cos\psi\operatorname{tg}\theta, \quad dy/dz = \sin\psi\operatorname{tg}\theta. \qquad (172)$$

Амплитуды звуковых волн выводятся на основании того, что восходящая составляющая потока волнового действия

$$(W_r\omega_r^{-1})\,c_0\cos\theta = k_H^{-1}W_r\sin\theta\cos\theta \qquad (173)$$

остается постоянной вдоль луча.

При отсутствии значительного воздушного потока заметное воздействие на распространение звука могут оказывать температурные изменения. Положительный вертикальный градиент, удовлетворяющий неравенству (75), влечет за собой уменьшение $c_0(z)$ с высотой на величину до 6 м/с на км. Это приводит к тому, что (171) уменьшается с высотой, так что лучи отклоняются вверх. Хотя кривизна очень невелика (*радиус* кривизны может быть записан в виде $dz/d(\sin\theta)$ и достигает по меньшей мере 60 км), она может оказывать существенное влияние на горизонтальное распространение над плоской поверхностью: лучи, переносящие энергию, поднимаются почти на 8 м через 1 км расстояния по горизонтали (или на 33 м через 2 км). Хотя область, не содержащая лучей (рис. 79), и не является зоной полной тишины, мы увидим (разд. 4.11), что амплитуды в ней резко убывают с высотой.

При «инверсии», как, например, в случае, когда ночное охлаждение почвы приводит к *возрастанию* температуры (а следовательно, и величины (171)) с высотой, лучи (снова при отсутствии воздушного потока) отклоняются вниз. При этом звуковые волны, которые распространяются почти горизонтально, могут проявлять свойства «захваченных волн». Это объясняется тем, что лучи, приближающиеся к высоте, где $c_0(z)$ равно ωk_H^{-1} (так что $\theta = \pi/2$), становятся горизонтальными и после этого могут отклоняться только обратно к земле (рис. 79); после отражения от земли этот процесс может повториться.

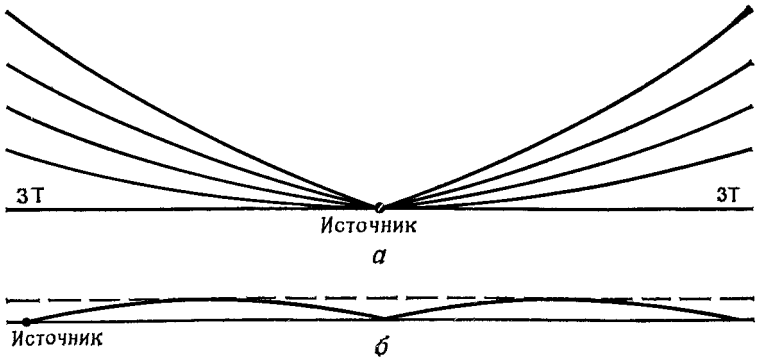

Рис. 79. *а* — отклонение вверх звуковых лучей, генерируемых находящимся на поверхности Земли источником в атмосферу, температура которой убывает с высотой. Область ЗТ, расположенную ниже луча, испускаемого по касательной к поверхности Земли, часто называют зоной тишины. *б* — отклонение вниз звуковых лучей, генерируемых находящимся на поверхности Земли источником в атмосферу, температура которой возрастает с высотой. Лучи, испускаемые под достаточно малыми углами, могут снова отклоняться к земле.

Как было указано в конце разд. 4.5, детальный анализ таких захваченных волн требует более тонкого прослеживания лучей (разд. 4.11), однако имеются признаки того, что горизонтальное распространение может усиливаться при таких «инверсных» условиях.

Воздействие воздушного потока качественно аналогично, но количественно может быть более сильным. Скорость воздушного потока $V(z)$ может возрастать с высотой значительно более резко, чем возрастает или убывает $c_0(z)$. В таком случае распространение волн против потока (с отрицательным $\cos\psi$) влечет за собой существенное уменьшение величины (171) с высотой: лучи отклоняются вверх, а амплитуды звуковых волн на уровне земли соответственно уменьшаются. Наоборот, распространение, направленное по потоку (с положительным $\cos\psi$), усиливается на уровне земли снова благодаря свойствам захваченных волн, как и предполагалось на основании того, что лучи, приближающиеся к критическому уровню, где

$$V(z)\cos\psi = \omega k_{\text{н}}^{-1} - c_0(z), \qquad (174)$$

становятся горизонтальными, а затем отклоняются снова в сторону земли. Простое наблюдение, действительно, показывает, что воздушный поток вызывает существенное увеличение амплитуд звуковых волн на уровне земли по одну сторону

от источника, где распространение происходит по потоку, и уменьшение их по другую сторону от источника, где распространение происходит против потока. Теперь мы видим, что это и есть влияние *неравномерности* воздушного потока (усиление с высотой).

Для внутренних волн мы записываем

$$k = k_{\text{H}}\cos\psi,\ l = k_{\text{H}}\sin\psi,\ m = -k_{\text{H}}\operatorname{tg}\theta, \tag{175}$$

где k_{H} и ψ имеют тот же самый смысл, что и в (169), а θ хотя и определяется иначе, тем не менее представляет собой угол, который образуют лучи с направленной вверх вертикалью при отсутствии воздушного потока. Тогда (166) принимает вид

$$\omega = k_{\text{H}}V(z)\cos\psi + \omega_{\text{r}} = k_{\text{H}}V(z)\cos\psi + N(z)\cos\theta, \tag{176}$$

откуда следует

$$\sec\theta = \frac{N(z)}{\omega - k_{\text{H}}V(z)\cos\psi} \tag{177}$$

как аналог соотношения (131) для спокойного воздуха. Траектории лучей, если θ уже определен из (177), находятся из уравнений

$$dx/dz = k_{\text{H}}V(z)\,[N(z)]^{-1}\sec^2\theta\operatorname{cosec}\theta + \cos\psi\operatorname{tg}\theta, \tag{178}$$
$$dy/dz = \sin\psi\operatorname{tg}\theta,$$

полученных из (167) с групповой скоростью (91). Изменения амплитуды определяются на основании того, что восходящая составляющая потока волнового действия

$$\frac{1}{2}\rho_0^{-1}q_1^2k_{\text{H}}^{-1}\operatorname{tg}\theta \tag{179}$$

(являющаяся выражением (133), деленным на $\omega_{\text{r}} = N\cos\theta$) остается постоянной вдоль луча.

Эффекты рефракции, обусловленные изменением $N(z)$ (разд. 4.5), а также и изменением $V(z)$, могут быть весьма значительными. Однако для внутренних волн существует *качественное* различие между этими двумя видами эффекта рефракции.

Возможно, что, как и в разд. 4.3 и 4.5, захваченные волны могут возникать всюду, где θ стремится к 0, так что относительная частота ω_{r} достигает своего максимально возможного значения $N(z)$. Необходимое условие

$$\omega = N(z) + k_{\text{H}}V(z)\cos\psi \tag{180}$$

может удовлетворяться в областях, где *либо* $N(z)$, *либо* $V(z)\cos\psi$ уменьшается (последнее выражение является состав-

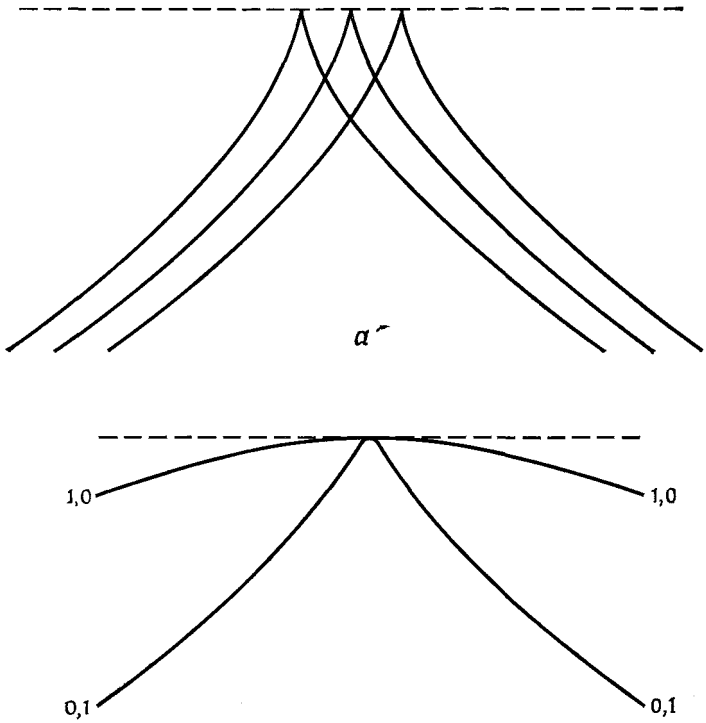

Рис. 80. Поведение внутренних волн, приближающихся к критическому уровню (указанному штриховой линией), где уравнение (180) удовлетворяется в результате того, что $N(z)$ убывает с высотой z по линейному закону. *а* — при отсутствии воздушного потока лучи имеют точки возврата с вертикальной касательной на критическом уровне (в данном случае там, где $N(z)$ становится равным волновой частоте ω). *б* — при воздушном потоке лучи касательны к критическому уровню. Они изображены для случая постоянной скорости потока V в плоскости рисунка (так что $\psi = 0$). Лучи удовлетворяют уравнению

$$dx/dz = \operatorname{tg}\theta + [kV/(\omega - kV)] \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$$

и построены для значений множителя, стоящего в квадратных скобках, равных 1,0 и 0,1; заметим, что случай *а* соответствует предельному поведению, когда этот коэффициент равен нулю.

ляющей воздушного потока в направлении горизонтальной составляющей распространения волн относительно воздуха). Лучи, доходящие до этого критического уровня, могут только повернуть обратно (из-за изменения знака θ). В случае когда $V(z) = 0$ (т. е. в покоящемся воздухе), на этом критическом уровне обе производные в (178) стремятся к нулю и лучи имеют точки возврата с вертикальной касательной (рис. 80, *а*). При

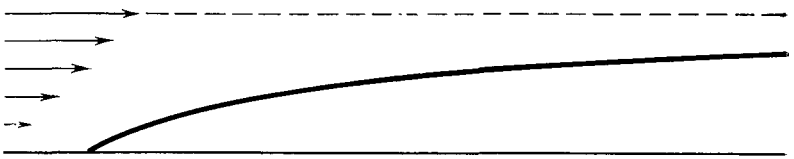

Рис. 81. Поведение внутренних волн, приближающихся к критическому уровню особого вида (указанному штриховой линией), при котором относительная частота ω_r стремится к нулю. Вся волновая энергия передается среднему течению до того, как луч асимптотически достигнет этого критического уровня. В представленном на рисунке случае поток имеет скорость $V(z)$, линейно возрастающую с высотой, волны распространяются вниз по потоку ($\psi = 0$), а частота Вяйсяля — Брента N постоянна.

наличии воздушного потока дело, однако, обстоит иначе; в этом случае вблизи критического уровня (где преобладает воздушный поток, так как групповая скорость падает до нуля) в выражении (178) для dx/dz главным является первый член. Он представляет собой *интегрируемую* особенность в dx/dz (потому что cosec θ в (178) ведет себя как величина, *обратная корню квадратному* из малого отклонения sec θ от 1), и лучи направлены по касательной к критическому уровню (рис. 80, *б*), как в акустическом случае (рис. 79).

Однако при наличии внутренних волн дополнительно может появиться критический уровень особого вида. Он расположен там, где θ стремится к $\pi/2$, так что ω_r стремится к 0 и колебания относительно воздушного потока прекращаются (что невозможно в покоящемся воздухе, так как $\omega_r = \omega$ является постоянной). Это имеет место там, где

$$V(z)\cos\psi = \omega k_H^{-1}, \tag{181}$$

т. е. там, где составляющая воздушного потока в направлении горизонтальной составляющей распространения волн относительно него *возрастает* до величины ωk_H^{-1}.

Лучи приближаются асимптотически (рис. 81) к такому критическому уровню, где dx/dz имеет неинтегрируемую особенность, поскольку $\sec^2\theta$ в (178) ведет себя акк *квадрат* величины (177) при $\theta \to \pi/2$; таким образом, требуется бесконечное время, чтобы лучи достигли его. Тем временем волновая энергия стремится к нулю, так как сохранение волнового *действия* (волновой энергии, деленной на ω_r) означает, что там, где относительная частота ω_r стремится к нулю, *вся волновая энергия передается среднему течению.*

Действительно, согласно (159), напряжение Рейнольдса, переносящее горизонтальную составляющую осредненного коли-

чества движения вверх, равно горизонтальной составляющей волнового вектора, умноженной на восходящую составляющую потока волнового действия, причем обе эти величины постоянны вдоль лучей. Поэтому среднее течение около критического уровня ускоряется за счет волн, создающих ниже этого уровня постоянное напряжение, которое отсутствует выше его.

Проведенные выше рассуждения дают общее представление о том, каким образом внутренние волны могут играть основную роль в вертикальном обмене количеством движения воздушного потока. Критический уровень (181), где энергия и количество движения, переносимые волнами, поглощаются, меняется в зависимости от ω, k_{H} и ψ. Таким образом, он различен для разных гармоник ряда Фурье, и многие из них могут существенно влиять на перенос количества движения. Можно полагать, что подобные эффекты имеют место и в океане.

4.7. Стационарные течения, генерируемые затуханием волн

Мы только что проанализировали, каким образом стационарный неравномерный воздушный поток может изменять распространение звуковых и внутренних волн. Мы показали, что эти волны могут обмениваться энергией и количеством движения со средним течением. Хотя (строго говоря) это может влиять на предполагаемую стационарность среднего течения, изменения энергии происходят слишком медленно, чтобы возникающие небольшие отклонения от стационарности могли повлиять на законы распространения. Тем не менее даже по отношению к большой энергии средних течений эти изменения могут произвести (в случаях, подобных рассмотренному в конце разд. 4.6) значительное перераспределение на более продолжительном отрезке времени.

Напряжение Рейнольдса (156) выражает действие волн на любое бездивергентное среднее течение. В этом разделе мы рассмотрим, каким образом распространение звуковых и внутренних волн в первоначально покоящейся жидкости за счет этого напряжения генерирует стационарное течение. Сначала мы докажем, что это явление не может иметь место до тех пор, пока волны не будут *затухать*. Затем исследуем течения, возникающие, когда звуковые волны затухают в силу процессов, происходящих либо внутри жидкости (разд. 1.13), либо на ее границе (разд. 2.7). В заключение мы дадим довольно простую теорию вязкого затухания внутренних волн и покажем, как

этот процесс может или привести к возникновению течения, или не привести к нему.

Средняя сила, с которой волны действуют на элемент жидкости (рис. 78), возникает из-за *разности* между значениями напряжения Рейнольдса на противоположных сторонах этого элемента. Таким образом, средняя сила, действующая в направлении x_j на единицу объема жидкости, равна *градиенту* напряжения Рейнольдса:

$$F_j = -\partial\,(\rho_0\overline{u_i u_j})/\partial x_i. \tag{182}$$

Для незатухающих внутренних волн эта сила равна нулю, так как, согласно (17), ее можно записать в виде

$$-\rho_0\overline{u_i\,\partial u_j/\partial x_i}, \tag{183}$$

а скорость жидкости u_i параллельна поверхностям постоянной фазы, в то время как градиент $\partial/\partial x_i$ любой величины перпендикулярен им. Полученное заключение о том, что выражение (182) равно нулю, согласуется с тем, что в системах, описанных в конце разд. 4.6, напряжение Рейнольдса принимает постоянное значение в области, занимаемой волнами.

Для незатухающих звуковых волн сила F_j не обязательно равна нулю, но тем не менее не может порождать никаких течений. Причина этого состоит в том, что F_j является градиентом скаляра; следовательно, эта сила не вызовет бездивергентное течение, так как она может полностью уравновешиваться градиентом среднего давления.

Этот результат можно доказать следующим образом. Незатухающие звуковые волны являются безвихревыми, так что производная в выражении (183) есть то же самое, что и $\partial u_i/\partial x_j$, а тогда это выражение является градиентом величины

$$-\frac{1}{2}\rho_0\overline{u_i^2}. \tag{184}$$

Можно считать, что в звуковых волнах выражение (182) включает не только член (183), но также и член

$$-\overline{u_j\partial\,(\rho_0 u_i)/\partial x_i} = \overline{u_j\,\partial\rho_e/\partial t}, \tag{185}$$

но последний имеет то же самое значение, что и

$$-\overline{\rho_e\,\partial u_j/\partial t} = \overline{\rho_e\rho_0^{-1}\,\partial p_e/\partial x_j} \tag{186}$$

(так как среднее значение производной по времени от любой пульсирующей величины, такой, как $\rho_e u_j$, должно быть равно нулю), а (186) равно градиенту величины

$$\frac{1}{2}\rho_0^{-1}c_0^{-2}\overline{p_e^2}. \tag{187}$$

Таким образом, F_j является градиентом от скалярной величины, равной сумме (184) и (187), которая представляет собой разность между плотностью потенциальной энергии и плотностью кинетической энергии. Эта разность равна, конечно, нулю при условиях, близких к условиям в случае плоских волн, включающим условия «дальнего поля» (гл. 1), когда сила F_j действительно обращается в нуль. Однако даже в ближнем поле сила F_j не порождает никаких течений, так как она может быть точно уравновешена градиентом среднего давления, равным разности между плотностями кинетической и потенциальной энергий.

В лаборатории часто наблюдают, как источники звука генерируют стационарный воздушный поток. Этот «звуковой ветер» стал известным, когда начали широко использовать мощные источники (часто с ультразвуковыми частотами), основанные на пьезоэлектрических свойствах кварца, и поэтому его иногда называют «кварцевым ветром». Только что проведенный анализ вполне определенно наводит на мысль, что звуковой ветер должен зависеть от *затухания* акустического пучка; эта точка зрения подтверждается тем фактом, что поток прежде всего наблюдается при тех очень высоких частотах, при которых в толще жидкости имеет место значительное затухание. Действительно, как показано в разд. 1.13, часть акустической энергии, потерянная таким образом за каждый волновой период, составляет

$$2\pi\omega\delta c_0^{-2}, \tag{188}$$

где коэффициент диффузии звука δ включает в себя постоянные вклады от вязкости и теплопроводности, а также и зависящий от частоты вклад от термодинамических «запаздываний». Таким образом, доля энергии, потерянная на единице пути распространения, которая равна величине (188), деленной на длину волны $2\pi c_0\omega^{-1}$, принимает значение

$$\beta = \delta\omega^2 c_0^{-3}, \tag{189}$$

которое становится особенно значительным при высоких частотах.

При этих частотах плоский источник звука, такой, как грань колеблющегося кварцевого кристалла, может генерировать узкий пучок (разд. 1.12). Мы рассмотрим сначала звуковой ветер, связанный с затуханием такого пучка.

Действующая на жидкость суммарная сила, вызываемая пучком мощности P (в Вт), равна Pc_0^{-1} и распределена таким образом, что на расстоянии X от источника сила, отнесенная к единице длины, дается выражением

$$Pc_0^{-1}\beta e^{-\beta X}. \tag{190}$$

Приведем два альтернативных способа интерпретации этого результата.

В напряжении Рейнольдса (156) в звуковом пучке преобладающим членом, очевидно, является составляющая, параллельная пучку (член $\rho_0\overline{u_1^2}$, соответствующий $i = j = 1$, если пучок направлен вдоль оси x_1). Соответственно в градиенте (182) основным членом является скорость изменения по x_1, обусловленная затуханием. Действительно, мы только что показали, что любое воздействие пучка, не являющегося строго параллельным (разд. 1.12), не проявлялось бы при отсутствии затухания. Таким образом, сила на единицу объема, определяемая выражением (182), почти параллельна пучку и принимает значение, соответствующее затуханию, происходящему со скоростью β на единицу пути, а именно значение

$$\beta\rho_0 u_1^2 = \beta W = \beta I c_0^{-1}, \tag{191}$$

где W — плотность волновой энергии, а I — интенсивность (поток волновой энергии). Поэтому сила, отнесенная к единице длины, принимает вид (190), так как интеграл от I по площади поперечного сечения пучка равен мощности

$$Pe^{-\beta X}, \tag{192}$$

остающейся в пучке на расстоянии X от источника после затухания со скоростью β на единицу пути.

Еще проще (возможно) воспользоваться результатом (159), доказанным в предыдущем разделе для звуковых волн, чтобы убедиться, что поток количества движения в пучке равен потоку энергии I, умноженному на величину $\omega^{-1}k_1$, которая равна c_0^{-1}. Суммарный поток количества движения на расстоянии X от источника поэтому равен потоку энергии (192), умноженному на c_0^{-1}. А тогда видно, что генерирующая стационарный поток сила (190), отнесенная к единице пути, представляет собой убывание на единицу пути этой акустической скорости потока количества движения.

Распределение стационарной силы, обусловленной звуковыми волнами (F_j на единицу объема в общем случае или же величина (190) на единицу пути для пучка), генерирует поле потока, который сам по себе становится стационарным, как только достигает такой скорости, при которой оказываемое ему вязкое сопротивление будет препятствовать дальнейшему ускорению жидкости. При этом уравнения, определяющие поле бездивергентной средней скорости $\overline{u}_j$, принимают вид

$$\rho_0\overline{u}_i\,\partial\overline{u}_j/\partial x_i = F_j - \partial\overline{p}/\partial x_j + \mu\nabla^2\overline{u}_j. \tag{193}$$

Правая часть уравнения (193) включает отнесенные к единице объема силы, обусловленные волнами, распределением среднего давления и вязкими напряжениями (см. разд. 3.5), а левая часть представляет собой член, равный произведению массы на ускорение при условиях стационарного течения.

Движения акустического потока обычно рассчитываются без учета левой части уравнения (193), так что принимается, что $\overline{u}_j$ удовлетворяет уравнениям

$$F_j - \partial \overline{p}/\partial x_j + \mu \nabla^2 \overline{u}_j = 0, \quad \partial \overline{u}_j/\partial x_j = 0. \tag{194}$$

Это упрощение, по-видимому, логично, так как средние течения (вызванные силами, пропорциональными акустической мощности) пропорциональны квадратам возмущений; поэтому величина в левой части (193) пропорциональна четвертой степени возмущений, и ею следует пренебречь при определении любой величины второго порядка, подобной полю среднего потока. Мы приведем сначала результаты линеаризации уравнения (193) для $\overline{u}_j$, которая сводит его к уравнениям (194), описывающим течения с малыми числами Рейнольдса; затем мы покажем, насколько слабыми должны быть, однако, возмущения, чтобы это было хорошей аппроксимацией.

В литературе, посвященной течениям с малыми числами Рейнольдса, показывается, что решения уравнений (194) в неограниченной жидкости можно записать в виде

$$\overline{u}_j = \int \frac{F_j r^2 + (F_i r_i)\, r_j}{8\pi\mu r^3}\, d\tau, \tag{195}$$

где вектор r_i (с модулем r) означает перемещение от объемного элемента $d\tau$, на который действует сила $F_j\, d\tau$, до точки с искомой скоростью $\overline{u}_j$. Подинтегральное выражение в (195) называется полем скоростей от *стокслета*, порождаемым силой $F_j\, d\tau$.

При очень большой скорости затухания β распределение (190) силы, отнесенной к единице длины, в звуковом пучке может быть достаточно хорошо представлено как поле скоростей от стокслета, генерируемое одной сосредоточенной силой $F = P c_0^{-1}$, приложенной в центре масс $X = \beta^{-1}$ этого распределения. Указанное поле скоростей легко построить (рис. 82, *а*) при помощи правила, согласно которому объемный расход через любое «кольцо» радиуса s с центром на линии действия этой сосредоточенной силы (и перпендикулярное ей) равен

$$(4\mu)^{-1} F s^2 r^{-1}. \tag{196}$$

Очевидно, что объемный расход (196) через каждое поперечное сечение одной из трубок тока на рис. 82, *а* должен сохранять

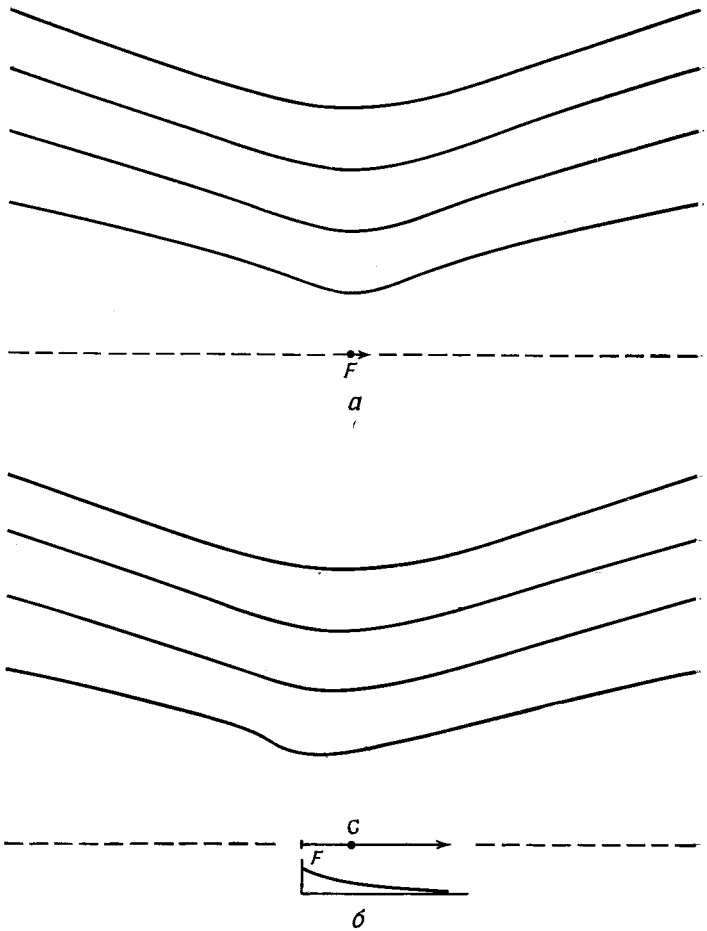

Рис. 82. Медленное стационарное течение, порождаемое средней силой F, с которой акустический пучок действует на жидкость. *а* — трубки тока для стокслета (решение для медленного течения, генерируемого сосредоточенной в точке силой F). *б* — трубки тока для экспоненциального распределения силы (190), характерного для затухающего акустического пучка. В обоих случаях штриховая линия изображает ось симметрии. Объемный расход в каждой изображенной здесь трубке тока равен расходу в самой внутренней трубке тока.

одно и то же постоянное значение. В качестве этих объемных расходов через разные трубки тока на рис. 82, *а* используются равноотстоящие значения.

Более точное изображение дано на рис. 82, *б*, показывающем поле скоростей от экспоненциального распределения силы (190) вдоль оси пучка. На расстояниях, бо́льших примерно $3\beta^{-1}$ от центра масс С эпюры силы, оно почти совпадает с полем скоростей от одного стокслета в точке С (рис. 82, *а*).

Твердые границы часто существенно изменяют звуковые потоки; это влияние границ можно исследовать методами, применяемыми для течений с малыми числами Рейнольдса. Когда акустический пучок создается колеблющейся мембраной, заподлицо заделанной в плоскую стенку (ср. с разд. 1.12), эта стенка, создавая дополнительное вязкое сопротивление потоку, может уменьшить как его скорость, так и его протяженность. При малых числах Рейнольдса поле скоростей, создаваемое сосредоточенной силой F при наличии нормальной к этой силе плоской стенки, меняется следующим образом: если I — зеркальное изображение положения стокслета в плоскости, то объемный расход (196) сводится к

$$(4\mu)^{-1} Fs^2 \left[r^{-1} - r_{\mathrm{I}}^{-1} - \frac{1}{2} (r_{\mathrm{I}}^2 - r^2)\, r_{\mathrm{I}}^{-3} \right], \qquad (197)$$

где r_{I} — расстояние от изображения I. (Очевидно, простое вычитание r_{I}^{-1} сделало бы твердую стенку поверхностью тока, однако требуется еще дополнительное вычитание члена типа диполя $(^1/_2)\,(r_{\mathrm{I}}^2 - r^2)\, r_{\mathrm{I}}^{-3}$, чтобы дать единственное решение, удовлетворяющее условию прилипания.)

Мы можем воспользоваться выражением (197) для расчета стационарного течения, генерируемого распределением (190) силы, отнесенной к единице длины, на расстоянии X от стенки, на которой расположен источник звука (рис. 83). Мы видим, что наличия этой единственной границы достаточно, чтобы ограничить поток вихревым кольцом, возбуждаемым звуковым пучком и испытывающим сопротивление главным образом из-за пристеночного трения. Общий расход пропорционален $P\,(c_0\mu\beta)^{-1}$, а средняя скорость потока пропорциональна $P\beta\,(c_0\mu)^{-1}$.

Трудности, возникающие при переходе от приближения малых чисел Рейнольдса к полному использованию нелинейного уравнения (193), обычно очень велики, но, к счастью, известно точное автомодельное решение уравнения (193) для случая одной сосредоточенной силы F. Характер такого решения зависит от значения безразмерного параметра $\rho_0 F\mu^{-2}$ (равного *квадрату* эффективного числа Рейнольдса). Для значений этого

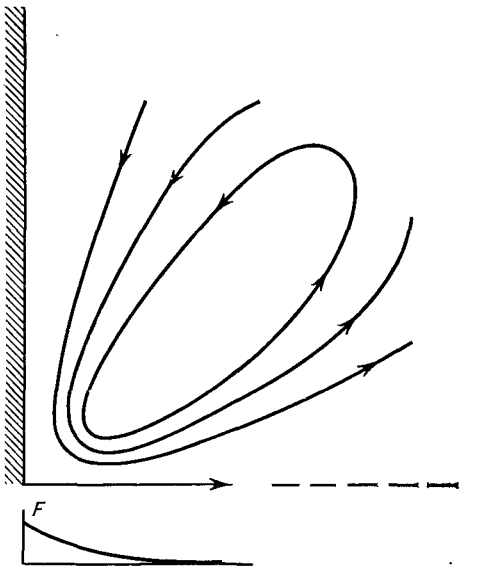

Рис. 83. Медленное стационарное течение, создаваемое акустическим пучком от расположенного на плоской стенке источника, генерирующим распределение силы (190). Сплошными линиями изображены меридиональные сечения трубок тока, которые делят общий расход 0,080 $P\,(c_0\mu\beta)^{-1}$ на четыре равные части.

параметра, меньших примерно десяти, указанное решение сводится к стокслету от силы F.

В этом решении объемный расход через «кольцо» радиуса s, перпендикулярное линии действия силы, принимает вид

$$4\pi\mu\rho_0^{-1}s^2\,(\sigma r - x)^{-1}, \qquad (198)$$

где x — расстояние, измеряемое в направлении силы от точки ее приложения до «кольца» (таким образом, $r^2 = x^2 + s^2$). Постоянная σ удовлетворяет уравнению

$$\rho_0 F\mu^{-2} = 16\pi\left[\frac{4}{3}\,\sigma\,(\sigma^2-1)^{-1} + \sigma - \sigma^2\,\mathrm{ar\,th}\,(\sigma^{-1})\right], \qquad (199)$$

где член в квадратных скобках при больших значениях σ ведет себя как σ^{-1}. Асимметрия, обусловленная наличием в выражении (198) члена с x, становится незначительной для значений σ, бóльших примерно пяти, что соответствует $\rho_0 F\mu^{-2} < 10$.

Отсюда следует, что представление в виде стокслета способности акустического пучка генерировать стационарное течение допустимо только для акустических выходных мощностей,

меньших чем

$$10\mu^2\rho_0^{-1}c_0 \approx 10^{-6} \text{ Вт для воздуха.} \qquad (200)$$

Если акустическая мощность на выходе превосходит 10^{-6} Вт, то в звуковом ветре становится существенной асимметрия типа струи, возникающая из-за инерции жидкости.

На рис. 84 показаны три конфигурации трубок тока для различных значений $\rho_0 F\mu^{-2}$. Небольшие отклонения от симметрии, характерной для случая малых чисел Рейнольдса (рис. 82, *а*), представлены на рис. 84, *а* при $\rho_0 F\mu^{-2} = 35$ (что соответствует источнику $3\cdot10^{-6}$ Вт). Течение типа струи, расширяющееся, однако, под большим углом, изображено на рис. 84, *б* при $\rho_0 F\mu^{-2} = 314$ (акустическая мощность $3\cdot10^{-5}$ Вт), а узкая струя при $\rho_0 F\mu^{-2} = 3282$ (акустическая мощность $3\cdot10^{-4}$ Вт) представлена на рис. 84, *в*. В последнем случае благодаря инерции количество движения струи переносится далеко от источника.

Струи при еще бóльших числах Рейнольдса турбулентны. Наблюдения показали, что среднее течение при этом сохраняет общий вид течения на рис. 84, *в*, так как турбулентность в круглой струе, создающая количество движения со скоростью F, перераспределяет его со скоростью, грубо эквивалентной действию «эффективной вязкости» μ_e при $\rho_0 F\mu_e^{-2}$ порядка $3\cdot10^{-3}$.

Таким образом, при бóльших акустических мощностях область звукового ветра принимает форму узкой струи, которая при мощностях, равных 10^{-3} Вт или превосходящих это значение, является турбулентной. В любом случае узкой струи никакого граничного влияния такого типа, как показано на рис. 83, практически не должно быть. Диссипация энергии происходит главным образом внутри струи, и при необходимом вовлечении жидкости в струю имеет место небольшое сопротивление со стороны любых границ, размеры которых намного превышают ширину струи.

Звук, распространяющийся в узких трубах, таких, что основная диссипация акустической энергии происходит в тонких пограничных слоях на стенках трубы (разд. 2.7), генерирует совершенно иной тип потока. Распределение средней силы вдоль трубы, описываемое законом (190), по-прежнему имеет место, хотя соответствующее уменьшение энергии β на единицу длины дается уже не формулой (189), а выражением

$$\beta = (2\nu\omega)^{1/2}(c_0 a)^{-1} \qquad (201)$$

для трубы радиуса a. Однако эта сила, имея равномерное поперек трубы распределение (191), не создает никакого потока:

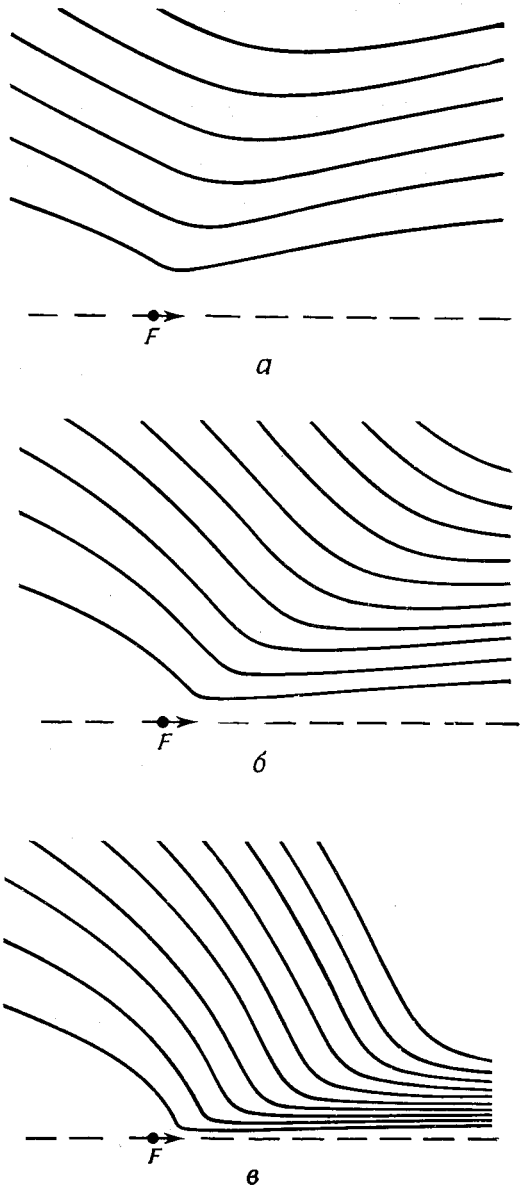

Рис. 84. Не слишком медленное течение, создаваемое в жидкости с плотностью ρ_0 и вязкостью μ сосредоточенной силой F для трех значений $\rho_0 F \mu^{-2}$: 35 (*а*), 314 (*б*), 3282 (*в*). Во всех случаях штриховая линия изображает ось симметрии. Объемный расход в каждой трубке тока равен расходу в самой внутренней трубке тока.

она автоматически уравновешивается противоположно направленным градиентом среднего давления.

Поэтому течение генерируется только отклонением средней силы (182) *в пределах пограничного слоя* от ее значения вне этого слоя. Мы изучим это в специальных координатах, которые были использованы в разд. 2.7, чтобы описать пограничный слой; итак, теперь z — расстояние от стенки, а x — расстояние вдоль трубы в направлении распространения.

Градиент $\partial/\partial z$ является преобладающим в пограничном слое, поэтому не удивительно, что

$$-\rho_0 \partial\,(\overline{uw})/\partial z \tag{202}$$

оказывается там хорошей аппроксимацией осевой составляющей силы на единицу объема (182). Действуя в этой узкой области, она порождает стационарное течение, испытывающее сопротивление вязкого напряжения сдвига, так что

$$\mu\, \partial\bar{u}/\partial z = (\rho_0 \overline{uw}) - (\rho_0 \overline{uw})_{\text{ex}}. \tag{203}$$

Индекс ex здесь, как и в разд. 2.7, приписывается значениям, внешним по отношению к пограничному слою, так что (203) означает, что вязкое напряжение сдвига, оказывающее сопротивление среднему потоку, в точке внутри пограничного слоя приравнивается суммарному воздействию напряжений Рейнольдса, действующих между этой точкой и кромкой пограничного слоя. Поэтому сдвиговое среднее течение в пограничном слое будет иметь скорость

$$\bar{u} = \nu^{-1} \int_0^z [\overline{uw} - (\overline{uw})_{\text{ex}}]\, dz. \tag{204}$$

Мы вычислим ее для случая, когда осевая скорость u в звуковых волнах имеет вид

$$u = u_{\text{ex}} \{1 - \exp [-z\,(i\omega/\nu)^{1/2}]\}, \tag{205}$$

полученный в разд. 2.7. Тогда перпендикулярная стенке трубы скорость w в пограничном слое будет определяться выражением

$$w = -i\,(\omega/c_0)\,(i\omega/\nu)^{-1/2} u_{\text{ex}}\, \{1 - \exp [-z\,(i\omega/\nu)^{1/2}]\}, \tag{206}$$

так что дивергенция $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z$ не зависит от z (что необходимо, чтобы сделать $\partial\rho/\partial t$ постоянным поперек пограничного слоя).

Осредненное произведение действительных частей выражений (205) и (206) равно

$$\overline{uw} = -\frac{1}{2}(\omega/c_0)(\nu/2\omega)^{1/2}|u_{ex}\{1-\exp[-z(i\omega/\nu)^{1/2}]\}|^2, \qquad (207)$$

откуда интеграл (204) может быть записан как

$$\bar{u} = |u_{ex}|^2(2c_0\sqrt{2})^{-1}\int_0^z \{1-|1-\exp[-z(i\omega/\nu)^{1/2}]|^2\}(\omega/\nu)^{1/2}dz. \qquad (208)$$

Значение $\bar{u}$ у кромки пограничного слоя (где $z(\omega/\nu)^{1/2}$ велико) легко находится в виде

$$(\bar{u})_{ex} = |u_{ex}|^2(4c_0)^{-1}. \qquad (209)$$

Интересно, что при оценке выражения (204) у кромки пограничного слоя кинематическая вязкость ν, как показывает значение (209), исчезает.

Резюмируя, отметим, что силы в пограничном слое порождают ветер (209) непосредственно вне этого слоя. Если суммарный расход через трубу невозможен (как в случае звуковых волн, которые генерируются на закрытом конце), градиент среднего давления должен быть как раз достаточен, чтобы вызвать центральное обратное течение (с пуайзелевским распределением), при котором не будет среднего переноса жидкости через любое поперечное сечение. При этом среднее течение на расстоянии s от оси трубки характеризуется параболическим распределением скорости

$$\bar{u} = |u_{ex}|^2(4c_0)^{-1}[-1+2(s/a)^2]. \qquad (210)$$

Для пучка интенсивности I значение величины $|u_{ex}|^2$ равно $2I/(\rho_0 c_0)$. Поэтому максимальные скорости «звукового ветра» в узкой трубе имеют величину

$$I(2\rho_0 c_0^2)^{-1}, \qquad (211)$$

достигающую 4 мм/с при атмосферном давлении, когда $I = 10^3$ Вт/м^2 (интенсивность звука в пределах трубки 150 дБ).

Проведенные выше вычисления соответствуют настолько длинной трубе, что обусловленное трением затухание позволяет пренебречь любыми волнами, отражаемыми от дальнего конца. Другим предельным случаем является труба, действующая как резонатор, возбуждаемый в некоторой системе стоячих волн. При этом осевая скорость u имеет вид (205), где u_{ex}, за исключением множителя $\exp(i\omega t)$, является некоторой *действитель-*

ной функцией x (вместо зависимости вида $\exp(-i\omega x/c_0)$, характерной для бегущих волн). Соответствующая скорость w определяется выражением

$$(i\omega/\nu)^{-1/2}\,(du_{ex}/dx)\,\{1-\exp[-z\,(i\omega/\nu)^{1/2}]\} \qquad (212)$$

по той же причине, что и в (206). В этом случае расчет влияния члена (202), представляющего среднюю силу, производится так же, как и выше, и дает добавку

$$-u_{ex}\,(du_{ex}/dx)\,(4\omega)^{-1} \qquad (213)$$

к средней скорости $(\overline{u})_{ex}$ на кромке пограничного слоя. Однако для такого движения (из-за более резкого *изменения вдоль оси* среднего значения квадрата осевой скорости u) становится существенным влияние

$$-\rho_0\partial\,(\overline{u^2})/\partial x \qquad (214)$$

продольного напряжения Рейнольдса. Учет этого влияния при помощи аналогичных методов дает добавку к $(\overline{u})_{ex}$, как раз вдвое бóльшую (213). В итоге, складывая эти два члена, получаем

$$(\overline{u})_{ex} = -\frac{3}{4}\,\omega^{-1}u_{ex}\,(du_{ex}/dx). \qquad (215)$$

Уравнение (215) является записью знаменитого закона Релея, который гласит, что в стоячих волнах течение у кромки пограничного слоя всегда направлено *к узлам* (положения, где амплитуда скорости u_{ex} равна нулю) [1]. Это объясняет, почему частицы пыли стремятся скапливаться в узлах — явление, использовавшееся в прошлом веке, чтобы точно определить расстояние между узлами и, следовательно, скорость звука (рис. 85).

Стоячие волны вне пограничного слоя наблюдаются также в случае, когда бегущая звуковая волна падает на закрепленное компактное препятствие. Мы знаем (разд. 1.10), что если бы в звуковой волне скорость

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \exp(i\omega t) \qquad (216)$$

достигалась на месте препятствия при его отсутствии, то при наличии препятствия поле скоростей вблизи него практически будет бездивергентным полем осциллирующего обтекания (216) этого препятствия. Указанное поле скоростей обладает осциллирующим пограничным слоем общего вида (205), где

[1] Течение, конечно, как и ранее, уравновешиваемое центральным обратным течением.

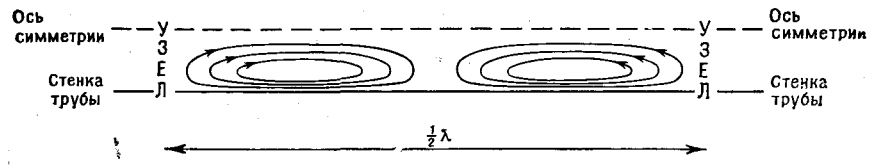

Рис. 85. Течение, генерируемое в трубке синусоидальной стоячей волной (для которой $u_{ex} = u_1 \sin(2\pi x/\lambda)$, не считая множителя $\exp(i\omega t)$). Соотношение между радиальным (радиус трубки) и осевым (длина волны) масштабами может быть произвольным. Общий расход делится указанными трубками тока на четыре равные части. Течение стремится заставить мельчайшую пыль скапливаться в узлах $x = 0$ и $x = \lambda/2$. Этот факт дает возможность измерить расстояние $\lambda/2$ для волн данной частоты, а затем определить скорость звука.

z — расстояние от поверхности препятствия. Здесь снова скорость внешнего потока u_{ex} является действительной функцией положения на этой поверхности, если не считать множитель $\exp(i\omega t)$.

Это пограничный слой с дополнительным членом $-z\,(du_{ex}/dx)$ в выражении для w, который нужно добавить к предыдущему члену (212), чтобы поле локальной скорости имело нулевую дивергенцию (вместо той, которая была *постоянной* поперек пограничного слоя). Однако в действительности оказывается, что при расчете средней скорости $\bar{u}$ на кромке пограничного слоя этот дополнительный член не имеет никакого значения (хотя он и изменяет распределение *внутри* пограничного слоя, создавая интересное обратное течение вблизи поверхности). Соответственно закон Релея (215) по-прежнему имеет место. Он означает, что движение всегда направлено *к точкам застоя*.

Например, в случае закрепленного кругового цилиндра радиуса a, подвергающегося действию перпендикулярных его оси плоских волн, распределение внешней скорости имеет вид

$$u_{ex} = 2u_1 \sin(x/a) = 2u_1 \sin\theta, \tag{217}$$

где $x = a\theta$ — координата пограничного слоя, измеряемая вдоль поверхности от передней точки застоя. Тогда средняя скорость у кромки пограничного слоя дается выражением (215), принимающим вид

$$(\bar{u})_{ex} = -\frac{3}{2}(\omega a)^{-1}u_1^2 \sin 2\theta; \tag{218}$$

это течение, как обычно, направлено к точкам застоя ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$).

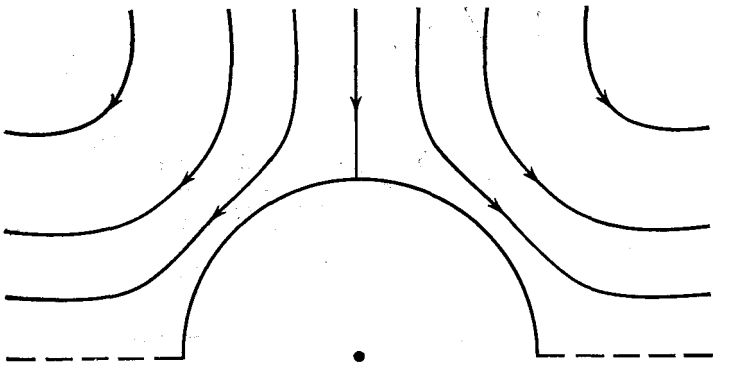

Рис. 86. Медленное обтекание зекрепленного кругового цилиндра, вызванное звуковой волной, распространяющейся в направлении, указанном штриховой линией (относительно которой вся картина течения симметрична). Показанные на чертеже линии тока делят полный расход в каждом квадранте на четыре равные части

На рис. 86 изображено соответствующее обтекание цилиндра при малых числах Рейнольдса, когда азимутальная составляющая скорости уменьшается обратно пропорционально кубу расстояния от оси. Наоборот, если бы число Рейнольдса, основанное на скорости течения (218), было большим, то инерционные эффекты стремились бы удерживать это течение в пределах несколько более узкой области...

Из-за действия вязкости энергия внутренних волн уменьшается (рис. 87) со скоростью

$$\nu\,(k^2 + l^2 + m^2) \tag{219}$$

в единицу времени; если скорость (219) выразить через скорость распространения энергии (91), то она составит

$$\beta = \nu\,(k^2 + l^2 + m^2)^2\,(Nm)^{-1} \tag{220}$$

на единицу пути вдоль лучей. Это приводит к средней силе на единицу объема, которая задается выражением (182), направлена вдоль лучей и величина которой выражается через плотность волновой энергии W в виде βW. Вертикальная составляющая этой средней силы легко уравновешивается той гравитационной восстанавливающей силой, которая противодействует малому восходящему среднему перемещению жидкости. Горизонтальная составляющая является при этом мощным источником горизонтального течения.

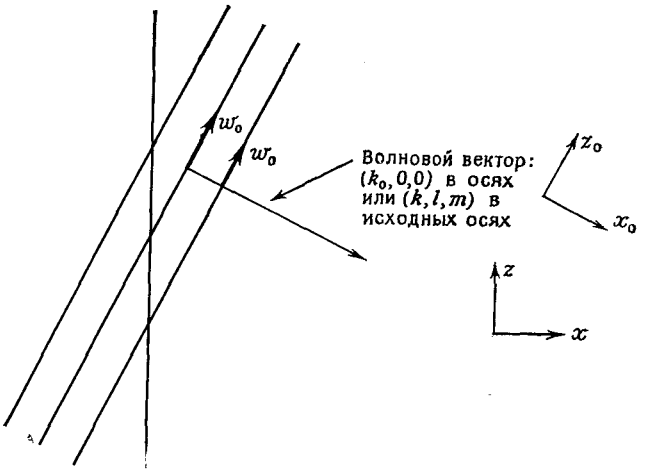

Рис. 87. К вязкому затуханию внутренних волн. Движение жидкости, согласно рис. 72, происходит в направлении самого крутого спуска на поверхностях постоянной фазы. В осях (x_0, y_0, z_0), для которых это направление совпадает с осью z_0 и волновой вектор направлен по оси x_0, скорость жидкости имеет составляющие $(0, 0, w_0)$, а сдвиг равен $-\partial w_0/\partial x_0$. Поэтому скорость диссипации энергии на единицу объема равна среднему значению величины $\mu\,(\partial w_0/\partial x_0)^2$, где μ — коэффициент вязкости. Полная волновая энергия равна среднему значению величины $\rho_0 w_0^2$ (удвоенной кинетической энергии) на единицу объема. Таким образом, отношение скорости диссипации энергии к общей волновой энергии составляет νk_0^2, где $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематический коэффициент вязкости. В первоначальных осях эта величина принимает значение (219).

В лабораторных условиях, однако, нетрудно создать в ограниченном резервуаре горизонтальные градиенты давления, которые уравновесят эту горизонтальную силу. В таком случае дополнительные вертикальные перемещения генерируют гравитационные восстанавливающие силы, которые уравновешивают также и вертикальный градиент этого распределения давления, и течение прекращается!

4.8. Метод стационарной фазы в трехмерном случае

Основная цель настоящей главы состоит в том, чтобы исследовать общие свойства волн в анизотропных диспергирующих системах, описываемых линейными уравнениями. Во вве-

дении в анизотропную дисперсию (разд. 4.4) мы рассматривали системы, которые однородны, но в других отношениях представляют собой системы довольно общего типа. При изучении таких систем основное внимание уделяется волнам, которые по существу являются диспергирующими, так что в каждом положении их приближенно можно считать синусоидальными с более или менее четко определенным локальным волновым числом. В этом случае можно определить фазовую функцию, свойства которой приводят к уравнениям, описывающим траектории лучей и распространение энергии. В разд. 4.5—4.7 этот метод был обобщен сначала на случай неоднородных систем, а затем на случай волн, взаимодействующих со средним течением.

Теперь самое время более детально исследовать природу анизотропной дисперсии. Мы имеем в виду проанализировать сложное возмущение, которое первоначально может совсем не иметь никакого сходства с синусоидальной волной, однако по истечении времени можно ожидать, что его компоненты с различными волновыми числами отделятся одна от другой (диспергируют). В случае строго одномерного распространения нам удалось это сделать в разд. 3.7 при помощи анализа Фурье, примененного для представления возмущения в виде линейной комбинации синусоидальных компонент с последующей асимптотической оценкой для больших t методом стационарной фазы.

Настоящий раздел аналогичным образом использует трехмерный анализ Фурье и трехмерную теорию стационарной фазы для того, чтобы определить асимптотическое поведение волн, генерируемых сложным начальным возмущением в анизотропной системе, описываемой линейными уравнениями. Однако, как и в разд. 3.7, необходимость использования разложения Фурье ограничивает нас *однородными* системами (обычно описываемыми уравнениями с *постоянными* коэффициентами), так что каждая фурье-компонента (синусоидальная волна постоянной амплитуды) по отдельности может быть решением уравнений движения.

В рамках этого ограничения мы убедимся, что указанный метод удовлетворительно описывает те ранние стадии дисперсии, к которым нельзя было применить метод разд. 4.4, и соответственно дает результаты, согласующиеся с траекторно-лучевыми методами. Эти факты, возможно, подсказывают необходимость смешанного подхода к исследованию дисперсии первоначально сложного локализованного возмущения в неоднородной системе: метод настоящего раздела может объяснить развитие волн на ранних стадиях дисперсии (без учета неоднородно-

сти, имеющей место в ограниченной области, занимаемой волнами на протяжении этих стадий), а дальнейшее развитие волн можно проследить при помощи теории лучей в неоднородных системах (разд. 4.5).

В качестве иллюстрации мы применим общую теорию, чтобы проанализировать, как сложное начальное возмущение в устойчиво стратифицированной жидкости диспергирует в виде внутренних гравитационных волн. Мы получим также аналогичные результаты для двумерного распространения и используем их, чтобы продемонстрировать некоторые свойства (предсказанные в гл. 3) дисперсии возмущения штормового типа на поверхности океана.

Математически мы будем иметь дело с *начально-краевыми* задачами (другой тип задач, когда волны генерируются источником, осциллирующим с постоянной частотой, будет рассматриваться в разд. 4.9). Мы предположим, что синусоидальное колебание

$$q = a \exp\left[i\left(\omega t - k_j x_j\right)\right] \tag{221}$$

с постоянной амплитудой a является решением уравнений движения, когда выполняется соотношение однородной дисперсии

$$\omega = \omega\left(k_1,\ k_2,\ k_3\right). \tag{222}$$

Тогда трехмерный интеграл Фурье

$$q = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_0\left(k_1,\ k_2,\ k_3\right)\exp\left\{i\left[\omega\left(k_1,\ k_2,\ k_3\right)t - k_j x_j\right]\right\} dk_1\, dk_2\, dk_3 \tag{223}$$

представляет довольно общее решение этих уравнений, принимающее при $t = 0$ начальное значение

$$q_0\left(x_1,\ x_2,\ x_3\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_0\left(k_1,\ k_2,\ k_3\right)\exp\left(-ik_j x_j\right) dk_1\, dk_2\, dk_3. \tag{224}$$

Мы исследуем асимптотическое поведение интеграла (223) при больших t в случае, когда начальное возмущение сосредоточено в ограниченной области.

В выражения (223) и (224) включены множители 1/2 потому, что в правых частях этих выражений каждое волновое число $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ фактически *дублируется*, появляясь и как $(-k_1,\ -k_2,\ -k_3)$. Поэтому в любом практическом приложении целесообразно работать только с половиной пространства волновых

чисел (так же как в разд. 3.7 мы работали с половиной $0 < k < \infty$ одномерного пространства волновых чисел), причем можно выбрать любую половину, которая исключает $(-k_1, -k_2, -k_3)$ каждый раз, когда включает (k_1, k_2, k_3). Тогда в силу того, что обратное преобразование Фурье

$$Q_0(k_1, k_2, k_3) = \\ = \frac{1}{4}\pi^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_0(x_1, x_2, x_3)\exp(ik_jx_j)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \qquad (225)$$

имеет $Q_0(-k_1, -k_2, -k_3)$ в качестве своего комплексно сопряженного значения, q_0 равно *действительной части* интеграла (224), взятого только по выбранному полупространству. Например, в случае внутренних волн удобно использовать полупространство $-\infty < k_3 < 0$; тогда в соответствии с договоренностью о том, что любая физическая величина, приравниваемая комплексному выражению, дается его действительной частью, получаем

$$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} Q_0(k_1, k_2, k_3)\exp(-ik_jx_j)\,dk_1\,dk_2\,dk_3. \qquad (226)$$

Те же самые замечания справедливы и для интеграла (223), где всегда можно принять, что

$$\omega(-k_1, -k_2, -k_3) = -\omega(k_1, k_2, k_3), \qquad (227)$$

поскольку комплексно сопряженное значение выражения (221) также является решением.

Нужно также заметить, как и в разд. 3.7, что при *заданных* k_1, k_2 и k_3 дисперсионное соотношение не обязательно имеет только одно решение (222) для ω. Например, для внутренних волн, удовлетворяющих зависимости (24), оно имеет два решения, равные по величине, но противоположные по знаку; действительно, для волнового числа в полупространстве $-\infty < k_3 < 0$ решения с положительным и отрицательным значениями ω соответствуют распространению волновой энергии вверх и вниз соответственно. В конце этого раздела мы докажем, что для такой системы начальным условиям общего вида всегда можно удовлетворить суммой линейной комбинации (223) волн с положительной ω и аналогичной комбинации волн с отрицательной ω вместе (в общем случае) с добавлением *стационарного* движения, которое, имея чисто горизонтальные и бездивергентные скорости, не может возбуждать никаких восстанавливающих сил. (Пока мы не будем учитывать такую стационарную

составляющую.) При асимптотической оценке каждого из членов (223), соответствующих двум различным решениям (222) дисперсионного соотношения, возникают идентичные математические проблемы, и при изложении теории мы можем остановиться только на одной из них (например, на решении для внутренних волн с положительным значением ω).

Излагаемый ниже метод является непосредственным обобщением метода разд. 3.7: мы запишем фазу как $t\psi$, где

$$\psi(k_1, k_2, k_3) = \omega(k_1, k_2, k_3) - k_j x_j/t; \tag{228}$$

тогда (223) примет вид

$$q = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_0(k_1, k_2, k_3)\exp[it\psi(k_1, k_2, k_3)]\,dk_1\,dk_2\,dk_3. \tag{229}$$

Это выражение мы и хотим оценить, когда t становится большим при фиксированном значении x_j/t, т. е. в точке, движущейся от начала координат с постоянной скоростью. Мы предположим, что ω, а следовательно, и ψ являются аналитическими функциями своих аргументов. Заметим, как и ранее, что Q_0, будучи обратным фурье-преобразованием (225) функции, которая стремится к нулю вне области начального возмущения, также будет аналитической функцией.

Для оценки (229) мы немного сдвинем область интегрирования параллельно мнимой оси так, чтобы там, где это возможно, мнимая часть ψ стала равной по меньшей мере $+\delta$. Тогда модуль экспоненты в (229) будет (самое большее) равен $\exp(-t\delta)$, в силу чего интеграл будет экспоненциально малым для больших t.

Для этой цели можно ввести деформацию, при которой

$$k_j \quad \text{переходит в} \quad k_j + g_j(k_1, k_2, k_3)\,i\delta \tag{230}$$

и мнимая часть функции ψ становится приближенно равной

$$(\partial\psi/\partial k_j)\,g_j\delta. \tag{231}$$

В любой области интегрирования, где величина вектора $(\partial\psi/\partial k_j)$ имеет положительную нижнюю границу (так что избегаются *стационарные* значения фазы ψ), величина g_j, необходимая для того, чтобы выражение (231) было равно по меньшей мере $+\delta$, ограничена сверху.

Это означает прежде всего, что там, где ψ не имеет стационарных значений, весь интеграл (229) экспоненциально стремится к нулю при больших t. Более того, даже там, где ψ имеет одно стационарное значение или несколько таких значений,

этот интеграл можно оценить через те приращения, которые получаются в результате интегрирования по небольшим областям вокруг каждого стационарного значения, вне которых величина вектора $\partial\psi/\partial k_j$ имеет положительную нижнюю границу.

Мы предполагали выше, что при деформации (230) интеграл не меняется по величине; это следует из общих результатов для аналитических функций нескольких комплексных переменных; однако мы, возможно, сможем указать простое доказательство специально для этого случая. Для малого δ при указанной деформации объемный элемент $dk_1\,dk_2\,dk_3$ меняется за счет множителя

$$1 + (\partial g_j/\partial k_j)\, i\delta + O(\delta^2); \tag{232}$$

это следует из физического смысла дивергенции $\partial g_j/\partial k_j$ или же может быть получено при помощи разложения якобиана преобразования (230)

$$\partial(k_1 + g_1 i\delta,\ k + g_2 i\delta,\ k_3 + g_3 i\delta)/\partial(k_1,\ k_2,\ k_3) \tag{233}$$

с точностью до порядка δ. Поэтому при отбрасывании членов порядка $O(\delta^2)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(k_1,\ k_2,\ k_3)\, dk_1\, dk_2\, dk_3 \tag{234}$$

от любой аналитической функции $f(k_1,\ k_2,\ k_3)$ в результате деформации (230) преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f + (\partial f/\partial k_j)\, g_j i\delta]\,[1 + (\partial g_j/\partial k_j)\, i\delta]\, dk_1\, dk_2\, dk_3. \tag{235}$$

Скорость его изменения по δ, следовательно, представляется выражением

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\partial(fg_j)/\partial k_j]\, dk_1\, dk_2\, dk_3, \tag{236}$$

которое обращается в нуль при условии (как мы предполагаем), что на бесконечности fg_j является малой величиной нужного порядка (фактически, $o(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{-1}$). То, что на каждом этапе любой деформации скорость изменения интеграла по δ равна нулю, означает, что значение этого интеграла вообще не может меняться.

Установив при помощи такой деформации, что единственный вклад в (229) дает небольшое множество точек интегрирования

E вблизи любого стационарного значения функции ψ, мы вычислим этот вклад, как в разд. 3.7. Вблизи стационарного значения

$$k_j = k_j^{(0)}, \quad \text{где} \quad \partial\psi/\partial k_j = 0, \tag{237}$$

разложение ψ имеет вид

$$\psi = \psi^{(0)} + \frac{1}{2}(k_i - k_i^{(0)})(k_j - k_j^{(0)})(\partial^2\omega/\partial k_i\,\partial k_j)^{(0)} + O(|k_j - k_j^{(0)}|^3), \tag{238}$$

где нулевой верхний индекс при функции ψ или ее второй производной (которая, согласно (228), совпадает со второй производной от ω) указывает значение при $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)})$. Тогда, как и в разд. (3.7), интеграл в (229), взятый по локальному множеству точек интегрирования E, можно аппроксимировать выражением

$$\int\int\int_{\mathrm{E}} Q_0^{(0)} \exp\left[it\psi^{(0)} + \frac{1}{2} it\,(k_i - k_i^{(0)})(k_j - k_j^{(0)}) \times \right.$$

$$\left. \times\,(\partial^2\omega/\partial k_i\,\partial k_j)^{(0)} \right] dk_1\,dk_2\,dk_3 \tag{239}$$

с коэффициентом погрешности $1 + O(|k_j - k_j^{(0)}|)$, обусловленным заменой функции Q_0 ее значением в положении стационарной фазы $k_j^{(0)}$, и с коэффициентом $1 + O(t\,|k_j - k_j^{(0)}|^3)$, обусловленным ошибкой в (238).

Экспонента квадратичной функции от k_j, входящая в (239), в том виде, как она написана, не годится для того, чтобы легко произвести интегрирование. Однако простой *поворот осей* делает это интегрирование чрезвычайно простым. Мы повернем оси k_1, k_2, k_3 таким образом, чтобы они стали главными осями тензора

$$(\partial^2\omega/\partial k_i\,\partial k_j)^{(0)}, \tag{240}$$

т. е. осями, в которых его матрица диагональна (все ее элементы при $i \neq j$ равны нулю). Тогда интеграл (239) распадается на *произведение*

$$Q_0^{(0)} \exp(it\psi^{(0)}) \prod_{j=1}^{3} \left\{ \int \exp\left[\frac{1}{2} it\,(k_j - k_j^{(0)})^2\,(\partial^2\omega/\partial k_j^2)^{(0)} \right] dk_j \right\} \tag{241}$$

трех одномерных интегралов. Каждый из них нужно вычислять по деформированному пути интегрирования (вдоль которого модуль подынтегральной функции в (241) меньше $\exp(-t\delta)$), так чтобы локальное множество интегрирования E вдоль всей

границы могло быть непрерывным продолжением оставшейся части деформированного множества интегрирования, где это условие выполняется.

Мы уже видели (разд. 3.7), что каждое одномерное интегрирование такого вида, как в (241), выполняется быстрее всего при помощи деформации

$$k_j - k_j^{(0)} = s_j \exp\left[\frac{1}{4}\pi i \operatorname{sign}(\partial^2\omega/\partial k_j^2)^{(0)}\right], \tag{242}$$

которая превращает интеграл в гауссов интеграл с погрешностью O [exp $(-t\delta)$]. Это дает для (241) значение

$$Q_0^{(0)} \exp(it\psi^{(0)}) \prod_{j=1}^{3} \left\{[2\pi/t|\partial^2\omega/\partial k_j^2|^{(0)}]^{1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[\frac{1}{4}\pi i \operatorname{sign}(\partial^2\omega/\partial k_j^2)^{(0)}\right]\right\} \tag{243}$$

с коэффициентом погрешности $1 + O(t^{-1/2}) + O$ [exp $(-t\delta)$] в каждом члене произведения. (Мы отложим до разд. 4.11 обсуждение вопроса о том, какие изменения происходят в случае, когда в стационарной точке какая-либо из главных вторых производных $(\partial^2\omega/\partial k_j^2)^{(0)}$ обращается в нуль.)

Хотя результат (243) и был получен только в специальных осях (главные оси тензора (240)), его легко записать в форме, инвариантной относительно поворота осей, и *поэтому* он равно справедлив и в первоначальной системе осей волновых чисел. Мы запишем произведение трех фазовых множителей

$$\exp\left[\frac{1}{4}\pi i \operatorname{sign}(\partial^2\omega/\partial k_j^2)^{(0)}\right] \text{ в виде } \exp(i\Theta),$$

где Θ характеризует тип стационарной точки $k_j^{(0)}$ следующим образом:

$\Theta = (3/4)\,\pi$ *в минимуме*, $-(3/4)\,\pi$ *в максимуме и* $(1/4)\,\pi$ *или* $-(1/4)\,\pi$ *в седловой точке в соответствии с тем, возрастает ли функция* (228) *вдоль двух или только одного из трех главных направлений.* (244)

Кроме того, мы запишем произведение трех вторых производных в (243) как значение $J^{(0)}$ при $k_j = k_j^{(0)}$ якобиана

$$J = \partial(U_1, U_2, U_3)/\partial(k_1, k_2, k_3) \tag{245}$$

для вектора групповой скорости $U_j = \partial\omega/\partial k_j$ как функции вектора k_j. Это определитель матрицы (240), который в главных осях имеет нулевые внедиагональные элементы, в силу чего $J^{(0)}$ является произведением трех диагональных элементов

$(\partial^2\omega/\partial k_j^2)^{(0)}$. В то же самое время $J^{(0)}$ инвариантен относительно поворота осей, так как он характеризует расширение элемента объема при переходе от переменных k_j к переменным U_j.

Подставляя в (243) Θ и $J^{(0)}$, а также выражение $\psi^{(0)}$ из (228), мы получим асимптотическое представление интеграла в (229) для больших t в виде

$$q = Q_0^{(0)}\,(2\pi/t)^{3/2}\,|J^{(0)}|^{-1/2}\exp\{i\,[\omega\,(k_1^{(0)},\ k_2^{(0)},\ k_3^{(0)})\ t - k_j^{(0)}x_j + \Theta]\}, \tag{246}$$

если существует только одна стационарная точка $k_j^{(0)}$, или же в виде суммы членов (246) от каждой стационарной точки.

В действительности, согласно (229), величина q равна половине полного бесконечного интеграла, оценка которого была только что получена. Однако, так как мы не хотим рассматривать $-k_j^{(0)}$ как самостоятельную стационарную точку, отличающуюся от $k_j^{(0)}$, мы опустим множитель 1/2 и примем q равным сумме членов (246) (имея в виду каждый раз действительную часть) только для тех волновых чисел со стационарным ψ, которые лежат в пределах выбранного полупространства.

Согласно (235), эти стационарные точки находятся там, где

$$x_j/t = \partial\omega/\partial k_j = U_j, \tag{247}$$

т. е. движутся с групповой скоростью. Это дает простое объяснение, почему в асимптотическом решении (246) появляется якобиан (245).

Например, в системе, для которой плотность волновой энергии для синусоидальной волны (221) равна произведению среднего квадрата величины q (определяемого как $(1/2)\,|\,a\,|^2$) и некоторого множителя $W_0\,(k_1,\ k_2,\ k_3)$, начальная волновая энергия для возмущения (224), соответствующая элементу $dk_1dk_2dk_3$ полупространства волновых чисел, составляет

$$W_0\,(k_1,\ k_2,\ k_3)\ 4\pi^3\,|\,Q_0\,|^2\,dk_1dk_2dk_3. \tag{248}$$

Вот почему по теореме Парсеваля к среднему квадрату функции (224) добавляется член $2\pi^3\,|\,Q_0\,|^2\,dk_1dk_2dk_3$ от каждого элемента *всего* пространства волновых чисел. В момент t, когда волны с волновым числом k_j обнаруживаются в положении (247), те из них, которые принадлежат элементу $dk_1dk_2dk_3$, заполняют область с объемом

$$|\,\partial\,(U_1t,\ U_2t,\ U_3t)/\partial\,(k_1,\ k_2,\ k_3)|^{(0)}dk_1dk_2dk_3 = \\ = t^3\,|\,J^{(0)}\,|\,dk_1dk_2dk_3. \tag{249}$$

Отношение (248) к (249) определяет *плотность* энергии

$$W_0\,(k_1,\ k_2,\ k_3)\ 4\pi^3\,|\,Q_0\,|^2t^{-3}\,|\,J^{(0)}\,|^{-1}. \tag{250}$$

Прекрасной проверкой проделанной работы является тот факт, что выражение (250) равно произведению $W_0(k_1, k_2, k_3)$ на средний квадрат асимптотического решения (246); правда, такие энергетические рассуждения не дают никакой информации о фазовом сдвиге Θ. Однако, как подтверждает более строгий подход этого раздела, результаты, полученные в предположении, что энергия распространяется с групповой скоростью, не теряют силу из-за требования, согласно которому сложное возмущение «распутывается» на ранних стадиях дисперсии.

Внутренние волны дают превосходную иллюстрацию наших результатов. Согласно условию (244), для таких волн Θ всегда равно $+\pi/4$. Это следует из того, что в силу (24), в пространстве волновых чисел поверхности $\omega = \text{const}$ представляют собой конусы, оси которых вертикальны, а значение ω возрастает как функция угла раствора конуса. Следовательно, *азимутальное* направление всюду является главным направлением, в котором ω *возрастает*. Мы можем вычислить два главных направления в меридиональной плоскости, но это не нужно: функция (228) (ω минус линейное приближение) должна *возрастать в одном из них и убывать в другом*, так как существует направление (образующая конуса), вдоль которого она остается постоянной. В итоге резюмируем: фаза возрастает только в двух из трех главных направлений, так что $\Theta = \pi/4$.

В случае внутренних волн мы воспользуемся волновым вектором (k, l, m). Непосредственное, хотя и громоздкое вычисление якобиана J, определенного в (245), с использованием компонент групповой скорости (91) дает

$$J = -N^3 m^4 (k^2 + l^2)^{-1/2} (k^2 + l^2 + m^2)^{-9/2}. \qquad (251)$$

Этот расчет будет короче, если волновой вектор в полупространстве представить в сферических координатах:

$$k = K \cos\theta \cos\psi, \quad l = K \cos\theta \sin\psi, \quad m = -K \sin\theta \qquad (252)$$

(точно так же, как в (175), но только с заменой k_H на $K \cos\theta$). Это упрощает вектор групповой скорости (91), так что в момент t точка $\mathbf{U}t$, где находятся волны с волновым вектором (k, l, m), будет иметь координаты

$$x = NtK^{-1} \sin^2\theta \cos\psi, \quad y = NtK^{-1} \sin^2\theta \sin\psi,$$
$$z = NtK^{-1} \sin\theta \cos\theta. \qquad (253)$$

Тогда в соответствии с (251)

$$t^3 J = \partial(x, y, z)/\partial(k, l, m) =$$
$$= [\partial(x, y, z)/\partial(K, \theta, \psi)]\,[\partial(k, l, m)/\partial(K, \theta, \psi)]^{-1} =$$
$$= [-(Nt)^3 K^{-4} \sin^4\theta]\,[K^2 \cos\theta]^{-1} = -(Nt)^3 K^{-6} \sin^4\theta \sec\theta. \qquad (254)$$

Уравнение (246) означает теперь, что

$$q = [Q_0^{(0)}(K\cos\theta\cos\psi,\ K\cos\theta\sin\psi,\ -K\sin\theta)] \times$$
$$\times (2\pi/(Nt))^{3/2}(K^3\operatorname{cosec}^2\theta\cos^{1/2}\theta) \times$$
$$\times \exp\left\{i\left[Nt\cos\theta - (x\cos\psi + y\sin\psi)K\cos\theta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + zK\sin\theta + \frac{1}{4}\pi\right]\right\}. \qquad (255)$$

Это выражение показывает, что для волн с заданным волновым числом амплитуда убывает как $t^{-3/2}$, тогда как уравнения (253) для положения этих волн показывают, что их энергия заполняет объем, расширяющийся как t^3. Их гребни движутся, конечно, в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору (253).

Интересно выразить локальную амплитуду колебания q (скажем, q_1, задаваемую двумя первыми строками выражения (255)) через сферические координаты

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = r\cos\theta. \qquad (256)$$

Здесь, согласно (253),

$$r = NtK^{-1}\sin\theta. \qquad (257)$$

Тогда волновая амплитуда записывается в виде

$$q_1 = Q_0^{(0)}(Ntr^{-1}\sin\theta\cos\theta\cos\psi,\ Ntr^{-1}\sin\theta\cos\theta\sin\psi,$$
$$-Ntr^{-1}\sin^2\theta)(2\pi Nt)^{3/2}r^{-3}\sin\theta\cos^{1/2}\theta. \qquad (258)$$

Эта формула указывает на небольшое преимущество распространения под углами θ к вертикали, промежуточными между 0 и $\pi/2$. Она показывает, что при больших r в любой момент времени t амплитуда затухает со скоростью, обратно пропорциональной кубу r, в то время как выражение в первой строке принимает значение $Q_0^{(0)}(0, 0, 0)$, которое в силу формулы (225) пропорционально *интегралу* от начального возмущения. С другой стороны, в некотором фиксированном положении сигнал *растет* со временем до тех пор, пока не достигается некоторое пороговое волновое число $K_{\max}$ (за которым $Q_0^{(0)}$ становится пренебрежимо малым) в момент времени $rN^{-1}K_{\max}\operatorname{cosec}\theta$.

Здесь мы можем заметить, что даже если в начальных условиях не существует никакого определенного порога, он все же появится за счет дополнительного множителя $\exp(-(1/2)\nu K^2 t)$ в (258), представляющего затухание энергии

со скоростью (219). (Такой коэффициент затухания можно, как и в разд. 3.7, непосредственно включить в интеграл (223) и, следовательно, в его асимптотическое представление (246).)

Выше были описаны внутренние волны, распространяющиеся вверх (характеризующиеся положительной ω). Однако решение уравнений (16) — (22) при начальных условиях общего вида включает также и внутренние волны, распространяющиеся вниз (характеризующиеся отрицательной ω). Например, при заданных начальных значениях *как* вертикального перемещения, *так и* вертикальной скорости (или, что эквивалентно, ρ_e и q, которые связаны соотношением (21)) мы можем определить последующее поведение q в виде суммы члена (223) с положительной ω и другого такого члена с другой амплитудной функцией и отрицательной ω, а (21) дает аналогичное представление для ρ_e.

Такие решения для ρ_e и q определяют также p_e при помощи уравнения (18). В то же самое время они определяют u и v, если можно допустить, что линейные уравнения движения уже удовлетворяются во время возникновения начального возмущения. Это происходит потому, что из уравнений (16) следует равенство

$$\partial\,(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)/\partial t = 0; \tag{259}$$

таким образом, вертикальная компонента вихря не может изменяться и, будучи равной нулю в невозмущенном состоянии, должна и оставаться равной нулю. Тогда для каждого z двумерное векторное поле (u, v) однозначно определяется своим нулевым вихрем и своей дивергенцией

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = -\rho_0^{-1}\,\partial q/\partial z, \tag{260}$$

известной из (17).

С другой стороны, если допустимы более общие начальные условия, то на основании (259) они могут порождать произвольное значение $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, не зависящее от времени. Тогда u и v могут отличаться от безвихревого решения уравнения (260) на произвольное горизонтальное движение, которое является *как* бездивергентным, *так и* стационарным. С этим движением не связана никакая восстанавливающая сила, и оно может оставаться невозмущенным, пока волновая энергия распространяется, как было описано выше.

Поверхностные волны и некоторые другие волны в жидкости, подобные волнам на границах раздела (разд. 4.1), распространяются в двух измерениях. Развитый в настоящем разделе анализ подойдет и для этого случая, если в произведениях (241)

и (243) взять два члена вместо трех. Это дает

$$\Theta = \pi/2 \text{ в минимуме, } -\pi/2 \text{ в максимуме,}$$

$$0 \text{ в седловой точке; } J = \partial\,(U_1,\ U_2)/\partial\,(k_1,\ k_2), \qquad (261)$$

в то время как (246) заменяется на

$$q = Q_0^{(0)}\,(2\pi/t)\,|J^{(0)}|^{-1/2} \exp\{i\,[\omega\,(k_1^{(0)},\ k_2^{(0)})\,t - k_j^{(0)} x_j + \Theta]\}, \qquad (262)$$

где $k_j^{(0)}$ определяется из (247).

Интересно отметить простой вид этих результатов для изотропных волн, удовлетворяющих зависимостям

$$\omega = \omega\,(k) \text{ при } k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \text{ и } \omega'\,(k) = U\,(k). \qquad (263)$$

При этом условие (247) для $k_j = k_j^{(0)}$ переходит в условие

$$x_j = U\,(k)\,t\,(k_j/k),\ x = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = U\,(k)\,t, \qquad (264)$$

подтверждающее, что волновой вектор имеет направление распространения изотропных волн, энергия которых проходит расстояние $U\,(k)\,t$ за время t. Аналогично, (261) принимает вид

$$\Theta = \frac{1}{4}\,\pi \operatorname{sign}[U\,(k)] + \frac{1}{4}\,\pi \operatorname{sign}[U'\,(k)];\ \ J = k^{-1} U\,(k)\,U'\,(k); \qquad (265)$$

в частности, $\Theta = 0$ для поверхностных гравитационных волн. Наконец, (262) можно записать в виде

$$q = x^{-1/2} (Q_0^{(0)}\,(2\pi k^{(0)})^{1/2})\ |2\pi/[t\omega''\,(k^{(0)})]|^{1/2} \times$$
$$\times \exp\{i\,[\omega\,(k^{(0)})\,t - k^{(0)} x + \Theta]\}, \qquad (266)$$

подтверждающем утверждение, приведенное в начале разд. 3.7 по поводу того, что амплитуды волн при изотропном двумерном распространении изменяются в зависимости от положения и времени точно так же, как и при одномерном распространении, но содержат дополнительный множитель $x^{-1/2}$. В данном случае выражение в больших круглых скобках, определяющее энергию *на радиан* в волнах с волновым числом $k^{(0)}$, играет ту же роль, что $F\,(k_0)$ в разд. 3.7.

4.9. Общая теория осциллирующих источников волн

Мы только что воспользовались трехмерным анализом Фурье, чтобы показать асимптотическое поведение однородной линейной системы при *свободных колебаниях*, являющихся результатом сложного начального возмущения в ограниченной

области. В разд. 4.9 и 4.10 представлено дополнительное исследование *вынужденных колебаний* (волн, возбуждаемых осциллирующим источником с фиксированной частотой ω_0). Исследование снова ограничивается однородными системами, поскольку используется анализ Фурье. Асимптотическая оценка дается не относительно времени, а относительно *расстояния от источника*. Мы увидим, что на больших расстояниях распространение происходит так, как описывалось траекторно-лучевыми методами; при этом предполагается, что неоднородные системы можно исследовать при помощи гибридного метода: настоящий анализ мог бы быть использован для построения решения в области умеренных размеров вокруг источника, где неоднородность играет небольшую роль, в то время как развитие волн вне этой области можно было бы описать при помощи теории лучей в неоднородных системах (разд. 4.5).

Излагаемый ниже общий подход дает полезные результаты, касающиеся *направленного распределения* волновой энергии, генерируемой источниками, для многих типов волновых систем: не только для систем, проявляющих анизотропную дисперсию (подобно внутренним волнам, которые будут детально обсуждаться в разд. 4.10), но и для *изотропных* систем, подобных волнам на воде, и даже для недиспергирующих систем, подобных звуковым волнам. В частности, вновь получаются (и обобщаются на другие системы) результаты гл. 1, относящиеся к компактным источникам звука, после чего устанавливаются новые результаты, относящиеся к излучению от некомпактных источников звука.

В дальнейшем упомянутый выше метод распространяется (разд. 4.12) на волны, возбуждаемые *движущимися* воздействиями, осциллирующими с фиксированной частотой ω_0. Для их исследования требуется метод, пригодный для анизотропии, так как (какова бы ни была волновая система) движение источника вносит существенную анизотропию. Случай $\omega_0 = 0$ (неосциллирующий движущийся источник) включает задачи разд. 3.9 и 3.10 и, в частности, позволяет получить оценку распределения волновой энергии, связанной со стационарным движением корабля. И наоборот, наш настоящий метод существенно опирается на идею, впервые введенную в конце разд. 3.9.

Мы рассмотрим вынуждающее воздействие осциллирующего источника с частотой ω_0, пространственное распределение которого задается функцией

$$f(x_1, x_2, x_3) \exp(i\omega_0 t), \tag{267}$$

смысл которой должен быть уточнен. Мы воспользуемся разложением Фурье для функции f во *всем* пространстве волновых

чисел

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k_1,\ k_2,\ k_3)\exp(-ik_jx_j)\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \tag{268}$$

потому что в случае, когда частота ω_0 фиксирована (и никакая другая частота, даже $-\omega_0$, не допускается), волновые числа $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ и $(-k_1,\ -k_2,\ -k_3)$ действительно различны. Мы покажем ниже для различных способов задания вынуждающего воздействия, что характеристическая величина q, определяющая волны, дается интегралом Фурье

$$q = [\exp(i\omega_0 t)]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k_1,\ k_2,\ k_3)\exp(-ik_jx_j)}{B(\omega_0,\ k_1,\ k_2,\ k_3)}\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \tag{269}$$

где функция B такова, что уравнение

$$B(\omega,\ k_1,\ k_2,\ k_3) = 0 \tag{270}$$

является некоторой формой дисперсионного соотношения.

Для волн на воде распространение происходит в двух измерениях; поэтому в приведенных выше выражениях нужно опустить x_3 и k_3 (и интегрирование по k_3). Действительно, в случае довольно общей системы двумерно распространяющихся волн можно представить себе, что для колебаний вида

$$q = a\exp[i(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2)] \tag{271}$$

с произвольными ω, k_1 и k_2 некоторое граничное значение η (на какой-то граничной плоскости $x_3 = \text{const}$) можно было бы вычислить как

$$\eta = aB(\omega,\ k_1,\ k_2)\exp[i(\omega t - k_1x_1 - k_2x_2)]. \tag{272}$$

Тогда если *невозмущенная* диспергирующая система определяется граничным условием $\eta = 0$, то дисперсионное соотношение можно записать в виде

$$B(\omega,\ k_1,\ k_2) = 0. \tag{273}$$

С другой стороны, воздействие осциллирующего граничного возмущения

$$\eta = f(x_1,\ x_2)\exp(i\omega_0 t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(k_1,\ k_2)\times$$
$$\times\exp[i(\omega_0 t - k_1x_1 - k_2x_2)]\,dk_1\,dk_2 \tag{274}$$

вызвало бы (как в разд. 3.9) ответную реакцию

$$q = [\exp(i\omega_0 t)] \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k_1, k_2)\exp[-i(k_1x_1+k_2x_2)]}{B(\omega_0, k_1, k_2)}\, dk_1\, dk_2, \qquad (275)$$

так как (271) и (272) показывают, что для получения q значение η для каждой частоты и волнового числа нужно разделить на B.

В трехмерной волновой системе вынуждающие воздействия чаще всего описываются дифференциальным уравнением. Однако это приводит к той же самой форме решения в виде интеграла Фурье (269), если такое уравнение можно записать в виде

$$B\left(-i\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x_1}, i\frac{\partial}{\partial x_2}, i\frac{\partial}{\partial x_3}\right) q = \\ = f(x_1, x_2, x_3)\exp(i\omega_0 t), \qquad (276)$$

где $B(\omega, k_1, k_2, k_3)$ является *полиномом* (или в более общем случае отношением полиномов) от четырех переменных. Тогда свободные колебания удовлетворяют дифференциальному уравнению (276) с нулевой правой частью, так что любое решение вида плоской волны

$$q = a\exp[i(\omega t - k_j x_j)] \qquad (277)$$

удовлетворяет дисперсионному соотношению (270). Однако в общем случае, когда в правую часть уравнения (276) в качестве вынуждающей функции входит член источника, определяемый выражениями (267) и (268), решение можно записать в виде (269).

При попытке вычислить (269) или (275) мы встречаемся с той же самой «очень важной и известной трудностью», которая была описана в конце разд. 3.9: при интегрировании по действительным переменным k_j встречаются *полюсы* всюду, где

$$B(\omega_0, \mathbf{k}) = 0. \qquad (278)$$

Мы рассматриваем это уравнение (дисперсионное соотношение для $\omega = \omega_0$) как уравнение, определяющее *поверхность S волновых чисел* для частоты ω_0 (поверхность в пространстве волновых чисел) или же (для двумерных волновых систем) как уравнение, определяющее *кривую S волновых чисел* в плоскости (k_1, k_2). Из-за указанных полюсов внутри множества интегрирования в интеграле (269) возникает опасная неопределенность: могут получаться различные значения этого интеграла в зависимости от того, будет ли путь интегрирования, например, по k_1 проходить в комплексной плоскости k_1 слева или справа от определенного полюса (к тому же эти возможности могут комбинироваться в произвольной пропорции).

Такая математическая неопределенность соответствует истинной физической неопределенности. К «вынужденным» волнам, *действительно* исходящим от источника, можно было бы добавить произвольную линейную комбинацию «свободных» волн (решения уравнений при $f = 0$). Их энергия, будучи порожденной «на бесконечности», могла бы распространяться радиально внутрь *по направлению к* области источника. Поэтому математическая задача, поставленная уравнением (274) или (276), не может полностью соответствовать физической проблеме нахождения волн, генерируемых самим источником и удовлетворяющих «*условию излучения*», согласно которому на бесконечности не создается никакой волновой энергии.

Нужно заметить (как и в разд. 3.9), что этому условию излучения эквивалентны различные альтернативные математические приемы: некоторые непосредственно используют идеи групповой скорости, другие — тот факт, что для свободных волн с фиксированной действительной частотой ω_0 волновое число из-за *затухания* становится комплексным. И все же желательно иметь метод, который будет работать даже в том случае, когда затухание не принимается во внимание; при этом оказывается, что в большинстве случаев легко воспользоваться идеей источника волн, который *постепенно усиливается* до своего настоящего уровня.

Это означает, что при решении математической задачи

$$\omega_0 \text{ заменяется на } \omega_0 - i\varepsilon. \tag{279}$$

Тогда, в частности,

$$\exp(i\omega_0 t) \text{ заменяется на } \exp(\varepsilon t + i\omega_0 t), \tag{280}$$

так что источник (267) постепенно усиливается по экспоненциальному закону от нуля при $t = -\infty$ до своего настоящего уровня. Отыскивая только соответствующие усиливающиеся волны, которые меняются со временем как $\exp(\varepsilon t + i\omega_0 t)$, мы исключаем опасность получить решение, которое «загрязнено» другой волновой энергией, возбуждаемой «на бесконечности». (Здесь ε — малая положительная величина, которую в дальнейшем можно устремить к нулю.)

Как и в разд. 4.8, для быстрого и простого получения результатов оказывается удобным произвести *поворот осей*. Чтобы получить направленное распределение волновой энергии, мы должны найти асимптотическое поведение выражения (269) вдоль произвольной прямой L, выходящей из области источника. Для этого, каково бы ни было направление L, мы делаем предварительный поворот осей так, чтобы прямая L *совпала с положительной осью* x_1. Затем мы находим асимптотическое

поведение выражения (269), когда $x_1 \to +\infty$, а $x_2 = x_3 = 0$, т. е.

$$q = [\exp(i\omega_0 t)] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_2\, dk_3 \times \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k_1, k_2, k_3) \exp(-ik_1 x_1)}{B(\omega_0, k_1, k_2, k_3)} k_1. \quad (281)$$

Как и в разд. (3.9), оценим внутренний интеграл в (281) при помощи теоремы Коши. Путь интегрирования в комплексной плоскости k_1 *опускаем* на расстояние $\varkappa_1$, т. е. величине k_1 приписываем отрицательную мнимую часть $(-\varkappa_1)$, чтобы указанный интеграл стал величиной порядка $O[\exp(-\varkappa_1 x_1)]$. С точностью до ошибки этого порядка интеграл будет равен произведению $(-2\pi i)$ на сумму вычетов подинтегральной функции в каждом полюсе (где $B = 0$), через который проходит путь интегрирования в процессе его деформации (рис. 88).

Замена (279) сдвигает эти полюсы с вещественной оси k_1. Более того, она сдвигает их *вниз* от оси тогда и только тогда, когда дисперсионное соотношение (270) определяет ω как функцию $\mathbf{k}$ *таким образом, что* $\partial\omega/\partial k_1 > 0$. В этом и только в этом

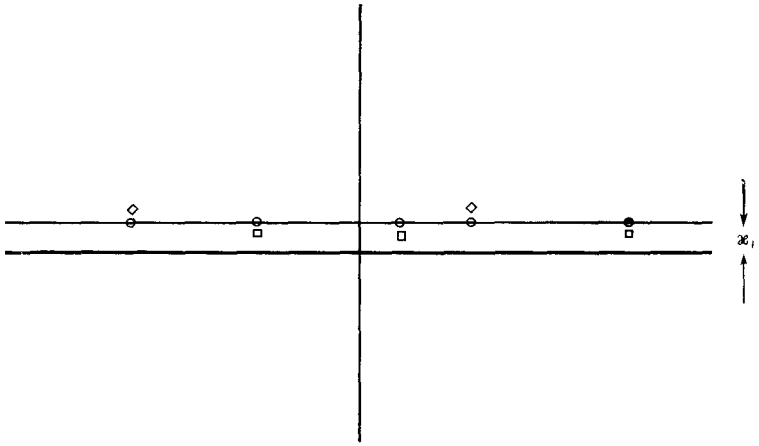

Рис. 88. Смещенный путь интегрирования (жирная линия) в комплексной плоскости k_1 для внутреннего интеграла в формуле (281). Кружками показаны положения полюсов при $\varepsilon = 0$, квадратами — смещенные положения полюсов при $\varepsilon > 0$, когда $\partial\omega/\partial k_1 > 0$, ромбами — смещенные положения полюсов при $\varepsilon > 0$, когда $\partial\omega/\partial k_1 < 0$. При смещении пути интегрирования вниз член с вычетами дают только полюсы, показанные квадратами.

случае после сдвига пути интегрирования вниз при вычислении внутреннего интеграла в (281) получается член с вычетами. Физически это условие ограничивает нас волнами, у которых производная $\partial\omega/\partial k_1$, т. е. составляющая скорости распространения энергии вдоль L, направлена *наружу от источника*; таким образом, указанное условие исключает возможность распространения энергии внутрь.

Мы можем теперь положить $\varepsilon \to 0$: введение множителя $\exp(\varepsilon t)$ в (280) выполнило свою функцию, которая состояла в том, чтобы ограничить возбуждаемые волны решениями дисперсионного соотношения (278), удовлетворяющими условию распространения энергии наружу. Обозначим через S_+ *ту часть* S (поверхности или кривой волновых чисел при $\omega = \omega_0$), на которой

$$\partial\omega/\partial k_1 > 0. \tag{282}$$

Тогда внутренний интеграл в (281) будет состоять с точностью до ошибки порядка $O[\exp(-\varkappa_1 x_1)]$ из суммы произведений $-2\pi i$ на вычет

$$F(k_1, k_2, k_3)\,[\partial B(\omega_0, k_1, k_2, k_3)/\partial k_1]^{-1} \exp(ik_1x_1) \tag{283}$$

подинтегральной функции относительно каждого полюса, удовлетворяющего условию (282), т. е. относительно любой точки на S_+ с данными значениями k_2 и k_3. Тогда интеграл по k_2 и k_3 можно рассматривать как интеграл по S_+:

$$q = -2\pi i\,[\exp(i\omega_0 t)] \iint\limits_{S_+} F(k_1, k_2, k_3)\,[\partial B(\omega_0, k_1, k_2, k_3)/\partial k_1]^{-1} \times \exp(-ik_1x_1)\,dk_2\,dk_3. \tag{284}$$

Эта формула дает основное выражение для волн, возбуждаемых в определенном направлении, идущем наружу от осциллирующего источника, причем оно получено в осях координат, повернутых таким образом, что это направление совпадает с положительной осью x_1. В оставшейся части настоящего раздела мы получим дальнейшее приближение для этого выражения при помощи метода стационарной фазы в двух важных случаях: (i) двумерное распространение, когда переменная k_3 не входит в формулу (284), а S является кривой; (ii) трехмерное распространение, когда S является поверхностью, искривленной в двух направлениях (k_2 и k_3); в разд. 4.10 проводится специальный разбор случаев, когда S либо *не имеет* кривизны, являясь (iii) плоскостью, либо имеет кривизну только в одном направлении, являясь (iv) обобщенным цилиндром или (v) обобщенным конусом (как в случае внутренних волн). Тем

временем мы отложим до разд. 4.11 все частные задачи, связанные с получением оценки вдоль направлений L, являющихся для поверхности S в некотором смысле *исключительными*.

В случае (i) *двумерного распространения*, когда S является кривой в плоскости (k_1, k_2), интеграл (284) нетрудно оценить для больших x_1 при помощи одномерного метода стационарной фазы, описанного в разд. 3.7. Фаза $-k_1x_1$ стационарна на S_+ в любой точке

$$(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}), \quad \text{где} \quad dk_1/dk_2 = 0. \tag{285}$$

Вблизи такой стационарной точки $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)})$ поверхность S_+ определяется уравнением

$$k_1 = k_1^{(0)} + \frac{1}{2}(d^2k_1/dk_2^2)^{(0)}(k_2 - k_2^{(0)})^2 + O(|k_2 - k_2^{(0)}|^3). \tag{286}$$

При этом метод разд. 3.7 показывает, что асимптотический вклад в (284) от каждой такой точки при больших x_1 дается выражением

$$-2\pi i\,[\exp(i\omega_0 t)]\,F(\mathbf{k}^{(0)})\,[(\partial B(\omega_0, \mathbf{k})/\partial k_1)^{(0)}]^{-1}\exp(-ik_1^{(0)}x_1)\times$$
$$\times\,[2\pi/|d^2k_1/dk_2^2|^{(0)}\,x_1]^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{4}\pi i\,\mathrm{sign}\,(d^2k_1/dk_2^2)^{(0)}\right] \tag{287}$$

(рассмотрение случаев, когда кривизна $|\,d^2k_1/dk_2^2\,|^{(0)}$ локально равна нулю, откладывается до разд. 4.11).

Теперь для удобства нужно представить этот результат в виде, инвариантном относительно поворота осей; при этом его можно будет непосредственно применить в задачах генерирования волн без какого-либо предварительного изменения осей. По отношению к произвольному направлению L условие (285) для стационарной фазы показывает, что $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)})$ является точкой кривой S волновых чисел, в которой нормаль $\mathbf{n}$ имеет направление L. В любой точке кривой существует два направления нормали, но, согласно условию (282), определяющему S_+, направление L должно быть направлением

нормали $\mathbf{n}$ к S, вдоль которой ω *возрастает*,
превышая свое значение ω_0, принимаемое на S. (288)

С учетом этого определения можно заменить $\partial B/\partial k_1$ на $\partial B/\partial n$. Мы заменим также $|\,d^2k_1/dk_2^2\,|^{(0)}$ на *кривизну* $\varkappa^{(0)}$ кривой волновых чисел в точке $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)})$ и обозначим фазовый член в (287) вместе с множителем $-i$ и последней экспонентой через $\exp(i\Theta)$, где

$\Theta = -(1/4)\,\pi$ или $-(3/4)\,\pi$ в зависимости от того,

обращена ли кривая S выпуклостью или вогнутостью к L. (289)

В этих обозначениях выражение

$$q = F(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}) |(\partial B/\partial n)^{(0)}|^{-1} (8\pi^3/(\varkappa^{(0)} x))^{1/2} \times \\ \times \exp\{i[\omega_0 t - k_j^{(0)} x_j + \Theta]\} \quad (290)$$

представляет вклад в q от любой точки $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)})$ на кривой волновых чисел при выполнении условия (288).

Заметим, что волны, обнаруженные вдоль направления L, идентифицируются при помощи (288) как *волны, для которых L является лучом*, так как их групповая скорость $\partial\omega/\partial k_j$ имеет направление L. Аналогично, выражение (290) совместимо с понятием равномерного потока энергии между соседними лучами, так как (рис. 89) расстояние между ними меняется с расстоянием x от источника пропорционально $\varkappa^{(0)} x$.

Волны на воде являются частным примером двумерного распространения, когда кривая волновых чисел представляет собой окружность (с $\varkappa^{(0)}$, принимающим постоянное значение $g\omega_0^{-2}$). Мы, однако, отложим использование их в качестве иллюстрации до обсуждения корабельных волн в разд. 4.12, где используется (290) в более общей форме, так как движение источника вносит существенную анизотропию.

В случае (ii) *трехмерного распространения*, когда S является поверхностью, искривленной в двух направлениях, интеграл (284) оценивается простым обобщением изложенного выше метода. Фаза $-k_1 x_1$ стационарна на S_+ в любой точке $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)})$, где

$$\partial k_1/\partial k_2 = 0 \quad \text{и} \quad \partial k_1/\partial k_3 = 0. \quad (291)$$

Вблизи такой стационарной точки разложение k_1 в общем случае включало бы *не только* член с $(k_2 - k_2^{(0)})^2$, как в (286), вместе с соответствующим членом, содержащим $(k_3 - k_3^{(0)})^2$, *но также и* член с перекрестным произведением $(k_2 - k_2^{(0)}) \times (k_3 - k_3^{(0)})$. Однако, как и в разд. 4.8, мы можем предварительно повернуть оси k_2 и k_3 (вокруг оси k_1) так, чтобы коэффициент $(\partial^2 k_1/\partial k_2 \partial k_3)^{(0)}$ в перекрестном произведении обратился в нуль. В таких «главных осях кривизны» для S мы будем иметь

$$k = k_1^{(0)} + \frac{1}{2}(\partial^2 k_1/\partial k_2^2)^{(0)} (k_2 - k_2^{(0)})^2 + \\ + \frac{1}{2}(\partial^2 k_1/\partial k_3^2)(k_3 - k_3^{(0)})^2 + O(|k_j - k_j^{(0)}|^3). \quad (292)$$

Тогда асимптотическое представление интеграла (284) распадается на произведение интегралов по k_2 и k_3. Его значение дается выражением (287), *в котором вторая строка повторяется еще раз* с заменой $(\partial^2 k_1/\partial k_2^2)^{(0)}$ на $(\partial^2 k_1/\partial k_3^2)^{(0)}$.

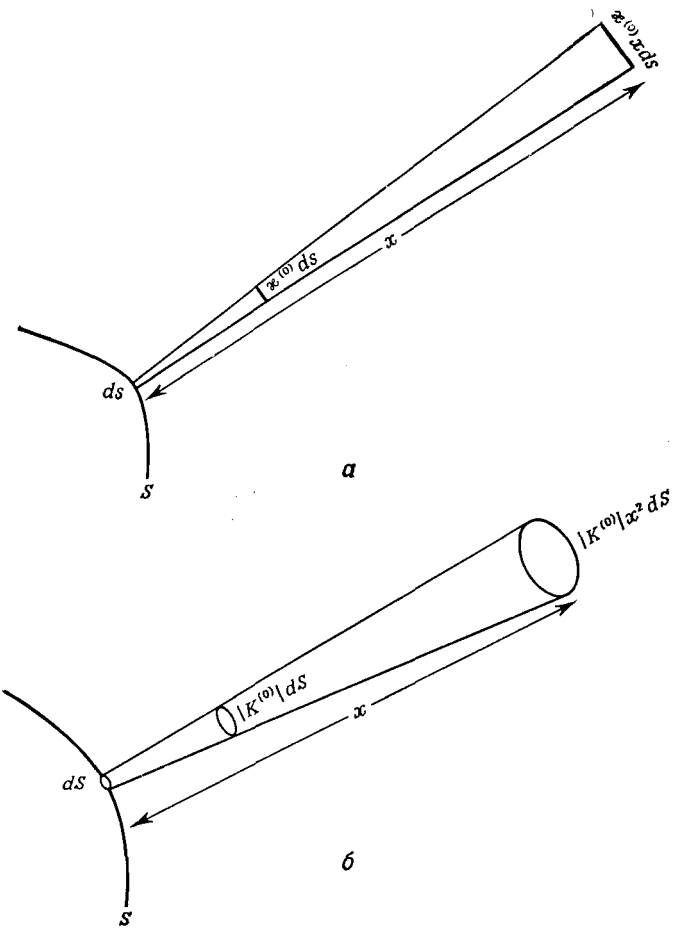

Рис. 89. Распространение энергии, происходящее между соседними направлениями нормали к S. $а$ — двумерный случай: два направления нормали образуют угол $\varkappa^{(0)} ds$, где ds — длина элемента кривой S волновых чисел, а $\varkappa^{(0)}$ — кривизна; интервал между ними на больших расстояниях x составляет $\varkappa^{(0)} x\, ds$. $б$ — трехмерный случай: конус нормалей к поверхности S волновых чисел образует телесный угол $|K^{(0)}|\, dS$, где dS — площадь элемента поверхности S, а $K^{(0)}$ — гауссова кривизна этой поверхности; площадь поперечного сечения конуса на больших расстояниях x равна, таким образом, $|K^{(0)}|\, x^2\, dS$.

В инвариантном относительно поворота осей виде условие (291) утверждает, что $k_j^{(0)}$ является точкой S, в которой нормаль $\mathbf{n}$ имеет направление L; согласно условию (282), определяющему S_+, это направление нормали должно быть, как и в (288), тем направлением, в котором ω *возрастает*, превышая свое значение ω_0, принимаемое на поверхности волновых чисел. Но здесь есть и нечто новое, а именно появление произведения

$$(\partial^2 k_1/\partial k_2^2)^{(0)}\,(\partial^2 k_1/\partial k_3^2)^{(0)} = K^{(0)} \tag{293}$$

двух главных кривизн поверхности волновых чисел (причем его модуль возводится в степень $-1/2$) при указанном выше повторении второй строки выражения (287). Это произведение $K^{(0)}$ представляет собой известную меру локальной искривленности поверхности S, известную под названием *гауссовой кривизны*; мы отложим до разд. 4.11 рассмотрение тех участков поверхности, где $K^{(0)} = 0$. Фазовый член в (287), включающий множитель $-i$, а также член с sign и повторяющийся член с sign, становится равным $\exp(i\Theta)$, где

$$\Theta = 0, \text{ или } -\pi/2, \text{ или } -\pi \text{ в зависимости от того, обращены ли выпуклостью к } L \text{ обе линии кривизны поверхности } S, \text{ или одна из них, или ни одна из них.} \tag{294}$$

В таких обозначениях выражение

$$q = F(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)})\,[(\partial B/\partial n)^{(0)}]^{-1}\,(4\pi^2/(|K^{(0)}|^{1/2}x)) \times \exp\{i[\omega_0 t - k_j^{(0)} x_j + \Theta]\} \tag{295}$$

представляет вклад в q от любой точки $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)})$ на поверхности волновых чисел при выполнении условия (288).

Этот весьма общий результат для трехмерного распространения от источника, осциллирующего с частотой ω_0, идентифицирует волны, обнаруживаемые в направлении L, как волны, для которых L является лучом, так как, согласно (288), вектор групповой скорости $\partial\omega/\partial k_j$ имеет направление L. Кроме того, он определяет их амплитуду как произведение фурье-преобразования функции источника $F(\mathbf{k}^{(0)})$, члена $[(\partial B/\partial n)^{(0)}]^{-1}$, зависящего от дисперсионного соотношения (270), и члена $4\pi^2/|K^{(0)}|^{1/2}x$, который обеспечивает сохранение потока энергии, так как площадь поперечного сечения трубки лучей, образуемой нормалями к элементарной площадке dS поверхности волновых чисел, равна $|K^{(0)}|\,x^2\,ds$ (рис. 89). Чтобы показать это подробнее, предположим, как и в разд. 4.8, что плотность энергии для волн с волновым вектором $\mathbf{k}$ можно записать как

$$W = W_0(\mathbf{k})\,\overline{q^2}. \tag{296}$$

Тогда (295) дает направленное распределение волновой энергии в виде

$$W = W_0(\mathbf{k}^{(0)})|F(\mathbf{k}^{(0)})|^2[(\partial B/\partial n)^{(0)}]^{-2}(8\pi^4/(|K^{(0)}|x^2)). \quad (297)$$

Поток энергии составляет $\mathbf{I} = W\mathbf{U}$, где $\mathbf{U}(\mathbf{k}^{(0)})$ является групповой скоростью с величиной $U = \partial\omega/\partial n$, которая принимает значение

$$U = -(\partial B/\partial n)/(\partial B/\partial\omega) \quad (298)$$

для дисперсионного соотношения (270). Выходную мощность источника можно получить из (297), умножив величину этого потока энергии на площадь поперечного сечения $|K^{(0)}|x^2\,dS$ трубки лучей, соответствующей элементу dS поверхности волновых чисел, и проинтегрировав по S, что дает

$$P = 8\pi^4\int\int_S UW_0(\mathbf{k})|F(\mathbf{k})|^2(\partial B/\partial n)^{-2}\,dS \quad (299)$$

(индекс (0), используемый для обозначения точки на S с нормалью $\mathbf{n}$ в определенном направлении L, здесь опущен). С учетом (298) эквивалентное выражение для выходной мощности P, не требующее вычисления нормальной производной, принимает вид

$$P = 8\pi^4\int\int W_0(\mathbf{k})|F(\mathbf{k})|^2U^{-1}(\partial B/\partial\omega)^{-2}\,dS. \quad (300)$$

Звуковые волны дают простую иллюстрацию этих результатов. Уравнение

$$\partial^2\rho/\partial t^2 - c_0^2\partial^2\rho/\partial x_j^2 = f(x_1, x_2, x_3)\exp(i\omega_0 t) \quad (301)$$

описывает генерирование звука некоторым распределением осциллирующих источников (см. разд. 1.10, где правая часть этого уравнения записана как напряженность источника на единицу объема $\partial Q/\partial t$). В этом случае

$$B = -\omega^2 + c_0^2k_j^2, \quad U = c_0, \quad W = c_0^2\rho_0^{-1} \quad (302)$$

и поверхность S является сферой (с центром в начале координат) радиуса ω_0/c_0. Тогда формула (300) для выходной мощности принимает вид

$$P = 8\pi^5(\rho_0c_0)^{-1}\langle|F(\mathbf{k})|^2\rangle_S, \quad (303)$$

где величина

$$\langle|F(\mathbf{k})|^2\rangle_S = (4\pi\omega_0^2/c_0^2)^{-1}\int\int_S|F(\mathbf{k})|^2\,dS \quad (304)$$

представляет собой значение $|F|^2$, осредненное по сферической поверхности S радиуса ω_0/c_0.

Распределение источников является акустически компактным, если они сосредоточены в области, линейные размеры которой малы по сравнению с c_0/ω_0. Поэтому фурье-преобразование $F(\mathbf{k})$ этого распределения будет определено в такой области пространства волновых чисел, размеры которой весьма *велики* по сравнению с ω_0/c_0. Тогда осредненное значение в выражении (304), как правило, близко к значению $|F(0)|^2$ в центре сферы:

$$\langle |F(\mathbf{k})|^2 \rangle \approx |F(0)|^2 = (2\pi)^{-6} |f_{\text{tot}}|^2, \tag{305}$$

где

$$f_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{306}$$

— суммарная напряженность источников. Тогда выражение (303) принимает вид

$$P = \frac{1}{2} |f_{\text{tot}}|^2/(4\pi\rho_0 c_0), \tag{307}$$

в точности совпадающий с тем, который можно было бы получить при помощи метода разд. 1.6 (при этом и числитель является средним квадратом суммарной напряженности источников).

С другой стороны, в случае распределения с нулевой суммарной напряженностью источников в выражении $F(\mathbf{k})$ при малых $\mathbf{k}$ преобладает член

$$F(\mathbf{k}) \approx ik_j G_j (2\pi)^{-3}, \quad \text{где} \quad G_j = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_j f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{308}$$

является напряженностью эквивалентного диполя (моментом распределения источников). Это означает, что

$$\langle |F(\mathbf{k})|^2 \rangle_S \approx \frac{1}{3} (\omega_0/c_0)^2 |G_j|^2 (2\pi)^{-6}, \tag{309}$$

так что (303) сводится к выражению

$$P = \frac{1}{2} |G_j|^2 \omega_0^2/(12\pi\rho_0 c_0^3), \tag{310}$$

точно совпадающему с тем, которое можно было бы получить при помощи метода разд. 1.7 для областей компактных источников с дальними полями диполей.

Для волновых систем совершенно общего вида распределение источников также называется компактным, если $F(\mathbf{k})$ определено в такой области пространства волновых чисел, размеры

которой весьма велики по сравнению с размерами поверхности S волновых чисел. Тогда уравнения (305) и (306) выполняются на S при условии, что суммарная напряженность источников f_{tot} не равна нулю, а выходная мощность (300) имеет величину

$$P = (8\pi^2)^{-1} (|f_{\text{tot}}|^2) \int\int_S W_0(\mathbf{k})\, U^{-1} (\partial B/\partial\omega)^{-2}\, dS, \qquad (311)$$

пропорциональную среднему квадрату этой суммарной напряженности источников. Интеграл в (311) представляет собой коэффициент, который для каждой волновой системы нужно оценить только один раз: он не зависит от распределения источников и меняется только в зависимости от частоты ω_0. Соответствующая формула для случая, когда f_{tot} равна нулю, но напряженность эквивалентного диполя (308) отлична от нуля, имеет вид

$$P = (8\pi^2)^{-1} \left| G_j \int\int_S k_j W_0(\mathbf{k})\, U^{-1} (\partial B/\partial\omega)^{-2}\, dS \right|^2; \qquad (312)$$

на этот раз интеграл является *вектором*, который для изучаемой волновой системы можно раз и навсегда вычислить как функцию ω_0.

Для звуковых волн, генерируемых некомпактными распределениями источников, среднее значение в (303) может значительно отличаться от таких простых оценок. К тому же направленное распределение акустической интенсивности $I = Wc$ может быть сложным; так, ее значение в направлении L, которое задается единичным вектором $\mathbf{n}$, дается выражением (297), где

$$\mathbf{k}^{(0)} = \omega_0 c_0^{-1} \mathbf{n} \qquad (313)$$

является точкой на S с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении возрастания ω. С учетом (302) это выражение принимает вид

$$I = 2\pi^4 (\rho_0 c_0)^{-1} x^{-2} \mid F(\omega_0 c_0^{-1} \mathbf{n})|^2. \qquad (314)$$

Для получения искомого направленного распределения (314) обычно достаточно, как описывалось в разд. 1.12, плоского распределения источников, так как его изменение может соответствовать существенно двумерному изменению относительно единичного вектора $\mathbf{n}$. В самом деле, любое *действительно плоское* распределение источников, если иметь в виду такое, размеры которого компактны *только в одном* направлении (скажем, в направлении x_1), удовлетворяет на S приближенному уравнению

$$F(\mathbf{k}) \approx F(0,\ k_2,\ k_3) = (2\pi)^{-1} F_1(k_2,\ k_3), \qquad (315)$$

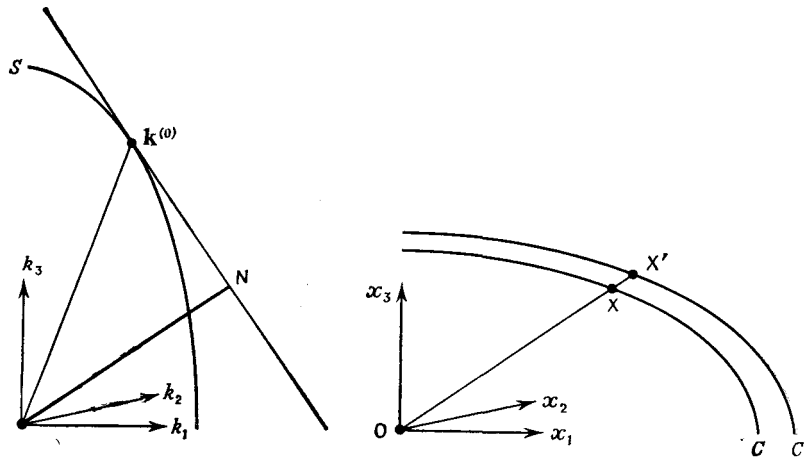

Рис. 90. Поверхность постоянной фазы является геометрическим местом точек, определяемых уравнением (319). Здесь скалярное произведение $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{n}$ равно длине перпендикуляра ON, опущенного на касательную плоскость в точке $\mathbf{k}^{(0)}$. При этом x равен (скажем) $\overrightarrow{OX}$, причем отрезок OX параллелен ON, а произведение их длин сохраняет постоянное значение C (таким образом, X есть «полюс» касательной плоскости). Соседняя поверхность постоянной фазы представляет собой геометрическое место точек X′, причем отрезок OX′ снова параллелен ON, а произведение их длин сохраняет несколько иное постоянное значение C'.

где $F_1(k_2, k_3)$ является двумерным фурье-преобразованием плоского распределения источников

$$f_1(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1. \tag{316}$$

Тогда (314) принимает вид

$$I = \frac{1}{2}\pi^2 (\rho_0 c_0)^{-1} x^{-2} |F_1(\omega_0 x_2/xc_0,\ \omega_0 x_3/xc_0)|^2, \tag{317}$$

причем эта зависимость в принятых индексных обозначениях, как видно, выражает результаты разд. (1.12), относящиеся к плоским распределениям источников, если принять во внимание, что используемое там F_1 равно произведению величины $2\pi^2 (\rho_0 i\omega_0)^{-1}$ на значение, определенное выше.

В эпилоге приводится еще ряд примеров использования общего результата (295) для некомпактных распределений источников. Основным результатом во всех случаях является тот

факт, что нормаль к поверхности $\omega = \omega_0$ волновых чисел в направлении возрастания ω показывает то направление, в котором будут обнаружены волны с определенным волновым числом, и что их амплитуда пропорциональна фурье-компоненте распределения источников с этим волновым числом. В некоторых случаях интересна также форма поверхностей постоянной фазы

$$\mathbf{k}^{(0)} \cdot \mathbf{x} = \text{const}. \tag{318}$$

Так как $\mathbf{k}^{(0)}$ есть точка на S с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении $\mathbf{x}$, уравнение (318) означает, что

$$\mathbf{x} = x\mathbf{n} \quad \text{при} \quad x = \text{const}/(\mathbf{k}^{(0)} \cdot \mathbf{n}). \tag{319}$$

Таким образом, с геометрической точки зрения любая поверхность (319) постоянной фазы (рис. 90) определяется как *взаимная поляра* поверхности волновых чисел по отношению к началу координат, т. е. геометрическое место полюсов ее касательных плоскостей.

4.10. Внутренние волны, генерируемые осциллирующим источником

Приведенная выше общая двумерная или трехмерная теория осциллирующих источников волн приводит к результату (290), содержащему кривизну кривой волновых чисел, или к результату (295), выраженному через гауссову кривизну поверхности волновых чисел. Эти уравнения, однако, бессмысленны для некоторых волновых систем, содержащих внутренние волны, которые дают название настоящей главе. Поверхность волновых чисел для внутренних волн с фиксированной частотой ω_0 представляет собой конус; поэтому в любой точке одна из главных осей кривизны направлена вдоль образующей с соответствующей нулевой кривизной. Следовательно, гауссова кривизна (произведение двух главных кривизн) всюду равна нулю.

В этом разделе будут показаны существенные изменения теории осциллирующих источников волн в случае любой волновой системы, где гауссова кривизна поверхности волновых чисел S тождественно равна нулю; результаты будут проиллюстрированы примером внутренних волн. Мы отложим, однако, до разд. 4.11 анализ менее радикальных (поскольку они оказываются чисто локальными) изменений, которые неизбежны в случае, когда гауссова кривизна обращается в нуль на изолированном участке поверхности волновых чисел.

Сначала приводятся сравнительно простые результаты, которые справедливы, когда S является поверхностью наименьшей кривизны, т. е. плоскостью. Эти результаты иллюстрируются во многих дальнейших разделах. Тем временем отчасти аналогичные результаты для двумерного распространения в случаях, когда S является *прямой*, иллюстрируются здесь на примере внутренних волн, *вынужденных распространяться двумерно* в результате того, что они генерируются источником, который однороден в одном горизонтальном направлении (скажем, в направлении y). В силу этого в дисперсионном соотношении (24) $l = 0$, так что кривая волновых чисел (связывающая k и m при $\omega = \omega_0$) становится *парой* прямых. Для этого случая указываются также результаты, полученные с учетом вязкого затухания, и проводится их сравнение с экспериментом.

После этого рассматриваются поверхности S волновых чисел, искривленные только в одном направлении (*развертывающиеся поверхности*, которые могут быть развернуты в плоскость без растяжения). В частности, проводится детальное исследование для случая конических поверхностей, который иллюстрируется примером внутренних волн.

В каждом случае мы можем начать с основного уравнения (284) для волн, появляющихся в определенном направлении L, исходящем от осциллирующего источника. Это уравнение описывает волны в осях координат, повернутых таким образом, что L становится положительной осью x_1; тогда S_+ является частью S, определяемой условием (282).

Особым свойством рассматриваемых в этом разделе поверхностей волновых чисел является отсутствие какой бы то ни было изолированной точки на S_+, где фаза $-k_1x_1$ стационарна. Следовательно, распределение амплитуд волн теперь уже не пропорционально (как в разд. 4.9) значению пространственного фурье-преобразования $F(\mathbf{k})$ распределения источников. Мы убедимся в том, что вместо этого оно зависит от *частичного* преобразования Фурье, когда на распределение источников действуют в различных ортогональных направлениях *либо* оператором преобразования Фурье, *либо* каким-нибудь иным оператором.

В случаях когда S_+ является плоскостью, напрашивается использование специальных осей (x, y, z), скажем, с осью x, перпендикулярной этой плоскости. При этом для соответствующего волнового вектора (k, l, m) выполняется условие $k = \text{const}$ на этой плоскости.

Рассмотрим, например, случай, когда

$$B = B(\omega, k) \tag{320}$$

не зависит от l и m. Это сравнительно простой случай, когда в дифференциальное уравнение (276) для вынужденных колебаний не входят никакие частные производные по y и z. Поверхность S волновых чисел состоит из множества плоскостей $k = k_0$, где

$$B(\omega_0, k_0) = 0. \tag{321}$$

Для излучения в направлениях L, соответствующих *возрастанию* x, условие (282) определяет S_+ как подмножество плоскостей, таких, что уравнение (321) определяет функцию $\omega_0(k_0)$, для которой

$$d\omega_0/dk_0 > 0. \tag{322}$$

В этих обозначениях интеграл (284) по любой плоскости $k = k_0$, которая представляет часть (или всю) S_+, можно записать в виде

$$-2\pi i[\exp(i\omega_0 t)]\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k_0, l, m)[\partial B(\omega_0, k)/dk]_{k=k_0}^{-1} \times \exp[-i(k_0 x + ly + mz)]\, dl\, dm. \tag{323}$$

Здесь мы уже вернулись от специальных осей координат, в которых направление L совпадает с осью x_1, к фиксированным осям (x, y, z) с осью x, перпендикулярной плоскости $k = k_0$. Если угол между L и этой осью x равен Ф, то $dk_2\, dk_3$ на S_+ становится равным $dl\, dm \cos$ Ф, но при этом также и $\partial B/\partial k_1$ становится равным $(\partial B/\partial k) \cos$ Ф и два множителя cos Ф сокращаются. С другой стороны, (323) можно было бы получить непосредственно в осях (x, y, z), применяя метод разд. 4.9 при условии излучения, которое запрещает распространение энергии в направлении убывающих x там, где x положительно.

Очевидно, интегрирование по l и m в (233) «разлагает на составные части» преобразование Фурье, т. е. оно восстанавливает в распределении источников первоначальную функциональную зависимость от y и z, оставляя только частичное преобразование Фурье по x. Это следует из того, что уравнение (268) можно записать в виде

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(x)}(k, y, z)\exp(-ikx)\, dk, \tag{324}$$

где частичное фурье-преобразование $F_{(x)}$ равно

$$F_{(x)}(k, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(k, l, m)\exp[-i(ly + mz)]\, dl\, dm. \tag{325}$$

Излучение (323) в направлении возрастающих x дается тогда выражением

$$q = -2\pi i F_{(x)}(k, y, z)\,[\partial B(\omega_0, k)/\partial k]^{-1}_{k=k_0} \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)], \quad (326)$$

если существует только одно волновое число k_0, удовлетворяющее (321) и (322); в противном случае излучение дается суммой выражений (326) от каждого такого волнового числа.

Уравнение (326) описывает строго параллельный пучок, так как частичное фурье-преобразование $F_{(x)}(k, y, z)$, определяемое формулой (324), равно нулю для любых y и z, так что распределение источников $f(x, y, z)$ равно нулю для всех x. Этот пучок является просто *проекцией* области источников в направлении x. Так как площадь его поперечного сечения не зависит от x, амплитуда волн также остается постоянной.

Отметим различие между таким строго параллельным пучком, который получается из-за того, что поверхность волновых чисел является плоскостью, и акустическим пучком, генерируемым плоским распределением источников (разд. 1.12 и 4.9); последний сначала параллелен, но всегда расходится на конус (как бы ни был мал угол раствора конуса), когда распределение переходит из первоначальной функциональной зависимости от y и z к ее преобразованию Фурье. Такое преобразование Фурье по y и z, т. е. переход к коническому пучку, не может иметь места в том случае, когда поверхность волновых чисел сама является плоскостью.

Другой способ получения (326) в случае, когда уравнение в частных производных (276) не содержит производной по y или по z, основывался бы на решении его как одномерной задачи для каждой постоянной пары значений y и z. Этот вывод мог бы быть самым коротким, однако здесь мы предпочли показать, каким образом этот результат можно получить как предельно частный случай нашего общего исследования, которое удачно включает обсуждение промежуточных частных случаев, подобных случаю вынужденных внутренних волн.

Распределение источников генерирует внутренние волны согласно уравнению

$$\nabla^2(\partial^2 q/\partial t^2) + [N(z)]^2(\partial^2 q/\partial x^2 + \partial^2 q/\partial y^2) = \partial^3 Q/\partial t^2 dz, \quad (327)$$

где $\partial Q/\partial t$ (скорость изменения массового расхода на единицу объема на выходе) представляет напряженность источника в в смысле гл. 1. Уравнение (327) получено в результате добавления массового расхода на выходе к правой части уравнения (17) и замены, таким образом, правых частей (18), (20) и (22) на $-\partial Q/\partial t$, на $+\partial^2 Q/\partial t\,dz$ и на $\partial^3 Q/\partial t^2 \partial z$. Здесь мы рассматриваем

(327) в случае $N = \text{const}$ и поэтому можем применить анализ Фурье.

Распределение источников

$$\partial Q/\partial t = f(x, z) \exp(i\omega_0 t), \tag{328}$$

не зависящее от y, генерирует двумерное распространение волн, отчасти аналогичное по своей природе тому, которое только что рассматривалось, так как «кривая» волновых чисел не имеет кривизны, будучи парой прямых. Уравнение (327) при $N = \text{const}$ принимает вид

$$(N^2 - \omega_0^2)\,\partial^2 q/\partial x^2 - \omega_0^2 \partial^2 q/\partial z^2 = i\omega_0 (\partial f/\partial z) \exp(i\omega_0 t). \tag{329}$$

Это частный случай уравнения (276) при

$$B(\omega, k, m) = [\omega^2 m^2 - (N^2 - \omega^2) k^2]/(\omega m), \tag{330}$$

когда дисперсионное соотношение $B = 0$ имеет вид

$$\omega = [N^2 k^2/(k^2 + m^2)]^{1/2}. \tag{331}$$

Кривая $\omega = \omega_0$ волновых чисел представляет собой пару прямых в плоскости (k, m), образующих угол $\theta = \arccos(\omega_0/N)$ с осью k. Эти прямые изображены на рис. 91, причем направле-

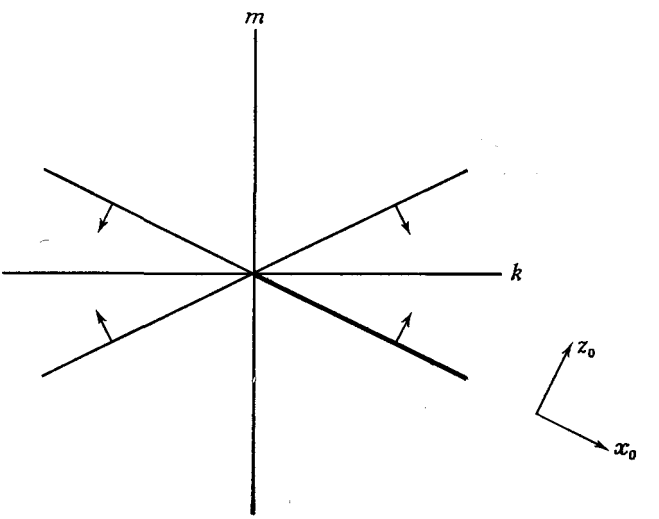

Рис. 91. Кривая S волновых чисел при двумерном распространении внутренних волн (в плоскости (x, z)). Стрелки указывают направления, в которых обнаруживаются волны, соответствующие четырем различным полупрямым кривой S. Для волн, соответствующих жирной полупрямой, используются специальные оси координат (как на рис. 87) с осью z_0, имеющей направление распространения энергии.

ния тех нормалей, вдоль которых ω возрастает, показаны стрелками. Данные направления являются направлениями лучей: четыре различных направления, образующих андреевский крест (рис. 76), связанный с внутренними волнами фиксированной частоты. Каждое направление связано с *полупрямой* в плоскости волновых чисел; например, как мы знаем из разд. 4.4, волны, распространяющиеся в направлении возрастающих x и z, должны иметь положительное k и отрицательное m.

Основное отличие от предыдущего случая, когда *вся* плоскость в пространстве волновых чисел вносила вклад в излучение в определенном направлении, состоит в том, что в данном случае вклад дает только *половина* прямой. Этот результат анализа групповой скорости (с важными следствиями, которые будут описаны ниже) можно легко упустить при решении уравнения (329) посредством обычной факторизации дифференциального оператора в левой части без правильного использования условия излучения.

Здесь мы будем искать выражение для тех волн с положительным k и отрицательным m, энергия которых распространяется вверх и вправо. В этом случае будет удобно оценить их уже при помощи другого изменения осей координат. Мы используем оси (x_0, z_0) с осью x_0 в направлении волнового вектора (направлении перемещения гребней, идущем по диагонали вниз) и перпендикулярной этой оси осью z_0 (в направлении лучей, идущих по диагонали вверх). Теперь волны генерируются полупрямой $k_0 > 0$, $m_0 = 0$, и двумерная запись выражения (284) принимает вид

$$q = -2\pi i\,[\exp(i\omega_0 t)] \int_0^\infty F(k_0,\ 0)\,[\partial B/\partial m_0]^{-1}_{m_0=0} \exp(-ik_0 x_0)\,dk_0. \tag{332}$$

При помощи (330) нетрудно проверить, что значение $\partial B/\partial m_0$ на данной полупрямой равно постоянной $2N$; действительно, так как на этой полупрямой $B = 0$, нормальная производная $\partial B/\partial m_0$ в направлении m_0, образующем угол $\pi/2 - \theta$ с направлением k, должна быть равна произведению $\operatorname{cosec}\theta$ на $\partial B/\partial k$, что дает

$$\partial B/\partial m_0 = \operatorname{cosec}\theta\,(N^2 - \omega_0^2)(-2k/(\omega_0 m)) = \\ = (2N \operatorname{tg}\theta)(-k/m) = 2N, \tag{333}$$

так как $m = -k \operatorname{tg}\theta$. Поэтому

$$q = -\pi i N^{-1}\,[\exp(i\omega_0 t)] \int_0^\infty F(k_0,\ 0) \exp(-ik_0 x_0)\,dk_0. \tag{334}$$

Так же как и в случае плоской поверхности волновых чисел, лучи при $\omega = \omega_0$ идут в определенном направлении (одно из них образует угол θ с вертикалью, принятой здесь в качестве направления z_0); следовательно, пучок (334) снова параллелен и амплитуда с возрастанием z_0 не убывает. Сходство со случаем плоской поверхности волновых чисел состоит и в том, что полупрямая «выбирает» частичное преобразование Фурье по направлению распространения (здесь направление z_0). В самом деле, она «выбирает» составляющую $m_0 = 0$, которая включает только *интегрирование* по z_0. Действительно, если бы интеграл (334) *был* взят от $-\infty$ до ∞, он дал бы амплитудный коэффициент

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k_0, 0) \exp(-ik_0x_0)\, dk_0 = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, z_0)\, dz_0 = f_S(x_0), \tag{335}$$

который равен произведению $(2\pi)^{-1}$ на напряженность источника, проинтегрированную по направлению, нормальному к S (т. е. по направлению z_0).

Однако тот факт, что в случае полупрямой интеграл в (334) берется только 0 до ∞, вносит значительное изменение, которое придает решению его волновой характер. Компонента выражения (334), пропорциональная

$$\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)],$$

для $0 < k_0 < \infty$ имеет волновые гребни, движущиеся в ожидаемом направлении возрастающих x_0 (по диагонали *вниз* под прямым углом к лучам). Комбинированная волна (334) принимает форму, зависящую от классического *расщепления*, посредством которого любая функция $f_S(x_0)$, задаваемая интегралом Фурье, как в (335), представляется в виде суммы

$$f_S^+(x_0) + f_S^-(x_0) = \int_0^{\infty} F(k_0, 0) \exp(-ik_0x_0)\, dk_0 + \int_{-\infty}^{0} F(k_0, 0) \exp(-ik_0x_0)\, dk_0. \tag{336}$$

Физически это соответствует расщеплению *стоячей волны*

$$f_S(x_0) \exp(i\omega_0 t)$$

на сумму двух *бегущих волн*, движущихся в направлениях положительных и отрицательных x_0 соответственно. Стратифицированная среда получает проинтегрированное распределение источ-

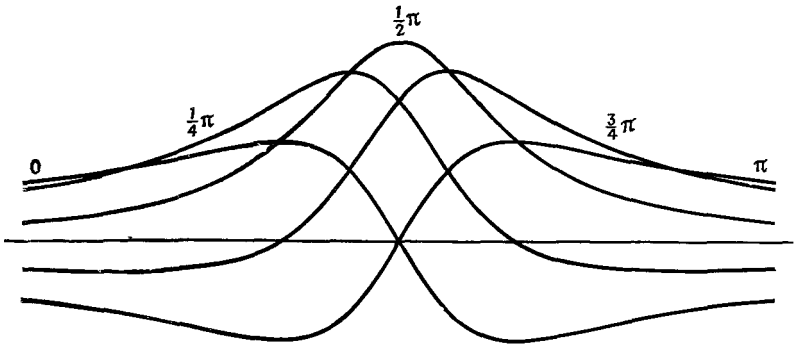

Рис. 92. Последовательные волновые профили (действительная часть выражения (338) или (339)), построенные как функции x_0/h для последовательных значений $\omega_0 t$, равных 0, (1/4) π, (1/2) π, (3/4) π и π для случая незатухающих плоских внутренних волн, генерируемых осциллирующим источником, определяемым выражениями (337). Гребни, конечно, движутся перпендикулярно к направлению z_0, вдоль которого распространяется волновая энергия.

пиков (335), *расщепляет* его, как в (336), и посылает волны с амплитудой $f_S^+(x_0)$ по диагонали вверх и направо, а волны с амплитудой $f_S^-(x_0)$ — по диагонали вниз и налево.

Для любой *рациональной* функции $f_S(x_0)$ расщепление (336) достигается наиболее просто посредством представления ее в виде элементарных дробей и включения тех из них, которые содержат полюсы в верхней половине комплексной плоскости x_0, в f_S^+, а остальных — в f_S^-. Например,

$$\text{если} \quad f_S(x_0) = 2Ch\,(x_0^2 + h^2)^{-1}, \quad \text{то} \quad f_S^+(x_0) = C\,(h + ix_0)^{-1}, \tag{337}$$

что читатель может проверить при помощи правила разложения на элементарные дроби или же непосредственным вычислением, используя $F(k_0, 0) = C \exp(-hk_0)$. В этом случае волны (334) можно представить в виде

$$q = -\pi i N^{-1} [\exp(i\omega_0 t)]\, C\,(h + ix_0)^{-1} \tag{338}$$

или же — через модуль и аргумент — в виде

$$q = \pi C N^{-1} (h^2 + x_0^2)^{-1/2} \exp\left\{ i \left[\omega_0 t - \operatorname{arctg}(x_0/h) - \frac{1}{2}\pi \right] \right\}, \tag{339}$$

который подчеркивает волноподобную зависимость от x_0, хотя и указывает на отсутствие какой бы то ни было сформировавшейся длины волны. На рис. 92 представлен вид последователь-

ных конфигураций волн в этом случае. При отсутствии диссипации энергии эта картина волнового движения под прямым углом к лучам распространялась бы вдоль лучей до бесконечности и без затухания.

Однако в проведенный выше анализ нетрудно включить эффекты вязкого затухания со скоростью (220) на единицу пути z_0 вдоль лучей. Эту скорость можно записать в виде

$$\beta = 2\beta_0 k_0^3, \quad \text{где} \quad \beta_0 = \frac{1}{2}\nu N^{-1} \operatorname{cosec} \theta, \tag{340}$$

причем k_0, как и выше, представляет собой *модуль* волнового вектора. Такая скорость затухания энергии вводит в амплитуду волн с волновым числом k_0 экспоненциальный множитель $\exp(-\beta_0 k_0^3 z_0)$. Это должно быть включено в интеграл (332) и, следовательно, в (334), что дает

$$q = -\pi i N^{-1} [\exp(i\omega_0 t)] \int_0^\infty F(k_0, 0) \exp(-ik_0 x_0 - \beta_0 k_0^3 z_0)\, dk_0. \tag{341}$$

Заметим, что для незатухающих волн общее понятие (разд. 4.9) компактных источников (размеры области определения фурье-преобразования которых в пространстве волновых чисел много больше размеров S) бессмысленно, когда S простирается до бесконечности, как во всех волновых системах, изучаемых в этом разделе. Однако смысл этого понятия восстанавливается при введении вязкого затухания, которое для внутренних волн на расстояниях от источника, бо́льших z_0, исключает все волновые числа, значительно превосходящие $(\beta_0 z_0)^{-1/3}$; тогда источники, размеры области определения фурье-преобразования которых намного превышают это число, будут действительно компактными.

Если, например, сечение цилиндрического провода, колеблющегося горизонтально в жидкости, компактно в этом смысле, то его можно представить горизонтальным диполем с напряженностью $G \exp(i\omega_0 t)$, равной отнесенной к единице длины силе, с которой он действует на жидкость. Это дает

$$F(k, m) \approx ikG, \tag{342}$$

как и в (308), так что значение $F(k_0, 0)$ в повернутых осях волновых чисел (k_0, m_0) равно $i(k_0 \cos\theta) G$ и

$$q = (\pi N^{-1} \cos\theta) G [\exp(i\omega_0 t)] \int_0^\infty k_0 \exp(-ik_0 x_0 - \beta_0 k_0^3 z_0)\, dk_0. \tag{343}$$

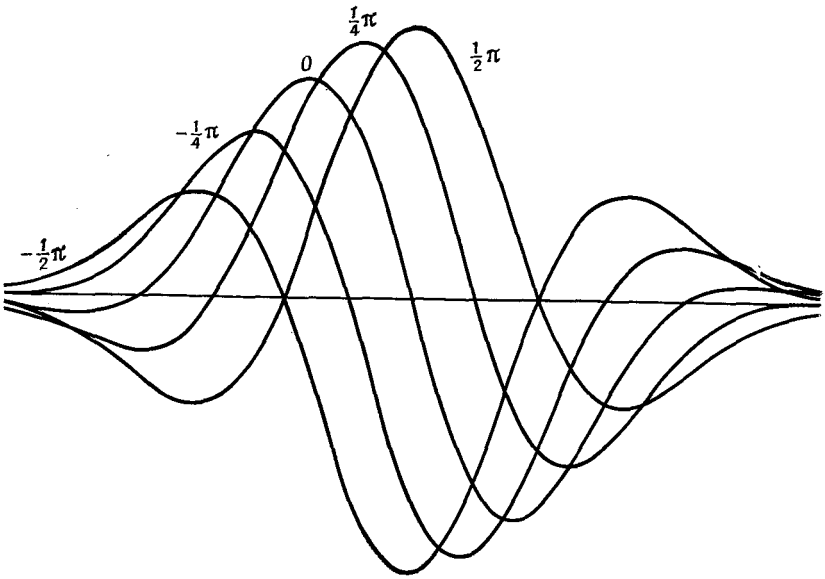

Рис. 93. Последовательные волновые профили (действительная часть выражения (343)), рассчитанные Томасом и Стивенсоном для последовательных значений $\omega_0 t$, равных $-(1/2)\,\pi$, $-(1/4)\,\pi$, 0, $(1/4)\,\pi$ и $(1/2)\,\pi$ для случая двумерных внутренних волн, возбужденных компактным осциллирующим источником и затухающих вследствие вязкости.

На рис. 93 представлен вид последовательных волновых профилей в этом случае, полученных на основании формулы (343) Томасом и Стивенсоном, а на рис. 94 приведены весьма удовлетворительные результаты сравнения полученных этими авторами теоретических данных с их тонкими экспериментальными наблюдениями.

Волновые системы с поверхностью S, имеющей отличную от нуля полную кривизну, исследованные в разд. 4.9 методом стационарной фазы, и описанные выше системы, для которых метод стационарной фазы непригоден, потому что S является плоскостью, представляют собой крайние случаи. Существует также и промежуточный случай, когда S является развертывающейся поверхностью. В этом случае имеется только одно главное направление с *ненулевой* кривизной, в котором можно использовать метод стационарной фазы, а в другом направлении следует пользоваться описанными выше методами, требующими оценки бесконечного интеграла. Такая поверхность с гауссовой кривизной K, всюду равной нулю, обязательно яв-

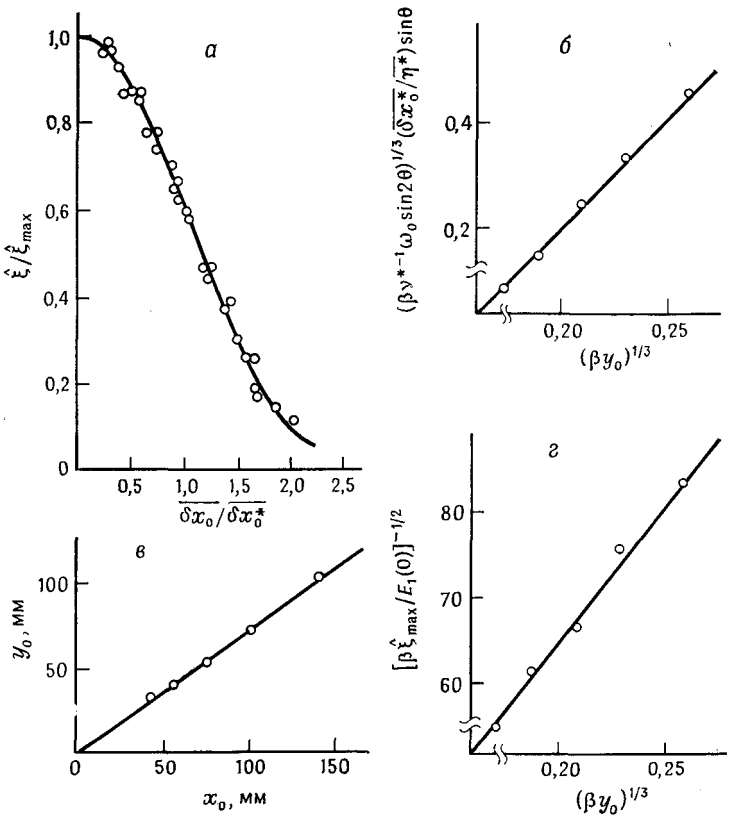

Рис. 94. Эти диаграммы Томаса и Стивенсона показывают прекрасное согласование между их измерениями (точки) и их расчетами (кривые). Не поясняя их обозначений в деталях, отметим, что проверке подлежали следующие данные: *а* — огибающая волновых профилей; *б* — изменение ширины волны, пропорциональное расстоянию от источника в степени 1/3; *в* — наклон центрального луча к вертикали; *г* — изменение максимальной амплитуды волны, пропорциональное расстоянию от источника в степени —2/3.

ляется развертывающейся (деформирующейся в плоскость без растяжения), и нормали к ней образуют только *однопараметрическое* бесконечное множество направлений —«веер» лучей, вдоль которых вынуждена распространяться волновая энергия. Мы укажем общий метод исследования, применяя его для случая внутренних волн, когда поверхность S является конусом, а нормали к этому конусу образуют дополнительный конический «веер» лучей.

В стратифицированной жидкости трехмерный осциллирующий источник

$$\partial Q/\partial t = f(x, y, z) \exp(i\omega_0 t) \qquad (344)$$

генерирует внутренние волны, удовлетворяющие уравнению (327) с постоянной N. Это уравнение принимает вид

$$(N^2 - \omega_0^2)(\partial^2 q/\partial x^2 + \partial^2 q/\partial y^2) - \omega_0^2 \partial^2 q/\partial z^2 = \cdot$$
$$= i\omega_0 (\partial f/\partial z) \exp(i\omega_0 t). \qquad (345)$$

Любое линейное дифференциальное уравнение в частных производных, аналогичное уравнению (345), в котором независимая переменная входит только в производные по координатам одного порядка (здесь 2), имеет поверхность волновых чисел, которая является «конической» в общем смысле, т. е. образована прямыми, проходящими через начало координат, и поэтому имеет нулевую гауссову кривизну; по существу это вытекает из того, что в силу такого уравнения B представляется *однородной* функцией k, l и m. Например, для уравнения (345)

$$B(\omega, k, l, m) = [\omega^2 m^2 - (N^2 - \omega^2)(k^2 + l^2)]/(\omega m), \qquad (346)$$

что дает дисперсионное соотношение $B = 0$ вида (24), так что поверхность $\omega = \omega_0$ волновых чисел является конусом с полууглом раствора $\theta = \arccos(\omega_0/N)$.

Для оценки волн, излучаемых в определенном направлении L, мы используем специальные оси, подобные тем, которые изображены на рис. 91. Прежде всего мы примем вертикальную плоскость, проходящую через L, за плоскость $y_0 = 0$; после этого другие оси выбираются, как и ранее: ось x_0 — вдоль образующей конуса, так что она имеет направление волнового вектора, а z_0 (конечно, под прямым углом к оси x_0) — вдоль луча. Эти оси удобны потому, что в методе стационарной фазы считается, что только образующая в вертикальной плоскости, проходящей через L, вносит вклад в излучение вдоль L, причем этот вклад вносит, как и раньше, вся полупрямая, представляемая данной образующей.

Уравнение (284) в этом случае принимает вид

$$q = -2\pi i [\exp(i\omega_0 t)] \iint_{S_+} F(k_0, l_0, m_0) (\partial B/\partial m_0)^{-1} \times$$
$$\times \exp[-i(k_0 x_0 + m_0 z_0)]\, dk_0\, dl_0; \qquad (347)$$

отличие от выражения (332) состоит в том, что кривизна конуса не допускает обращения m_0 в нуль, за исключением случая, когда $l_0 = 0$. Легко показать, что кривизна конуса в плоскости

$k_0 = \text{const}$ в точке $l_0 = 0$ представляется как

$$\varkappa_0 = -(\partial^2 m_0/\partial l_0^2) = k_0^{-1} \operatorname{tg} \theta; \tag{348}$$

действительно, кривизна кругового поперечного сечения конуса плоскостью $m = \text{const}$ составляет $k^{-1} = (k_0 \cos \theta)^{-1}$, и эта величина должна быть равна произведению cosec θ на кривизну $\varkappa_0$ в плоскости, нормальной к образующей. Метод стационарной фазы в одномерном случае (разд. 3.7), примененный к интегрированию по l_0 в (347), теперь дает

$$q = -2\pi i \left\{\exp\left[i\left(\omega_0 t + \frac{1}{4}\pi\right)\right]\right\} \int_0^\infty F(k_0, 0, 0)(2N)^{-1} \times$$

$$\times (2\pi/\varkappa_0 z_0)^{-1/2} \exp(-ik_0 x_0)\, dk_0, \tag{349}$$

поскольку, как и ранее, уравнение (333) дает $\partial B/\partial m_0$ на прямой $l_0 = m_0 = 0$. При этом асимптотическая форма волн имеет вид

$$q = N^{-1}(2\pi^3/(z_0 \operatorname{tg}\theta))^{1/2} \left\{\exp\left[i\left(\omega_0 t - \frac{1}{4}\pi\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty k_0^{1/2} F(k_0, 0, 0) \exp(-ik_0 x_0)\, dk_0. \tag{350}$$

Уменьшение амплитуды в выражении (350) по закону $z_0^{-1/2}$ происходит из-за того, что энергия распространяется от источника в коническом «веере» лучей; расстояние между двумя лучами возрастает пропорционально расстоянию вдоль них. Однако, хотя энергия и распространяется тангенциально к вееру, ширина пучка по нормали к вееру не увеличивается.

В распределении амплитуд по нормали к вееру лучей появляется интересная особенность, задаваемая интегралом в (350). Мы уже знаем, что ограничение области интегрирования до $(0, \infty)$ превращает генерируемую осциллирующим источником стоячую волну в нечто подобное бегущим волнам (рис. 92 и 93). Новый коэффициент $k_0^{1/2}$ вводит дополнительно операцию, известную как *взятие производной порядка* 1/2. Мы встречались с этим фактом в связи с асимптотическим поведением звуковых волн в случае двумерного их распространения (разд. 1.4), и, возможно, нам и не следовало бы удивляться появлению его снова в асимптотической форме решений уравнения в частных производных (345), которое при замене z на величину, кратную времени, *стало* бы двумерным волновым уравнением. Однако решение уравнения (345), удовлетворяющее условию излучения, включает не только производную порядка 1/2,

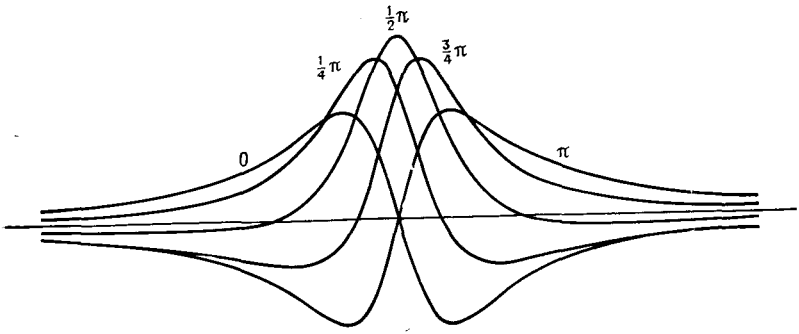

Рис. 95. Последовательные волновые профили (действительная часть (353)), построенные как функции x_0/h для последовательных значений $\omega_0 t + (1/4)\,\pi$, равных 0, $(1/4)\,\pi$, $(1/2)\,\pi$, $(3/4)\,\pi$ и π для случая незатухающих трехмерных внутренних волн, генерируемых осциллирующим источником, определяемым выражениями (337). В этом случае энергия переносится от источника вдоль конической поверхности, а гребни движутся по нормалям к этой конической поверхности.

но и расщепление стоячей волны на волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, а это вполне можно было бы упустить при любом непосредственном применении только что упомянутой аналогии.

Если ввести распределение источников, проинтегрированное в плоскостях, нормальных к образующей,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k_0,\ 0,\ 0)\exp(-ik_0x_0)\,dk_0 =$$

$$= (2\pi)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0,\ y_0,\ z_0)\,dy_0\,dz_0 = f_S(x_0), \qquad (351)$$

то интеграл в (350) будет пропорционален производной от $f_S^+(x_0)$ порядка 1/2. Например, если $f_S(x_0)$ принимает вид (337), то

$$\int_0^{\infty} k_0^{1/2} F(k_0,\ 0,\ 0)\exp(-ik_0x_0)\,dk_0 = \frac{1}{2}C\pi^{1/2}(h+ix_0)^{-3/2}, \qquad (352)$$

а тогда

$$q = \pi^2 CN^{-1}(2z_0\operatorname{tg}\theta)^{-1/2}(h^2+x_0^2)^{-3/4}\times$$

$$\times\exp\left\{i\left[\omega_0 t - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x_0/h) - \frac{1}{4}\pi\right]\right\}. \qquad (353)$$

На рис. 95 изображены последовательные волновые профили в этом случае для источника с суммарной напряженностью $(2\pi)^3 C$.

Мы видели, что даже в трехмерном случае асимптотическая форма внутренних волн, генерируемых осциллирующим источником, сравнительно проста. Заметим, что при вынуждающем воздействии типа диполя появились бы производные от волновых профилей, изображенных на рис. 95; эти продифференцированные профили волн оказываются только чуть «более волнистыми». Чтобы учесть обусловленное вязкостью затухание, нужно было бы, как и ранее, ввести в подинтегральную функцию дополнительный множитель $\exp(-\beta_0 k_0^3 z_0)$.

4.11. Каустики

На протяжении всего развития понятий групповой скорости и лучевой теории (начиная с разд. 3.6 и далее) мы до сих пор откладывали исследование локального поведения волн вблизи *каустик*. Здесь мы вводим это слово впервые; каустика представляет собой границу между областью со сложной волновой картиной, являющейся результатом интерференции *двух* групп волн, и соседней областью, *не содержащей* никаких волн.[1] Каустики являются известными локальными особенностями многих различных конфигураций волн в жидкостях, причем все они могут быть исследованы вместе, так как ключом к их пониманию является одно математическое понятие — интеграл Эйри. Обычная лучевая теория неприменима вблизи каустики, но интеграл Эйри позволяет нам создать «исцеленный» вариант, в котором эта локальная трудность преодолевается.

В однородных системах, изучаемых методом стационарной фазы, такая локальная трудность возникает (разд. 3.7, 4.8 и 4.9) там, где *вторая* производная от фазы (или главная вторая производная, когда число измерений больше, чем одно) обращается в нуль вместе с самим градиентом. Вблизи такой точки интеграл Эйри играет ту же роль, что и интеграл Гаусса в обычной точке. В окрестности этих точек *лучи сходятся*, так как групповая скорость стационарна. Геометрическое место таких точек представляет каустику, которая отделяет область без лучей от области, дважды покрываемой лучами. Однако *допущения* лучевой теории теряют силу в окрестности каустики,

[1] Возможно, что более общее определение могло бы допустить также наличие групп волн от различных источников, но даже в этом случае число групп волн во второй области было бы *на две меньше*, чем в первой.

поскольку локальные градиенты волнового числа становятся большими.

В неоднородных системах, таких, как звуковые волны в стратифицированной атмосфере или воздушном потоке (разд. 4.6), также возможно, чтобы лучи сходились, образуя «огибающую», вне которой, согласно лучевой теории, находится зона тишины. Внутренние волны также обычно имеют каустику с двумя системами лучей ниже ее и с отсутствием лучей выше ее; это может быть либо огибающая (рис. 80, *б*), либо геометрическое место точек возврата лучей (рис. 80, *а*). Во всех этих случаях «исцеленный» вариант лучевой теории может быть получен из свойств интеграла Эйри, на этот раз из его дифференциальных свойств.

Граница любой области захваченных волн является каустикой. Мы убедимся в том, что лучевая теория в своем «исцеленном» варианте является удобным и простым методом приближенного исследования систем захваченных волн.

Прежде всего мы еще раз вернемся к методу стационарной фазы, чтобы проследить, каким образом развивается ограниченное возмущение в одномерной волновой системе (разд. 3.7). Мы покажем, как нужно изменить этот метод вблизи волнового числа $k = k_c$, где групповая скорость $U = d\omega/dk$ стационарна, т. е. там, где

$$U'(k_c) = \omega''(k_c) = 0, \tag{354}$$

что происходит с волнами на воде при минимуме их групповой скорости (рис. 56).

Траектория

$$x/t = U(k_c) \tag{355}$$

распространения волн с волновым числом k_c является каустикой, так как значения U по одну сторону от этого стационарного значения $U(k_c)$ соответствуют *двум* волновым числам k, а по другую сторону не соответствуют *ни одному*.

Как и в разд. 3.7, мы исследуем асимптотическое поведение

$$\zeta = \int_0^\infty F(k) \exp[it\psi(k)]\, dk, \tag{356}$$

где

$$\psi(k) = \omega(k) - kx/t, \tag{357}$$

обращая особое внимание на те значения k, где фаза $t\psi(k)$ имеет первую производную, равную нулю, т. е. где

$$x/t = \omega'(k) = U(k). \tag{358}$$

Метод, подробно описанный в разд. 3.7, нельзя использовать при $k = k_c$, где, согласно (354) и (357), равна нулю также и вто-

рая производная от ψ. Этот метод должен давать плохое приближение даже *вблизи* $k = k_c$, где производная $\psi''(k)$ мала, так что ее вклад в разложение ψ в ряд Тейлора не должен превосходить соответствующий вклад от $\psi'''(k)$.

Тем не менее можно воспользоваться *идеей* метода, развитого в разд. 3.7. Вдали от стационарной точки мы деформируем путь интегрирования в такой, на котором мнимая часть ψ равна по меньшей мере $+\delta$. Однако вблизи стационарной точки (где это невозможно) строится короткое связующее звено L, на котором для оценки асимптотического значения интеграла применяется разложение в ряд Тейлора.

При условии (355) уравнения (357) и (354) дают

$$\psi'(k_c) = 0 \quad \text{и} \quad \psi''(k_c) = 0. \tag{359}$$

Тогда контуры, на которых мнимая часть ψ равна $+\delta$, принимают вид кривых, изображенных на рис. 96, *а*, при

$$\psi'''(k_c) = \omega'''(k_c) > 0, \tag{360}$$

и являются их зеркальными изображениями, если $\omega'''(k_c)$ отрицательно. (Мы опускаем рассмотрение нестандартного случая, когда $\omega'''(k_c)$ обращается в нуль.) За звено L лучше всего принять «траекторию наискорейшего спуска» $\exp[it\psi(k)]$ от $k = k_c$ к указанным контурам. Эта траектория представляет собой пару прямолинейных отрезков, каждый из которых наклонен под углом 30° к действительной оси, поскольку (359) дает

$$\psi(k) = \psi(k_c) + \frac{1}{6}(k - k_c)^3 \psi'''(k_c) + O(k - k_c)^4, \tag{361}$$

а $(k - k_c)^3$ чисто мнимо, когда $\arg(k - k_c)$ равен либо $(1/6)\pi$, либо $(5/6)\pi$.

Мы используем то же самое звено L во всей *окрестности* каустики, т. е. там, где (355) почти (но не точно) удовлетворяется. Тогда $\psi(k)$ включает линейный член

$$(k - k_c)\psi'(k_c) = (k - k_c)[\omega'(k_c) - x/t], \tag{362}$$

который является значительной добавкой в непосредственной близости к $k = k_c$. Однако при малых значениях коэффициента, стоящего в квадратных скобках, на концах L в (361) должен доминировать кубический член. Поэтому звено L остается эффективным при увеличении мнимой части ψ до $+\delta$. А тогда с точностью до ошибки $O[\exp(-t\delta)]$ интеграл (356) может быть взят как интеграл по звену L, что дает

$$\zeta = \int_L [F(k_c) + O(|k - k_c|)] \exp\left\{it\left[\psi(k_c) + (k - k_c)\psi'(k_c) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{6}(k - k_c)^3 \psi'''(k_c) + O(|k - k_c|^4)\right]\right\} dk. \tag{363}$$

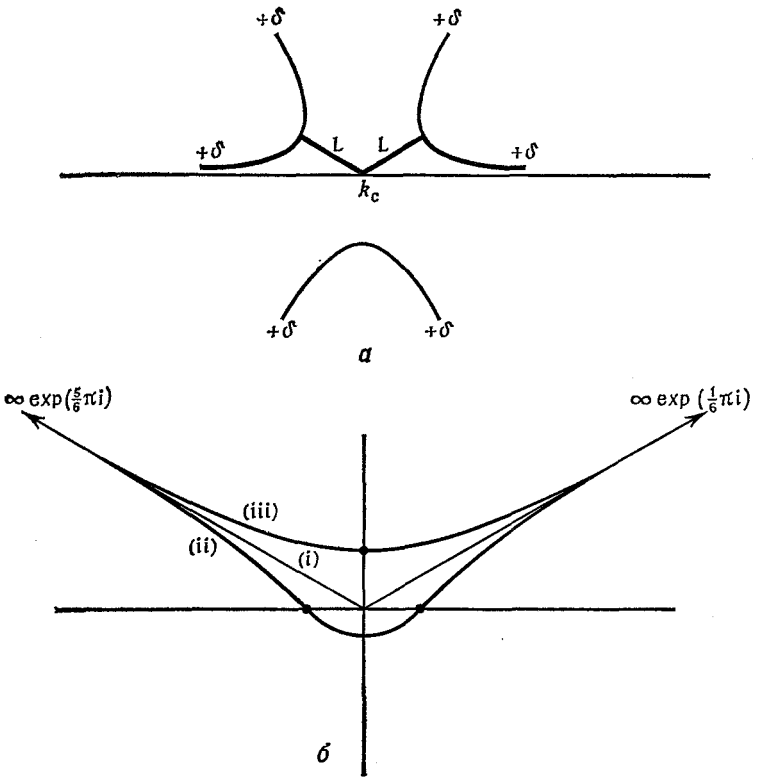

Рис. 96. *а* — типичное поведение (вблизи любой стационарной точки k_c фазовой функции $\psi(k)$, где $\psi''(k_c) = 0$, а $\psi'''(k_c) > 0$) кривых в комплексной плоскости, вдоль которых $\psi(k)$ имеет постоянную мнимую часть $+\delta$. Мы преобразуем путь интегрирования в интеграле (356) в такой, на котором мнимая часть $\psi(k)$ равна $+\delta$, за исключением окрестности k_c, где для перехода с одного такого пути на другой используется звено L; *б* — комплексная плоскость s, определяемая заменой (364): (i) — соответствующий L путь интегрирования, используемый для вычисления интеграла Эйри Ai (X); (ii) — преобразованный путь интегрирования, используемый для получения асимптотического выражения (371) интеграла Ai (X) при больших отрицательных X; (iii) — преобразованный путь интегрирования, используемый для получения асимптотической формы (373) интеграла Ai (X) для больших положительных X.

Чтобы оценить (363), нам нужен не *интеграл Гаусса* с экспонентой от квадратичного выражения, а другой стандартный интеграл — *интеграл Эйри* с экспонентой от суммы линейного и кубического членов. При помощи подстановки

$$k - k_c = \left[\frac{1}{2} t\psi'''(k_c)\right]^{-1/3} s, \tag{364}$$

которая упрощает кубический член до $(1/3)\, is^3$, а затем замены

$$X = \left[\frac{1}{2} t\psi'''(k_c)\right]^{-1/3} t\psi'(k_c), \tag{365}$$

которая приводит линейный член к $is\,X$, интеграл (363) можно привести к стандартной форме

$$\zeta = F(k_c)\{\exp[it\psi(k_c)]\} \times \left[\frac{1}{2} t\psi'''(k_c)\right]^{-1/3} \int \exp\left[i\left(sX + \frac{1}{3}s^3\right)\right] ds \tag{366}$$

с коэффициентом погрешности $1 + O(t^{-1/3})$, так как (364) дает

$$O(|k - k_c|) = O(t\,|k - k_c|^4) = O(t^{-1/3}). \tag{367}$$

Интеграл в (366) берется по криволинейному пути в плоскости s, соответствующему L в плоскости k. На концах этого пути модуль подинтегрального выражения убывает до $O[\exp(-t\delta)]$. Поэтому интеграл отличается от того же самого интеграла, взятого по всему пути до бесконечности, на величину только этого порядка. Мы определяем

$$\mathrm{Ai}(X) = (2\pi)^{-1} \int_{\infty \exp((5/6)\pi i)}^{\infty \exp((1/6)\pi i)} \exp\left[i\left(sX + \frac{1}{3}s^3\right)\right] ds \tag{368}$$

и тогда получаем, что асимптотическое представление ζ имеет вид

$$\zeta \sim 2\pi F(k_c)\{\exp[it\psi(k_c)]\}\left[\frac{1}{2} t\psi'''(k_c)\right]^{-1/3} \mathrm{Ai}(X). \tag{369}$$

Проведенный выше вывод относился к рис. 96, показывающему форму L для $\psi'''(k_c) > 0$, однако полученное заключение справедливо также и для $\psi'''(k_c) < 0$, когда контур L на рис. 96, *а* заменяется его зеркальным изображением относительно действительной оси. Кубический корень в (364) нужно при этом взять отрицательным, так что в плоскости s путь интегрирования вернется к кривой, идущей от $\infty \exp((5/6)\pi i)$ к $\infty \exp((1/6)\pi i)$ и использованной в (368).

Интеграл Эйри (368) легко вычисляется, и результаты приведены на рис. 97. Характер этого графика можно объяснять

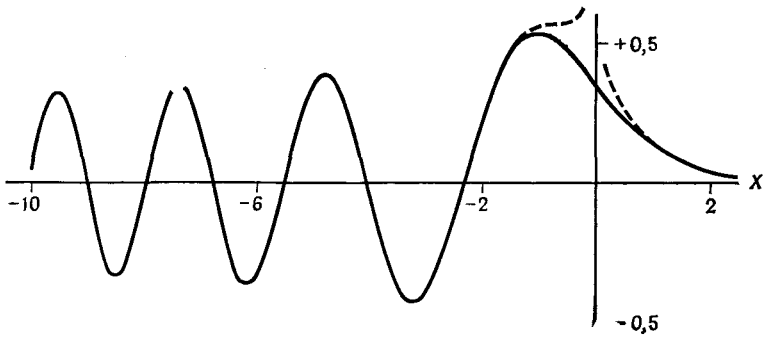

Рис. 97. Сплошная кривая — интеграл Эйри Ai (X). Штриховая кривая — его асимптотические формы (373) для $X > 0$ и (374) для $X < 0$.

при помощи теории стационарной фазы. Когда X принимает большое положительное значение, фаза $sX + (1/3)\, s^3$ не имеет никакой стационарной точки около действительной оси, так что интеграл становится экспоненциально малым, соответствуя, как мы увидим, стороне каустики без волн. Когда X принимает большое отрицательное значение, существуют две далеко отстоящие друг от друга стационарные точки при действительных s, принимающих значения

$$s = +|\, X\, |^{1/2} \quad \text{и} \quad s = -|\, X\, |^{1/2}; \tag{370}$$

в этих точках вторая производная от фазы, равная $2s$, соответственно положительна и отрицательна. В данном случае естественно попытаться оценить интеграл Эйри как сумму двух интегралов Гаусса посредством деформации пути интегрирования (отчасти как на рис. 63) в кривую, проходящую через эти точки под углом $+45°$ и $-45°$ к действительной оси (рис. 96). Эта оценка для $X < 0$ дает выражение

$$\mathrm{Ai}\,(X) \sim (2\pi)^{-1}\left\{\exp\left[-\frac{2}{3}i\,|\,X\,|^{3/2}+\frac{1}{4}\pi i\right]\right\}[2\pi/(2|\,X\,|^{1/2})]^{1/2}+$$
$$+(2\pi)^{-1}\left\{\exp\left[+\frac{2}{3}i\,|\,X\,|^{3/2}-\frac{1}{4}\pi i\right]\right\}[2\pi/(2|\,X\,|^{1/2})]^{1/2}, \tag{371}$$

содержащее два различных члена, имеющих волновой характер. Они модулируют $\exp\,[it\psi\,(k_c)]$ в (369), соответствуя, как мы увидим, двум группам волн на стороне каустики с $X < 0$.

Действительно, для больших положительных X путь интегрирования можно подобным же образом деформировать (рис. 96) так, чтобы он прошел через мнимое положение стационарной

фазы $s = +iX^{1/2}$, где подинтегральное выражение принимает значение exp $(-(2/3)\, X^{3/2})$, а фаза имеет вторую производную $2iX^{1/2}$. Траектория наискорейшего спуска через эту точку параллельна действительной оси и позволяет оценить Ai (X) как интеграл Гаусса

$$(2\pi)^{-1}\left[\exp\left(-\frac{2}{3}X^{3/2}\right)\right]\int \exp\left[-X^{1/2}(s-iX^{1/2})^2\right] ds. \qquad (372)$$

Графики выражения (372) для больших положительных X, легко оцениваемого как

$$\mathrm{Ai}\,(X) \sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2}X^{-1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}X^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad X>0, \qquad (373)$$

и выражения, представленного формулой (371), для больших отрицательных X, а именно выражения

$$\mathrm{Ai}\,(X) \sim \pi^{-1/2}\,|\,X\,|^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}\,|\,X\,|^{3/2}-\frac{1}{4}\pi\right) \quad \text{при} \quad X<0, \qquad (374)$$

также изображены на рис. 97. Проведенные на нем штриховые кривые показывают, что интеграл Эйри быстро и плавно переходит от своей волнообразной асимптотической формы (374) для отрицательных X к экспоненциально убывающей асимптотической форме (373) для положительных X.

Когда $\psi\,(k)$ имеет вид (357), соотношения (365) и (369) дают

$$\zeta \sim \frac{2\pi F(k_c)}{[(1/2)\,t\omega'''(k_c)]^{1/3}}\,\mathrm{Ai}\left\{\frac{t\omega'(k_c)-x}{[(1/2)\,t\omega'''(k_c)]^{1/3}}\right\}\times$$
$$\times\exp\{i\,[\omega(k_c)\,t-k_c x]\}. \qquad (375)$$

Уравнение (375) показывает, насколько велики волны на той стороне каустики, где

$$x - t\omega'(k_c) \text{ имеет тот же знак, что и } \omega'''(k_c); \qquad (376)$$

там находятся две группы волн, так как функция Эйри для отрицательных X содержит сумму двух экспонент (371). Эти две группы волн с близким волновым числом «пульсируют» вместе; на рис. 97, показывающем медленное изменение их амплитуды, действительно видно, что впервые она обращается в нуль при $X = -2{,}34$.

Мы видим (рис. 97 для *положительных* X), что на другой стороне каустики амплитуда волны убывает экспоненциально и составляет всего лишь 3% ее максимального значения уже на расстоянии

$$|\,x-t\omega'(k_c)\,| = 2{,}5\,|\,\frac{1}{2}t\omega'''(k_c)|^{1/3} \qquad (377)$$

от каустики. Этот интервал затухания постепенно возрастает со временем, но становится все более и более несущественной частью всей протяженности группы волн, которая растет пропорционально самому t.

Общая теория (разд. 3.7) стационарной фазы в одномерном случае дает затухание амплитуды по закону $t^{-1/2}$ по мере рассеивания энергии, однако неприменимость этой теории вблизи каустики очевидна из-за множителя при $t^{-1/2}$, равного $|\omega''(k)|^{-1/2}$ и неограниченно возрастающего при приближении к каустике. Истинная амплитуда на самой каустике ни в коем случае не может быть бесконечной, так как Ai (0) имеет конечное значение 0,355. Однако эта амплитуда действительно затухает более медленно, чем $t^{-1/2}$: согласно (369), она затухает пропорционально $t^{-1/3}$.

В самом деле, уравнение (365) показывает, что для фиксированного x/t, удовлетворяющего условию (376) наличия волн, ζ асимптотически возвращается к виду, содержащему $t^{-1/2}$, поскольку $|X|^{-1/4}$ в (374) затухает со временем пропорционально $t^{-1/6}$. В этом случае на каустической границе волновой области происходит небольшое возрастание амплитуды (от значения порядка $t^{-1/2}$ до значения порядка $t^{-1/3}$) непосредственно *перед* ее экспоненциальным спадом до нуля.

Каустика есть нечто подобное «ране» для простой теории лучей, которая предсказывает возрастание амплитуды до бесконечности на каустике, разрыв и затем убывание до нуля. Решение в виде интеграла Эйри (375) «залечивает» эту рану, делая возможным вполне конечный и непрерывный переход от одного режима к другому.

Даже в однородных одномерных волновых системах каустика не должна быть сама по себе лучом. Мы показывали на рис. 60, что в случае, когда начальное возмущение *не* находится в ограниченной области, лучи в плоскости (x, t) могут быть непересекающимися прямыми. Эти прямые могут иметь криволинейную огибающую, где они сходятся (рис. 98); эта огибающая и есть каустика с двумя группами лучей с одной стороны и с отсутствием лучей с другой.

Этот случай можно проанализировать, записывая возмущение в виде (356) с

$$t\psi(k) = t\omega(k) + g(k) - kx, \tag{378}$$

так что условие стационарности фазы будет иметь вид

$$x = g'(k) + t\omega'(k). \tag{379}$$

Уравнение (379) описывает систему прямолинейных лучей, такую, что волны с волновым числом k первоначально находи-

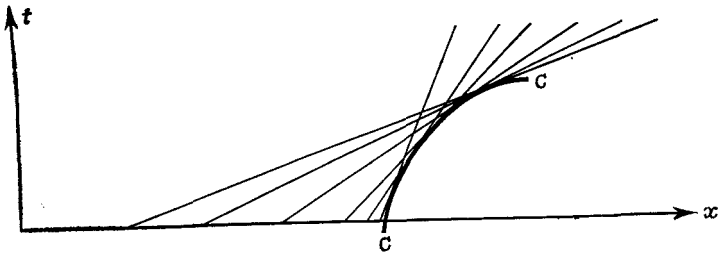

Рис. 98. Каустика C как огибающая прямолинейных лучей $x - Ut = \text{const}$ в плоскости (x, t) для однородной одномерной системы волн.

лись при $x = g'(k)$. Каустика определяется уравнениями (359), в силу которых

$$x = g'(k_c) + t\omega'(k_c) \quad \text{при} \quad g''(k_c) + t\omega''(k_c) = 0. \tag{380}$$

Уравнения (380) представляют собой просто параметрические уравнения огибающей прямых (379); второе из них определяет параметр k_c (волновое число на каустике) как функцию времени. Для такой криволинейной каустики уравнение (369), в котором ψ определяется выражением (378), дает

$$\zeta \approx \frac{2\pi F(k_c)}{[(1/2)\, g'''(k_c) + (1/2)\, t\omega'''(k_c)]^{1/3}} \operatorname{Ai}\left\{\frac{g'(k_c) + t\omega'(k_c) - x}{[(1/2)\, g'''(k_c) + (1/2)\, t\omega'''(k_c)]^{1/3}}\right\} \times$$
$$\times \exp\{i\,[g(k_c) + t\omega(k_c) - k_c x]\} \tag{381}$$

со свойствами, аналогичными тем, которые обсуждались выше.

Другим непосредственным обобщением одномерной теории является случай распространения в двух или трех измерениях, как рассматривалось в разд. 4.8. Подробности достаточно изложить для первоначально ограниченного возмущения, распространяющегося в двух измерениях.

Задача в таком случае состоит в том, чтобы асимптотически оценить интеграл

$$q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_0(k_1, k_2) \exp[it\psi(k_1, k_2)]\, dk_1\, dk_2. \tag{382}$$

Общая теория стационарной фазы дает такую оценку в виде (262), однако эта оценка становится бесконечной там, где якобиан

$$J = \partial(U_1, U_2)/\partial(k_1, k_2) \tag{383}$$

обращается в нуль. В теории, где энергия переносится вдоль лучей, бесконечность неизбежна; действительно, лучи должны

были бы сходиться там, где J обращается в нуль, потому что объем, занимаемый энергией в момент t в элементе волновых чисел dk_1dk_2, в таком случае равен

$$| \partial (U_1t,\ U_2t)/\partial (k_1,\ k_2) | dk_1dk_2 = t^2 | J | dk_1dk_2. \qquad (384)$$

Но при этом нарушались бы также предположения теории лучей (медленное изменение $\mathbf{k}$). Интеграл Эйри еще раз «залечивает рану».

Как и в разд. 3.8, мы оценим (382), используя локальные оси, в которых тензор

$$\partial^2\psi/\partial k_i dk_j = \partial^2\omega/\partial k_i \partial k_j \qquad (385)$$

имеет только диагональные элементы. Теперь в любой точке каустики $(k_1^c,\ k_2^c)$ один из этих диагональных элементов должен быть сам равен нулю, поскольку *детерминант* J этого тензора обращается в нуль; мы предположим, что только один из них равен нулю, и пронумеруем оси таким образом, чтобы это был элемент $\partial^2\omega/\partial k_1^2$. Вблизи $(k_1^c,\ k_5^c)$ мы представим интеграл (382) как произведение

$$q = \int \exp\left\{it\left[(k_1 - k_1^c)\,(\partial\psi/\partial k_1)^c + \frac{1}{6}(k_1 - k_1^c)^3\,(\partial^3\psi/\partial k_1^3)^c\right]\right\} dk_1 \times$$

$$\times \frac{1}{2}\,Q_0(k_1^c, k_2^c)\,\{\exp[it\psi(k_1^c, k_2^c)]\} \int \exp\left[i\frac{t}{2}(k_2 - k_2^c)^2\,(\partial^2\psi/\partial k_2^2)^c\right] dk_2, \qquad (386)$$

где первая строка оценивает интеграл по k_1 в форме интеграла Эйри, а во вторую строку включаются все остальные множители, в том числе и интеграл Гаусса по k_2. Результатом является произведение члена с интегралом Эйри и обычного выражения теории стационарной фазы:

$$q = \frac{2\pi Q_0(k_1^c, k_2^c)}{\left[\frac{t}{2}(\partial^3\omega/\partial k_1^3)^c\right]^{1/3}} \mathrm{Ai}\left\{\frac{t\,(\partial\omega/\partial k_1)^c - x_1}{\left[\frac{t}{2}(\partial^3\omega/\partial k_1^3)^c\right]^{1/3}}\right\} \exp[i(\omega^c t - \mathbf{k}^c\cdot\mathbf{x})] \times$$

$$\times \left[\frac{2\pi}{t\,|\,(\partial^2\omega/\partial k_2^2)^c\,|}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{1}{4}\pi i\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k_2^2}\right)^c\right]. \qquad (387)$$

(Здесь, так же как в разд. 4.8, следует взять действительную часть, так как в (386) был изъят множитель 1/2 и опущен комплексно сопряженный член с $(-k_1^c,\ -k_2^c)$ вместо $(k_1^c,\ k_2^c)$. В трехмерном случае нужно повторить вторую строку с k_3 вместо k_2.)

Выражение (387) можно применить к волнам, которые генерируются брошенным в пруд камнем. Круговая спокойная область в центре расширяется с минимальной групповой ско-

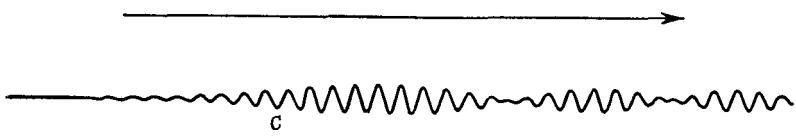

Рис. 99. Волновая картина по истечении достаточно большого времени t после того, как в пруд был брошен камень. Точка C находится на расстоянии $U_c t$ от центра возмущения, где U_c — минимальная групповая скорость, равная 0,18 м/с. Амплитуда волн затухает экспоненциально за точкой C, но пульсирует перед C. Гребни волн движутся со скоростью, на 58% превосходящей скорость самой точки C.

ростью $U_c = U(k_c)$, соответствующей волнам длины 44 мм (см. конец разд. 3.6). Вблизи контура этого круга применяется уравнение (387). Главные направления радиальны при

$$\partial\omega/\partial k_1 = U_c, \quad \partial^2\omega/\partial k_1^2 = 0, \quad \partial^3\omega/\partial k_1^3 = U_c^2/(k_c\omega_c), \tag{388}$$

а азимутальны при

$$\partial\omega/\partial k_2 = 0, \quad \partial^2\omega/\partial k_2^2 = U_c/k_c, \tag{389}$$

откуда

$$q = \frac{2\pi Q_0(k_c, 0)}{((1/2)\, tU_c^2/(k_c\omega_c))^{1/3}} \operatorname{Ai}\left[\frac{U_c t - x_1}{((1/2)\, tU_c^2/(k_c\omega_c))^{1/3}}\right] \left(\frac{2\pi k_c}{U_c t}\right)^{1/3} \times$$
$$\times \exp\left[i\left(\omega_c t - k_c x_1 + \pi/4\right)\right]. \tag{390}$$

На рис. 99 показан вид этого выражения через большой промежуток времени t, когда происходит переход от волновых амплитуд порядка t^{-1}, модулируемых в результате «биений» между гравитационными и капиллярными волнами, через максимальную амплитуду порядка $t^{-5/6}$ к спокойной внутренней области с экспоненциально затухающей амплитудой волн. Круговая каустика расширяется со скоростью U_c, в то время как гребни волн движутся с большей скоростью $\omega_c/k_c = 1{,}58\, U_c$. Поэтому при изображении относительно каустики (рис. 99) волны движутся вперед (возникая «из ничего») со скоростью $0{,}58\, U_c$.

Результаты разд. 4.9, относящиеся к волнам от осциллирующего источника, можно обобщить аналогичным образом. Мы опять начнем с двумерного распространения: этот случай имеет важные приложения к корабельным волнам (разд. 4.12).

Полное выражение (275) для плоских волн от осциллирующего источника аппроксимируется с экспоненциально малой погрешностью двумерной формой выражения (284); там за ось x_1 выбрано направление, в котором оценивается значение решения. Если кривизна $\varkappa^{(0)}$ в точке на S_+ с нормалью $\mathbf{n}$ в этом

направлении отлична от нуля, то асимптотическая форма выражения (284) такая же, как в (290).

Однако точка перегиба C на кривой волновых чисел S (т. е. точка нулевой кривизны) порождает *каустику*. Она тянется от источника в направлении *нормали в точке перегиба*. В силу того что лучи в направлениях нормалей, выходящих из точек на кривой волновых чисел с любой стороны от C, лежат на *одной и той же* стороне каустики, существует две группы волн на этой стороне и ни одной — на другой.

Мы оценим волны в точках либо на каустике, *либо вблизи* нее, направив ось x_1 точно вдоль каустики (т. е. вдоль нормали в точке C). Тогда двумерная форма выражения (284) примет вид

$$q = -2\pi i\,[\exp(i\omega_0 t)] \int\limits_{S_+} F(k_1, k_2)\,[\partial B/\partial k_1]^{-1} \times \\ \times \exp[-i(k_1 x_1 + k_2 x_2)]\,dk_2, \qquad (391)$$

где координата x_2, измеряющая расстояние от каустики, отлична от нуля, хотя и много меньше x_1.

Вблизи точки перегиба $k_2 = k_2^c$ на кривой волновых чисел S разложение k_1 как функция от k_2 не совпадает с (286), так как производная $(d^2k_1/dk_2^2)^c$ равна нулю; действительно, оно имеет вид

$$k_1 = k_1^c + \frac{1}{6}(k_2 - k_2^c)^3 (d^3k_1/dk_2^3)^c + O(k_2 - k_2^c)^4. \qquad (392)$$

Поэтому экспоненту под знаком интеграла в (391) можно аппроксимировать выражением

$$\exp\left\{-i\left[k_1^c x_1 + k_2^c x_2 + (k_2 - k_2^c)\,x_2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{6}(k_2 - k_2^c)^3 (d^3k_1/dk_2^3)^c x_1\right]\right\}, \qquad (393)$$

которое является экспонентой от суммы члена, не зависящего от $k_2 - k_2^c$, линейного члена и кубического члена. Это позволяет получить оценку выражения (391) через интеграл Эйри в виде

$$q = -\frac{4\pi^2 i F(k_1^c, k_2^c) \exp[i(\omega_0 t - k_1^c x_1 - k_2^c x_2)]}{[\partial B/\partial k_1]^c\,[(1/2)\,x_1\,(d^3k_1/dk_2^3)^c]^{1/3}} \times \\ \times \mathrm{Ai}\left\{\frac{x_2}{[(1/2)\,x_1\,(d^3k_1/dk_2^3)^c]^{1/3}}\right\}. \qquad (394)$$

«Рана», отделяющая решение (290) теории лучей, изменяющееся как $x_1^{-1/2}$, но с обращающимся в бесконечность в точке C коэффициентом $|\varkappa^{(0)}|^{-1/2}$, от области вне каустики, куда не прони-

кают никакие лучи, «залечивается» этим решением, которое допускает рост волновой амплитуды фактически до значения порядка $x_1^{-1/3}$ перед экспоненциальным затуханием до нуля вне каустики. Для иллюстрации такого поведения в разд. 4.12 используются корабельные волны.

Мы завершаем этот раздел обсуждением некоторых свойств каустики в неоднородных волновых системах, хотя и ограничиваемся стратифицированным случаем (122), когда в дисперсионное соотношение входит явно только одна координата z. При этом частота ω и горизонтальные составляющие волнового вектора k и l остаются постоянными вдоль луча. Соответственно этому дисперсионное соотношение определяет вертикальную составляющую m волнового вектора как некоторую функцию

$$m = m(z). \tag{395}$$

Например, для звуковых волн

$$[m(z)]^2 = \omega^2 [c_0(z)]^{-2} - k^2 - l^2, \tag{396}$$

в то время как для внутренних волн

$$[m(z)]^2 = (k^2 + l^2)\{\omega^{-2}[N(z)]^2 - 1\}. \tag{397}$$

В обоих случаях $[m(z)]^2$ может обращаться в нуль (имея отличную от нуля первую производную) на *каустике*, где либо $c_0(z)$ принимает значение $\omega(k^2 + l^2)^{-1/2}$, либо $N(z)$ принимает значение ω. По одну сторону каустики существуют две группы волн, соответствующие противоположным знакам $m(z)$ (рис. 79 и 80), а по другую сторону (где не существует действительного решения для $m(z)$) нет никаких волн.

В каждом случае для волн с заданными ω, k и l соответствующим образом выбранная физическая величина q должна записываться в виде

$$q = Q(z)\exp[i(\omega t - kx - ly)], \quad \text{где} \quad Q''(z) + [m(z)]^2 Q(z) = 0. \tag{398}$$

Это было доказано в (137) для восходящего массового потока q во внутренних волнах и следует для звуковых волн из уравнений гл. 2, если величина q равна

$$p_e/\rho_0^{1/2}. \tag{399}$$

Теория лучей (см. уравнения (138)) предлагает решения вида

$$Q(z) \approx K[m(z)]^{-1/2}\exp\left[\pm i\int_{z_0}^{z} m(z)\,dz\right], \tag{400}$$

где, например, лучи, несущие энергию вверх, имеют знак «минус» для звуковых волн и знак «плюс» для внутренних. Эти решения, однако, имеют нежелательный разрыв от значения, стремящегося к бесконечности при подходе к каустике $m = 0$, до нулевого значения непосредственно за ней.

Чтобы «залечить» этот нежелательный разрыв вблизи каустики $z = z_1$, образующей верхнюю границу волновой области, где

$$[m(z)]^2 = \beta_1 (z_1 - z) + O(z_1 - z)^2 \tag{401}$$

($\beta_1 > 0$), целесообразно воспользоваться решением уравнения

$$Q''(z) + \beta_1 (z_1 - z) Q(z) = 0. \tag{402}$$

Эту функцию «исцелителя» снова выполняет интеграл Эйри (368).

Действительно, (368) показывает, что

$$\mathrm{Ai}''(X) - X\,\mathrm{Ai}(X) = (2\pi)^{-1} \int_{\infty \exp((5/6)\pi i)}^{\infty \exp((1/6)\pi i)} (-s^2 - X) \times$$

$$\times \exp\left[i \left(sX + \frac{1}{3} s^3 \right) \right] dS =$$

$$= (2\pi)^{-1} i \int_{\infty \exp((5/6)\pi i)}^{\infty \exp((1/6)\pi i)} d\left\{ \exp\left[i \left(sX + \frac{1}{3} s_3 \right) \right] \right\} = 0, \tag{403}$$

так как экспонента в фигурных скобках обращается в нуль на обоих концах участка интегрирования. Поэтому

$$Q(z) = Q_1 \,\mathrm{Ai}\left[\beta_1^{1/3} (z - z_1)\right] \tag{404}$$

является решением уравнения (402), которое не содержит никаких волн при больших положительных значениях $\beta_1^{1/3}(z - z_1)$. С другой стороны, выражение (374) показывает, что при больших отрицательных значениях $\beta_1^{1/3}(z - z_1)$ решение $Q(z)$ ведет себя как

$$Q_1 \pi^{-1/2} \beta_1^{-1/12} (z_1 - z)^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3} \beta_1^{1/2} (z_1 - z)^{3/2} - \frac{1}{4} \pi \right]. \tag{405}$$

Это можно сравнить с локальной формой решения теории лучей, которое в силу соотношений (400) и (401) определяется выражением

$$K \beta_1^{-1/4} (z_1 - z)^{-1/4} \exp\left\{ \pm i \left[\alpha_1 - \frac{2}{3} \beta_1^{1/2} (z_1 - z)^{3/2} \right] \right\}, \tag{406}$$

содержащим произвольную комплексную амплитуду K и постоянную интегрирования

$$\alpha_1 = \int_{z_0}^{z_1} m(z)\, dz. \tag{407}$$

Когда интеграл Эйри применяется для того, чтобы «залечить» решение теории лучей в указанном смысле, он всегда дает определенный и чрезвычайно полезный результат, утверждающий, что если два решения (406) должны сводиться к (405), то

$$\alpha_1 = n_1\pi + \frac{1}{4}\pi, \tag{408}$$

где n_1 — некоторое целое число. Аналогично, для обоих решений

$$K = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\beta_1^{1/6}Q_1(-1)^{n_1}. \tag{409}$$

Эти результаты показывают, что решения теории лучей отражаются на каустиках: амплитуда остается неизменной, в то время как соотношение фаз таково, что волна вместе со своим отражением описывается содержащим косинус членом (как в (405)), который достигает своего максимума непосредственно перед каустикой. Его фаза отстает от этого максимума на $\pi/4$ там, где достигается каустика. График самого интеграла $\mathrm{Ai}(X)$ (рис. 97) отражает это поведение.

Аналогичным образом вблизи каустики, образующей нижнюю границу волновой области, имеем

$$[m(z)]^2 = \beta_2(z - z_2) + O(z - z_2)^2 \tag{410}$$

($\beta_2 > 0$). Тогда локальное решение уравнения (398) дается выражением

$$Q = Q_2\,\mathrm{Ai}\,[\beta_2^{1/3}(z_2 - z)], \tag{411}$$

которое при больших отрицательных значениях $\beta_2^{1/3}(z - z_2)$ не содержит никаких волн. Однако при больших положительных значениях этой величины Q ведет себя как

$$Q_2\pi_1^{-1/2}\beta_2^{-1/2}(z-z_2)^{-1/4}\cos\left[\frac{2}{3}\beta_2^{1/2}(z-z_2)^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right], \tag{412}$$

тогда как решения (400) принимают вид

$$K\beta_2^{-1/4}(z-z_2)^{-1/4}\exp\left\{\pm i\left[\frac{2}{3}\beta_2^{1/2}(z-z_2)^{3/2} - \alpha_2\right]\right\}, \tag{413}$$

где

$$\alpha_2 = \int_{z_2}^{z_0} m(z)\, dz. \tag{414}$$

Теперь сращивание двух решений дает

$$\alpha_2 = n_2\pi + \frac{1}{4}\pi, \tag{415}$$

где n_2 — другое целое число, и

$$K = \frac{1}{2}\pi^{-1/2}\beta_2^{1/6}Q_2(-1)^{n_2}, \tag{416}$$

что показывает, как решения теории лучей отражаются на нижних каустиках.

Одним из приложений этих результатов является нахождение условий для захваченных волн. Сумма двух решений (400) может удовлетворять условиям *как* на верхней, *так и* на нижней каустике при условии, что оба значения K одинаковы, а величины α_1 и α_2, определяемые выражениями (407) и (414), имеют значения (408) и (415). Суммируя последние два условия, получаем простое условие для захваченных волн

$$\int_{z_2}^{z_1} m(z)\, dz = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{417}$$

где $n = n_1 + n_2$ может быть любым целым числом. Условие (417) известно также в квантовой механике в теории решений типа захваченных волн уравнения Шредингера (72).

Заметим, что $\pi/2$ появляется в (417) в силу того, что $|Q|$ достигает своего максимума непосредственно перед каждой каустикой с фазой, отстающей на $\pi/4$ от этого максимума к моменту времени, когда достигается каустика. У основной моды $n = 0$ (для внутренних волн — моды высшей частоты, соответствующей «волнообразным» колебаниям океанического термоклина) эти два максимума *совпадают*. Теория лучей, даже когда ее «залечили» при помощи интеграла Эйри, в этом случае может дать только грубое представление формы волны, однако условие (417) для частоты во многих случаях оказывается довольно точным.

Бóльшие значения n соответствуют *числу пересечений* оси графиком $Q(z)$, которое, как было подчеркнуто при обсуждении уравнения (71), различно для разных решений типа захваченных волн. Формы волн при $n \geqslant 1$ часто очень хорошо выражаются при помощи двух представлений интеграла Эйри (404)

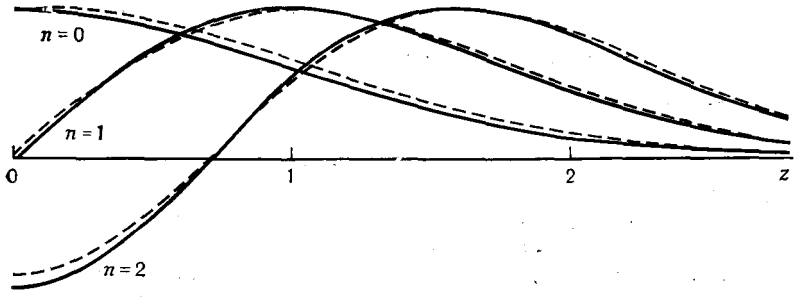

Рис. 100. Сплошные кривые — решения (398), описывающие захваченные волны для случая $[m(z)]^2 + z^2 = \text{const}$. Штриховые кривые — приближенные решения, получаемые при использовании условия (417). Эти приближенные решения вычисляются как пропорциональные интегралу $\mathrm{Ai}\left[-\left(\frac{3}{2}\int_z^{z_1} m(z)dz\right)^{3/2}\right]$, что согласуется с (404) вблизи $z=z_1$, а также с лучевой теорией для больших $z_1 - z$, как это можно показать при помощи (374). Постоянное значение величины $[m(z)]^2 + z^2$ как для точной, так и для приближенной теорий оказывается точно равным $n + 1/2$. Решения являются четными или нечетными функциями z в зависимости от того, четно или нечетно n. Все решения здесь сформированы так, что их максимальные значения одинаковы.

и (411) вплоть до первого пересечения оси в каждом случае, а при $n > 1$, когда они не совпадают,— при помощи теории лучей в промежутке (рис. 100).

Звуковые волны могут распространяться значительно выше спокойного холодного озера в условиях «инверсии», когда температура воздуха возрастает с высотой приблизительно по линейному закону. Причиной такого поведения может быть захваченная волна. Граничное условие, согласно которому $\partial p_e/\partial z$ обращается в нуль на поверхности озера $z = 0$, может удовлетворяться при максимуме ($X = -1{,}02$) решения в форме интеграла Эйри (404). Это дает

$$z_1 = 1{,}02\beta_1^{-1/3}, \quad \text{где} \quad \beta_1 = \omega^2 c_0^{-2}\,(T^{-1}\,dT/dz) \qquad (418)$$

является скоростью *убывания* выражения (396) с высотой, а z_1 — высота каустики. При этом волновая энергия для любой заданной частоты может быть сосредоточена в слое высоты z_1, меняющейся по закону $\omega^{-2/3}$. Таким образом, имеет место тенденция усиления интенсивности звука на поверхности для звуковых колебаний большей частоты.

4.12. Генерирование волн движущимися вынуждающими воздействиями

Выше были проанализированы волны, генерируемые осциллирующими источниками для однородных систем трех видов: когда кривизна (или гауссова кривизна) кривой (или поверхности) волновых чисел либо нигде не обращается в нуль (разд. 4.9), либо всюду равна нулю (разд. 4.10), либо обращается в нуль только локально (разд. 4.11). Теперь мы покажем, что эта часть теории имеет гораздо больше приложений, чем может показаться первоначально.

Объясняется это тем, что указанную теорию можно сразу же обобщить (главным образом при помощи соотношения Допплера (143)) на случай волн, генерируемых движущимися с постоянной скоростью вынуждающими воздействиями. Такими вынуждающими воздействиями могут быть, как и раньше, осциллирующие источники фиксированной частоты ω_0. Однако особое значение может иметь случай *стационарных* движущихся вынуждающих воздействий (случай $\omega_0 = 0$); этот случай включает волны, генерируемые стационарным движением корабля, предварительно описанные в разд. 3.10.

В этом разделе мы изложим сначала совсем простые модификации теории последних трех резделов, которые необходимы, чтобы применить эту теорию для вынуждающих воздействий с частотой ω_0, движущихся с постоянной скоростью. Мы примем, что эта скорость равна $-\mathbf{V}$, так что, как и в разд. 4.6, $\mathbf{V}$ представляет собой скорость жидкости относительно движущегося источника. В качестве основного примера приводятся корабельные волны (случай $\omega_0 = 0$ для гравитационных волн на глубокой воде), хотя теория используется также, чтобы показать геометрию волновой картины, возбуждаемой колебаниями движущегося корабля при ненулевой частоте. И, наконец, детально изучаются внутренние волны, генерируемые некоторым объектом, движущимся стационарно в стратифицированной жидкости.

В дифференциальном уравнении или в граничном условии источник волн, осциллирующий с частотой ω_0 и движущийся со скоростью $-\mathbf{V}$, можно представить вынуждающим членом

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{V}t) \exp(i\omega_0 t), \tag{419}$$

который является обобщением выражения (267). Если $f(\mathbf{x})$ имеет преобразование Фурье $F(\mathbf{k})$, как в (268), то вынуждаю-

щий член (419) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k})\exp\{i\,[\omega_0 t - k_j(x_j + V_j t)]\}\,dk_1\,dk_2\,dk_3 \quad (420)$$

(где переменная k_3 в двумерных задачах опускается). При (420) волны, генерируемые с волновым числом k_j, имеют частоту

$$\omega_0 - k_j V_j = \omega_r \quad (421)$$

относительно жидкости. Уравнение (421) совпадает с уже установленным соотношением Допплера (143).

Соответствующие волновые движения можно сразу же выписать в виде

$$q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mathbf{k})\exp\{i\,[\omega_0 t - k_j(x_j + V_j t)]\}}{B(\omega_0 - k_j\,V_j,\ \mathbf{k})}\,dk_1\,dk_2\,dk_3, \quad (422)$$

если, как и в разд. 4.9, в правой части основного уравнения или граничного условия появляется член

$$B(\omega,\ \mathbf{k})\,a\exp[i\,(\omega t - k_j x_j)], \quad (423)$$

соответствующий синусоидальной волне

$$a\exp[i\,(\omega t - k_j x_j)]. \quad (424)$$

Если имеет место (422), то поверхность волновых чисел S (или в двумерном случае кривая волновых чисел) определяется как геометрическое место точек

$$B(\omega_0 - k_j V_j,\ \mathbf{k}) = 0, \quad (425)$$

на котором подинтегральная функция имеет полюсы, т. е. на котором частота ω_r относительно жидкости, определяемая выражением (421), удовлетворяет дисперсионному соотношению $B(\omega,\ \mathbf{k}) = 0$ для свободных волн (волн без вынуждения).

Вся теория, необходимая для оценки волн (422), содержится в предыдущих трех разделах. Чтобы представить интеграл (269) в виде (422), нам нужно только

заменить $B(\omega_0,\mathbf{k})$ *выражением* $B(\omega_0 - k_j V_j,\ \mathbf{k}) = B_r(\omega_0,\ \mathbf{k})$ (426)

и в то же самое время

заменить x_j *выражением* $x_j + V_j\,t = X_j$ (427)

(координатой относительно источника). Следовательно, для оценки (422) мы можем применять любую часть общей теории, просто осуществив всюду указанные замены.

В частности, подстановка (426) заменяет уравнение (278) для поверхности (или кривой) волновых чисел уравнением (425). Даже для волн, изотропных относительно жидкости, уравнение (425) становится анизотропным за счет движения источника. Поэтому для оценки волн, генерируемых движущимися источниками, и в случае изотропных систем требуется общая теория в том виде, который дан в этой главе (теория для анизотропных волн).

Значительно раньше мы показали (разд. 3.9), что нужно проявлять осторожность, чтобы правильно применить условие излучения для движущихся вынуждающих воздействий. В общей теории осциллирующих источников условие излучения располагает волны с волновым числом $\mathbf{k}$ вдоль направления $\mathbf{n}$ нормали к S, выбирая из двух направлений нормали то, вдоль которого ω *возрастает* выше ω_0. Чтобы выразить этот факт, для удобства обозначим поверхность (425) волновых чисел для источников с частотой ω_0 через $S(\omega_0)$; тогда волны будут обнаружены вдоль той нормали $\mathbf{n}$ к $S(\omega_0)$, которая идет в направлении $S(\omega_0 + \delta)$ при $\delta > 0$.

Приведенное выше правило допускает простую физическую интерпретацию. Согласно (421), это направление нормали $\mathbf{n}$ является направлением вектора градиента

$$\partial\omega_0/\partial k_j = V_j + \partial\omega_r/\partial k_j = V_j + U_j, \qquad (428)$$

где U_j — групповая скорость относительно жидкости. Однако замена (427) означает, что положение волн описывается относительно *источника*; вектор (428), очевидно, представляет скорость распространения их энергии в указанной системе отсчета.

Двумерные волны, генерируемые движущимися вынуждающими воздействиями, должны принимать асимптотическую форму, определяемую условиями (288), (289) и (290) после замен (426) и (427). Таким образом, для произвольно выбранного направления L они включают дополнительные члены

$$q = F(k_1^{(0)}, k_2^{(0)})\,[(\partial B_r/\partial n)^{(0)}]^{-1}\,(8\pi^3/(\varkappa^{(0)}X))^{1/2} \times \\ \times \exp[i(\omega_0 t - k_j^{(0)}X_j + \Theta)] \qquad (429)$$

от любых точек $(k_1^{(0)}, k_2^{(0)})$ на кривой $S(\omega_0)$ волновых чисел, где нормаль $\mathbf{n}$, направленная в сторону $S(\omega_0 + \delta)$, имеет направление L. Однако вблизи точки перегиба кривой $S(\omega_0)$ вместо этого нужно использовать аналогично видоизмененный вариант выражения (394).

Мы можем легко получить мощность P_w, необходимую, чтобы генерировать волны в этом случае (для нахождения аналогичного выражения в трехмерном случае см. (299) или (300)).

Если для распространяющихся двумерно волн с волновым числом $\mathbf{k}$ энергия на единицу площади составляет

$$W = W_0(\mathbf{k})\,\overline{q^2}, \tag{430}$$

то для каждого $\mathbf{k}^{(0)}$, удовлетворяющего условию (288), направленное распределение волновой энергии, согласно (429), дается выражением

$$W = W_0(\mathbf{k}^{(0)})\,|\,F(\mathbf{k}^{(0)})\,|^2\,[(\partial B_r/\partial n)^{(0)}]^{-2}\,(4\pi^3/(\varkappa^{(0)}X)). \tag{431}$$

Поток энергии относительно источника через единицу расстояния в поперечном направлении за единицу времени равен при этом

$$\mathbf{I} = W(\mathbf{V} + \mathbf{U}); \tag{432}$$

здесь вектор $\mathbf{V}+\mathbf{U}$, согласно (428), имеет направление $\mathbf{n}$ вдоль прямолинейного луча, идущего от источника. На расстоянии X от источника поперечное расстояние между лучами от элемента кривой волновых чисел, имеющего длину ds, составляет $\varkappa^{(0)}X\,ds$. Поэтому суммарную выходную мощность можно представить в виде интеграла по всей кривой S волновых чисел от произведения величины $\mathbf{I}$ на это поперечное расстояние. Если отбросить индекс (0), то этот интеграл примет вид

$$P_w = 4\pi^3 \int_S W_0(\mathbf{k})\,|F(\mathbf{k})|^2\,|\mathbf{V}+\mathbf{U}|\,(\partial B_r/\partial n)^{-2}\,ds. \tag{433}$$

Здесь модуль вектора $\mathbf{V}+\mathbf{U}$ можно записать в виде

$$|\,\mathbf{V}+\mathbf{U}\,| = -\,(\partial B_r/\partial n)/(\partial B_r/\partial \omega), \tag{434}$$

поскольку, согласно (428), он представляет собой скорость изменения ω_0 в направлении $\mathbf{n}$ при условии, что $B_r(\omega_0, \mathbf{k})$ остается равным нулю. Соотношение (434) приводит к выражению для P_w, в точности аналогичному выражению (300). С другой стороны, оно приводит к часто используемой форме

$$P_w = 4\pi^3 \int_S W_0(\mathbf{k})\,|\,F(\mathbf{k})\,|^2\,|\,\partial B_r/\partial\omega\,|^{-1}\,|\,\partial B_r/\partial n\,|^{-1}\,ds. \tag{435}$$

При расчете мы можем использовать здесь тождества

$$|\,\partial B_r/\partial n\,|^{-1}ds = |\,\partial B_r/\partial k\,|^{-1}\,|dl| = |\,\partial B_r/\partial l\,|^{-1}\,|\,dk\,| \quad \text{на } S. \tag{436}$$

(Например если нормаль $\mathbf{n}$ образует с осью x острый угол Φ, то величина $|\,\partial B_r/\partial k\,|$ равна $|\,\partial B_r/\partial n\,|\cos\Phi$, а на S мы имеем $|\,\partial l\,| = ds\cos\Phi$.)

Поскольку приведенные выражения для передаваемой волнам мощности P_w не содержат явно кривизны кривой S, подинтегральная функция не принимает бесконечного значения ни в одной точке перегиба кривой S. Следовательно, весьма локальное изменение, производимое выражением (394) вблизи каустики (луча из точки перегиба), оказывает несущественное влияние на выходную мощность; его роль состоит только в ограничении локальной амплитуды на каустике.

Поверхностные гравитационные волны на глубокой воде дают прекрасную иллюстрацию этих результатов. Рассмотрим вынужденные колебания свободной поверхности, при которых ее возвышение ζ имеет вид

$$\zeta = a \exp [i (\omega t - kx - ly)]. \tag{437}$$

В случае глубокой воды соответствующий потенциал скорости φ (удовлетворяющий уравнению Лапласа и имеющий производную $\partial\varphi/\partial z$, равную $\partial\zeta/\partial t$ на поверхности) имеет вид

$$\varphi = i\omega a (k^2 + l^2)^{-1/2} \exp [i (\omega t - kx - ly) + (k^2 + l^2)^{1/2} z]. \tag{438}$$

При этом граничное значение давления в воде (относительно атмосферного) равно

$$\eta = p - p_a = p_e - \rho_0 g \zeta = -\rho_0 [\partial\varphi/\partial t]_{z=0} - \rho_0 g \zeta. \tag{439}$$

Оно обращается в нуль для свободных гравитационных волн (разд. 3.1). Однако для вынужденных движений (438) оно принимает значение

$$\eta = B (\omega, k, l) a \exp [i (\omega t - kx - ly)], \tag{440}$$

где

$$B (\omega, k, l) = \rho_0 \omega^2 (k^2 + l^2)^{-1/2} - \rho_0 g. \tag{441}$$

Как и следовало ожидать, уравнение $B = 0$ совпадает с дисперсионным соотношением.

Прежде чем сосредоточиться на волнах, генерируемых *стационарным* движением корабля, мы рассмотрим следствия, вытекающие из этих результатов для осциллирующего источника, который создает ненулевое граничное значение

$$\eta = f (x + Vt, y) \exp (i\omega_0 t), \tag{442}$$

движущееся со скоростью $-\mathbf{V}$, причем

$$\mathbf{V} = (V, 0). \tag{443}$$

Тогда подстановка (426) дает

$$B_r = \rho_0 (\omega_0 - Vk)^2 (k^2 + l^2)^{-1/2} - \rho_0 g, \tag{444}$$

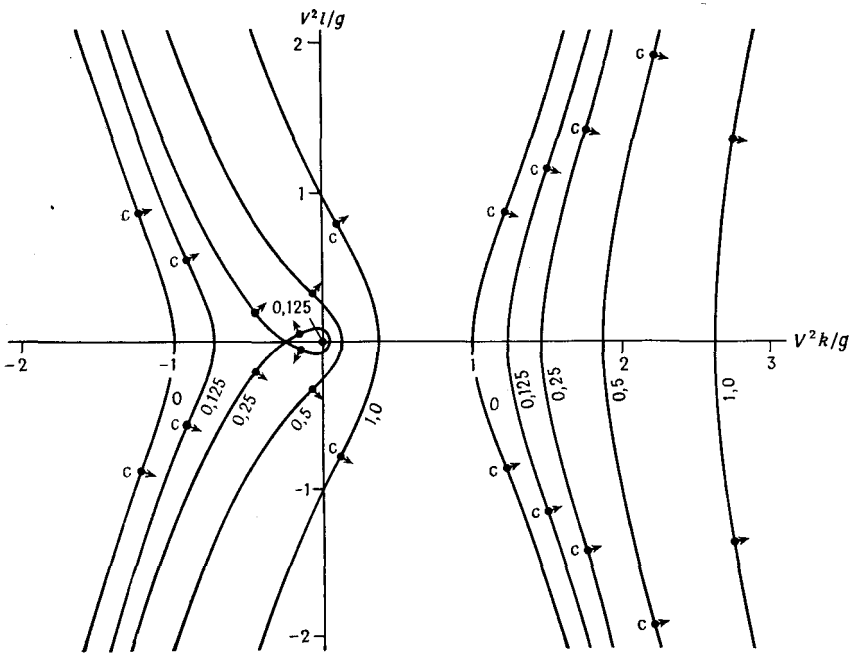

Рис. 101. Кривые волновых чисел S (ω_0), представляющие поверхностные гравитационные волны, генерируемые осциллирующим с частотой ω_0 и движущимся налево со скоростью V источником, для различных значений $V\omega_0/g$, отмеченных на кривых. Стрелки показывают направления, в которых обнаруживаются волны с соответствующим волновым числом.

а уравнение $B_r = 0$ кривой S (ω_0) волновых чисел может быть записано в виде

$$(\omega_0 - Vk)^4 = g^2 (k^2 + l^2). \qquad (445)$$

Эти кривые S (ω_0) изображены на рис. 101 для различных значений безразмерной частоты $V\omega_0/g$. Стрелки на кривых указывают направление нормали $\mathbf{n}$, идущей в сторону кривых с возрастающим ω_0. Буква «с» на некоторых кривых означает точку перегиба, которая должна дать начало каустике (разд. 4.11).

Кривая S (0) при $V\omega_0/g = 0$ имеет две симметричные ветви; нормали к ним заполняют клин с полууглом раствора arc sin (1/3) = 19,5°, представляющий собой, как мы увидим, корабельные волны, изображенные на рис. 70. Точки перегиба на S (0) дают начало каустикам, образующим границу этого клина.

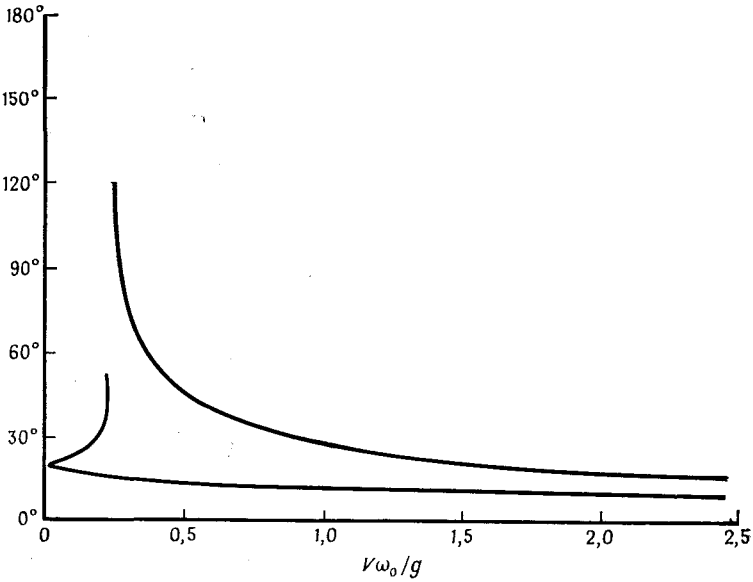

Рис. 102. Кривые показывают, каким образом изменяется в зависимости от $V\omega_0/g$ величина полууглов раствора клиньев, внутри которых находятся представленные на рис. 101 волны.

Когда $V\omega_0/g$ принимает малые положительные значения (такие, как 0,125), обе ветви, из которых составлена кривая $S(0)$, смещаются вправо. Волны с бóльшими волновыми числами, обнаруживаемые на правой кривой, заполняют более узкий клин, чем ранее. Другие волны, имеющие меньшие волновые числа и обнаруживаемые на левой кривой, заполняют более широкий клин. Кроме того, $S(\omega_0)$ содержит весьма малый овальный участок, включающий волновые числа порядка $g^{-1}\omega_0^2$; энергия в этих очень длинных волнах распространяется так быстро, что они находятся всюду вокруг движущегося источника.

Выше критического значения величины $V\omega_0/g$, равного 0,25 (когда кривая $S(\omega_0)$ самопересекается), существуют только две ветви, и волны, связанные с каждой из них, лежат внутри клина. Граница такого клина в каждом случае образована каустиками, начинающимися от точек перегиба на этой кривой. На рис. 102 построены графики функциональной зависимости от $V\omega_0/g$ полууглов раствора как более широкого клина, связанного с левой ветвью, так и более узкого клина, связанного с правой ветвью. (При $V\omega_0/g < 0{,}25$ включается также и зна-

чение 180°, чтобы отразить тот факт, что волны, связанные с малым овальным участком, обнаруживаются во всех направлениях вокруг области возмущения.)

На рис. 102 показано, что волны обнаруживаются перед источником (т. е. в полукруге, обращенном вперед) только при $V\omega_0/g < 0{,}27$. Прежде чем сосредоточить свое внимание на клине настоящих корабельных волн (рис. 70), обусловленных стационарной компонентой ($\omega_0 = 0$) движения корабля, заметим также, что волны, связанные с нестационарными компонентами, содержатся внутри *одного и того же* клина тогда и только тогда, когда $V\omega_0/g > 1{,}63$.

Можно считать, что любой корабль, движущийся стационарно, создает отличное от нуля граничное значение η, которое может генерировать волны. Это наиболее очевидно для парящего летательного аппарата, поддерживаемого над водной поверхностью давлением «воздушной подушки». Тогда уравнение (439) определяет η как превышение этого давления над атмосферным.

Распределение η, эквивалентное погруженному кораблю, часто можно оценить с достаточной точностью, записывая потенциал скорости φ в виде

$$\varphi = \varphi_h + \varphi_w, \tag{446}$$

где φ_h представляет безвихревое движение, которое было бы создано в неограниченной жидкости движением корпуса корабля, а φ_w — потенциал скорости волн. При этом граничное значение $\eta = \eta_w$, соответствующее волнам, должно удовлетворять условию

$$\eta_w = -\eta_h, \tag{447}$$

если полное решение (446) должно удовлетворять условию $\eta = 0$ на поверхности.

Как было описано в разд. 3.10, для определения сопротивления трения какой-нибудь модели корпуса часто используется «сдвоенная модель». Она получается, если к модели погруженной части корпуса добавить перевернутую, но в остальном идентичную форму, которая является зеркальным отображением этой части корпуса относительно поверхности воды. Такую сдвоенную модель можно использовать в условиях полного погружения для экспериментального определения не только сопротивления трения, но также и η_h. При стационарном движении этой модели вертикальное перемещение жидкости в плоскости симметрии равно нулю, так что уравнение (439) дает η_h как распределение избыточного давления p_e, измеряемого в этой плоскости симметрии. (С другой стороны, существуют хорошие

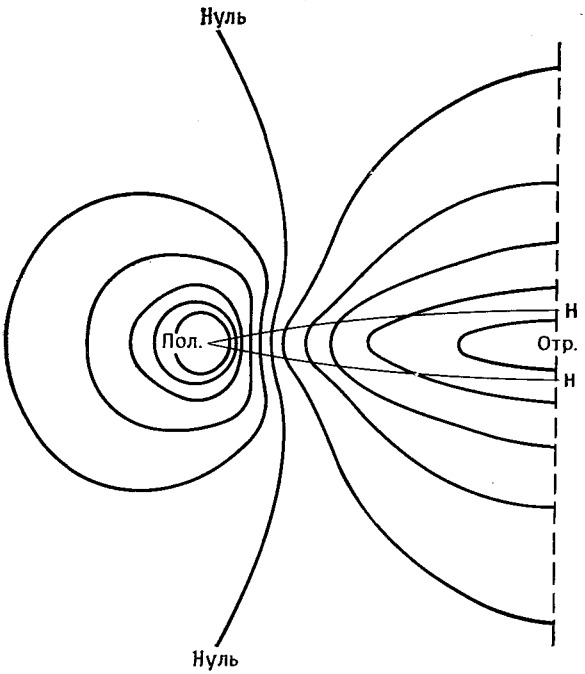

Рис. 103. Распределение избыточного давления p_e в плоскости симметрии полностью погруженной сдвоенной модели корпуса корабля Н. Указанные кривые равноотстоящих постоянных значений p_e получены из расчетов по линейной теории для параболического корабля с вертикальными бортами и с отношением осадки к длине, равным 0,25. Положительный пик давления (Пол.) вблизи носа является характерной чертой для всех заостренных форм корабля. (При этом расчете, проделанном, чтобы показать сильный локализованный пик давления, не принималась во внимание корма и фактически корабль и течение считались симметричными относительно штриховой прямой.)

программы для машинного расчета распределения этого давления p_e в плоскости симметрии сдвоенной модели.) Заметим, однако, что в той части плоскости симметрии, которая действительно пересекает модель корпуса, следует использовать плавно экстраполируемые значения.

Очевидно, что область источника шире самого корабля (рис. 103). Избыточное давление p_e распространяется в поперечном направлении так, что на него влияет как длина корабля, так и его осадка (максимальная глубина). Тем не менее распределение избыточного давления имеет ограниченные размеры,

затухая обратно пропорционально квадрату расстояния от корабля.

Каков бы ни был вид определяемой таким образом функции

$$\eta_w = -\eta_h = f(x + Vt, y) = f(X, y), \tag{448}$$

геометрическая картина волновых гребней имеет вид, изображенный на рис. 70. Эта картина получается независимо от того, применяем ли мы метод разд. 3.10 или методы этого раздела, основанные на использовании изображенной на рис. 101 кривой волновых чисел $S(0)$; во втором случае для нахождения форм гребней используется условие (319).

Зная функцию $f(X, y)$ и ее двумерное преобразование Фурье $F(k, l)$, можно пойти дальше и определить выходную мощность (435), затрачиваемую на генерирование волн. Используя $W_0(\mathbf{k}) = \rho_0 g$ (коэффициент, на который нужно умножить среднее значение квадрата возвышения поверхности, чтобы получить волновую энергию на единицу площади) и соотношения (436) и (444), мы можем записать выходную мощность (435), затрачиваемую на генерирование волн, в виде

$$P_w = 4\pi^3 \int_{S(0)} \rho_0 g \,|\, F(k, l) \,|^2 \,|\, 2\rho_0 V k \,(k^2 + l^2)^{-1/2} \,|^{-1} \times$$
$$\times \,|\, \rho_0 V^2 k \,(k^2 + 2l^2)\,(k^2 + l^2)^{-3/2} \,|^{-1} \,|\, dl \,| \tag{449}$$

или же при упрощении с учетом уравнения

$$V^4 k^4 = g^2 \,(k^2 + l^2), \tag{450}$$

определяющего кривую $S(0)$, в виде

$$P_w = 2\pi^3 V \,(\rho_0 g)^{-1} \int_{S(0)} [(k^2 + l^2)/(k^2 + 2l^2)] \,|\, kF(k, l) \,|^2 \,|\, dl \,|. \tag{451}$$

Это совсем простой интеграл вдоль кривой волновых чисел от величины $|\, kF(k, l) \,|^2$, которую можно назвать *спектром* $\partial f/\partial x$, измененным из-за наличия множителя в квадратных скобках, который меняется только между 1 и 1/2. Волновое *сопротивление* D_w принимает (разд. 3.10) вид $V^{-1}P_w$. Теперь мы видим, что его можно определить при помощи: (i) расчета давления $[-f(X, y)]$ в плоскости симметрии полностью погруженной сдвоенной модели в потоке со скоростью V, (ii) интегрирования вдоль кривой волновых чисел (450) спектра *градиента* давления $\partial f/\partial X$, измененного указанным множителем в квадратных скобках, и (iii) умножения на $2\pi^3 (\rho_0 g)^{-1}$.

Эти факты связаны с поиском (разд. 3.10) таких форм корпуса, для которых резкое возрастание волнового сопротивления



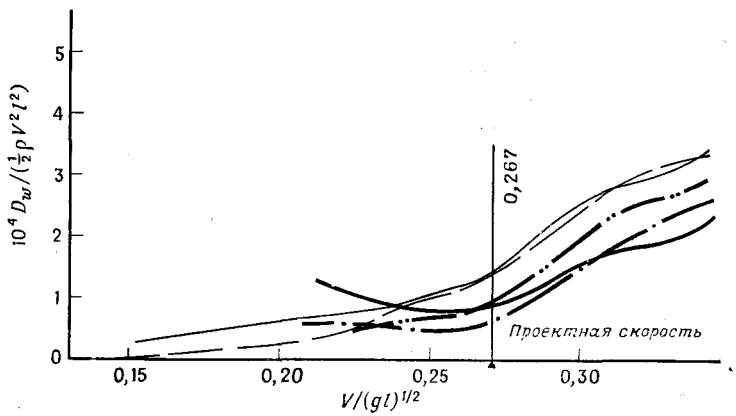

Рис. 104. Результаты классических экспериментов Инуи с моделями кораблей, имеющих луковицеобразные носовые части, создаваемые с целью по возможности устранить волны, возбуждаемые носовой частью при проектной скорости. Фотографии подтвердили устранение волн у носа корабля, что привело к существенному уменьшению показанного здесь волнового сопротивления D_w. [Trans. Soc. Naval Architect. Mar. Eng.]

№ модели	Без луковицеобразных элементов	С луковицеобразной носовой частью
S_1	———	F_4 ———
S_3	- - - - - - - -	F_3 ▬ ● ▬ ● ▬ F_5 ▬ ● ● ▬ ● ● ▬

D_w происходит только при сравнительно больших скоростях. Наименьшее значение волнового числа на кривой S (0) равно gV^{-2}. Поэтому волновое сопротивление начинает резко возрастать, когда V достигает значений, при которых градиент давления $\partial f/\partial X$ в центральной плоскости полностью погруженной сдвоенной модели имеет значительные спектральные компоненты около gV^{-2}. Этот резкий подъем можно отодвинуть до более высоких скоростей выбором форм корпуса, при которых спектральные компоненты функции $\partial f/\partial X$ при сравнительно больших волновых числах «сглажены».

Например, на рис. 103 показано, что распределение избыточного давления содержит большие градиенты, меняющиеся довольно резко в области перед носом сдвоенной модели, где избыточное давление возрастает до своего максимального значения. Эти градиенты могут быть сглажены введением элемента луковицеобразной формы ниже поверхности в указанной области (рис. 104); тогда сдвоенная модель будет содержать два луковицеобразных элемента. При этом давление в центральной плоскости уменьшается вследствие ускоренного движения воды относительно модели между этими элементами (эффект Вентури). Тщательное проектирование может привести к тому, что это распределение отрицательного избыточного давления, обусловленное подповерхностным луковицеобразным элементом около носа, будет как раз уравновешено распределением *положительного избыточного давления*, обусловленным основным корпусом, так что спектральные компоненты функции $\partial f/\partial X$ при бо́льших волновых числах сильно уменьшатся. Введение таких «луковицеобразных носов» настолько уменьшило резкое возрастание волнового сопротивления с возрастанием скорости, что этого оказалось достаточно для существенного улучшения экономики судоходства.

В волновых картинах, генерируемых при несколько более высоких скоростях, могут преобладать волны вблизи каустики. Они описываются уравнением (394), если специальные оси (x_1, x_2) выбраны таким образом, что ось x_1 направлена вдоль каустики. Например, вблизи каустики

$$X = +\,8^{1/2}y \tag{452}$$

искомые оси (x_1, x_2) таковы, что компоненты волнового числа принимают вид

$$k_1 = \frac{1}{3}\,(8^{1/2}k + l), \qquad k_2 = \frac{1}{3}\,(8^{1/2}l - k). \tag{453}$$

В одной из двух точек перегиба с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении (452) имеем

$$k = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} gV^{-2}, \quad l = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} gV^{-2}, \quad \text{что дает:}$$

$$k_1^c = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} gV^{-2}, \quad k_2^c = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} gV^{-2}. \tag{454}$$

Без труда получаем выражения

$$(\partial B_r/\partial k_1)^c = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} \rho_0 V^2, \quad (d^3k_1/dk_2^3)^c = (2^{5/2}V^4)/(27g^2), \tag{455}$$

необходимые для того, чтобы выписать уравнение (394) для $\omega_0 = 0$, в котором произведены замены (426) и (427). Однако

получаемое значение (в котором, как обычно, берется действительная часть) нужно удвоить, так как другая точка перегиба ($-k_1^c$, $-k_2^c$) с нормалью в направлении (452) добавляет к значению волновой амплитуды комплексно сопряженный член.

Таким образом, в координатах (x_1, x_2), выбранных так, что ось x_1 является каустикой, имеем

$$\zeta = -\frac{8\pi^2 i F^c \exp\left[-i\left(k_1^c x_1 + k_2^c x_2\right)\right]}{(4/3)^{1/2}\rho_0 V^2\left(\sqrt{2}/3\right)\left(V^4 x_1/g^2\right)^{1/3}} \operatorname{Ai}\left\{\frac{x_2}{\left(\sqrt{2}/3\right)\left(V^4 x_1/g^2\right)^{1/3}}\right\}. \quad (456)$$

Здесь волновой вектор (k_1^c, k_2^c), определяемый формулой (454), показывает, что гребни волн расположены под углом 35° к каустике (рис. 70). Волны практически исчезают там, где выражение, стоящее в фигурных скобках, равно приблизительно 2,5, т. е. перед каустикой на расстоянии по перпендикуляру, равном

$$x_2 = 1{,}2\,(V^4 x_1/g)^{1/3}. \quad (457)$$

Пунктирные кривые на рис. 70 показывают, что это приводит к значительному расширению картины корабельных волн Кельвина.

Мы завершаем этот раздел обсуждением трехмерных внутренних волн, генерируемых стационарным движением препятствия. Для внутренних волн, генерируемых распределением источников

$$\partial Q/\partial t = f(x, y, z)\exp(i\omega_0 t), \quad (458)$$

уравнение (327) дает для B следующее выражение:

$$B(\omega_0, k, l, m) = [\omega_0^2 m^2 - (N^2 - \omega_0^2)(k^2 + l^2)]/(\omega_0 m). \quad (459)$$

Если препятствие движется вертикально вверх со скоростью V, то нужно положить $\mathbf{V} = (0, 0, -V)$. Тогда, согласно (426),

$$B_r(\omega_0, k, l, m) = [(\omega_0 + Vm)^2 (k^2 + l^2 + m^2) - \\ - N^2(k^2 + l^2)]/[(\omega_0 + Vm)m], \quad (460)$$

и поверхность волновых чисел $S(\omega_0)$ определяется уравнением $B_r = 0$.

Стационарные возмущения характеризуются поверхностью $S(0)$, определенной уравнением

$$V^2 m^2 (k^2 + l^2 + m^2) = N^2 (k^2 + l^2) \quad (461)$$

и изображенной на рис. 105, *а*, где стрелки указывают направление нормали, идущей к поверхности $S(+\delta)$. Вертикальная составляющая этого направления во всех случаях направлена вниз, показывая, что генерируемые волны следуют за поднимающимся объектом. Результаты эксперимента с поднимающейся

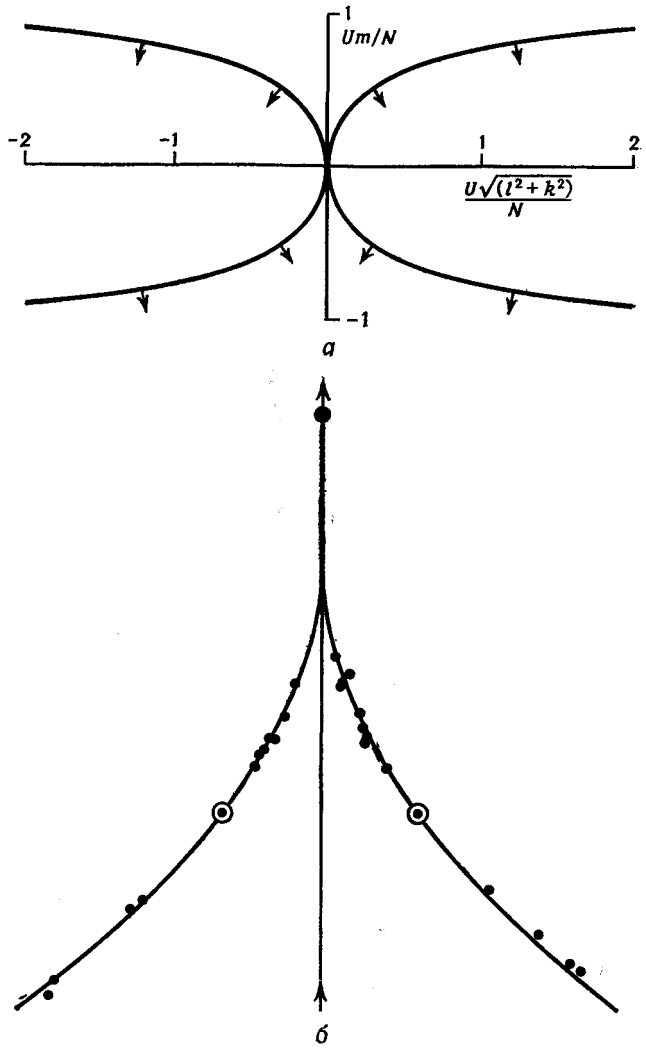

Рис. 105. *а* — поверхность волновых чисел S (0) для внутренних волн, генерируемых стационарным возмущением, движущимся вертикально вверх со скоростью V в стратифицированной жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента N; *б* — сплошная кривая — рассчитанная форма поверхности постоянной фазы для внутренних гравитационных волн, генерируемых стационарным вертикальным движением твердой сферы (показанной в верхней части рисунка) в равномерно стратифицированной среде. Эта форма нормирована таким образом, что точки, расположенные на кривых, проходящих через препятствие и образующих угол arctg (1/4) с вертикалью, соответствуют точкам, выделенным кружками. Точки — экспериментальные результаты, взятые с рис. 106 и других подобных фотографий.

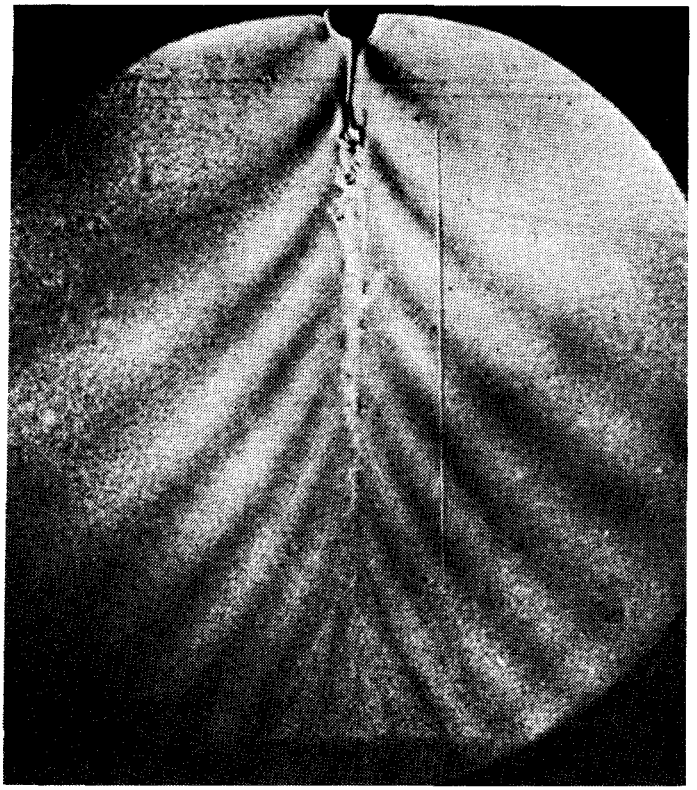

Рис. 106. Шлирен-фотография Моубрея, изображающая внутренние гравитационные волны, генерируемые стационарным вертикальным движением сферы (см. верхнюю часть фотографии) диаметром 25,4 мм, поднимающейся со скоростью 10,2 мм/с в солевом растворе, плотность которого убывает с высотой с постоянной скоростью 0,2 кг/м^3 на мм.

сферой приведены на рис. 106, показывающем формы поверхностей постоянной фазы. Эти поверхности можно также рассчитать по формуле (319); результаты расчетов приведены на рис. 105, *б*, где видно хорошее их согласование с экспериментальными данными.

Если препятствие движется в стратифицированной жидкости *горизонтально* со скоростью $-\mathbf{V}$, где $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$, мы имеем

$$B_r(\omega_0, k, l, m) = [(\omega_0 - Vk)^2 (k^2 + l^2 + m^2) - \\ - N^2 (k^2 + l^2)]/[(\omega_0 - Vk)m], \quad (462)$$

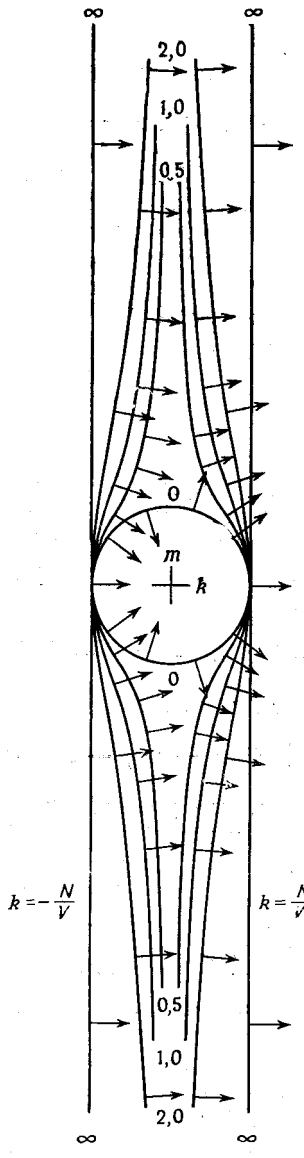

Рис. 107. Поверхность волновых чисел S (0) для внутренних волн, генерируемых стационарным возмущением, движущимся горизонтально (налево) со скоростью V в стратифицированной жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента N. Построенные на рисунке кривые представляют собой линии пересечения поверхности S (0) с плоскостями, на которых $V \mid l \mid / N$ принимает различные постоянные значения, отмеченные на этих кривых.

так что S (0) является поверхностью

$$V^2k^2\,(k^2 + l^2 + m^2) = N^2\,(k^2 + l^2). \qquad (463)$$

Генерируемые волны теперь более сложны, поскольку S (0) не является поверхностью вращения. На рис. 107 показана форма этой поверхности при помощи кривых, представляющих ее сечения различными плоскостями $l = \text{const}$. Направление $\mathbf{n}$ (нормали к этой поверхности в направлении к поверхности S $(+\delta)$) указано в каждом случае стрелкой, изображающей *составляющую вектора* $\mathbf{n}$ *в плоскости* $l = \text{const}$. (Таким образом, более короткие стрелки соответствуют направлениям нормали $\mathbf{n}$ с большой составляющей по y.) Во всех случаях волны находятся в направлениях стрелок в правой полуплоскости (*за* движущимся объектом).

Предельный случай двумерных препятствий (цилиндров с образующей в направлении y) обладает специфическими свойствами, представляющими определенный интерес. Для двумерных внутренних волн $B\,(\omega, k, m)$ определяется выражением (330), приводящим к

$$B_r(\omega_0, k, m) = [(\omega_0 - Vk)^2(k^2 + m^2) - N^2k^2]/[(\omega_0 - Vk)m], \qquad (464)$$

так что S (0) является кривой

$$k^2\,[V^2\,(k^2 + m^2) - N^2] = 0. \qquad (465)$$

Само собой разумеется, что уравнения (464) и (465) представляют собой просто уравнения (462) и (463), в которых l положено равным нулю. Однако важно, что получающаяся при этом кривая S (0) состоит (рис. 108а) из окружности радиуса N/V и прямой $k = 0$, *взятой дважды* (так как множитель k входит в (465) в квадрате).

Необходимость учитывать двукратность прямолинейной ветви $k = 0$ становится ясной, когда мы построим кривую S $(+\delta)$, чтобы установить направление нормали $\mathbf{n}$. Часть кривой S $(+\delta)$, расположенная близко к прямой $k = 0$, состоит из двух ветвей (рис. 108а). Вне окружности обе ветви расположены на одной и той же стороне прямой $k = 0$, а внутри нее они находятся на противоположных сторонах. Вот почему в любой точке прямой $k = 0$ нужно нарисовать две стрелки (рис. 108б), причем одна из них должна быть направлена вперед от препятствия в точке внутри окружности (т. е. при $|\,m\,| < N/V$). Действительно, из (464) вытекает, что B_r (δ, k, m) обращается в нуль при

$$Vk \approx \delta \pm Nk\,|\,m\,|^{-1}, \quad \text{откуда} \quad k \approx \delta/(V \mp N\,|\,m\,|^{-1}); \qquad (466)$$

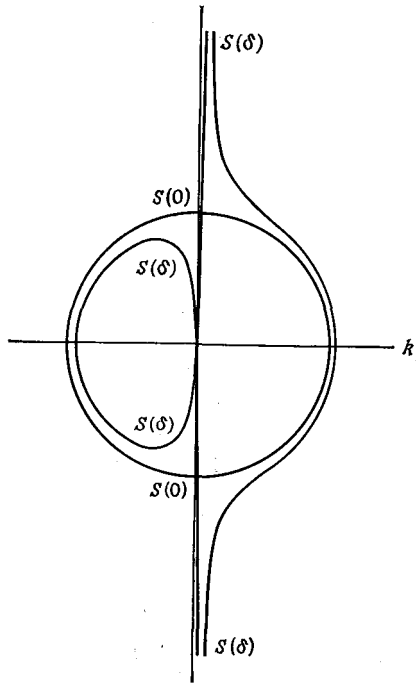

Рис. 108а. Двумерные внутренние волны, генерируемые неподвижным цилиндрическим препятствием (с образующими, перпендикулярными плоскости рисунка) в потоке стратифицированной жидкости, движущейся горизонтально направо (или же генерируемые тем же самым препятствием, движущимся налево в покоящейся жидкости). На рисунке построены кривые волновых чисел S (0) и S (δ). Вблизи каждой точки на круговой части (радиуса N/V) кривой S (0) находится одна точка кривой S (δ), приводящая, как обычно, к единственной стрелке на S (0); все стрелки показаны на рис. 108б. Но вблизи каждой точки на прямолинейной части $k = 0$ кривой S (0) находятся две точки кривой S (δ), приводящие в двум стрелкам. Там, где $|m| > N/V$, эти стрелки имеют *одно и то же* направление (обе части кривой S (δ) расположены на этой стороне), а там, где $|m| < N/V$, они направлены в противоположные стороны. (По оси ординат откладываются значения m.)

при $|m| > N/V$ оба эти значения k положительны, но при $|m| < N/V$ одно из них отрицательно.

Когда интегрирование по k в двумерном представлении интеграла (422) производится с учетом условия излучения, вклад в значение этого интеграла дают два полюса (466) при δ, при-

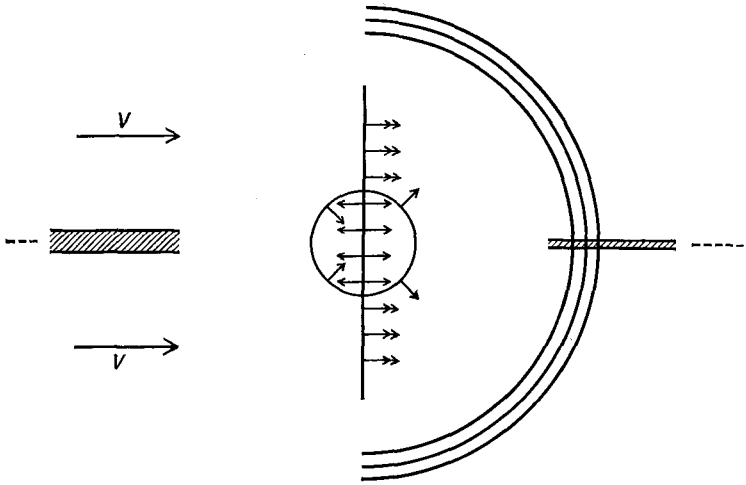

Рис. 108б. Для того же случая, что и на рис. 108а, здесь показаны расположение стрелок и соответствующее расположение волн. Эти волны включают стационарные возмущения со сравнительно большим вертикальным волновым числом вниз по потоку от препятствия и возмущения со сравнительно малым вертикальным волновым числом $|\ m\ |$ *вверх по потоку* от него. Они включают также «подветренные волны» с длиной волны $2\pi V/N$ на подветренной стороне препятствия.

нимающем (разд. 4.9) чисто мнимое значение $-i\varepsilon$. Вычет в обоих равен

$$\frac{F(0,\ m)\exp(-imz)}{[\partial B_r(0,\ k,\ m)/\partial k]_{k=0}} = \frac{Vm}{N^2-V^2m^2}F(0,\ m)\exp(-imz). \quad (467)$$

Физически полюсы воспроизводят величины горизонтальной скорости распространения энергии

$$\partial\omega_0/\partial k = V + \partial\omega_r/\partial k = V \mp N\ |\ m\ |^{-1} \quad (468)$$

для внутренних волн при $k = l = 0$ (x-составляющая групповой скорости которых (91) равна $\pm N\ |\ m\ |^{-1}$). Одно из значений (468) может быть отрицательным, что соответствует распространению энергии вперед от препятствия, если $|\ m\ | < N/V$; при этом групповая скорость превышает V.

Тогда перед препятствием выражение (422) равно интегралу по m *только в этом интервале* от произведения $-2\pi i$ на вычет (467), что дает

$$q = -2\pi i \int_{-N/V}^{N/V} Vm\,(N^2-V^2m^2)^{-1}\,F(0,\ m)\exp(-imz)\,dm. \quad (469)$$

За препятствием мы имеем

$$q = -2\pi i \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-N/V}^{N/V} \right) Vm (N^2 - V^2 m^2)^{-1} F(0, m) \exp(-imz) dm, \tag{470}$$

что является вкладом от двух полюсов (466), когда $|m| > N/V$, и только от одного полюса, когда $|m| < N/V$.

Мы показали, что компоненты распределения источников в области сравнительно большого вертикального размера (соответствующего вертикальной компоненте волнового числа, меньшей N/V) генерируют возмущение вверх по потоку. Происходит это главным образом потому, что соответствующая групповая скорость превосходит V.

Механику этого явления, а именно, каким образом «двумерные» препятствия сравнительно большого вертикального размера, движущиеся в стратифицированной жидкости, могут толкать перед собой жидкость, можно грубо объяснить следующим образом. Часть жидкости, находящаяся впереди и первоначально двигавшаяся со скоростью $(V, 0)$ относительно препятствия, не может обладать достаточной кинетической энергией ($(1/2)\,\rho_0 V^2$ на единицу объема), чтобы сообщить избыточную потенциальную энергию $(1/2)\,\rho_0 N^2 \zeta^2$, необходимую для такого вертикального перемещения ζ, чтобы препятствие обойти (либо сверху, либо снизу), а тогда эта жидкость должна скапливаться в слое перед препятствием. Это грубое рассуждение имеет то достоинство, что оно объясняет, почему сильное возмущение, распространяющееся перед двумерным препятствием, полностью отсутствует для трехмерного препятствия, которое генерирует волны только позади себя (рис. 107). Очевидно, жидкость, движение которой относительно трехмерного препятствия не обладает достаточной энергией, чтобы обойти препятствие при помощи вертикальных перемещений, всегда может совершить этот обход при помощи горизонтальных перемещений.

Неинтегрируемая особенность в интеграле (469) при $|m| = N/V$ отражает реальное физическое явление. Энергия в фурье-компонентах при значениях $|m|$, чуть меньших N/V, может распространяться вперед со скоростями, только немного превосходящими скорость препятствия. В пределе она может «скапливаться» перед препятствием, так что возмущение может возрасти до очень больших значений. Однако этот рост на практике ограничен диссипацией, нелинейностью или ограниченной продолжительностью вынуждающего движения.

Наряду с возмущениями в виде слоя перед препятствием и за ним на рис. 108б показано также, что существуют цилиндри-

ческие волны с длиною $2\pi V/N$, соответствующие волновым числам на окружности. Эти волны стационарны по отношению к препятствию и обнаруживаются за ним во всех направлениях, образующих с горизонталью угол θ, меньший $\pi/2$. Их форма определяется выражением (429) в виде

$$q = F\,(V^{-1}N\cos\theta,\ V^{-1}N\sin\theta)\,(\operatorname{tg}\theta)\,(8\pi^3/(NVX))^{1/2}\times$$

$$\times\exp\left[-i\left(V^{-1}NX+\frac{1}{4}\pi\right)\right], \quad (471)$$

где X — расстояние от препятствия. (Здесь мы использовали тот факт, что кривизна окружности $\varkappa$ равна V/N, в то время как $(\partial B_r/\partial n)^{-1}$ равно $(2N)^{-1}\operatorname{tg}\theta$; чтобы включить комплексно сопряженный член, был снова введен коэффициент 2.) В силу тех же причин, что и ранее, при $\theta\to\pi/2$ появляется сингулярность поведения: это волны с волновыми числами, приближающимися к $k=0$, $|m|=N/V$, для которых величина скорости распространения энергии $\mathbf{U}+\mathbf{V}$ снова стремится к нулю. К тому же при этом требуется очень большое время, чтобы эти волны ушли из области вынуждающего воздействия; однако происходящее в результате нарастание волн вертикально над движущимся препятствием на практике снова ограничено диссипацией, нелинейностью или же ограниченной продолжительностью вынуждающего движения.

4.13. Волноводы

Введение во внутренние волны, подобное настоящей главе, не должно создавать впечатление, что все интересные гравитационные волны в стратифицированных жидкостях имеют длины волн, измеряемые в метрах (или даже миллиметрах), а не в километрах. Конечно, бóльшая часть этой главы посвящена теории лучей и поэтому тем сравнительно коротким волнам, к которым можно применить эту теорию. Даже волны, захваченные в океаническом термоклине (разд. 4.3), имеют только немного бóльшие длины. Однако в этом разделе будут описаны и волны с длинами во много десятков километров, которые благодаря совместному действию акустических и гравитационных волн могут горизонтально переносить на большие расстояния изменения давления в стратифицированной атмосфере Земли.

Как и в других разделах настоящей главы, мы включаем этот аспект внутренних волн в контекст общей теории; на этот раз — теории *квазиодномерных волн в жидкостях* или, короче

говоря, волноводов. Строго одномерные волны в жидкостях, рассмотренные в гл. 2, включают движения жидкости, которые с высокой степенью приближения являются продольными, т. е. происходят в направлении распространения. В волноводах *распространение* в одном измерении обусловлено движениями жидкости, имеющими наряду с продольными также и значительные поперечные составляющие.

Распространение в волноводах дает хорошие иллюстрации одномерной теории дисперсии и групповой скорости. Между прочим, в электротехнике часто используют волноводы для электромагнитных волн, но в этой книге мы будем рассматривать только волноводы для волн в жидкостях.

Мы начнем с акустических волноводов, в которых звуковая энергия переносится вдоль трубок постоянного поперечного сечения. Мы покажем, что ниже некоторой определенной частоты ω_m волновое движение должно быть строго одномерным, но при больших частотах оно становится существенно трехмерным. Особый интерес представляют детали, связанные с переходом в выходной мощности компактного источника от строго одномерной формы к трехмерной форме для существенно неограниченной жидкости (ср. с разд. 1.4) при росте частоты.

Волноводы не обязательно имеют границы со всех сторон: они могут быть *односторонними*. Атмосфера, ограниченная только снизу, действует как односторонний «гравитационно-акустический волновод», почти вся волновая энергия которого сосредоточена в пределах пограничного слоя высотой около 30 км. Мы изучим это при помощи объединенной теории звуковых и внутренних волн, которая была развита в разд. 4.2.

С этой точки зрения воду со свободной поверхностью можно было бы рассматривать как «односторонний волновод», который допускает одномерное распространение поверхностных волн, почти вся энергия которых сосредоточена в пределах слоя, примыкающего к свободной поверхности и имеющего толщину, равную четверти длины волны (см. гл. 3). Истинно квазиодномерное распространение, однако, лучше иллюстрируется (поскольку волны на воде, в конце концов, распространяются в двух горизонтальных измерениях) береговым явлением «предельных волн». В конце этого раздела дается анализ того, каким образом «предельные волны» переносят вдоль отлогого берега сигналы с довольно большими длинами волн, причем их энергия сосредоточена в прибрежной полосе, ширина которой сравнима с этими длинами волн.

Описываемые акустические волноводы представляют собой трубы с жесткими стенками постоянного поперечного сечения A.

В качестве иллюстрации мы часто будем использовать случай, когда A является прямоугольником

$$0 < y < b, \quad 0 < z < h, \quad h \leqslant b. \tag{472}$$

Во всех случаях ось x выбирается вдоль трубы.

Звук фиксированной частоты может переноситься вдоль трубы не только посредством строго одномерного распространения, когда

$$p_e = a \exp [i(\omega t - kx)], \quad \text{где} \quad \omega = c_0 k, \tag{473}$$

но также и посредством собственных колебаний волновода

$$p_e = a_{MN} \exp [i(\omega t - kx)]\, p_{MN}(y, z). \tag{474}$$

Выражение (474) для p_e удовлетворяет волновому уравнению, если

$$\partial^2 p_{MN}/\partial y^2 + \partial^2 p_{MN}/\partial z^2 + \omega^2{}_{MN} c_0^{-2} p_{MN} = 0, \tag{475}$$

где

$$\omega_{MN}^2 = \omega^2 - k^2 c_0^2; \tag{476}$$

оно удовлетворяет также граничному условию для трубы с жесткими стенками, если p_{MN} имеет нулевую нормальную производную на стенке. Для поперечного сечения A существует двоякобесконечная последовательность собственных функций $p_{MN}(y, z)$, таких, что каждая удовлетворяет уравнению (475) со своей «собственной частотой» ω_{MN}, а также удовлетворяет этому граничному условию. Полагая

$$p_{00}(y, z) = 1, \quad \omega_{00} = 0 \tag{477}$$

(постоянная собственная функция с нулевым собственным значением), мы можем рассматривать (473) как частный случай выражения (474) при $M = N = 0$.

Например, когда A является прямоугольником (472), эти собственные функции и собственные частоты имеют вид

$$p_{MN}(y, z) = \cos(M\pi y/b) \cos(N\pi z/h), \tag{478}$$

$$\omega_{MN}^2 = c_0^2 \pi^2 (M^2 b^{-2} + N^2 h^{-2}). \tag{479}$$

В случае произвольного поперечного сечения A собственные частоты представляют собой частоты, которые являются *резонансными* для двумерных волн со скоростью c_0 в области A.

В теории разложений по собственным функциям доказывается, что для любого A собственные функции представляют собой *полную систему ортогональных функций*. Это означает, что

любую функцию $f(y, z)$ можно разложить в ряд

$$f(y, z) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} f_{MN} p_{MN}(y, z), \tag{480}$$

где коэффициенты f_{MN} определяются из уравнения

$$\int\int_A f(y, z)\, p_{MN}(y, z)\, dy\, dz = C_{MN} f_{MN}; \tag{481}$$

здесь

$$C_{MN} = \int\int_A [p_{MN}(y, z)]^2\, dy\, dz. \tag{482}$$

Формула (481) получена из (480) в результате почленного интегрирования с учетом свойства ортогональности, согласно которому интеграл по A от произведения двух *различных* p_{MN} равен нулю. Полнота означает, что любую функцию $f(y, z)$ в A можно представить в виде (480), где коэффициенты f_{MN} определяются указанным способом. В частности, для собственных функций (478) прямоугольника имеем

$$C_{MN} = \begin{cases} (1/4)\, A, & \text{когда } M \text{ и } N \text{ отличны от нуля,} \\ (1/2)\, A, & \text{когда только одно из них равно нулю,} \\ A, & \text{когда и } M, \text{ и } N \text{ равны нулю,} \end{cases} \tag{483}$$

где $A = bh$ — площадь прямоугольника; при этом разложение (480) является двойным рядом Фурье.

Уравнение (476) показывает, что волны в волноводе могут распространяться только при частотах $\omega > \omega_{MN}$. Поэтому если ω_m — наименьшее положительное собственное значение ω_{MN}, то распространение звуковых волн при частотах, меньших ω_m, ограничивается недиспергирующей модой $M = N = 0$, т. е. строго одномерным движением (473). Например, в прямоугольнике (472) уравнение (479) дает $\omega_m = c_0 \pi b^{-1}$.

Как показывает (476), все другие моды (настоящие волноводные моды) диспергируют. Для $k > 0$ это дает положительную фазовую скорость

$$\omega/k = c_0 \omega\, (\omega^2 - \omega_{MN}^2)^{-1/2}, \tag{484}$$

превосходящую скорость звука c_0. Однако волновая энергия переносится вдоль волновода с положительной групповой скоростью

$$U_{MN} = d\omega/dk = (dk/d\omega)^{-1} = c_0 \omega^{-1} (\omega^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2}, \tag{485}$$

которая всегда *меньше* c_0. Когда частота уменьшается до «пороговой частоты» ω_{MN}, ниже которой волны не могут распространяться, групповая скорость (485) стремится к нулю.

Интересно понять, каким образом источник с частотой ω_0 генерирует волны с $\omega_{MN} < \omega_0$, и только такие волны. Уравнение (301) для суммарного распределения источников, записанное через избыточное давление p_e и текущие координаты (x, y, z), принимает вид

$$c_0^{-2}\partial^2 p_e/\partial t^2 - \nabla^2 p_e = f(x, y, z)\exp(i\omega_0 t). \tag{486}$$

Если функцию $f(x, y, z)$ разложить по формуле (480), то f_{MN} будет функцией x, которую мы представим в виде интеграла Фурье

$$f_{MN}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{MN}(k)\exp(-ikx)\,dk. \tag{487}$$

Тогда решение уравнения (486) будет иметь вид

$$p_e = \sum_{M=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty} p_{MN}(y, z)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{MN}(k)\exp[i(\omega_0 t - kx)]}{B_{MN}(\omega_0, k)}\,dk, \tag{488}$$

где

$$B_{MN}(\omega, k) = -\omega^2 c_0^{-2} + k^2 + \omega_{MN}^2 c_0^{-2} \tag{489}$$

при произвольных ω и k представляет собой коэффициент, на который умножается выражение (474) при подстановке его в левую часть уравнения (486).

Подинтегральная функция в интеграле (488) не имеет полюсов на действительной оси k, если $\omega_{MN} > \omega_0$; в таком случае этот интеграл на больших расстояниях от источника становится экспоненциально малым. (Для больших положительных x, например, мы доказываем это (разд. 3.9 и 4.9), *опуская* путь интегрирования в комплексной плоскости k.) Физически это значит, что энергия всего движения в моде p_{MN} сосредоточена вокруг источника.

Если $\omega_{MN} < \omega_0$, то волны, распространяющиеся от источника, можно определить посредством оценки выражения (488) с учетом условия излучения. Для больших *положительных* x при этом выбираются полюсы подинтегрального выражения с положительным k, соответствующим тем волнам, для которых групповая скорость (485) положительна. Таким образом, асимптотическое представление интеграла в выражении (488) имеет вид

$$-2\pi i \frac{F_{MN}(k)\exp[i(\omega_0 t - kx)]}{\partial B_{MN}(\omega_0, k)/\partial k} \quad \text{при} \quad k = +c_0^{-1}(\omega^2 - \omega_{MN})^{1/2}. \tag{490}$$

Подставляя это значение в (488) для всех колебаний с частотами $\omega_{MN} < \omega_0$, получаем

$$p_e = -\pi i \sum_{\omega_{MN}<\omega_0} \sum p_{MN}(y, z) \frac{F_{MN}[c_0^{-1}(\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2}]}{c_0^{-1}(\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2}} \times$$

$$\times \exp\{i[\omega_0 t - (\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2} x c_0^{-1}]\}. \quad (491)$$

Заметим, что амплитуда каждой моды в выражении (491) стремится к бесконечности (если $F_{MN}(0)$ не обращается в нуль), когда $\omega_0 \downarrow \omega_{MN}$. В теории, пренебрегающей диссипацией, это и следовало ожидать при приближении к резонансной частоте.

Интересно выписать волновую энергию W_{MN} на единицу длины волновода в одной из мод (474). Она получается интегрированием величины $\rho_0^{-1} c_0^{-2} \overline{p_e^2}$ по площади поперечного сечения A. (Произведения двух *различных* собственных функций $p_{MN}(y, z)$ не дают вклада в волновую энергию в силу их ортогональности.) Используя интеграл (482) от функции $[p_{MN}(y, z)]^2$, получаем

$$W_{MN} = \frac{1}{2} \pi^2 \rho_0^{-1} C_{MN} (\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{-1} |F_{MN}[c_0^{-1}(\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2}]|^2. \quad (492)$$

Скорость передачи волновой энергии в этой моде получается в результате умножения (492) на групповую скорость (485). Суммируя полученное выражение для всех колебаний, распространяющихся в направлении положительных x (моды с $k > 0$), и складывая с аналогичным выражением для колебаний с $k < 0$, распространяющихся в направлении отрицательных x, получаем выходную мощность источника

$$P = \frac{1}{2} \pi^2 \rho_0^{-1} c_0 \omega_0^{-1} \sum_{\omega_{MN}<\omega_0} \sum C_{MN} (\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{-1/2} G_{MN}(\omega_0), \quad (493)$$

где

$$G_{MN}(\omega_0) = |F_{MN}[c_0^{-1}(\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2}]|^2 + |F_{MN}[-c_0^{-1}(\omega_0^2 - \omega_{MN}^2)^{1/2}]|^2. \quad (494)$$

При приближении к резонансу ($\omega_0 \downarrow \omega_{MN}$) полученная выходная мощность (493) становится бесконечной (снова если $F_{MN}(0) \neq 0$). Мы видим, что этот факт аналогичен случаям, описанным в конце разд. 4.12; там, где скорость распространения энергии (485) стремится к нулю, флуктуации давления вблизи области источника возрастают (поскольку волновая энергия высвобождается очень медленно) и могут экстрагировать большую энергию от источника.

При любой частоте $\omega_0 < \omega_m$ выражение (493) не содержит членов, характерных для волновода; строго одномерный член, соответствующий $M = N = 0$, дает

$$P = \frac{1}{2}\pi^2\rho_0^{-1}c_0\omega_0^{-2}C_{00}\{|F_{00}(c_0^{-1}\omega_0)|^2 + |F_{00}(-c_0^{-1}\omega_0)|^2\}. \quad (495)$$

Из уравнений (477) и (482) вытекает, что $C_{00} = A$.

Для *компактных* источников (размер области определения которых мал по сравнению с $c_0\omega_0^{-1}$) выражение (495) принимает вид

$$P = \pi^2\rho_0^{-1}c_0\omega_0^{-2}C_{00}\,|F_{00}(0)|^2, \quad (496)$$

где, согласно (481) и (487), выражение

$$2\pi C_{00}F_{00}(0) = C_{00}\int_{-\infty}^{\infty} f_{00}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_A\int f(x, y, z)\,dy\,dz \quad (497)$$

представляет амплитуду *суммарной напряженности источника*, обозначавшейся в гл. 1 через q. Поэтому если ввести среднее значение квадрата массового расхода истечения $\overline{\dot{q}^2}$, то выходную мощность (496) можно записать в виде

$$P = \frac{1}{2}\rho_0^{-1}c_0A^{-1}\overline{\dot{q}^2}. \quad (498)$$

Значение (498) совпадает с результатами для «одномерного источника», приведенными в разд. 1.4, где, однако, исследовались звуковые волны, излучаемые только в одном направлении флуктуирующим источником с массовым расходом $q(t)$ в этом направлении. Выражение (498) соответствует сумме мощности, излучаемой одномерно в направлении положительных x флуктуирующим массовым расходом $(1/2)\,q(t)$ в этом направлении, и такой же мощности, излучаемой в направлении отрицательных x переменным массовым расходом $(1/2)\,q(t)$ в этом направлении.

Любой компактный источник в волноводе излучает в соответствии с одномерной теорией и, следовательно, с частотами, меньшими ω_m. И наоборот, можно ожидать, что при очень больших частотах источник будет излучать, как в неограниченной жидкости, с выходной мощностью, определяемой (разд. 1.4) выражением

$$P = \overline{\dot{q}^2(t)}/(4\pi\rho_0c_0); \quad (499)$$

по существу, это основывается на том, что границы волновода находятся при этом в «дальнем поле» (на расстояниях от источника, *больших* по сравнению с c_0/ω_0). Приближение (499) для

выходной мощности говорит о том, что в таком предельном случае источник производит диффузное излучение, которое скачет вперед и назад вдоль трубки без заметного изменения условий вблизи источника.

Процесс, в результате которого достигается предельное значение (499) для больших ω, представляет большой интерес. Для компактного источника выражение (494) принимает вид

$$G_{MN}(\omega_0) \approx 2 \mid F_{MN}(0)\mid^2. \tag{500}$$

Из (481) и (487) получаем

$$2\pi C_{MN}F_{MN}(0) = C_{MN}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{MN}(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{A}\int f(x,\ y,\ z)\,p_{MN}(y,\ z)\,dy\,dz; \tag{501}$$

этот интеграл весьма точно равен амплитуде произведения суммарной напряженности источника $\dot{q}$ на значение $p_{MN}(y_s, z_s)$ в центре (y_s, z_s) области источника (которая компактна по сравнению с c_0/ω_0 и, следовательно, также и по сравнению с бо́льшим масштабом c_0/ω_{MN} области изменения величины p_{MN}). В результате выражение (493) для мощности принимает вид

$$P = \frac{1}{2}\rho_0^{-1}c_0\omega_0^{-1}\overline{\dot{q}^2(t)}\sum_{\omega_{MN}<\omega_0}\sum C_{MN}^{-1}[p_{MN}(y_s,\ z_s)]^2(\omega_0^2-\omega_{MN}^2)^{-1/2}. \tag{502}$$

Если частота ω_0 достаточно велика, то сумма (502) содержит так много членов, что ее можно аппроксимировать интегралом. Для того чтобы это сделать, нужно определить $n(\omega)$ как гладкую функцию ω, представляющую приближенно *число* собственных функций с собственной частотой, меньшей ω. Например, в прямоугольнике (472) это число собственных функций (478) совпадает с числом точек (M, N) с целыми координатами внутри четверти эллипса

$$M \geqslant 0,\quad N \geqslant 0,\quad M^2(\omega b/(c_0\pi))^{-2} + N^2(\omega h/(c_0\pi))^{-2} \leqslant 1. \tag{503}$$

Очевидно, в качестве $n(\omega)$ можно взять *площадь* четверти эллипса (503), а именно произведение его полуосей $\omega b/(c_0\pi)$ и $\omega h/(c_0\pi)$ на $\pi/4$. Это дает

$$n(\omega) = (\omega/c_0)^2A/(4\pi), \tag{504}$$

где A — площадь поперечного сечения волновода.

Каково бы ни было значение $n(\omega)$, мы аппроксимируем сумму (502) при большом ω_0 выражением

$$P \approx \frac{1}{2}\rho_0^{-1}c_0\omega_0^{-1}\overline{\dot{q}^2(t)}\int_0^{\omega_0} A^{-1}(\omega_0^2-\omega^2)^{-1/2}n'(\omega)\,d\omega. \qquad (505)$$

Здесь $n'(\omega)\,d\omega$ является сглаженным значением группы членов с $\omega < \omega_{MN} < \omega + d\omega$ в указанной сумме, а сглаженное значение величины $C_{MN}^{-1}[p_{MN}(y_s, z_s)]^2$, согласно (482), равно ее среднему значению A^{-1}. Если $n(\omega)$ имеет значение (504), то выражение (505) легко вычисляется и получается равным выходной мощности источника (499) в неограниченной среде. Более того, нетрудно показать, что выражение (504) является *единственным представлением функции* $n(\omega)$, при котором (505) не зависит от ω_0 и равно мощности (499). Этот факт можно рассматривать как «физическое доказательство» неизбежной истинности классической теоремы, утверждающей, что уравнение (504) действительно справедливо при *любой форме поперечного сечения* с площадью A.

Интересно проследить детали перехода от (498) к (499) при возрастании ω_0 в частном случае волновода прямоугольного сечения (472) с компактным источником в центре. Выражение (478) дает

$$[p_{MN}(y_s, z_s)]^2 = \left[p_{MN}\left(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}h\right)\right]^2 = \begin{cases} 1, \text{ если и } M, \text{ и } N \text{ четные}, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{cases} \qquad (506)$$

в силу чего отношение мощности (502) к ее значению (498) при низких частотах равно

$$P\Big/\left(\frac{1}{2}\rho_0^{-1}c_0A^{-1}\overline{q^2}\right) = A\omega_0 \sum_{\substack{\omega_{MN}<\omega_0 \\ M,\,N \text{ четные}}}\sum C_{MN}^{-1}(\omega_0^2-\omega_{MN}^2)^{-1/2}, \qquad (507)$$

где C_{MN} определяется условием (483).

На рис. 109 показано, каким образом выражение (507) совершает переход от постоянного значения, равного 1 при $\omega_0 < \omega_m$, к своему квадратично возрастающему асимптотическому значению при больших частотах, на основании (499) равному

$$(\omega_0/c_0)^2A/(2\pi). \qquad (508)$$

Парадоксально, что безразмерная выходная мощность (507) является *убывающей функцией* всюду, где она непрерывна!

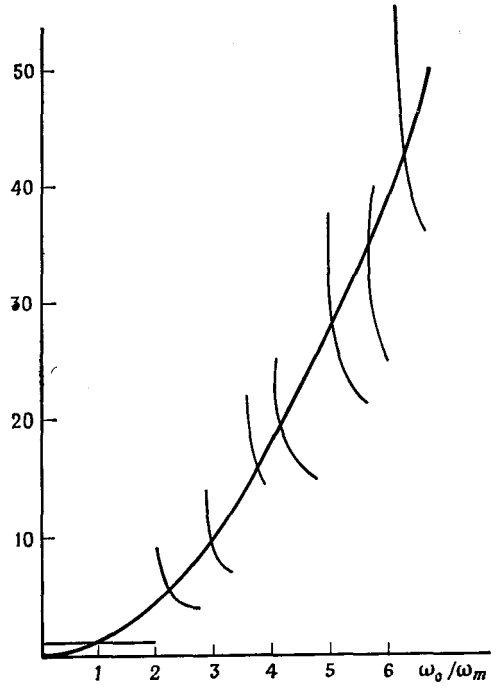

Рис. 109. Выходная мощность P компактного акустического источника с частотой ω_0, расположенного в центре волновода прямоугольного поперечного сечения с отношением ширины к высоте $b/h = \sqrt{2}$. Ордината представляет отношение мощности P к значению (498), которое она всегда имеет при $\omega_0 < \omega_m$. (В действительности для источника, расположенного в центре, она имеет это значение при $\omega_0 < 2\omega_m$.) Непрерывная кривая представляет предельную форму (508), принимаемую в случае, когда волновод отсутствует и источник излучает в открытое пространство. Разрывная кривая представляет точное выражение (507).

Однако при каждой собственной частоте ω_{MN} она резко возрастает (теоретически вплоть до ∞), но очень быстро снова оказывается близкой к асимптотической кривой. Указанное отклонение появляется только при частотах, которые совсем незначительно превосходят собственную частоту ω_{MN}; диссипация энергии в дальнейшем сгладила бы эти отклонения.

В случае звуковых волн в трубе мы видели, что распространение при особенно низких частотах происходит посредством дви-

жений весьма простого вида, аналогичных (473). В волноводах, вообще говоря, дело обстоит иначе.

Атмосфера может действовать как односторонний волновод, и наибольший интерес в таком волноводе представляют низкочастотные колебания, которые могут переносить изменения давления над поверхностью Земли. В данном случае нельзя использовать такое же простое дисперсионное соотношение, как и (473), поскольку скорость звука c_0 меняется с высотой. К тому же гравитационные волны связаны с внутренними волнами; действительно, волновое число *мало* по сравнению с $[-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]$, что противоречит условию (52), при котором звуковые и внутренние волны не связаны друг с другом.

Уравнения (35) и (36) описывают гравитационно-акустические волны в стратифицированной атмосфере. Распространение в гравитационно-акустическом волноводе происходит в виде волн

$$q = Q(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad p_e = P(z) \exp[i(\omega t - kx)], \tag{509}$$

причем на основании (35) и (36) мы имеем

$$\{[N(z)]^2 - \omega^2\} Q(z) = -i\omega \{P'(z) + g[c_0(z)]^{-2} P(z)\} \tag{510}$$

и

$$\{\omega^2 [c_0(z)]^{-2} - k^2\} P(z) = i\omega \{Q'(z) + g^{-1} [N(z)]^2 Q(z)\}. \tag{511}$$

Экспоненциальные интегрирующие множители для этих уравнений имеют вид

$$E_1(z) = \exp\left\{\int_0^z g[c_0(z)]^{-2} dz\right\},$$

$$E_2(z) = \exp\left\{\int_0^z g^{-1} [N(z)]^2 dz\right\}, \tag{512}$$

и важно отметить, что их произведение

$$E_1(z) E_2(z) = [\rho_0(0)/\rho_0(z)] \tag{513}$$

изменяется обратно пропорционально плотности; кроме того, мы можем показать, что при атмосферных условиях выражение

$$[E_2(z)/E_1(z)] = [c_0(z)/c_0(0)]^2 \exp\left\{-(2-\gamma) \int_0^z g[c_0(z)]^{-2} dz\right\} \tag{514}$$

представляет собой *экспоненциально убывающую* функцию z (рис. 110).

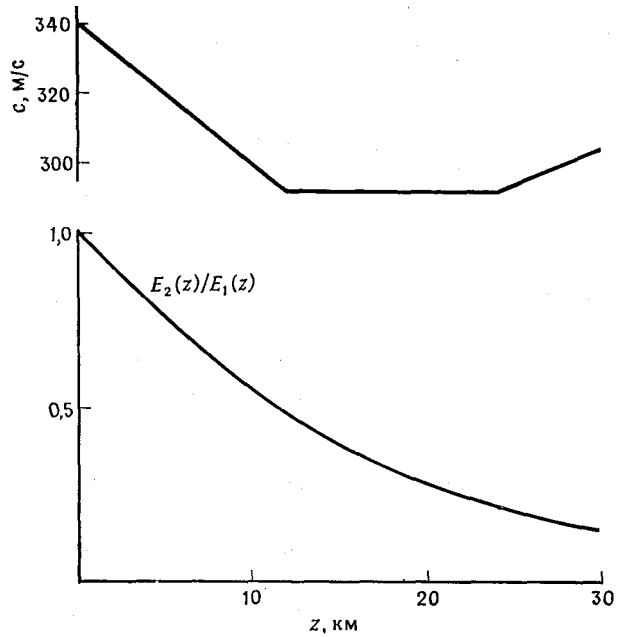

Рис. 110. Характерное изменение скорости звука с высотой в нижнем тридцатикилометровом слое атмосферы и соответствующее отношение $E_2(z)/E_1(z)$, полученное из (514) при $\gamma = 1{,}4$.

Восходящая компонента массового потока q равна нулю на поверхности Земли, т. е. при $z = 0$, в силу чего соответствующее решение уравнения (511) имеет вид

$$Q(z) = [i\omega E_2(z)]^{-1} \int_0^z \{\omega^2 [c_0(z_2)]^{-2} - k^2\} P(z_2) E_2(z_2)\, dz_2. \qquad (515)$$

Тогда решение уравнения (510) формально можно записать в виде

$$P(z) = [E_1(z)]^{-1} \left(P(0) + \int_0^z \{[N(z_1)]^2 - \omega^2\} [E_1(z_1)/E_2(z_1)]\, dz_1 \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{z_1} \{[c_0(z_2)]^{-2} - (\omega/k)^{-2}\} P(z_2) E_2(z_2)\, dz_2 \right), \qquad (516)$$

а это дает интегральное уравнение, которое позволяет определить $P(z)$ методом последовательных приближений. Первое

приближение имеет вид

$$P_1(z) = [E_1(z)]^{-1} P(0). \tag{517}$$

Оно было бы точным решением только в изотермической атмосфере с постоянной скоростью звука $c_0(z)$; при этом двойной интеграл в уравнении (516) может обратиться в нуль, если значение ω/k равно этой постоянной. Если же это не так, то мы переходим ко второму приближению $P_2(z)$, определяемому уравнением (510), в правой части которого вместо $P(z)$ подставлено $P_1(z)$, и т. д. На каждом шаге $(n+1)$-е приближение $P_{n+1}(z)$ дается формулой (516) с заменой $P(z)$ на $P_n(z)$ в правой части [1]).

Соответствующее значение ω/k должно быть таким, чтобы интеграл в (515) стремился к нулю, когда $z \to \infty$; это условие дает

$$(\omega/k)^{-2} = \Big\{ \int_0^\infty [c_0(z)]^{-2} P(z) E_2(z)\, dz \Big\} \Big/ \Big\{ \int_0^\infty P(z) E_2(z)\, dz \Big\}. \tag{518}$$

В противном случае для создания волны потребовалась бы бесконечная энергия. Действительно, выражение для плотности потенциальной энергии включает (см. (37)) члены

$$\frac{1}{4} [N(z)]^2 |Q(z)|^2 [\omega^2 \rho_0(z)]^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} |P(z)|^2 [c_0(z)]^{-2} [\rho_0(z)]^{-1}, \tag{519}$$

обусловленные гравитацией и сжимаемостью соответственно, причем величина $[\rho_0(z)]^{-1}$ на основании (513) пропорциональна $E_1(z) E_2(z)$. Оба члена (519) экспоненциально возрастают с высотой как $E_1(z)/E_2(z)$ (см. (514)), если интеграл в (515), который является также и внутренним интегралом в (516), не стремится к нулю при больших z.

Уравнение (518) показывает, что величина $(\omega/k)^{-2}$, *обратная квадрату* скорости волны, представляет собой взвешенное среднее величины $[c_0(z)]^{-2}$, обратной квадрату скорости звука. Весовая функция $P(z) E_2(z)$ обычно меняется таким образом, что скорость $c_0(z)$ принимает значение, находящееся между ее значениями на уровне Земли и в стратосфере. Так, например, первое приближение (517) дает весовую функцию, пропорциональную функции (514), графически изображенной на рис. 110. Как правило, значение c_0 в стратосфере составляет примерно

[1]) Заметим, что избыточное давление принимает значения, которые находятся в одинаковой фазе на всех высотах над данной точкой на поверхности Земли. В самом деле, если фаза выбрана таким образом, что $P(0)$ действительно, то и все значения $P_n(z)$ также действительны.

290 м/с (что соответствует температуре порядка 210 К) и c_0 убывает до этого значения от своего значения на уровне Земли при возрастании z от нуля до величины, примерно равной 12 км. При значении на уровне Земли, равном 340 м/с, соответствующее взвешенное среднее величины $[c_0\ (z)]^{-2}$ отвечает скорости волны, приблизительно равной 310 м/с. Это значение близко к скоростям волн, обычно наблюдаемым при распространении изменений давления на большие расстояния. (Первое точно измеренное возмущение такого типа было воздушной волной, возникшей в результате взрыва вулкана Кракатау в 1883 г.)

Использование в весовой функции первого приближения (517) в качестве $P\ (z)$ дает скорость волны, не зависящую от частоты. На самом деле функция $P\ (z)$, определяемая уравнением (516), зависит от частоты ω и утрачивает эту зависимость только когда ω мало по сравнению с частотой Вяйсяля — Брента N. Влияние этой зависимости от частоты на весовую функцию приводит к небольшой дисперсии: фактически происходит небольшое уменьшение скорости волны, пропорциональное ω^2, когда ω возрастает от нуля. Однако это вызывает втрое большее уменьшение *групповой скорости*.

Эта глава заканчивается описанием морских «односторонних волноводов». Речь идет о распространении *длинных волн* вдоль береговой линии в том смысле, что бóльшая часть их кинетической энергии связана с горизонтальными движениями воды, незначительно меняющимися с глубиной. Несмотря на то что распространение происходит вдоль береговой линии, волны *не являются* одномерными, поскольку соответствующие горизонтальные движения воды в такой же степени перпендикулярны береговой линии, в какой и параллельны ей.

Распространение таких длинных волн в воде с плавно меняющейся глубиной $h\ (x,\ y)$ удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\partial \zeta/\partial t + \partial\ (hu)/\partial x + \partial\ (hv)/\partial y = 0, \tag{520}$$

которое приравнивает скорость изменения возвышения свободной поверхности ζ взятой с минусом двумерной дивергенции вектора потока $(hu,\ hv)$. С учетом уравнений количества движения

$$\partial u/\partial t = -g\partial \zeta/\partial x, \quad \partial v/\partial t = -g\partial \zeta/\partial y \tag{521}$$

уравнение (520) дает

$$\partial^2 \zeta/\partial t^2 = \partial\ (gh\partial \zeta/\partial x)/\partial x + \partial\ (gh\partial \zeta/\partial y)/\partial y. \tag{522}$$

Это уравнение, конечно, переходит в двумерное волновое уравнение со скоростью волн $(gh)^{1/2}$ при постоянной глубине h.

Когда h зависит только от координаты y, представляющей собой расстояние от береговой линии, уравнение (522) может описывать квазиодномерное распространение вдоль береговой линии, если

$$\zeta = Z(y) \exp[i(\omega t - kx)], \tag{523}$$

где

$$gh(y)Z''(y) + gh'(y)Z'(y) + [\omega^2 - gh(y)k^2]Z(y) = 0. \tag{524}$$

Для нас представляют интерес случаи, когда $h(y)$ возрастает с расстоянием y от береговой линии. Тогда там, где $h(y)$ становится большим, уравнение (524) приближенно можно записать в виде

$$Z''(y) - k^2 Z(y) = 0, \tag{525}$$

и только решение, в котором приближенно

$$Z(y) \quad \text{пропорционально} \quad \exp(-ky), \tag{526}$$

имеет конечную энергию. Поэтому мы будем отыскивать решения уравнения (524), которые удовлетворяют этому условию, когда $h(y)$ становится большим.

Существует один случай, когда (526) является точным решением уравнения (524) при всех y. В этом случае $h = \beta y$ при постоянном уклоне дна β. Тогда функция (526) всюду удовлетворяет уравнению (524) при условии, что

$$\omega = (g\beta k)^{1/2}. \tag{527}$$

Это классическая предельная волна Стокса [1]).

Для того чтобы визуально представить себе горизонтальные движения жидких частиц в стоксовой предельной волне, нужно только взглянуть на рис. 50 и считать, что верхняя часть рис. 50 представляет собой береговую линию, а траектории частиц изображают *горизонтальные* движения жидкости вблизи береговой линии при распространении предельной волны. Это объясняется тем, что на основании уравнений (521) скорость (u, v) соответствует безвихревому движению, определяемому

[1]) Достаточно любопытно, что Стоксу не нужно было строить длинноволновое приближение, поскольку потенциал скорости, пропорциональный $\exp(-ikx - ky)$ и не зависящий от z, в точности удовлетворяет уравнению Лапласа. Кроме того, он в точности удовлетворяет краевому условию на дне с постоянным уклоном, если ось y направлена *вдоль дна* и (как и прежде) перпендикулярна береговой линии. Наконец, он в точности удовлетворяет на свободной поверхности условию для φ, если (527) выполняется при β, равном *синусу* (а не, как выше, тангенсу) угла наклона дна к горизонтали; само собой разумеется, что различие пренебрежимо мало при умеренных уклонах. Ни одно из этих замечаний неприменимо, однако, к предельным волнам на дне с *непостоянным* уклоном.

потенциалом скорости ($ig\zeta/\omega$), который, согласно (523) и (526), пропорционален

$$\exp\,[i\,(\omega t - kx) - ky],$$

а это точно такая же зависимость от x и y, как и зависимость от x и z, использованная при построении рис. 50. Заметим также, что в силу условия (527) скорость волны $(g\beta/k)^{1/2}$ и групповая скорость уменьшаются вдвое.

Решение типа стоксовой предельной волны для $h = \beta y$ является простейшим, но ни в коем случае не изолированным решением уравнения (524). Фактически предельные волны распространяются вдоль берегов с плавно *изменяющимся* уклоном $h'(y)$, удовлетворяя условию (527) при β, равном в некотором смысле промежуточному значению уклона в той области, где имеют место решения типа предельной волны.

Для того чтобы грубо продемонстрировать этот факт, мы будем характеризовать плавно меняющийся уклон берега: (i) его значением h' (0) на береговой линии, (ii) его значением h' (∞) при больших ky и (iii) такой мерой, как h'' (0), представляющей скорость изменения уклона с расстоянием от береговой линии. При этом мы попытаемся удовлетворить уравнению (524) приближенным решением

$$Z\,(y) = Z\,(0)\,[\exp\,(-ky)]\,(1 + Cky)^D, \tag{528}$$

где постоянные C и D выбираются таким образом, чтобы (528) удовлетворяло уравнению (524) при больших и малых значениях ky.

Мы получим, что решение (528) удовлетворяет уравнению (524) при больших ky, если

$$\omega^2 = (1 + 2D)\,gh'(\infty)\,k, \tag{529}$$

в то время как при малых ky первые два члена разложения в ряд Тейлора дают

$$\omega^2 = (1 - CD)\,gh'(0)\,k \tag{530}$$

и

$$2CD\,(C + 1) - C^2D^2 = [-h''(0)/(kh'(0))]\,(1 - CD). \tag{531}$$

Рис. 111 показывает результаты использования этих выражений для вычисления того, как переменная

$$\omega^2/(gh'(0)\,k) \tag{532}$$

(равная единице для решения Стокса) меняется в зависимости от отношения

$$h'(\infty)/h'(0) \tag{533}$$

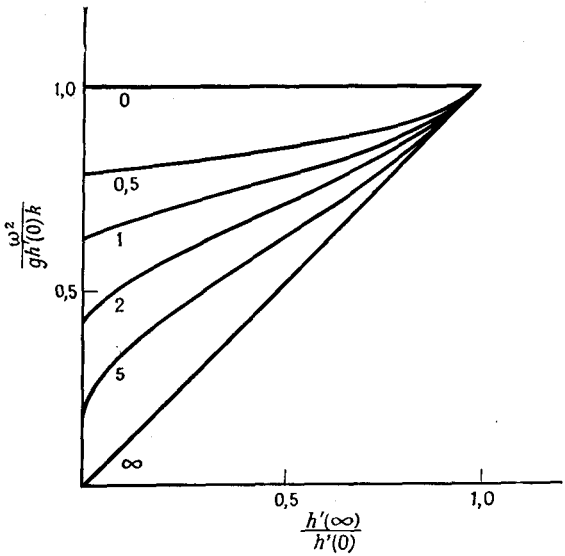

Рис. 111. Предельные волны: обычная приближенная форма их дисперсионного соотношения. Здесь h' (0) представляет собой уклон дна у берега, h' (∞) — меньший уклон дна вдали от берега, а числа у кривых дают значения величины $[-h''(0)/(kh'(0))]$, которая измеряет относительную скорость начального падения уклона дна, умноженную на $1/k$ (т. е. на $\lambda/(2\pi)$).

(характеризующего уменьшение уклона с увеличением расстояния от береговой линии) для различных значений величины

$$[-h''(0)/(kh'(0))]. \tag{534}$$

Утверждение, что уравнение Стокса (527) удовлетворяется при значении β, лежащем между h' (∞) и h' (0), подкрепляется тем фактом, что величина (532) *лежит между* (533) и единицей. Она ближе к последнему значению (при этом β близко к h' (0)), когда (534) мало, что означает лишь небольшое уменьшение уклона в области, где происходят волновые движения.

Предельные волны вблизи берега могут быть часто идентифицированы в записях компонент спектра морских волн, имеющих периоды около одной минуты. В самом деле, широко распространенное наблюдение того факта, что обыкновенные береговые волны (вызываемые распространением зыби по направлению к береговой линии) достигают максимальных амплитуд примерно один раз в минуту (различные легенды приписывают

наибольшую величину «седьмому валу» или «девятому валу»), может быть следствием взаимодействия между этими поверхностными волнами и такой предельной волной.

Упражнения к главе 4

1. Показать, что в стратифицированной жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента N уравнения

$$p_e = (N \sin\theta)\, k^{-1} q_1 \exp[i(Nt\cos\theta - kx + kz\operatorname{tg}\theta)],$$

$$\rho_0 \mathbf{u} = (\operatorname{tg}\theta,\ 0,\ 1)\, q_1 \exp[i(Nt\cos\theta - kx + kz\operatorname{tg}\theta)]$$

при $0 < \theta < \pi/2$ описывают плоские внутренние волны, которые переносят поток энергии $(1/2)(\rho_0 k)^{-1} q_1^2 N \operatorname{tg}\theta$ вверх и направо в направлении, определяемом единичным вектором $(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$. Этот поток волновой энергии падает на плоскую стенку $x = z\operatorname{tg}\psi$, где $\theta - \pi < \psi < \theta$. Найти *отраженную волну*, т. е. волну с той же самой частотой $\omega = N\cos\theta$ и потоком энергии, направленным от этой стенки, с учетом того, что сумма падающей и отраженной волн имеет нормальную скорость, равную нулю на самой стенке. Для отраженной волны будет достаточно найти значения амплитуды Q_1, x-составляющую волнового вектора K и направление потока энергии Θ, соответствующее величинам q_1, k и θ в падающей волне. В частности, показать, что

$$K = -k \sin(\theta - \psi)\operatorname{cosec}(\theta + \psi).$$

Дать другой вывод этого уравнения при помощи тригонометрических соображений, исходя из диаграммы, показывающей траектории потока энергии в падающих и отраженных лучах. Показать, наконец, что поток энергии в отраженной волне имеет величину, равную потоку энергии в падающей волне, умноженному на $\sin(\theta - \psi)\,|\operatorname{cosec}(\theta + \psi)|$. Согласуется ли это с законом сохранения энергии? Обсудить, в частности, предельный случай при $\psi \to -\theta$.

2. В разд. 4.2 и 4.5 содержатся предположения о том, что величину $[\rho_0(z)]^{1/2}$ (квадратный корень из невозмущенной плотности в стратифицированной жидкости) следует рассматривать как коэффициент, естественно входящий и в восходящую компоненту массового потока q, и в избыточное давление p_e при малых возмущениях. Показать, что, в самом деле, при

$$q = [\rho_0(z)]^{1/2} q_s(x, y, z)\exp(i\omega t),\quad p_e = [\rho_0(z)]^{1/2} p_s(x, y, z)\exp(i\omega t)$$

получается

$$\{[N(z)]^2 - \omega^2\}\, q_s = -i\omega[\partial p_s/\partial z + \sigma(z)\, p_s],$$

$$\partial^2 p_s/\partial x^2 + \partial^2 p_s/\partial y^2 + \omega^2 [c_0(z)]^{-2} p_s = i\omega[\partial q_s/\partial z - \sigma(z)\, q_s],$$

где

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} g [c_0(z)]^{-2} - \frac{1}{2} g^{-1} [N(z)]^2.$$

Показать, что в случае, когда среда представляет собой совершенный газ с невозмущенной температурой $T_0(z)$ и постоянным отно-

шением удельных теплоемкостей γ,

$$\sigma(z) = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) g\,[c_0(z)]^{-2} - \frac{1}{2}\,[T_0'(z)/T_0(z)].$$

Показать, что в атмосфере с постоянной температурой T_0 при $\gamma = 1{,}4$ существование плоских волн, для которых как p_s, так и q_s пропорциональны $\exp[-i(kx + ly + mz)]$, возможно, если

$$(N^2 - \omega^2)(k^2 + l^2) - \omega^2 m^2 = (1{,}225N^2 - \omega^2)\,\omega^2 c_0^{-2}.$$

Показать, что это уравнение исключает частоты ω между N и $1{,}11\,N$. При $\omega < N$ изобразить отклонение от конической поверхности волновых чисел, которое не допускает, чтобы горизонтальная составляющая волнового вектора $(k^2 + l^2)^{1/2}$ когда-либо становилась меньше $1{,}11\omega c_0^{-1}$. Показать, что при $\omega > 1{,}11N$ эта составляющая $(k^2 + l^2)^{1/2}$ равна самое большее ωc_0^{-1}, и изобразить отклонение от сферической поверхности волновых числ.

[В литературе уделяется весьма большое, но, возможно, вводящее в заблуждение внимание точной природе этих отклонений от конической поверхности волновых чисел для внутренних волн и от сферической поверхности волновых чисел для звуковых волн. Читатель заметит, что указанные отклонения существенны только для малых волновых чисел, имеющих порядок

$$Nc_0^{-1} = 0{,}45\,[-\rho_0'(z)/\rho_0(z)]$$

и соответствующих длине волны, равной высоте, на протяжении которой *плотность уменьшается более* чем в 10^6 раз. Атмосфера никогда не может быть изотермической на таких высотах. Более того, даже если бы она и была изотермической, было бы невозможно возбудить волну такой большой длины.

Решения для $(k^2 + l^2)^{1/2}$ на плоскости $m = 0$ особенно обманчивы, поскольку идея горизонтально распространяющихся волн с такими большими длинами на первый взгляд вполне правдоподобна. Тем не менее возбудить такую волну с плотностью энергии, постоянной в чрезвычайно большом диапазоне высот, невозможно. Настоящие горизонтально распространяющиеся колебания в гравитационно-акустическом волноводе (разд. 4.13) имеют $q_s = 0$ и p_s, пропорциональное $\exp(-\sigma z)$. Другими словами, вертикальная составляющая m волнового вектора в этом случае *не* обращается в нуль; она принимает мнимое значение $-i\sigma$.]

3. Читателю предлагается получить второе приближение дисперсионного соотношения (74) для «волнообразной» моды при распространении волны на океаническом термоклине $z_2 < z < z_1$ с большим градиентом плотности, разделяющем области $z < z_2$ и $z > z_1$ с пренебрежимо малым градиентом плотности. Из уравнения (71), в которое вместо $Q(z)$ введена функция

$$Z(z) = Q'(z)/Q(z),$$

показать, что

$$Z(z) = k - k^2\omega^{-2}\int_{z_2}^{z}[N(z)]^2\,dz + \int_{z_2}^{z}\{k^2 - [Z(z)]^2\}\,dz.$$

Показать, что (74) всегда дает *слишком высокую оценку* ω^2. Получить второе приближение для малых k ($z_1 - z_2$) в виде

$$\omega^2 = Gk\,(1 - kH),$$

где G, как и в (74), равно (1/2) $g \ln(\rho_2/\rho_1)$, а

$$H = 2\left(\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-2}\int_{z_2}^{z_1}\left[\ln\frac{\rho_2}{\rho_0(z)}\right]\left[\ln\frac{\rho_0(z)}{\rho_1}\right]dz$$

имеет порядок толщины слоя $z_1 - z_2$.
Превышает ли отношение групповой скорости к фазовой скорости для этих волн 1/2 или оно меньше этой величины?

4. Перемещение цилиндра, нормальное его оси, как на рис. 77, производит в равномерно стратифицированной жидкости небольшое локализованное возмущение. Показать, что если это возмущение не генерирует волн с длинами, превосходящими некоторое максимальное значение λ_m, то по прошествии времени t все волны будут находиться в двух цилиндрических областях радиуса $N\lambda_m t/(4\pi)$, которые касаются друг друга в точке расположения начального возмущения.

5. Рассмотрим неоднородную систему волн, для которой дисперсионное соотношение в форме (100) *медленно меняется со временем*. (Например, медленно меняющимся может быть внешнее магнитное поле, которое может действовать на волны так, как описывается в эпилоге.) Для волн, частота которых ω имеет вид функции

$$\omega = \omega(k_1, k_2, k_3, x_1, x_2, x_3, t),$$

медленно меняющейся как по x_i, так и по t в масштабе длин волн и периодов волн, определить то единственное уравнение среди уравнений (103)—(108), которое нужно изменить. Какое существенное изменение внесет это в свойства лучей?
Показать также, как распространить на этот довольно общий случай принцип стационарной фазы. Показать, что изменение фазы между моментами времени $t = t_1$ и $t = t_2$ в точке, движущейся вдоль траектории $x_i = x_i(t)$, на которой волновое число принимает значение $k_i = k_i(t)$, определяется выражением

$$\int_{t_1}^{t_2}\{\omega[k_l(t),\ x_{i_0}(t),\ t] - k_i(t)\,\dot{x}_i'\,t)\}\,dt.$$

Доказать, что это изменение фазы стационарно относительно малых вариаций $\delta x_i(t)$ и $\delta k_i(t)$ функций $x_i(t)$ и $k_i(t)$, при которых начальная и конечная точки указанной траектории остаются неизменными (так что $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$), тогда и только тогда, когда эта траектория *является лучом*.

6. Основываясь на предположении о равенстве нулю осредненной по объему избыточной плотности, показать, что для звуковых волн в совершенном газе с постоянным отношением удельных теплоемкостей γ осредненное по объему избыточное давление равно произве-

дению $(\gamma - 1)/2$ на волновую энергию в единице объема W. Это можно рассматривать как предположение, согласно которому полное «радиационное напряжение» для звуковых волн можно записать как сумму напряжения Рейнольдса (156) и изотропного члена $(1/2)(\gamma - 1) W\delta_{ij}$. Заметим, однако, что соответствующее среднее движение может быстро перестроиться таким образом, чтобы генерировать равное и противоположное среднее давление, приводящее результирующее движение к состоянию покоя. До какого значения уменьшится при этом осредненная по объему избыточная плотность?

7. Получить аналитическое уравнение луча, изображенного на рис. 81, т. е. луча, переносящего малые возмущения с частотой ω, *меньшей* постоянной частоты Вяйсяля — Брента N, в стратифицированном воздушном потоке, который движется в направлении x со скоростью τz, линейно возрастающей с высотой. Показать, что луч, выходящий из точки $(x_0, 0, 0)$, в плоскости $y = 0$ при возрастающих x и z имеет форму

$$x = x_0 + z\,[N^2(\omega - k_{\text{H}}\tau z)^{-2} - 1]^{1/2},$$

изображенную на рис. 81.
На каких высотах, если они вообще существуют, могут возбуждаться внутренние волны с частотой ω, *большей* N, для которых кривая, описываемая приведенным выше уравнением, представляла бы луч, переносящий их энергию в плоскости $y = 0$ при возрастающих x и z?
А что произошло бы с любой энергией, генерируемой на такой высоте, но движущейся в плоскости $y = 0$ при возрастающем x и *убывающем* z?

8. Большой объем жидкости имеет невозмущенное распределение плотности

$$\rho_0(z) = \rho_1(1 - \varepsilon z),$$

где ρ_1 и ε постоянны, и можно считать, что частота Вяйсяля — Брента имеет постоянное значение $N = (g\varepsilon)^{1/2}$ (потому что ε велико по сравнению с gc_0^{-2}, но εz мало в этом объеме жидкости). В момент $t = 0$ часть жидкости, имеющая форму горизонтального цилиндра радиуса a с осями $x = z = 0$, *внезапно делается однородной* с плотностью ρ_1. (Это идеализация эффекта очень быстрого перемешивания, обусловленного турбулентностью в следе за быстро движущимся в жидкости телом.) Решить соответствующую *начально-краевую задачу о двумерных внутренних волнах*, предполагая, что локальная вертикальная составляющая массового потока q равна нулю в начальный момент. (Другими словами, турбулентность локально перемешала жидкость, которая вследствие этого «высвобождается из покоя».)
Представить начальное значение ρ_e (превышение плотности над ее невозмущенным значением) в виде

$$\rho_{e\text{I}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} F(k, m) \exp\left[-i(k\tau + mz)\right] dk\, dm$$

и показать, что если ρ_{eI} равно $+\rho_1 \varepsilon z$ при $x^2 + z^2 < a^2$ и равно нулю во всех остальных точках, то зависимость

$$F(k, m) = i\rho_1 \varepsilon \pi^{-1} a^2 m (k^2 + m^2)^{-1} J_2 [(k^2 + m^2)^{1/2} a]$$

выражает F через функцию Бесселя J_2. Показать, что волны в области $z > 0$ имеют вид

$$q = \frac{1}{2} igN^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \omega(k, m) F(k, m) \exp[i\omega(k, m) t - kx - mz] \, dk \, dm,$$

где

$$\omega(k, m) = N \mid k \mid (k^2 + m^2)^{-1/2}.$$

И, наконец, показать, что эти волны для больших t в точке $x = r \sin\theta$, $z = r\cos\theta$ представимы в виде

$$q = \frac{1}{2} \rho_1 N a^2 r^{-1} \mid \sin 2\theta \mid J_2(Ntr^{-1}a \sin\theta) \exp(iNt\cos\theta).$$

[Здесь форма колебаний, представленных экспонентой, показывает радиальное направление гребней волн. Наличие функции Бесселя отражает тот факт, что волны с бóльшими волновыми числами, сравнительно поздно приходящие в удаленную точку, генерируются с переменной фазой из-за начального разрыва плотности при $r = a$.]

9. Воспользоваться приближенным условием для захваченных волн (417), чтобы получить дисперсионное соотношение для «волнообразной» моды колебания ($n = 0$) на некотором термоклине. Принять, что частота Вяйсяля — Брента равна нулю вне интервала $z_2 < z < z_1$ и равна

$$N(z) = N_m [1 - \mid z - z_m \mid (z_1 - z_m)^{-1}]$$

в интервале $z_2 < z < z_1$, где N_m представляет собой максимальное значение, принимаемое при

$$z = z_m = (z_1 + z_2)/2.$$

Показать, что *дисперсионное соотношение в «исцеленной лучевой теории»* имеет вид

$$k(z_1 - z_2) = \pi [(N_m^2 \omega^{-2} - 1)^{1/2} - \omega N_m^{-1} \operatorname{ar\,ch}(N_m \omega^{-1})]^{-1}.$$

Это приближение можно использовать в интервале частот между $\omega = 0{,}5N_m$ и $\omega = N_m$, когда, согласно этому приближению, $k(z_1 - z_2)$ меняется от 2,9 до ∞.
Наоборот, показать, что использованный в упражнении 3 метод, пригодный для малых значений $k(z_1 - z_2)$, дает

$$\omega^2 = \frac{1}{6} N_m^2 k(z_1 - z_2) \left[1 - \frac{5}{28} k(z_1 - z_2)\right].$$

Это приближение подходит для использования в дополнительном интервале значений $k(z_1 - z_2)$ между 0 и 2,9, где, согласно этому приближению, ω меняется от 0 до 0,48 N_m.
Показать, наконец, что при частотах ω, для которых «волнообразная» мода $n = 0$ имеет волновое число k, точно определяемое исцеленной лучевой теорией, варикозная мода $n = 1$ имеет втрое *большее волновое число.*

10. Горизонтальный цилиндр с осью в направлении y движется в жидкости с постоянной частотой Вяйсяля — Брента N, имея постоянную скорость V в направлении, определяемом единичным вектором $(\sin\psi,\ 0,\ \cos\psi)$, где $0 < \psi < \pi/2$. Найти соответствующую кривую волновых чисел. Показать, что ее две ветви асимптотически приближаются к прямым

$$V\,(k\sin\psi + m\cos\psi) = \pm N\cos\psi$$

при больших значениях k или m (либо положительных, либо отрицательных), а также что они касаются оси m в начале координат. Нарисовать кривую волновых чисел хотя бы для одного значения ψ и указать стрелками, в каком направлении должны находиться волны с различными волновыми числами. Доказать, наконец, что координаты $(x,\ z)$ точек на любой поверхности постоянной фазы имеют вид

$$x = CV^{-1}N\,(\cos\theta\sin\psi + \cos\psi\sin\theta\,\mathrm{tg}^2\,\theta),$$

$$z = CV^{-1}N\,[\cos\,(\theta + \psi) + 2\cos\psi\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta],$$

где C — постоянная, а θ — параметр (определяемый в действительности обычным уравнением $m = -k\,\mathrm{tg}\,\theta$).
[Стивенсон вывел эти уравнения и построил точки $(x,\ z)$ для трех фиксированных значений ψ (45°, 70° и 80°) при переменном θ, в каждом случае получив прекрасное согласование с экспериментально наблюдавшимися им формами поверхностей постоянной фазы.]

11. Найти квазиодномерные «волноводные» моды распространения волн в воде, заполняющей канал постоянной ширины b (с вертикальными стенками) и глубины, превышающей b. Определить фазовую и групповую скорости для каждой из них.
Твердое тело, симметричное относительно центральной плоскости канала, может вращаться вокруг вертикальной оси в этой центральной плоскости. В момент $t = 0$ оно начинает совершать вращательные колебания с частотой ω и малой амплитудой относительно указанной вертикальной оси.
Показать, что колебания с частотой ω могут впервые достичь некоторого большого расстояния l от тела в момент времени, приближенно равный

$$t = 2\omega g^{-1}l\,(1 - \pi^2 g^2 b^{-2}\omega^{-4})^{-1/2},$$

если $\omega > (\pi g)^{1/2}b^{-1/2}$, или, в противном случае, не достигнут его совсем.

12. Акустический волновод с жесткими стенками имеет постоянное поперечное сечение в форме квадрата $0 < y < b$, $0 < z < b$. Мембрана громкоговорителя в точке $(0,\ (1/2)\ b,\ 0)$ возбуждает своими колебаниями флуктуирующий объемный расход

$$m_1 \exp\,(i\omega t).$$

Мембрана компактна (мала по сравнению с c/ω). Показать, что величина $F_{MN}\,(k)$, определенная согласно (481), принимает независимое от k значение

$$F_{MN} = (2\pi C_{MN})^{-1}\,i\omega\rho_0 m_1\cos\,(M\pi/2)$$

для всех волновых чисел, которые может возбуждать мембрана. Определить отсюда флуктуации давления, порождаемые как для

больших положительных, так и для больших отрицательных значений x.

Аналогичная диафрагма расположена теперь в точке $(l, (1/2)\, b, 0)$. Она порождает своими колебаниями флуктуирующий объемный расход

$$m_2 \exp(i\omega t).$$

Показать, что специальный выбор отношения m_2/m_1 приведет к тому, что флуктуации давления обратятся в нуль при больших положительных x (появляясь на самом деле только при больших отрицательных x) для всех частот вплоть до некоторого предела, который нужно определить.

В целях увеличения диапазона частот, для которых громкоговорители порождают звук *только* в направлении отрицательных x, в точке $(0, (1/2)\, b, b)$ устанавливается другая аналогичная мембрана, порождающая объемный расход $m_1 \exp(i\omega t)$, в то время как в точке $(l, (1/2)\, b, b)$ находится еще одна мембрана, порождающая объемный расход $m_2 \exp(i\omega t)$. Показать, что при больших положительных x флуктуации давления исчезают теперь для всех частот вплоть до значения, вдвое превышающего предыдущий предел.

Эпилог

Часть I. Различные типы волн в жидкостях

В гл. 4 мы описали несколько важных понятий и методов, которые могут применяться для изучения любой системы волн, описываемой линейными уравнениями, даже если она является анизотропной и диспергирующей. Мы также основательно исследовали одну такую систему — систему внутренних гравитационных волн в стратифицированной жидкости.

Объем этой книги, как объяснялось в прологе, не позволяет провести подобное основательное рассмотрение всех систем волн в жидкостях. Однако он позволяет очень кратко описать в этой части эпилога различные типы анизотропных и диспергирующих систем волн и указать, как они могут быть исследованы методами гл. 4. Аналогичное краткое описание некоторых важных нелинейных эффектов в диспергирующих системах см. в части 2.

Здесь обсуждаются такие волновые системы, в которых распространение возмущений определяется действием возвращающей силы, принадлежащей к одному из двух типов, ранее в этой книге не рассматриваемых: силы Кориолиса для вращающейся жидкости и магнитных сил для электропроводной жидкости. Оба типа систем имеют одну общую интересную особенность: их свойства могут быть поняты в рамках представления о *силовых линиях поля, движущихся вместе с жидкостью.*

В курсах по динамике однородной жидкости показывается, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью (если не считать некоторой диффузии завихренности, обусловленной вязкостью). Существует аналогичный результат, состоящий в том, что магнитные силовые линии движутся вместе с жидкостью (если не считать некоторой диффузии магнитного поля, обусловленной электрическим сопротивлением). В обоих случаях распространение зависит от движений жидкости в волне, которые деформируют или невозмущенные параллельные вихре-

вые линии во вращающейся жидкости, или невозмущенные магнитные силовые линии в проводящей жидкости.

Другая общая черта двух систем состоит в том, что, хотя возможность лабораторного воспроизведения таких волновых движений ограниченна, их первостепенная важность связана с геофизикой. В особенности это относится к влиянию вращения Земли на океанические и атмосферные течения и к влиянию ее магнитного поля на движения в ионосфере и в жидкометаллическом ядре Земли.

Поле завихренности Ω в равномерно вращающейся жидкости принимает постоянное значение

$$\Omega_0 = (0,\ 0,\ \Omega_0), \tag{1}$$

равное удвоенной угловой скорости вращения (здесь считается, что вращение происходит относительно оси z). Если пренебречь вязкой диссипацией, то в случае однородной жидкости вихревые линии движутся вместе с жидкостью. Это означает, что любое малое поле скоростей $\mathbf{u}$ (отсчитываемых относительно равномерного вращения) вызывает изменение вихря со скоростью

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \Omega_0 \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}, \tag{2}$$

пропорциональной скорости изменения $\mathbf{u}$ вдоль вихревой линии.

Более общепринятый способ вывода фундаментального уравнения (2) для поля скорости — это применение операции rot к линеаризованному уравнению количества движения

$$\rho_0\, \partial\mathbf{u}/\partial t = -\nabla p_e - \rho_0 \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u}. \tag{3}$$

Здесь p_e — распределение любого давления, избыточного по отношению к тому, которое необходимо для противодействия центробежным силам в равномерно вращающейся жидкости, а последний член — сила Кориолиса, связанная с любым движением со скоростью $\mathbf{u}$ относительно этого равномерного вращения.

После того как уравнение (2) выведено каким-либо из этих способов, дисперсионное соотношение для волн во вращающейся жидкости находится в результате повторного применения операторов, содержащихся в левой части уравнения (2). Так как для соленоидального векторного поля $\mathbf{u}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = -\nabla^2\mathbf{u}, \tag{4}$$

мы получаем

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\mathbf{u} = \Omega_0^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{u}. \tag{5}$$

Это простое дифференциальное уравнение в частных производных должно удовлетворяться каждой составляющей **u** по отдельности.

Очень глубокая аналогия между этим уравнением и соответствующим уравнением для внутренних волн наглядно проявляется в полученном дисперсионном соотношении. Решение вида плоской волны

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \exp\,[i\,(\omega t - kx - ly - mz)] \tag{6}$$

удовлетворяет уравнению (5), если

$$\omega^2 = \Omega_0^2 m^2/(k^2 + l^2 + m^2). \tag{7}$$

Таким образом, частота ω зависит только от направления, но не зависит от величины волнового вектора и может принимать любые значения, меньшие Ω_0 (точно так же, как в случае внутренних волн, но с заменой N на Ω_0).

Соотношение (7) может быть записано через угол θ между поверхностью постоянной фазы и осью z (осью вращения):

$$\omega = \Omega_0 \sin\theta, \tag{8}$$

что и на этот раз совпадает с формулой для внутренних волн, но с заменой cos на sin. Групповая скорость

$$\mathbf{U} = (\partial\omega/\partial k,\ \partial\omega/\partial l,\ \partial\omega/\partial m) \tag{9}$$

для положительных ω/m может быть записана как

$$\mathbf{U} = \frac{\Omega_0\,(k^2+l^2)^{1/2}}{k^2+l^2+m^2}\left[\frac{(-km,\ -lm,\ k^2+l^2]}{(k^2+l^2)^{1/2}\,(k^2+l^2+m^2)^{1/2}}\right], \tag{10}$$

где член в квадратных скобках является единичным вектором. Так же как и в разд. 4.4, замечаем, что эта скорость переноса энергии волн направлена параллельно поверхностям постоянной фазы; действительно, она перпендикулярна волновому вектору и лежит в плоскости, образованной им и вертикалью. Величина групповой скорости для волн длины λ может быть записана в виде

$$U = (\Omega_0\lambda/(2\pi))\cos\theta. \tag{11}$$

В противоположность этому поверхность, образованная гребнями, и другие поверхности постоянной фазы движутся перпендикулярно самим себе со скоростью волны

$$c = (\omega\lambda/(2\pi)) = (\Omega_0\lambda/(2\pi))\sin\theta. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) опять имеют такой же вид, как в разделе 4.4, если заменить N на Ω_0 и cos на sin. Однако для волн во вращающейся жидкости составляющие волнового вектора

и групповой скорости по оси z имеют *одинаковые* знаки, поэтому составляющая переноса энергии по оси вращения имеет *то же направление*, что и аксиальная составляющая движения гребня.

Источник, колеблющийся с частотой $\omega < \Omega_0$, порождает во вращающейся жидкости перенос энергии волн под углом

$$\theta = \arcsin(\omega/\Omega_0) \tag{13}$$

к оси z. При двумерном распространении эти волны образуют конфигурацию в форме андреевского креста, тогда как при распространении от точечного источника в трех измерениях они образуют двойной конус. Как было выяснено в разд. 4.10, имеется только один или два гребня, но *направление* их распространения противоположно направлению движения внутренних волн.

Предельный случай $(\omega/\Omega_0) \to 0$ представляет даже больший интерес, чем соответствующий предельный случай для внутренних волн. Замена cos на sin означает, что в этом случае угол θ стремится к *нулю*. Любое твердое тело, находящееся в очень медленно меняющемся движении, посылает поэтому возмущения вдоль единственного направления ($\theta = 0$) и с конечной скоростью [1]) (которая для компонент с длиной λ составляет $\Omega_0\lambda/(2\pi)$). Отсюда следует, что при равномерном движении вдоль оси вращения со скоростью V твердое тело может толкать перед собой столбчатый сигнал, состоящий из всех составляющих возмущения, длины волн которых λ удовлетворяют условию

$$\Omega_0\lambda > 2\pi V. \tag{14}$$

Это явление очень сходно с другим — «столбом Тейлора», наблюдаемым при движении твердого тела под прямым углом к оси вращения с *очень* низкой скоростью, величина которой мала по сравнению со значением групповой скорости $\Omega_0\lambda/(2\pi)$ для практически всех длин волн, порожденных телом данного размера. Это означает, что такое столбчатое возмущение, простирающееся в направлении, определяемом углом $\theta = 0$ (параллельно оси вращения), должно сопровождать подобное движение, находясь с обеих сторон от тела.

Описанные до сих пор волновые движения обычно называют «инерционными волнами», в частности потому, что их энергия является полностью кинетической: кориолисова сила неконсервативна и не может вызвать накопления энергии или любого другого ее изменения. Действительно, уравнение (3) означает,

[1]) В противоположность этому в случае внутренних волн при предельном угле $\theta = \pi/2$ этот результат получается только для двумерного источника (разд. 4.12).

что $\partial W/\partial t = -\nabla \cdot \mathbf{I}$, где, как обычно, $\mathbf{I} = p_e\mathbf{u}$, но W — кинетическая энергия $\rho_0\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})/2$. Это также означает, что в плоской волне вида (6) частицы жидкости движутся с постоянной кинетической энергией (по круговым траекториям, перпендикулярным волновому вектору).

Полученные выше для однородной жидкости результаты, хотя и представляют очевидный интерес и подтверждаются лабораторными опытами, практически не имеют отношения к таким заметно стратифицированным средам, как океан и атмосфера. Значение Ω_0 для вращения Земли составляет

$$\Omega_0 = 4\pi\ (\text{сутки})^{-1} = 1{,}45\cdot 10^{-4}\text{с}^{-1}. \tag{15}$$

Соответствующие значения частоты Вяйсяля — Брента N, о которой упоминалось в разд. 4.1, группируются вблизи величины порядка $10^{-2}\cdot\text{с}^{-1}$. Это наводит на мысль, что характер распространения внутренних волн в океане и атмосфере определяется прежде всего влиянием стратификации. Другими словами, значение величины $\omega^2\,(k^2 + l^2 + m^2)$ определяется прежде всего вкладом, обусловленным тяготением, который, если ось z направлена вертикально, равен (разд. 4.1)

$$N^2\,(k^2 + l^2), \tag{16}$$

а не членом, получающимся из уравнения (7), который равен $\Omega_0^2 m^2$ при совпадении оси z с осью вращения.

В большинстве случаев подробное рассмотрение подтверждает этот вывод, но важное исключение (как подсказывает уравнение (16)) составляет случай очень длинных волн с чрезвычайно малыми k и l. Говоря на языке, принятом в разд. 4.13, влияние вращения Земли в основном сказывается на волноводных модах колебаний, длина волны которых намного превышает глубину океана. Самую низкочастотную среди них моду океанографы называют «баротропной». Эта волна, по терминологии гл. 2 и 3, является «длинной волной» и не подвержена заметному влиянию стратификации. Хотя более высокочастотные волноводные моды, называемые «бароклинными», также представляют определенный интерес с точки зрения океанографии и они подвержены *одновременно* влияниям и стратификации, и вращения Земли, здесь мы сконцентрируем внимание на длинных волнах в узком смысле слова.

Движение жидкости в таких длинных волнах является в основном горизонтальным движением, обнаруживающим несущественное изменение с вертикальной координатой z, даже если оно допускает малый подъем ζ (положительный или отрицательный) свободной поверхности. При этих условиях горизонтальная составляющая векторного уравнения (3) содер-

жит только *вертикальную* составляющую невозмущенного значения завихренности Ω_0. Эту вертикальную составляющую океанографы всегда обозначают через f, она равна абсолютной величине (15) вектора Ω_0, умноженной на синус широты. Снова можно взять p_e равным $\rho_0 g\zeta$ (где g — наблюдаемое ускорение свободного падения на вращающейся Земле — содержит, как всегда, малый отрицательный член, обусловленный центробежной силой). Таким образом, линеаризованными уравнениями количества движения для длинных волн будут уравнения

$$\partial u/\partial t = -g\,\partial\zeta/\partial x + fv, \quad \partial v/\partial t = -g\,\partial\zeta/\partial y - fu, \tag{17}$$

которые должны быть решены совместно с тем же уравнением неразрывности

$$\partial\zeta/\partial t + \partial\,(hu)/\partial x + \partial\,(hv)/\partial y = 0, \tag{18}$$

что было использовано в разд. 4.13.

Для длинных волн, описываемых уравнениями (17) и (18), развита обширная теория. Их свойства наиболее просты при таких условиях, когда можно, сохранив хорошую точность, пренебречь изменениями невозмущенного значения глубины h с координатой и «кориолисова параметра» f с широтой.

В этом случае, когда h и f могут считаться постоянными, добавочная вертикальная завихренность, обусловленная волновым движением, принимает значение

$$\partial v/\partial x - \partial u/\partial y = f\zeta/h. \tag{19}$$

Этот результат может быть выведен из выписанных выше уравнений или объяснен тем, что невозмущенные вихревые линии изменяют свою *вертикальную* протяженность от h до $h + \zeta$. Тогда уравнение (18) вместе с уравнениями (17) и (19) означает, что

$$\partial^2\zeta/\partial t^2 = gh\,(\partial^2\zeta/\partial x^2 + \partial^2\zeta/\partial y^2) - f^2\zeta, \tag{20}$$

так что двумерным дисперсионным соотношением для длинных волн будет

$$\omega^2 = gh\,(k^2 + l^2) + f^2. \tag{21}$$

Мы отметим здесь интересный контраст: если в случае внутренних волн вращение ограничивает их частоты величинами, *меньшими* Ω_0, то в случае длинных волн оно оказывает в точности противоположное воздействие, ограничивая ω величинами, *бо́льшими* f. Эти длинные волны распространяются изотропно, но с дисперсией. Величина групповой скорости может быть записана в виде

$$U = (gh)^{1/2}\,(\omega^2 - f^2)^{1/2}\,\omega^{-1}. \tag{22}$$

Она стремится к нулю, когда ω спадает до порогового значения f.

Конечно, многие встречающиеся в природе длинные волны, такие, как, например, цунами, порожденные землетрясениями, обладают главными частотами ω, много бо́льшими f. Во всех таких случаях влияние вращения Земли на их распространение пренебрежимо мало.

Однако теория этого эффекта чрезвычайно важна по одной серьезной причине: *приливные силы* возмущают океаны с частотами, сравнимыми с f. Наибольшая из этих сил обусловлена избыточным гравитационным притяжением Луной воды, находящейся к ней ближе, чем центр Земли, и соответствующим уменьшенным притяжением воды, находящейся от нее дальше, чем центр. Частота изменения этой силы в каждой фиксированной точке вращающейся Земли (причем Луна тоже движется по своей орбите) принимает значение $1{,}40 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, несколько меньшее Ω_0 (и соответствующее периоду в 12 часов 25 минут). Однако она превышает f на всех широтах ниже 75°.

Солнце порождает несколько меньшие силы, имеющие частоту, очень близкую к $\Omega_0 = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$. Они особенно важны каждый четырнадцатый день (в полнолуние или в новолуние), когда приливные силы, порожденные Солнцем и Луной, усиливают друг друга.

Свойства распространения длинных волн, проявляемые решениями соответствующих уравнений, оказывают особенно существенное влияние на приливные движения в мелких морях. Из-за ограниченности скорости распространения, определяемой формулой (22), такие моря реагируют на приливы и отливы в примыкающем глубоком океане с некоторым *опозданием*. Неизбежное увеличение амплитуды волны при переносе ее энергии в более мелкие воды, где она оказывается локализованной в области с уменьшенной глубиной, ведет к возрастанию практической важности точного знания этих эффектов.

В этом смысле существенны другие виды колебаний, отличные от описываемых дисперсионным соотношением (21). К ним относятся квазиодномерные моды распространения колебаний в волноводе, известные как «кельвиновские волны», которые можно рассматривать как волны (разд. 4.13), модифицированные влиянием вращения Земли.

Помимо предсказуемых приливно-отливных сил астрономического происхождения на приливно-отливные движения в мелких морях оказывают влияние и некоторые другие силы. К ним относится сила трения ветра о поверхность воды. Очень сильные ветры, дующие в периоды максимальных приливных движений, могут представить серьезную угрозу сооружениям береговой

защиты. Для того чтобы изучить такую угрозу британским берегам, в Институте океанографических наук была разработана программа для численного решения уравнений (17) (в которых были восстановлены нелинейные члены и в правые части добавлены члены, описывающие произвольные силы) во всей области мелких морей, окружающих Британские острова, с учетом уравнения (18); вводимые данные отвечали известным приливно-отливным движениям астрономического происхождения в прилегающем глубоком океане. При предсказаниях относительно ветра эта программа может быть использована для того, чтобы определить, когда необходимо ввести в действие различные аварийные сооружения береговой защиты.

Длинные волны с частотой $\omega > f$ обычно ведут себя в приблизительном согласии с дисперсионным соотношением (21), даже если f и h изменяются. Тем не менее обнаружено, что их изменение делает возможными также некоторые волнообразные движения с много меньшими частотами, называемые «волнами Россби». Они могут оказаться особенно важными, когда изучается реакция большого океана на приливно-отливные силы. При таком изучении необходимо, конечно, покончить с декартовыми координатами и перейти к сферическим координатам, подходящим для формы Земли. На этом этапе, однако, мы сами должны покончить с нашим очень кратким описанием волн во вращающейся жидкости, отослав читателя к библиографии за дальнейшими сведениями по затронутой тематике.

Как указывалось ранее, для движений однородной жидкости вихревые линии и силовые линии магнитного поля обладают одним и тем же важным свойством. Полное нелинейное уравнение для завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ имеет вид

$$\partial\boldsymbol{\Omega}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega}) + \nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}, \tag{23}$$

где последний член, пропорциональный кинематической вязкости ν, описывает диффузию завихренности. Если этот член отбросить, то уравнение (23) будет означать, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью. Если же взять его в линеаризованной форме, в которой $\boldsymbol{\Omega}$ заменяется в правой части на $\boldsymbol{\Omega}_0$, то оно совпадет с уравнением (2), описывающим инерционные волны.

Соответствующее уравнение для магнитного поля $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) + (\tau/\mu)\nabla^2\mathbf{B}, \tag{24}$$

где τ — удельное сопротивление, а μ — магнитная проницаемость. Уравнение (24) получается из следующих соображений. Электродвижущая сила в проводнике, движущемся со ско-

ростью $\mathbf{u}$, равна сумме электростатической силы $\mathbf{E}$ и лоренцевой силы $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. В соответствии с этим плотность тока $\mathbf{j}$ определяется из уравнения

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \tau \mathbf{j}. \tag{25}$$

Тогда уравнение (24) следует из формул

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \tag{26}$$

— уравнений Максвелла для таких процессов (в среде с постоянной проницаемостью), при которых не возникают настолько высокие частоты, что в последнем уравнении становятся существенными токи смещения.

В уравнении (24) коэффициент диффузии τ/μ, как правило, очень велик: он больше, чем обычная величина кинематической вязкости ν. Так, для ртути (электропроводящей жидкости, удобной для экспериментов) $\tau/\mu = 0{,}75$ м^2/с. Такой громадный коэффициент диффузии делает почти невозможным воспроизведение в лабораторных условиях интересующих нас эффектов, зависящих от конвективного переноса в жидкости силовых линий магнитного поля. Даже для жидкого натрия, низкое удельное сопротивление которого делает предпочтительным его использование в системах охлаждения с электромагнитным перекачиванием, $\tau/\mu = 0{,}08$ м^2/с, что соответствует характерной длине диффузионных процессов около 0,3 м.

Очень высокие коэффициенты диффузии могут, однако, стать относительно незначительными, когда речь идет о системах масштабов Земли, например для движений в жидком ядре или в ионосфере, которые могут обусловливать часть наблюдаемых флуктуаций магнитного поля Земли. Хотя типичные коэффициенты диффузии в ионосфере могут принимать еще большие значения, порядка 10^5 м^2/с, они вполне могут быть относительно незначительными для явлений со столь большими масштабами длины. Таковы некоторые из причин, по которым мы кратко изложим ниже замечательные свойства волн, описываемых уравнением (24) в его бездиффузионной форме

$$\partial \mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{27}$$

Когда силовые линии магнитного поля конвективно переносятся жидкостью, сила, с которой они оказывают обратное воздействие на жидкость, может быть выражена любым из двух способов: через вышеупомянутую лоренцеву силу, действующую на движущийся заряд и имеющую вид

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mu^{-1} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu^{-1} \left[\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{1}{2} B^2 \right) \right], \tag{28}$$

или через *систему эквивалентных напряжений*. Она состоит из изотропно действующего давления $(1/2)\,\mu^{-1}B^2$ и, кроме того, равномерного растяжения, равного $\mu^{-1}B^2$ на единицу площади поперечного сечения и направленного вдоль силовых линий магнитного поля.

Последний способ позволяет быстро сделать заключение о природе распространения волн в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$, когда сжимаемость несущественна. Достаточно чисто физического обоснования: в условиях несжимаемости давление жидкости может устанавливаться так, чтобы в точности скомпенсировать изменение магнитного давления, поэтому каждая силовая линия магнитного поля и движущаяся вместе с ней жидкость ведут себя подобно простой натянутой струне. Действительно, окружающий силовую линию поля объем жидкости с площадью поперечного сечения A обладает на единицу длины массой $\rho_0 A$ и натяжением $\mu^{-1}B_0^2 A$. Поэтому поперечные движения происходят в одном измерении вдоль нее, подобно распространению волн вдоль натянутой струны, со скоростью волны

$$c_A = \left(\frac{\text{Натяжение}}{\text{Масса на единицу длины}}\right)^{1/2} = \frac{B_0}{(\mu\rho_0)^{1/2}}, \tag{29}$$

известной как альвеновская скорость волны.

Удивительная особенность этого вывода заключается в том, что в трехмерном случае в неограниченной жидкости волны могут распространяться в одном измерении вдоль силовых линий магнитного поля. Тот же вывод следует из непосредственного рассмотрения малых возмущений. Малые отклонения B от постоянного невозмущенного магнитного поля

$$\mathbf{B}_0 = (0,\ 0,\ B_0) \tag{30}$$

удовлетворяют уравнению

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = B_0\,\partial\mathbf{u}/\partial z \tag{31}$$

(полностью аналогичному уравнению (2) для вращающейся жидкости). Уравнение количества движения жидкости при уравновешивании давлением жидкости магнитного давления принимает вид

$$\rho_0\,\partial\mathbf{u}/\partial t = \mu^{-1}B_0\,\partial\mathbf{B}/\partial z. \tag{32}$$

Из уравнений (31) и (32) следует, что каждая составляющая поля скоростей (или магнитного поля) удовлетворяет уравнению

$$\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 = (B_0^2/(\mu\rho_0))\,\partial^2\mathbf{u}/\partial z^2, \tag{33}$$

описывающему одномерное распространение в направлении оси z с альвеновской скоростью волны, определяемой формулой (29).

Заметим, в частности, что не только поперечные составляющие скорости **u** распространяются подобным образом. Очевидно, составляющая скорости **u** вдоль силовых линий в соленоидальном движении непосредственно связана с поперечными составляющими и поэтому подчиняется тому же закону распространения.

Если источник излучения имеет фиксированную частоту ω_0, то уравнение (33) служит особым случаем систем, рассмотренных в начале разд. 4.10. Следовательно, поверхность волновых чисел S будет тогда парой параллельных *плоскостей*. Любой такой случай, как там показано, соответствует одномерному распространению волн вдоль направления, перпендикулярного этим плоскостям. Таким образом, отсутствует обычное уменьшение амплитуды при распространении волн в двух или трех измерениях. Если диссипация энергии невелика, то такой тип распространения может допускать сохранение значительной амплитуды на исключительно больших расстояниях.

Искривленные силовые линии магнитного поля могут действовать опять же как лучи в смысле разд. 4.5. Можно ожидать, что любое возмущение, характерное волновое число которого мало по сравнению с их кривизной, будет распространяться вдоль них.

Эти выводы важны, в частности, тем, что они побуждают тщательно изучить, насколько эффекты, которыми мы пренебрегли выше, могут их изменить. Мы не будем далее развивать сделанные ранее замечания о диссипативных процессах (вязкости и в особенности электрическом сопротивлении), но укажем некоторые конкурирующие недиссипативные эффекты.

В проведенном выше исследовании мы пренебрегли сжимаемостью. Однако почти так же, как в разд. 3.1 и 4.2, можно сделать простую оценку: сжимаемостью действительно можно пренебречь, если альвеновская скорость волны, определяемая формулой (29), мала по сравнению со скоростью звука c_0. Тогда изменения плотности за счет изменения давления жидкости должны происходить слишком медленно, чтобы стало неверным предположение о соленоидальности поля скоростей.

Для газа (например, верхних слоев атмосферы, известных как ионосфера и обладающих электропроводностью из-за фотоионизации) альвеновская скорость волны (29) может быть малой по сравнению со скоростью звука $(\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}$ тогда и только тогда, когда магнитное давление (1/2) $\mu^{-1}B_0^2$ мало по сравнению с давлением газа p_0. Величина магнитного поля Земли B_0 имеет типичное значение около $5\cdot10^{-5}$ Тл в средних геомагнитных широтах (здесь Тл — тесла, единица напряженности в системе СИ, равная 10^4 гаусс; заметим также, что проницаемость μ

принимает характерное для вакуума значение $1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Тл$^2 \cdot$ Н$^{-1} \cdot$м^2). Получающееся магнитное давление, 10^{-3} Н/м^2 или 10^{-8} бар, мало по сравнению с давлением газа в нижних слоях ионосферы, известных как область D и расположенных на высоте от 80 до 100 км. С другой стороны, давление газа сравнимо с величиной 10^{-8} бар в области E (высоты около 130 км), тогда как в области F (выше 180 км) давление газа много меньше магнитного давления.

Поэтому может быть очень интересным исследование совместного распространения альвеновских и звуковых волн как в случае, когда c_A и c_0 сравнимы, так и в случае, когда альвеновская скорость намного превосходит скорость звука. В таком исследовании используются линеаризованные уравнения неразрывности и количества движения для сжимаемой жидкости вместе с линеаризованным представлением

$$\mu^{-1} [\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B})] \tag{34}$$

магнитной силы (28) и уравнением (31) для скорости изменения $\mathbf{B}$. Мы опустим подробности и дадим только выводы.

Уравнение для параллельной силовым линиям магнитного поля составляющей скорости w имеет решение в виде плоской волны:

$$w = w_1 \exp [i (\omega t - kx - ly - mz), \tag{35}$$

где

$$k^2 + l^2 = (\omega^2 - c_0^2 m^2)\ (\omega^2 - c_A^2 m^2)\ [(c_0^2 + c_A^2)\ \omega^2 - c_0^2 c_A^2 m^2]^{-1}. \tag{36}$$

Уравнения для составляющих скорости (u, v), перпендикулярных силовым линиям, более сложны, но они упрощаются, если ограничиться двумерными операциями дивергенции и ротора для этого двумерного поля скоростей:

$$\Delta_{II} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y \quad \text{и} \quad \Omega_{II} = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y. \tag{37}$$

Величины Δ_{II} и Ω_{II} единственным образом определяют поле скоростей (u, v), стремящееся к нулю на больших расстояниях. Из двух величин (37) Δ_{II} удовлетворяет соотношению

$$\Delta_{II} = i (m - \omega^2 c_0^{-2} m^{-1})\ w_1 \exp [i (\omega t - kx - ly - mz)], \tag{38}$$

так что ее изменения связаны с изменениями $\partial w/\partial z$ (в действительности прямо пропорциональны им). Напротив, Ω_{II} удовлетворяет независимому уравнению

$$\partial^2 \Omega_{II}/\partial t^2 = c_A^2 \partial^2 \Omega_{II}/\partial z^2. \tag{39}$$

Уравнение (39) означает, что z-составляющая завихренности Ω_{II} распространяется одномерно вдоль силовых линий

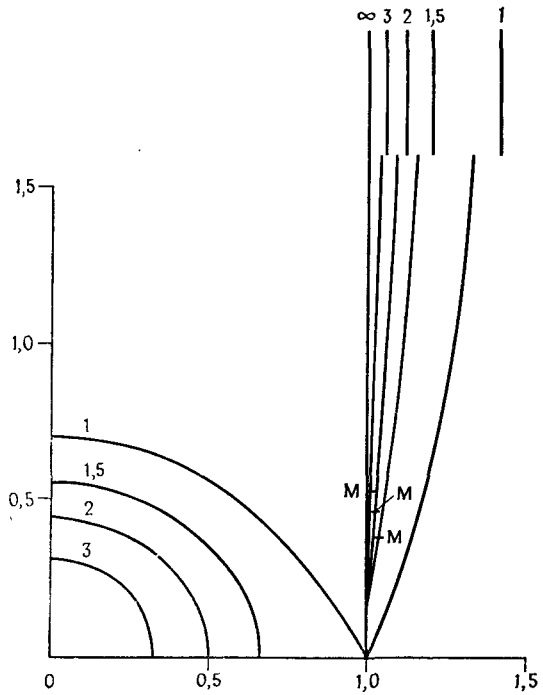

Рис. 112. Поверхности волновых чисел S для магнитогидродинамических волн в сжимаемой жидкости, имеющих скорость звука c_0 и альвеновскую скорость c_A. Магнитное поле направлено по оси z. По оси абсцисс отложена m, составляющая волнового вектора по оси z, по оси ординат $(k^2 + l^2)^{1/2}$. Точки с пометкой M суть точки перегиба, которые дают начало каустикам. Когда c_0/c_A принимает отмеченные значения 1, 1,5, 2, 3 и ∞ (соответствующие $c_A/c_0 = 1$, 2/3, 1/2, 1/3 и 0), показаны поверхности с волновым числом, отнесенным к ω_0/c_0. Однако когда c_A/c_0 превышает 1, принимая отмеченные значения 1, 1,5, 2, 3 и ∞, показаны поверхности с волновым числом, отнесенным к ω_0/c_A. [Phil. Trans. Roy. Soc.]

магнитного поля с альвеновской скоростью c_A. Другими словами, сжимаемость не исключает такого одномерного распространения; оно просто ограничивается в этом случае z-составляющей завихренности.

Поверхность волновых чисел (36) при распространении w и Δ_{II} показана на рис. 112 для различных значений c_A/c_0, лежащих между 0 и 1. За исключением предельного случая несжимаемой жидкости ($c_A/c_0 \to 0$), движение волны вдоль нормалей к этим поверхностям волновых чисел всегда порождает

распространение возмущений w и Δ_{II}, излучаемых источником во всех трех измерениях. Когда эти возмущения становятся полностью изолированными от одномерного распространения Ω_{II}, движение, передаваемое вдоль силовых линий, должно быть чисто поперечным и соленоидальным.

Ясно, что при малых величинах c_A/c_0 поверхность волновых чисел S состоит по существу из сфер радиуса ω/c_0, отвечающих изотропному распространению звуковых волн, и пары плоскостей, отвечающих совершенно независимому одномерному распространению с альвеновской скоростью. Однако при больших величинах, таких, как $c_A/c_0 = 1/2$ распространение со скоростью, близкой к c_A, происходит в конусе с углом полураствора 4,7°, границей которого является каустика, исходящая из точки перегиба на рис. 112, хотя распространение со скоростью, близкой к c_0, и является еще почти изотропным.

Заметим, что, поскольку c_0 и c_A входят в уравнение (36) для S симметричным образом, поверхность снова принимает ту же форму и при $c_A \geqslant c_0$. Таким образом, форма S для значений 1/3, 1/2, 2/3 и 1 величины c_0/c_A такая же, как показано на рис. 112, если за единицу волнового числа вместо ω_0/c_A взято ω_0/c_0.

Предельный случай больших c_A/c_0 представляет значительный интерес и может иметь отношение к распространению в области ионосферы F. В этом случае поверхности волновых чисел превращаются в сферы радиуса ω_0/c_A, отвечающие *изотропному* распространению с альвеновской скоростью c_A, и в пары плоскостей

$$m = \pm\omega_0 c_0^{-1}, \tag{40}$$

отвечающие *одномерному* распространению со скоростью звука c_0.

Такая неожиданная возможность одномерного распространения *звука* может быть понята с учетом того, что в этом случае натяжение силовых линий магнитного поля намного превышает давление газа. При этом оказывается возможным строго одномерное распространение в смысле гл. 2: звуковые волны могут бежать вдоль эффективно *жестких трубок*, образованных туго натянутыми силовыми линиями магнитного поля. Продольный характер волны виден из того факта, что в силу уравнений (35) и (38) величина Δ_{II} стремится к нулю, тогда как в согласии с уравнением (39) величина Ω_{II} распространяется с гораздо большей альвеновской скоростью. Тогда в самой звуковой волне они обе равны нулю, так что u и v стремятся к нулю, а ненулевой является только составляющая скорости в направлении движения w.

Если c_A/c_0 велико, то частоты, излучаемые источником, могут быть слишком низки (при данных размерах источника), чтобы породить какие-либо возмущения, распространяющиеся со скоростью c_A (т. е. сферические волны, переносящие Δ_{II}, или одномерные волны, переносящие Ω_{II}). Волны, порожденные таким источником, могут быть только вышеупомянутыми звуковыми волнами, распространяющимися в одном измерении вдоль эффективно жестких трубок магнитного поля.

Даже в кратком описании волн в ионизованном газе необходимо упомянуть о существовании различных недиссипативных эффектов, заставляющих отойти от идеального уравнения (27) для проводящей жидкости. Среди них мы выберем тот, который в первую очередь становится обычно существенным при увеличении частоты волны, а именно эффект Холла.

В ионизованном газе электроны из-за своей чрезвычайно малой массы дают пренебрежимо малый вклад в скорость газа $\mathbf{u}$, определяемую как среднее локальное значение количества движения на единицу массы. Однако плотность электрического тока $\mathbf{j}$ в газе зависит от электронов (с зарядом $-e$ и, например, плотностью числа частиц n_{el}), движущихся со скоростью $-\mathbf{j}/(en_{el})$ относительно положительных ионов. В частности, если положительные ионы и нейтральные частицы имеют одинаковую скорость $\mathbf{u}$, то скорость электронов составляет

$$\mathbf{u}_{el} = \mathbf{u} - \mathbf{j}/en_{el}. \tag{41}$$

С другой стороны, силовые линии имеют тенденцию двигаться не с газом в целом, а с электронным газом, поэтому уравнение (27) заменяется на уравнение

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}(\mathbf{u}_{el} \times \mathbf{B}). \tag{42}$$

Это объясняется тем, что инерция электронов пренебрежимо мала при рассматриваемых частотах. Стало быть, если пренебречь также эффектами столкновений, дающими вклад в электрическое сопротивление, то средняя сила, действующая на электроны, $-e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_{el} \times \mathbf{B})$, равна либо нулю, либо члену, содержащему градиент электронного давления, который не влияет на величину rot $\mathbf{E}$. В любом случае уравнения (41) и (42) заменяют выведенное ранее уравнение (27).

Обнаружено, что эффект Холла, кратко описанный выше, нарушает одномерное распространение поперечных движений вдоль силовых линий магнитного поля, происходящее со скоростью волны c_A, и превращает его в коническое распространение, ограниченное конусом с углом полураствора $\arcsin(\omega\rho_0/B_0en_{el})$.

В противоположность этому на другое одномерное распространение (происходящее со скоростью звука c_0, когда она мала по сравнению с c_A) эффект Холла не влияет. Эта продольная форма одномерного распространения может, таким образом, существовать и при более высоких частотах, чем поперечная форма.

В этой первой части эпилога было дано очень краткое описание различных типов волн в жидкостях. Это было сделано главным образом для того, чтобы показать широту круга проблем. Подробное описание любого из упомянутых типов волн смотрите в книгах, на которые даны ссылки в библиографических комментариях.

Часть 2. Нелинейные эффекты при распространении диспергирующих волн

Под нелинейными эффектами распространения волн мы понимаем любые особенности реальных волновых движений, которые не могут быть воспроизведены при линейном анализе, т. е. при анализе, не учитывающем квадратов возмущений. В основной части этой книги (гл. 1—4) нелинейные эффекты описываются только для недиспергирующих волн (разд. 2.8—2.14), преимущественно для звуковых волн, а также для длинных волн в каналах.

При изучении нелинейных эффектов есть веские причины отдать предпочтение *недиспергирующим волнам*, для которых они могут принимать такие впечатляющие формы, как ударные волны и гидравлические прыжки; при этом, как показано в разд. 2.11, достаточно малые нелинейные члены в уравнениях движения могут по истечении достаточно долгого времени превратить обычный волновой профиль в столь впечатляюще отличный от исходного. Именно для этих систем изменения волнового профиля в последовательные моменты времени могут «суммироваться», пока не превратятся в очень сильное изменение.

Напротив, наличие дисперсии (зависимости скорости волны от ее длины) может существенно ограничить возможность существования такой кумулятивной последовательности малых нелинейных эффектов. Единственной основной скорости волны c_0, с которой перемещается волновой профиль, одновременно подвергаясь все большему сдвиговому искажению в результате малых отклонений скорости волн от основного значения c_0, больше

не существует. Вместо этого у каждой новой фурье-компоненты, которая может появиться при нелинейных изменениях, есть своя основная скорость волны. Возникшие изменения становятся, таким образом, пространственно разделенными, что маскирует их неуклонное накопление.

Другая область, в которой малые нелинейные эффекты обладают кумулятивным действием,— это обычная механика однородной жидкости. Для вихря основная скорость волны равна нулю (разд. 1.1). Знакомое положение о том, что вихревые линии движутся вместе с жидкостью, включает в себя и это утверждение, и утверждение о существенно нелинейном действии вихревого поля на самого себя. Накопление этих воздействий порождает, например, сложный характер некоторых, отличающихся сильным искривлением вихревых линий, течений жидкости, называемых турбулентными.

В диспергирующих системах отсутствует кумулятивное действие нелинейных эффектов, проявляющееся всегда, когда существует единственная скорость волны (нулевая, как для поля вихрей, или ненулевая, как для недиспергирующей системы). Дисперсия предотвращает их накопление, поскольку различные фурье-компоненты волновой системы оказываются смещенными друг относительно друга. Это может означать, что механика «простой» однородной жидкости в действительности более сложна, чем механика стратифицированной жидкости или механика однородной равномерно вращающейся жидкости; причина здесь, по существу, в том, что возмущения для этих систем не остаются рядом, а подвергаются трехмерному рассеиванию, так как всем волновым векторам соответствуют разные групповые скорости. Аналогично, наиболее полезные сведения о волнах на воде могут быть получены из чисто линейной теории, подобно тому как было сделано в гл. 3. Действительно, если небольшие нелинейные эффекты не имеют тенденции к кумулятивному воздействию, то от такого линейного анализа всегда можно ожидать полезных результатов.

В этой части 2 настоящего эпилога мы продолжим рассмотрение трех вопросов, подсказанных предыдущим обсуждением. Во-первых, мы остановимся на таком явлении, как гравитационные волны на глубокой воде, для которых линейный анализ (разд. 3.2) относительно прост и предсказывает высокую степень дисперсии. Мы в общих чертах прикинем, насколько сильно свойства этих волн могут быть изменены существенными нелинейными эффектами, сопровождающими большие возмущения поверхности воды.

Во-вторых, мы рассмотрим волны, для которых характерна малая степень дисперсии, вроде «весьма длинных» волн на

воде. Это волны, длина которых λ только немного не достигает таких значений (превышающих в 20 раз глубину воды), когда дисперсией можно пренебречь совсем. Как мы увидим, для «весьма длинных» волн влияние малых нелинейных эффектов и влияние малой дисперсии могут почти уравновешивать друг друга.

В-третьих, мы очень кратко опишем подход к исследованию статистического ансамбля диспергирующих волн. Главным образом мы будем стремиться показать, почему некоторые свойства такого ансамбля могут быть проще, чем свойства его недиспергирующих аналогов, в том числе турбулентного течения.

Изложению придает единство использование понятия волнового действия, которое, как впервые показал Дж. Б. Уизем, имеет общую значимость для нелинейных диспергирующих волн. Исследование хода трубок лучей при ветре (разд. 4.6) уже подтвердило важность понятия волнового действия для ограниченной совокупности линейных систем, однако мы обнаружим, что оно имеет намного более широкую значимость.

Линейная теория предсказывает, что в случае гравитационных волн на глубокой воде периодическая волна длины λ по форме является в точности синусоидальной и движется со скоростью

$$c = (g\lambda/(2\pi))^{1/2}. \tag{43}$$

Мы начнем с вопроса: возможно ли существование периодических волн с длиной λ, если их амплитуды настолько велики, что пренебрегать квадратами и более высокими степенями возмущений больше нельзя.

Следует ожидать, что существование таких периодических волн возможно (хотя они не обязаны быть точно синусоидальными и хотя их скорость c не обязана точно удовлетворять соотношению (43)) по следующей причине. Предположим, что большое цилиндрическое препятствие движется в горизонтальном положении в глубокой воде со скоростью V, направленной перпендикулярно его оси. Тогда оно должно испытывать волновое сопротивление, даже если линейное исследование этого сопротивления (разд. 3.9) не является точным. Таким образом, мы ожидаем, что энергию уносят гравитационные волны позади цилиндра. С другой стороны, относительно цилиндра течение должно быть стационарным, иметь скорость V и обтекать покоящееся препятствие; все гребни волн в нем должны быть неподвижны. Следовательно, эти гребни должны двигаться вперед по отношению к невозмущенной воде с одной и той же скоростью волны

$$c = V; \tag{44}$$

это условие имеет ту же форму, что и в линейной теории (разд. 3.9).

Заметим также, что если W — энергия волны на единицу площади горизонтальной поверхности, а I — поток энергии в волне на единицу длины гребня [1]), то выражение

$$cW - I \tag{45}$$

представляет собой поток энергии, переносимой назад по отношению к цилиндру, движущемуся вперед со скоростью $c = V$. Выражение (45) представляет собой *мощность волнового сопротивления* на единицу длины цилиндра (который предполагается достаточно большим и, стало быть, порождает только гравитационные волны). Если пренебречь затуханием энергии, то можно ожидать, что волны позади цилиндра имеют постоянную амплитуду, так что поток энергии (45) постоянен. Таким образом, они должны быть периодическими волнами, длина и амплитуда которых определяется величиной (44) для скорости волны и величиной (45) для потока энергии, переносимой назад по отношению к гребням.

Такая картина была с успехом использована при вычислении параметров периодических волн, рассчитываемых как стационарное течение в системе отсчета, в которой гребни неподвижны. Тогда потенциал скорости φ удовлетворяет даваемому уравнением Бернулли условию на свободной поверхности

$$\tfrac{1}{2}(\partial\varphi/\partial x)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial\varphi/\partial z)^2 + g\zeta = \text{const} \quad \text{при} \quad z = \zeta. \tag{46}$$

Движение на больших глубинах является равномерным движением со скоростью c по отношению к гребням, что дает

$$\varphi \sim cx \quad \text{при} \quad z \to -\infty. \tag{47}$$

Введение функции тока ψ, такой, что уравнение свободной поверхности принимает вид $\psi = 0$, упрощает решение. Представление

$$\left.\begin{aligned} x &= c^{-1}\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2n\pi\psi/c\lambda} \sin(2n\pi\varphi/c\lambda), \\ z &= c^{-1}\psi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2n\pi\psi/c\lambda} \cos(2n\pi\varphi/c\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

в котором x и z записаны в виде рядов Фурье по φ, удовлетворяющих уравнению Лапласа как функции от φ и ψ, соответствует волнам длины λ (так что период по φ составляет $c\lambda$).

[1]) В линейной теории разд. 3.9 величина I равна UW, где U — групповая скорость.

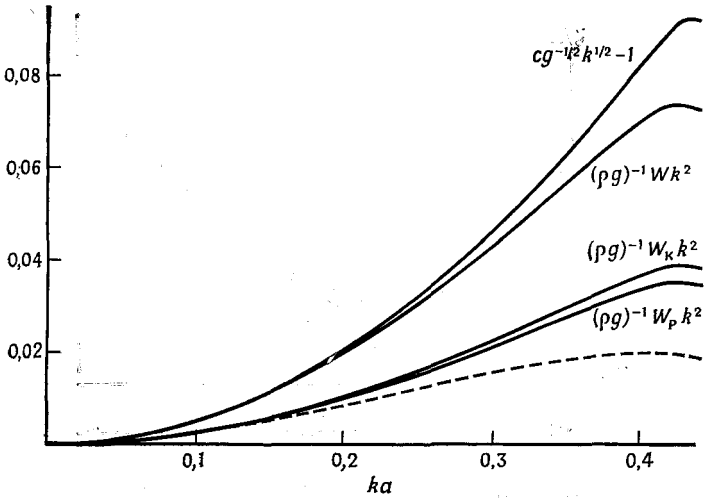

Рис. 113. Периодические гравитационные волны большой амплитуды на глубокой воде. Сплошные линии — значения скорости волны c, энергии волны W и ее кинетической и потенциальной составляющих W_K и W_P для волн длины $2\pi/k$ и меняющейся амплитуды a (определенной по формуле (49)). Штриховая линия — см. ниже соотношение (76).

Расчеты, показывающие, как эти волны меняются с амплитудой, определяемой выражением

$$a = \frac{1}{2}(\zeta_{\text{crest}} - \zeta_{\text{trough}}), \tag{49}$$

связаны с очень сложным вычислением коэффициентов рядов Фурье и применением хитроумных высокоточных методов ускоренного суммирования рядов. Мы дадим лишь конечный результат.

Существование волн возможно для всех значений a вплоть до максимального значения

$$a_{\max} = 0{,}0706\lambda. \tag{50}$$

Скорость волны меняется от значения (43), даваемого линейной теорией, до величины, лишь в 1,092 раза большей при $a = a_{\max}$ (рис. 113). Волновой профиль остается симметричным относительно гребня, но все больше отклоняется от синусоидального по мере возрастания a до $a_{\max}$ (рис. 114). В пределе $a \to a_{\max}$ верхушка гребня принимает вид угла, величина которого равна 120°. В вершине этого угла вода неподвижна относительно гребня, причем квадрат ее скорости линейно возрастает с рас-

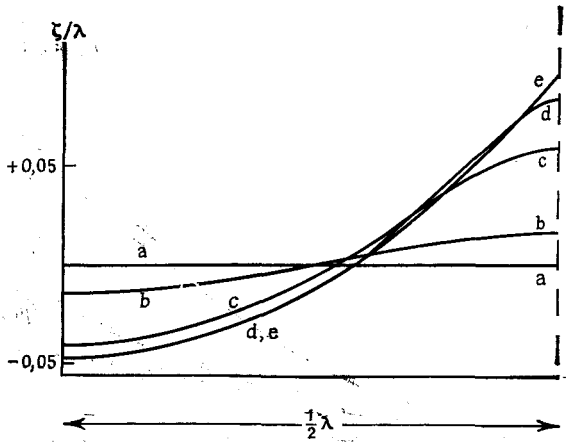

Рис. 114. Волновые профили периодической гравитационной волны с амплитудой a на глубокой воде. В используемом масштабе все вертикальные размеры увеличены по сравнению с горизонтальными в 2 раза. Штриховой линией отмечена плоскость симметрии на каждом гребне. a — невозмущенная поверхность воды; b — волновой профиль для $a = 0{,}015\ \lambda$; c — волновой профиль для $a = 0{,}050\ \lambda$; d — волновой профиль для $a = 0{,}065\ \lambda$; e — волновой профиль для максимальной амплитуды $a = 0{,}0706\ \lambda$.

стоянием от вершины таким образом, чтобы могло удовлетворяться соотношение (46).

На рис. 113 изображены графики зависимостей от ka безразмерных форм энергии волны на единицу площади W

$$(\rho g)^{-1} W k^2 = (\rho g)^{-1} W_K k^2 + (\rho g)^{-1} W_P k^2 \qquad (51)$$

и ее составляющих кинетической и потенциальной энергий W_K и W_P. Здесь, как обычно, $k = 2\pi/\lambda$, так что $ka_{max} = 0{,}444$. Мы видим, что волны обладают не только максимальной амплитудой, но и максимальной энергией (этот максимум достигается в действительности при немного меньшей амплитуде, когда $ka = 0{,}429$). При энергиях выше этого значения начинают действовать дополнительные механизмы диссипации энергии, характеризуемые появлением пены («барашков») вследствие захвата воздуха водой.

Вместо того чтобы исследовать это разрушение целостности поверхности воды при превышении плотностью энергии волн определенного значения, мы используем свойства, на которые указывают рис. 113 и 114, чтобы предложить некоторую общую теорию. Эта теория применима к любой консервативной системе,

допускающей однонаправленное распространение, при котором периодические волны могут существовать для любых значений волнового числа из некоторого заданного интервала (здесь $\lambda > 0{,}1$ м, чтобы можно было пренебречь поверхностным натяжением) и для любой амплитуды из другого заданного интервала (здесь $0 < a < a_{\max}$).

Рис. 113 показывает, что хотя в линейной теории кинетическая и потенциальная энергии W_K и W_P на единицу площади с необходимостью равны, нелинейные эффекты заставляют их тем не менее отличаться друг от друга. Разность

$$\mathscr{L} = W_K - W_P, \tag{52}$$

важность которой, как могло бы показаться на основании рис. 113, незначительна, дает ключ к более широкому пониманию нелинейных эффектов в диспергирующих системах. В формуле (52) рукописное $\mathscr{L}$ используется для обозначения *плотности лагранжиана*. В курсах по механике показывается, что свойства любой консервативной механической системы могут быть целиком описаны с помощью *уравнений Лагранжа* через лагранжиан L. Он по определению есть разность кинетической и потенциальной энергий системы, рассматриваемая как функция ее обобщенных координат q_n и их производных по времени $\dot{q}_n$ (обобщенных скоростей). Принцип Гамильтона устанавливает, что уравнения Лагранжа эквивалентны вариационному принципу, а именно: интеграл по времени от лагранжиана

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt, \tag{53}$$

стационарен при любых малых вариациях обобщенных координат, рассматриваемых как функции времени, если их вариации на концах t_1 и t_2 временно́го интервала равны нулю.

Мы кратко опишем распространение этой теории на волновое движение в консервативной системе. Мы ограничимся исследованием одномерного распространения в пространственно однородной системе, хотя теория легко обобщается и на случай распространения в двух или трех измерениях, а также на системы, свойства которых в масштабе длины волны меняются плавно.

Для описания системы волн мы будем использовать дискретные обобщенные координаты q_n, которые, однако, являются теперь функциями *как* времени t, *так и* расстояния x в направлении распространения. Лагранжиан

$$L = L(q_n, \partial q_n/\partial t, \partial q_n/\partial x) = L(q_n, \dot{q}_n, q_n') \tag{54}$$

определяется теперь как разность между кинетической энергией и потенциальной энергией, *отнесенная к единице длины*. Он зависит не только от q_n и их производных по времени $\dot{q}_n$, но также и от q_n' — их производных по пространственной переменной.

Как и в классической механике, потенциальная энергия не должна зависеть от обобщенных *скоростей* $\dot{q}_n$, тогда как кинетическая энергия является однородной функцией второго порядка от этих скоростей. Это означает, что кинетическая энергия на единицу длины всегда может быть записана в виде

$$\frac{1}{2}\dot{q}_n\,\partial L/\partial\dot{q}_n. \tag{55}$$

Теперь принцип Гамильтона требует, чтобы интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} L\,dx \tag{56}$$

был стационарен при малых вариациях $q_n(t, x)$, обращающихся в нуль в граничных точках $t = t_1$, t_2 и $x = x_1$, x_2. Так как здесь L — лагранжиан на единицу длины, то это выражение, как и выражение (53), является интегралом по времени от лагранжиана.

Для применения теории к исследованию периодических волн иногда бывает удобно взять интеграл (56) по одному периоду и по одной длине волны. Можно показать, что в этом случае вариационный принцип продолжает оставаться справедливым, если на вариации q_n просто наложить требование быть периодическими с этими же периодом и длиной волны. Таким образом, из всех волновых движений с данными периодом и длиной волны в действительности осуществляется движение с таким волновым профилем, для которого интеграл (56), взятый по длине волны, стационарен. Это то же самое, что сказать: *средняя* плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ (усреднение проводится по длине волны) стационарна.

В чисто линейной теории это может означать только то, что $\mathscr{L}$ равно нулю. Действительно, все энергии являются в линейной теории в точности квадратичными функциями от всех параметров возмущения. Следовательно, если каждое из q_n заменить на $(1+\varepsilon)\,q_n$ (особенно простая малая вариация), то $\mathscr{L}$ заменится на $(1+\varepsilon)^2\mathscr{L}$. Это изменение может быть нулевым только тогда, когда $\mathscr{L}$ сама равно нулю; это знакомый по линейной теории результат: средние значения потенциальной и кинетической энергий равны.

Заметим, что нелинейная теория может предсказать единственную волну с данной длиной λ и периодом λ/c. Например,

рис. 113 означает, что при заданной λ выбор c (в определенных пределах) фиксирует амплитуду, а следовательно, и форму волны. Однако энергии в нелинейной теории могут зависеть и от вторых, и от более высоких степеней координат. В соответствии с этим требование равенства нулю стационарного значения $\mathscr{L}$ отсутствует.

Для периодической волны все обобщенные координаты должны иметь вид

$$q_n = f_n(\omega t - kx), \tag{57}$$

где, как обычно,

$$k = 2\pi/\lambda, \qquad \omega = 2\pi c/\lambda. \tag{58}$$

Тогда величина, стационарная для реального волнового профиля, может быть записана в виде

$$\mathscr{L}(\omega, k) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} L(f_n(\alpha), \omega f_n'(\alpha), -k f_n'(\alpha))\, d\alpha, \tag{59}$$

т. е. как среднее от лагранжиана (54) по фазе $\alpha = \omega t - kx$.

Теперь мы можем определить величину, которая имеет большое значение в теории диспергирующих волн — плотность действия

$$\mathscr{A} = \partial\mathscr{L}/\partial\omega. \tag{60}$$

Она является скоростью изменения плотности лагранжиана с частотой при постоянном волновом числе. Когда величина (60) вычисляется с использованием выражения (59) для $\mathscr{L}$, нет необходимости учитывать малые изменения волнового профиля $f_n(\alpha)$, которые сопровождают малые изменения ω, так как $\mathscr{L}$ стационарна по отношению к любым малым возмущениям волнового профиля! Таким образом, мы можем вычислить величину (60) для фиксированной $f_n(\alpha)$ по формуле

$$\partial\mathscr{L}/\partial\omega = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f_n'(\alpha)\, (\partial L/\partial \dot{q}_n)\, d\alpha. \tag{61}$$

В силу этого $\omega\partial\mathscr{L}/\partial\omega$ становится средним от $\dot{q}_n \partial L/\partial \dot{q}_n$, что по формуле (55) равно $2W_K$ — удвоенной средней кинетической энергии на единицу длины. Плотность действия $\mathscr{A}$ может быть соответственно записана в виде

$$\mathscr{A} = \partial\mathscr{L}/\partial\omega = 2W_K\omega^{-1}. \tag{62}$$

И только лишь для линейных систем это выражение принимает вид $W\omega^{-1}$ (плотность полной энергии волны, деленная на частоту), указанный в разд. 4.6.

Когда описанная выше теория применяется к случаю волн с длинными гребнями на воде, все энергии определяются на единицу длины гребня, так что введенные выше энергии, отнесенные к единице длины, становятся плотностями энергии на единицу площади горизонтальной поверхности. Тогда для волн с данной длиной равенство (62) количественно определяет, насколько возрастает избыток $\mathscr{L}$ кинетической энергии над потенциальной, когда ω увеличивается по сравнению с ее значением $(qk)^{1/2}$, даваемым линейной теорией:

$$W_{\text{К}} - W_{\text{П}} = \mathscr{L} = \int_{(gk)^{1/2}}^{\omega} 2W_{\text{К}}\omega^{-1}\,d\omega. \tag{63}$$

Правильность вычислений, на основе которых построены рис. 113 и 114, была подтверждена тем обстоятельством, что результаты удовлетворяли соотношению (63) с точностью до большого числа значащих цифр.

Одно из преимуществ линейной теории состоит в том, что она приводит к полезным тождествам, подобным (63); позже мы найдем также выражение для потока энергии волны I. Однако еще большее преимущество — то, что она позволяет расширить саму теорию дисперсионных процессов так, чтобы включить в нее нелинейные эффекты.

Вкратце покажем, как это делается, для случая простого исследования (разд. 3.6) развития во времени протяженной группы волн, распространяющихся в одном измерении, когда свойства волны (волновое число и амплитуда) меняются очень плавно в масштабе длины волны. В нелинейной теории по-прежнему предполагается, что можно, как и в разд. 3.6, определить локальную фазу α таким образом, чтобы она плавно возрастала между последовательными гребнями на 2π (хотя *волновой профиль* может быть совершенно отличным от синусоидального). Тогда, как и прежде, определения ω и k дают

$$\omega = \partial\alpha/\partial t, \quad k = -\partial\alpha/\partial x. \tag{64}$$

Теперь рассмотрим тот самый интеграл (56), к которому применялся принцип Гамильтона, но выберем t_1, t_2, x_1 и x_2 так, что интегрирование производится по длительному промежутку времени и по всей группе волн. Предположим, что везде, где параметры в масштабе длины волны меняются медленно, волна очень похожа на периодическую волну, в которой локальные значения ω и k определяются по формулам (64). Тогда в выражении (56), в котором лагранжиан L интегрируется по очень большому числу длин волн и по очень большому числу периодов, его можно заменить в каждой точке соответствующим

средним по длине волны или по периоду значением, а именно $\mathscr{L}(\omega, k)$.

Тогда интеграл (56) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{x_1}^{x_2} \mathscr{L}(\partial\alpha/\partial t, -\partial\alpha/\partial x)\, dx. \tag{65}$$

Интеграл (65) стационарен для обращающихся в нуль в граничных точках вариаций α тогда и только тогда, когда выполняется условие Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k}\right). \tag{66}$$

Уравнение (66) — это фундаментальное уравнение Уизема для одномерной нелинейной дисперсии. Его можно самым непосредственным образом толковать как *закон сохранения волнового действия*

$$\partial \mathscr{A}/\partial t = -\partial \mathscr{B}/\partial x, \tag{67}$$

выразив входящие в него величины через плотность волнового действия (60) и поток волнового действия:

$$\mathscr{B} = -\partial \mathscr{L}/\partial k. \tag{68}$$

С другой стороны, оно может быть использовано для получения закона сохранения энергии

$$\partial W/\partial t = -\partial I/\partial x, \tag{69}$$

где поток энергии имеет вид

$$I = -\omega \partial \mathscr{L}/dk. \tag{70}$$

Это выражение получается потому, что формула (62) дает для плотности полной энергии волны $2W_{\text{К}} - \mathscr{L}$ соотношение

$$W = \omega \partial \mathscr{L}/\partial \omega - \mathscr{L}, \tag{71}$$

так что в силу равенств (66), (64) и (70)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[\omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}\right] - \left[\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega} + \frac{\partial k}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k}\right] =$$
$$= \omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k} = -\frac{\partial I}{\partial x}. \tag{72}$$

В частном случае гравитационных волн на глубокой воде эти уравнения для плотности и потока волнового действия и энергии упрощаются, потому что $(\rho g)^{-1}\mathscr{L}k^2$ является, как показывает рис. 113, функцией от ω^2/gk. Из этого следует, что

$$k\,\partial \mathscr{L}/\partial k + \frac{1}{2}\omega\,\partial \mathscr{L}/\partial \omega = -2\mathscr{L}, \tag{73}$$

а это значит, например, что поток энергии I может быть выражен через приведенные на рис. 113 величины в виде

$$c\left(2\mathscr{L}+\frac{1}{2}\,\omega\,\partial\mathscr{L}/\partial\omega\right)=c\,(2\mathscr{L}+W_{\text{К}})=c\,(3W_{\text{К}}-2W_{\text{Р}}). \quad (74)$$

Кроме того, поток энерии (45), переносимый назад по отношению к гребням, равен

$$cW-I=c\,(3W_{\text{Р}}-2W_{\text{К}}). \quad (75)$$

Эта формула использовалась для того, чтобы изобразить на рис. 113 (штриховая линия) в безразмерной форме

$$gP_{\text{w}}/\rho bV^5=g\,(3W_{\text{Р}}-2W_{\text{К}})\,/\rho c^4 \quad (76)$$

— волнообразующую мощность цилиндра длины b, движущегося со скоростью V в перпендикулярном его образующим направлении и создающего волны, имеющие скорость $c=V$, без диссипации энергии за счет вспенивания. Здесь максимальное значение 0,0200 отвечает равному $0{,}02\rho bV^5/g$ критическому значению волнообразующей мощности (или волнового сопротивления D_{w}, равного $0{,}02\ \rho bV^4/g$), выше которого должно существовать вспенивание волн вблизи цилиндра.

Соотношение между волновым действием и энергией для волн, распространяющихся по движущейся со скоростью V жидкости, будет несколько иным. Теперь лагранжиан движения, происходящего относительно невозмущенного течения, зависит от обобщенных координат, которые в периодической волне можно выразить через x (смещение по отношению к невозмущенному течению) формулой

$$q_n=f_n\,(\omega t-k\,(Vt+x)). \quad (77)$$

Это дает

$$\dot{q}_n=(\omega-kV)\,f_n'=\omega_{\text{г}}f_n', \quad (78)$$

где $\omega_{\text{г}}$ — относительная частота, определенная в разд. 4.6. Соответственно в выражении для плотности действия (61) получаем, что $\omega_{\text{г}}\partial\mathscr{L}/\partial\omega$ равно среднему значению $\dot{q}_n\partial L/\partial\dot{q}_n$, которое есть $2W_{\text{К}}$, т. е. удвоенная кинетическая энергия волнового движения относительно невозмущенного течения. Для особого случая бесконечно малых волн она равна $W_{\text{г}}$, что дает для плотности действия формулу

$$\mathscr{A}=W_{\text{г}}/\omega_{\text{г}}. \quad (79)$$

Тогда можно показать, что фундаментальный закон сохранения волнового действия (66) для систем, свойства которых плавно

меняются в масштабах длины волны, имеет интерпретацию, использованную в разд. 4.6.

Однако даже если никакого невозмущенного течения нет, закон сохранения волнового действия ясно показывает, каково влияние нелинейности на дисперсию волн. Здесь мы приведем только одно такое указание. Раскрывая значения производных в уравнении (66) для случая, когда ω и k удовлетворяют соотношениям (64), мы получаем уравнение второго порядка для фазы α

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \omega^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \omega\, \partial k}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t\, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial k^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} = 0, \tag{80}$$

коэффициенты которого являются функциями от первых производных (64). Среди подходов к этому хорошо изученному уравнению мы отметим следующий.

Рассмотрим волны, созданные колеблющимся с определенной частотой ω_0 осциллятором, находящимся в точке $x = 0$. Предположим, что амплитуда его колебаний отличается от большого постоянного значения на очень малую величину, которая периодически изменяется с частотой δ, намного меньшей, чем ω_0. Это дает условия на осцилляторе — при $x = 0$ — в виде

$$\alpha = \omega_0 t, \qquad \partial\alpha/\partial x = -k_0 + \varepsilon \exp(it\delta), \tag{81}$$

где частота $\partial\alpha/\partial t$ принимает постоянное значение ω_0, тогда как амплитуда, а следовательно, и волновое число — $\partial\alpha/\partial x$, модулируются с частотой δ.

Отклонение фазы α от линейного значения $\omega_0 t - k_0 x$ с точностью до первого порядка по ε должно удовлетворять уравнению (80), коэффициенты которого заменяются на постоянные $\mathscr{L}_{\omega\omega 0}$, $\mathscr{L}_{\omega k 0}$ и $\mathscr{L}_{kk0}$, равные значениям трех вторых производных от $\mathscr{L}$ при $\omega = \omega_0$ и $k = k_0$. Решением является линейная комбинация выражений

$$\exp[i(t\delta - x\varkappa)], \tag{82}$$

где $\varkappa$ — один из корней квадратного уравнения

$$\mathscr{L}_{kk0}\varkappa^2 + 2\mathscr{L}_{\omega k0}\varkappa\delta + \mathscr{L}_{\omega\omega 0}\delta^2 = 0. \tag{83}$$

Эти корни могут быть действительными или мнимыми. Их вычисление на базе приведенных выше данных показывает, что для гравитационных волн на глубокой воде они действительны при $a > 0{,}054\ \lambda$ и мнимы при $a < 0{,}054\ \lambda$.

Когда они являются мнимыми, комбинация решений вида (82), которая удовлетворяет граничному условию (81), имеет вид

$$\alpha = \omega_0 t - k_0 x + (\beta^{-1} \operatorname{sh} \beta x)\,\varepsilon \exp[i(t - xU_0^{-1})\delta]. \tag{84}$$

Здесь U_0 — «эффективная групповая скорость» (скорость распространения амплитудной модуляции), даваемая формулой

$$U_0 = -\mathscr{L}_{kk0}/\mathscr{L}_{\omega k0}, \tag{85}$$

а β — скорость экспоненциального усиления модуляции с расстоянием, даваемая формулой

$$\beta/\delta = (\mathscr{L}_{\omega\omega 0}\mathscr{L}_{kk0} - \mathscr{L}^2_{\omega k0})^{1/2}/\mathscr{L}_{kk0}. \tag{86}$$

Наличие гиперболического синуса в формуле (84) указывает на то, что периодическая волна с конечной амплитудой $a < 0{,}054\ \lambda$ на глубокой воде слабо *неустойчива* в том смысле, что чем дальше продвигается волна, тем резче выраженной становится ее медленная модуляция.

Неустойчивость исчезает при амплитудах выше $a = 0{,}054\lambda$. Когда корни уравнения (83) являются действительными, фаза (84) все еще остается решением задачи, но величина, определенная равенством (86), становится чисто мнимым числом. Тогда модуляция распадается на две модуляции с постоянными и равными интенсивностями, которые распространяются с двумя различными «эффективными групповыми скоростями» U_1 и U_2, определяемыми соотношениями

$$U_1^{-1}\delta = U_0^{-1}\delta + |\beta|, \quad U_2^{-1}\delta = U_0^{-1}\delta - |\beta|. \tag{87}$$

В своих ранних работах по вариационному методу Уизем указал, что одним из влияний нелинейности на дисперсию может быть такое «расщепление групповой скорости».

Как показывает рис. 115, в интервале амплитуд $a < 0{,}054\lambda$ эффективная групповая скорость U_0 является медленно возрастающей функцией, лишь немного превышающей значение $0{,}5\omega_0/k_0$, предсказываемое линейной теорией; параметр $2\pi U_0\beta/\delta$ возрастает до максимального значения 0,7 и потом спадает до нуля. Этот параметр есть логарифм отношения глубины модуляции для точек, соответствующих последовательным максимумам амплитуды волны, расстояние между которыми равно $2\pi U_0/\delta$. Таким образом, величина 0,7 означает, что глубина модуляции, связанная с определенным (движущимся) пиком амплитуды, удвоится приблизительно к тому моменту времени, когда осциллятор породит следующий пик амплитуды... Интересно, что при амплитуде, превышающей $a = 0{,}054\lambda$, одна модуляция распространяется с эффективной групповой скоростью U_2, близкой к значению, даваемому линейной теорией, в то время как другая малая модуляция этой основной волны, обладающей значительной амплитудой, перемещается вперед с существенно большей эффективной групповой скоростью U_1.

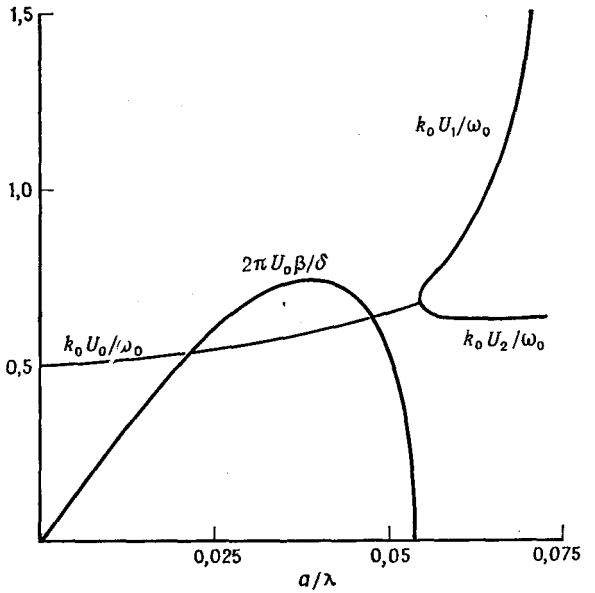

Рис. 115. Волны, порожденные осциллятором, колеблющимся с фиксированной частотой ω_0 и с амплитудой, отклоняющейся от большого постоянного значения на малую величину, которая изменяется периодически с частотой δ, намного меньшей ω_0. Построен график скорости экспоненциального усиления модуляции β с расстоянием вместе с эффективной групповой скоростью U_0 как функции амплитуды a. При амплитуде, превышающей $a = 0{,}054\,\lambda$, эффективная групповая скорость расщепляется на две (U_1 и U_2), тогда как β спадает до нуля.

Был проведен ряд более сложных расчетов, связанных со слабой неустойчивостью волн умеренной амплитуды на глубокой воде. Когда глубина модуляции увеличивалась настолько, что коэффициенты в уравнении (80) менялись существенным образом, эти расчеты указывали на измененную форму модуляции. Грубо говоря, гребни тех волн, амплитуда которых максимальна, движутся вперед быстрее остальных, что уменьшает длину волны перед фронтом амплитудного пика и увеличивает ее за ним. Тогда энергия переносится вперед быстрее за фронтом и медленнее перед ним, что приводит к сильно локализованному усилению амплитудного пика. За конечное время он приобретает заостренную форму, и тогда предположения теории (о плавно меняющейся амплитуде) нарушаются. На практике это ограничивает рост амплитудного пика: ряд расче-

тов предсказывает, что он возрастает от своего начального значения на 24—57%.

Рост медленной модуляции волн умеренной амплитуды был впервые экспериментально продемонстрирован в работе Бенджамена и Фейра. Было обнаружено, что на поздних стадиях развития (после достижения гребнем заостренной формы) наблюдаются сложные изменения кривой модуляции. Напротив, те модуляции, которые были недостаточно плавными, *не* растут. В современных, улучшенных теориях дисперсии в плотность лагранжиана (52) вводится дополнительный член, пропорциональный квадрату от *градиента* амплитуды, и они дают намного лучшее согласие с этим и аналогичными экспериментами.

Уизем развил также вариационный метод для волн на мелкой воде. В нем потенциал скорости может содержать медленно меняющуюся апериодическую часть Ф, соответствующую среднему значению, градиент которой $\partial\Phi/\partial x = s$ представляет собой среднее значение скорости горизонтального течения, создаваемого волнами. Усредненная плотность лагранжиана принимает вид

$$\mathscr{L}\ (\omega,\ k,\ \eta,\ s), \quad \text{где} \quad \eta = -\partial\Phi/\partial t, \tag{88}$$

что приводит к системе из двух уравнений Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \omega}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial s}\right). \tag{89}$$

Неустойчивость волн умеренной амплитуды обнаруживалась тогда и только тогда, когда отношение длины волны к глубине λ/h было меньше 4,6.

Перейдем теперь к волнам, для которых значения параметра λ/h лежат в диапазоне (примерно) от 10 до 20; иногда их называют «весьма длинными волнами». Так как дисперсия этих волн мала, хотя ей еще нельзя полностью пренебречь, то в этом случае применима нелинейная теория распространения длинных волн, описанная в гл. 2, если внести в нее сравнительно небольшие изменения.

Для таких «весьма длинных волн» (с $kh < 0{,}63$) хорошей аппроксимацией взятого из линейной теории значения скорости волны

$$c = (gk^{-1}\operatorname{th} kh)^{1/2} \tag{90}$$

служат два члена его тейлоровского разложения, т. е. формула

$$c = c_0\left(1 - \frac{1}{6}\,k^2h^2\right), \tag{91}$$

где $c_0 = (gh)^{1/2}$. Для волновых систем с небольшой дисперсией отклонение скорости волны от постоянного значения c_0 давае-

мого линейной теорией, часто описывается таким членом с k^2. Это означает, что волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x, близки к решениям уравнения

$$\partial v/\partial t + c_0 \partial v/\partial x + \sigma \partial^3 v/\partial x^3 = 0, \tag{92}$$

здесь σ — постоянная, принимающая для «весьма длинных» волн значение

$$\sigma = \frac{1}{6} c_0 h^2. \tag{93}$$

Эти замечания подсказывают, как нелинейную теорию одномерного распространения волн (гл. 2) можно видоизменить для изучения систем с малой дисперсией, такой, что соответствующая линейной теории скорость волны равна $c_0 - \sigma k^2$ при волновом числе k. В гл. 2 приращение скорости волны, обусловленное нелинейностью, обозначалось через v, и для описания недиспергирующих нелинейных систем использовалось уравнение

$$\partial v/\partial t + (c_0 + v)\, \partial v/\partial x = 0. \tag{94}$$

(Для длинных волн $v = (3/2)\, u$, где u — скорость жидкости.) Объединив идеи, выражаемые уравнениями (92) и (94), чтобы учесть малые изменения скорости волны, вызванные *как* нелинейными, *так и* дисперсионными эффектами, получим знаменитое уравнение Кортевега — де Фриза

$$\partial v/\partial t + (c_0 + v)\, \partial v/\partial x + \sigma \partial^3 v/\partial x^3 = 0, \tag{95}$$

которое в конце девятнадцатого века было предложено этими авторами для изучения весьма длинных волн. С тех пор оно применялось ко многим нелинейным волновым системам с малой дисперсией. Иногда используется координата $X = x - c_0 t$, чтобы перейти в систему отсчета, движущуюся с основной скоростью волны c_0 (гл. 2). Тогда уравнение принимает вид

$$\partial v/\partial t + v \partial v/\partial X + \sigma \partial^3 v/\partial X^3 = 0. \tag{96}$$

Хотя теория решений уравнения Кортевега — де Фриза (96) очень обширна, она изложена в настоящей книге менее подробно, чем нелинейная теория волн на глубокой воде; отчасти это вызвано тем, что уравнение, в котором игнорируется диссипация, сравнительно менее пригодно для случая мелкой воды, когда существенно трение о дно. Здесь в центре внимания будут наиболее важные изменения выводов гл. 2, связанные с наличием дисперсии.

В уравнении (96) существенность нелинейного члена $v \partial v/\partial X$ по сравнению с дисперсионным членом $\sigma \partial^3 v/\partial X^3$ зависит от безразмерного параметра $v_1 \lambda^2/\sigma$, где v_1 — наибольшее прира-

щение скорости волны, а λ — характерное значение длины волны. В силу формулы (93) этот параметр пропорционален величине

$$a\lambda^2/h^3, \tag{97}$$

поскольку v_1/c_0 пропорционально отношению амплитуды волны a (определенной так же, как в формуле (49)) к средней глубине h.

Решения уравнения (96) показывают, что когда этот параметр $a\lambda^2/h^3$ достаточно велик (больше, чем примерно 16), то сдвиговое искажение волнового профиля, обусловленное нелинейностью, может прогрессивно увеличивать крутизну переднего фронта волны (фаза сжатия) в точности как описано в гл. 2. Обсуждение возникающего в результате гидравлического прыжка будет продолжено ниже.

Напротив, для значений $a\lambda^2/h^3$, меньших 16 (например, при $\lambda/h = 12$ и $a < (1/9)\,h$), оказывается возможным установление равновесия между дисперсией и процессом увеличения крутизны волнового профиля. Действительно, при указанных условиях снова могут существовать периодические волны неизменной формы, что объясняется равновесием между этими двумя эффектами.

Грубо можно представить себе осуществление такого равновесия следующим образом. Если «основная» (самая низкочастотная) фурье-компонента волнового профиля есть $a_1 \cos kx$, то первая гармоника $a_1 \cos 2kx$ распространяется благодаря дисперсии более медленно. Очевидно, что ее отставание по фазе соответствует появлению отрицательной гармоники $\sin 2kx$. С другой стороны, легко показать, что сдвиговому искажению основной фурье-компоненты соответствует появление положительной гармоники $\sin 2kx$. Это наводит на мысль, что возможно взаимное сокращение появившихся синусоидальных гармоник, а это приводит к решению типа бегущей волны с неизменным волновым профилем.

Более строго, мы ищем такое решение с помощью подстановки

$$\partial v/\partial t = -v_0 \partial v/\partial X \tag{98}$$

в уравнение (96). Здесь v_0 является скоростью волны в системе координат (X, t); следовательно, скорость волны в исходной системе координат (x, t) равна $c_0 + v_0$. Решения полученного обыкновенного дифференциального уравнения легко находятся. Их совокупность состоит из отдельного бесконечного семейства решений типа периодических волн и одного предельного решения. Решения типа периодических волн называются кноидальными волнами, потому что они имеют форму квадрата эллиптической функции Якоби cn; это обстоятельство было

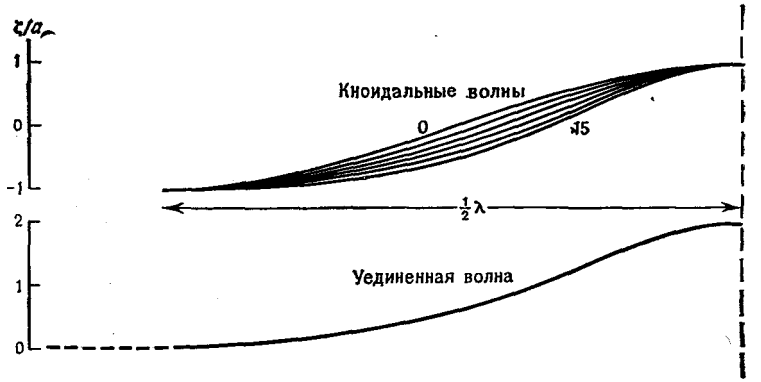

Рис. 116. Профили кноидальных волн с длиной λ и амплитудой a на воде глубины h для шести значений $a\lambda^2/h^3$: 0 (синусоидальная волна), 3, 6, 9, 12 и 15. Снизу таким же образом нарисована уединенная волна, когда ее эффективная длина λ определяется так же, как в равенстве (100).

полезным, когда они впервые были вычислены, хотя и не существенно при наличии современной вычислительной техники.

Профили кноидальных волн изображены на рис. 116. Для малых значений $a\lambda^2/h^3$ нелинейность вызывает малые отклонения от синусоидальной формы. Когда $a\lambda^2/h^3$ увеличивается, в начальной стадии хорошо видна первая гармоника (когда гребни становятся острее, а впадины глубже), а за ней следуют гармоники более высокого порядка. При $a\lambda^2/h^3 = 15$ периодический цуг волн почти вырождается в последовательность изолированных «горбов», разделенных плоской водной поверхностью.

Благодаря этому факту кажется менее удивительным (чем оно могло бы) существование знаменитого предельного решения уравнения Кортевега — де Фриза (96):

$$v = 3v_0 \left\{ \operatorname{ch} \left[\frac{1}{2} (v_0/\sigma)^{1/2} (X - v_0 t) \right] \right\}^{-2}. \qquad (99)$$

Оно описывает не периодическую волну, а распространение одного изолированного «горба» неизменной формы. В первой половине девятнадцатого века Скотт Рассел экспериментально обнаружил, что такая «уединенная волна» при надлежащим образом подобранных длине волны, амплитуде и глубине воды может распространяться практически без изменений (кроме очень медленного затухания, вызванного трением о дно). Позднее Релей нашел решение (99), прежде чем оно вошло в общую

приближенную теорию весьма длинных волн, принадлежащую Кортевегу и де Фризу.

Можно утверждать, что уединенная волна обладает длиной λ, имея в виду не пространственный период, а длину промежутка, на котором подъем поверхности воды превосходит, скажем, 3% своего максимального значения. В этом смысле

$$\lambda = 4\,(\sigma/v_0)^{1/2}\mathrm{ar\,ch}\,[(0{,}03)^{-1/2}], \quad \text{что дает} \quad a\lambda^2/h^3 = 16. \tag{100}$$

На рис. 116 уединенная волна (нижняя кривая) изображена с использованием этого значения длины волны. По виду она похожа на предельный случай кноидальных волновых профилей.

Таким образом, влияние дисперсии может противостоять увеличению крутизны волнового профиля, пока параметр $a\lambda^2/h^3$ не достигнет предельного значения (100). Если он выше этого предельного значения, волновой профиль не может быть неизменным. На практике передний склон волны становится, как описано в гл. 2, все более крутым, образуя гидравлический прыжок.

Теперь мы наконец можем более исчерпывающе рассмотреть гидравлический прыжок, чем в разд. 2.12, и в особенности необходимость с определенной скоростью избавляться от энергии в процессе его распространения. Для прыжка, в котором глубина воды увеличивается от постоянного значения h_0 до другого значения h_1, требуемая скорость потери энергии на единицу ширины составляет

$$\rho_0 U g\,(h_1 - h_0)^3/(4h_1). \tag{101}$$

Здесь

$$U = [gh_1\,(h_1 + h_0)/(2h_0)]^{1/2} \tag{102}$$

есть скорость распространения прыжка в спокойную воду.

Гидравлический прыжок, интенсивность которого $(h_1 - h_0)/h_0$ меньше, чем приблизительно 0,3, сопровождается лишь незначительным вспениванием (если оно вообще возникает), но за ним следует цуг периодических волн со стационарными относительно прыжка гребнями. Мы исследуем их сначала с помощью линейной, а потом нелинейной теории.

Вода, следующая за прыжком, движется относительно него со скоростью, равной в силу закона сохранения массы Uh_0/h_1. По линейной теории эта величина должна равняться скорости волны, т. е.

$$Uh_0/h_1 = (gk^{-1}\,\mathrm{th}\,kh_1)^{1/2}, \quad \text{где} \quad k = 2\pi\lambda, \tag{103}$$

если λ — длина находящихся позади прыжка волн со стационарными относительно него гребнями. Скорость оттока их энергии назад по отношению к гребням, т. е. отнесенную к единице ширины величину (45), можно приравнять требуемой скорости потери энергии (101). По линейной теории это дает для волн с амплитудой a соотношение

$$\rho_0 U g (h_1 - h_0)^3/(4h_1) = \frac{1}{4}\rho_0 g a^2 (U h_0/h_1)[1 - 2kh_1 (\operatorname{sh} 2kh_1)^{-1}]. \quad (104)$$

Численное решение уравнений (102) — (104) дает результат, который с точностью до 2 значащих цифр имеет вид

$$kh_1 = 3[(h_1 - h_0)/(2h_0)]^{1/2}, \quad a/h_1 = 3^{-1/2}(h_1 - h_0)/h_0. \quad (105)$$

Таким образом, предсказывается, что амплитуда a составляет примерно 0,6 высоты прыжка $h_1 - h_0$.

Среднее значение наблюдаемых амплитуд близко к 0,6 $(h_1 - h_0)$, но их индивидуальные значения распределяются довольно случайным образом от 0,3 $(h_1 - h_0)$ до 0,9 $(h_1 - h_0)$. Думается, что эта изменчивость нуждается в объяснении, так как измерения не слишком трудны.

Действительно, результаты (105) дают значение

$$a\lambda^2/h_1^3 = 8\pi^2/3^{5/2} = 5{,}1. \quad (106)$$

Рис. 116 показывает, что оно *недостаточно* мало, чтобы можно было пренебречь нелинейными эффектами. Таким образом, волны за прыжком должны быть кноидальными. Фактически наблюдается, что они имеют кноидальные волновые профили и их длина, скорость волны и амплитуда подчиняются соотношениям для кноидальных волн.

Довольно удивительно, что пересчет с использованием полной нелинейной теории кноидальных волн показывает, что скорость оттока энергии назад по отношению к гребням не может принимать *полное* значение (101) для какой-либо амплитуды волны. Однако она может принимать *любое меньшее* значение! Конкретно, значения $a/(h_1 - h_0)$, равные 0,6 (полученные согласно линейной теории или усредненным результатам измерений), соответствуют скорости оттока энергии, составляющей 0,8 ее требуемой потери. Следовательно, они соответствуют гидравлическому прыжку, в котором за счет действия вязкости или вспенивания рассеивается 20% требуемой потери энергии.

По этой нелинейной теории большой разброс наблюдаемых значений величины $a/(h_1 - h_0)$ от 0,3 до 0,9 в ундулярном прыжке соответствует большому разбросу значений потери энергии за счет вязкости и (или) вспенивания, встречающихся

при различных условиях эксперимента — от 75 до 5% требуемых полных потерь. Для еще более сильных прыжков вспенивание является интенсивным и отвечает за почти всю требуемую потерю энергии.

Гидравлические прыжки часто наблюдаются в ручьях как стационарные явления. Гидравлическая теория показывает, что стационарное течение, скорость которого превосходит скорость длинных волн, может замедляться до скорости, которая меньше скорости длинных волн, только разрывным образом — посредством гидравлического прыжка. Обычно это проявляется как вспенивание (см. рис. 49); однако ундулярный прыжок также может возникнуть, если начальный избыток скорости был незначителен.

В кратком обзоре теории весьма длинных волн в каналах, приведенном выше, не слишком подчеркивается важность уединенной волны, которая в *этом* контексте выглядит не более чем экспериментальной диковинкой, едва ли наблюдаемой в природе. В курсах по уравнению Кортевега — де Фриза показывается, однако, что для приложений, в которых диссипация отсутствует, решение (99), часто называемое «солитоном», может играть ключевую роль. Действительно, можно доказать, что произвольное начальное движение в конце концов распадается на «ансамбль солитонов»...

Для каждого упомянутого в этом эпилоге свойства поверхностных гравитационных волн существует соответствующее свойство внутренних волн. Амплитуда граничных волн между двумя жидкостями не может превышать определенного значения; ее дальнейший рост невозможен, так как начинается быстрая диссипация энергии из-за взаимного перемешивания двух жидкостей, аналогичного вспениванию. Для непрерывно стратифицированных жидкостей возможно установление равновесия между дисперсионными и нелинейными эффектами; в частности, были использованы мощные методы нелинейного анализа, чтобы доказать, что и в этом случае может существовать уединенная волна.

Больше того, гидравлический прыжок в стратифицированной жидкости может быть очень эффектным. Там, где поток холодного воздуха, стекающего с подветренной стороны горной цепи, развивает скорость, превосходящую скорость волн, длинных по сравнению с глубиной потока, его замедление может осуществляться в громадном скачке, подобном знаменитой боре (рис. 117).

В заключение отметим еще более сложную область теории нелинейной дисперсии, в которой развиваются исследования потенциально очень большой важности. Здесь рассматриваются

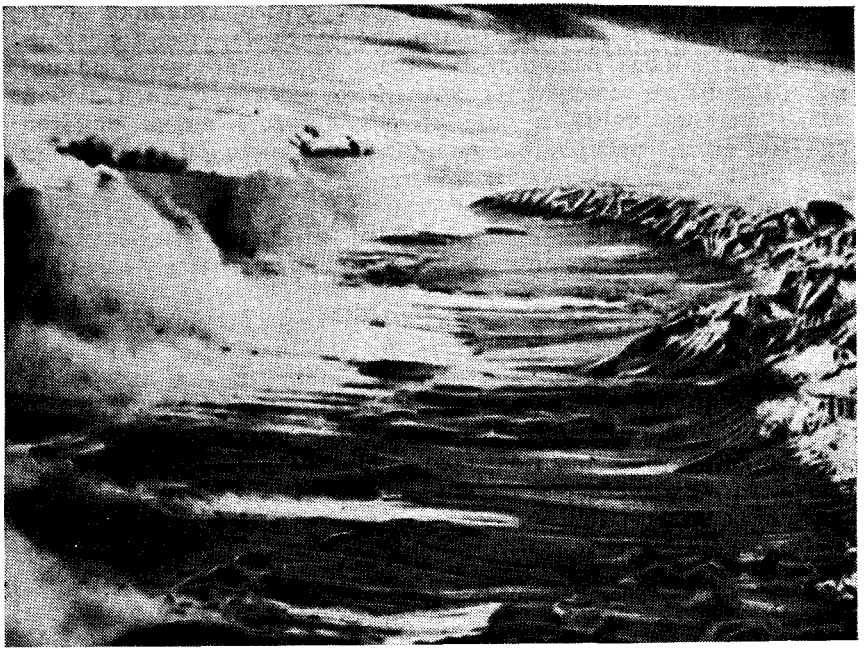

Рис. 117. Бора. Воздух, стекающий с горной цепи (здесь справа налево), приобретает большую скорость и затем внезапно замедляется подобно тому, как происходит в стационарном гидравлическом прыжке (видно в левой части фотографии). [Фотография Р. Саймонса из книги Р. С. Скорера «Облака мира».]

нелинейные процессы, благодаря которым спектр волновых чисел статистического ансамбля волн эволюционирует во времени.

Первоначально теория была развита для малых нелинейностей. При этом возможен обмен энергией между частями спектра, соответствующими волновым числам $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ из триады величин, которые вместе с соответствующими частотами ω_1, ω_2 и ω_3, даваемыми линейной теорией, удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0. \tag{107}$$

(Иногда рассматриваются и тетрады.)

Эта теория имеет много общего со статистической теорией турбулентности. Однако в одном отношении она менее сложна. Относительно простые статистические свойства, которыми обладает гауссово распределение, обеспечиваются центральной

предельной теоремой во всех случаях, когда случайная величина является суммой большого числа статистически независимых случайных величин. В случае диспергирующей волновой системы это следует из того обстоятельства, что в любой точке системы сигналы состоят из большого числа пакетов слабых волн, распространяющихся с различной групповой скоростью из самых разных точек.

Таким образом, хотя в статистической теории турбулентности остается нерешенной мучительная проблема «замыкания», связанная с негауссовой статистикой вихревых линий, движущихся с жидкостью, рациональное исследование статистики слабо взаимодействующих диспергирующих волн оказалось легче осуществимым. В частности, оно начинает проливать свет (в смысле количественных характеристик) и на спектр океанических волн, и на важный вопрос, который затрагивался в разд. 4.6: как в устойчиво стратифицированной жидкости достигается вертикальный перенос горизонтальной составляющей среднего количества движения при помощи статистического ансамбля внутренних волн, взаимодействующих друг с другом и со средним сдвиговым потоком?

Библиографические комментарии

Часть 1. Основная литература

Для того чтобы по-настоящему понять материал данной книги, желательно предварительное знакомство с четырьмя разделами механики и математики: основами общей механики, включая теорию колебаний; основами гидродинамики; элементами теории интегралов и рядов Фурье; элементарной теорией функций комплексного переменного.

Прежде всего мы приведем здесь основную литературу по указанным четырем областям науки, а затем и по другим вопросам, связанным с материалом данной книги. И хотя читатель сможет с успехом приступить к чтению данной книги и без знакомства со второй группой вопросов, он сразу же заметит, что книга содержит много утверждений, связанных с этими вопросами, и, возможно, захочет познакомиться с ними более детально.

Хорошим учебником по всем основным вопросам механики, рассматриваемым в настоящей книге, является монография

Гринвуд (Greenwood D.T.). Principles of dynamics.—Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.

В ней излагается общая линейная теория колебаний. Более элементарное изложение теории колебаний с указанием полезной аналогии между механическими и электрическими колебаниями, которая проводится в разд. 2.3 — 2.5, можно найти в книге

Джонс (Jones D.S.). Electrical and mechanical oscillations.—London: Routledge and Kegan Paul, 1961.

Хорошо изложенная и связанная с теорией звука теория колебаний содержится в книге

Морс (Morse P.M.). Vibration and sound.—2nd ed.—New York: McGraw-Hill, 1948.

Современным учебником по механике, в особенности полезным при чтении эпилога (часть 2), может служить книга

Гольдстейн (Goldstein H.). Classical mechanics.—Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950. [Имеется перевод: Гольдстейн Г. Классическая механика.— Изд. 2.— М.: Наука, 1975.]

Все основные вопросы динамики жидкости, которых мы касаемся в данной книге, блестяще изложены в монографии

Бэтчелор (Batchelor G. K.). An introduction to fluid dynamics.— Cambridge University Press, 1967. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. Введение в механику жидкости.— М.: Мир, 1973.]

Другим весьма подходящим, но несколько более коротким пособием служит книга

Кёрл, Дэвис (Curle N., Davies H. J.). Modern fluid dynamics.— London: Van Nostrand, 1968.

Наиболее современное изложение эффектов пограничного слоя, в особенности вопросов, связанных с материалом разд. 2.7, 3.5 и 4.7, содержится в сборнике

Розенхед (ред.) (Rosenhead L., ed.). Laminar boundary layers.— Oxford University Press, 1964.

Заметим, что методы анализа размерностей, как, например, использованные в разд. 3.10, подробно объясняются во всех указанных книгах.

Хорошим пособием по всем основным математическим вопросам, рассматриваемым в данной книге, может служить работа

Апостол (Apostol T. M.). Mathematical analysis.— Reading: Addison-Wesley, 1957.

В ней содержатся необходимые сведения как по теории рядов Фурье, так и по теории функций комплексного переменного. Краткое, но ясное элементарное изложение теории интегралов и рядов Фурье содержится в монографии

Стюарт (Stuart R. D.). An introduction to Fourier analysis.— London: Methuen, 1961.

В равной степени хорошее краткое изложение теории функций комплексного переменного содержится в книге

Филлипс (Phillips E. G.). Functions of a complex variable.— 8th ed.— Edinburgh: Oliver and Boyd, 1957.

Современным учебником, который охватывает оба эти предмета и содержит дополнительные сведения по многим вопросам, рассматриваемым в гл. 3 и 4 (например, изложение метода стационарной фазы с интегрированием по действительной переменной), является книга

Джеффрис Г., Джеффрис Б. (Jeffreys H., Jeffreys B. S.). Methods of mathematical physics.— Cambridge University Press, 1950. [Имеется перевод: Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики.— М.: Мир, 1969.]

Никакие специальные знания в других областях не предполагаются. Тем не менее ниже мы укажем литературу по каждой из близких областей науки, на которые делаются важные ссылки в данной книге.

Блестящее изложение теории уравнений в частных производных содержится в книге

Гарабедян (Garabedian P. R.). Partial differential equations.— New York: Wiley, 1964.

В ней, например, читатель найдет общую теорию характеристик нелинейных гиперболических уравнений (разд. 2.8) и доказательство теоремы о числе собственных значений, рассмотренной в разд. 4.13. Более элементарные сведения можно найти в книге

Сneддон (Sneddon I. N.). Elements of partial differential equations.— New York: McGraw-Hill, 1957.

Теорию дифференциальной геометрии поверхностей, элементы которой используются в разд. 4.9 и 4.10, можно найти в книге

Уилмор (Willmore T. J.). An introduction to differential geometry.— Oxford University Press, 1964.

Различные вопросы теории упругости, упоминаемые, в частности, при обсуждении растяжимых труб (разд. 2.2), можно проследить детально в книге

Сокольников (Sokolnikoff I. S.). Mathematical theory of elasticity.— New York: McGraw-Hill, 1956.

За более элементарными сведениями можно обратиться к книге

Саусвелл (Southwell R. V.). Introduction to the theory of elasticity.— Oxford University Press, 1936. [Имеется перевод со 2-го англ. изд. 1941 г.: Саусвелл Р. Введение в теорию упругости для инженеров и физиков,— М.: ИЛ, 1948.]

Сведения по биомеханике и физиологии движения крови в артериях можно найти в монографии

Макдональд Д. (McDonald D. A.). Blood flow in arteries.— 2nd ed.— London: Edward Arnold, 1974.

Более полное изложение вопросов, связанных с биогидродинамикой, дано в книге

Лайтхилл (Lighthill M. J.). Mathematical biofluiddynamics.—Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1975.

В качестве хорошего учебного пособия по основам термодинамики мы рекомендуем читателю монографию

Эндрюс (Andrews F. C.). Thermodynamics: principles and applications.— New York: Wiley, 1971.

Для читателя, желающего изучить статистические основания термодинамики, подходящим учебником может служить

Пойнтон (Pointon A. J.). An introduction to statistical physics for students.— London: Longmans, 1967. Прекрасное, хотя и менее элементарное изложение обеих тем можно найти в книге

Зоммерфельд (Sommerfeld A.). Thermodynamics and statistical mechanics.— New York: Academic Press, 1956. [Имеется перевод: Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая механика.— М.: ИЛ, 1955.]

Все вопросы теории электромагнетизма, на которые мы ссылаемся (*в особенности в разд. 2.3 — 2.5 и в первой части эпилога*), прекрасно изложены в книге

Клеммоу (Clemmow P.C.) An introduction to electromagnetic theory.— Cambridge University Press, 1973.

Хорошим пособием по этим вопросам является также книга

Рейтц, Милфорд (Reitz J. R., Milford F. J.). Foundations of electromagnetic theory.— Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.

Первоклассное изложение вопросов взаимодействия движения электропроводной жидкости с магнитным полем, включая те аспекты, которые рассматриваются в эпилоге, содержится в учебнике

Шерклиф (Shercliff J. A.). A textbook of magnetohydrodynamics. Oxford: Pergamon, 1965. [Имеется перевод: Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики.— М.: Мир, 1967.]

В настоящей книге указаны некоторые важные результаты, связанные с квантовой механикой (разд. 4.2, 4.5 и 4.11). Более подробную информацию *по данному вопросу читатель сможет найти в работе*

Мерцбахер (Merzbacher E.). Quantum mechanics.— 2nd ed.— New York: McGraw-Hill, 1961.

Хорошее и несколько более полное изложение этих вопросов дано также в книге

Шифф (Schiff L. I.). Quantum mechanics.— 3rd ed.— New York: McGraw-Hill, 1968. [Имеется перевод изд. 1955 г.: Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1957.]

Прекрасное общее описание океана и классических методов океанографии дано в монографии

Свердруп, Джонсон, Флеминг (Sverdrup H. U., Johnson M. W., Fleming R. H.). The oceans.— Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1942.

Вопросы взаимосвязи океанографии и математической теории волн в жидкости хорошо изложены в книге

Нейман, Пирсон (Neumann C., Pierson W. J.). Principles of physical oceanography.— Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1966.

Более обширный материал по тем же вопросам содержится также в весьма ценной книге

Дефан (Defant A.). Physical oceanography (2 vols.).— Oxford University Press, 1961.

Блестящим элементарным пособием по теории атмосферы является курс

Рил (Riehl H.). Introduction to the atmosphere.— 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 1972.

Основные аналитические методы в этой области хорошо изложены в книге

Хесс (Hess S. L.). Introduction to theoretical meteorology.— New York: Henry Holt, 1959.

По вопросам взаимосвязи метеорологии и теории волн в жидкости см. книгу

Холтон (Holton J. R.). An introduction to dynamical meteorology.— New York: Academic Press, 1972.

Общий обзор во волнам в жидкости, в котором кратко затронуты почти все вопросы, излагаемые в данной книге, содержится в статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.). Commun. Pure and Appl. Math.— 1967, v. 20, p. 267—293.

Часть 2. Литература по акустике

В этой части мы даем список литературы по акустике, относящейся к материалу гл. 1, а также тех частей гл. 2 и 4, в которых рассматривалась линейная и нелинейная акустика. Из общих курсов по теории звука мы рекомендуем прежде всего книгу

Релей (Rayleigh, Lord). Theory of sound (2 vols.).— 2nd edn., London: Macmillan, 1896,New York: Dover, 1945. [Имеется перевод: Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука. Т. 1—2.— М.: ГИТТЛ, 1955.]

Эта книга, чтение которой доставляет истинное удовольствие, насыщена важной информацией и идеями, которые выдержали испытание временем. Примером является замечательный общий вывод скорости распространения энергии (см. разд. 3.8 настоящей книги). Другим примером глубокого анализа может служить акустический поток (здесь разд. 4.7).

Из современных монографий, в которых также дано блестящее изложение фундаментальной области науки по теории звука в диапазоне частот, воспринимаемых нашим ухом, можно указать следующие:

Беранек (Beranek L. L.). Acoustics.— New York: McGraw-Hill, 1954.

Стефенс, Бейт (Stephens R. W. B., Bate A. E.). Acoustics and vibrational physics.— 2nd ed.— London: Edward Arnold, 1966.

Звуковые волны как физическое явление, в особенности ультразвук и его применения, рассмотрены в фундаментальном труде

Мэзон (ред.) (Mason W. P., ed.). Physical acoustics: Principles and methods (10 vols.).— New York: Academic Press, 1964—1973. [Имеется перевод: Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. т. 1, ч. А. Методы и приборы ультразвуковых исследований.— М.: Мир, 1966; т. 1, ч. Б. Методы и приборы ультразвуковых исследований.— М.: Мир, 1967; т. 2, ч. А. Свойства газов, жидкостей и растворов.— М.: Мир, 1968; т. 2, ч. Б. Свойства полимеров и нелинейная акустика.— М.: Мир, 1969; т. 3, ч. А. Влияние дефектов на свойства твердых тел.— М.: Мир, 1969; т. 3, ч. Б. Динамика решетки.— М.: Мир, 1968; т. 4, ч. А. Применения физической акустики в квантовой физике твердого тела.— М.: Мир, 1969; т. 4, ч. Б. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела.— М.: Мир, 1970.]

Заметим, в частности, что в гл. 3 второго тома рассматривается влияние «запаздывания» на акустическое затухание, обсуждаемое нами в разд. 1.13, а в гл. 11 рассмотрен акустический поток (в нашей книге разд. 4.7). Гл. 12 четвертого тома посвящена взаимодействию звуковых и электромагнитных волн в ионизованном газе (в нашей книге эпилог, часть 1).

Прекрасным фундаментальным руководством по приложениям акустической теории такого типа, как излагаемая нами в разд. 1.12, 2.5, 4.13 и т. д., к проектированию является книга

Олсон (Olson H. F..). Elements of acoustical engineering.— London: Van Nostrand, 1940.

По громкоговорителям и рупорам можно рекомендовать книгу

Джордан (Jordan E. J.). Loudspeakers.— London: Focal Press, 1963
и давно изданную, но все еще весьма полезную монографию
Маклахлан (McLachlan N. W.). Loudspeakers.— Oxford University Press, 1934.
Хорошее современное изложение этих вопросов в более широком аспекте дано в книге
Муар (Moir J.). High quality sound reproduction.— London: Chapman and Hall, 1961.

Большая часть практических приложений акустической теории связана с уменьшением шума. Довольно общее изложение этих вопросов дано в работе
Беранек (ред.) (Beranek L. L., ed.). Noise reduction.— New York: McGraw-Hill, 1960.
Теории, лежащие в основе уменьшения шума самолета, изложены в монографии
Гольдстейн (Goldstein M. E.). Aeroacoustics.— Washington: Nat. Aeron. and Space Admin., 1974.

Нелинейная акустика и теория ударных волн наряду с другими не менее важными вопросами превосходно обсуждаются в книге
Уизем (Whitham G. B.). Linear and nonlinear waves.— New York: Wiley, 1974. [Имеется перевод: Уизем Г. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.]
Здесь содержится также довольно полное изложение теории диспергирующих волн (в нашей книге — вторая часть эпилога).

Выдающийся труд по теории ударных волн и их роли в газовой динамике представляет собой монография
Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматгиз, 1963.
Использование ударных волн в физической химии для создания известного и практически мгновенного увеличения температуры и получающиеся в результате новые интересные свойства химической кинетики изложены в книге
Бредли (Bradley J. N.). Shock waves in chemistry and physics.— London: Methuen, 1962.
Случаи, когда изменение температуры вследствие химических реакций значительно влияет на распространение ударных волн, рассмотрены в работе
Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. Теория детонации. Учебное пособие.— М.: Гостехиздат, 1955.

Ниже мы приводим более подробные ссылки по отдельным вопросам акустики. Об истории создания теории распространения звука см. стр. 595 книги
Лэмб (Lamb H.). Hydrodynamics.— 6th ed.— Cambridge University Press, 1932; New York: Dover, 1945. [Имеется перевод: Ламб Г. Гидродинамика.— М.-Л.: ГИТТЛ; 1947.]
Эта книга в действительности содержит очень много ценной информации, относящейся к различным вопросам теории волн в жидкости.

Помимо децибела, определенного в разд. 1.3 как мера акустической интенсивности (потока энергии), существуют и другие единицы, вводимые для оценки восприятия звука человеческим ухом. Широко используемая единица децибел воспринимаемого шума (PNdB) была введена в работе
Крайтер (Kryter K. D.).— J. Acoust. Soc. Amer., 1959, v. 31, p. 1415—1429,
где она сравнивается с ранее употреблявшимися единицами измерения субъективно воспринимаемого действия звука. Все они основаны на том,

что вводятся различные весовые множители для зависимости спектра интенсивности от частоты.

Общий обзор по генерированию звука (разд. 1.4—1.40) дан в статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— Proc. Roy. Soc., 1962, A, v. 267, p. 147—182.

Блестящим подтверждением того, что правила разд. 1.6 могут быть применены к таким сложным явлениям, как генерирование звука при нерегулярном горении в открытом пламени, является работа

Херл, Прайс, Сагден, Томас (Hurle I. R., Price R. B., Sugden T. M., Thomas A.).— Proc. Roy. Soc., 1968, A, v. 303, p. 409—427.

Авторы измеряли фотохимически изменение полной скорости реакции и по ней вычисляли флуктуации скорости изменения объемного расхода $\dot{V}(t)$ в окружающую атмосферу. Они показали, что наблюдаемая форма акустической волны следует форме $\ddot{V}(t)$ с ожидаемым временем запаздывания.

Шум винта, связанный со *стационарным* распределением силы около вращающейся лопасти, был вычислен посредством приравнивания напряженности диполя этой силе в работе

Гаррик, Уильямс (Garrick I. E., Williams C. E.).— NACA Report no. 1198. Washington: Nat. Adv. Comm. Aeronautics, 1954.

Та же самая задача была решена с помощью введения дополнительного члена в напряженность диполя (разд. 1.7) в работе

Арнольди (Arnoldi R. A.). Propeller noise caused by blade thickness.— East Hartford, United Aircraft Corp. Rep. No. R-0896-1, 1956.

Для случая многолопастных винтов и вентиляторов значительное взаимное уничтожение полей излучения диполей, связанных с различными лопастями, может приводить к ситуации, когда поля квадруполя, связанные с турбулентным следом, становятся главными источниками шума; это показано в статье

Фоукс Уильямс, Хоукинг (Ffowcs Williams J. E., Hawkings D. L.).— J. Sound Vib., 1969, v. 10, p. 10—21.

Моделированию явлений генерирования звука с помощью волновой кюветы (разд. 1.8) посвящена работа

Фоукс Уильямс, Хоукинг (Ffowcs Williams J. E., Hawkings D. L.).— J. Fluid Mech., 1968, v. 31, p. 779—788.

Применение такого моделирования к исследованию явления шума струи проведено в статье

Вебстер (Webster R. B.).— J. Fluid Mech., 1970, v. 40, p. 423—432.

Все теории рассеяния акустических или электромагнитных волн, которые выходят за рамки рассеяния на компактных телах (разд. 1.9), т. е. не описываются приближением Релея — Борна, даны в монографии

Кинг, Ву (King R. W. P., Wu T. T.). Scattering and diffraction of waves.— Harvard University Press, 1959.

В ней рассмотрено взаимодействие волн как с конечными препятствиями (рассеяние), так и с конечными или полубесконечными экранами (дифракция).

Квадрупольный анализ генерерирования звука в аэродинамике (разд. 1.10) впервые был проведен в работе

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— Proc. Roy. Soc., 1952, A, v. 211, p. 564—587.

Приложению этого анализа к исследованию шума струи, в частности, посвящена статья

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— Amer. Inst. Aeron. Astron. Journ., 1963, v. 1, p. 1507—1517.

Полезным руководством по вопросам генерируемого потоком шума может служить труд

Шварц (ред.) (Schwartz I. R., ed.). Basic aerodynamic noise research.— Washington: Nat. Aeron. and Space Admin., 1969.

Превосходный общий обзор по этой теме дан в статье

Фоукс Уильямс (Ffowcs Williams J. E.,).— Ann. Rev. Fluid Mech., 1969, v. 1, p. 197—222.

Более современный и подробный обзор, столь же превосходный, содержится в работе

Крайтон (Crighton D. G.).— Prog. Aerospace Sci., 1975, v. 16, p. 31—96.

В качестве особенно интересной из последних работ следует отметить следующую:

Хоув (Howe M. S.).— J. Fluid Mech., 1975, v. 71, p. 625—673.

Механизм затухания звука в жидкости (разд. 1.13) подробно описан Лайтхиллом на стр. 250—351 в сборнике

Бэтчелор, Дэвис (ред.) (Batchelor G. K., Davies R. M., eds.). Surveys in mechanics.— Cambridge University Press, 1956.

В этом обзоре дан подробный анализ нелинейного распространения простых волн умеренной интенсивности с учетом затухания. В этом анализе использовано уравнение Бюргерса, и теория разд. 2.11 содержится в нем как предельный случай при малых значениях коэффициента диффузии звука δ.

Оригинальный текст статьи 1859 г. с изложением теории Римана (разд. 2.8) можно найти на стр. 156—175 издания

Риман (Riemann B.). Gesammelte mathematische Werke.— 2nd ed.— Leipzig: Teubner, 1892.

Предложенное Риманом преобразование уравнений движения приведено на стр. 159 (где нашему P соответствует его f).

Соотношения на ударной волне в виде, учитывающем увеличение энтропии (разд. 2.10), были получены в работе

Рэнкин (Rankine W. J. M.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1870, v. 160, p. 277—288,

а для жидкости с более общими свойствами — в работе

Гюгонио (Hugoniot A.).— J. de l'Ecole Polytech., 1889, t. 58, p. 1—125.

Исследование внутренней структуры ударной волны было выполнено одновременно в 1910 г. в работах

Релей (Rayleigh Lord).— Proc. Roy. Soc., 1910, A, v. 84, p. 247—284

и

Тейлор (Taylor G. I.).— Proc. Roy. Soc., 1910, A, v. 84, p. 371—377.

В последней из них изложение очень близко к тому, которое дано в разд. 2.10; более современное изложение можно найти в работах, указанных выше. Укажем здесь также работу, где обсуждается не противоречащая законам термодинамики возможность существования жидкостей, в которых волны разрежения будут разрывными:

Томпсон, Ламбракис (Thompson P. A., Lambrakis K. C.).— J. Fluid Mech., 1973, v. 60, p. 187—208.

Общее правило включения ударной волны в развивающуюся простую волну малой амплитуды получено в работе

Уизем (Whitham G. B.).— J. Fluid Mech., 1956, v. 1, 290—318,

которая в дальнейшем была им обобщена на случай неоднородных сред, рассматриваемых в разд. 2.13 и 2.14; см. статью

Уизем (Whitham G. B.).— J. Fluid Mech., 1958, v. 4, p. 337—360.

Современный обзор по теории звукового удара дан в статье Лайтхилла, напечатанной в книге

Столлери, Гейдон, Оуэн (ред.) (Stollery J. L., Gaydon A. G., Owen

P. R., eds.). Shock tube research.— London: Chapman and Hall, 1971, а также в статье

Хейз (Hayes W. D.).— Ann. Rev. Fluid Mech., 1971, v. 3, p. 269—290.

Довольно сложная теория распространения простых волн большой амплитуды для случая постепенно меняющихся физических характеристик жидкости и поперечного сечения канала или трубы построена в работах

Варлей, Камбербач (Varley E., Cumberbatch E.).— J. Inst. Math. Applics., 1966, v. 2, p. 133—143; J. Fluid Mech., 1970, v. 43, p. 513—537.

Эта строгая теория волн с большой амплитудой подтверждает теорию, данную в разд. 2.13 и 2.14 (к которой она сводится в случае малой амплитуды). Однако ее нельзя обобщить таким образом, чтобы изучать распространение волн после того, как появится сильная ударная волна.

Другим аспектом нелинейной акустики, рассматриваемым в данной книге, является акустический поток (разд. 4.7). Теория акустического потока, построенная обычным образом, за исключением того, что в скорости потока пренебрегали членами порядка выше второго, дана в работах

Вестервельт (Westervelt P. J.).— J. Acoust. Soc. Amer., 1953, v. 25, p. 60—67

и

Ниборг (Nyborg W. L.).— J. Acoust Soc. Amer., 1953, v. 25, p. 68—75.

С момента выхода этих работ началось интенсивное развитие теории медленных вязких течений, изложение которой можно найти в книге

Хаппель, Бреннер (Happel J., Brenner H.). Low Reynolds number hydrodynamics.— Englewood cliffs: Prentice-Hall, 1965. [Имеется перевод: Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976],

так что использованное нами представление при помощи распределения стокслетов теперь кажется вполне пригодным.

В работе

Стюарт (Stuart J. T.).— J. Fluid Mech., 1966, v. 24, p. 673—687

ясно показано, что при этом обычная теория справедлива только в тех случаях, когда число Рейнольдса, вычисляемое по самой скорости акустического потока, достаточно мало, и, наоборот, гидродинамическая теория при больших числах Рейнольдса применима к сильным акустическим потокам. Отсюда появилась идея использовать в разд. 4.7 решение для струи, полученное в работе

Сквайр (Squire H. B.).— Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951, v. 4, p. 321—329.

Колебания компактного тела в покоящейся жидкости генерируют поток по существу тот же самый, что и в том случае, когда плоские звуковые волны падают на неподвижное тело. Общий обзор по акустическим потокам для таких случаев дан в работе

Райли (Riley N.).— J. Inst. Math. Applics. 1967, v. 3, p. 419—434.

Часть 3. Литература по волнам на воде

Рассмотрение волн на воде в данной книге начинается с анализа длинных волн в открытых каналах в гл. 2. Общий анализ движения воды в открытых каналах хорошо представлен в книгах

Чоу (Chow V. T.). Open-channel hydraulics.— New York: McGraw-Hill, 1959,

Хендерсон (Henderson F. M.). Open channel flow.— New York: Macmillan, 1966.

Заметим, что в обеих указанных выше книгах хорошо освещено влияние турбулентности на длинноволновое затухание (важный вопрос, который не включен в гл. 2).

В гл. 3 мы излагаем линейную теорию волн на воде для широкого спектра длин волн, в то время как в эпилоге даны наброски нелинейной теории. Работой довольно широкого диапазона на эту тему с математической ориентацией является книга

Стокер (Stoker J. J.). Water waves.— New York: Interscience, 1953. [Имеется перевод: Стокер Дж. Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.]

Блестящее изложение этого предмета его связи с океанографией содержится в монографии

Филлипс (Phillips O. M.). The dynamics of the upper ocean.— Cambridge University Press, 1966. [Имеется перевод: Филлипс О. Динамика верхнего слоя океана.— М.: Мир, 1969.]

По вопросам приложения теории волн на воде к расчету воздействия внешних нагрузок на прибрежные сооружения см. книгу

Маккормик (McCormick M. E.). Ocean engineering wave mechanics.— New York: Wiley, 1973.

Превосходное изложение основ физической химии по теории явления поверхностного натяжения дано в книге

Дефей, Пригожин (Defay R., Prigogine I.). Surface tension and adsorption.— London: Longmans, 1966.

Она может служить хорошей основой при изучении разд. 3.4 и 3.5.

Как и в ч. 2, вслед за общими курсами, указанными выше, мы дадим несколько более специальных ссылок по отдельным вопросам. Успешное приложение теории резонатора Гельмгольца (разд. 2.5) к исследованию длинноволнового резонанса в гаванях сделано в работе

Майлс, Ли (Miles J. W., Lee Y. K.).— J. Fluid Mech., 1975, v. 67, p. 445—464.

О структуре гидравлических прыжков (разд. 2.12 и эпилог) см. статью

Бенджамен, Лайтхилл (Benjamin T. B., Lighthill M. J.).— Proc. Roy. Soc., 1954, A, v. 224, p. 448—460.

В работе

Байетт-Смит (Byatt-Smith J. G.B.).— J. Fluid Mech., 1971, v. 48, p. 33—40

показано, что только эффекты вязкости (как и предсказывают предыдущие авторы) могут вызвать диссипацию энергии, достаточную для образования скачка с цугом кноидальных волн за ним.

Детальное исследование условий образования боры на р. Северн дано в работе

Аббот (Abbott M. R.).— Proc. Camb. Phil. Soc., 1956, v. 52, p. 344—362,

где получено хорошее согласование между наблюдениями и теорией, использующей методы гл. 2, модифицированные с учетом турбулентного трения.

Вопросы затухания поверхностных волн, в частности под действием непостоянства поверхностного натяжения, блестяще изложены в обзоре

Лукассен-Рейндерс, Лукассен (Lucassen-Reynders E. H.,Lucassen J.).— J. Adv. Colloid and Interface Sci., 1969, v. 2, p. 347—395.

Кроме того, важная и очень обширная библиография на тему «Масло и нефть на неспокойной воде» скоро будет опубликована Скоттом (Scott J. C.) из Института гидромеханики Эссекского университета. Идея Стокса, лежащая в основе наших рассуждений в разд. 3.5, указана на стр. 73 его знаменитой работы по вязкости (1851 г.), которая напечатана в томе 3 (стр. 1—141) его трудов

Стокс (Stokes G. G.). Mathematical and physical papers (5 vols) —. Cambridge University Press, 1880—1905.

Наблюдения за волнением океана на громадных расстояниях от шторма, вызвавшего это волнение, даны в статьях

Мунк, Миллер, Снодграсс, Барбер (Munk W. H., Miller G. R., Snodgrass F. E., Barber N. F.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1963, A, v. 255, p. 505—584,

Снодграсс, Гравс, Хассельман, Миллер, Мунк, Пауэрс (Snodgrass F. E., Groves G. W., Hasselmann K. F., Miller G. R., Munk W. H., Powers W. M.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1966, A, v. 259, p. 431—497.

Обзор по групповой скорости и ее свойствам, охватывающий большую часть общей теории, использованной в гл. 3 и 4, дан в статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— J. Inst. Math. Applics, 1965, v. 1, p. 1—28.

Простые рассуждения Стокса в случае двух волн почти одинаковой амплитуды и частоты изложены на стр. 352 тома 5 цитируемого выше издания его трудов

Приложение теории групповой скорости к исследованию динамики движения гребней волн (разд. 3.6 и 3.8) можно найти, например, в работе

Лайтхилл, Уизем (Lighthill M. J., Whitham G. B.).— Proc. Roy. Soc., 1955, A, v. 229, p. 281—345.

Обобщение на случай анизотропных волн (разд. 4.4 и 4.5) дано в статье

Уизем (Whitham G. B.).— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, p. 347—352.

Из ранних исследований стационарных волн в потоке (разд. 3.9) укажем на работу

Релей (Rayleigh Lord).—Proc. London Math. Soc., 1883 v. 15, p. 69—78.

В ней использован гипотетический механизм затухания (аналогичные соображения Релея о скорости распространения энергии приведены в конце разд 3.9) для преодоления «очень важной и известной» трудности, связанной с полюсами. Поэтическое описание стационарных волн можно найти на стр. 257—260 книги

Лэзем (ред.) (Latham E. C., ed.). The poetry of Robert Frost.—London: Jonathan Cape, 1971.

Труды Скотта Рассела по волнам были опубликованы в виде двух отчетов

Рассел Скотт (Russel J. Scott).—British Assoc. Reports, 1838 v. 6, p. 417—496; 1845, v. 13, p. 311—390.

В них приведено много интересных наблюдений, включая первое подробное описание уединенной волны (эпилог, часть 2).

Превосходный общий обзор по корабельным волнам (разд. 3.10 и 4.12) с весьма полной библиографией дан в статье

Вехаузен (Wehausen J.V.).— Adv. Appl. Mech., 1973, v. 13, p. 93—245.

Важные ранние работы Вильяма Фруда можно найти в собрании его трудов

Фруд (Froude W.). Papers.— London: Institution of Naval Architects, 1955.

Кельвин (тогда Уильям Томсон) впервые изложил свою теорию корабельных волн в 1883 г. в лекции, воспроизведенной в издании

Томсон (Thomson W.). Popular lectures, v. 3, p. 450—500.— London: Macmillan, 1891.

Обширная информация по волновому сопротивлению содержится в книге

Хейвлок (Havelock T. H.). Collected papers.— Washington: Office of Naval Research, 1966.

Использовать для определения волнового сопротивления результаты экспериментов или расчетов со сдвоенной моделью впервые было предложено в работе

Гэд (Gadd G. E.).— Trans. Roy. Inst. Nav. Arch., 1970 , v. 112, 335—345.

На фоне существования очень большого количества сложных методов расчета волнового сопротивления предложенный в разд. 3.12 грубый и не очень точный метод оценок может показаться весьма ограниченным. Тем не менее он излагается в надежде стимулировать физическую мысль в этой области. Более точный метод расчета, в котором используется аналогичное распределение источников в плоскости $z = 0$ и распределение источников на поверхности корпуса корабля и точно удовлетворяются условия на этой поверхности и на свободной поверхности в смещенном положении, дан в статье

Гэд (Gadd G. E.).— Trans. Roy. Inst. Nav. Arch., 1976, v. 118, p.207—219.

Расчет луковицеобразных носовых частей кораблей дан в классической работе Инуи

Инуи (Inui T.).— Trans. Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., 1962, v. 70, p. 282—353,

из которой заимствован рис. 104.

Приложение теории каустики к расчету корабельных волн Кельвина дано в работе

Урсел (Ursell F.).— J. Fluid Mech., 1960, v. 8, p 418—431.

Обобщение на случай корабельных волн на относительно мелкой воде можно найти, например, в статье

Эверест, Хогбен (Everest J. T., Hogben N.).— Trans. Roy. Inst. Nav. Arch., 1970, v. 112, p. 319—329.

Вопросы взаимодействия корабельных волн с кормовым *следом* исследованы в работе

Перегрин (Peregrine D. H.).— J Fluid Mech., 1971, v. 49, p. 353—360.

Модификации картины волн Кельвина с учетом нелинейных эффектов изучаются в статье

Хогбен (Hogben N.).— J. Fluid Mech., 1972, v. 55, p. 513—528.

Предельные волны впервые упоминаются в статье Стокса 1846 г., воспроизведенной на стр. 157—187 (см., в частности, стр. 167) тома 1 издания

Стокс (Stokes G. G.). Mathematical and Physical Papers (5 vols.). Cambridge University Press, 1880—1905.

Хороший обзор по данной теме содержится в статье

Урсел (Ursell F.).— Proc. Roy. Soc., 1952, A, v. 214, p. 79—97.

Блестящее современное изложение теории предельных волн дано в работах

Мисак (Mysak M. E.).— J. Marine Res., 1968, v. 26, p. 24—42

и

Гримшоу (Grimshaw R.).— J. Fluid Mech., 1974, v. 62, p. 775—791.

Часть 4. Литература по стратифицированным жидкостям

Мы можем рекомендовать несколько основных книг по динамике стратифицированных жидкостей. Довольно ранней работой по физическим и математическим основам предмета является монография

Экарт (Eckart C.). Hydrodynamics of oceans and atmospheres.— New York, Pergamon, 1960. [Имеется перевод: Экарт К. Гидродинамика океана и атмосферы.— М.: ИЛ, 1963.]

Общий характер потоков в стратифицированных жидкостях, а также возникающие в результате внутренние волны (включая *подветренные волны*) хорошо описаны в книге

Йи (Yih C. S.). Dynamics of nonhomogeneous fluids.— New York, Macmillan, 1965.

Обзор большого ряда экспериментальных и наблюдаемых данных на фоне ясного теоретического анализа представлен в книге

Тернер (Turner J. S.). Buoyancy effects in fluids.— Cambridge University Press, 1973. [Имеется перевод: Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.— М.: Мир, 1977.]

В этой книге установлены многие замечательные свойства (коротко описанные в нашем разд. 4.3) морской воды, стратифицированной таким образом, что градиенты температуры и солености имеют одинаковые знаки. В ней дается также превосходное описание структуры и возникновения термоклинов (см. разд. 4.3).

О экспериментальных данных и о теории волн в атмосфере см. прежде всего работу

Госсард, Хук (Gossard E. E., Hooke W. H.). Waves in the atmosphere.— Amsterdam: Elsevier, 1975.

Она включает обширное описание «инфразвука» (описанное в нашем разд. 4.13 распространение акустически-гравитационных видов колебаний в волноводе).

Переходя к специальным работам, мы отметим сначала классическое описание корабельных волн в эстуарии на поверхности раздела между пресной водой и расположенной ниже соленой водой (разд. 4.1):

Экман (Ekman V. W.).— Scientific results of the Norwegian north polar expedition, 1904, v. 5, No. 15, p. 1—152.

Оригинальной работой, где введено приближение Буссинеска при изучении внутренних волн, является труд

Буссинеск (Boussinesq J.). Théorie analytique de la chaleur (2 vols.).— Paris: Gauthier-Villars, 1901—1903.

Рекомендуем также работы Вяйсяля и Брента:

Вяйсяля (Väisälä V).—Soc. Sci. Fenn. Commentat. Phys.-Math., 1925, v. 2, No. 19, p. 1—46,

Брент (Brunt D.).— Quart. J. Roy. Met. Soc., 1927, v. 53, p. 30—32.

Хорошим общим обзором работ по волнам в стратифицированной жидкости (связанным в особенности с разд. 4.2 и 4.13) является статья

Толстой (Tolstoy I.).— Rev. Mod. Phys., 1963, v. 35, p. 207—230.

Описание перемешивания воды в Тулонском заливе (разд. 4.3) содержится в статье

Анати (Anati D. A.).—Cahiers Océanographique, 1971, t. 23, p. 427—443.

Волны на океанских термоклинах великолепно описаны в гл. 5 монографии

Филлипс (Phillips O. M.). The dynamics of the upper ocean.—Cambridge University Press, 1966.

Изучение наблюдаемого распространения внутренних волн в атмосфере в сопоставлении с теоретическим исследованием (наш разд. 4.3) проведено в работе

Кьелас, Госсард, Янг, Монингер (Kjelaas A. G., Gossard E. E., Young J. M., Moninger W. R).—Tellus, 1975, v. 27, p. 25—33.

Отметим также, что роль внутренних волн в зарождении и формировании турбулентности чистого воздуха широко обсуждается в книге

Пао, Гольдбург (ред.) (Pao Y. H., Goldburg A. eds.). Clear air turbulence and its detection.— New York: Plenum Press, 1969.

В отделении механики жидкостей Манчестерского университета разработан высокоэффективный шлирен-метод, описанный в статье

Моубрей (Mowbray D. E.).— J. Fluid Mech., 1967, v. 27, p. 595—608.
Этот метод делает видимыми внутренние волны в стратифицированном солевом растворе. Изображение волновой конфигурации в виде андреевского креста (разд. 4.4, рис. 76) взято из работы о волнах, генерируемых колеблющимися телами:

Моубрей, Рерити (Mowbray D. E., Rarity B.S.H.).— J. Fluid Mech., 1967, v. 28, p. 1—16.
Внутренние волны, созданные равномерно движущимся телом (разд. 4.12), описаны в работе

Моубрей, Рерити (Mowbray D. E., Rarity B.S.H.).— J. Fluid Mech., 1967, v. 30, p. 489—495,
из которой взят рис. 106, и в статье

Стивенсон (Stevenson T. N.).— J. Fluid Mech., 1968, v. 33, p. 715—720.
Влияние вязкого затухания на волновую конфигурацию в виде андреевского креста (разд. 4.10) экспериментально и теоретически исследовано в работе

Томас, Стивенсон (Thomas N. H., Stevenson T. N.).— J. Fluid Mech., 1972, v. 54, p. 495—506,
из которой взяты рис. 93 и 94. Изображения неустановившихся течений (рис. 77) заимствованы из статьи

Стивенсон (Stevenson T. N.).— J. Fluid Mech., 1973, v. 60, p. 759—767.
Я благодарен профессору Н. Х. Иоганнесену, руководителю отделения, предоставившему мне превосходные отпечатки всех приведенных выше фотографий, и их вышеуказанным авторам за разрешение на публикацию.

Общим описанием рефракции волны в горизонтально стратифицированной среде (разд. 4.5), с упором, однако, на электромагнитные волны и волны упругости, является труд

Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
Общий обзор вопросов, связанных с распространением звука через движущуюся жидкость (разд. 4.6), в том числе через движущуюся стратифицированную жидкость, дается в работе

Лайтхилл (Lighthill M. J.)— J. Sound Vib., 1972, v. 24, p. 471—492.
Эта тема во многом обязана работе

Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды.— М.: ГИТТЛ, 1946.

Методы прослеживания луча для звуковых волн в атмосфере со стратификацией температуры и ветром описаны, например, в статье

Томпсон (Thompson R. J.).— J. Acoust. Soc Amer., 1972, v. 51, p. 1675—1682.
В работе

Придмор-Браун (Pridmore-Brown D. C.).— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, v. 34, p. 438—443
такие методы сравниваются с методами, в которых используются более точные уравнения.

Понятие напряжения Рейнольдса было впервые введено для случая турбулентного течения в статье

Рейнольдс (Reynolds O.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1895, v. 186, p. 123—164.
Позднее оно было применено к гидродинамически неустойчивым волнам, которые могут предшествовать переходу к турбулентности, а затем все шире и шире к волнам вообще; см., например, работу

Лонге-Хиггинс, Стюарт (Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.).— J. Fluid Mech., 1962, v. 13, p. 481—504.

Общий вывод закона сохранения волнового действия для неоднородных движущихся сред содержится в статье

Брезертон, Герретт (Bretherton F. P, Garrett C. J.R.).— Proc. Roy. Soc., 1968, A, v. 302, p. 529—554.

Поглощение внутренних волн в критическом слое впервые было объяснено в работе

Букер, Брезертон (Booker J. R., Bretherton F. P.).— J. Fluid Mech., 1967, v. 27, p. 513—539,

а более полно изучено в статьях

Брезертон (Bretherton F. P.).— Quart J. Roy. Met. Soc., 1969, v. 95, p. 213—243; J. Fluid Mech., 1969, v. 36, p. 785—803.

Значение внутренних волн как средства вертикального переноса горизонтальной составляющей количества движения, о котором шла речь в конце разд. 4.6 и 4.7, хорошо выявлено в нескольких современных работах; см., например

Эндрюс, Макинтайр (Andrews D. G., McIntyre M. E.).— J. Atmos. Sci., 1976, v. 33, p. 2031—2053.

Общая теория стационарной фазы в трехмерном случае и теория волн от колеблющегося источника, приведенные в разд. 4.8 и 4.9, взяты из работы

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1960, A, v. 252, p. 397—430.

В ней подробно исследуются различные вопросы, которые описаны у нас лишь очень кратко, например определение поверхности постоянной фазы как «взаимной поляры» поверхности волновых чисел. Достаточно подробно даны приложения к магнитогидродинамическим волнам.

Впервые интеграл Эйри был использован для изучения каустик (разд. 4.11) в случае световых волн в статье

Эйри (Airy G. B.).— Trans. Camb. Phil. Soc., 1838, v. 6, p. 379—402.

Метод, использующий интеграл Эйри, с успехом продолжает применяться до сих пор! Превосходные таблицы интеграла Эйри приведены в книге

Миллер (Miller J. C. P.).— The Airy integral.— British Association Mathematical Tables, Part-Volume B. Cambridge University Press, 1946.

О волнах, генерируемых движущимся вынуждающим воздействием в общем случае (разд. 4.12), см. работу

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— J. Fluid Mech., 1967, v. 27, p. 725—752.

Хорошее описание передаваемого вверх по потоку влияния цилиндрического тела, горизонтально движущегося через стратифицированную жидкость (или, что то же самое, запирающего воздействия неподвижного цилиндра на поток стратифицированной жидкости), приводится в статье

Лонг (Long R. R.).— Tellus, 1970, v. 22, p. 471—480.

Эта работа включает в себя довольно полное обсуждение нелинейных эффектов.

Общее описание волноводов приводится в книге

Бадден (Budden K. G.). The wavequide mode theory of wave propagation.— London: Logos, 1961.

Приложения изложенной в нашем разд. 4.13 довольно элементарной акустической теории к возникновению шума от потока в трубе см. в работе

Дэвис, Фоукс Уильямс (Davies H. G., Ffowcs Williams J. E.).— J. Fliud Mech., 1968, v. 32, p. 765—778.

Обобщение теории колебаний в волноводах, необходимое для исследования распространения звука через трубы с неоднородным стационарным потоком, было остроумно сделано в статье

Суинбенкс (Swinbanks M. A.).— J. Sound Vib., 1975, v. 40, p. 51—76.

Проведенное в разд. 4.13 исследование гравитационно-акустического волновода в атмосфере следовало общему духу работ

Герретт (Garrett C. J. R.).— Quart. J. Roy. Met. Soc. 1969, v. 95, p. 731—753;

Брезертон (Bretherton F. P.).— Quart. J. Roy. Met. Soc, 1969, v. 95, p. 754—757.

В нем, в частности, не выясняется подробно воздействие термоструктуры очень высоких частей атмосферы. В действительности же отдельные расчеты наводят на мысль о том, что из явно хорошо обоснованных детальных предположений о структуре верхней атмосферы могут быть в результате получены специфические резонансные эффекты. По этому вопросу см., например, статью

Пресс, Харкрайдер (Press, F., Harkrider D.).— J. Geophys. Res., 1962, v. 67, p. 3889—3908.

Тем не менее наблюдаемые свойства распространения основной моды, а также многочисленные данные о созданных ядерными взрывами волнах, собранные в работе

Пайерс, Позн, Айлифф (Pierce A. D., Posey J. W., Iliff E. F.).— J. Geophys. Res., 1971, v. 76, p. 5025—5041,

не свидетельствуют о таких специфических эффектах и близки к тому, чтобы подтвердить точку зрения Геррета и Брезертона.

Часть 5. Библиографические комментарии к эпилогу

Так как в эпилоге лишь очень кратко описываются различные обширные сведения о результатах и исследованиях, то библиография требуется относительно полная. Мы снова начнем с книг, посвященных основам теории: прекрасным описанием общего характера динамики вращающейся жидкости является книга

Гринспэн (Greenspan H. P.). The theory of rotating fluids.— Cambridge University Press, 1968.

Есть несколько хороших курсов по основам магнитной гидродинамики и ее приложениям к геофизике и астрофизике, например книги

Каулинг (Cowling T. G.). Magnetohydrodynamics.— New York: Interscience, 1957. [Имеется перевод: Каулинг Т. Магнитная гидродинамика.— М.: ИЛ, 1959.]

Ферраро, Плампттон (Ferraro V. C. A., Plumpton C.). An introduction to magneto-fluid mechanics.— 2nd ed.— Oxford University Press, 1966.

В последней дается введение в теорию нелинейных эффектов в волнах. Она находит дальнейшее развитие в книге

Андерсон (Anderson J. E.). Magnetohydrodynamic shock waves.— Cambridge: M.I.T. Press, 1963.

В качестве работ, в которых делается упор на многие важные эффекты, связанные со статистической механикой электронов и ионов в плазме (ионизованном газе), см. книги

Холт, Хаскелл (Holt E. H., Haskell R. E.).— Plasma dynamics.— New York: Macmillan, 1965.

Стикс (Stix T. H.). The theory of plasma waves.— New York: McGraw-Hill, 1962.

Волны в ионосфере многих типов — от магнитогидродинамических до электромагнитных — рассматриваются в книге

Хелливелл (Helliwell R. A.).—Whistlers and related ionospheric phenomena.— Stanford Univesity Press, 1965.

Другим стимулирующим исследования изложением этого предмета вместе со многими вопросами астрофизики является книга

Данджи (Dungey J. W.). Cosmic electrodynamics.— Cambridge University Press, 1958.

Укажем важную коллективную работу по теории нелинейных волн с основным упором на диспергирующие волны:

Лейбович, Сибасс (ред.) (Leibovich S., Seebass A. R., eds.). Nonlinear waves.— Cornell University Press, 1974.

Превосходным специальным курсом по нелинейным диспергирующим волнам является книга

Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. — М.: Наука, 1973.

В связи с нелинейными диспергирующими волнами требует вторичного упоминания другая большой важности работа в этой области, уже упомянутая, когда шла речь о нелинейной акустике:

Уизем (Whitham G. B.). Linear and nonlinear waves.— New York: Wiley, 1974. [Имеется перевод: Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.]

Обратимся к специальным работам. Введение в динамику вращающихся жидкостей дается в обзоре

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, p. 411—431. [Имеется перевод: сб. Механика, 1968, № 1 (107), с. 61—81.]

В нем сделана попытка столь тесно, сколь это возможно, связать их свойства с классическими теоремами гидродинамики, касающимися завихренности.

Инерционные волны были впервые описаны Кельвином в работе 1880 г., воспроизведенной на стр. 152—165 тома 4 издания

Кельвин (Kelvin Lord). Mathematical and physical papers (6 vols.).— Cambridge University Press, 1882—1911.

Экспериментальные подтверждения их свойств можно найти в работах

Озер (Oser H.).— Z. angew. Math. Mech., 1958, B. 38 S. 386—391,

Фультц (Fultz D.).— J. Meteorol., 1959, v. 16, p. 199—208.

Возникновение волн цунами хорошо описано в статье

Бреддок, ван ден Дрисше, Пиди (Braddock R. D., van den Driessche P., Peady G. W.).— J. Fluid Mech., 1973, v. 59, p. 817—828.

Об их возникновении и последующем распространении можно прочитать в работе

Хеммек (Hammack J. L.).— J. Fluid Mech., 1973, v. 60, p. 769—799.

Свойства столба Тейлора были теоретически и экспериментально исследованы в статьях

Тейлор (Taylor G. I.).— Proc. Roy. Soc., 1922, A, v. 102, p. 180—189; Proc. Roy. Soc., 1923, A, v. 104, p. 213—218.

В них развивались сделанные ранее теоретические предположения работы

Праудмен (Proudman J.).— Proc. Roy. Soc., 1916, A. v. 92, p. 408—424.

Нелинейная деформация столба Тейлора была разобрана в статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— Proc. Camb. Phil. Soc., 1970, v. 68, p. 485—491,

в которой получено хорошее согласование с экспериментами, описанными в работе

Хайд, Иббетсон (Hide R., Ibbetson A J.).— J. Fluid Mech., 1968, v. 32, p. 251—272.

Экспериментальное изучение столба Тейлора во вращающейся жидкости со стратификацией плотности было сделано в статье

Дэвис (Davies P.A.).—J.Fluid Mech., 1972, v. 54, p. 691—717.

Соответствующий столб впереди препятствия, движущегося вдоль своей оси симметрии, также наблюдался Тейлором и был в дальнейшем исследован в работе

Лонг (Long R. R.).— J. Meteorol., 1953, v. 10, p. 197—203.

Это явление весьма четко было объяснено в статье

Стюартсон (Stewartson K.).— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1958, v. 11, p. 39—51

и для более широкого класса задач — в статье

Трастрэм (Trustrum K.).— J. Fluid Mech., 1964, v. 19, p. 415—432,

где также ясно проводится аналогия с движением в стратифицированной жидкости (наш разд. 4.12).

Превосходное введение в теорию приливов и отливов дается в работе

Хендершотт, Манк (Hendershott M., Munk W. H.).— Ann. Rev. Fluid Mech., 1970, v. 2, p. 205—224.

В качестве примера использования теории для расчета приливов и отливов в большом океане (Атлантическом) см. статью

Пекерис, Аккад (Pekeris C. L., Accad Y.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1969, A., v. 265, p. 413—436.

Хорошее согласование результатов наблюдений с этими расчетами было установлено в работе

Картрайт (Cartwright D. E.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1971, A, v. 270, p. 603—649.

Превосходное современное описание волн вида «волны Кельвина» при приливно-отливных движениях содержится в статье

Майлс (Miles J. W.).— J. Fluid Mech., 1972, v. 55, p. 113—127.

Численный метод для расчета приливно-отливных движений на большой площади континентального шельфа с учетом ветрового напряжения и нелинейных эффектов в очень интересных деталях описан в отчете

Флезер, Дэвис (Flather R. A., Davies A. M.).— Institute of Oceanographic Sciences Report No. 16.— London: Her Majesty's Stationary Office.

Природа и важность одного из типов приливно-отливных волн — низкочастотных «волн Россби», тесно связанных с изменением кориолисова параметра при изменении географической широты,— впервые были выявлены в работе

Россби (Rossby C. G.).— J. Marine Res., 1939, v. 2, p. 38—55.

Полное и ясное исследование таких волн содержится в статье

Лонге-Хиггинс (Longuet-Higgins M. S.).— Proc. Roy. Soc., 1964, A, v. 279, p. 446—473.

Собственные колебания волновода в океане включают не только «баротропную» моду (в случае которой движения жидкости почти не зависят от глубины), как было найдено для собственно приливов и отливов, но и «бароклинные» моды. Эти моды, решающее влияние на которые имеет стратификация плотности в океане, вызывают движения жидкости, которые меняются с глубиной таким образом, что в действительности меняют знак. Кроме того, они распространяются относительно медленно. Обычно на бароклинные моды сильно влияет изменение кориолисова параметра f с широтой. Теория этих мод дается, например, в приложении к статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1969, A, v. 265, p. 45—92.

В этой статье показано, что они особенно важны в экваториальных областях. В ней указывается, что такие моды и баротропные волны Россби имеют отношение к весьма чувствительной реакции Индийского океана на начальный порыв юго-западного муссона. По этому вопросу см. недавнюю статью

Андерсон, Рауленде (Anderson D. L. T., Rowlands P. B.).— J. Marine Res., 1976, v. 34, p. 395—417.

Важный обширный обзор океанических течений и их динамики был опубликован в работе

Дикон (ред.) (Deacon G. E. R., ed.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1971, A, v. 270, p. 349—465.

Отметим оригинальную работу Альвена по магнитогидродинамическим волнам: —

Альвен (Alfvén H.).— Ark. Mat. Astr. Fys., 1942, B. 29B, No. 2, S. 1—7; см. также книгу

Альвен, Фельтхаммар (Alfvén H., Fälthammar C. G.). Cosmical Electrodynamics, 2nd edn.— Oxford University Press, 1963. [Имеется перевод: Альвен Г., Фельтхаммар К. Космическая электродинамика. Основные принципы.— Изд. 2.— М.: Мир, 1967.],

в которой описаны многие их приложения. Комбинированные акустические и магнитогидродинамические волны были впервые изучены в работе

Херлофсон (Herlofson N.).— Nature, 1950, v. 165, p. 1020—1021.

Их форма, о которой говорилось в эпилоге, и соответствующая физическая интерпретация даны в статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, p. 465—472.

В этом исследовании обсуждаются волны, возникающие при входе космического корабля в верхние слои атмосферы.

Внутри жидкого ядра Земли важно другое сочетание двух типов волн, а именно магнитогидродинамические волны во вращающейся (а также в электропроводной) жидкости. Хорошим общим обзором в этой области является работа

Хайд, Стюартсон (Hide R., Stewartson K.).— Rev. Geophys. Space Phys., 1972, v. 10, p. 579—598.

Обзор важной конференции по этой теме сделан в работе

Моффетт (ред.) (Moffatt H. K., ed.).— J. Fluid Mech., 1973, v. 57, p. 625—649.

В настоящее время усиленно изучаются зависимости между волнами и флуктуирующей составляющей магнитного поля Земли. По другому важному вопросу, касающемуся того, на сколь далеких расстояниях случайный ансамбль таких волн может действовать как генератор основного магнитного поля Земли, см. превосходную недавнюю работу

Соуорд (Soward A. M.).— J. Fluid Mech., 1975, v. 69, p. 145—177

и в особенности прекрасную современную монографию

Моффетт (Moffatt H. K.). Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids.— Cambridge University Press, 1977.

Часть 2 эпилога начинается с замечания об особенности диспергирующих волн, которая делает их теорию менее сложной, чем теория, скажем, турбулентности. См. хороший современный обзор экспериментальных данных и теории турбулентности

Хинце (Hinze J. O.). Turbulence, 2nd edn.— New York: McGraw-Hill, 1975. [Имеется перевод 1 изд.: Турбулентность, ее механизм и теория.— М.: Наука, 1963.]

Почти все отмеченные в эпилоге результаты, касающиеся нелинейных периодических волн на глубокой воде, взяты из работы

Лонге-Хиггинс (Longuet-Higgins M. S.).— Proc. Roy. Soc., 1975, A, v. 342, p. 157—174.

В ней дается полная библиография более ранних работ, ведущих начало от работ Стокса. Здесь обсуждается также открытие того, что существование максимума волновой энергии при меньшей, чем максимальная величина, амплитуде, имеет отношение к разрушению волны. Волновые профили (рис. 114) были рассчитаны в статье

Шварц (Schwartz L. W.).— J. Fluid Mech., 1974, v. 62, p. 553—578.

Вариационной теорией для медленно меняющейся цепочки нелинейных диспергирующих волн мы обязаны работам

Уизем (Whitham G. B.).— J. Fluid Mech., 1965, v. 22, p. 273—283; Fluid Mech., 1970, v. 44, p. 373—395.

Ее приложение к волнам на глубокой воде было сделано в статье

Лайтхилл (Lighthill M. J.).— J. Inst. Math. Applics, 1965, v. I, p. 269—306.

Оба автора приняли также участие в большой конференции по нелинейным диспергирующим волнам. Опубликованы ее труды:

Лайтхилл (Lighthill M. J., ed.).— Proc. Roy. Soc., 1967, A, p. 1—145. [Имеется перевод: Нелинейная теория распространения волн.— М: Мир, 1970.]

В них включены теоретическая и экспериментальная работа Бенджамена и Фейра по устойчивости таких волн и важная дополнительная работа по этому вопросу О. М. Филлипса. В эти труды входит также ценная обзорная статья К. Хассельмана о статистических ансамблях диспергирующих волн.

Интерпретация результатов Уизема в терминах волнового действия дана в его ранних работах. Кроме того, этой интерпретации и ее многочисленным приложениям уделяется особое внимание, и они очень интересно объяснены в статьях

Хейз (Hayes W. D.).— Proc. Roy. Soc., 1970, A, v. 320, p. 187—208; Proc. Roy. Soc., 1973, A, v. 332, p. 199—221.

Теория Уизема была уточнена путем включения в уравнения добавочных членов, учитывающих скорость изменения амплитуды. Одной из первых в этом направлении была статья

Чу, Мей (Chu V. H., Mei C. C.).— J. Fluid Mech., 1971, v. 47, p. 337—351. [Имеется перевод: сб. Механика, 1973, № 1 (137), с. 97—110.]

В ней получено лучшее согласование с экспериментальными результатами Фейра. Очень интересный общий подход был предложен в работе

Дейви (Davey A.).— J. Fluid Mech., 1972, v. 53, p. 769—781

и развит далее в статье

Дейви, Стюартсон (Davey A., Stewartson K.).— Proc. Roy. Soc., 1974, A, v. 338, p. 101—110.

В случае волн на глубокой воде хорошее согласование между теорией и новыми многочисленными экспериментами было достигнуто в еще более поздней работе

Юэнь, Лейк (Yuen H. C., Lake B. M.).— Physics of Fluids, 1975, v. 18, p. 956—960.

Исследование в ней основано на вариационном принципе, в котором используется плотность лагранжиана, рассчитанная с учетом зависимости от градиентов амплитуды.

В случае «весьма длинных» волн конкуренция между малыми нелинейными эффектами и малыми дисперсионными эффектами впервые была четко выявлена в работе

Кортевег, де Фриз (Korteweg D. J., de Vries G.).— Phil. Mag. (5), 1895, v. 39, p. 422—434

при помощи уравнения, которое носит имена авторов. Они развили теорию кноидальных волн, выведя как предельный случай уравнение для уединенной волны Скотта Рассела, которое было предложено в статье

Релей (Rayleigh, Lord).— Phil. Mag. (5), 1876, v. 1, p. 257—279.

Современные, намного более точные теории уединенной волны изложены, например, в работах

Лонге-Хиггинс, Фентон (Longuet-Higgins M. S., Fenton J. D.).— Proc. Roy. Soc., 1974, A, v. 340, p. 471—493,

и

Байетт-Смит, Лонге-Хиггинс (Byatt-Smith J. G. B., Longuet-Higgins M. S.).— Proc. Roy. Soc., 1976, A, v. 350, p. 175—189.

Метод нахождения очень общих решений уравнения Кортевега — де Фриза был получен в работе

Гарднер, Грин, Крускал, Миура (Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal K. D., Miura R. M.).— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095—1097.

Он широко применялся (см. книгу Уизема) к решениям отдельных задач Коши. Тщательная экспериментальная оценка пределов, в которых решения уравнения Кортевега — де Фриза действительно описывают «весьма длинные» волны, была дана в статье

Забуски, Гальвин (Zabusky N. J., Galvin C. J.).— J. Fluid Mech, 1971, v. 47, p. 811—824.

Отметим также применение этого уравнения к совершенно другим системам волн. Например, в случае нелинейных волн во вращающейся жидкости это сделано в работе

Лейбович (Leibovich S.).— J. Fluid Mech., 1970, v. 42, p. 803—822.

Существование уединенной волны в такой системе было экспериментально показано в работе

Притчард (Pritchard W. G.).— J. Fluid Mech., 1970, v. 42, p. 61—83.

Внутренние волны большой амплитуды рассматривались в статье

Бенджамен (Benjamin T. B.).— J. Fluid Mech., 1967, v. 29, p. 559—592.

Очень детальное экспериментальное и теоретическое исследование проведено в работе

Торп (Thorpe S. A.).— Phil. Trans. Roy. Soc., 1968, A, v. 263, p. 563—614.

О развитии цепочки внутренних волн в жидкости конечной глубины см. статью

Лонг (Long R. R.).— Tellus, 1972, v. 24, p. 88—99.

Интересное применение современного функционального анализа к получению доказательства существования уединенной волны в стратифицированной жидкости содержится в работе

Бенджамен (Benjamin T. B.). An exact theory of finite steady waves in continuously stratified fluids.— University of Essex: Fluid Mechanics Research Institute Report No. 48, 1973.

Нелинейная теория распространения внутренних волн в среде с постепенно меняющимися свойствами излагается в статье

Гримшоу (Grimshaw R.).— J. Fluid Mech., 1972, v. 54, p. 193—207.

Общая теория статистического ансамбля нелинейно взаимодействующих волн многим обязана следующим работам

Филлипс (Phillips O. M.).— J. Fluid Mech., 1960, v. 9, p. 193—217,

Лонге-Хиггинс, Филлипс (Longuet-Higgins M. S., Phillips O. M.).— J. Fluid Mech., 1962, v. 12, p. 333—336.

Ключевую роль сыграли статьи

Хассельман (Hasselmann K.).— J. Fluid Mech., 1962, v. 12, p. 481—500; J. Fluid Mech., 1963, v. 15, p. 273—281, p. 385—398.

Более того, путем привлечения мощных методов физики твердого тела этот автор в дальнейшем придал предмету большую убедительность и общность в работе

Хассельман (Hasselmann K.).— Rev. Geophys., 1966, v. 4, p. 1—32.

К изучению взаимодействий между поверхностными волнами и внутренними волнами эти методы применены в работе

Кенион (Kenyon K. E.).— J. Marine Res., 1968, v. 26, p. 208—231.

С более полной библиографией можно ознакомиться по короткой обзорной статье

Филлипс (Phillips O. M.).— Ann. Rev. Fluid Mech., 1974, v. 6, p. 93—110.

Большие возможности метода Хассельмана указаны в работе

Мюллер (Müller P.).— J. Fluid Mech., 1976, v. 77, p. 789—823.

Используя систему «замыкания», отвечающую по существу гауссовой статистике ансамбля внутренних волн, в ней успешно вычисляется эффективный коэффициент вертикальной диффузии для горизонтальной составляющей количества движения, которую они могут вызвать в океане. Достижение аналогичных результатов в теории турбулентности лежит пока что за пределами ее возможностей.

Список обозначений

Здесь перечислены лишь часто встречающиеся символы. Во второй колонке приведены обычно используемые значения, в третьей — используемые локально.

Символ	*Обычное значение*	*Исключения*
a	амплитуда волны (гл. 3 и далее)	радиус сферы (гл. 1)
b	ширина (гл. 2 и далее)	смещение сферы (гл. 1)
c	скорость волны	
c_p	удельная теплоемкость при постоянном давлении	
c_v	— — — — объеме	
f	функция	кориолисов параметр (эпилог)
g	ускорение силы тяжести	какая-либо функция
h	глубина	
i	мнимая единица	
k	волновое число при одномерном распространении	теплопроводность
l	длина (гл. 1—3)	
$\mathbf{k} = (k, l, m)$	трехмерный волновой вектор (гл. 4)	m — объемный расход источника (1.4)
$\mathbf{n}$	единичный вектор нормали	
n	целое число	
o	меньше по порядку величины, чем...	
p	давление	
q	массовый расход источника (гл. 1); вертикальная составляющая потока массы (гл. 4)	
$\mathbf{r}$	вектор положения	
r	расстояние от начала координат	
t	время	
u	скорость жидкости в одномерном движении	
v	избыточная скорость сигнала при одномерном распространении	
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	вектор скорости для трехмерных движений	
x, y, z	координаты	
A	площадь	
B	вынуждающий коэффициент (3.9 и далее)	B — магнитное поле (эпилог)
C	емкость (только гл. 1 и 2)	в последующих главах и эпилоге — какая-либо константа

D	сопротивление (гл. 3 и далее)	растяжимость (2.2)
E	удельная внутренняя энергия	модуль Юнга (2.2)
		$\mathbf{E}$ — вектор электрического поля (эпилог)
$\mathbf{F}$	сила	
F	преобразование Фурье от вынуждающей функции	
$\mathbf{G}$	интенсивность диполя	
$\mathbf{I}$	интенсивность (поток волновой энергии)	
J	объемный расход (гл. 2)	якобиан (4.8)
K	сжимаемость (только гл. 1 и 2); гауссова кривизна поверхности волновых чисел (4.9 и далее)	длина вектора волновых чисел (4.8)
M	масса	
M, N	целочисленные индексы	составляющие волнового числа источника (1.12)
O	по порядку не превосходит	
P	мощность	интеграл, используемый в теории Римана (2.8, 2.9)
Q	массовый расход на единицу объема (только гл. 1 и 4)	площадь под волновым профилем (гл. 2)
$P(z)$, $Q(z)$	зависимости избыточного давления и вертикальной составляющей потока массы от координаты z (гл. 4)	
R	универсальная газовая постоянная	
S	удельная энтропия	поверхность волновых чисел (4.9 и далее)
T	температура; поверхностное натяжение	вспомогательная времяподобная переменная (1.13)
U	скорость ударной волны (гл. 2); групповая скорость (гл. 3 и 4)	скорость центра масс тела $= \mathbf{U}$ (гл. 1)
V	объем (гл. 1 и 2); скорость жидкости по отношению к препятствию или иным источникам волн (гл. 3 и 4)	потенциал в уравнении Шредингера (4.5)
W	плотность волновой энергии	
Y	проводимость (гл. 2)	
Z	сопротивление (гл. 2)	
X, Y, Z	повсюду используются как специальные координаты	
α	локальная фаза	коэффициент расширения (1.2, 4.3)
γ	отношение удельных теплоемкостей	
δ	коэффициент диффузии звука (гл. 1 и 2); малая величина с размерностью частоты (3.7 и далее)	

ζ	вертикальное смещение (в особенности водной поверхности)	(ξ, η, ζ) — направляющие косинусы (1.1)
η	граничное значение (3.9 и далее)	
θ	угол с осью	
$\varkappa$	кривизна	малая величина с размерностью волнового числа (1.1, 3.9 и эпилог)
λ	длина волны	
μ	вязкость	магнитная проницаемость (эпилог)
ν	кинематическая вязкость	
ρ	плотность	
φ	потенциал скорости	
χ	соленость	
ω	частота	
Δ	дивергенция	
Θ	фазовый сдвиг	
Ω	завихренность	

Индексы

a	атмосферное	
e	избыточное по отношению к невозмущенному значению	
ex	снаружи от погранслоя	отброшенная часть (1.3)
r	относительно невозмущенного движения	
w	связанное с волнами	

Именной указатель

Аббот 573
Айлифф 579
Аккад 581
* Альвен 582
Анати 576
Андерсон Д. Л. Т. 581
Андерсон Дж. Е. 579
Апостол 566
Арнольди 570

Бадден 578
Байетт-Смит 573, 583
Барбер 574
Бейт 568
* Бенджамен 573, 584
Беранек 568, 569
Блохинцев Д. И. 577
Бреддок 580
Бредли 569
Брезертон 578, 579
Бреннер 572
* Брент 576
Бреховских Л. М. 577
Букер 578
* Буссинеск 576
Бэтчелор 565, 571
Бюргерс 571

Варлей 572
Вебстер 570
Вестервельт 572
Вехаузен 574
Ву 570
* Вяйсяля 576

Гальвин 584
Гарабедян 566
Гарднер 584
Гаррик 570
Гейдон 571
* Гельмгольц 573
Герретт 578, 579
Гольдбург 576
Гольдстейн Г. 565
Гольдстейн М. Е. 569
Госсард 576
Гравс 574
Гримшоу 575, 584
Грин 584
Гринвуд 565
Гринспэн 579
Гэд 575
* Гюгонио 571

Данджи 580
Дефан 567
Дефей 573
Джефрис Б. 566
Джефрис Г. 566
Джонс 565
Джонсон 567
Джордан 569
Дикон 582
Дрисше, ван ден 580
Дэви 583
Дэвис А. М. 581
Дэвис Г. Г. 578
Дэвис Г. Дж. 565
Дэвис П. А. 580
Дэвис Р. М. 571

Забуски 584
Зельдович Я. Б. 569
Зоммерфельд 567

Иббетсон 580
* Инуи 575
Иоганнесен 577

Йи 576

Камбербач 572
Карпман 580

[1]) Звездочками отмечены авторы, упомянутые также в предметном указателе.

Картрайт 581
Каулинг 579
* Кельвин 574, 580
Кенион 584
Кёрл 565
Кинг 570
Клеммоу 567
Компанеец А. С. 569
* Кортевег 583, 584
Крайтер 569
Крайтон 571
Крускал 584
Кьелас 576

Лайтхилл 566, 568, 570, 573, 574, 577, 578, 580—583
Ламбракис 571
Лейбович 580, 584
Лейк 583
Ли 573
Лонг 578, 580, 584
Лонге-Хиггинс 577, 581—583
Лукассен 573
Лукассен-Рейндерс 573
Лезем 574
Лэмб 569

Майлс 573, 581
Макдональд Д. 566
Макинтайр 578
Маккормик 573
Маклахлан 569
Манк 574, 581
Мей 583
Мерцбахер 567
Миллер Г. Р. 574
Миллер Дж. С. П. 578
Милфорд 567
Мисак 575
Миура 584
Монингер 576
Морс 565
Моубрей 577
Моффетт 582
Муар 569
Мэзон 568
Мюллер 584

Нейман 567
Ниборг 572

Озер 580
Олсон 568
Оуэн 571

Пайерс 579
Пао 576
Пауэрс 574
Пекерис 581
Перегрин 575
Пиди 580
Пирсон 567
Пламптон 579
Пози 579
Пойнтон 567
Прайс 570
Праудмен 580
Пресс 579
Пригожин 573
Придмор-Браун 577
Притчард 584

Райзер Ю. П. 569
Райли 572
Рассел Скотт 574, 583
Рауледс 581
* Рейнольдс 572, 577
Рейтц 567
* Релей 568, 571, 574, 583,
Рил 567
* Риман 571
Розенхед 565
* Россби 581
Рэнкин 571
Рэрити 577

Сагден 570
Саусвелл 566
Свердруп 567
Сибасс 580
Сквайр 572
Снеддон 566
Снодграсс 574
Сокольников 566
Соуорд 582
Стефенс 568
* Стивенсон 577
Стикс 579
Стокер 573
* Стокс 574, 575, 582
Столлери 571
Стюарт Дж. Т. 572
Стаюрт Р. В. 577
Стюарт Р. Д. 566
Стюартсон 581—583
Суинбенкс 578

* Тейлор 571, 580
Тернер 576

Толстой 576
Томас А. 570
* Томас Н. 577
Томпсон П. 571
Томпсон Р. 577
Томсон 574
Торп 584
Трастрэм 581

* Уизем 569, 571, 574, 580, 583, 584
Уилмор 566
Уильямс 570
Урсел 575

* Фейр 583
Фельтхаммар 582
Фентон 583
Ферраро 579
Филлипс Е. 566
Филлипс О. 573, 576, 583, 584
Флезер 581
Флеминг 567
Фоукс Уильямс 570, 571, 578
* Фриз 583, 584
* Фрост 574
* Фруд 574
Фультц 580

Хайд 580, 582
Хаппель 572
Харкрайдер 579
Хаскелл 579
Хассельман 574, 583, 584
Хейвлок 574
Хейз 572, 583
Хелливел 579
Хеммек 580
Хендерсон 572
Хендершотт 581
Херл 570
Херлофсон 582
Хесс 567
Хинце 582
Хогбен 575
Холт 579
Холтон 568
Хоув 571
Хоукинг 570
Хук 576

Чоу 572
Чу 583

Шварц И. 571
Шварц Л. 582
Шерклиф 567
Шифф 567

Эверест 575
* Эйри 578
Экарт 575
Экман 576
Эндрюс Д. 578
Эндрюс Ф. 567

Юэнь 583

Янг 576

Предметный указатель

Абсолютная частота 396
Акустическая компактность 42, 86, 448, 568—572
— мощность 31, 38, 568—572
Акустический волновод 524, 578
— поток (ветер) 30, 413, 568—572
Альвеновская скорость волны 535, 567, 579, 582
Амплитуда волн на воде 266
— — — в нелинейной теории 547
— — — локальная 298, 310
— — — максимальная 545, 582
Андреевский крест 382, 577
Аорта 156, 182, 566
Аорты бифуркация 139
Артерии 127, 156, 566
Атеросклероз 147, 566
Атлантический океан 366, 567, 581
Атмосфера 394, 512, 567
— изотермическая 241, 360, 520
Аэродинамическая генерация звука 61, 80, 569—571

Бегущая волна 122, 291, 572, 573
Бенджамена — Фейра неустойчивость 556, 583
Бернулли уравнение 16, 544, 565
Бойля закон 19
Бора 235, 562, 572, 573
— волнистая (ундулярная) 225
— турбулентная 225
Борновское приближение 77
Буссинеска приближение 352, 355, 364, 373, 394, 576
Быстроходный катер 335, 339

Ван-дер-Ваальса уравнение 112, 566 567
Вариационный принцип 547—557, 579, 582, 583
Варикозные колебания волны в термоклине 372, 523
Вентури эффект 493, 565
Взаимная поляра 451, 578
Волна взрывная
— плоская 17, 32, 76, 371
— продольная 17
— ударная 569—572
Волновое действие 402
— сопротивление 8, 337, 491, 574, 575
— уравнение 13, 16, 82
— — двумерное 463, 516
— — одномерное 16, 121
— — сферически-симметричное 32, 87
Волновой пакет 304
— профиль 238
Волновые числа 380, 439
Волнообразные колебания 371, 480, 520, 575
Волны весьма длинные 556
— гравитационно-акустические 512
— длинные 9, 10, 118, 124, 262, 300, 515
— захваченные 10, 369, 404, 480
— капиллярные 277
— кноидальные 558, 561
— сжатия 189, 201
Время запаздывания 33, 43
Вспенивание на гребнях волн 224, 325, 546, 560, 573, 574, 582, 583
Вязкий пограничный слой 162
Вязкое касательное напряжение 167
Вязкость 14, 24, 101, 205, 251, 287, 409, 423, 458, 565, 567, 573
Вяйсяля — Брента частота 351—377, 380, 393, 405, 477, 497, 515, 576—578

Газ многоатомный 109
— одноатомный 109
— совершенный 19, 233
Гамильтона принцип 547, 565
— функция 388
Гельмгольца резонатор 151, 573
— теорема 15, 565
Геометрическая акустика 90, 99, 116, 155, 385, 577
Гидравлическая средняя глубина 123
Гидравлический прыжок 218, 560, 562, 572, 573, 584
— удар 117

Гидростатическое соотношение 24, 123, 350
Граница раздела 132, 349, 372, 575
Громкоговоритель 38, 93, 117, 161, 234, 568, 569
Групповая скорость 10, 255, 295, 313, 379, 301, 515, 573
— — эффективная 554
Гюгонио закон 199, 203, 569, 572

Движущийся источник 76
Децибел 30, 569, 570
Диспергирующие волны 10, 569, 580, 582, 583
Дисперсионное соотношение 26, 268, 361, 326
— — неоднородное 313
Дисперсия 260, 425
Диссипация 20, 23, 240, 566, 569, 571
— внутренняя 283, 423, 435, 458, 576, 577, 584
— поверхностная 223, 283, 325, 583, 584
Диффузное излучение 509
Длина возмущенной зоны 215
— волны 25
Допплера соотношение 397, 482

Емкость 77, 145

Завихренность 15, 165, 257, 580
Задержка 148
Закон сохранения массы 79
Запаздывание 105
Затухание 9, 100, 267, 327
Захваченные волны 10, 369, 480, 404
Звуковой ветер 411, 568, 572
— удар 571, 244, 252, 571

Избыточная скорость сигнала 186, 211, 232
Избыточное давление 27
Изотропный поток 80
Индуктивность 148
Инерционные волны 529, 580
Инерция жидкости 14
Интенсивность звука 28, 43, 568, 569
— ударной волны 201
Инуи эксперимент 492, 575
Источник звука 38, 39, 43

Кавитация 52, 113, 565
Каустика 575, 578
Квадруполь 69, 78
Квазиодномерные волны 502
Кельвина клин корабельных волн 335, 487, 574, 575, 580
Когерентные флуктуации 93
Количество движения 45
Компактная область 129
Компактность 116
Компактное распределение источников 448, 568—572
Компактный источник 9, 508
Комплексная проводимость 142, 144
Конвективная скорость 13
Кортевега — де Фриза уравнение 557, 562, 584
Коэффициент теплопроводности 107
Критическая глубина 252, 577
Критический слой 578
Критическое значение 117
Крылья насекомых 59

Лагранжа уравнения 547
Лапласа уравнение 33
Лапласиан 16
Линейная теория 13, 25, 121, 531, 537
Локальная скорость 13
Локальное дисперсионное соотношение 359
Луковицеобразный нос 493, 575

Максвелла соотношение 23
Массовый расход 34, 113, 120
Математический маятник 343
Маха локальное число 202
Мембрана 117
Метод наискорейшего спуска 308
Множитель сферического ослабления 35
Мода бароклинная 530, 567, 568, 581
— баротропная 530, 567, 568, 581
— основная 117, 579
Монополь 32
Мощность источника 38

Напряженность диполя 41, 47
— точечного источника 34, 47, 82
Невозмущенная жидкость 70
Недиспергирующие волны 295, 541
Нелинейная дисперсия 562
Нелинейные процессы 563

Неподвижная сфера 75, 76
Несжимаемая жидкость 33
Неустойчивость потока 59

Обобщенная жесткость 51, 273
— масса 51, 273
Обратимый процесс 22
Объемный расход 33
Океанический термоклин 368, 520, 576
Остроградского — Гаусса теорема 83
Ось диполя 44
Отражение отрицательное 135
— положительное 135
— энергия 116
Отраженная волна 135, 519

Падающие звуковые волны 70
Парсеваля теорема 312
Плотность действия 549
— лагранжиана 547, 583
Подветренные волны 374
Поле ближайшее 44
— ближнее 43, 73
— дальнее 38, 43, 73, 242
— слабое 73
Порог слышимости 31
Пороговая частота 161, 250, 505
Потенциал скорости 15
Поток волновой энергии 354
— количества движения 80
— массы 45
— тепла 107
Предельное решение 559
Преломление 314
Приливные силы 532
Приливы 581
Принцип соответствия 388
Присоединенная масса 57
Проводимость 134, 141, 156
Простое растяжение 106
— сжатие 106
Пуассона коэффициент 125
Пульсация пузырьков 49
Пульсовая волна в артериях 118, 139, 156, 249, 566

Радиальные колебания 87
Разрушающая интерференция 93
Разрывная волна 119
Растяжимость 118, 121, 146, 566
Резонанс 9, 73, 144, 157, 171, 504, 565—568, 579
Резонансная частота 73, 151
Рейнольдса маятник 343
— напряжение 399, 408, 412, 421, 522, 577
— число 413, 423, 565, 572
Релеевское рассеяние 76
Релея закон 421, 568
Рефракция 386, 398, 404, 573, 574
— волновой энергии 387
Римана теория 174—180, 209, 571
Россби волны 533, 579—582
Ротор поля 15
Рупор громкоговорителя 117, 234, 250, 568
— — конический 250, 569

Сверхзвуковой удар 244, 252, 332, 571
Сдвиговое искажение 188
Сжимаемость 14, 121
Сила инерции 74, 398
— трения 163
Сирена 48, 49
Скорость звука 18, 23
— света 17
— распределения энергии 3, 8, 568
Снелла закон 392, 404
Солевые пальцы 368
Солитон 562
Солитонов ансамбль 562
Сопротивление 134, 151
Спектр 491
Стационарная картина волн 321
— фаза 92, 245, 237, 304, 331, 424, 443, 462, 521, 566, 574, 580
Стеноз 249
Стивенсона уравнения 524, 577
Сток 39
Стокса предельная волна 516
Стокслет 413, 414
Стоксовский дрейф 342
Стратифицированная атмосфера 255 373, 391, 402, 512, 567, 568, 572, 577—579
— энтропия 25
Стратифицированной атмосферы устойчивость 350, 374
Стратифицированный океан 350, 391, 576, 581
Стратосфера 350, 374

Тейлора столб 529, 580
Теплоемкость 20, 21
Теплопроводность 14, 20, 105

Толщина вытеснения 284, 285
Томаса — Стивенсона анализ внутренних волн 458, 577
Точки застоя 422
Трение о дно 283
Тропопауза 374
Турбулентность 12, 224, 577, **582**, **585**
Турбулентный поток 69, 80

Ударная волна 195, 252
— — хвостовая 216
Уединенная волна 559, 562, **583**, **584**
Уизема правило 214
— уравнение 551
Ундулярный прыжок 224
Уравнение количества движения 14, 101, 120, 158, 177, 257, 515, 565
— неразрывности 14, 15, 298, 102, 158, 169, 286, 358, 515, **565**
Условие излучения 327

Фазовая скорость 10, 224
— функция 297
Физиология кровообращения 9, **566**
Фруда число 336

Холла эффект 540

Центр инерции 56
Центрированная простая волна 193
Цилиндрические волны 502
Цунами 532, 580

Шлирен-метод 382, **576**
Шум винта 59,
— струи 78,
Шума уменьшение 9, 79, **569**, **570**

Эйри интеграл 465, **578**
Эластомеры 127
Энергия внутренняя 19—22
— кинетическая 26
— потенциальная 26, 27
— свободная 282
Энтропия 22, 23, **571**
Эоловы тона **59**, **113**,
Эффективная сжимаемость 122

Юнга модуль 125

Оглавление

Предисловие редакторов перевода 5
Предисловие 7
Пролог 8

1 Звуковые волны 13

1.1. Волновое уравнение 13
1.2. Скорость звука 18
1.3. Акустическая энергия и акустическая интенсивность 25
1.4. Точечный источник 31
1.5. Акустический диполь 39
1.6. Компактные области источников в общем случае 48
1.7. Компактные области источников с дипольными дальними полями 53
1.8. Моделирование в волновой кювете 60
1.9. Рассеяние на компактных телах 69
1.10. Излучение квадруполя 78
1.11. Излучение от сфер 87
1.12. Излучение от плоских стенок 93
1.13. Диссипация акустической энергии 100
Упражнения к главе 1 111

2. Одномерные волны в жидкостях 116

2.1. Продольные волны в трубах и каналах 116
2.2. Примеры, относящиеся к эластичным трубам и открытым каналам 122
2.3. Передача волн через сочленения 129
2.4. Распространение волн через разветвленные системы 137
2.5. Полости, сужения, резонаторы 144

2.6. Линейная теория распространения волн при постепенном изменении физических характеристик жидкости и поперечного сечения 153
2.7. Ослабление волны за счет трения 162
2.8. Нелинейная теория плоских волн 172
2.9. Простые волны 180
2.10 Ударные волны 191
2.11. Теория простых волн, содержащих слабые ударные волны 205
2.12. Гидравлические прыжки 218
2.13. Нелинейное распространение при постепенном изменении физических характеристик жидкости и поперечного сечения 228
2.14. Нелинейная геометрическая акустика 237
Упражнения к главе 2 248

3. Волны на воде 254

3.1. Поверхностные гравитационные волны 254
3.2. Синусоидальные волны на глубокой воде 259
3.3. Синусоидальные волны на воде произвольной, но постоянной глубины 266
3.4. Волны ряби 274
3.5. Затухание 283
3.6. Введение в теорию групповой скорости 293
3.7. Исследование диспергирующих систем методом Фурье 302
3.8. Скорость переноса энергии 312
3.9. Картины волн, создаваемые препятствиями в стационарном потоке 319
3.10. Корабельные волны 330
Упражнения к гл. 3 341

4. Внутренние волны 347

4.1. Введение в теорию внутренних гравитационных волн 347
4.2. Объединенная теория звуковых и внутренних волн 355
4.3. Внутренние волны в океане и атмосфере 364
4.4. Введение в анизотропную дисперсию 375

4.5. Общая теория прослеживания луча 385
4.6. Прослеживание луча в воздушном потоке 394
4.7. Стационарные течения, генерируемые затуханием волн 409
4.8. Метод стационарной фазы в трехмерном случае 424
4.9. Общая теория осциллирующих источников волн 436
4.10. Внутренние волны, генерируемые осциллирующим источником 451
4.11. Каустики 465
4.12. Генерирование волн движущимися вынуждающими воздействиями 482
4.13. Волноводы 502
Упражнения к главе 4 519

Эпилог 526

Часть 1. Различные типы волн в жидкостях 526
Часть 2. Нелинейные эффекты при распространении диспергирующих волн 541

Библиографические комментарии 565

Часть 1. Основная литература 565
Часть 2. Литература по акустике 568
Часть 3. Литература по волнам на воде 572
Часть 4 Литература по стратифицированным жидкостям 575
Часть 5. Библиографические комментарии к эпилогу 579

Список обозначений 586

Именной указатель 589

Предметный указатель 592