# ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ (2001 ГОД)

Задачи в вариантах составлены большим коллективом авторов — сотрудников механико-математического факультета. Тексты решений написаны П. А. Бородиным и И. Н. Сергеевым (под общей редакцией И. Н. Сергеева).

В брошюре приведены варианты письменных вступительных экзаменов и олимпиад «Абитуриент-2001» по математике, которые проводились в 2001 году экзаменационной комиссией механико-математического факультета на следующих факультетах Московского университета: механико-математическом, химическом, наук о материалах, биологическом, фундаментальной медицины, почвоведения, географическом, психологии, социологическом и филологическом. Для каждого экзамена опубликовано два варианта: один из них — с краткими решениями всех задач, а другой — с ответами. Разобраны задачи из билетов устного экзамена на механико-математический факультет.

В конце брошюры приведены некоторые сведения для поступающих на механико-математический факультет.

Для учащихся старших классов, учителей математики, абитуриентов.

Оглавление

# Механико-математический факультет

## Вариант 1 (март)

**1.** Решить уравнение

$$3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2\left|\sqrt{3x+18} - 2\right|.$$

**2.** Решить неравенство

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

**3.** В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке $E$, а углы $AED$ и $BCD$ равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки $C$, $D$ и $E$, пересекает основание $AD$ в точке $F$ и касается прямой $BF$. Найти высоту трапеции и её основания.

**4.** Можно ли подобрать числа $A$, $B$, $\varphi$, $\psi$ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x - \tfrac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 + A\cos(x+\varphi) + B\sin(2x+\psi)$$

принимало при всех $x$ одно и то же значение $C$? Если да, то какие значения может принимать константа $C$?

**5.** Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник $ABC$, в котором $AB = BC = 1$ и $AC = \frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки $A$ проводится плоскость, делящая объём призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

**6.** Найти все значения $a$, при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leqslant 0 \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

## Решения

**1.** *Ответ:* 6.

$$3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2\left|\sqrt{3x+18} - 2\right|$$
$$\iff f(x) = f(\sqrt{3x+18}),$$

где $f(t) = 3t - 2|t-2| = \begin{cases} t+4, & t \geqslant 2, \\ 5t-4, & t \leqslant 2. \end{cases}$

Функция $f$ возрастает на каждом из лучей $[2;\infty)$ и $(-\infty;2]$, а значит, и на всей числовой прямой. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$x = \sqrt{3x+18} \iff \begin{cases} x^2 = 3x+18 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-6)(x+3) = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\iff x = 6.$$

**2.** *Ответ:* $(-3; 2-2\sqrt{6}) \cup (2-2\sqrt{6}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2+2\sqrt{6}) \cup (2+2\sqrt{6}; 7)$.

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4} \iff \begin{cases} \frac{\lg(7-x)\cdot\lg(x+3)}{\lg^2(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4} \\ x+3 \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4\lg(7-x)\cdot\lg(x+3) < \big(\lg(7-x) + \lg(x+3)\big)^2 \\ x+3 \neq 1 \\ 21+4x-x^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \big(\lg(7-x) - \lg(x+3)\big)^2 > 0 \\ x \neq -2, 2 \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 7-x \neq x+3 \\ x+3>0 \\ 7-x>0 \\ x \neq -2, 2 \pm 2\sqrt{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3<x<7 \\ x \neq \pm 2, 2 \pm 2\sqrt{6}, \end{cases}$$

причём $-3 < 2-2\sqrt{6} < -2 < 2 < 2+2\sqrt{6} < 7$.

**3.** *Ответ:* $\frac{450}{17}, \frac{255}{8}, \frac{960}{17}$.

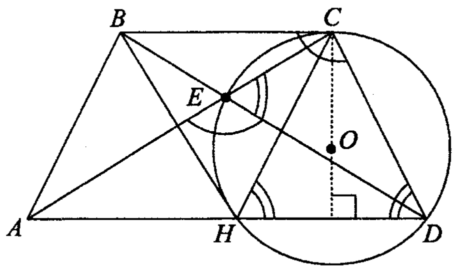


Рис. 1

Вписанные углы $CED$ и $CFD$ равны, так как опираются на общую дугу $CD$ (рис. 1), а углы $CED$ и $CDF$ равны, так как составляют в сумме с углами $AED$ и $BCD$ по $180°$.

Поэтому $\angle CFD = \angle CDF$ и высота трапеции равна высоте $CH$ (рис. 1) равнобедренного треугольника $FCD$, то есть в силу теоремы синусов

$$\sin\angle D = \frac{CF}{2R} = \frac{30}{2\cdot 17} = \frac{15}{17}$$
$$\Longrightarrow CH = CD\sin\angle D = \frac{30\cdot 15}{17} = \frac{450}{17}.$$

Так как прямая $BC$ перпендикулярна радиусу $CO$ окружности, то $BC$ — касательная и $BF = BC$ ($BF$ — касательная по условию), причём $\angle BCF = \angle CFD$. Следовательно, треугольники $CBF$ и $FCD$ подобны, откуда получаем

$$BC = CD\cdot\frac{CF}{FD} = \frac{30}{2\cos\angle D} = \frac{15}{\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}} = \frac{15\cdot 17}{8} = \frac{255}{8}.$$

Углы $AFC$ и $BCD$ равны (поскольку составляют в сумме с углами $CFD$ и $CDF$ по $180°$).

$$\angle CBD = \angle EDF = \tfrac{1}{2}\overset{\frown}{EF} = \angle ECF,$$

поэтому треугольники $ACF$ и $DBC$ подобны, а значит,

$$AF = CD \cdot \tfrac{CF}{BC} = FD = CD \cdot 2\cos\angle D = 30 \cdot \tfrac{2\cdot 8}{17}$$
$$\Longrightarrow AD = AF + FD = 2AF = \tfrac{960}{17}.$$

**4.** *Ответ:* да, $C = \frac{9}{2}$.

Если к выражению

$$f(x) = \left(\sin(x - \tfrac{\pi}{3}) + 2\right)^2 = \sin^2(x - \tfrac{\pi}{3}) + 4\sin(x - \tfrac{\pi}{3}) + 4$$
$$= 4\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x - \tfrac{2\pi}{3}) + 4\sin(x - \tfrac{\pi}{3})$$

прибавить выражение

$$g(x) = A\cos(x + \varphi) + B\sin(2x + \psi)$$
$$= A\sin(x + \varphi + \tfrac{\pi}{2}) + B\cos(2x + \psi - \tfrac{\pi}{2}),$$

где

$$A = -4, \quad B = \tfrac{1}{2}, \quad \varphi = -\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{3}, \quad \psi = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2\pi}{3},$$

то сумма $h(x) = f(x) + g(x)$ будет константой.

С другой стороны, если выражение

$$h(x) = 4\tfrac{1}{2} + \left(A\cos(x + \varphi) + 4\sin(x - \tfrac{\pi}{3})\right)$$
$$+ \left(B\sin(2x + \psi) - \tfrac{1}{2}\cos(2x - \tfrac{2\pi}{3})\right)$$

есть константа, то при всех $x$ имеем

$$0 = h(x) - h(x + \pi) = 2\left(A\cos(x + \varphi) + 4\sin(x - \tfrac{\pi}{3})\right)$$
$$\Longrightarrow 0 = h(x) - h(x + \tfrac{\pi}{2}) = 2\left(B\sin(2x + \psi) - \tfrac{1}{2}\cos(2x - \tfrac{2\pi}{3})\right)$$
$$\Longrightarrow h(x) = 4\tfrac{1}{2} + 0 + 0 = \tfrac{9}{2}.$$

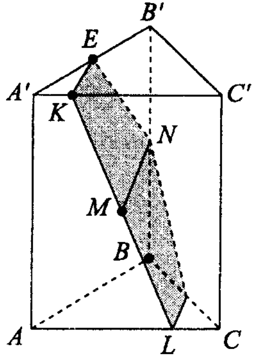


Рис. 2

**5.** *Ответ:* $\frac{169}{5292}\sqrt{187}$.

Заметим, что плоскость, проходящая через точку $M$ пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ и делящая объём призмы пополам, обязательно проходит через середину $N$ ребра $BB'$: действительно, если она проходит через точку $N$, то делит призму на две симметричные относительно оси $MN$ части, а если нет, то, пересекая грань $ACC'A'$ по некоторому отрезку $KL$ (рис. 2), она не может делить призму на равновеликие части, так как это уже делает плоскость $KLN$.

Таким образом, секущая плоскость перпендикулярна грани $ACC'A'$ и может пересекать эту грань либо по отрезку $K_1L_1$ (рис. 3), либо по отрезку $K_2L_2$ (рис. 4), где

$$\alpha = \angle AMD, \quad \sin\alpha = \tfrac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \tfrac{4}{5}, \quad AH = \tfrac{4}{13}, \quad AM = \tfrac{5}{14},$$
$$\beta = \angle AMH, \quad \sin\beta = \tfrac{56}{65}, \quad \cos\beta = \tfrac{33}{65},$$
$$\cos\angle DML_1 = \cos(\beta-\alpha) = \tfrac{12}{13}, \quad \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \tfrac{5}{12},$$
$$\sin\angle DMK_2 = \sin(\beta+\alpha) = \tfrac{323}{325}.$$

В первом случае сечение выглядит, как на рис. 2, и имеет площадь

$$S_1 = (MN + KE)\cdot KM = MN\big(1 + \tfrac{A'K_1}{A'D'}\big)ML_1 =$$

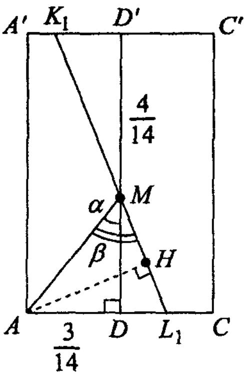


Рис. 3

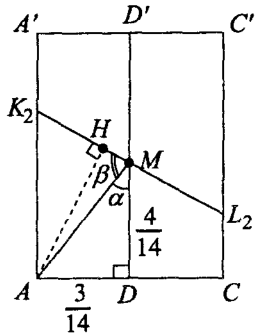


Рис. 4

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{14}\right)^2}\left(1+\frac{\frac{3}{14}-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{14}}{\frac{3}{14}}\right)\cdot\frac{4}{14\cdot\frac{12}{13}}=\frac{169}{14^2\cdot 27}\sqrt{187}=\frac{169}{5292}\sqrt{187}.$$

Во втором случае сечение — треугольное и имеет площадь

$$S_2=K_2M\cdot MN=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{323}{325}}\sqrt{1-\left(\tfrac{3}{14}\right)^2}=\frac{975}{14^2\cdot 323}\sqrt{187}<S_1.$$

**6.** *Ответ:* $-\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$.

Множество решений каждого из неравенств системы

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\leqslant 0\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\geqslant 0\end{cases}$$

может представлять собой отрезок, луч (с началом), объединение двух непересекающихся лучей, прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях А и Б.

А. Решением одного из неравенств является ровно одна точка, то есть либо

$$1)\quad \begin{cases}a^2-(a-1)(a+4)=0\\ a>1\end{cases}\iff a=\tfrac{4}{3},$$

тогда имеем

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 \leqslant 0 \\ 4x^2 + 14x + 7 \geqslant 0 \end{cases} \iff x = -2;$$

либо

$$2)\quad \begin{cases} (a+1)^2 - a(a+1) = 0 \\ a < 0 \end{cases} \iff a = -1,$$

тогда имеем

$$\begin{cases} -2x^2 - 2x + 3 \leqslant 0 \\ -x^2 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in \varnothing.$$

Б. Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, то есть существует решение системы

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0 \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\implies x^2 + 2x - 3 = 0 \implies \left[\begin{aligned} x &= -3 \\ x &= 1, \end{aligned}\right.$$

откуда либо

3) $a \cdot 9 - 2(a+1)3 + a + 1 = 0 \implies a = \frac{5}{4}$, тогда имеем

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 21 \leqslant 0 \\ 5x^2 + 18x + 9 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+3)(x+7) \leqslant 0 \\ (x+3)\left(x+\frac{3}{5}\right) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff -7 \leqslant x \leqslant -3$$

либо

4) $a + 2(a+1) + a + 1 = 0 \implies a = -\frac{3}{4}$, тогда имеем

$$\begin{cases} -7x^2 - 6x + 13 \leqslant 0 \\ -3x^2 + 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)\left(x+\frac{13}{7}\right) \geqslant 0 \\ (x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff x = 1.$$

Подводя итог, получаем, что требованию задачи удовлетворяют значения $a = -\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ и только они.

## *Вариант 2 (март)*

**1.** Решить уравнение

$$4x - 3|x-1| = 4\sqrt{5x+14} - 3\left|\sqrt{5x+14} - 1\right|.$$

**2.** Решить неравенство

$$\frac{\log_{24-2x-x^2}(x+6)}{\log_{4-x}(24-2x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

**3.** В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $AB = 10$ диагонали пересекаются в точке $E$, а углы $AED$ и $ABC$ равны. Окружность радиуса 13, проходящая через точки $A$, $B$ и $E$, пересекает основание $AD$ в точке $F$ и касается прямой $CF$. Найти высоту трапеции и её основания.

**4.** Можно ли подобрать числа $A$, $B$, $\varphi$, $\psi$ так, чтобы выражение

$$\left(\cos\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) + 3\right)^2 + A\sin(x - \varphi) + B\sin(2x - \psi)$$

принимало при всех $x$ одно и то же значение $C$? Если да, то какие значения может принимать константа $C$?

**5.** Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{8}{7}$ служит треугольник $ABC$, в котором $AB = \frac{6}{7}$ и $AB = BC = 1$. Через точку пересечения диагоналей грани $ABB'A'$ на расстоянии $\frac{11}{17}$ от точки $A$ проводится плоскость, делящая объём призмы пополам. Какова наименьшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

**6.** Найти все значения $a$, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 - 2(a+1)x + a + 5 \leqslant 0 \\ (a+1)x^2 - 2(a+2)x + a + 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

## Ответы

**1.** 7.

**2.** $-6 < x < 4$, $x \neq -1 \pm 2\sqrt{6}, -1, 3$.

**3.** $\frac{50}{13}, \frac{65}{12}, \frac{480}{13}$.

**4.** $C = \frac{19}{2}$.

**5.** $\frac{1275}{10192}\sqrt{10}$.

**6.** $-\frac{7}{4}, \frac{1}{3}$.

## *Вариант 3 (май)*

**1.** Решить неравенство

$$26^x + 27 \geqslant 9\left(6-\sqrt{10}\right)^x + 3\left(6+\sqrt{10}\right)^x.$$

**2.** При каких значениях $x$ чи́сла

$$\log_2(2x^2+4x), \quad \log_2(8-x^2-19x) \quad \text{и} \quad \log_2\left(x^2-15x+7\tfrac{1}{2}\right)$$

являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

**3.** Две окружности с центрами $O$ и $Q$, пересекающиеся друг с другом в точках $A$ и $B$, пересекают биссектрису угла $OAQ$ в точках $C$ и $D$ соответственно. Отрезки $OQ$ и $AD$ пересекаются в точке $E$, причём площади треугольников $OAE$ и $QAE$ равны 18 и 42 соответственно. Найти площадь четырёхугольника $OAQD$ и отношение $BC : BD$.

**4.** Решить уравнение

$$|\cos 2x \sin 6x| + |\cos 6x \sin 2x| = \sin \tfrac{3\pi}{11}.$$

**5.** Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник со сторонами $AB = BC = 15$ и $AC = 18$. Двугранные углы при рёбрах $AB$ и $BC$ равны по $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$, а при ребре $AC$ — $\frac{\pi}{4}$. Сфера, центр которой лежит в плоскости $ABC$, касается боковых граней в точках $K$, $L$ и $M$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

**6.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых графики функций

$$y = \frac{3x+1}{x} \quad \text{и} \quad y = \frac{4x+3a-7}{ax-1}$$

разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $(-\infty; \log_{6+\sqrt{10}} 9] \cup [\log_{6-\sqrt{10}} 3; \infty)$.

$$26^x + 27 \geqslant 9(6-\sqrt{10})^x + 3(6+\sqrt{10})^x$$
$$\iff (ab)^x + 27 - 9a^x - 3b^x \geqslant 0,$$

где $a = 6 - \sqrt{10}$, $b = 6 + \sqrt{10}$,

$$\iff (a^x - 3)(b^x - 9) \geqslant 0$$
$$\iff (x - \log_a 3)(x - \log_b 9) \geqslant 0$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} x \geqslant \log_a 3 \\ x \leqslant \log_b 9, \end{array}\right.$$

так как $\log_a 3 > \log_3 3 = \log_9 9 > \log_b 9$.

**2.** *Ответ:* $-8$.

Числа $\log_2(2x^2+4x)$, $\log_2(8-x^2-19x)$, $\log_2\left(x^2-15x+7\frac{1}{2}\right)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника в следующих случаях:

$$1)\quad \begin{cases} 2x^2+4x=8-x^2-19x \\ 2\log_2(2x^2+4x)>\log_2(x^2-15x+7\frac{1}{2})>0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+8)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0 \\ (2x^2+4x)^2>x^2-15x+7\frac{1}{2}>1 \\ 2x^2+4x>0 \end{cases} \iff x=-8,$$

так как

$$(2\cdot 64-4\cdot 8)^2>64+15\cdot 8+7\tfrac{1}{2}$$

и

$$\left(2\cdot\tfrac{1}{9}+4\cdot\tfrac{1}{3}\right)^2<\tfrac{1}{9}-15\cdot\tfrac{1}{3}+7\tfrac{1}{2};$$

$$2)\quad \begin{cases} 2x^2+4x=x^2-15x+7\frac{1}{2} \\ 2\log_2(2x^2+4x)>\log_2(8-x^2-19x)>0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2+19x=7\frac{1}{2} \\ 8-x^2-19x>1 \end{cases} \text{— решений нет;}$$

$$3)\quad \begin{cases} 8-x^2-19x=x^2-15x+7\frac{1}{2} \\ 2\log_2(8-x^2-19x)>\log_2(2x^2+4x)>0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x^2+4x=\frac{1}{2} \\ 2x^2+4x>1 \end{cases} \text{— решений нет.}$$

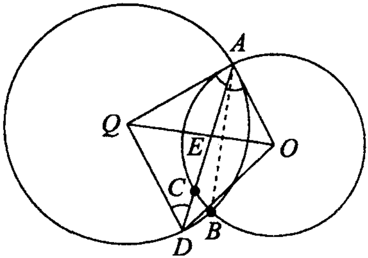


Рис. 5

**3.** *Ответ:* 200, 3 : 7.

Из равенства углов $QAD$ и $QDA$ (в равнобедренном треугольнике $AQD$; рис. 5) получаем

$$\angle QDA = \angle DAO \implies QD \parallel AO,$$

поэтому четырёхугольник $OAQD$ — трапеция и

$$S_{DOE} = S_{QAE} = 42, \quad S_{QED} = \frac{S_{DOE} \cdot S_{QAE}}{S_{OAE}} = \frac{42 \cdot 42}{18} = 98$$
$$\implies S_{OAQD} = 18 + 2 \cdot 42 + 98 = 200.$$

Так как $AE$ — биссектриса в треугольнике $AOQ$, то

$$\frac{OA}{QA} = \frac{S_{OAE}}{S_{QAE}} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7},$$

и по теореме синусов имеем

$$\frac{BC}{BD} = \frac{2 \cdot OA \cdot \sin \angle BAC}{2 \cdot QA \cdot \sin \angle BAD} = \frac{OA}{QA} = \frac{3}{7}.$$

**4.** *Ответ:* $\pm\frac{3\pi}{88} + \frac{\pi}{4}n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$|\cos 2x \sin 6x| + |\cos 6x \sin 2x| = \sin\frac{3\pi}{11}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2x \sin 6x \cos 6x \sin 2x \geqslant 0 \\ |\cos 2x \sin 6x + \cos 6x \sin 2x| = \sin\frac{3\pi}{11} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2x \sin 6x \cos 6x \sin 2x \leqslant 0 \\ |\cos 2x \sin 6x - \cos 6x \sin 2x| = \sin\frac{3\pi}{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 4x \sin 12x \geqslant 0 \\ |\sin 8x| = \sin \frac{3\pi}{11} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 4x \sin 12x \leqslant 0 \\ |\sin 4x| = \sin \frac{3\pi}{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 8x - \cos 16x \geqslant 0 \\ 1 - \cos 16x = 2\sin^2 \frac{3\pi}{11} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 8x - \cos 16x \leqslant 0 \\ 1 - \cos 8x = 2\sin^2 \frac{3\pi}{11} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 8x \geqslant \cos 16x = \cos \frac{6\pi}{11} \\ \cos 16x \geqslant \cos 8x = \cos \frac{6\pi}{11} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 16x = \pm\frac{6\pi}{11} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \cos 8x \geqslant 2\cos^2 8x - 1 \end{cases} \\ 2\cos^2 8x - 1 \geqslant \cos 8x = \cos \frac{6\pi}{11} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8x = \pm\frac{3\pi}{11} + \pi n \\ \cos 8x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 8x = \cos \frac{6\pi}{11} \\ \left[\begin{array}{l} \cos 8x \leqslant -\frac{1}{2} \\ \cos 8x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad 8x = \pm\frac{3\pi}{11} + 2\pi n,$$

так как $\cos\left(\pi \pm \frac{3\pi}{11}\right) < -\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2} < \cos \frac{6\pi}{11} < 1$.

**5.** *Ответ:* $\frac{9}{266}\sqrt{221}$.

Пусть $O$ — центр, а $r$ — радиус сферы, касающейся боковых граней в точках $K$, $L$, $M$ (рис. 6).

Тогда сфера, построенная на отрезке $SO$ как на диаметре, пересекает прямые $SK$, $SL$, $SM$ в точках $K$, $L$, $M$ соответственно, так как углы $SKO$, $SLO$, $SMO$ — прямые. Поэтому $SO$ — диаметр описанной около пирамиды $SKLM$ сферы (определяемой однозначно).

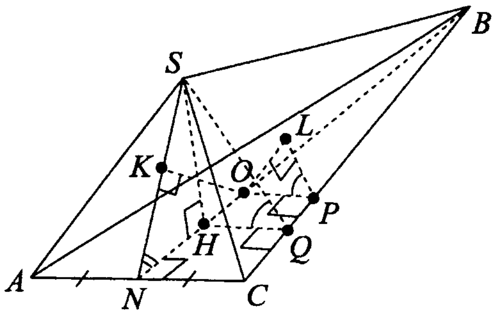


Рис. 6

Из симметричности пирамиды $SABC$ относительно плоскости $SNB$ (рис. 6) следует, что точки $O$ и $H$ (основание высоты $SH = h$ пирамиды) лежат на прямой $NB$, причём

$$\angle ONK = \angle HNS = \tfrac{\pi}{4}, \quad \angle OPL = \angle HQS = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{7},$$

откуда

$$HN = h, \quad HQ = 7h, \quad ON = r\sqrt{2},$$
$$OP = \frac{r}{\sin \operatorname{arctg} \frac{1}{7}} = 5r\sqrt{2}.$$

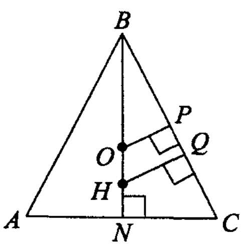


Рис. 7

Из подобия треугольников $BHQ$, $BOP$, $BCN$ (со сторонами $BC = 15$, $CN = 9$ и $BN = 12$; рис. 7) имеем

$$\frac{7h}{12-h} = \frac{5r\sqrt{2}}{12-r\sqrt{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \implies h = \frac{18}{19}, \quad r\sqrt{2} = \frac{9}{7}.$$

Из прямоугольного треугольника $SHO$ находим

$$SO^2 = h^2 + \left(r\sqrt{2} - h\right)^2 = \left(\tfrac{18}{19}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{7} - \tfrac{18}{19}\right)^2 = \frac{9^2 \cdot 221}{7^2 \cdot 19^2}$$
$$\implies \frac{SO}{2} = \frac{9\sqrt{221}}{7 \cdot 19 \cdot 2}.$$

**6.** *Ответ:* $[0; 1]$.

График функции

$$f(x) = \frac{3x+1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$$

есть гипербола, а график функции

$$g(x) = \frac{4x+3a-7}{ax-1}$$

может и не быть гиперболой при условии

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ \frac{4}{a} = \frac{3a-7}{-1} \end{array}\right. \iff a = 0, 1, \tfrac{4}{3}.$$

1) Если $a = 0$, то $g(x) = 7 - 4x$ и графики расположены, как на рис. 8: прямая $y = g(x)$ касается гиперболы $y = f(x)$, поскольку $g(x) = f(x) \iff 7 - 4x = 3 + \frac{1}{x} \iff x = 2$.

2) Если $a = 1$, то

$$g(x) = \frac{4x-4}{x-1} = 4, \quad x \neq 1,$$

и расположение графиков показано на рис. 9 (заметим, что $f(1) = 4$).

3) Если $a = \frac{4}{3}$, то (рис. 10)

$$g(x) = \frac{4x-4}{\frac{4}{3}x-1} = 3, \quad x \neq \frac{3}{4}.$$

4) Если $a \neq 0, 1, \frac{4}{3}$, то оба графика — гиперболы, которые в случае пересечения друг с другом разбивают плоскость на большее число

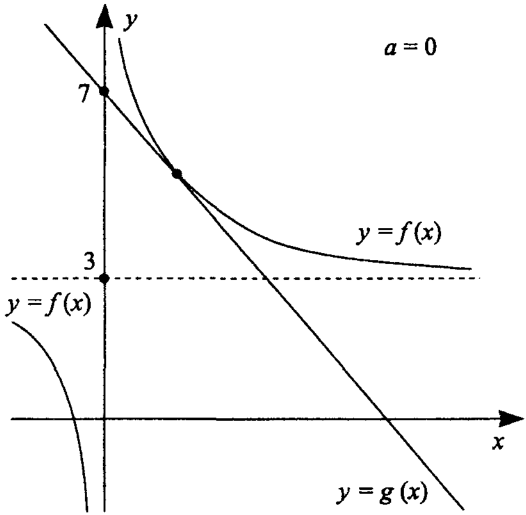


Рис. 8

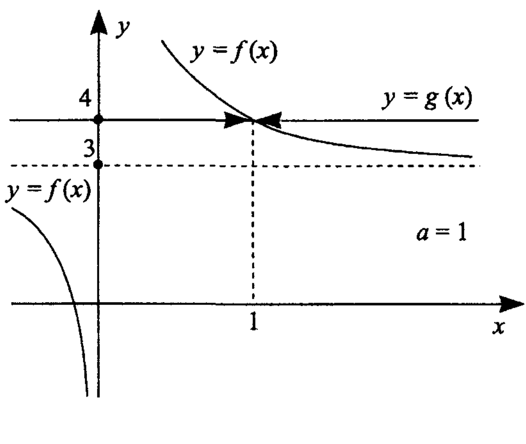


Рис. 9

частей, чем в случае непересечения, когда они разбивают плоскость

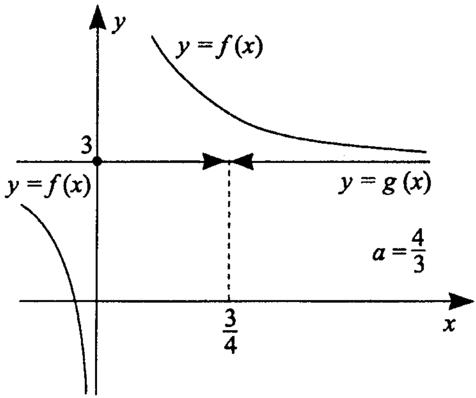


Рис. 10

как раз на пять частей. Последнее происходит тогда и только тогда, когда не имеет корней уравнение

$$f(x) = g(x) \iff \tfrac{3x+1}{x} = \tfrac{4x+3a-7}{ax-1}$$
$$\iff \begin{cases} (3x+1)(ax-1) = x(4x+3a-7) \\ x \neq 0, \frac{1}{a} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (3a-4)x^2 + 2(2-a)x - 1 = 0 \\ x \neq \frac{1}{a}, \end{cases}$$

т. е. когда дискриминант уравнения (квадратного, так как $3a \neq 4$) отрицателен:

$$(2-a)^2 + (3a-4) = a(a-1) < 0 \iff 0 < a < 1$$

(иначе он сразу положителен, ибо $a \neq 0, 1$, и последняя система обязательно имеет решение).

Итак, получаем, что нас устраивают в точности следующие значения: $a = 0$, $1$ и $0 < a < 1$.

## *Вариант 4 (май)*

**1.** Решить неравенство

$$27^x + 24 \geqslant 2\left(7+\sqrt{22}\right)^x + 12\left(7-\sqrt{22}\right)^x.$$

**2.** При каких значениях $x$ чи́сла

$$\log_3(2x^2+x), \quad \log_3(8-x^2-9x) \quad \text{и} \quad \log_3\left(x^2-8x+7\tfrac{1}{2}\right)$$

являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

**3.** Две окружности с центрами $O$ и $Q$, пересекающиеся друг с другом в точках $A$ и $B$, пересекают биссектрису угла $OAQ$ в точках $C$ и $D$ соответственно. Отрезки $OQ$ и $AD$ пересекаются в точке $E$, причём площади треугольников $OAE$ и $QAE$ равны 49 и 21 соответственно. Найти площадь четырёхугольника $OAQD$ и отношение $BC : BD$.

**4.** Решить уравнение

$$[illegible] \sin\tfrac{x}{5}\right| + \left|\cos\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x}{6}\right| = \sin\tfrac{5\pi}{17}.$$

**5.** [illegible]нием треугольной пирамиды $SABC$ служит треугольник со сторонами $AC = BC = 15$ и $AB = 24$. Двугранные углы при рёбрах $AC$ и $BC$ равны по $\operatorname{arcctg} 7$, а при ребре $AB$ — $45^\circ$. Сфера, центр которой лежит в плоскости $ABC$, касается боковых граней в точках $K$, $L$ и $M$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SKLM$.

**6.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых графики функций

$$y = \frac{4x+1}{x} \quad \text{и} \quad y = \frac{(7a+4)x+3a}{ax-1}$$

разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

## Ответы

**1.** $(-\infty; \log_{7-\sqrt{22}} 2] \cup [\log_{7+\sqrt{22}} 12; \infty)$.

**2.** $-4$.

**3.** $100$, $7:3$.

**4.** $x = \pm\frac{15\pi}{34} + 3\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**5.** $\frac{12}{377}\sqrt{941}$.

**6.** $[-1; 0]$.

## *Вариант 5 (июль)*

**1.** Решить неравенство

$$x \geqslant \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

**2.** Имеет ли уравнение

$$12\cos\left(\tfrac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5\cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

**3.** Через вершины $A$, $B$, $C$ параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую $BD$ в точке $E$, причём $BE = 9$. Найти диагональ $BD$.

**4.** Найти все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 517.

**5.** Найти все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4}\left(x + 4x^2 - 8\right)$$

ни при каком значении параметра $a$.

**6.** Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ повернули в плоскости $ABC$ на угол $30°$ вокруг точки пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ (вершина $A$ повернулась в направлении вершины $D$), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найти все значения, которые может принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости $ABC$, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $(-\infty; -2] \cup [0; \lg 101 - 2)$.

$$x \geqslant \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x})$$
$$\iff \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}) + \log_5 5^x \geqslant \log_2 y,$$

где $y = 101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}$,

$$\iff \log_5 y \geqslant \log_5 y \cdot \log_2 5 \iff (\log_2 5 - 1)\log_5 y \leqslant 0$$
$$\iff 0 < y < 1 \iff 0 < 101 \cdot 10^x - 10^{2+2x} \leqslant 1$$
$$\iff \begin{cases} 10^{x+2} < 101 \\ \left(10^x - \frac{1}{100}\right)(10^x - 1) \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} 10^x < 10^{-2} \\ 10^0 \leqslant 10^x < \frac{101}{100} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ 0 \leqslant x < \lg 101 - 2. \end{array}\right.$$

**2.** *Ответ:* нет.

$$12\cos\left(\tfrac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5\cos x| \iff 12\sin x = |5\cos x - 4|$$
$$\iff \begin{cases} 12\sin x = \pm(5\cos x - 4) \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

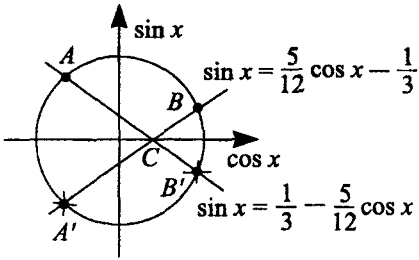


Рис. 11

Решения полученной системы изображаются на числовой окружности точками $A$ и $B$ (рис. 11), причём расстояние между ближайшими корнями равно

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2} = \angle ACB = \pi - 2\operatorname{arctg}\tfrac{5}{12} > \tfrac{\pi}{2},$$

так как $\operatorname{arctg}\frac{5}{12} < \frac{\pi}{4}$.

**3.** *Ответ:* $\frac{34}{9}$.

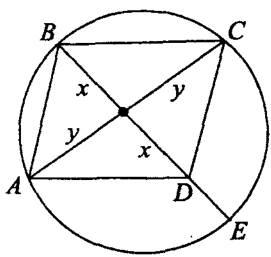


Рис. 12

Обозначим $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда из равенства параллелограмма и теоремы об отрезках пересекающихся хорд (рис. 12) получаем

$$\begin{cases} (2x)^2 + (2y)^2 = 2\cdot 3^2 + 2\cdot 5^2 \\ x\cdot(9-x) = y\cdot y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 9x = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 9x = 17 \Longrightarrow BD = 2x = \tfrac{34}{9}.$$

**4.** *Ответ:* 618, 659, 698.

Если $\overline{xyz}$ — искомое трёхзначное число, то условие задачи равносильно равенству

$$100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 + 517$$
$$\iff (x-50)^2 + (y-5)^2 + z(z-1) = 2008.$$

Из таблицы

| $y, z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(y-5)^2$ | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| $z(z-1)$ | 0 | 0 | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 |

видно, что

$$45^2 > 2008 \geqslant (x-50)^2 = 2008 - (y-5)^2 - z(z-1)$$
$$\geqslant 2008 - 25 - 72 = 1909 > 43^2,$$

откуда $|x - 50| = 44$, $x = 6$ и

$$(y-5)^2 + z(z-1) = 2008 - 44^2 = 72.$$

Из той же таблицы получаем, что последнее уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (y-5)^2 = 16 \\ z(z-1) = 56 \end{cases} \\ \begin{cases} (y-5)^2 = 0 \\ z(z-1) = 72 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1,\ 9 \\ z = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 \\ z = 9. \end{cases} \end{array}\right.$$

**5.** *Ответ:* $\left(-\infty; -\frac{8}{7}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{9}; \infty\right)$.

Область значений функции

$$f(a) = a\sqrt[4]{4 - a^4}, \quad -\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2},$$

есть отрезок $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, так как величина

$$|f(a)| = \sqrt[4]{a^4(4 - a^4)} = \sqrt[4]{4 - (2 - a^4)^2}$$

принимает все значения от 0 до $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ включительно. Поэтому корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = f(a)(x + 4x^2 - 8)$$

не могут быть те и только те значения $x$, которые либо не входят в ОДЗ уравнения, т. е.

$$2x^4 + x^3 < 0 \iff x^3\left(x + \tfrac{1}{2}\right) < 0 \iff -\tfrac{1}{2} < x < 0,$$

либо удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned}
&4\sqrt{2x^4 + x^3} > \sqrt{2}|x + 4x^2 - 8| \\
&\iff 16(2x^4 + x^3) > 2(x + 4x^2 - 8)^2 \\
&\iff 63x^2 + 16x - 64 > 0 \iff \left(x + \tfrac{8}{7}\right)\left(x - \tfrac{8}{9}\right) > 0 \\
&\iff \left[\begin{array}{l} x > \frac{8}{9} \\ x < -\frac{8}{7}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

**6.** *Ответ:* 26, $\left[42; \frac{253+84\sqrt{3}}{8}\right]$.

Периметр сечения многогранника плоскостью, отстоящей от основания $A'B'C'D'$ (размером $6 \times 7$) на расстояние $x \in [0; h]$, где $h$ — высота исходного параллелепипеда, представляет собой линейную функцию $P(x)$, так как сечение каждой из восьми перечисленных в условии граней есть отрезок, длина которого линейно зависит от $x$.

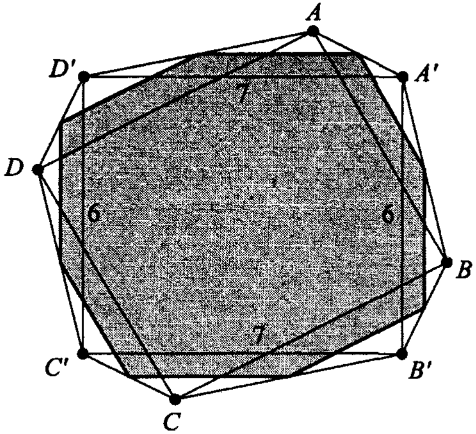


Рис. 13

Поэтому из равенств $P(0) = P(h) = 26$ следует, что функция $P(x)$ есть константа, равная 26.

Аналогично, площадь сечения $S(x)$ есть квадратичная функция, удовлетворяющая равенствам $S(0) = S(h) = 42$, поэтому она достигает экстремума в точке $\frac{h}{2}$, т. е. когда плоскость сечения равноудалена от оснований (см. рис. 13, где изображён вид «сверху», а сечение заштриховано). Это сечение представляет 8-угольник (рис. 14), площадь которого равна

$$S\left(\tfrac{h}{2}\right) = \left(\tfrac{7}{2} + \tfrac{7}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{3}{2}\right)\left(3 + 3\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{7}{4}\right) - \tfrac{7}{4}\cdot\tfrac{7}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{3}{2}\cdot 3\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \tfrac{253+84\sqrt{3}}{8} > 42.$$

## *Вариант 6 (июль)*

**1.** Решить неравенство

$$x \leqslant \log_5(16\cdot 15^x - 15^{1+2x}) - \log_3(16\cdot 5^x - 3^{1+x}\cdot 5^{1+2x}).$$

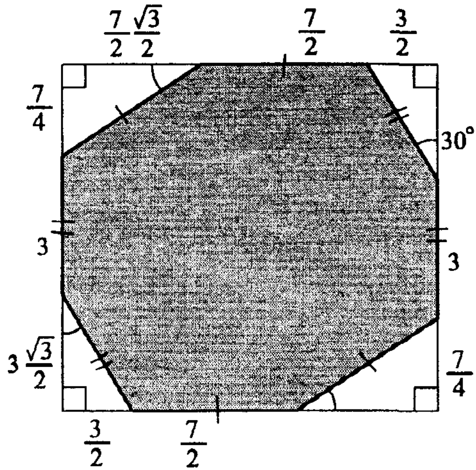


Рис. 14

**2.** Имеет ли уравнение

$$12\sin x = \left|9\sin\left(x - \tfrac{3\pi}{2}\right) - 8\right|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

**3.** Через вершины $A$, $C$, $D$ параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 7$ и $AD = 4$ проведена окружность, пересекающая прямую $BD$ в точке $E$, причём $DE = 13$. Найти диагональ $BD$.

**4.** Найти все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр ровно на 667.

**5.** Найти все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$3\sqrt{3x^4 - 2x^3} = a\sqrt[4]{6 - a^4}(x^2 - 3x + 6)$$

ни при каком значении параметра $a$.

**6.** Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ повернули в плоскости $ABC$ на угол $60^\circ$ вокруг точки пересечения диагоналей $AC$ и $BD$ (вершина $A$ повернулась в направлении вершины $B$), а боковые грани заменили гранями $AA'B'$, $AB'B$, $BB'C'$, $BC'C$, $CC'D'$, $CD'D$, $DD'A'$ и $DA'A$. Найти все значения, которые может принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости $ABC$, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 22, а его площадь равна 30.

## *Ответы*

**1.** $(-\infty; -1] \cup [0; \log_{15} 16 - 1)$.

**2.** Нет.

**3.** $\frac{65}{12}$.

**4.** 720, 721, 780, 781.

**5.** $\left(-\infty; -\frac{6}{7}\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; \infty\right)$.

**6.** 22, $\left[30; \frac{180+61\sqrt{3}}{8}\right]$.

## *Задачи из билетов устного экзамена*

**1.** Сколько корней может иметь уравнение (относительно $x$)

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x+4} = \sqrt{3x+10}\,?$$

**2.** Какую максимальную площадь может иметь четырёхугольник, стороны которого последовательно равны

$$1-7a, \quad 7-6a, \quad 5-3a, \quad 14a+5?$$

Найти все значения $a$, при которых она достигается.

**3.** В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = 5$, $BC = 9$, $AC = 10$ проведены высоты $AH$, $CK$ и медиана $BM$. Рассматриваются всевозможные точки $X$, для каждой из которых окружности, проходящие через точки $A$, $K$, $X$ и, соответственно, через точки $C$, $H$, $X$, касаются друг друга в точке $X$. Какие значения может принимать отношение $BX : MX$?

**4.** В единичном кубе с горизонтальным нижним основанием проводятся два плоских сечения. Наивысшая и наинизшая точки первого сечения находятся на расстоянии 0,8 и 0,4 от нижнего основания, а наивысшая и наинизшая точки второго сечения — на расстоянии 0,6 и 0,3. Найти наименьший объём, который при этих условиях может иметь часть куба, расположенная ниже первого сечения, но выше второго.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* 0 или 1.

Если $a < 4$, то левая часть уравнения

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x+4} = \sqrt{3x+10}$$

отрицательна, а правая — неотрицательна, поэтому корней нет. При $a = 4$ уравнение записывается в виде $0 \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{3x+10}$ и поэтому имеет ровно один корень. Наконец, в случае $a > 4$ обе части уравнения можно умножить на ненулевую величину $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+4}$, получив равносильное исходному уравнение

$$a - 4 = (\sqrt{x+a} + \sqrt{x+4})\sqrt{3x+10},$$

правая часть которого возрастает (и непрерывна), причём в точке $x = -\frac{10}{3}$ принимает значение $0 < a-4$, а при достаточно больших $x$ — значения, бо́льшие $a-4$. Следовательно, в этом случае корень равен один.

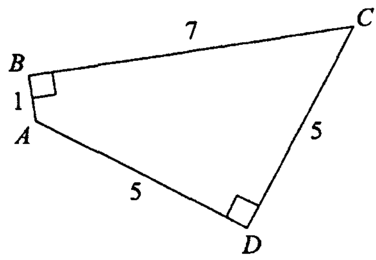

Рис. 15

**2.** *Ответ:* 16 при $a = 0$.

Для площади $S$ четырёхугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1 - 7a$, $BC = 7 - 6a$, $CD = 5 - 3a$, $AD = 14a + 5$ имеем

$$S = \tfrac{1}{2}(1 - 7a)(7 - 6a)\sin B + \tfrac{1}{2}(5 - 3a)(14a + 5)\sin D$$
$$\leqslant \tfrac{1}{2}(7 - 55a + 42a^2) + \tfrac{1}{2}(25 + 55a - 42a^2) = 16.$$

Равенство $S = 16$ выполняется, если углы при вершинах $B$ и $D$ прямые, что действительно возможно в случае равенства (по теореме Пифагора)

$$(1 - 7a)^2 + (7 - 6a)^2 = (5 - 3a)^2 + (14a + 5)^2$$
$$\iff a\left(a + \tfrac{26}{15}\right) = 0.$$

При $a = 0$ получаем четырёхугольник со сторонами $1, 7, 5, 5$ (рис. 15), а при $a = -\frac{26}{15}$ четырёхугольника не получается из-за отрицательности числа $14a + 5$.

**3.** *Ответ:* $\left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}+\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}-\sqrt{3}}\right]$.

С одной стороны, все точки $X$, удовлетворяющие условию задачи, лежат на окружности $S_1$ с центром $B$ и радиусом $BX = r$, который определяется из равенства (рис. 16)

$$BX^2 = BA \cdot BK = BC \cdot BH$$

(последнее равенство вытекает из подобия треугольников $AHB$ и $CKB$, а первое — из теоремы о касательной и секущей, так как

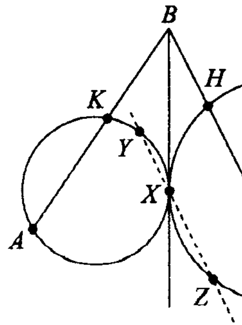


Рис. 16

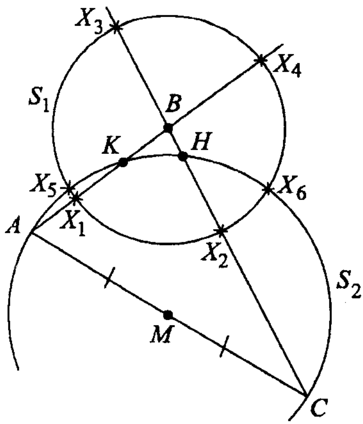


Рис. 17

прямая $BX$ касается обеих окружностей: в противном случае она пересекала бы одну окружность в точке $Y \neq X$, а другую — в точке $Z \neq X$, причём

$$BX \cdot BY = BX \cdot BZ \implies BY = BZ \implies Y = Z,$$

что невозможно). Кроме того, точка $X$ не может лежать на прямых $AB$ и $BC$ (т. е. $X \neq X_{1,2,3,4}$ на рис. 17 — иначе через точки $A$, $B$, $X$ или $B$, $C$, $X$ нельзя провести окружность), а также на окружности $S_2$, построенной на отрезке $AC$ как на диаметре (т. е. $X \neq X_{5,6}$ на рис. 17 — иначе окружности сливаются в одну, так как все четыре точки $A$, $K$, $H$, $C$ лежат на окружности $S_2$).

С другой стороны, если точка $X$ лежит на окружности $S_1$ и отлична от точек $X_{1,2,3,4,5,6}$, то через неё можно провести требуемые окружности, которые будут касаться прямой $BX$ (в противном случае для некоторой точки $Y \neq X$, лежащей на прямой $BX$, выполнялось бы равенство $BX \cdot BY = BX^2$, что невозможно), а значит, будут касаться друг друга в точке $X$.

Таким образом, все возможные расстояния от точки $M$ до точки $X$ заполняют отрезок $[m - r; m + r]$, кроме значения $MX_5 = MX_6 = AM = 5$ (все остальные значения $MX_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, — попарно различны в силу неравенства $AB \neq BC$: если, к примеру, $MX_1 = MX_2$, то $\Delta MX_1B = \Delta MX_2B$ и медиана $BM$ — ещё и биссектриса, что невозможно), где

$$m = BM = \frac{\sqrt{2 \cdot 5 + 2 \cdot 9^2 - 10^2}}{2} = \sqrt{28}$$

$$r = BX = \sqrt{BA \cdot AK} = \sqrt{BA \cdot BC \cos \angle B}$$

$$= \sqrt{\frac{5^2 + 9^2 - 10^2}{2}} = \sqrt{3}.$$

Поэтому искомое отношение заполняет отрезок $\left[\frac{r}{m+r}; \frac{r}{m-r}\right]$, кроме точки $\frac{r}{5}$.

**4.** *Ответ:* 0,15.

Объём $V_1$ части куба, лежащей под первым сечением, не зависит от каких-либо деталей расположения сечения и равен

$$V_1 = \frac{0{,}8+0{,}4}{2} = 0{,}6.$$

Действительно, если через точку $O$ провести горизонтальную плоскость, то часть куба, лежащая над этой плоскостью ниже первого сечения, будет симметрична относительно точки $O$ (и следовательно, равна по объёму) части куба, лежащей под этой плоскостью выше первого сечения. Поэтому объём $V_1$ равен объёму параллелепипеда, отсекаемого проведённой горизонтальной плоскостью и имеющего высоту $\frac{0,8+0,4}{2}$. Аналогично, объём $V_2$ части куба, лежащей под вторым сечением, равен

$$V - 2 = \tfrac{0,6+0,3}{2} = 0,45.$$

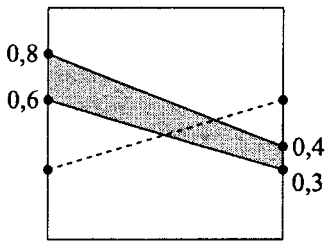


Рис. 18

Если провести сечения так, чтобы они не пересекались, (см., например, рис. 18, где показан вид «сбоку»), то объём части куба, расположенной ниже первого сечения, но выше второго, будет равен разности

$$V_1 - V_2 = 0,6 - 0,45 = 0,15.$$

Это и будет минимум, поскольку в случае пересечения этих сечений из объёма $V_1$ будет вычитаться не весь объём $V_2$, а лишь его часть.

# *Химический факультет*

## *Вариант 1 (май)*

**1.** Решить уравнение

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} = \frac{|x+1|}{|x+2|}.$$

**2.** Решить неравенство

$$2^{\lg(x^2-1)} \geqslant (x+1)^{\lg 2}.$$

**3.** Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} x + \log_x(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \tfrac{3}{2} + \log_x(2\sqrt{6}).$$

**4.** Решить уравнение

$$\arcsin \tfrac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x.$$

**5.** В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $EF = 1$. Найти длины сторон $DE$ и $AF$.

**6.** Для каждого значения параметра $a$ решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

**7.** Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ устроена следующим образом: $a_1 = 1$, каждое последующее число равно удвоенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2 = 2a_1$, $a_3 = 2(a_1 + a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от $a_1$ до $a_{2001}$.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $0, \pm\sqrt{2}$.

$$\frac{|x-1|}{|x-2|} = \frac{|x+1|}{|x+2|} \iff \begin{cases} |(x-1)(x+2)| = |(x+1)(x-2)| \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + x - 2 = \pm(x^2 - x - 2) \\ x \neq \pm 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

**2.** *Ответ:* $[2; \infty)$.

$$2^{\lg(x^2-1)} \geqslant (x+1)^{\lg 2} \iff \lg\left(2^{\lg(x^2-1)}\right) \geqslant \lg\left((x+1)^{\lg 2}\right)$$

$$\iff \lg(x^2-1) \cdot \lg 2 \geqslant \lg 2 \cdot \lg(x+1)$$

$$\iff x^2 - 1 \geqslant x + 1 > 0 \iff \begin{cases} x - 1 \geqslant 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \iff x \geqslant 2.$$

**3.** *Ответ:* $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$, $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^{-\frac{1}{2}}$.

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} x + \log_x(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \tfrac{3}{2} + \log_x 2\sqrt{6}$$

$$\iff \frac{1}{\log_x a} + \log_x \tfrac{2\sqrt{6}}{a} = \tfrac{3}{2} + \log_x 2\sqrt{6},$$

где $a = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$,

$$\iff \tfrac{1}{y} - y = \tfrac{3}{2},$$

где $y = \log_x a$,

$$\iff 2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = a^2 \\ x = a^{-\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

**4.** *Ответ:* $\frac{3}{2}$.

$$\arcsin \frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x \iff \arcsin f(x) = g(x),$$

где $f(x) = \frac{6x-7}{2x-1} = 3 - \frac{4}{2x-1}$ — возрастает при $x > \frac{1}{2}$, $g(x) = 2\pi - \pi x$ — убывает, причём $|g(x)| \leqslant \frac{\pi}{2} \iff \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$,

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \arcsin f(x) = g(x) \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2} \end{array}\right. \iff x = \frac{3}{2},$$

так как $\arcsin f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = g\left(\frac{3}{2}\right)$, а при $x > \frac{3}{2}$ справедливы оценки $\arcsin f(x) > \frac{\pi}{2} > g(x)$.

**5.** *Ответ:* 6 и 8.

Продолжим стороны $AF$, $BC$ и $DE$ до пересечения друг с другом в точках $K$, $L$, $M$ (рис. 19). Тогда, поскольку все углы шестиугольника $ABCDEF$ равны по 120°, треугольники $ABK$, $CDL$, $EFM$, а с ними и треугольник $KLM$ — равносторонние. Поэтому

$$KL = KB + BC + CL = AB + BC + CD = 12,$$
$$DE = LM - DL - EM = 12 - 5 - 1 = 6,$$
$$AF = KM - AK - FM = 12 - 3 - 1 = 8.$$

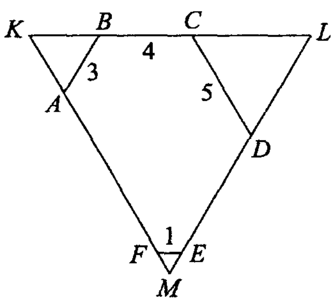


Рис. 19

**6.** *Ответ:* $\pi n$, $\frac{2\pi}{3}k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$, при $a = 0$; при $a \neq 0$ корней нет.

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)\\
&\qquad\qquad + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0\\
&\iff ((\sin^2 x + 2\sin x \sin 2x + \sin^2 x) - 2a(\sin x + \sin 2x) + a^2)\\
&\qquad\qquad + (\sin^2 3x - 2a\sin 3x + a^2) = 0\\
&\iff (\sin x + \sin 2x - a)^2 + (\sin 3x - a)^2 = 0\\
&\iff \sin x + \sin 2x = a = \sin 3x\\
&\iff \begin{cases} \sin 3x = a\\ 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \sin 3x = a\\ \sin\frac{3x}{2}\sin x\sin\frac{x}{2} = 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \sin\frac{3x}{2}\sin x = 0 \quad (\implies \sin 3x = 0),\\ a = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

так как если $\sin\frac{x}{2} = 0$, то $\sin x = 0$,

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3}k\\ x = \pi n \end{array}\right. \quad k, n \in \mathbb{Z}.\\ a = 0, \end{cases}$$

**7.** *Ответ:* $2^{2000} \cdot 3^{1999000}$.

Имеем: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и при $n > 2$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
a_n &= 2(a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1})\\
&= 2(a_1 + \dots + a_{n-2}) + 2a_{n-1} = 3a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Поэтому при $n \geqslant 2$ получаем $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$, откуда

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2001} &= 1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3^1) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 3^{1999})\\
&= 2^{2000} \cdot 3^{1+\dots+1999} = 2^{2000} \cdot 3^{\frac{1+1999}{2}\cdot 1999}\\
&= 2^{2000} \cdot 3^{1999000}.
\end{aligned}$$

## Вариант 2 (май)

**1.** Решить уравнение

$$\frac{|2x-1|}{|x-1|}=\frac{|2x+1|}{|x+1|}.$$

**2.** Решить неравенство

$$3^{\lg(x^2-2)}\geqslant(2x+1)^{\lg 3}.$$

**3.** Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}x+\log_x(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7})=\tfrac{3}{2}+\log_x(2\sqrt{10}).$$

**4.** Решить уравнение

$$\arcsin\tfrac{3x+7}{x+1}=2\pi+\tfrac{\pi}{2}x.$$

**5.** В выпуклом шестиугольнике $KLMNEF$ все внутренние углы при вершинах равны. Известно,что $KL=6$, $LM=8$, $MN=10$ и $EF=2$. Найти длины сторон $NE$ и $KF$.

**6.** Для каждого значения параметра $a$ решить уравнение

$$\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+2a(\cos x-\cos 2x+\cos 3x)$$
$$+\cos 2x+\cos 4x+2a^2=0.$$

**7.** Последовательность чисел $a_1,a_2,a_3,\ldots$ устроена следующим образом: $a_1=1$, каждое последующее число равно утроенной сумме предыдущих чисел, т. е. $a_2=3a_1$, $a_3=3(a_1+a_2)$ и т. д. Найти произведение всех чисел от $a_1$ до $a_{2001}$.

## Ответы

**1.** $0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**2.** $[3;\infty)$.

**3.** $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$, $(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^{-\frac{1}{2}}$.

**4.** $-3$.

**5.** 12 и 16.

**6.** При $a=0$ $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; при $a=-\frac{1}{2}$ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; при других $a$ решений нет.

**7.** $3^{2000}\cdot 4^{1999000}$.

## *Вариант 3 (июль)*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{1}{|x-1|}>\frac{1}{|x+1|}.$$

**2.** В равнобедренном треугольнике с основанием $AC$ проведена биссектриса угла $C$, которая пересекает боковую сторону $AB$ в точке $D$. Точка $E$ лежит на основании $AC$ так, что $DE\perp DC$. Найти длину $AD$, если $CE=2$.

**3.** Решить уравнение

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x.$$

**4.** Решить уравнение

$$\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}.$$

**5.** Решить уравнение

$$|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|$$
$$+\dots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

**6.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geqslant 0 \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**7.** Функция $f(x)$ для всех $x$ удовлетворяет уравнению:

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найти $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $(0;1) \cup (1;\infty)$.

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|} \iff \begin{cases} |x+1| > |x-1| \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x+1)^2 > (x-1)^2 \\ x \neq \pm 1. \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

**2.** *Ответ:* 1.

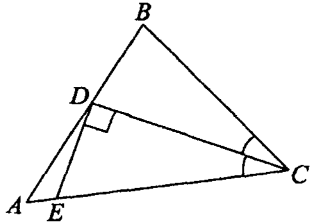


Рис. 20

Обозначим $\angle DCE = \alpha$, тогда $\angle CAD = \angle ACB = 2\alpha$, $CD = CE\cos\alpha$ (рис. 20) и по теореме синусов для треугольника $ACD$ имеем

$$AD = CD \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = 1.$$

**3.** *Ответ:* $\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x$$
$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg} 4x = 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0, \end{cases}$$

так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x$ (поскольку $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x}$),

$$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos\frac{\pi}{4}k \neq 0 \\ \cos\frac{\pi}{2}k \neq 0 \\ \cos\frac{3\pi}{4}k \neq 0 \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{4}k,$$

где $k = 4n$, $n \in \mathbb{Z}$.

**4.** *Ответ:* 2.

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}$$
$$\iff \sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{1 - (x-2)^2} = 3 + \sqrt{x(2-x)}$$
$$\iff x = 2,$$

так как

$$f(x) = \sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{1 - (x-2)^2} < \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$$

при $x \neq 2$,

$$g(x) = 3 + \sqrt{x(2-x)} \geqslant 3 \quad \text{и} \quad f(2) = 3 = g(2).$$

**5.** *Ответ:* $[100; \infty)$.

Так как $|a| \geqslant a$, а равенство $|a| = a$ равносильно неравенству $a \geqslant 0$, то в неравенстве

$$|x-1| + |x+1| + \dots + |x-100| + |x+100| \geqslant (x-1) + (x+1) + \dots + (x-100) + (x+100) = 200x$$

равенство возможно тогда и только тогда, когда все выражения, стоящие мод модулем, неотрицательны, т. е. когда

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ \dots \\ x-100 \geqslant 0 \\ x+100 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \geqslant 100.$$

**6.** *Ответ:* $[3; \infty)$.

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geqslant 0 \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a) \geqslant 0 \\ x(x-3)(x-a) \leqslant 0. \end{cases}$$

В случае $a \geqslant 3$ решение первого неравенства составляют множество $[1; 2) \cup [a; \infty)$, а решения второго — множество $(-\infty; 0] \cup [3; a]$, так что у системы будет единственное решение $x = a$. В случае же $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b; 3]$, где в качестве $b$ можно взять, например, наибольшее из чисел $a$ и 2.

**7.** *Ответ:* 4004001.

Подставляя $x = 0, 1, 2, \dots, 2001$ в равенство

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$$

и приравнивая начальное значение $f(0) = 0$, имеем равенства

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1$$

$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1$$
$$\dots$$
$$f(2000) = f(1999) + 2 \cdot 1999 + 1$$
$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1,$$

сложив которые, получаем

$$\begin{aligned} f(2001) &= 2(1 + 2 + \cdots + 1999 + 2000) + 1 \cdot 2001 \\ &= (1 + 2000) \cdot 2000 + 2001 = 2001^2. \end{aligned}$$

## *Вариант 4 (июль)*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{|x+2|}.$$

**2.** В равнобедренном треугольнике с основанием $AC$ проведена биссектриса угла $C$, которая пересекает боковую сторону $AB$ в точке $D$. Точка $E$ лежит на основании $AC$ так, что $DE \perp DC$. Найти длину $CE$, если $AD = 3$.

**3.** Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} 5x.$$

**4.** Решить уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{4x - x^2 - 3}.$$

**5.** Решить уравнение

$$\begin{aligned} &|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| \\ &\qquad + \cdots + |x-100| + |x+100| + 200x = 0. \end{aligned}$$

**6.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a-4)x^2 + (5-3a)x + 2a - 2 \geqslant 0 \\ x^3 - (a-4)x^2 + (3-3a)x \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**7.** Функция $f(x)$ для всех $x$ удовлетворяет уравнению:

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 3.$$

Найти $f(2001)$, если $f(0) = 1$.

## Ответы

**1.** $(0; 2) \cup (2; \infty)$.

**2.** 6.

**3.** $\frac{\pi n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**4.** 3.

**5.** $[100; \infty)$.

**6.** $(-\infty; -2]$.

**7.** 4008004.

# *Факультет наук о материалах*

*Вариант 1* (апрель*)

**1.** Решить неравенство

$$\frac{3}{x-2}+2<\frac{3}{x+4}.$$

**2.** Решить уравнение

$$3\cos 2x-6\sin x-2=0.$$

**3.** Решить уравнение

$$\tfrac{1}{2}-x^2=\sqrt{\tfrac{1}{2}-x}.$$

**4.** Учительница принесла в класс счётные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по 2 палочки в каждый пакетик, то осталась 1 лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счётных палочек?

**5.** Решить неравенство

$$\tfrac{1}{3}\log_{x+2}(x^3+5{,}5x^2+10{,}2x+6{,}385)\leqslant 1.$$

**6.** В призме $S=KLMK_1L_1M_1$ с основанием $KLM$ грань $KLL_1K_1$ — прямоугольник со сторонами $KL=1$, $KK_1=d$. Известно, что

---

*В июле вступительный экзамен на факультет наук о материалах проводился по варианту химического факультета.

$KL \perp KM$, угол между плоскостями $LMM_1$ и $KMM_1$ равен $60°$, а $\operatorname{tg} \angle K_1KM = \sqrt{3}$. При каком $d$ в призму $S$ можно поместить шар, касающийся всех её граней?

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $(-4; -1) \cup (-1; 2)$.

$$\tfrac{3}{x-2} + 2 < \tfrac{3}{x+4} \iff \tfrac{3(x+4)+2(x^2+2x-8)-3(x-2)}{(x-2)(x+4)} < 0$$
$$\iff \tfrac{(x+1)^2}{(x-2)(x+4)} \iff x \in (-4; -1) \cup (-1; 2).$$

**2.** *Ответ:* $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{15}-3}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$3\cos 2x - 6\sin x - 2 = 0 \iff 3(1 - 2\sin^2 x) - 6\sin x - 2 = 0$$
$$\iff 6\sin^2 x + 6\sin x - 1 = 0 \iff \sin x = \tfrac{-3\pm\sqrt{15}}{6}$$
$$\iff \sin x = \tfrac{\sqrt{15}-3}{6}$$

(так как $\frac{-3-\sqrt{15}}{6} < \frac{-3-3}{6} = -1$).

**3.** *Ответ:* $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

$$\tfrac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} - x} \iff \begin{cases} \frac{1}{4} + x^4 - x^2 = \frac{1}{2} - x \\ \frac{1}{2} - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^4 - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0 \\ |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^4 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - x + \frac{1}{2} = 0 \\ x^2 + x - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \\ |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing \\ x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\ |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\iff x = \tfrac{\sqrt{3}-1}{2},$$

так как $\left|\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right| > \frac{1+1}{2} = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, а $\left|\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right| < \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

**4.** *Ответ:* 189.

Надо найти наименьшее натуральное нечётное число, делящееся на 9 и дающее при делении на 13 остаток 7. Оно имеет вид $n = 13k+7$, причём $k$ — чётно (поскольку $n$ — нечётно), то есть $k = 2m$, и $n = 26m + 7 = 27m + 9 - (m + 2)$ (здесь $k, m$ — целые неотрицательные). Число $27m + 9$ делится на 9, следовательно, $n$ делится на 9 тогда и только тогда, когда $m + 2$ делится на 9. Наименьшее целое неотрицательное число $m$, для которого $m + 2$ делится на 9, равно $m = 7$, откуда $n = 26 \cdot 7 + 7 = 189$.

**5.** *Ответ:* $[-1{,}9; -1{,}7] \cup (-1; \infty)$.

$$\tfrac{1}{3}\log_{x+2}(x^3 + 5{,}5x^2 + 10{,}2x + 6{,}385) \leqslant 1$$

$$\iff \frac{\log_2(x^3+5{,}5x^2+10{,}2x+6{,}385)-\log_2(x+2)^3}{\log_2(x+2)} \leqslant 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x^3+5{,}5x^2+10{,}2x+6{,}385-(x+2)^3}{(x+2)-1} \leqslant 0 \\ x^3 + 5{,}5x^2 + 10{,}2x + 6{,}385 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{(x+1{,}7)(x+1{,}9)}{x+1} \geqslant 0 \\ x^3 + 5{,}5x^2 + 10{,}2x + 6{,}385 > 0 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$\iff x \in [-1{,}9; -1{,}7] \cup (-1; \infty),$$

поскольку функция $f(x) = x^3 + 5{,}5x^2 + 10{,}2x + 6{,}385$ возрастает на всей прямой ($f'(x) = 3x^2 + 11x + 10{,}2 > 0$ при любом $x$, так как $D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10{,}2 = 121 - 122{,}4 < 0$) и $f(-1{,}9) = 0{,}001 > 0$.

**6.** *Ответ:* $\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$.

Проведём через центр предполагаемой сферы плоскость $\alpha$, перпендикулярную боковым рёбрам призмы. Эта плоскость перпендикулярна и боковым граням, а значит, содержит радиусы сферы, проведённые в точки её касания с боковыми гранями. Обозначим через $K_2$, $L_2$ и $M_2$ точки пересечения плоскости $\alpha$ с прямыми $KK_1$, $LL_1$ и $MM_1$ соответственно (рис. 21). Радиус сферы совпадает с радиусом окружности, вписанной в треугольник $K_2L_2M_2$.

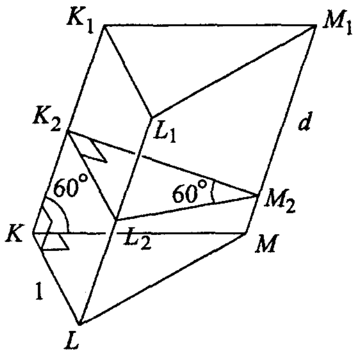


Рис. 21

Имеем $K_2L_2 \perp KK_1 \implies K_2L_2 \parallel KL$, $K_2L_2 = KL = 1$. Поскольку $KL \perp KK_1$ и $KL \perp KM$, то отрезок $KL$ перпендикулярен всей плоскости $KK_1M_1M$, а значит, отрезок $K_2L_2$ тоже перпендикулярен этой плоскости, откуда $\angle L_2K_2M_2 = 90°$. Далее, угол $\angle K_2M_2L_2$ равен углу между плоскостями $KK_1M_1M$ и $LL_1M_1M$, то есть $60°$. Тем самым треугольник $K_2L_2M_2$ полностью задан, и можно найти радиус вписанной в него окружности:

$$r = \frac{K_2L_2 \cdot K_2M_2}{K_2L_2 + K_2M_2 + L_2M_2} = \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}+3}.$$

Сфера этого радиуса будет вписанной в призму тогда и только тогда, когда высота призмы равна $2r$. Нижнее основание призмы проходит через прямую $KL$ перпендикулярно боковой грани

$KK_1M_1M$, а значит, эта грань содержит высоту $h$ призмы, опущенную на нижнее основание из вершины $K_1$. Тогда имеем $h = KK_1 \cdot \sin \angle K_1KM = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, $d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2r \implies d = \frac{4}{\sqrt{3}}r = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{3}} = \frac{4\cdot\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{3\cdot 6} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3}$.

## *Вариант 2 (апрель)*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{2x+12}{x-4} - 1 > \frac{5}{x+1}.$$

**2.** Решить уравнение

$$5\cos 2x + 14\cos x + 7 = 0.$$

**3.** Решить уравнение

$$\tfrac{t^2}{4} - 2 = \sqrt{4(t+2)}.$$

**4.** Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими свойствами: при делении его на 2 в остатке получается 1, при делении на 19 остаток равен 3, а на 7 оно делится нацело.

**5.** Решить неравенство

$$\tfrac{1}{3}\log_z(z^3 - 0{,}8z^2 + 1{,}1z - 0{,}3) \leqslant 1.$$

**6.** В призме $Q = ABCA_1B_1C_1$ с основанием $ABC$ тангенс угла между плоскостями $(BCC_1)$ и $(ACC_1)$ равен $\sqrt{3}$, $AB$ перпендикулярно плоскости $AA_1C$, $AB = 1$, $AA_1 = 1$. Известно, что в призму $Q$ можно поместить шар, касающийся всех его граней. Вычислить синус угла $ACC_1$.

## Ответы

**1.** $(-\infty; -6) \cup (-6; -1) \cup (4; \infty)$.

**2.** $\pm \arccos \frac{\sqrt{29}-7}{10} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

**3.** $2 + \sqrt{12}$.

**4.** 231.

**5.** $\left[\frac{3}{8}; 1\right) \cup (1; \infty)$.

**6.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

# *Биологический факультет и факультет фундаментальной медицины*

*Вариант 1*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7} \geqslant 0.$$

**2.** Решить уравнение

$$\cos\left(2x-\tfrac{\pi}{3}\right)-\sin x=\tfrac{1}{2}.$$

**3.** Решить неравенство

$$\frac{\log_2 x-3}{6\log_x 2-1} \leqslant 2.$$

**4.** Из аэропорта одновременно вылетают два самолёта и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый — по окружности радиуса $R$, а второй — по окружности радиуса $r$. Предполагается, что самолёты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее, чем через 43 часа и не позднее, чем через 49 часов после вылета произошли следующие события: первый самолёт облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найти отношение $\frac{r}{R}$.

**5.** В треугольник $ABC$ со сторонами $AB=6$, $BC=5$, $AC=7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне $AC$, одна на стороне $AB$ и одна на стороне $BC$. Через середину $D$ стороны $AC$ и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой $BH$ треугольника $ABC$ в точке $M$. Найти площадь треугольника $DMC$.

**6.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(x\sqrt{6-2a^2}\right) \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right)\sin\left(x\sqrt{6-2a^2}\right) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $\{-12\} \cup (7; \infty)$.

$$\frac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7} \geqslant 0 \iff \frac{\sqrt{(x+12)(x-7)}}{x-7} \geqslant 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+12)(x-7) = 0 \\ x-7 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+12)(x-7) > 0 \\ x-7 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -12 \\ x > 7. \end{array}\right.$$

**2.** *Ответ:* $\pi n, \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos\left(2x - \tfrac{\pi}{3}\right) - \sin x = \tfrac{1}{2}$$

$$\iff \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin x = \tfrac{1}{2}$$

$$\iff -\sin^2 x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin x = 0$$

$$\iff \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**3.** *Ответ:* $\left[\frac{1}{8};1\right)\cup(1;16]\cup(64;\infty)$.

Обозначим $\log_2 x$ за $y$, имеем

$$\frac{y-3}{\frac{6}{y}-1}\leqslant 2 \iff \begin{cases}\frac{y^2-3y-2(6-y)}{6-y}\leqslant 0\\ y\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{(y-4)(y+3)}{y-6}\geqslant 0\\ y\neq 0\end{cases}$$

$$\iff y\in[-3;0)\cup(0;4]\cup(6;\infty)$$

$$\iff x=2^y\in\left[\tfrac{1}{8};1\right)\cup(1;16]\cup(64;\infty).$$

**4.** *Ответ:* $\frac{3}{4}$.

Если $t_1$ и $t_2$ — целые числа часов, за которые соответственно первый и второй самолёты облетают свои окружности, то условие задачи запишется в виде системы неравенств:

$$\begin{cases}43\leqslant 4t_1\leqslant 49\\ 43\leqslant 5t_2\leqslant 49\\ |4t_1-5t_2|\geqslant 2\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{aligned}4t_1&=44\\ 4t_1&=48\end{aligned}\right.\\ 5t_2=45\\ |4t_1-5t_2|\geqslant 2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}4t_1=48\\ 5t_2=45\end{cases} \iff \begin{cases}t_1=12\\ t_2=9.\end{cases}$$

Поскольку скорости самолётов одинаковы, получаем $\frac{r}{R}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{3}{4}$.

**5.** *Ответ:* $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

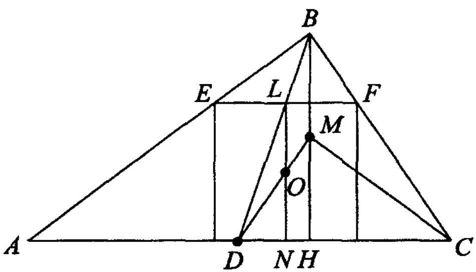


Рис. 22

Медиана $BD$ делит верхнюю сторону $EF$ квадрата пополам (см. рис. 22: $\frac{EL}{AD} = \frac{BL}{BD} = \frac{LF}{DC} \implies EL = LF$). Высота $LN$, опущенная из точки $L$ на сторону $AC$, проходит через центр $O$ квадрата. Отрезок $DM$ пересекает отрезок $LN$ в точке $O$ и делит его пополам. Поэтому, как и выше, имеем $\frac{BM}{LO} = \frac{MH}{ON} \implies BM = MH$. Таким образом, в треугольнике $DMC$ сторона $DC$ вдвое меньше стороны $AC$, а опущенная на $DC$ высота $MH$ вдвое меньше высоты $BH$. Отсюда по формуле Герона получаем

$$\begin{aligned} S_{DMC} &= \tfrac{1}{4} S_{ABC} \\ &= \tfrac{1}{16}\sqrt{(7+6+5)(7+6-5)(5+7-6)(6+5-7)} \\ &= \tfrac{3\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

**6.** *Ответ:* $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\pm 1$, $\pm\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(x\sqrt{6-2a^2}\right) \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right)\sin\left(x\sqrt{6-2a^2}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\sqrt{6-2a^2}\right) \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\sqrt{6-2a^2}\right) \end{cases}$$

1) Если единственное на $[0, 2\pi]$ решение $x$ не совпадает с $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то из первого уравнения последней системы вытекает, что точки $x$ и $\frac{\pi}{2} - x\sqrt{6-2a^2}$ имеют равные по модулю ненулевые косинусы, и тогда второе уравнение приводит к равенству $a - \frac{2}{3} = \pm 1$, то есть $a = -\frac{1}{3}$ или $a = \frac{5}{3}$.

При $a = -\frac{1}{3}$ имеем

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{13}}{3}x\right) \\ \cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{13}}{3}x\right) \end{cases}$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{13}}{3}x = (\pi - x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}{\frac{2\sqrt{13}}{3} - 1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Имеем

$$n \leqslant 0: \quad \frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}{\frac{2\sqrt{13}}{3}-1} \leqslant \frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{2\sqrt{13}}{3}-1} < 0;$$

$$n = 1: \quad \frac{\frac{3\pi}{2}}{\frac{2\sqrt{13}}{3}-1} \in \left(0; \tfrac{3\pi}{2}\right), \text{ так как } \tfrac{2\sqrt{13}}{3} - 1 > 1;$$

$$n \geqslant 2: \quad \frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}{\frac{2\sqrt{13}}{3}-1} \geqslant \frac{\frac{7\pi}{2}}{\frac{2\sqrt{13}}{3}-1} > \frac{\frac{7\pi}{2}}{\frac{2\cdot 4}{3}-1} = \frac{7\pi}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21\pi}{10} > 2\pi.$$

Таким образом, при $a = -\frac{1}{3}$ действительно имеем единственное решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

При $a = \frac{5}{3}$ получаем

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}x\right) \\ \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}x\right) \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта серия содержит два члена, лежащих на $0; 2\pi$ — именно, члены с $n = 0$ и $n = 1$.

2) Если $\frac{\pi}{2}$ — единственное решение системы на $[0, 2\pi]$, то

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \sqrt{6-2a^2} = 4n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 6 - 2a^2 = 0$$

(так как $0 \leqslant \sqrt{6-2a^2} \leqslant \sqrt{6}$)

$$\iff a = \pm\sqrt{3}.$$

При этих $a$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

и действительно имеет на $[0; 2\pi]$ единственное решение $x = \frac{\pi}{2}$.

3) Если $x = \frac{3\pi}{2}$ — единственное решение системы на $[0, 2\pi]$, то

$$\begin{aligned}
&-1 = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\cdot\tfrac{3\pi}{2}\right)\\
&\iff \tfrac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\cdot\tfrac{3\pi}{2} = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}\\
&\iff \sqrt{6-2a^2} = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}\\
&\iff \sqrt{6-2a^2} = -\tfrac{2}{3}, 2 \iff a = \pm\tfrac{5}{3}, \pm 1.
\end{aligned}$$

Значение $a = \frac{5}{3}$ рассматривалось в случае 1) и не подошло.

При $a = -\frac{5}{3}, \pm 1$ множитель $a - \frac{2}{3}$ не равен $\pm 1$, поэтому система не может иметь на $[0; 2\pi]$ решений, отличных от $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ (см. начало п. 1)). Точка $x = \frac{\pi}{2}$ не может быть решением, поскольку соответствующие значения $a$ были найдены в п. 2) и не совпадают с нашими. Точка $x = \frac{3\pi}{2}$ подходит (первое уравнение уже выполнено, а во втором обе части нулевые) и тем самым является единственным решением на $[0; 2\pi]$ при этих значениях $a$.

## *Вариант 2*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+6x-55}}{x-5} \geqslant 0.$$

**2.** Решить уравнение

$$\cos\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right) + \cos x = -\tfrac{1}{2}.$$

**3.** Решить неравенство

$$\frac{\log_3 x - 7}{\log_x 3 - 3} \leqslant 2.$$

**4.** По каждой из двух дорожек, имеющих форму окружностей одного радиуса, движется мотоциклист. Оба мотоциклиста одновременно начали движение и едут с разными постоянными скоростями. Каждый мотоциклист проезжает свою дорожку за целое число минут. Известно, что не ранее, чем через 31 минуту и не позднее, чем через 43 минуты после начала движения произошли следующие два события: первый мотоциклист проехал свою окружность 11 раз, а второй проехал свою окружность 4 раза, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 4 минут. Найти отношение скоростей мотоциклистов.

**5.** В треугольник $MNK$ со сторонами $MN = 6$, $NK = 7$ и углом $\frac{\pi}{3}$ при вершине $N$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне $MN$, одна на стороне $NK$ и одна на стороне $MK$. Через середину стороны $MN$ и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой $KR$ треугольника $MNK$ в точке $O$. Найти длину отрезка $OK$.

**6.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \cos x = \sin\left(x\sqrt{4 - 7a^2}\right) \\ \sin x = \left(3a - \frac{1}{2}\right)\cos\left(x\sqrt{4 - 7a^2}\right) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

## *Ответы*

**1.** $\{-11\} \cup (5; \infty)$.

**2.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**3.** $\left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; \sqrt[3]{3}) \cup [9; \infty)$.

**4.** $\frac{10}{3}$.

**5.** $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

**6.** $-\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{2}$; $\pm\frac{3}{4}$; $\pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{39}{7}}$.

# *Факультет почвоведения*

## *Вариант 1 (май)*

**1.** Решить уравнение

$\sin x = 2\operatorname{ctg} x.$

**2.** Решить уравнение

$|2x+3| = x^2.$

**3.** Решить уравнение

$x^2 - \cos 2x^2 + 1 = 0.$

**4.** Найти арифметическую прогрессию, в которой сумма членов, сколько бы начиная с первого их ни взять, всегда равна утроенному квадрату числа этих же членов.

**5.** Решить уравнение в целых числах:

$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7.$

**6.** В равнобедренной трапеции средняя линия равна $m$, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь этой трапеции.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x = 2\operatorname{ctg} x \iff \frac{\sin^2 x - 2\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\iff \sin^2 x - 2\cos x = 0 \quad (\implies \sin x \neq 0)$$
$$\iff \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \tfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$
$$\iff \cos x = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(так как $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ и $\left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| < 1$).

**2.** *Ответ:* 3, −1.

$$|2x+3| = x^2 \iff \left[\begin{array}{l} 2x+3 = x^2 \\ -2x-3 = x^2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

**3.** *Ответ:* 0.

$$x^2 - \cos 2x^2 + 1 = 0 \iff 1 + x^2 = \cos 2x^2 \iff$$
$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \cos 2x^2 = 1 \end{cases} \quad (\text{иначе } 1 + x^2 > \cos 2x^2) \iff x = 0.$$

**4.** *Ответ:* $a_1 = 3, d = 6$.

По условию для любого числа $n$ первых членов их сумма равна $3n^2$:

$$\tfrac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n = 3n^2 \iff a_1 - \tfrac{d}{2} + n\left(\tfrac{d}{2} - 3\right) = 0.$$

Отсюда $a_1 - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} - 3 = 0$, то есть $d = 6$ и $a_1 = 3$. Обратно, для прогрессии с первым членом 3 и разностью 6 указанное тождество, как легко проверить, выполняется.

**5.** *Ответ:* (5; −4), (−13; 20), (−5; 4), (13; −20).

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7 \iff (3x + 2y)(x + y) = 7.$$

У числа 7 только два разложения на целые множители: $7 = 1 \cdot 7 = (-1) \cdot (-7)$, поэтому

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ x + y = -7, \end{cases} \end{array}\right.$$

причём решения второй совокупности получаются из решений первой (а именно, пар $(5,-4)$ и $(-13,20)$) умножением на $-1$.

**6.** *Ответ:* $m^2$.

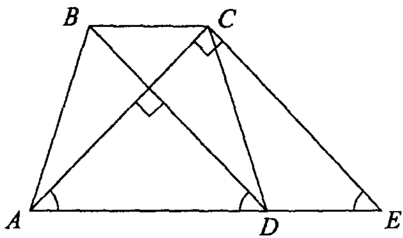


Рис. 23

Проведём через вершину $C$ меньшего основания трапеции прямую, параллельную диагонали $BD$ (рис. 23). Пусть $E$ — точка пересечения этой прямой с прямой $AD$. Треугольники $BAC$ и $DCE$ равны, поэтому площадь трапеции равна площади треугольника $ACE$. Это равнобедренный прямоугольный ($CE \parallel BD \perp AC$) треугольник, средняя линия которого, параллельная гипотенузе, равна средней линии трапеции, то есть $m$. Отсюда $AE = 2m$ и

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2m}{\sqrt{2}} = m^2.$$

## *Вариант 2 (май)*

**1.** Решить уравнение

$$\cos 2x = 2\sin x.$$

**2.** Решить уравнение

$$x^2 = |x-2|.$$

**3.** Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 z} = 1 - z^2.$$

**4.** Найти сумму $n$ первых членов ряда $7 + 77 + 777 + \ldots$.

**5.** Решить уравнение в целых числах:

$$5x^2 + 6xy + y^2 = -7.$$

**6.** Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

## *Ответы*

**1.** $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**2.** $1$, $-2$.

**3.** $0$.

**4.** $\frac{1}{9}(\underbrace{7\ldots7}_{n}0 - 7n)$.

**5.** $(2, -9)$, $(-2, 3)$, $(-2, 9)$, $(2, -3)$.

**6.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

## *Вариант 3 (июль)*

**1.** Решить уравнение

$$2 + \cos 2x = 4\cos^2 x.$$

**2.** Решить уравнение

$$\sqrt{5 - x^2} = 1 - x.$$

**3.** Решить неравенство

$$\log_{x-2} x \leqslant \log_{x-2} 4.$$

**4.** В треугольнике $ABC$ боковые стороны $AB$ и $BC$ равны, основание $AC$ равно 2, а угол при основании равен $30^\circ$. Из вершины $A$ к боковой стороне $BC$ проведены биссектриса $AE$ и медиана $AD$. Найти площадь треугольника $ADE$.

**5.** Решить неравенство

$$2\log_\pi(\sin x)\cdot\log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \leqslant \log_\pi^2(\sin x).$$

**6.** Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1 м на 4 м посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. Расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2,5 м. Можно ли выполнить это задание? Ответ обосновать.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$2 + \cos 2x = 4\cos^2 x \iff 2 + \cos 2x = 2\cos 2x + 2$$
$$\iff \cos 2x = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**2.** *Ответ:* $-1$.

$$\sqrt{5 - x^2} = 1 - x$$
$$\iff \begin{cases} 5 - x^2 = (1-x)^2 \\ 1 - x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ x \leqslant 1 \end{cases} \iff x = -1.$$

**3.** *Ответ:* $(3;4]$.

$$\log_{x-2} x \leqslant \log_{x-2} 4 \iff \frac{\log_2 x - \log_2 4}{\log_2(x-2)} \leqslant 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x-4}{(x-2)-1} \leqslant 0 \\ x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-4}{x-3} \leqslant 0 \\ x > 2 \end{cases} \iff 3 < x \leqslant 4.$$

**4.** *Ответ:* $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$.

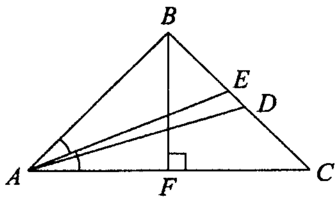


Рис. 24

Опустим высоту $BF$ на основание $AC$. Имеем (рис. 24)

$$BC = \frac{FC}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$
$$BF = FC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}};$$
$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2} AC \cdot BF = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

По свойству биссектрисы $BE = BC \cdot \frac{AB}{AB+AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}+2} = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{3(2+2\sqrt{3})} = \frac{2}{3+\sqrt{3}}$.

Далее, $ED = BD - BE = \frac{1}{2}BC - BE = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}}$.

У треугольников $ABC$ и $AED$ одна и та же высота, проведённая из вершины $A$. Следовательно,

$$S_{AED} = \frac{ED}{BC} \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}-1}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2(3+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(3-\sqrt{3})}{2\cdot 6} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}.$$

**5.** *Ответ:* $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$2\log_\pi(\sin x)\cdot\log_\pi(\sin 2x) - \log^2_\pi(\sin 2x) \leqslant \log^2_\pi(\sin x)$$
$$\iff \left(\log_\pi(\sin x) - \log_\pi(\sin 2x)\right)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство верно на всей области допустимых значений:

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$
$$\iff 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**6.** *Ответ:* нельзя.

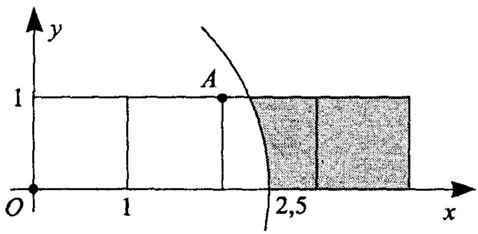


Рис. 25

Возьмём систему координат с началом в угловом дереве и осями вдоль сторон участка (рис. 25). Два других дерева должны располагаться вне круга с центром в $O$ и радиусом 2,5, то есть на закрашенной области ($OA = \sqrt{5} < 2{,}5$). Разница абсцисс этих деревьев получится меньше 2, а разница ординат — не больше 1. Следовательно, расстояние между ними будет меньше $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 2{,}5$, то есть задание выполнить нельзя.

## Вариант 4 (июль)

**1.** Решить уравнение

$$\cos x - \cos 2x = 1.$$

**2.** Решить уравнение

$$\sqrt{4 - x^2} = x - 2.$$

**3.** Решить неравенство

$$\log_{2-y} y \geqslant \log_{2-y} 3.$$

**4.** В треугольнике $ABC$ угол $ABC$ равен $90°$, $AB = BC = 2$. На основании $AC$ взяты точки $K$ и $L$ так, что три угла между $BA$ и $BK$, $BK$ и $BL$, $BL$ и $BC$ соответственно равны между собой. Найти длину отрезка $BK$.

**5.** Два прогуливающихся пешехода одновременно вышли из пункта $A$ и пункта $B$, расположенных на концах прямолинейного отрезка $AB$ дороги, и идут навстречу друг другу с постоянными скоростями. Длина $AB$ равна 4 км. Через 2 часа пешеходы встретились. Один из них пришёл из $A$ в $B$ на 1 час позже, чем другой — из $B$ в $A$. Найти скорости пешеходов.

**6.** При каких значениях параметра $b$ уравнение

$$\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

## Ответы

**1.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**2.** 2.

**3.** $(1; 2)$.

**4.** $2(\sqrt{3} - 1)$.

**5.** $(5 - \sqrt{17})\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $(\sqrt{17} - 3)\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

**6.** $\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

# *Географический факультет*

## *Вариант 1 (май)*

**1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{x+y} = 3^x \cdot 5^y \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1. \end{cases}$$

**2.** Решить неравенство

$$|x-6| + \sqrt{3x+1} \leqslant 5.$$

**3.** Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно выехали велосипедист со скоростью 25 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и мотоциклист. Доехав до пункта $B$, мотоциклист развернулся и сразу направился к пункту $A$, через некоторое время встретив велосипедиста. Если бы скорость мотоциклиста была на 37,5% меньше, расстояние от места встречи до пункта $B$ уменьшилось бы в 3 раза. Найти скорость мотоциклиста.

**4.** Сравнить два числа: $\frac{3\pi}{10}$ и $\arcsin\frac{4}{5}$.

**5.** Найти все целые значения параметра $k$, при каждом из которых графики функций

$$y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x - 2k) \quad \text{и} \quad y = \log_2(x - 2k^3 - 3k^2)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

**6.** На одной стороне угла $O$ взяты точки $K$, $L$, $M$, а на другой — точки $P$, $Q$, $R$ так, что $KQ \perp PR$, $PL \perp KM$, $LR \perp PQ$, $QM \perp KL$. Отношение расстояния от центра описанной вокруг четырёхугольника $KPRM$ окружности до точки $O$ к длине отрезка $KP$ равно $\frac{17}{6}$. Найти величину угла $O$.

## *Решения*

**1.** *Ответ:* $(2;1)$.

$$\begin{cases} 9\cdot 2^x\cdot 5^y-5\cdot 3^{y+x}=3^x\cdot 5^y\\ 2^{x-2}\cdot 3^{y-x+1}\cdot 5^{1-y}=1\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left(9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)+\left(-5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^y\right)=1\\ \left(9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)\cdot\left(-5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^y\right)=-12\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x=4\\ -5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^y=-3\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2\\ \left(\frac{3}{5}\right)^y=\left(\frac{3}{5}\right).\end{cases}$$

**2.** *Ответ:* $\left[5;\frac{25-\sqrt{145}}{2}\right]$.

$$|x-6|+\sqrt{3x+1}\leqslant 5$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geqslant 6\\ \sqrt{3x+1}\leqslant 11-x\end{cases}\\ \begin{cases} x<6\\ \sqrt{3x+1}\leqslant x-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 6\leqslant x\leqslant 11\\ 3x+1\leqslant (11-x)^2\end{cases}\\ \begin{cases} 1\leqslant x<6\\ 3x+1\leqslant (x-1)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 6\leqslant x\leqslant 11\\ x^2-25x+120\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases} 1\leqslant x<6\\ x^2-5x\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}6 \leqslant x \leqslant 11\\ x \in \left(-\infty; \frac{25-\sqrt{145}}{2}\right] \cup \left[\frac{25+\sqrt{145}}{2}; \infty\right)\end{cases}\\ \begin{cases}1 \leqslant x < 6\\ x \in (-\infty; 0] \cup [5; \infty)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}6 \leqslant x \leqslant \frac{25-\sqrt{145}}{2}\\ 5 \leqslant x < 6\end{array}\right. \Longleftrightarrow 5 \leqslant x \leqslant \frac{25-\sqrt{145}}{2}$$

(так как $\frac{25-\sqrt{145}}{2} > \frac{25-13}{2} = 6$ и $\frac{25+\sqrt{145}}{2} > \frac{25}{2} > 11$).

**3.** *Ответ:* $50\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Пусть $S$ (км) — расстояние между пунктами $A$ и $B$, $x$ (км) — расстояние от пункта $B$ до места встречи, $m$ $\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$ и $v$ $\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$ — соответственно скорости мотоциклиста и велосипедиста. Мотоциклист проехал до места встречи $s+x$, велосипедист — $s-x$, и отношение $\frac{s+x}{s-x}$ равно отношению скоростей $\frac{m}{v}$. По условию задачи отношение $\frac{s+\frac{x}{3}}{s-\frac{x}{3}}$ равняется тогда $\frac{\frac{100-37,5}{100}\cdot m}{v} = \frac{5}{8}\frac{m}{v}$, и мы можем сопоставить уравнение

$$\frac{s+\frac{x}{3}}{s-\frac{x}{3}} = \frac{5}{8}\cdot\frac{s+x}{s-x} \Longleftrightarrow \frac{3s+x}{3s-x} = \frac{5s+5x}{8s-8x}$$

$$\Longleftrightarrow (3s+x)(8s-8x) - (5s+5x)(3s-x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 9s^2 - 26sx - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow 9\left(\frac{s}{x}\right)^2 - 26\frac{s}{x} - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{s}{x} = 3 \text{ или } -\frac{1}{9} \Longrightarrow \frac{s}{x} = 3.$$

Отсюда $m = v\cdot\frac{s+x}{s-x} = 25\cdot\frac{\frac{s}{x}+1}{\frac{s}{x}-1} = 25\cdot\frac{3+1}{3-1} = 50.$

**4.** *Ответ:* $\arcsin\frac{4}{5} > \frac{3\pi}{10}$.

Положим $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$. Имеем $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ (так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\alpha = \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$) и $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\frac{5\pi}{4} < 5\alpha < \frac{5\pi}{3}$ и

$$\cos 5\alpha = \cos 4\alpha\cos\alpha - \sin 4\alpha\sin\alpha$$
$$= (2\cos^2 2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos 2\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= (2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1)\cos\alpha \\
&\qquad - 4(2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \\
&= \left(2\cdot\left(2\cdot\tfrac{3^2}{5^2}-1\right)^2 - 1\right)\cdot\tfrac{3}{5} \\
&\qquad - 4\cdot\left(2\cdot\tfrac{3^2}{5^2}-1\right)\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\left(1-\tfrac{3^2}{5^2}\right) \\
&= \left(2\cdot\tfrac{7^2}{5^4}-1\right)\cdot\tfrac{3}{5} - 4\cdot\tfrac{(-7)}{5^2}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{16}{5^2} \\
&= \tfrac{(98-625)\cdot 3+4\cdot 7\cdot 3\cdot 16}{5^5} = \tfrac{3(-527+448)}{5^5} < 0,
\end{aligned}$$

то есть $5\alpha$ лежит в IV четверти. Следовательно, $5\alpha > \frac{3\pi}{2} \iff \alpha > \frac{3\pi}{10}$.

**5.** *Ответ:* 0, $-2$.

Надо найти целые $k$, при каждом из которых разрешима система

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-2k) = \log_2(x-2k^3-3k^2) = m \in \mathbb{Z} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \log_2\frac{1}{(x-2k)^2} = \log_2(x-2k^3-3k^2) = m \in \mathbb{Z} \\ x > 2k \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{(x-2k)^2} = x-2k^3-3k^2 = 2^m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ x > 2k \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $(x-2k)^2(x-2k^3-3k^2) = 1$. При целых $k$ и $x > 2k$ это равенство может выполняться только тогда, когда $x - 2k = x - 2k^3 - 3k^2 = 1 \implies 2k = 2k^3 - 3k^2 \iff k(2k^2+3k-2) = 0 \iff k = 0, -2, \frac{1}{2}$. Из этих значений целыми являются 0 и $-2$.

Обратно, при $k = 0$ или $k = -2$ последняя система разрешима: достаточно взять $x = 2k+1$ и $m = 0$.

**6.** *Ответ:* $\arcsin\frac{1}{3}$.

Обозначим искомый угол через $\alpha$, а его стороны — через $a$ и $b$ ($K, L, M \in a$; $P, Q, R \in b$). Имеем

$$QM \perp a \implies OQ = \frac{OM}{\cos\alpha}; \quad KQ \perp b \implies OK = \frac{OQ}{\cos\alpha} = \frac{OM}{\cos^2\alpha};$$

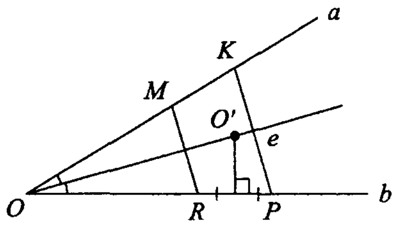


Рис. 26

$$LR \perp b \implies OL = \frac{OR}{\cos\alpha}; \quad PL \perp a \implies OP = \frac{OL}{\cos\alpha} = \frac{OR}{\cos^2\alpha}.$$

Отсюда треугольники $OKP$ и $OMR$ подобны (по общему углу $\alpha$ и двум прилежащим к нему сторонам), а значит, $KP \parallel MR$, и четырёхугольник $KPRM$ оказывается трапецией, причём равнобокой — в силу существования описанной окружности. При этом треугольники $OKP$ и $OMR$ — равнобедренные, а центр $O'$ указанной окружности лежит на биссектрисе угла $\alpha$ (рис. 26).

Пусть $KP = e$. Тогда

$$OP = \frac{\frac{e}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, OR = OP\cdot\cos^2\alpha = \frac{e\cos^2\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$OO' = \frac{OP+OR}{2} : \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{e(1+\cos^2\alpha)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{e(1+\cos^2\alpha)}{2\sin\alpha}.$$

По условию

$$\frac{OO'}{KP} = \frac{17}{6} \iff \frac{1+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{17}{6}$$
$$\iff 3(2-\sin^2\alpha) = 17\sin\alpha \iff \sin\alpha = \frac{1}{3} \text{ или } -6$$
$$\implies \alpha = \arcsin\frac{1}{3}$$

(угол $\alpha$ не может быть тупым, поскольку иначе, например, $QM$ не может быть перпендикулярно $KL$).

## *Вариант 2 (май)*

**1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 7 \cdot 3^{x+y} - 3 \cdot 2^x \cdot 7^y = 3^x \cdot 7^y \\ 2^{x-1} \cdot 3^{y-x} \cdot 7^{1-y} = 1. \end{cases}$$

**2.** Решить неравенство

$$|x-8| + \sqrt{5x+1} \leqslant 7.$$

**3.** Из пункта $A$ в пункт $B$ одновременно отправились бегун со скоростью 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и пешеход. Бегун добежал до пункта $B$, развернулся и сразу побежал в пункт $A$, через некоторое время встретив пешехода. Если бы скорость пешехода была в 2,6 раз меньше, то расстояние от места встречи до пункта $B$ увеличилось бы на 150%. Найти скорость пешехода.

**4.** Сравнить два числа: $\frac{2\pi}{5}$ и $\arccos\frac{3}{10}$.

**5.** Найти все целые значения параметра $n$, при каждом из которых графики функций

$$y = \log_3(x - n^2 - 6n) \quad \text{и} \quad y = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x - 2n^3)$$

пересекаются в точке с целочисленными координатами.

**6.** На одной стороне угла $A$ взяты точки $B$, $C$, $D$, а на другой — точки $E$, $F$, $G$ так, что $FD \perp BC$, $CG \perp EF$, $EC \perp BD$, $BF \perp EG$. Отношение длины отрезка $BE$ к расстоянию от точки $A$ до центра описанной вокруг четырёхугольника $BDGE$ окружности равно $\frac{20}{17}$. Найти величину угла $A$.

## *Ответы*

**1.** $(1;1)$.

**2.** $\left[7; \frac{35-\sqrt{329}}{2}\right]$.

**3.** $6\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

**4.** $\frac{2\pi}{5} < \arccos\frac{3}{10}$.

**5.** 0 и 2.

**6.** $\arcsin\frac{4}{5}$.

## *Вариант 3 (июль)*

**1.** Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2-9) \geqslant 0.$$

**2.** Решить уравнение

$$|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{9\pi}{2}+x\right) = 1.$$

**3.** Числа $a$, $b$, $c$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-c$, $c-b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2-4b^2-c^2+4bc+6a$?

**4.** Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников $EAF$, $FDG$, $GCH$, $HBE$, причём все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырёхугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найти $GH$.

**5.** Решить уравнение

$$4\arcsin(2^x-7) - \arccos(5^x-124) = \tfrac{6\pi}{x}.$$

**6.** При каких целых значениях параметра $k$ система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y \leqslant k^2+10k+20 \\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky \leqslant 5-k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

## Решения

**1.** *Ответ:* $[-\sqrt{10}; -3) \cup (3; \sqrt{10}]$.

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2-9) \geqslant 0$$
$$\iff 0 < x^2 - 9 \leqslant 1$$

(так как $\sqrt{31}-\sqrt{21} = \frac{31-21}{\sqrt{31}+\sqrt{21}} < \frac{10}{\sqrt{30{,}25}+\sqrt{20{,}25}} = \frac{10}{5{,}5+4{,}5} = 1$)

$$\iff 9 < x^2 \leqslant 10 \iff 3 < |x| \leqslant \sqrt{10}.$$

**2.** *Ответ:* $\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

$$|\cos x| - \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{9\pi}{2}+x\right) = 1 \iff |\cos x| - \sqrt{3}\cos x = 1$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant \cos x = \frac{1}{1-\sqrt{3}} \\ 0 > \cos x = \frac{-1}{1+\sqrt{3}} \end{array}\right. \iff \cos x = -\frac{1}{1+\sqrt{3}}.$$

**3.** *Ответ:* $-9$.

Положим $b = a+d, c = a+2d$. Выразим минимизируемое выражение через $a$ и $d$:

$$\begin{aligned}
&2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a \\
&\quad = 2a^2 - 4(a+d)^2 - (a+2d)^2 + 4(a+d)(a+2d) + 6a \\
&\quad = 2a^2 - 4a^2 - 8ad - 4d^2 - a^2 - 4d^2 \\
&\qquad\qquad -4ad + 4a^2 + 12ad + 8d^2 + 6a \\
&\quad = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9.
\end{aligned}$$

Последнее выражение достигает минимума, равного $-9$, при $a = -3$. Осталось показать, что для этого $a$ можно подобрать такое $d$, что числа $a - c = -2d, c - b = d, 2a = -6$ образуют геометрическую прогрессию, то есть

$$-2d \cdot (-6) = d^2 \iff d^2 - 12d = 0 \iff \left[\begin{array}{l} d = 0 \\ d = 12, \end{array}\right.$$

и значение $d = 12$ годится: $-2 \cdot 12 = -24, 12$ и $-6$ — действительно геометрическая прогрессия.

4. *Ответ:* $2\sqrt{3}$.

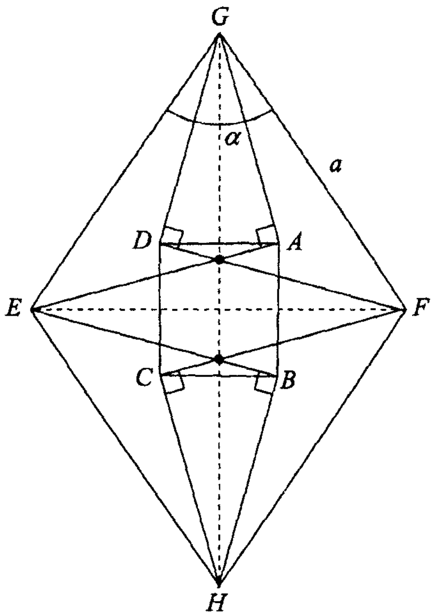


Рис. 27

Смежные стороны ромба, а значит, и опирающиеся на них треугольники симметричны относительно одной из диагоналей ромба (рис. 27). Поэтому четырёхугольник $ABCD$ является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям ромба.

Обозначим сторону ромба через $a$, его острый угол — через $\alpha$. Тогда $\angle DFA = 45^\circ + 45^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$, $\angle DGC = (180^\circ - \alpha) - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ - \alpha$. Вычислим стороны прямоугольника $ABCD$:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AF^2 + FD^2 - 2AF \cdot FD \cdot \cos(\angle DFA) \\ &= \left(\tfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\tfrac{a}{\sqrt{2}}\tfrac{a}{\sqrt{2}}\cos(90^\circ - \alpha) = a^2(1 - \sin\alpha). \\ CD^2 &= DG^2 + GC^2 - 2DG \cdot GC \cdot \cos(\angle DGC) \\ &= \left(\tfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\tfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\tfrac{a}{\sqrt{2}}\tfrac{a}{\sqrt{2}}\cos(90^\circ - \alpha) = a^2(1 - \sin\alpha). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 12 &= S_{ABCD} + S_{EFGH} = AD \cdot CD + a^2 \sin\alpha \\ &= a^2(1 - \sin\alpha) + a^2 \sin\alpha = a^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

**5.** *Ответ:* 3.

По определению обратных тригонометрических функций,

$$\arcsin(2^x - 7) \leqslant \tfrac{\pi}{2}, \qquad \arccos(5^x - 124) \geqslant 0,$$

откуда

$$4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) \leqslant 2\pi.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &-1 \leqslant 2^x - 7 \leqslant 1 \iff 6 \leqslant 2^x \leqslant 8 \\ &\implies 2 < x \leqslant 3 \implies \tfrac{6\pi}{x} \geqslant 2\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение равносильно системе равенств

$$4\arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = 2\pi = \tfrac{6\pi}{x} \iff x = 3.$$

**6.** *Ответ:* $\mathbb{Z} \setminus \{-11, -10, \ldots, -4, -3\}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leqslant k^2 + 10k + 20 \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \leqslant 5 - k^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 \leqslant (k+5)^2 - 5 \\ x^2 - \frac{2k}{5}x + y^2 + \frac{4k}{5}y \leqslant 1 - \frac{k^2}{5} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leqslant (k+5)^2 \\ \left(x - \frac{k}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2k}{5}\right)^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт на координатной плоскости $Oxy$ круг с центром $(1, -2)$ и радиусом $|k+5|$, второе — круг с центром $\left(\frac{k}{5}, -\frac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей). Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов:

$$\sqrt{\left(1 - \frac{k}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2k}{5}\right)^2} \leqslant |k+5| + 1$$
$$\iff 0 \leqslant \left(1 - \frac{k}{5}\right)^2 (1 + 4) \leqslant \left(|k+5| + 1\right)^2$$
$$\iff (k-5)^2 \leqslant 5\left(|k+5| + 1\right)^2$$
$$\iff |k-5| \leqslant \sqrt{5}\left(|k+5| + 1\right)$$
$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k \leqslant -5 \\ 5 - k \leqslant \sqrt{5}(-k - 5 + 1) \end{cases} \\ \begin{cases} -5 < k < 5 \\ 5 - k \leqslant \sqrt{5}(k + 5 + 1) \end{cases} \\ \begin{cases} k \geqslant 5 \\ k - 5 \leqslant \sqrt{5}(k + 5 + 1) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k \leqslant 5 \\ k \leqslant \frac{-4\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-1} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -5 < k < 5 \\ k \geqslant \frac{5-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} > \frac{5-6\cdot 3}{2+1} > -5 \end{cases} \\ \begin{cases} k \geqslant 5 \\ k \geqslant \frac{-5-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \leqslant \frac{-4\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-1} \\ \frac{5-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} \leqslant k < 5 \\ k \geqslant 5 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \leqslant \frac{-4\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-1} = -\frac{25+9\sqrt{5}}{4} \in (-12; -11) \\ k \geqslant \frac{5-6\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{-35+11\sqrt{5}}{4} \in (-3; -2) \end{array}\right.$$

(так как $20 < 9\sqrt{5} < 21$ и $24 < 11\sqrt{5} < 25$). Следовательно, решениями будут все целые $k$, кроме $-11, -10, \ldots, -4, -3$.

## *Вариант 4 (июль)*

**1.** Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{33}-\sqrt{23}}(x^2 - 4) \geqslant 0.$$

**2.** Решить уравнение

$$|\sin x| - \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{7\pi}{2} + x\right) = 1.$$

**3.** Числа $p$, $q$, $r$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $r - p$, $q - r$, $-3p$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $-p^2 + 8q^2 + 2r^2 - 8qr + 4p$?

**4.** Стороны ромба $ABCD$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников $AKB$, $BLC$, $CMD$, $DNA$, причём ни один из этих треугольников не имеет общих внутренних точек с ромбом $ABCD$. Сумма площадей четырёхугольника $KLMN$ и ромба $ABCD$ равна 18. Найти $AB$.

**5.** Решить уравнение

$$2\arcsin(3^x - 8) - 3\arccos(11^x - 120) = \frac{2\pi}{x}.$$

**6.** При каких целых значениях параметра $n$ система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y \leqslant n^2 + 20n + 90 \\ 10x^2 + 10y^2 + 6nx - 2ny \leqslant 10 - n^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

## Ответы

**1.** $[-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}]$.

**2.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**3.** $-4$

**4.** $3\sqrt{2}$.

**5.** 2.

**6.** $\mathbb{Z} \setminus \{-16, -15, \ldots, -7, -6\}$.

## Вариант 1

**1.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}.$$

**2.** Решить неравенство

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+4}{4x-8} \leqslant 0.$$

**3.** Решить уравнение

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0.$$

**4.** В трапеции $BCDE$ основание $BE = 13$, основание $CD = 3$, $CE = 10$. На описанной около $BCDE$ окружности взята отличная от $E$ точка $A$ так, что $CA = 10$. Найти длину отрезка $BA$ и площадь пятиугольника $ABCDE$.

**5.** При каждом значении параметра $a$ решить неравенство

$$ax^4 + x^3 + (2a+3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0.$$

## Решения

**1.** *Ответ:* $3 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-8} = \sqrt{15}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2+8-x+2\sqrt{(x+2)(8-x)}=15 \\ -2 \leqslant x \leqslant 8 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow 2\sqrt{(x+2)(8-x)}=5 \Longleftrightarrow 4(-x^2+6x+16)=25$$

$$\Longleftrightarrow 4x^2-24x-39=0.$$

**2.** *Ответ:* $(-\infty;-8] \cup (12;\infty)$.

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{3x+4}{4x-8} \leqslant 0 \Longleftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{3x+4}{4x-8} \leqslant 1 \Longleftrightarrow \tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{3x+4}{4x-8} < 1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{x+8}{4(x-2)} \geqslant 0 \\ \frac{12-x}{4(x-2)} < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-8] \cup (2;\infty) \\ x \in (-\infty;2) \cup (12;\infty). \end{cases}$$

**3.** *Ответ:* $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi l$, $2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, где $n,k,l,m \in \mathbb{Z}$.

$$3\sin^2 x - 3\cos x - 6\sin x + 2\sin 2x + 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 3\sin^2 x - 3(\cos x + 2\sin x)$$

$$+4\sin x\cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow (2\sin x + \cos x)^2 - 3(2\sin x + \cos x) + 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x + \cos x = 1 \\ 2\sin x + \cos x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x-\varphi) = \cos\varphi \\ \cos(x-\varphi) = \sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) \end{array}\right.$$

(где $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$)

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\varphi = \pm\varphi + 2\pi n \\ x-\varphi = \pm(\frac{\pi}{2}-\varphi) + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\varphi + 2\pi n \\ x = 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = 2\varphi - \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

**4.** *Ответ:* 3; $\frac{4098}{61}$.

Угол $\angle CBE$ в трапеции — острый, поэтому дуга $\overset{\frown}{CDE}$ меньше $180°$, а значит, для любой точки $X \in \overset{\frown}{CDE}$ будет $CX \leqslant CE = 10$. Следовательно, точка $A$ лежит на дуге $\overset{\frown}{CBE}$. При этом, поскольку $CB = DE < CE = 10$, точка должна лежать между точками $B$ и $E$ (см. рис. 28).

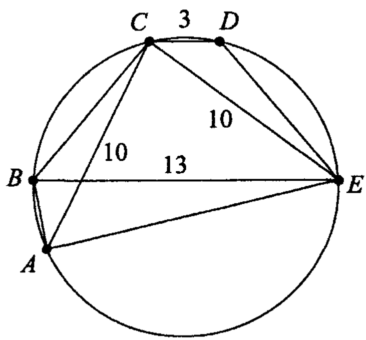


Рис. 28

Пользуясь равенством дуг, стягиваемых равными хордами, получаем $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{CBA} - \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{CDE} - \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CD}$. Отсюда $BA = CD = 3$.

Обозначив $\angle ABE = \angle ACE = \alpha$, по теореме косинусов имеем

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos\alpha$$
$$= AC^2 + CE^2 - 2 \cdot AC \cdot CE \cdot \cos\alpha$$
$$\iff 9 + 169 - 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot \cos\alpha = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$$
$$\iff (200 - 78)\cos\alpha = 200 - 178 \iff \cos\alpha = \tfrac{22}{122} = \tfrac{11}{61}$$
$$\Longrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \tfrac{11^2}{61^2}} = \frac{\sqrt{(61-11)(61+11)}}{61} = \frac{60}{61}.$$

Отсюда

$$S_{BAE} = \tfrac{1}{2} BA \cdot BE \sin\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 13 \cdot \tfrac{60}{61} = \tfrac{3 \cdot 13 \cdot 30}{61}.$$

Площадь трапеции

$$S_{BCDE} = \tfrac{1}{2}(CD + BE)\sqrt{CE^2 - \left(BE - \tfrac{BE-CD}{2}\right)^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(3 + 13)\sqrt{10^2 - (13-5)^2} = 8 \cdot 6 = 48.$$

Таким образом,

$$S_{ABCDE} = S_{BAE} + S_{BCDE} = \tfrac{3\cdot 13\cdot 30}{61} + 48$$
$$= \tfrac{6(3\cdot 13\cdot 5 + 8\cdot 61)}{61} = \tfrac{6(195+488)}{61} = \tfrac{6\cdot 683}{61} = \tfrac{4098}{61}.$$

**5.** *Ответ:*

$x \in \varnothing$ при $a \leqslant -\sqrt[4]{\frac{1}{12}}$;

$x \in \left(\frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$ при $-\sqrt[4]{\frac{1}{12}} < a < 0$;

$x \in (0; \infty)$ при $a = 0$;

$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \infty\right)$ при $0 < a \leqslant \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$;

$x \in (-\infty; \infty)$ при $a > \sqrt[4]{\frac{1}{12}}$.

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 > 0$$
$$\iff x^2(ax^2 + x + 3a^3) + 2(ax^2 + x + 3a^3) > 0$$
$$\iff (x^2 + 2)(ax^2 + x + 3a^3) > 0$$
$$\iff ax^2 + x + 3a^3 > 0.$$

В особом случае $a = 0$ получаем $x > 0$.

В случае $a \neq 0$ квадратный трёхчлен имеет дискриминант $D = 1 - 12a^4$, так что при $a^4 > \frac{1}{12}$ и $a < 0$ неравенство решений не имеет, а при $a^4 > 12$ и $a > 0$ решениями будут все значения $x$. Далее, при $0 < a^4 \leqslant \frac{1}{12}$ квадратный трёхчлен имеет корни $x_1 = \frac{-1-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_1 = \frac{-1+\sqrt{D}}{2a}$. Если $a < 0$, то $x_1 > x_2$, и решением неравенства будет интервал $x_2 < x < x_1$, а если $a > 0$, то $x_1 < x_2$, и решением неравенства будут два луча $x < x_1$ и $x > x_2$.

## *Вариант 2*

**1.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=\sqrt{12}.$$

**2.** Решить неравенство

$$\log_3 \log_{\frac{1}{3}} \frac{2x+18}{3x+6} \leqslant 0.$$

**3.** Решить уравнение

$$3\cos^2 x + 2\cos x - \sin x - 2\sin 2x - 1 = 0.$$

**4.** В трапеции $CDEA$ основание $CA = 15$, основание $DE = 9$, $DA = 13$. На описанной около $CDEA$ окружности взята отличная от $A$ точка $B$ так, что $DB = 13$. Найти длину отрезка $CB$ и площадь пятиугольника $ABCDE$.

**5.** При каждом значении параметра $a$ решить неравенство

$$2ax^4 + 8x^3 + (a+2a^3)x^2 + 4x + a^3 > 0.$$

## *Ответы*

**1.** $1 \pm 2\sqrt{3}$.

**2.** $(-\infty; -16] \cup (12; \infty)$.

**3.** $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k$, $-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \pm \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

**4.** $9$, $\frac{4075}{34}$.

**5.**

$x \in \varnothing$ при $a \leqslant -\sqrt{2}$;

$x \in \left(\frac{-2-\sqrt{4-a^4}}{a}; \frac{-2+\sqrt{4-a^4}}{a}\right)$ при $-\sqrt{2} < a < 0$;

$x \in (0; \infty)$ при $a = 0$;

$x \in \left(\frac{-\infty; -2-\sqrt{4-a^4}}{a}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{4-a^4}}{a}; \infty\right)$ где $0 < a \leqslant \sqrt{2}$;

$x \in (-\infty; \infty)$ при $a > \sqrt{2}$.

# *Социологический факультет*

## *Вариант 1*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{|x|}\geqslant 2.$$

**2.** Решить уравнение

$$\log_{\sin x}(3\sin x-\cos 2x)=0.$$

**3.** В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8% ?

**4.** Диагональ $AC$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение $S_{ABC}$ и $S_{ACD}$, если известно, что диагональ $BD$ делит $AC$ в отношении $2:1$ (считая от точки $A$), а $\angle BAC=30°$.

**5.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения

$$ax^2+(2a+2)x+(a+3)=0$$

больше 1.

**6.** Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\tfrac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\tfrac{2-6x}{x}}=1.$$

## Решения

**1.** *Ответ:* $(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ \frac{x+x+1-2x(x+1)}{x(x+1)}\geqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \frac{x-(x+1)-2x(x+1)}{x(x+1)}\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ 2x^2-1\leqslant 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \frac{2x^2+2x+1}{x+1}\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ |x|\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x+1>0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -1<x<0.\end{array}\right.$$

**2.** *Ответ:* $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

$$\log_{\sin x}(3\sin x-\cos 2x)=0 \iff \begin{cases}3\sin x-\cos 2x=1\\ 0<\sin x<1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}2\sin^2 x+3\sin x-2=0\\ 0<\sin x<1\end{cases} \iff \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin x=-2\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ 0<\sin x<1\end{array}\right.$$

$$\iff \sin x=\tfrac{1}{2}.$$

**3.** *Ответ:* $8\frac{3}{4}\%$.

Пусть в прошлом году в городе было $A$ жителей и, соответственно, $0{,}08A$ безработных. В этом году жителей стало $0{,}96A$, а безработных — $0{,}08A\cdot 1{,}05$. Следовательно безработные составляют

$$\frac{0{,}08A\cdot 1{,}05}{0{,}96A}\cdot 100\%=\frac{8\cdot 105\cdot 100}{100\cdot 100\cdot 96}\cdot 100=\frac{8\cdot 105}{96}=\frac{35}{4}\%.$$

**4.** *Ответ:* $\frac{7}{8}$.

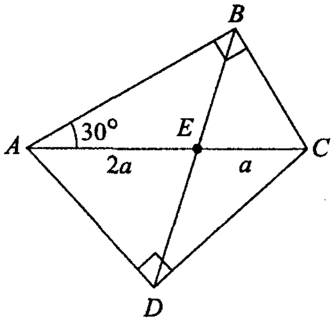


Рис. 29

Вписанные углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ опираются на диаметр, то есть равны $90°$. Пусть $E$ — точка пересечения диагоналей (рис. 29), $AE = 2a, EC = a$. Имеем $AB = AC \cdot \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$,

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2 - 2 \cdot AE \cdot AB \cos 30°}$$
$$= \sqrt{4a^2 + \tfrac{27}{4}a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \tfrac{3\sqrt{3}}{2}a \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}} = \tfrac{\sqrt{7}}{2}a.$$

Вписанные углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$ опираются на одну дугу, а значит, равны, так что треугольники $BEC$ и $AED$ подобны по двум углам. Коэффициент подобия $k = \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Треугольники $BAC$ и $BEC$ имеют одинаковую высоту, проведённую из точки $B$, поэтому $S_{BAC} = S_{BEC} \cdot \frac{AC}{EC} = 3 \cdot S_{BEC}$. Аналогично $S_{ACD} = \frac{3}{2}S_{AED}$. Отсюда

$$\frac{S_{BAC}}{S_{ACD}} = \frac{3S_{BEC}}{\frac{3}{2}S_{AED}} = 2 \cdot k^2 = 2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{8}.$$

**5.** *Ответ:* $(-2 - 2\sqrt{2}; 0) \cup (0; -2 + 2\sqrt{2})$.

Корни уравнения $ax^2+(2a+2)x+a+3=0$ находятся по формуле $x_{1,2}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-a(a+3)}}{a}=\frac{-(a+2)\pm\sqrt{1-a}}{a}$. Имеем $|x_2-x_1|=\left|\frac{2\sqrt{1-a}}{a}\right|=\frac{2\sqrt{1-a}}{|a|}$, и остаётся решить неравенство

$$\frac{2\sqrt{1-a}}{a}>1 \iff \frac{4(1-a)}{a^2}>1 \iff \frac{a^2+4a-4}{a^2}<0$$
$$\iff \frac{(a-(-2-2\sqrt{2}))(a-(-2+2\sqrt{2}))}{a^2}<0$$
$$\iff a\in(-2-2\sqrt{2};0)\cup(0;-2+2\sqrt{2}).$$

**6.** *Ответ:* $-1,\ \frac{2}{7}$.

$$\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=1 \Longrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}\right)^3=1$$
$$\Longrightarrow \frac{2+x}{x}-3\left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}\right)^2\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}$$
$$+3\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}\left(\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}\right)^2-\frac{2-6x}{x}=1$$
$$\Longrightarrow -3\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}\left(\sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}\right)=-6$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{\frac{2+x}{x}}\sqrt[3]{\frac{2-6x}{x}}=2 \Longrightarrow (2+x)(2-6x)=8x^2$$
$$\Longrightarrow 14x^2-10x+4=0 \Longrightarrow x=-1 \text{ или } \frac{2}{7}.$$

Непосредственно проверяется, что оба этих числа подходят в исходное уравнение.

## *Вариант 2*

**1.** Решить неравенство

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{|2x|}\geqslant 1.$$

**2.** Решить уравнение

$$\log_{\cos x}(\cos x+2\cos 2x)=0.$$

**3.** В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 2%, а число безработных увеличилось на 12%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 7%?

**4.** Диагональ $AC$ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Найти отношение $S_{ABC}$ и $S_{ACD}$, если известно, что диагональ $BD$ делит $AC$ в отношении $2:5$ (считая от точки $A$), а $\angle BAC = 45°$.

**5.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения

$$2ax^2 + 5x + 1 = 0$$

больше $\frac{1}{2}$.

**6.** Решить уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{4+x}{x}} - \sqrt[3]{\frac{4-6x}{x}} = 1.$$

## *Ответы*

**1.** $(-2;0) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right]$.

**2.** $\pm \arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

**3.** 8.

**4.** $\frac{29}{20}$.

**5.** $(-4-\sqrt{41}; 0) \cup (0; -4+\sqrt{41})$.

**6.** $-2$, $\frac{4}{7}$.

# *Филологический факультет*

## *Вариант 1*

**1.** Решить уравнение

$$3\cos 2x + 4\sin x = 1.$$

**2.** Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x}.$$

**3.** В трапеции $ABCD$ стороны $AB$ и $CD$ параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах $AD$ и $BC$ выбраны соответственно точки $P$ и $Q$ так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найти отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

**4.** Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

**5.** При каких значениях параметра $a$ на плоскости $(x, y)$ существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 1 \\ y + 2x \leqslant 2 \\ y + ax \geqslant -1. \end{cases}$$

# Решения

**1.** *Ответ:* $\frac{\pi}{2}+2\pi n, (-1)^k\arcsin(-\frac{1}{3})+\pi k$, где $n,k\in\mathbb{Z}$.

$$3\cos 2x+4\sin x=1 \iff 3(1-2\sin^2 x)+4\sin x-1=0$$
$$\iff 3\sin^2 x-2\sin x-1=0$$
$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

**2.** *Ответ:* $(-1;\infty)$.

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)}>\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}x}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}x}$$
$$\iff \frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)}>\log_x\frac{1}{4}+\log_x\frac{1}{3}$$
$$\iff \frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)}>\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}x}$$
$$\iff \frac{\log_{\frac{1}{12}}x-\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)}{\log_{\frac{1}{12}}(2x^2-1)\log_{\frac{1}{12}}x}>0$$
$$\iff \begin{cases}\frac{x-(2x^2-1)}{((2x^2-1)-1)\cdot(x-1)}<0\\ x>0\\ 2x^2-1>0\end{cases}$$

(так как выражения $\log_{\frac{1}{12}}a-\log_{\frac{1}{12}}b$ и $\log_{\frac{1}{12}}c$ имеют те же знаки, что и $b-a$ и $1-c$ соответственно, — при $a,b,c>0$.)

$$\iff \begin{cases}\frac{(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x^2-1)(x-1)}>0\\ x>\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{1}{x-1}>0\\ x>\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \iff x>1.$$

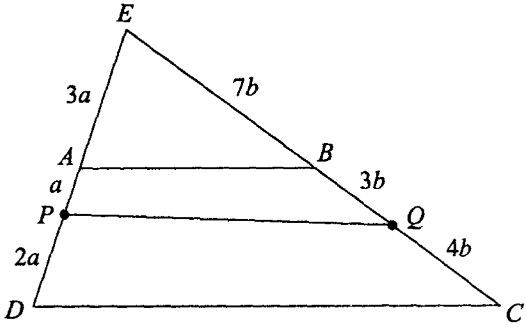


Рис. 30

**3.** *Ответ:* $\frac{19}{44}$.

Продолжим боковые стороны $AD$ и $BC$ до пересечения в точке $E$ (рис. 30). Отрезок $AB$ является средней линией в треугольнике $DEC$. Пусть площадь треугольника $DEC$ равна $S$. Тогда

$$S_{AEB} = \tfrac{1}{4}S; \quad S_{PEQ} = \tfrac{PE}{DE} \cdot \tfrac{QE}{CE} \cdot S = \tfrac{10}{21}S;$$
$$S_{ABPQ} = S_{PEQ} - S_{AEB} = \tfrac{10}{21}S - \tfrac{1}{4}S = \tfrac{19}{84}S;$$
$$S_{DPQC} = S_{DEC} - S_{PEQ} = S - \tfrac{10}{21}S = \tfrac{11}{21}S;$$
$$\tfrac{S_{ABPQ}}{S_{DPQC}} = \tfrac{19}{84} : \tfrac{11}{21} = \tfrac{19}{44}.$$

**4.** *Ответ:* 50%.

Пусть $T_З$ — тираж книги писателя З, а $S_С$ и $Ф_С$ – соответственно количество страниц и среднее количество букв «ф» на странице в книге писателя С. Согласно условию, $1{,}05 \cdot T_З$ — тираж книги писателя С, $0{,}9 \cdot S_С$ — количество страниц в книге писателя З, а $1{,}75 \cdot Ф_С$ — среднее количество букв «ф» на странице книги З. Тогда общее количество букв «ф» у С равно $Ф_С \cdot S_С \cdot 1{,}05T_З$, а у З — $1{,}75Ф_С \cdot 0{,}9S_С \cdot T_З$, и можно вычислить искомые проценты:

$$\tfrac{1{,}75Ф_С \cdot 0{,}9S_С \cdot T_З}{Ф_С \cdot S_С \cdot 1{,}05T_З} \cdot 100\% = \tfrac{7 \cdot 9 \cdot 100}{4 \cdot 10 \cdot 105} \cdot 100 = 150\%,$$

то есть у З на 50% больше букв «ф», чем у С.

**5.** *Ответ:* $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 1 \\ y + 2x \leqslant 2 \\ y + ax \geqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y \leqslant -2x + 2 \\ y \geqslant -ax - 1 \end{cases}$$

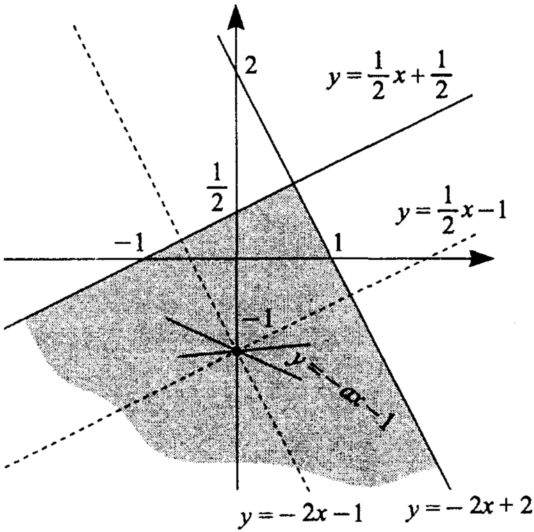


Рис. 31

Сектор, задаваемый первыми двумя неравенствами, закрашен на рис. 31. Прямая $y = -ax - 1$ проходит через точку $(0, -1)$. Для того, чтобы полуплоскость $y \geqslant -ax - 1$ в пересечении с закрашенным сектором давала ограниченное множество (а именно это требуется в задаче), необходимо и достаточно, чтобы прямая $y \geqslant -ax - 1$ проходила строго «между» прямыми $y = \frac{1}{2}x - 1$ и $y = -2x - 1$ (см. рис. 31). Это означает, что её угловой коэффициент $-a$ должен быть заключён строго между $-2$ и $-\frac{1}{2}$, то есть $a \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

## Вариант 2

**1.** Решить уравнение

$$5\sin x + 2\cos 2x = 3.$$

**2.** Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x} < \frac{1}{\log_{\frac{1}{15}}(2x^2 - 1)}.$$

**3.** В трапеции $ABCD$ стороны $AB$ и $CD$ параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах $AD$ и $BC$ выбраны соответственно точки $P$ и $Q$ так, что $DP : PA = 3 : 4$, $BQ : QC = 1 : 2$. Найти отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

**4.** Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 30% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 4% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 4% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

**5.** При каких значениях параметра $p$ на плоскости $(x, y)$ существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - y \geqslant px \\ x - 2y \leqslant 1 \\ y + 2x \leqslant 2. \end{cases}$$

## Ответы

**1.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^k \arcsin\frac{1}{4} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

**2.** $(1; \infty)$.

**3.** $\frac{23}{44}$.

**4.** 20%.

**5.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

# *К сведению поступающих на механико-математический факультет*

Механико-математический факультет (мехмат) является ведущим учебно-научным центром в области математики и механики. На факультете действуют научные школы, возглавляемые учёными самого высокого класса (только среди заведующих кафедрами 12 академиков и 3 члена-корреспондента Российской академии наук). Выпускники нашего факультета трудятся во всех крупных учебных заведениях и научно-исследовательских центрах, государственных предприятиях и частных фирмах, не обязательно непосредственно связанных с математикой и механикой.

Механико-математический факультет имеет два отделения: математики и механики. Выпускники факультета могут получить одну из трёх квалификаций: «математик, математик-прикладник» (обучение по специальности «математика, прикладная математика» на отделении математики), «механик, математик-прикладник» (обучение по специальности «механика, прикладная математика»на отделении механики), «математик, математик-прикладник в области экономики» (обучение по специальности «математика, прикладная математика»на отделении математики).

Конкурс на отделения математики и механики раздельный.

На каждом отделении на первом и втором курсах обучение происходит по общей программе для всех студентов. На третьем курсе студенты разделяются по кафедрам. Каждый студент выбирает научного руководителя, который руководит его первыми научными исследованиями. Традиционно около трети от общего числа выпускников поступают в аспирантуру. Студенты и аспиранты публикуют результаты своих исследований в ведущих научных журналах.

Наш факультет известен своим дружелюбным отношением к студентам. Любой первокурсник может обратиться с вопросом — даже наивным — к любому академику, и получит исчерпывающий ответ. На мехмате учат не столько рецептам решения конкретных задач, сколько учат думать самостоятельно, а также извлекать знания из разных источников. Именно это позволяет быстро включиться в любой новый вид деятельности — например, в компьютерной или финансовой сфере, в области политики или управления производством.

Распространено мнение, что учиться на мехмате могут только вундеркинды. Это ни в коей мере не соответствует действительности. Конечно, студенту мехмата требуется интерес к математике и способность генерировать математические идеи, однако в первую очередь от него требуется готовность и способность много трудиться для освоения своей науки. И варианты вступительных испытаний составляются именно с тем расчётом, чтобы по возможности проверить наличие указанных качеств у будущего студента. Никаких требований, выходящих за рамки программы средней школы, к поступающим на экзаменах не предъявляется. Это не означает, что все задачи решаются без особых усилий. Их решение требует хорошего владения школьным материалом. Наилучшим способом подготовки к вступительным экзаменам является *самостоятельное* решение задач из вариантов и последующее ознакомление с образцовыми решениями, ежегодно публикуемыми в виде отдельной брошюры, а также в журналах «Квант» и «Математика в школе».

О всех **мероприятиях по приёму** на механико-математическом факультете можно узнать на Днях открытых дверей факультета (ежегодно 6 января в 11.00 в ауд. 02 Главного здания МГУ и в один из дней в начале апреля), в приёмной комиссии — по телефону (095) 939-37-39 по рабочим дням с 14.00 до 16.00, а также на факультетском сайте в Internet: `http://mech.math.msu.su` .

Кроме обычных летних вступительных экзаменов, факультет традиционно проводит две Олимпиады «Абитуриент» — в марте и в мае. На эти Олимпиады приглашаются все желающие учащиеся 11 классов и абитуриенты, уже имеющие среднее образование. Иногородним участникам на время мартовской Олимпиады предоставляется место в общежитии при условии успешного выполнения заочного тестирования (условия задач этого тестирования ежегодно публикуются в декабре в журнале «Математика в школе», газете «Первое сентября» и в справочнике «Московский университет»). Результаты победителей этих Олимпиад засчитываются при поступлении на механико-математический факультет в качестве результатов вступительных экзаменов по математике.

**Приём документов** от поступающих на механико-математический факультет будет проводиться с 20 июня по 1 июля. Представляются следующие документы: аттестат о среднем образовании (в подлиннике), 6 фотокарточек 3 × 4, предъявляется паспорт. Желательно иметь при себе также медицинскую справку 086-у, выписку из трудовой книжки (для имеющих стаж работы), страховой полис обязательного медицинского страхования и документ об отношении к воинской обязанности.

**Вступительные экзамены** — со 2 июля по 15 июля. Перечень вступительных экзаменов: математика (письменно, 10 баллов), математика (устно, 10 баллов на отделении математики и 5 баллов на отделении механики), русский язык и литература (сочинение, 5 баллов). Используется система зачисления по неполному набору экзаменов для медалистов.

# Работа со школьниками на механико-математическом факультете

Каждый год с октября по апрель функционирует **Малый мехмат** — кружок при механико-математическом факультете. Занятия проходят каждую субботу с 16:00 в Главном здании МГУ. Есть группы для учащихся всех классов — с 1-го по 11-ый. Как правило, занятия не зависят друг от друга, поэтому можно прийти в любую субботу. Старшеклассники приглашаются на лекции по математике, читаемые ведущими учёными — профессорами мехмата.

Для иногородних учащихся действует заочное отделение Малого мехмата — конкурсное и (немного) платное. Вступительная работа ежегодно публикуется в журнале «Квант».

Все справки о Малом мехмате — по телефону (095) 939-39-43.

В нескольких московских школах есть **классы при мехмате**. Это школы №25 (набор в 10 класс; адрес: Университетский пр., д. 7; проезд: метро «Университет»; тел. 938-00-25), №54 (набор в 9 класс; адрес: ул. Доватора, 5; проезд: метро «Спортивная»; тел. 245-99-72, 245-54-25), №1134 (набор в 9 класс; адрес: ул. Раменки, д. 15, корп. 1; проезд: м. «Проспект Вернадского», далее авт. 715 до остановки «Универсам»; тел. 932-08-01, 932-00-00). Набор в классы — по результатам вступительных испытаний, которые проходят весной каждого года. Математику в этих классах преподают сотрудники и аспиранты мехмата. Как правило, больше половины выпускников поступают на механико-математический и другие естественные факультеты Московского университета.

Иногородние ребята могут поступить в **школу-интернат им. А. Н. Колмогорова при МГУ** (набор в 10 и 11 классы, адрес: ул. Кременчугская, д. 11; тел. приёмной комиссии (095) 445-11-08; вступительные экзамены — весной, с выездом в некоторые города России). Последние годы школа-интернат набирает и московских школьников в порядке отдельного конкурса. Преподавание всех дисциплин ведётся профессорско-преподавательским составом Московского университета. Большинство выпускников интерната становятся студентами МГУ.

Ежегодно механико-математический факультет проводит **Олимпиаду МГУ по математике для 8–10 классов**. (в 2002 г. она состоится 14 апреля в 11:00 в Главном здании МГУ). Результаты Олимпиады учитываются при наборе в математические классы при факультете и в школу-интернат им. А. Н. Колмогорова.

Эта Олимпиада проводится вот уже в течение десяти лет. В ней участвуют не только московские школьники, но и ребята из Подмосковья и ближних городов — все, кто может и хочет приехать.

Задачи олимпиады мехмата по своему стилю несколько отличаются от задач Московской городской олимпиады, не уступая им по уровню сложности. Ниже приводятся задания, предлагавшиеся на олимпиаде мехмата в 2001 г.

## *8 класс*

**1.** В компании из трёх человек один — правдивец, т. е. всегда говорит правду, один — лжец, т. е. всегда лжёт, и один — дипломат, т. е. говорит правду или лжёт по своему усмотрению. Чтобы узнать, кто из них есть кто, каждого спросили, кто он есть. Первый ответил, что он правдивец, второй — что он лжец, а третий — что он или правдивец, или лжец. Кто из них есть кто? Ответ обосновать.

**2.** Доказать, что при любом целом $n \geqslant 0$ число $1334\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ нулей}}4669$ делится на 2001.

**3.** Группа туристов отправилась в $12^{\underline{00}}$ из лагеря по маршруту. В $12^{\underline{30}}$ штурман вспомнил, что оставил в лагере компас, и сбегал за ним в лагерь, догнав шедшую с прежней скоростью группу в $14^{\underline{00}}$. В котором часу штурман прибыл в лагерь, если бежал он с постоянной скоростью и в лагере не задерживался?

**4.** Найти наибольшее значение выражения $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ при $x, y, z \in [-1; 1]$.

**5.** Доказать, что если в четырёхугольнике $ABCD$ центры окружностей, описанных около треугольников $ABC$, $ABD$, $ACD$ и $BCD$, служат вершинами параллелограмма, то и сам четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

**6.** Два алмазоискателя нашли 2001 алмаз и хотят разделить их поровну следующим образом: один пытается разбить все алмазы на две одинаковые (по весу) кучки, а второй берёт себе бо́льшую из получившихся кучек. Про алмазы известно только, что самый лёгкий из них весит $a$ г, а самый тяжёлый — $b$ г, причём $b < ka$. При каком наибольшем значении $k$ второй алмазоискатель может быть уверен, что как бы ни старался первый, одна из кучек будет больше другой?

## *9 класс*

**1.** В компании из трёх человек один — правдивец, т. е. всегда говорит правду, один — лжец, т. е. всегда лжёт, и один — дипломат, т. е. говорит правду или лжёт по своему усмотрению. Чтобы узнать, кто из них есть кто, каждого спросили, кто он есть. Первый ответил, что он не лжец, второй — что он не правдивец, а третий — что он ни лжец, ни правдивец. Кто из них есть кто? Ответ обосновать.

**2.** Можно ли в таблице размером $n \times n$ отметить часть клеток так, чтобы в каждом столбце было отмечено одинаковое ненулевое число клеток, а в каждой строке — разное: а) при $n = 2001$; б) при $n = 2000$?

**3.** Найти такие два числа, не кратные 2001, что если к одному из них приписать другое, а между ними вписать любое количество нулей, то полученное число будет делиться на 2001.

**4.** Найти наибольшее значение выражения

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{12} - x_{13})^2 + (x_{13} - x_1)^2$$

при $x_1, \dots, x_{13} \in [0; 1]$.

**5.** Вписанная в равнобедренный треугольник $ABC$ окружность касается его боковых сторон $AB$ и $BC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Отрезок $AE$ пересекает окружность в точке $F$, а прямая $DF$ пересекает основание $AC$ в точке $G$. Найти $AG$, если $AC = 1$.

**6.** Числовая функция $f$ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x}, & x < 2, \\ 2x - x^2, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Что больше: $\sqrt{3}$ или $\underbrace{f(f(\ldots f}_{2001 \text{ буква } f}(\sqrt{3})\ldots))$?

## *10 класс*

**1.** В компании из шести человек один — правдивец, т. е. всегда говорит правду, двое — дипломаты, т. е. говорят правду или лгут по своему усмотрению, а остальные — лжецы, т. е. всегда лгут. Чтобы узнать, кто из них есть кто, каждого спросили, кто он есть. Первый ответил, что он правдивец, второй — что он дипломат, третий — что он лжец, четвёртый — что он не правдивец, пятый — что он не дипломат, а шестой — что он не лжец. Кто из них есть кто? Ответ обосновать.

**2.** Найти: а) какое-нибудь натуральное число, квадрат которого оканчивается цифрами 2001; б) наименьшее такое число.

**3.** Доказать, что если

$$\sin x + \sin y + \sin z \geqslant \sqrt{5},$$

то

$$\cos x + \cos y + \cos z \leqslant 2.$$

**4.** Окружность касается сторон угла $ABC$ в точках $A$ и $C$. Прямая, проходящая через точку $B$, пересекает окружность в точках $D$ и $E$, причём $AE \parallel BC$. Прямые $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $F$. Найти $BF$, если $AB = 1$.

**5.** Числовая функция $f$ при каждом действительном $x$ удовлетворяет равенству $x + f(x) = f(f(x))$. Решить уравнение $f(f(x)) = 0$.

**6.** Существует ли многогранник, у которого 6 граней — квадраты, а остальные грани — правильные треугольники?

# Оглавление