

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ**

## Содержание

Предисловие редактора	5
Предисловие автора	6
Введение	7
<b>Глава I. Основные положения</b>	<b>10</b>
§ 1. Колебательная система	10
§ 2. Устойчивость равновесия	11
§ 3. Устойчивость движения	17
§ 4. Классификация сил, действующих на колебательную систему	18
§ 5. Обобщенное уравнение энергии	22
§ 6. Квадратичные формы $T$ , $\Phi$ , $\Pi$ для линеаризованных систем	23
§ 7. Дифференциальные уравнения малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия	28
<b>Глава II. Линейные системы с одной степенью свободы</b>	<b>31</b>
§ 1. Некоторые вопросы, связанные с построением схемы	31
§ 2. Интерпретация движения на фазовой плоскости	33
§ 3. Свободные колебания без сопротивления	36
§ 4. Электрические системы	41
§ 5. Потеря устойчивости	44
§ 6. Затухающие колебания	49
§ 7. Нарастающие колебания	60
§ 8. Вынужденные колебания без сопротивления при периодическом возмущении	64
§ 9. Практический гармонический анализ	74
§ 10. Вынужденные колебания с линейным сопротивлением при периодическом возмущении	88
§ 11. Вынужденные колебания при произвольном законе	97
<b>Глава III. Нелинейные системы с одной степенью свободы</b>	<b>105</b>
§ 1. Консервативные системы	105
§ 2. Диссипативные системы	121
§ 3. Автоколебательные системы	137
§ 4. Вынужденные колебания нелинейных систем	162
§ 5. Системы, описываемые уравнениями с периодически изменяющимися коэффициентами	180
<b>Глава IV. Линейные системы с конечным числом степеней свободы</b>	<b>201</b>
§ 1. Исследования дифференциальных уравнений движения автономной системы	201
§ 2. Устойчивость системы	203
§ 3. Критерий устойчивости	210
§ 4. Свободные колебания в случае пренебрежимо малого сопротивления	216
§ 5. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы	225
§ 6. Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы	233

§ 7. Вынужденные колебания системы без сопротивления	237
§ 8. Вынужденные колебания системы с сопротивлениями, пропорциональными скорости	243
§ 9. Приближенные методы определения частоты колебаний сложных систем	246
§ 10. Динамический виброгаситель без затухания	266
§ 11. Динамический виброгаситель с затуханием	270
Литература	275

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящая книга написана известным советским ученым в области теории колебаний профессором Московского высшего технического училища им. Э. Н. Баумана, доктором технических наук Александром Николаевичем Обморшевым. Издание книги осуществляется уже после смерти автора, безвременно скончавшегося в 1961 г.

Книга представляет собой изложение курса лекций, в продолжение ряда лет читавшихся А. Н. Обморшевым студентам приборостроительного факультета Московского высшего технического училища. Естественно, что это обстоятельство наложило свой отпечаток как на построение книги, так и на полноту освещения отдельных ее разделов. Тем не менее автор охватил достаточно широкий круг вопросов. Изложение сопровождается достаточным числом умело подобранных примеров, относящихся к электрическим и механическим системам, рассмотрение которых значительно облегчает усвоение теории.

Книга А. Н. Обморшева может служить хорошим введением для изучения более подробных книг по теории колебаний и для чтения специальных исследований по различным вопросам и приложениям теории колебаний.

Книга подверглась лишь незначительной редакции, с тем, чтобы сохранить замысел автора. Значительную помощь в подготовке рукописи к изданию оказал ученик автора А. А. Гордеев.

*В. В. Петров*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Книга представляет собой несколько расширенный курс лекций по теории колебаний для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей высших технических учебных заведений. Предполагается, что читатель знаком с математическим анализом и теоретической механикой в объеме нормальной программы высшей технической школы.

Теоретический материал иллюстрируется техническими примерами, а также решением соответствующих задач, часть которых доводится до числового результата. За немногими исключениями все приводимые в книге теоремы и формулы доказываются и выводятся, может быть в ряде случаев без излишней детализации, но не в ущерб ясности.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов, но может быть полезной также инженерам особенно при чтении и изучении ими специальной литературы по теории колебаний.

*А. Н. Обморшев*

## ВВЕДЕНИЕ

Колебания во всем их многообразии играют очень большую роль в современной технике. Трудно указать ту область техники, где бы не встречались колебания, причем с расширением и углублением наших познаний о явлениях природы открываются все новые области, в которых имеют место колебательные процессы, а там где эти процессы были известны раньше только в самых общих чертах они постигаются более глубоко.

Первоначальные сведения о колебаниях в природе и в технике даются в курсе физики и далее развиваются в курсах теоретической механики, сопротивления материалов и электротехники; поэтому мы не будем заниматься повторением уже хорошо известных элементарных понятий. Остановимся лишь вкратце на историческом обзоре развития науки о колебаниях, ограничившись наиболее существенными фактами, приведшими к формированию этой дисциплины.

Первые серьезные для своего времени исследования колебаний восходят к XVII веку. Они были выполнены Г. Галилеем и затем Х. Гюйгенсом и касались лишь маятника. В XVIII веке, с развитием математического анализа и теоретической механики, интерес к колебательным процессам уже подкрепляется основательной теоретической базой. Так, Л. Эйлер в России занимается изучением колебаний корабля в связи с вопросом о его устойчивости, а Ж. Даламбер во Франции работает над исследованием колебаний струны. В конце XVIII века Лагранж в своем замечательном труде «Аналитическая механика» создает мощный математический аппарат в виде хорошо известных теперь уравнений движения в обобщенных координатах. Рассмотрев с его помощью некоторые задачи теории колебаний, приводящиеся к интегрированию линейных дифференциальных уравнений, он тем самым заложил основы линейной теории колебаний.

В первой половине XIX века русский ученый М. В. Остроградский решает некоторые задачи о колебаниях, приводящие к нелинейным дифференциальным уравнениям. В середине XIX века К. Вейерштрасс дает точное решение задачи о маятнике с помощью эллиптических функций. Таким образом, нелинейные задачи начали решать уже в прошлом столетии, однако общей нелинейной теории колебаний еще не было создано.

Внимание ученых во второй половине XIX века все более начали привлекать прикладные вопросы теории колебаний, составлявшие иногда даже целые области физики и техники (акустика и сейсмология с элементами сейсмометрии).

В 70-х годах XIX века появилось сочинение английского физика Дж. В. Стретта (лорд Рэлей) «Теория звука». Первая половина этого сочинения посвящена систематическому изложению основ линейной теории колебаний, а также некоторым нелинейным задачам, правда, лишь очень немногим. Во второй половине даны приложения этой теории непосредственно к вопросам акустики (распространение звуковых волн, музыкальные инструменты). Трудом Рэрея общая теория малых колебаний, т. е. колебаний, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, была в основном завершена.

Развитие быстроходных машин и средств транспорта создало богатые возможности для приложения и совершенствования этой теории. Здесь следует отметить работы А. Н. Крылова по теории качки корабля, по вибрациям стволов орудий и другим вопросам прикладной теории колебаний, Б. Б. Голицина по сейсмометрии, швейцарского ученого А. Стодолы по колебаниям элементов турбин и т. д. Эти работы относятся уже к началу текущего столетия и образуют прикладную ветвь теории колебаний.

Практические методы линейной теории совершенствуются и в наше время.

Задача о маятнике показала недостаточность линейной трактовки некоторых явлений, причем эта недостаточность особенно выпукло проявилась с развитием теории автоматического регулирования.

Как упоминалось, отдельные исследования по нелинейным колебаниям появлялись уже ранее. В 20-х годах нашего столетия к этим исследованиям добавилась работа голландского ученого Ван-дер-Поля, посвященная электрическим колеба-

ниям в контуре, содержащем электронную лампу, и давшая толчок к развитию ряда методов, составивших основу современной нелинейной теории колебаний.

Честь создания этой теории, оформившейся только в 30-х годах нашего века, принадлежит в значительной степени советским ученым, среди которых необходимо отметить Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронova, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Б. В. Булгакова и других.

Интересно отметить, что ряд методов нелинейной теории колебаний заимствован из небесной механики, достигшей уже в прошлом столетии высокой степени точности исследований. Сюда надо, прежде всего, отнести исследования французского ученого А. Пуанкаре. Блестательный прогресс теории колебаний, особенно нелинейной, стал возможен благодаря крупным достижениям в теории устойчивости движения, возникшей в прошлом столетии и разработанной рядом ученых, среди которых первое место принадлежит А. М. Ляпунову.

Кроме простейшей задачи о колебании системы с одной степенью свободы, уже со времен Лагранжа стали рассматривать колебания связанных систем. Сюда относятся, например, крутильные и поперечные колебания валов с дисками, колебания локомотивов, гироскопов и т. д.

В последние пятнадцать — двадцать лет начала разрабатываться трудная задача о колебаниях связанных нелинейных систем.

Наряду с теорией колебаний систем с одной степенью свободы или с произвольным конечным числом степеней свободы, развивалась также теория колебаний сплошных сред, например, упругих тел. С этим вопросом, требующим для своего рассмотрения уже уравнений в частных производных, приходится встречаться в тех случаях, когда необходимо учитывать распределенную массу колеблющегося тела, балки, вала, пластины и т. д.

## § 1. КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Физическая система называется *колебательной*, если все или некоторые величины, определяющие ее состояние, изменяются не монотонно, а претерпевают переменные увеличения и уменьшения. В простейшем случае механической системы \*), определяемой обобщенными координатами

$$q_1, q_2, \dots, q_n,$$

последние во время колебательного процесса то возрастают, то убывают. Это означает, что точки или тела, входящие в систему, совершают прямые и обратные движения.

Колебательное свойство какой-либо системы не следует смешивать со свойством периодичности. Под периодичностью подразумевается регулярная повторяемость явления, причем периодическое движение может быть как колебательным, так и прогрессивным. Например, движение маятника есть движение периодическое колебательное, а движение стрелки часов — движение периодическое прогрессивное. С другой стороны, не всякое колебание периодично. На рис. 1, а представлен график простейшего колебательного периодического движения, а на рис. 1, б — график движения колебательного, но не периодического (нельзя указать период).

---

\*) В теоретической механике механической системой принято называть совокупность конечного или бесконечного числа материальных точек, связанных между собой. Обобщенными же координатами называются такие независимые между собой величины, заданием которых вполне определяется положение всех точек системы. Число таких координат называют числом степеней свободы системы [8].

Выбор координат, определяющих состояние системы, вообще произволен и подчинен лишь практическим соображениям. Например, при рассмотрении колебаний автомобиля,

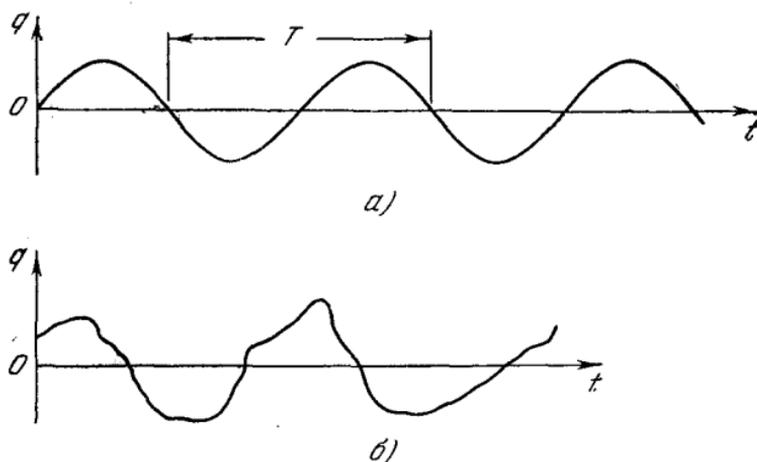


Рис. 1.

вагона и т. п. (рис. 2) можно взять в качестве обобщенных координат смещения  $z_1$  и  $z_2$  точек рессорного подвешивания, или, что удобнее, смещение центра тяжести  $z_c$  и угол поворота  $\varphi$ .

Обобщенными координатами могут быть не только механические величины, но и другие величины, например, температура, сила тока и т. д.

В этой книге, наряду с механическими системами, мы будем рассматривать в качестве примеров также электрические системы.

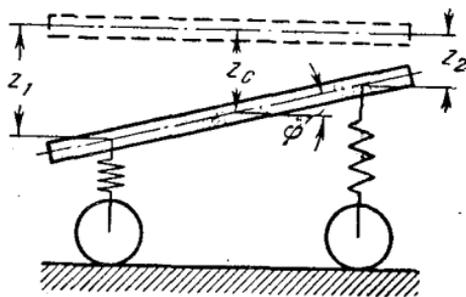


Рис. 2.

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

Понятия устойчивости и неустойчивости, тесно связанные с учением о колебаниях, почти очевидны и известны еще из элементарной физики. В самом деле, легко дать оценку устойчивости шарика, находящегося на поверхности (рис. 3).

Так, в случае *а* положение его устойчиво, в случае *б* — неустойчиво и, наконец, в случае *в* — находится в безразличном равновесии.

Устойчивость определяется либо как стремление системы возвратиться в исходное состояние после того, как она

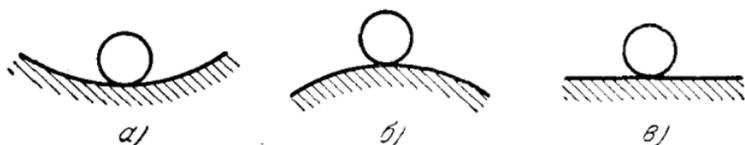


Рис. 3.

из него была выведена, либо как свойство оставаться вблизи этого исходного состояния. В случае механических систем мы различаем устойчивость равновесия и устойчивость движения \*). Вообще можно говорить об устойчивости какого-либо состояния любой физической системы, подразумевая под этим такое свойство системы, когда все величины, определяющие ее состояние, остаются вблизи тех значений, которые характеризуют некоторое, заранее выбранное номинальное состояние, называемое *основным* или *невозмущенным*. Хотя попытки дать определения устойчивости восходят еще к XVIII веку, исчерпывающая ясность была внесена лишь в 90-х годах прошлого века в классических работах А. М. Ляпунова, на которые мы и будем опираться в наших определениях [12].

Условимся для простоты отсчитывать обобщенные координаты системы от положения равновесия. Обозначая, как

\*) Ниже подробно рассматриваются устойчивость равновесия и движения. Здесь же заметим, что необходимым и достаточным условием *равновесия* механической системы является равенство нулю всех обобщенных сил [16]:

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = 0.$$

Условие равновесия не определяет еще устойчивость рассматриваемого состояния. Обобщенной силой  $Q_i$ , соответствующей координате  $q_i$ , называется такая величина, произведение которой на приращение  $\delta q_i$  равно работе всех сил, приложенных к системе, на перемещении системы, соответствующем этому приращению координаты  $q_i$ . Число обобщенных сил равно числу обобщенных координат.

обычно, нулевыми индексами начальные значения координат, дадим такое определение устойчивости равновесия:

*Равновесие системы называется устойчивым, если при наперед заданных достаточно малых положительных числах  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  можно указать такие малые положительные числа  $\delta_1(\varepsilon_1)$  и  $\delta_2(\varepsilon_2)$ , что при*

$$|q_i^0| < \delta_1, \quad |\dot{q}_i^0| < \delta_2$$

*во все последующее время будем иметь*

$$|q_i| < \varepsilon_1 \quad |\dot{q}_i| < \varepsilon_2,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Устойчивость, определенную таким образом, называют *обыкновенной* устойчивостью. Если же с течением времени все  $q_i$  стремятся к нулю, то говорят, что система обладает *асимптотической* устойчивостью.

Таким образом, при обыкновенной устойчивости точки системы не выходят за назначенные заранее границы, а при асимптотической устойчивости стремятся к своим равновесным положениям.

Можно установить достаточный признак или критерий устойчивости для консервативных систем, который дается теоремой, доказанной в конце XVIII века Лагранжем для некоторых частных случаев и обобщенной в середине XIX века Дирихле на случай любых консервативных систем.

**Теорема Лагранжа — Дирихле.** *Если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет минимум, то равновесие устойчиво.*

Для консервативной системы, т. е. для системы в потенциальном силовом поле, обобщенная сила равна

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (1.1)$$

где

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.2)$$

есть потенциальная энергия системы. Так как в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю, то согласно равенству (1.1) имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (1.3)$$

при  $l = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, в этом положении потенциальная энергия, как говорят, принимает стационарное значение, которое, в частности, может быть экстремальным, т. е. иметь максимум или минимум. Допустим, что в положении равновесия  $\Pi$  минимальна. Докажем, что в этом случае равновесие устойчиво. На основании закона сохранения энергии имеем:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}, \quad (1.4)$$

где  $T_0$  и  $T$  — кинетическая энергия системы в начальный и в любой последующий момент времени соответственно; а  $\Pi_0$  — начальное значение потенциальной энергии системы. Отсюда, поскольку всегда  $T > 0$ , находим

$$\Pi < T_0 + \Pi_0. \quad (1.5)$$

Условимся отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия, в котором  $\Pi = 0$ . Тогда, по условию минимума  $\Pi$ , в окрестности этого положения всегда  $\Pi > 0$ . Дадим первой координате наибольшее по абсолютной величине возможное значение  $\varepsilon$ :

$$|q_1| = \varepsilon,$$

а остальные координаты будем изменять всевозможным образом в пределах  $\pm \varepsilon$  и наблюдать за величиной  $\Pi$ . Пусть наименьшее значение  $\Pi$  при таких изменениях оказалось равным  $A_1$ . Поступая таким же образом с координатой  $q_2$  и предоставляя остальным (включая и  $q_1$ ) изменяться в пределах  $\pm \varepsilon$ , отметим также и в этом случае наименьшее значение  $\Pi$ , равное некоторому  $A_2$ , и т. д. Получив ряд положительных чисел

$$A_1, A_2, \dots, A_n,$$

возьмем наименьшее из них, которое обозначим через  $A^*$ . Итак,  $A^*$  есть значение потенциальной энергии, когда по крайней мере одна координата достигла границы своего возможного изменения  $\varepsilon$ .

Если начальные значения  $q_i^0$  лежат в пределах  $\pm \delta_1$ , то, очевидно

$$\Pi_0 < A^*.$$

Допустим, что

$$\Pi_0 = A^* - \alpha,$$

где  $\alpha$  — некоторая малая положительная величина. Поскольку  $T_0$  является положительной функцией скоростей  $\dot{q}_i^0$ , достаточно указать такой верхний предел для начальных скоростей

$$|\dot{q}_i^0| < \delta_2,$$

чтобы было

$$T_0 < \alpha.$$

Подставляя в неравенство (1.5) вместо  $\Pi_0$  и  $T_0$  соответственно  $A^* - \alpha$  и  $\alpha$ , мы это неравенство только усилим. Итак, имеем

$$\Pi < A^*.$$

Следовательно, ни одна из координат не достигает своего предельного значения, т. е. равновесие устойчиво, что и требовалось доказать.

Необходимого признака устойчивости не существует. Однако иногда можно заранее утверждать, что система неустойчива. Это можно сделать в случаях, предусмотренных теоремами Ляпунова, доказательство которых не элементарно.

**Теорема 1.** *Равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия не есть минимум и отсутствие минимума определяется уже по членам второго порядка в разложении потенциальной энергии.*

**Теорема 2.** *Равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия есть максимум, определяемый членами наинизшего порядка в разложении потенциальной энергии в степенной ряд.*

**Пример 1.** Исследование устойчивости равновесия маятника (рис. 4). Примем за обобщенную координату угол  $\varphi$  отклонения маятника от вертикали. Пусть вес маятника будет  $P$ , расстояние центра тяжести от точки подвеса  $O$  составляет  $l$ . Потенциальная энергия равна

$$\Pi = Pl(1 - \cos \varphi).$$

Обобщенная сила

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = Pl \sin \varphi.$$

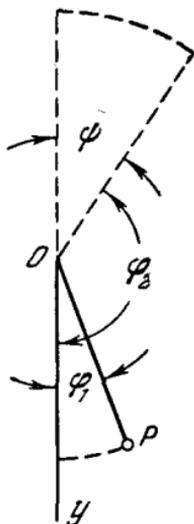


Рис. 4.

Отсюда два положения равновесия

$$\varphi_1^0 = 0, \quad \varphi_2^0 = \pi.$$

Исследуем  $\Pi$  на экстремум:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = + Pl \cos \varphi,$$

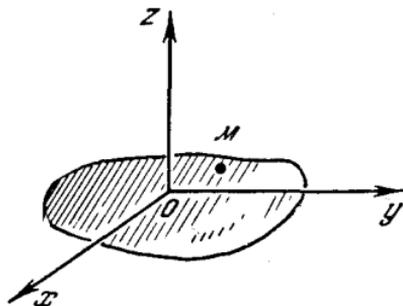
$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_1 = + Pl, \quad \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_2 = - Pl.$$

Итак, в первом случае  $\Pi = \Pi_{\min}$  и по теореме Лагранжа — Дирихле равновесие устойчивое. Во втором случае  $\Pi = \Pi_{\max}$ ; чтобы здесь применить теоремы Ляпунова, положим  $\varphi = \pi - \psi$  и разложим  $\Pi$  по степеням  $\psi$ :

$$\Pi = Pl (1 + \cos \psi) = Pl \left( 2 - \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{2 \cdot 4} - \dots \right).$$

Следовательно, имеем неустойчивое равновесие.

**Пример 2.** Равновесие тяжелой точки на гладкой поверхности. Очевидно, что равновесие возможно лишь в той точке поверхности, через которую можно провести к этой поверхности горизонтальную касательную плоскость. Примем эту плоскость за плоскость  $Oxy$  и направим ось  $z$  вертикально вверх (рис. 5). Тогда потенциальная энергия тяжелой точки может быть представлена в виде



$$\Pi = mgz.$$

Уравнение поверхности

$$z = f(x, y)$$

Рис. 5.

в окрестности начала координат можно аппроксимировать посредством уравнения второй степени:

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

(члены первой степени исчезают вследствие горизонтальности касательной плоскости). Таким образом, элемент заданной поверхности аппроксимируется элементом параболоида. Считая эту поверхность второго порядка, отнесенной к главным осям (что всегда можно сделать путем поворота осей), можно написать уравнение в канонической форме

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q},$$

где  $p$  и  $q$  с точностью до знака — параметры парабол в сечениях  $Ozy$  и  $Ozx$ .

Здесь возможны случаи:

1)  $p > 0$ ,  $q > 0$ ; поверхность — эллиптический параболоид, обращенный выпуклостью вниз.  $\Pi_0 = \Pi_{\min}$ ; на основании теоремы Лагранжа — Дирихле равновесие устойчиво.

2)  $p < 0$ ,  $q < 0$ ; поверхность — эллиптический параболоид, обращенный выпуклостью вверх.  $\Pi_0 = \Pi_{\max}$ ; на основании второй теоремы Ляпунова равновесие неустойчиво.

3)  $p > 0$ ,  $q < 0$  (или наоборот); поверхность — гиперболический параболоид (седлообразная поверхность).  $\Pi_0$  не есть ни минимум, ни максимум, что обнаруживается по членам второго порядка. На основании первой теоремы Ляпунова равновесие неустойчиво.

**Примечание.** Упомянувшееся выше безразличное равновесие (рис. 3, в) не подходит ни к одному из определений приведенных теорем. С точки зрения общей теории мы имеем в данном случае неустойчивость, так как сколь угодно малые начальные скорости могут увести точку далеко от начального положения.

### § 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Положим, что движение материальной системы описывается уравнениями Лагранжа [11]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1.6)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Положим, далее, что при некоторой совокупности начальных условий

$$q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0; \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \dots, \dot{q}_n^0$$

имеем решения системы (1.6) в виде уравнений

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \quad \dots, \quad q_n = f_n(t). \quad (1.7)$$

Будем называть движение, определяемое этими уравнениями, *основным* или *невозмущенным* движением. При всякой иной совокупности начальных условий конечные уравнения (1.7) будут, очевидно, уже иные, и движение, определяемое ими, называется *возмущенным по отношению к основному*.

Невозмущенное движение по Ляпунову называется *устойчивым* относительно некоторой совокупности величин, которыми обычно бывают координаты  $q_i$  и скорости  $\dot{q}_i$ , если

для каждого сколь угодно малых положительных  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  можно указать такие  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , что при

$$|\Delta q_i^0| < \delta_1; \quad |\Delta \dot{q}_i^0| < \delta_2$$

в последующем движении для любого  $t$ , сколь велико бы  $t$  ни было, будут выполняться неравенства

$$|\Delta q_i| < \varepsilon_1, \quad |\Delta \dot{q}_i| < \varepsilon_2,$$

где  $\Delta q_i$  и т. д. обозначают разности соответствующих величин в основном и возмущенном движениях, называемые их *вариациями*.

Можно сказать проще: *невозмущенное движение устойчиво, если возмущенное остается сколь угодно близким к нему*.

Проблема устойчивости движения играет большую роль в современной технике. Так, говорят об устойчивости движения железнодорожного поезда, артиллерийского снаряда, быстроходной турбины и т. п.

Рассмотренное в § 2 определение устойчивости равновесия является частным случаем приведенного определения устойчивости движения, когда невозмущенное состояние есть состояние покоя.

#### § 4. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОЛЕБАТЕЛЬНУЮ СИСТЕМУ

Для составления дифференциальных уравнений колебаний механической системы прежде всего необходимо расшифровать все члены в уравнениях движения (1.6). Допустим, что система содержит  $N$  материальных точек с координатами

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N,$$

которые, благодаря наложенным голономным стационарным удерживающим связям, могут быть выражены в виде однозначных функций от обобщенных координат:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Отсюда находим проекции скоростей точек:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Следовательно, кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (1.10)$$

после подстановки выражений (1.9) представится в виде однородной функции второй степени, т. е. в виде квадратичной формы от обобщенных скоростей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (1.11)$$

Здесь коэффициенты  $A_{ij}$  — вообще функции координат:

$$A_{ij} = A_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (1.12)$$

причем, как известно из курса теоретической механики\*),

$$A_{ij} = A_{ji}. \quad (1.13)$$

\*) В самом деле, например, для двух степеней свободы мы имеем:

$$T = \frac{1}{2} (A_{11} \dot{q}_1^2 + 2A_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + A_{22} \dot{q}_2^2);$$

полагая здесь  $A_{12} = A_{21}$  и представляя  $T$  в виде

$$T = \frac{1}{2} [(A_{11} \dot{q}_1 + A_{12} \dot{q}_2) \dot{q}_1 + (A_{21} \dot{q}_1 + A_{22} \dot{q}_2) \dot{q}_2],$$

убеждаемся в справедливости сказанного.

Обобщенную силу  $Q_j$  мы представим для достаточно общего случая состоящей из трех сил:

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^{\Phi} + Q_j^*, \quad (1.14)$$

Здесь  $Q_j^{\Pi}$  — так называемая *потенциальная сила*, играющая обычно роль *восстанавливающей силы*:

$$Q_j^{\Pi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}. \quad (1.15)$$

Далее,  $Q_j^*$  есть сила, явно зависящая от времени и называемая *возмущающей силой*

$$Q_j^* = Q_j^*(t). \quad (1.16)$$

Для сокращения записи в дальнейшем звездочку будем опускать. Наконец,  $Q_j^{\Phi}$  есть *сила сопротивления*, или *диссипативная сила*.

Принято различать следующие три основных типа сопротивления:

1. Сопротивление сухого, или кулонова, трения, которое принимается в достаточно широких пределах не зависящим от скорости движения \*).

2. Сопротивление вязкости, или линейное сопротивление, пропорциональное первой степени скорости.

3. Сопротивление вихревое, или квадратичное, пропорциональное квадрату скорости.

Только второй тип сил приводит к линейным дифференциальным уравнениям (если, конечно, нелинейность не вызвана другими силами); остальные два типа приводят к нелинейным уравнениям и влекут за собой большие трудности исследования. Если не оговорено противное, мы будем иметь в виду линейный случай.

---

\*) Так как в действительности сила сухого трения все же зависит в какой-то мере от скорости и эта зависимость даже может порождать особый вид колебаний — так называемые автоколебания, рассматриваемую в дальнейшем идеализированную силу сухого трения, не зависящую от скорости, называют силой кулонова трения, поскольку Кулон высказал гипотезу о независимости силы трения от скорости.

Итак, положим, что каждая точка испытывает силу сопротивления, проекции которой можно представить в следующем виде:

$$F_{ix} = -\gamma_i \dot{x}_i, \quad F_{iy} = -\gamma_i \dot{y}_i, \quad F_{iz} = -\gamma_i \dot{z}_i,$$

где  $\gamma_i$  — коэффициент пропорциональности, по смыслу больший нуля. По общей формуле для обобщенной силы

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \quad (1.17)$$

находим

$$Q_j^\Phi = - \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right).$$

С другой стороны, из уравнений (1.9) следует, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j},$$

вследствие чего

$$Q_j^\Phi = - \sum_{i=1}^N \gamma_i \left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (1.17a)$$

Если теперь образовать некоторую функцию скоростей

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad (1.18)$$

то можно увидеть из выражения (1.17a), что

$$Q_j^\Phi = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (1.19)$$

Функция  $\Phi$  называется *функцией рассеяния* или *диссипативной функцией Рэлея*. Как видно из сравнения формул (1.10) и (1.18), она имеет такую же структуру, как и кинетическая энергия; следовательно, можно утверждать, что как  $T$ , так и  $\Phi$  — существенно положительные величины. По аналогии с (1.11) имеем

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (1.20)$$

где вообще

$$B_{ij} = B_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (1.21)$$

причем, как это имело место для коэффициентов  $A_{ij}$ , здесь также

$$B_{ij} = B_{ji}. \quad (1.22)$$

Таким образом, уравнения движения (1.6), учитывая (1.14), (1.15) и (1.19), напишутся в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad (1.23)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$ .

## § 5. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Умножим каждое из уравнений (1.23) на соответствующую обобщенную скорость  $\dot{q}_j$  и сложим все уравнения по-членно:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j + \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь правая часть представляет собой мощность всех возмущающих сил. Далее, поскольку  $\Phi$  так же, как и  $T$ , есть квадратичная форма относительно обобщенных скоростей, то по теореме Эйлера об однородных функциях имеем

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2\Phi.$$

Потенциальная энергия зависит явно только от координат, поэтому

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \dot{q}_j = \frac{d\Pi}{dt}.$$

Наконец, осталось рассмотреть первую сумму левой части уравнения (1.24). Предварительно найдем, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \\ &- \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} (2T) - \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь при преобразовании первого члена мы опять воспользовались теоремой Эйлера, а при приведении второго члена учли, что  $T$  есть функция как скоростей, так и координат. Окончательно имеем

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) + 2\Phi = W, \quad (1.25)$$

где

$$W = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j \quad (1.26)$$

есть мощность всех возмущающих сил.

Мы получили обобщенное уравнение энергии. При отсутствии внешнего возмущения

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) = -2\Phi. \quad (1.27)$$

Итак, удвоенная функция рассеяния есть убыль полной энергии в единицу времени.

Наконец, для консервативной системы ( $\Phi = 0$ ) получаем из (1.27) хорошо известное соотношение

$$T + \Pi = \text{const}. \quad (1.28)$$

## § 6. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ $T$ , $\Phi$ , $\Pi$ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

На основании изложенного в предыдущих параграфах можно вывести дифференциальные уравнения малых колебаний материальной системы около ее положения равновесия, которое, если не оговорено противное, предполагаем устойчивым.

В действительности только в исключительных случаях поведение системы описывается посредством линейных уравнений. Однако если считать отклонения и скорости малыми, такими, чтобы степенями выше первой и произведениями этих величин можно было пренебречь, то в результате получим линейризованную систему, описываемую линейными дифференциальными уравнениями, которые по отношению к исходной системе являются уравнениями первого приближения. Закономерность такой операции часто очевидна, но иногда она может быть окончательно разрешена лишь после анализа решения упрощенной системы. Бывает и так, что линейризация приводит к принципиально иному решению. К этому вопросу мы еще возвратимся в главе о нелинейных колебаниях, а сейчас будем считать линейризацию допустимой. Предварительно обратимся к составлению выражений для  $T$ ,  $\Phi$  и  $\Pi$  при этом допущении.

Если мы хотим в уравнениях (1.23) оставить члены не выше первого порядка малости в только что указанном смысле, то в выражениях для  $T$ ,  $\Phi$  и  $\Pi$  необходимо удерживать члены до второго порядка включительно. Обращаясь к кинетической энергии  $T$  (1.11), разложим на основании формулы (1.12) коэффициенты  $A_{ij}$  в ряд по степеням  $q$ :

$$A_{ij} = (A_{ij})_0 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \dots,$$

где индексом 0 отмечены соответствующие величины при  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0$ , ...,  $q_n = 0$ . Так как в выражении (1.11) должны остаться члены второго порядка, то в написанном разложении удерживаем справа только первый член, который обозначим

$$(A_{ij})_0 = a_{ij} = a_{ji}. \quad (1.29)$$

Эта величина называется *коэффициентом инерции*. Окончательно имеем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (1.30)$$

Поступая таким же образом с выражением для  $\Phi$ , на

основании (1.20) и (1.21) находим

$$B_{ij} = (B_{ij})_0 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \dots, \quad (1.31)$$

где  $(B_{ij})_0 = b_{ij} = b_{ji}$  — коэффициент сопротивления. Тогда

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (1.32)$$

Наконец, переходим к потенциальной энергии  $\Pi$ , для которой имеем

$$\begin{aligned} \Pi = (\Pi)_0 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \right)_0 q_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_i q_j q_k + \dots \end{aligned}$$

Как было указано выше,  $(\Pi)_0$  и все члены первой суммы равны нулю (см. стр. 13); тройную сумму и члены высших порядков мы отбрасываем. Тогда, вводя обозначение

$$\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 = c_{ij} = c_{ji} \quad (1.33)$$

— коэффициент жесткости, или квазиупругий коэффициент, находим

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j. \quad (1.34)$$

Если положение равновесия устойчиво, то  $\Pi$ , равно как  $T$  и  $\Phi$ , — определенная положительная квадратичная форма, т. е. положительная величина, обращающаяся в нуль только при нулевых значениях всех переменных\*).

Вообще какая-либо функция, сохраняющая знак при любых значениях переменных и обращающаяся в нуль тогда и только

\*) Эти понятия необходимы, в частности, при изучении второй методы Ляпунова и функций Ляпунова [12].

тогда, когда все переменные равны нулю, называется знакоопределенной. Если же некоторая функция, не изменяющая своего знака, обращаясь в нуль при нулевом значении переменных, может быть равна нулю и при каких-либо иных их значениях, то она называется знакопостоянной. Такова, например, функция

$$f(x_1, x_2) = A(x_1 - x_2)^2,$$

где  $A$  — произвольное число. В самом деле, эта функция при  $x_1 \neq x_2$  имеет всегда знак, совпадающий со знаком  $A$ , и обращается в нуль не только при  $x_1 = x_2 = 0$ , но и вообще при  $x_1 = x_2$ .

На основании сказанного, функции  $T$  и  $\Phi$ , а при устойчивости равновесия также и  $\Pi$ , являются функциями знакоопределенными, и притом положительными.

Приведем без доказательства признак или критерий знакоопределенности квадратичной формы, например  $\Pi$ . Для этого образуем определитель, называемый *дискриминантом квадратичной формы*

$$S = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

Далее, по теореме Сильвестра, для определенной положительности квадратичной формы  $\Pi$  (1.34) необходимо и достаточно, чтобы были положительны определитель  $S$  (1.35) и все его главные диагональные миноры, т. е. чтобы выполнялись следующие условия:

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad S > 0. \quad (1.36)$$

Случай одной координаты, при  $\Pi = \frac{1}{2} c q^2$ , является тривиальным. Убедимся в справедливости этого критерия для случая двух координат, когда

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2).$$

Так как можно положить поочередно  $q_1 = 0$  или  $q_2 = 0$ , то требование положительности  $c_{22}$  и  $c_{11}$  очевидно. Представим  $\Pi$  так:

$$\Pi = \frac{q_2^2}{2} \left[ c_{11} \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 + 2c_{12} \frac{q_1}{q_2} + c_{22} \right].$$

Здесь квадратный трехчлен не должен иметь вещественных корней, так как в противном случае он, переходя через нуль, мог бы менять знак.

Поэтому

$$c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0.$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \\ c_{22} > 0. \end{aligned} \quad (a)$$

Легко видеть, что последнее условие вытекает из первых двух.

**Пример.** Равновесие двух сочлененных вертикальных стержней длины  $l_1$  и  $l_2$  с точечными грузами (массы которых  $m_1$  и  $m_2$ ), прикрепленными пружинами жесткости  $c_1$  и  $c_2$  к вертикальной стенке (рис. 6, а).

Принимая за обобщенные координаты углы  $\varphi$  и  $\psi$  и считая отклонения стержней от вертикали малыми (рис. 6, б), составим выражение потенциальной энергии  $\Pi$ , состоящей из потенциальной энергии сил веса и потенциальной энергии сил упругости. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi &= -m_1gl_1(1 - \cos \varphi) - m_2g[l_1(1 - \cos \varphi) - l_2(1 - \cos \psi)] + \\ &\quad + \frac{c_1}{2}(l_1\varphi)^2 + \frac{c_2}{2}(l_1\varphi + l_2\psi)^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \{ [(c_1 + c_2)l_1^2 - (m_1 + m_2)gl_1] \varphi^2 + 2c_2l_1l_2\varphi\psi + \\ &\quad + (c_2l_2^2 + m_2gl_2) \psi^2 \}, \end{aligned}$$

где положено  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ,  $\cos \psi \approx 1 - \frac{\psi^2}{2}$ . Здесь

$$c_{11} = [(c_1 + c_2)l_1 - (m_1 + m_2)g]l_1,$$

$$c_{12} = c_2l_1l_2,$$

$$c_{22} = (c_2l_2 + m_2g)l_2.$$

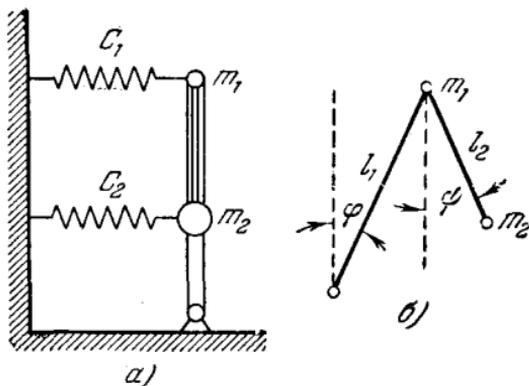


Рис. 6.

Полученные выше условия устойчивости (а), после подстановки выражений  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  и некоторых упрощений, принимают вид

$$(c_1 + c_2) l_1 > (m_1 + m_2) g,$$

$$c_2 l_2 + m_2 g > 0,$$

$$[(c_1 + c_2) l_1 - (m_1 + m_2) g] (c_2 l_2 + m_2 g) > c_2^2 l_1 l_2.$$

Очевидно, что второе из этих условий удовлетворяется тождественно.

Не следует думать, что последнее условие вытекает из первого. В самом деле, если левая часть первого неравенства лишь очень мало превосходит правую, то при выполнении первых двух неравенств третье может и не выполняться.

## § 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ОКОЛО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

Для вывода уравнений малых колебаний подставим все разложения (1.30), (1.32) и (1.34) в дифференциальные уравнения движения (1.23). Заметим, что при этом  $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$ , а  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$  имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = a_{i1} \dot{q}_1 + a_{i2} \dot{q}_2 + \dots + a_{in} \dot{q}_n.$$

Подобным же образом находим и другие производные. Окончательно уравнения малых колебаний примут вид

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} q_j) = Q_i, \quad (1.37)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Вводя символический полином

$$f_{ij}(p) = a_{ij} p^2 + b_{ij} p + c_{ij}, \quad (1.38)$$

где  $p$  есть дифференциальный оператор

$$p = \frac{d}{dt}, \quad (1.39)$$

мы можем переписать уравнения (1.37) в таком виде:

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}(p) q_j = Q_i. \quad (1.40)$$

Система уравнений (1.37) или (1.40) представляет собой систему совокупности линейных дифференциальных уравнений второго порядка; таким образом, порядок системы равен  $2n$ . Полное решение системы дает нам все  $q_1, \dots, q_n$ , выраженные в зависимости от времени  $t$  и  $2n$  постоянных интегрирования, определяемых по начальным условиям:

$$t = 0 \begin{cases} q_i = q_i^0, \\ \dot{q}_i = \dot{q}_i^0, \end{cases} \quad (1.41)$$

т. е. по начальным координатам и скоростям.

По поводу уравнений (1.37) или (1.40) следует заметить, что, как будет видно из дальнейшего, они могут определять собой не только колебательные, но и апериодические движения, что хорошо известно из курса теоретической механики. Больше того, уравнения (1.37) или (1.40) сохраняют свою силу также и для неустойчивых систем, когда некоторые коэффициенты  $c_{ij}$  или  $b_{ij}$  отрицательны\*), лишь бы задача ограничивалась рассмотрением малых отклонений, в пределах которых допустимо пользоваться уравнениями первого приближения. Однако эти уравнения уже не могут дать полной картины движения, для получения которой приходится обращаться к нелинейным уравнениям.

В заключение этой главы остановимся на вопросе о размерности величин. В уравнениях (1.37) все члены должны иметь размерность обобщенной силы. Допустим, как это наиболее часто принимается, что за единицу длины взят сантиметр [см], за единицу силы — килограмм [кг], за единицу времени — секунда [сек]. Тогда коэффициент инерции имеет размерность обобщенной силы, деленной на обобщенное ускорение, коэффициент сопротивления — обобщенной силы, деленной на обобщенную координату. Обобщенными координатами

---

\*) Имеются в виду лишь коэффициенты при  $i=j$ , так как отрицательность коэффициентов  $c$  и  $b$  с различными индексами еще ничего не говорит о нарушении устойчивости, иначе говоря, о нарушении знакоопределенности квадратичных форм  $\Pi$  или  $\Phi$ .

может быть либо длина, либо угол, обобщенной силой — сила или момент. Эти величины соответствуют друг другу, если они имеют один и тот же номер; тогда сейчас же можно указать размерности  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Например,

$$\begin{aligned} q_i & \text{ см, } Q_i \text{ кг,} \\ a_{ii} & \text{ кгсек}^2/\text{см, } b_{ii} \text{ кгсек/см, } c_{ii} \text{ кг/см,} \\ q_j & \text{ рад, } Q_j \text{ кгсм,} \\ a_{jj} & \text{ кгсмсек}^2, b_{jj} \text{ кгсмсек, } c_{jj} \text{ кгсм.} \end{aligned}$$

Если подстрочные индексы у  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  различны ( $i \neq j$ ), то получаются другие варианты для единиц, измеряющих эти коэффициенты, которые, однако, очень легко находятся на основании только что сказанного, именно на основании принципа однородности всех членов уравнений, описывающих физические процессы.

ГЛАВА II

## ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

### § 1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПОСТРОЕНИЕМ СХЕМЫ

Вопрос о числе степеней свободы системы решается не только в зависимости от структуры самой системы, но и от желаемой степени точности.

Предположим, что мы имеем небольшой груз, подвешенный к пружине (рис. 7). Даже если допустить, что боковое раскачивание груза исключено, мы имеем случай, не столь элементарный, как он часто трактуется. Обычно предполагают, что, во-первых, пружина невесома и, во-вторых, она не закручивается вокруг своей оси, не говоря уже о том, что деформацией груза пренебрегают. В результате получают хорошо известное из механики *обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

где  $x$  — смещение груза,  $m$  — его масса,  $c$  — коэффициент жесткости пружины. Это уравнение определяет вертикальные колебания абсолютно жесткого груза на абсолютно невесомой пружине, имеющей к тому же линейную упругую характеристику, т. е. остающейся в пределах закона пропорциональности.

Итак, мы имеем систему с сосредоточенными параметрами — массой груза, принимаемой за точечную, и упругостью пружины, эффект которой сводится к упругой реакции в точечном грузе. Однако опыт (а также и расчет) показывает, что если грузик оттянуть вниз и затем отпустить, то вскоре, кроме основных колебаний, возникают также крутильные колебания, которые могут быть, правда, очень небольшими. Таким образом, система имеет две степени свободы, причем колебания обоих типов связаны между собой. Лишь пренебрежение (часто достаточно обоснованное) вторым движением,

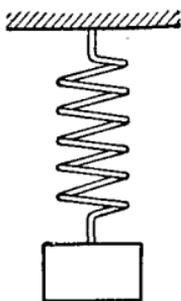


Рис. 7.

являющимся как бы побочным, приводит нас к системе с одной степенью свободы.

Мы пренебрегли также деформируемостью груза (на что имеем полное право), а также массой пружины. Последнее допущение весьма условно. В действительности мы имеем непрерывную последовательность элементов пружины, обладающих как упругостью, так и массой. Иначе говоря, при точном исследовании мы должны считать, что имеем систему с распределенными параметрами, чему соответствует бесконечное число степеней свободы. В этом случае движение описывается посредством *уравнений в частных производных*.

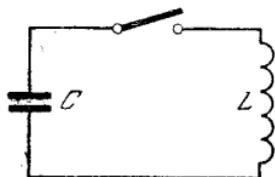


Рис. 8.

Аналогично дело обстоит в электрическом колебательном контуре (рис. 8) с сосредоточенными емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ . Для заряда  $q$  конденсатора имеем известное из физики обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L\ddot{q} + \frac{1}{c}q = 0.$$

Если мы считали бы по крайней мере индуктивность распределенной, что ближе к истине, то и здесь получили бы уравнения в частных производных.

Итак, обращаясь к малым или линейным колебаниям системы с одной степенью свободы, следует написать только одно уравнение движения (1.37), а именно:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q, \quad (2.1)$$

причем по формулам (1.30), (1.32) и (1.34) для кинетической энергии, функции рассеяния и потенциальной энергии в этом случае имеем выражения:

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b\dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} cq^2. \quad (2.2)$$

Следует также отметить, что если правая часть уравнения (2.1) не зависит явно от времени  $t$ , то система называется *автономной*.

Сделаем еще одно предварительное замечание относительно коэффициентов уравнения (2.1). Коэффициент  $a$  по смыслу

всегда положителен: в простейших и наиболее распространенных случаях он представляет собой массу тела или его момент инерции (а в электрических системах — индуктивность). Во всяком случае, какую бы комбинацию физических параметров этот коэффициент ни представлял, его положительность следует из существенной положительности кинетической энергии. Коэффициент  $c$  может быть также отрицательным. Это может иметь место в том случае, если рассматривать поведение системы в окрестности положения неустойчивого равновесия. Что касается коэффициента  $b$ , то если предполагать, что существует только сопротивление, то  $b$  не может быть отрицательно. Однако в некоторых задачах приходится учитывать поступление энергии в систему извне, причем это поступление может определяться силой, пропорциональной скорости, т. е. формально мы имеем случай так называемого «отрицательного сопротивления». Тогда мы получим силу, выраженную так же, как линейное сопротивление, но с отрицательным  $b$ . Такие случаи будут рассмотрены в дальнейшем.

## § 2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Совокупность переменных величин, полностью характеризующих во всякий момент времени состояние некоторой физической системы, называется *фазой системы*. При определении состояния механической системы принято называть фазой совокупность всех ее обобщенных координат и обобщенных скоростей, т. е. совокупность величин

$$q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n.$$

Эти величины (а иногда их функции), число которых, как легко видеть, равно удвоенному числу степеней свободы, называются *фазовыми координатами* системы. Иногда некоторые из этих величин практически не играют никакой роли при исследовании движения системы. Например, угол поворота полностью уравновешенного ротора не является существенным, тогда как соответствующая угловая скорость имеет большое значение. С другой стороны, в некоторых случаях приходится принимать во внимание и ускорения, как, например, при исследовании регулирования скорости двигателя центробежным регулятором *ABC* (рис. 9),

когда состояние, или фаза системы характеризуется положением муфты  $C$ , ее скоростью и ускорением. В соответствии с этим изменяется и число фазовых координат. В электрических и электромеханических системах в качестве электрических координат по Максвеллу принимаются *количества электричества*, а в качестве соответствующих скоростей — *контурные токи*.

Особенно удобным с точки зрения наглядности является случай одной степени свободы, когда фазовых координат

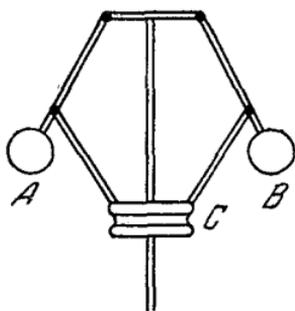


Рис. 9.

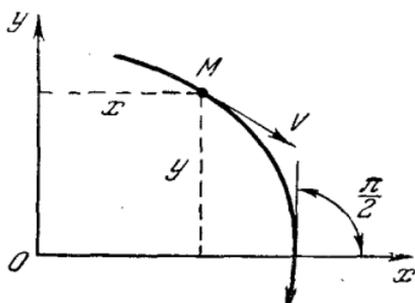


Рис. 10.

две. Тогда их можно построить на плоскости в обычных прямоугольных координатах (рис. 10), положив

$$x = q, \quad y = \dot{q}. \quad (2.3)$$

Точка  $M$ , определяемая этими координатами, называется *изображающей точкой*. При движении системы точка  $M$  движется в плоскости  $Oxy$ , называемой *фазовой плоскостью*, описывая некоторую кривую — *фазовую траекторию*. Совокупность фазовых траекторий, построенных для различных начальных условий, называется *фазовой диаграммой* системы. Так как в верхней полуплоскости  $y > 0$  и поэтому согласно (2.3)  $\frac{dx}{dt} > 0$ , то в верхней полуплоскости изображающая точка движется вправо (в сторону увеличения  $x$ ), а в нижней — влево, пересекая ось абсцисс ( $y = 0$ ) под прямым углом (в точках пересечения  $x$  принимает экстремальные значения). Фазовые траектории автономных систем не пересекаются, так как для таких систем за одну произвольную постоянную интегрирования может быть принято начальное значение времени  $t$ , а это, в случае воз-

возможности пересечения, привело бы к неопределенности движения при определенных начальных условиях. Если же система не является автономной, то такие пересечения возможны. Иначе говоря, фазовая диаграмма в этом случае приобретает своеобразную подвижность.

В вырожденном случае, когда имеется только одна фазовая координата (например, в случае упомянутого уравненного ротора), вместо фазовой плоскости мы имеем фазовую прямую. При необходимости учета третьей координаты, например ускорения (как в центробежном регуляторе), получаем трехмерное фазовое пространство и т. д. В дальнейшем таких случаев мы касаться не будем.

Скорость точки  $M$  называется *фазовой скоростью*, она равна:

$$V = \sqrt{\dot{q}^2 + \ddot{q}^2}. \quad (2.4)$$

Фазовую скорость нельзя смешивать с обобщенной скоростью  $\dot{q}$ ; как видно из формулы (2.4), в выражение фазовой скорости входит также ускорение  $\ddot{q}$ .

Найдем уравнения фазовых траекторий в общем виде. Допустим, что система автономна (именно для таких систем удобно пользоваться фазовыми диаграммами). Тогда, независимо от того, линейна она или нет, ее уравнение движения может быть записано так:

$$\ddot{q} = \varphi(q, \dot{q}). \quad (2.5)$$

Используя обозначения (2.3), мы можем одно уравнение второго порядка (2.5) заменить двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

или, в более общем случае:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (2.6)$$

Здесь  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  — вообще некоторые ограниченные функции от  $x$ ,  $y$ , предполагаемые обычно аналитическими, т. е. разложимыми в степенные ряды в окрестности любой точки в некоторой области значений  $x$ ,  $y$ , причем этой областью, в частности, может быть вся плоскость. Если речь

идет о механической системе, то в качестве координаты  $y$  обычно принимается обобщенная скорость  $\dot{q}$ , иногда обобщенный импульс  $a\dot{q}$ , а иногда некоторая комбинация  $q$  и  $\dot{q}$  (в практических случаях линейная). Аналогично обстоит дело и в системах не механических. Этим оправдывается общая форма уравнений (2.6).

Деля почленно уравнения (2.6), находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (2.7)$$

Интегральная кривая этого дифференциального уравнения, очевидно, определяет собой фазовую траекторию (одну или несколько). Поэтому уравнение (2.7) мы можем назвать *дифференциальным уравнением фазовых траекторий*\*).

В любой точке  $(x_0, y_0)$  фазовой плоскости уравнение (2.7) дает угловой коэффициент касательной к фазовой траектории, если только  $P$  и  $Q$  одновременно не обращаются в нуль. В последнем случае, т. е. когда

$$\left. \begin{aligned} P(x_s, y_s) &= 0, \\ Q(x_s, y_s) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

точка  $(x_s, y_s)$  называется *особой точкой* дифференциального уравнения (2.7). В тех случаях, когда непосредственное построение решения представляет те или иные трудности, исследование поведения интегральных кривых в окрестности особой точки или, как говорят, исследование *топологической структуры* фазовой диаграммы помогает выяснить характер движения системы. Заметим сейчас же, что особая точка, независимо от того, лежит ли она на какой-нибудь интегральной кривой или является изолированной, представляет собой выродившуюся фазовую траекторию.

### § 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Свободные колебания происходят при отсутствии возмущающей силы  $Q$ . Предположим также, что отсутствует и сопротивление ( $b = 0$ ); тогда уравнение (2.1) примет вид

$$a\ddot{q} + cq = 0. \quad (2.9)$$

\*) Вообще говоря, следует различать интегральные кривые и фазовые траектории, см. [1]. (Прим. ред.)

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{c}{a}, \quad (2.10)$$

получаем уравнение свободных колебаний в канонической форме

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (2.11)$$

решение которого имеет вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt, \quad (2.12)$$

или

$$q = \alpha \sin(kt + \beta), \quad (2.13)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — постоянные интегрирования, причем

$$A = \alpha \sin \beta, \quad B = \alpha \cos \beta, \quad (2.14)$$

и наоборот

$$\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad (2.15)$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{A}{B}. \quad (2.16)$$

Здесь  $\alpha$  — амплитуда колебаний,  $\beta$  — начальная фаза,  $k$  — круговая, или циклическая частота, связанная

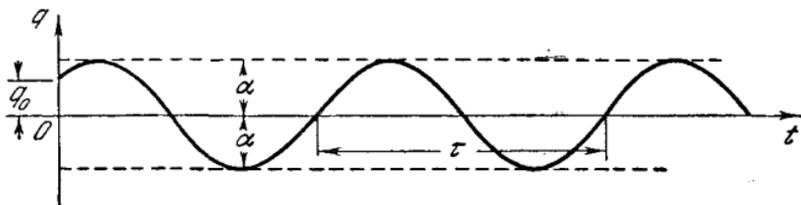


Рис. 11.

с периодом  $\tau$  и частотой  $N$  (числом колебаний в единицу времени) формулами:

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \quad (2.17)$$

и

$$N = \frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\tau}. \quad (2.18)$$

Периодом колебаний  $\tau$  назван наименьший промежуток времени, по истечении которого движение воспроизводится (рис. 11). Если в формуле (2.18)  $k$  выражено в  $\text{сек}^{-1}$ , то  $N$  выражается в герцах.

Формулам (2.17) и (2.18) можно придать очень удобный вид для определения частоты вертикальных колебаний упруго подвешенного тела (например, на невесомой пружине, рис. 7, или балке). В этом случае

$$a = m = \frac{P}{g}, \quad c = \frac{P}{f},$$

где  $m$  — масса тела,  $P$  — его вес,  $f$  — статическое смещение,  $g$  — ускорение свободного падения. Имея в виду формулу (2.10), приведем формулы (2.17) и (2.18) к следующему виду:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}, \quad (2.19)$$

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f}}. \quad (2.20)$$

Принимая за единицу длины сантиметр и полагая приблизительно  $100\pi^2 = g$ , вместо последнего выражения получим

$$N \frac{\text{колеб}}{\text{сек}} = \frac{5}{\sqrt{f \text{ см}}}, \quad (2.21)$$

или

$$N \frac{\text{колеб}}{\text{мин}} = \frac{300}{\sqrt{f \text{ см}}}. \quad (2.22)$$

Эта формула иногда называется *формулой Гейгера*.

Обратимся теперь к представлению движения на фазовой плоскости, причем сделаем это, не пользуясь готовым решением (2.12) или (2.13). С помощью обозначений (2.3) приводим уравнение (2.11) к двум уравнениям:

$$\frac{dy}{dt} = -k^2 x, \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -k^2 \frac{x}{y}.$$

Интегрируя, находим

$$x^2 + \frac{y^2}{k^2} = C^2,$$

где  $C^2$  — положительная произвольная постоянная. Представляя это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{k^2 C^2} = 1, \quad (2.23)$$

видим, что фазовые траектории образуют непрерывную последовательность или континуум concentрических подобных эллипсов (рис. 12). Начало координат представляет собой изолированную особую точку, называемую *центром*. Это есть положение устойчивого равновесия, причем устойчивость здесь *обыкновенная*. В самом деле, если мы выберем малый эллипс, полностью входящий в  $\varepsilon$ -область, то изображающая точка, будучи помещена на этот эллипс или на какой-либо меньший из того же семейства, никогда не выйдет из  $\varepsilon$ -области, но зато никогда и не попадет в центр.

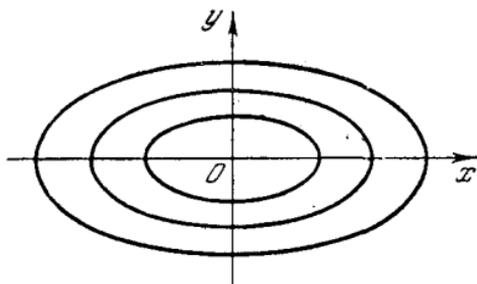


Рис. 12.

Вопрос о том, какой эллипс из этого семейства соответствует данной задаче, зависит от начальных условий, а именно от постоянной  $C$ . Поскольку здесь система автономная, другая постоянная входит в качестве слагаемого во время  $t$  и не влияет на вид эллипса.

**Пример 1.** Вертикальные колебания груза на упругом невесомом стержне (рис. 13). Пусть  $O_1$  — конец ненапряженного стержня,  $O$  — его конец с подвешенным грузом в положении статического равновесия,  $f$  — статическое удлинение стержня. Силовая схема элементарна и очевидна из рисунка.

Принимая  $x$  за обобщенную координату, имеем

$$T = \frac{P\dot{x}^2}{2g}, \quad \Pi = \Pi_{\text{вес}} + \Pi_{\text{упр}},$$

где

$$\Pi_{\text{вес}} = -Px,$$

$$\Pi_{\text{упр}} = - \int_x^0 \frac{EF}{l} (u + f) du =$$

$$= \frac{EF}{l} fx + \frac{EF}{l} \frac{x^2}{2}.$$

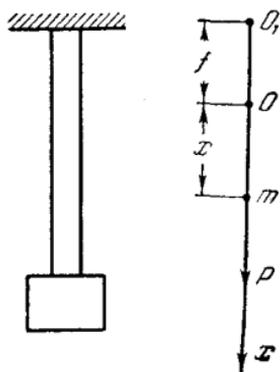


Рис. 13.

Здесь  $E$  — модуль упругости первого рода,  $F$  — площадь поперечного сечения стержня,  $l$  — его длина в ненапряженном состоянии. Так как

$$f = \frac{Pl}{EF},$$

то

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{EF}{l} x^2.$$

Подставляя выражения  $T$  и  $\Pi$  в уравнения (1.23) и учитывая, что в рассматриваемом случае  $\Phi = Q = 0$ , получим

$$a\ddot{x} + cx = 0,$$

где  $a = \frac{P}{g} = m$ ,  $c = \frac{EF}{l}$ . Находим период по формуле (2.17) или (2.19)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Pl}{EFg}} = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}.$$

Пусть стержень, несущий груз  $P = 10$  кг, стальной  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, имеет сечение  $F = 1$  см<sup>2</sup> и длину  $l = 80$  см; в таком случае

$$f = \frac{10 \cdot 80}{2 \cdot 10^6 \cdot 1} = 4,15 \cdot 10^{-4} \text{ см},$$

следовательно,

$$N = \frac{5}{4 \cdot 10^{-4}} = 250 \text{ колеб/сек}, \quad \tau = 0,004 \text{ сек}.$$

**Пример 2.** Определить частоту колебаний груза, если стержень в предыдущем примере заменен цилиндрической винтовой пружиной круглого сечения (рис. 7). Из курса сопротивления материалов [35] известно, что в этом случае удлинение пружины равно

$$f = P \frac{8D^3i}{Gd^4},$$

где  $D$  — диаметр пружины витка,  $i$  — число витков,  $d$  — диаметр сечения витка,  $G$  — модуль упругости второго рода. Тогда из (2.19), (2.20) найдем

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{8PD^3i}{Ggd^4}} \text{ сек},$$

$$N \approx 2,5 \frac{d^2}{D} \sqrt{\frac{Gg}{2PDi}} \text{ колеб/сек}.$$

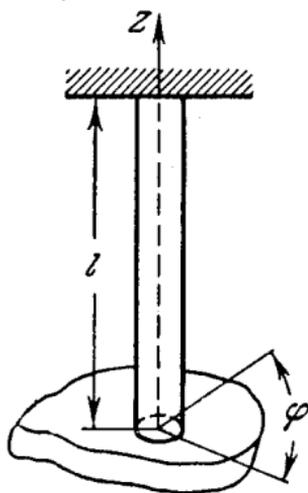


Рис. 14.

**Пример 3.** Крутильные колебания груза на упругом невесомом стержне круглого сечения. Принимая за обобщенную координату угол закручивания  $\varphi$  (рис. 14), который вообще равен

$$\varphi = \frac{M_{кр}l}{GI},$$

найдем

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = - \int_{\varphi}^0 \frac{GI_p}{l} n \, dn = \frac{GI_p}{l} \frac{\varphi^2}{2}.$$

Здесь  $J$  — момент инерции массы подвешенного груза относительно оси  $z$ ,  $l$  — длина стержня,  $G$  — его модуль упругости второго рода,  $I_p$  — момент инерции площади поперечного сечения относительно оси  $z$ .

Следовательно, в этом случае имеем

$$a = J, \quad c = \frac{GI_p}{l}, \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{Jl}{GI_p}}.$$

Пусть на конце круглого стального стержня длиной  $l = 100$  см и диаметром  $d = 1$  см насажен стальной диск диаметром  $D = 10$  см и толщиной  $h = 2$  см; удельный вес стали  $\gamma = 7,8$  г/см<sup>3</sup>; модуль  $G = 8 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. Так как в этом случае

$$J = \frac{PD^2}{8g}, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32},$$

то формулу для периода  $\tau$  можно преобразовать так:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{PD^2}{8g} \frac{32l}{G\pi d^4}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi\gamma h D^4}{32g} \frac{32l}{\pi d^4 G}},$$

или

$$\tau = 2\pi \left(\frac{D}{d}\right)^2 \sqrt{\frac{\gamma lh}{Gg}}.$$

Подставляя заданные численные значения, получаем

$$\tau = 2\pi \cdot 10^2 \sqrt{\frac{7,8 \cdot 100 \cdot 2}{10^3 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 980}} = 0,028 \text{ сек}$$

и тогда

$$N = \frac{1}{\tau} = 35,5 \text{ колеб/сек.}$$

## § 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Выше (стр. 34) уже упоминалось, что при рассмотрении электрических систем в качестве обобщенных координат принимаются количества электричества  $q$ , а в качестве обобщенных скоростей — сила тока  $i$ . Покажем, что поведение простого электрического контура описывается таким же

уравнением (2.1), как и механическая система \*). Допустим имеется контур (рис. 15), содержащий емкость  $C$ , индуктивность  $L$ , активное (омическое) сопротивление  $R$  и источник энергии  $E$ ; этим буквам мы будем приписывать не только обозначения элементов контура, но и значение соответствующих величин.

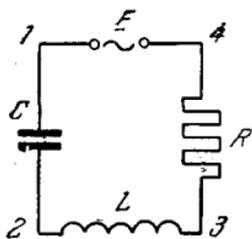


Рис. 15.

Напишем выражения разности потенциалов в точках 1, 2, 3, 4

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{C} q, \quad V_2 - V_3 = L \frac{di}{dt},$$

$$V_3 - V_4 = Ri.$$

Суммарное падение потенциала компенсируется электродвижущей силой  $E$ :

$$V_1 - V_4 = E.$$

Имея в виду, что

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (2.24)$$

окончательно получим следующее дифференциальное уравнение:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = E, \quad (2.25)$$

имеющее вид уравнения (2.1).

Итак, можно установить электромеханическую аналогию:

механическая система	электрическая система
обобщенная координата $q$	количество электричества (заряд) $q$
обобщенная скорость $\dot{q}$	сила тока $i$
коэффициент инерции $a$	индуктивность $L$
коэффициент сопротивления $b$	активное сопротивление $R$
коэффициент жесткости $c$	обратная величина емкости $\frac{1}{C}$
возмущающая сила $Q$	включенная э. д. с. $E$ .

Умножив все члены уравнения (2.25) на силу тока  $i$ , получим соответствующие мощности. При этом

$$W = Ei \quad (2.26)$$

\*) О распространении общей теории колебаний на электрические и электромеханические системы подробно изложено в книге [5].

есть мощность включенного источника энергии (возмущающей силы). Далее,

$$L\ddot{q}i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right), \quad R\dot{q}i = Ri^2, \quad \frac{1}{C} qi = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 \right).$$

Здесь выражение

$$T = \frac{1}{2} Li^2 \quad (2.27)$$

представляет собой электромагнитную энергию, которая является аналогом кинетической энергии механической системы. Электростатическая энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 \quad (2.28)$$

есть аналог потенциальной энергии и, наконец,

$$\Phi = \frac{1}{2} Ri^2 \quad (2.29)$$

— аналог функции рассеяния. Окончательно находим уже известное нам обобщенное уравнение энергии (1.25):

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi) + 2\Phi = W,$$

откуда получаются частные случаи, аналогичные рассмотренным в механических системах. Например, при  $R = 0$ ,  $E = 0$ , имеем консервативную систему, для которой

$$T + \Pi = \text{const.}$$

В этом случае применение формул (2.10) и (2.17) приводит нас к формуле Томсона

$$\tau = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (2.30)$$

**Пример 1.** Определить период колебаний тока при разряде в контуре, содержащем лишь конденсатор и индуктивность (рис. 8), если  $L = 2$  генри,  $C = 0,005$  микрофарады.

По формуле (2.30) находим:

$$\tau = 2\pi \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{ сек.}$$

или

$$N = \frac{1}{\tau} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ колеб/сек.}$$

## § 5. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Допустим, что в уравнении (2.9) коэффициент жесткости  $c$  зависит от некоторого параметра  $\lambda$ , определяемого, например, конструкцией системы, следовательно,

$$c = c(\lambda).$$

Допустим, далее, что при изменении  $\lambda$  величина  $c$  может, перейдя через нуль, стать отрицательной. При  $c = 0$  уравнение (2.9) дает нам

$$\ddot{q} = 0,$$

т. е. в первом приближении система находится в безразличном равновесии. Однако, во-первых, при сообщении системе начальной скорости она может уйти от начального положения сколь угодно далеко, так как решение данного уравнения имеет вид:

$$q = C_1 t + C_2,$$

т. е. система, будучи устойчива относительно статических возмущений (начальное отклонение), неустойчива относительно кинематических возмущений (начальные скорости). Во-вторых, для получения правильной картины должен быть учтен эффект отброшенных членов, если таковые были в разложении потенциальной энергии. Если при дальнейшем изменении  $\lambda$  величина  $c$  становится отрицательной, то, согласно теоремам Ляпунова, равновесие оказывается неустойчивым. Случай  $c = 0$  называется *критическим случаем*, а соответствующее значение  $\lambda = \lambda_0$ , при котором

$$c(\lambda_0) = 0,$$

называется *бифуркационным значением*  $\lambda^*$ ).

Рассмотрим теперь поведение системы в окрестности положения неустойчивого равновесия. Введя вместо (2.10) обозначение

$$\kappa^2 = -\frac{c}{a}, \quad (2.31)$$

где  $\kappa^2 > 0$ , приводим уравнение (2.9) к виду:

$$\ddot{q} - \kappa^2 q = 0. \quad (2.32)$$

---

\*) Подробнее об этом см. в книге [1].

Решение этого уравнения может быть выражено либо через показательные, либо через гиперболические функции:

$$q = A \operatorname{ch} \kappa t + B \operatorname{sh} \kappa t, \quad (2.33)$$

где

$$\operatorname{ch} \kappa t = \frac{1}{2} (e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}), \quad \operatorname{sh} \kappa t = \frac{1}{2} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}), \quad (2.34)$$

или

$$q = \alpha \operatorname{sh} (\kappa t + \beta), \quad (2.35)$$

если положить

$$A = \alpha \operatorname{sh} \beta, \quad B = \alpha \operatorname{ch} \beta. \quad (2.36)$$

Не останавливаясь на элементарной задаче определения произвольных постоянных  $A$  и  $B$ , заметим, что движение всегда будет расходящимся, кроме такой комбинации начальных условий, при которой  $B = -A$ . Тогда

$$q = A e^{-\kappa t},$$

т. е. асимптотически затухающее аperiodическое движение. Это будет иметь место лишь в том случае, когда начальное отклонение и скорость удовлетворяют условию

$$q_0 + \frac{\dot{q}_0}{\kappa} = 0, \quad (a)$$

что вообще физически не осуществимо.

При отрицательном  $c$  можно интерпретировать движение системы, как движение под действием силы отталкивания, линейно зависящей от отклонения точки. В рассмотренном частном случае при  $c = 0$  и при условии (a), уподобляя систему точке, можно сказать, что точка выведена из положения равновесия и получила соответственно подобранную начальную скорость по направлению к этому положению.

Построим фазовую диаграмму движений (рис. 16). Пусть в качестве обобщенной координаты принято отклонение  $x$ , тогда соответствующее преобразование уравнения (2.32) дает:

$$\frac{dy}{dt} = \kappa^2 x, \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \kappa^2 \frac{x}{y}.$$

Интегрируя и вводя для удобства постоянную интегрирования

с двойным знаком, получаем уравнение фазовых траекторий:

$$x^2 - \frac{y^2}{k^2} = \pm C^2.$$

Так как  $C^2$  может быть также и нулем, то фактически имеем три семейства фазовых траекторий:

$$\frac{x^2}{C^2} - \frac{y^2}{(kC)^2} = 1,$$

$$\frac{y^2}{(kC)^2} - \frac{x^2}{C^2} = 1,$$

$$y = \pm kx.$$

Первое уравнение определяет континуум подобных гипербол с действительной осью  $x$ ; второе — континуум гипербол с действительной осью  $y$ ; наконец, третье уравнение

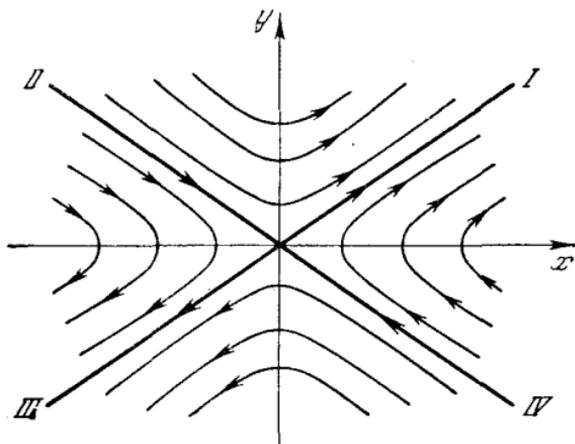


Рис. 16.

определяет общие асимптоты указанных гипербол. Полученная особая точка называется седлом. Эта точка неустойчива. Таким образом, каждая асимптота состоит из трех фазовых траекторий: двух полупрямых и самой особой точки. Эти полупрямые называются *усами* седла. Как видно из фазовой диаграммы, два уса устойчивы (II и IV) и два неустойчивы (I и III). Все прочие фазовые траектории — убегающие: они минуют особую точку, проходя лишь более или менее близко от нее. Рассмотренный нами исключительный случай, когда система асимптотически приближается к положению равно-

веса, соответствует помещению изображающей точки на усы  $II$  или  $IV$ ; изображающая точка тогда асимптотически приближается к началу координат.

Пример 1. Виброграф Гейгера (рис. 17).

Маятник на спиральной пружине, который может совершать колебания в вертикальной плоскости, соединен с регистрирующим устройством. Полупрямые, выходящие из центра вращения обозначают соответственно:  $I$  — вертикаль,  $II$  — положение оси маятника при ненапряженной пружине,  $III$  — положение статического равновесия,  $IV$  — произвольное положение. Угол  $\alpha$  есть так называемый установочный угол прибора, который можно изменять регулировкой пружины;  $\beta$  — угол закручивания пружины при статическом равновесии;  $\varphi$  — малый угол отклонения, принимаемый за обобщенную координату,  $S$  — центр тяжести маятника.

Если пренебречь массой пружины, то кинетическая энергия прибора равна кинетической энергии маятника:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

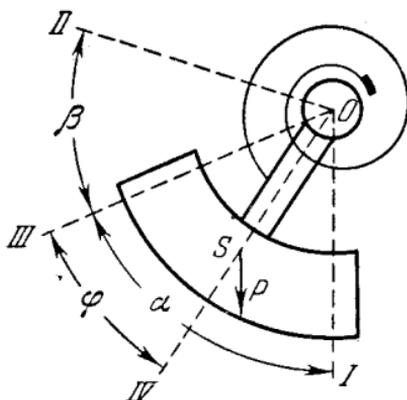


Рис. 17.

где  $J$  — его момент инерции. Потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии веса и потенциальной энергии упругости:

$$\Pi = \Pi_{\text{вес}} + \Pi_{\text{упр}}.$$

Обозначаем расстояние  $OS$  через  $h$ , жесткость пружины через  $c_0$ , причем

$$c_0 = \frac{EI}{L},$$

где  $E$  — модуль упругости,  $L$  — длина пружины,  $I$  — момент инерции ее сечения относительно оси наименьшей жесткости. Тогда имеем

$$\Pi_{\text{упр}} = - \int_{\varphi}^0 c_0 (\beta + \psi) d\psi = c_0 \beta \varphi + c_0 \frac{\varphi^2}{2}.$$

Далее, ограничиваясь при разложении тригонометрических функций малыми второго порядка, находим потенциальную энергию веса:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{вес}} &= Ph [\cos \alpha - \cos (\alpha - \varphi)] = \\ &= Ph \left[ \cos \alpha - \left( 1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \cos \alpha - \varphi \sin \alpha \right] = \\ &= Ph \frac{\varphi^2}{2} \cos \alpha - Ph \varphi \sin \alpha. \end{aligned}$$

В положении равновесия сумма моментов силы веса и сил упругости равна нулю; т. е.

$$c_0\beta - Ph \sin \alpha = 0,$$

вследствие чего имеем:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( \frac{EI}{L} + Ph \cos \alpha \right) \varphi^2.$$

Тогда период равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{JL}{EI + PhL \cos \alpha}}.$$

Наиболее распространенными случаями являются такие, когда угол  $\alpha$  равен нулю или  $\pi/2$ ; первый из них соответствует установке для регистрации горизонтальных, второй — вертикальных колебаний. Тогда

$$\tau_{\text{гор}} = 2\pi \sqrt{\frac{JL}{EI + PhL}}, \quad \tau_{\text{вер}} = 2\pi \sqrt{\frac{JL}{EI}}.$$

Приведенный коэффициент жесткости

$$c = \frac{EI}{L} + Ph \cos \alpha$$

может сделаться отрицательным при определенных параметрах прибора, когда  $\alpha$  станет тупым углом, в частности  $\alpha = \pi$ . В этом случае прибор теряет устойчивость, если  $EI/L < Ph$ , что физически характеризуется слишком мягкой пружиной.

Пример 2. Астатический маятник (рис. 18).

Такой маятник иногда применяется в сейсмографах, где необходимо иметь чувствительный элемент, реагирующий на возмущения очень большого периода и не реагирующий на возмущения малого периода. Прибор состоит из обращен-

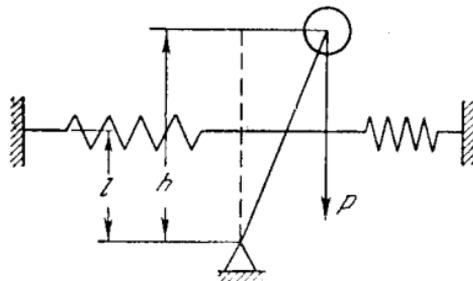


Рис. 18.

ного маятника, поддерживаемого двумя пружинами равной жесткости  $c_0$ . Подобно предыдущему находим

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -Ph(1 - \cos \varphi) + 2 \frac{c_0(l\varphi)^2}{2}.$$

Разлагая косинус в степенной ряд и ограничиваясь малыми второго порядка, имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} (2c_0l^2 - Ph) \varphi^2.$$

Приведенный коэффициент жесткости

$$c = 2c_0 l^2 - Ph$$

может быть отрицательным при соответствующем соотношении параметров; тогда система оказывается неустойчивой. Если же  $c > 0$ , то для периода получаем

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{2c_0 l^2 - Ph}}$$

Итак, вес маятника в значительной степени увеличивает период  $\tau$  и может привести систему к аperiodичности. Однако аperiodичность будет знаменовать собою также переход в неустойчивую область.

## § 6. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Затухающие колебания имеют место при наличии сил сопротивления, гасящих свободные колебания. Выше (стр. 20) уже давалась характеристика основных видов сопротивления, из которых мы остановимся здесь на линейном сопротивлении. На основании уравнения (2.1) для данного случая дифференциальное уравнение движения напишем в таком виде

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0. \quad (2.37)$$

Оставляя в силе обозначение (2.10) для  $k^2$ , где уже  $k$  следует назвать круговой частотой незатухающих колебаний, введем еще обозначение

$$2n = \frac{b}{a}, \quad (2.38)$$

где  $n$  — так называемый коэффициент затухания. Приведем теперь уравнение затухающих движений (не обязательно колебаний!) к канонической форме

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0. \quad (2.39)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, имеет вид

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.40)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0, \quad (2.41)$$

именно

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Здесь различаются следующие три случая:

- а)  $n < k$  — случай малого сопротивления;
- б)  $n > k$  — случай большого сопротивления;
- в)  $n = k$  — случай критического сопротивления.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

а)  $n < k$ . Введем обозначение

$$v = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad (2.42)$$

вследствие чего

$$\lambda_{1,2} = -n \pm iv, \quad (2.43)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Тогда, как известно, решение (2.40) примет вид

$$q = e^{-nt} (A \cos vt + B \sin vt), \quad (2.44)$$

или, если ввести обозначения (2.14):

$$q = ae^{-nt} \sin(vt + \beta). \quad (2.45)$$

Получили уравнение затухающих колебаний, график которых изображен на рис. 19. Здесь периодичность в строгом понимании отсутствует, поскольку нет полного воспроизводства

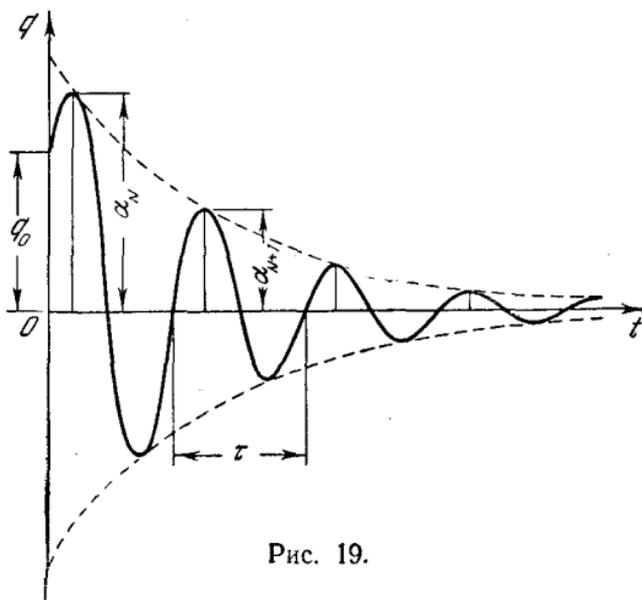


Рис. 19.

движения. В то же время переходы координаты  $q$  через нуль регулярно чередуются через одинаковые промежутки времени. Назовем поэтому *условным периодом*  $\tau$  промежутка

ток времени между двумя последовательными прохождениями системы через положение равновесия в одном и том же направлении. Тогда имеем

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu}, \quad (2.46)$$

или

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad (2.47)$$

где

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{k} \quad (2.48)$$

есть период незатухающих колебаний, а

$$\zeta = \frac{n}{k} \quad (2.49)$$

— так называемый безразмерный коэффициент затухания. Разлагая в формуле (2.47) выражение  $(1 - \zeta^2)^{-1/2}$  в биномиальный ряд и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получим приближенное значение периода затухающих колебаний

$$\tau \approx \tau_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \zeta^2 \right). \quad (2.50)$$

Отсюда видим, что небольшое затухание мало влияет на период, несколько увеличивая его. Далее найдем моменты времени, когда отклонения достигают наибольшего по абсолютной величине значения; эти наибольшие значения и будут амплитудами затухающих колебаний. Для этого образуем производную  $\dot{q}$  и приравняем ее нулю:

$$\dot{q} = ae^{-nt} [-n \sin(\nu t + \beta) + \nu \cos(\nu t + \beta)] = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\nu t + \beta) = \frac{\nu}{n}.$$

Обозначая через  $t_1, t_2, \dots, t_N$  моменты времени, когда имеют место наибольшие отклонения в какую-либо одну сторону от равновесного положения, а через  $a_1, a_2, \dots, a_N$  соответствующие амплитуды, имеем

$$t_N = \frac{1}{\nu} \left( \operatorname{arctg} \frac{\nu}{n} - \beta \right) + N \frac{2\pi}{\nu}, \quad (2.51)$$

где  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

Итак, эти моменты образуют арифметическую прогрессию с разностью  $2\pi/\nu$ , или  $\tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \alpha e^{-n t_N} |\sin(\nu t_N + \beta)|, \\ \alpha_{N+1} &= \alpha e^{-n(t_N + \tau)} |\sin(\nu t_N + 2\pi + \beta)|. \end{aligned}$$

Отношение

$$\eta = \frac{\alpha_N}{\alpha_{N+1}} = e^{n\tau} \quad (2.52)$$

называется декрементом колебаний, т. е. амплитуды образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\rho = e^{-n\tau}.$$

Натуральный логарифм величины  $\eta$  называется *логарифмическим* декрементом колебаний \*)

$$\Lambda = \ln \eta = n\tau. \quad (2.53)$$

Пользуясь формулами (2.47), (2.48), (2.49),  $\Lambda$  можно представить еще так:

$$\Lambda = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

откуда

$$\xi = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}. \quad (2.54)$$

Эта формула имеет практическое значение, так как, найдя из наблюдений затухающих колебаний знаменатель прогрессии, а следовательно, и  $\Lambda$ , можно вычислить  $\xi$ . Далее, определив расчетным путем  $k$ , легко найти коэффициент затухания  $n$ .

б) Обратимся теперь к случаю  $n > k$ . Здесь корни характеристического уравнения (2.41) вещественные. Для удобства положим

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \kappa, \quad (2.55)$$

где

$$\kappa = \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (2.56)$$

---

\*) Такое определение принято в настоящее время. Прежде в качестве  $\Lambda$  брали величину в два раза меньшую, рассматривая отношения амплитуд в двух последовательных размахах в разные стороны.

Тогда решение (2.40) можно написать в таком виде

$$q = e^{-nt}(A \operatorname{ch} \kappa t + B \operatorname{sh} \kappa t) \quad (2.57)$$

или, если ввести обозначения (2.36):

$$q = \alpha e^{-nt} \operatorname{sh}(\kappa t + \beta). \quad (2.58)$$

Движение, выражаемое уравнением (2.57) или (2.58), не является колебательным; это есть движение аperiodическое и притом затухающее. В самом деле, уравнение (2.57) может быть записано так:

$$q = Ae^{-(n+\kappa)t} + Be^{-(n-\kappa)t},$$

откуда видно, что при неограниченном возрастании времени  $t$  обобщенная координата  $q$  стремится к нулю, так как  $\kappa < n$

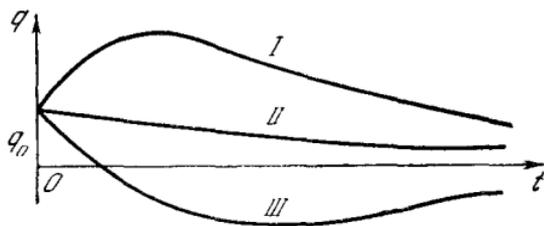


Рис. 20.

из (2.56); т. е. имеем так называемое асимптотическое движение. На рис. 20 представлены графики возможных случаев рассматриваемого движения при  $q_0 > 0$ . Здесь кривая I соответствует «толчку вперед» ( $\dot{q}_0 > 0$ ), кривая II — «слабому толчку назад» ( $\dot{q}_0 \leq 0$ ), кривая III — «сильному толчку назад» ( $\dot{q}_0 < 0$ ).

в) Критическое сопротивление:  $n = k$ . Так как корни характеристического уравнения являются кратными ( $\lambda_1 = \lambda_2 = -n = -k$ ), то решение принимает вид

$$q = e^{-nt}(A + Bt). \quad (2.59)$$

Этот граничный случай можно рассматривать, как предел случая а), когда  $n$  стремится к  $k$ , период  $\tau$  обращается в  $\infty$  и таким образом, полволны синусоиды, уменьшенной множителем  $e^{-nt}$ , принимают бесконечную длину. При дальнейшем увеличении  $n$  приходим к случаю б), где уже о

бесконечно большом периоде не приходится говорить. Из сказанного следует, что введенный ранее безразмерный коэффициент затухания  $\zeta$  (2.49) представляет собой отношение данного коэффициента затухания к его критическому значению. Очевидно, что последний случай трудно осуществим, так как практически всегда, хотя бы с ничтожной разницей, либо  $n < k$ , либо  $n > k$ .

Обратимся к фазовому представлению движения. Вводя фазовые координаты

$$x = q, \quad y = \dot{q}$$

и приведя уравнение (2.39) к системе двух уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2ny - k^2x, \\ \frac{dx}{dt} &= y, \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

легко получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2ny + k^2x}{y}, \quad (2.61)$$

где знак коэффициента  $n$  может быть любым. Здесь возможно как соотношение  $|n| < k$ , так и  $|n| > k$ .

Уравнение (2.61) есть однородное, а поэтому для его интегрирования полагаем

$$y = zx.$$

Подставляя это значение в уравнение (2.61) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z} = -\frac{z dz}{z^2 + 2nz + k^2}.$$

Введем новую переменную  $u$ , так что

$$z = u - n$$

или

$$u = \frac{y}{x} + n. \quad (2.62)$$

Тогда интеграция дает:

$$\ln x = - \int \frac{u du}{u^2 + (k^2 - n^2)} + n \int \frac{du}{u^2 + (k^2 - n^2)}.$$

Рассматриваем два случая, когда  $n < k$  и когда  $n > k$

1)  $n < k$ . По формуле (2.42)

$$k^2 - n^2 = v^2.$$

Тогда

$$\ln x = -\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) + \frac{n}{v} \operatorname{arctg} \frac{u}{v} + \frac{1}{2} \ln C, \quad (2.63)$$

откуда, потенцируя и возвращаясь к прежним переменным, получаем

$$y^2 + 2nxy + k^2x^2 = Ce^{\frac{2n}{v} \operatorname{arctg} \frac{y+nx}{vx}}. \quad (2.64)$$

Для того чтобы лучше представить себе характер кривой, выраженной этим трансцендентным уравнением, совершим линейное преобразование координат, положив

$$\xi = vx, \quad \eta = y + nx. \quad (2.65)$$

Такое преобразование можно интерпретировать двояко: как «пассивное» или как «активное». Первое из них есть так называемое аффинное преобразование плоскости, связанное с изменением масштабов по осям и поворотом осей с нарушением их ортогональности. Второе — называется *точечным преобразованием*, когда формулами преобразования устанавливается взаимно однозначное соответствие между двумя плоскостями, определяемыми координатными системами  $xu$  и  $\xi\eta$ , которые предполагаем ортогональными; путем этих преобразований каждая точка первой плоскости переводится в точку второй. Мы будем иметь в виду именно последнее «активное» преобразование. Заметим, что вследствие линейности преобразования в обоих случаях прямая переходит в прямую, точки пересечения кривых соответствуют друг другу и каждая замкнутая фигура преобразуется в замкнутую же, т. е. *топологическая структура фазовой плоскости не изменяется*. Выражая теперь из уравнений (2.65)  $x$  и  $y$  через  $\xi$  и  $\eta$ , подставляем эти значения в уравнения (2.60), которое разрешаем относительно производных. Получим

$$\frac{d\eta}{dt} = -n\eta - v\xi, \quad \frac{d\xi}{dt} = v\eta - n\xi. \quad (2.66)$$

Тогда дифференциальное уравнение фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{v\xi + n\eta}{n\xi - v\eta}. \quad (2.67)$$

Из сравнения уравнений (2.61) и (2.67) видно, что в последнем случае правые части имеют более общий вид, чем и оправдывается введение общих обозначений правых частей через  $P$  и  $Q$  (2.7) (см. стр. 36). Однородное уравнение (2.67) можно интегрировать непосредственно, но мы для удобства первоначально перейдем к полярным координатам, положив

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \quad \eta = \rho \sin \vartheta. \quad (2.68)$$

Опуская выкладки, вместо уравнения (2.67) имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{n}{v},$$

откуда интегрированием находим уравнение семейства фазовых траекторий

$$\rho = C e^{\frac{n}{v} \vartheta}. \quad (2.69)$$

Учитывая формулы преобразования (2.65) и (2.68), а также обозначения (2.42), сейчас же устанавливаем тождественность уравнений (2.64) и (2.69), если только в первом из них вместо  $C$  написать  $C^2$ . Но уравнение (2.69) определяет собой семейство логарифмических спиралей в

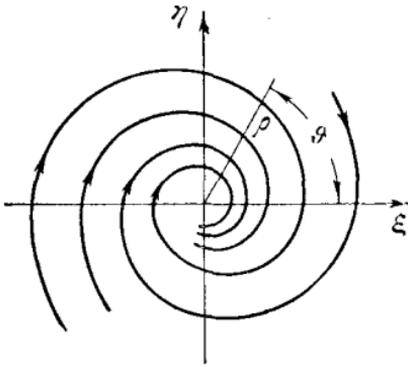


Рис. 21.

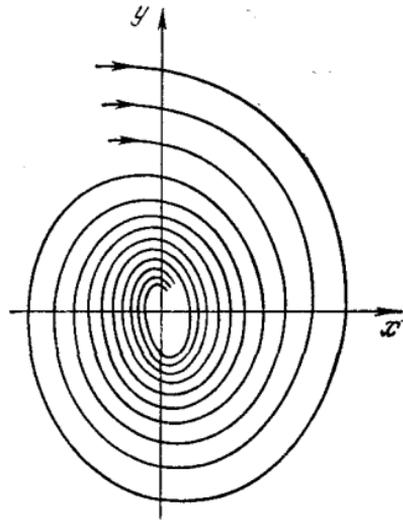


Рис. 22.

плоскости  $\xi\eta$  (рис. 21). Тогда уравнение (2.64) определит в плоскости  $xu$  для каждого  $C$  также некоторую закручивающуюся спираль (рис. 22). Начало координат является асимптотической точкой. Эта особая точка называется *фокусом*, который в данном случае ( $n > 0$ ) является устойчивым.

Изменяя постоянную  $C$ , зависящую от начальных условий, получаем континуум спиралей, заполняющих всю фазовую плоскость. Изображающая точка, будучи «заброшена» в какую-либо точку плоскости, будет асимптотически приближаться к точке  $O$  по одной из спиралей, т. е. имеем асимптотическую устойчивость.

2)  $n > k$ . По формуле (2.56)  $n^2 - k^2 = \kappa^2$ , и тогда из уравнений (2.61), (2.62) имеем

$$\ln x = -\frac{1}{2} \ln(u^2 - \kappa^2) + \frac{n}{2\kappa} \ln \left| \frac{u - \kappa}{u + \kappa} \right| + \frac{1}{2} \ln C, \quad (2.70)$$

что после соответствующих преобразований дает

$$y^2 + 2nxy + k^2x^2 = \pm C \left| \frac{y + (n - \kappa)x}{y + (n + \kappa)x} \right|^{\frac{n}{\kappa}}. \quad (2.71)$$

Для наглядности здесь также примем линейное преобразование координат, положив

$$\xi = y + nx + \kappa x, \quad \eta = y + nx - \kappa x. \quad (2.72)$$

Выражая из этих уравнений  $x$  и  $y$  через  $\xi$  и  $\eta$ , подставляем найденные значения в уравнения (2.60), которое разрешаем относительно производных. Получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -(n + \kappa) \eta, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -(n - \kappa) \eta. \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Дифференциальное уравнение фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{n + \kappa}{n - \kappa} \frac{\eta}{\xi}. \quad (2.74)$$

Интегрируя и потенцируя, находим

$$\eta = \pm C \left| \xi \right|^{\frac{n + \kappa}{n - \kappa}}, \quad (2.75)$$

что в силу формул преобразования (2.72) тождественно с уравнением (2.71).

Уравнение (2.75) определяет собой семейство кривых параболического типа, касающихся в начале оси  $\xi$  (рис. 23); при этом оси координат также являются интегральными кривыми уравнения (2.75): ось  $\xi$  (когда  $\eta = 0$ ) при  $C = 0$  и

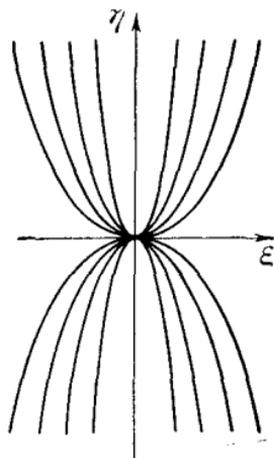


Рис. 23.

ось  $\eta$  (когда  $\xi = 0$ ) при  $C = \infty$ . На первоначальной фазовой плоскости  $xu$  осям  $\eta = 0$  и  $\xi = 0$  соответствуют прямые

$$y = -(n - \kappa)x, \quad y = -(n + \kappa)x. \quad (2.76)$$

Первая из них является касательной ко всем кривым семейства (2.71). Общая картина фазовой плоскости представлена

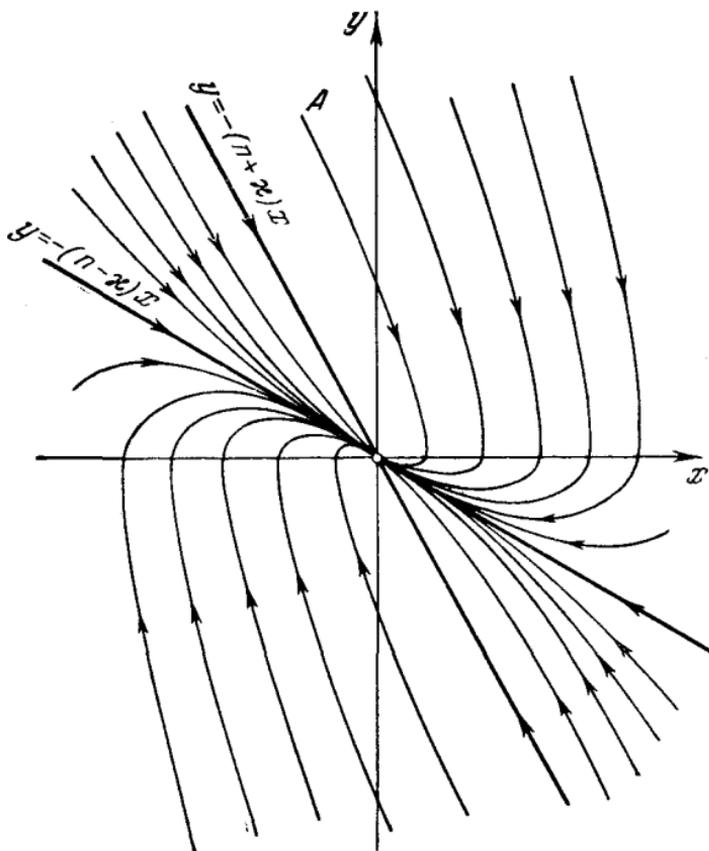


Рис. 24.

на рис. 24. Каждая из кривых, лежащих вне угла, образованного прямыми (2.76), пересекает по одному разу каждую из осей координат (до точки  $O$ ). С другой стороны кривые внутри указанного угла, не пересекая этих осей, также сходятся в точке  $O$ . Легко видеть, что, куда бы ни была «заброшена» изображающая точка, отклонение системы может иметь самое большое только один экстремум, что и харак-

теризует затухающий аperiodический процесс. Особая точка  $O$  называется *узлом*; в данном случае ( $n > 0$ ) имеем узел *устойчивости*.

Не рассматривая детально критический случай ( $n = k$ ), отметим, что его можно трактовать, как предельный, когда спираль первого случая, развертываясь, дает в конечной области лишь по одной точке пересечения с каждой из осей  $x$  и  $y$ , переходя, таким образом, в кривую второго случая. Тогда, следовательно, фокус перерождается в узел.

**Пример 1.** Найти логарифмический декремент колебаний  $\Lambda$  и безразмерный коэффициент колебаний  $\zeta$  в зависимости от полного числа колебаний  $N$  (т. е. удвоенного числа размахов), в течение которого амплитуда уменьшается вдвое. Помня, что амплитуды образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $\rho = e^{-n\tau}$ , имеем

$$\rho^N = \frac{1}{2},$$

откуда

$$N \ln \rho = -\ln 2.$$

С другой стороны, согласно (2.53):

$$\Lambda = \ln \frac{1}{\rho} = -\ln \rho$$

и, следовательно,

$$\Lambda = \frac{1}{N} \lg 2 = \frac{0,7}{N},$$

где  $e$  — основание натуральной системы логарифмов. Далее, безразмерный коэффициент  $\zeta$  находим по формуле (2.54):

$$\zeta = \frac{0,7}{\sqrt{4\pi^2 N^2 + 0,49}}.$$

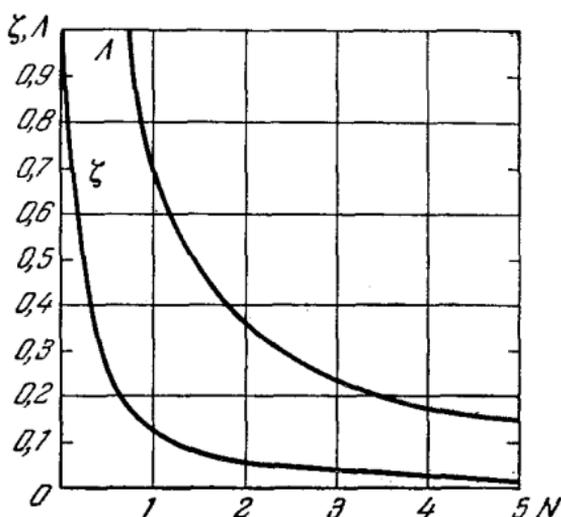


Рис. 25.

На рис. 25 построены кривые для  $\Lambda$  и  $\zeta$ ; первая из них есть равнобочная гипербола. Пусть, например, амплитуда уменьшилась вдвое за два периода. По графику или путем расчета находим  $\Lambda = 0,35$ ,  $\zeta = 0,05$ .

**Пример 2.** Определить ток  $i$  после замыкания в электрическом контуре, содержащем индуктивность  $L$ , емкость  $C$  и сопротивление  $R$  (рис. 26). Так как источника тока в контуре нет, то уравнение (2.25) дает:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0,$$

Для приведения уравнения к каноническому виду полагаем:

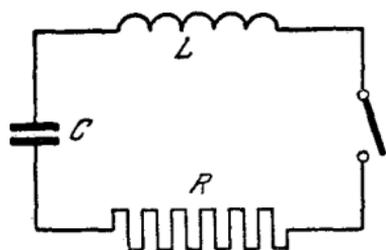


Рис. 26.

$$k^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2n = \frac{R}{L}.$$

При замыкании разряд будет колебательный, если  $n < k$ , т. е. если

$$CR^2 < 4L.$$

Наоборот, разряд — аperiodический, если

$$CR^2 > 4L.$$

Решение для  $i$  определяется уравнениями (2.44) или (2.57) в зависимости от указанных соотношений параметров.

## § 7. НАРАСТАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

При исследовании уравнения автономной системы (2.1) указывалось, что коэффициент инерции  $a$  всегда положителен, коэффициент жесткости  $c$  — положителен в случае восстанавливающей силы, отрицателен в случае силы отталкивания, когда система теряет устойчивость; в этом последнем случае коэффициенту  $c$  целесообразно дать более общее наименование — *квазиупругий коэффициент*. Что касается коэффициента  $b$ , то, как упоминалось (стр. 33), он также в некоторых случаях может быть отрицательным, характеризуя собой уже не силу сопротивления, а ускоряющую силу, способную породить автоколебания, рассматриваемые в главе III с помощью методов нелинейной теории колебаний. Оставаясь в рамках линейной теории, мы можем лишь утверждать, что отрицательность коэффициента  $b$  приводит к расходящемуся процессу, что очевидно из теории дифференциальных уравнений [24] и что будет показано сейчас при построении решения уравнения (2.1). Формально, сохраняя терминологию, мы называем этот случай случаем «отрицательного сопротивления» (стр. 33), для исследования которого воспользуемся полученным результатом, изменяя знаки у соответствующих коэффициентов.

Итак, считая  $b < 0$ , вместо обозначения (2.38) положим

$$2n' = -\frac{b}{a}, \quad (2.77)$$

где  $n' > 0$ . Тогда решения (2.45) и (2.58) соответственно примут вид

$$q = \alpha e^{n't} \sin(vt + \beta) \quad (2.78)$$

при  $n' > k$ , причем  $v = \sqrt{k^2 - n'^2}$ ;

$$q = \alpha e^{n't} \text{sh}(\kappa t + \beta) \quad (2.79)$$

при  $n' > k$ , причем  $\kappa = \sqrt{n'^2 - k^2}$ . Поскольку экспонента  $e^{n't}$  является неограниченно возрастающей функцией, то уравнения (2.78) и (2.79) определяют собой нарастающее колебательное движение (рис. 27) и нарастающее аperiodическое

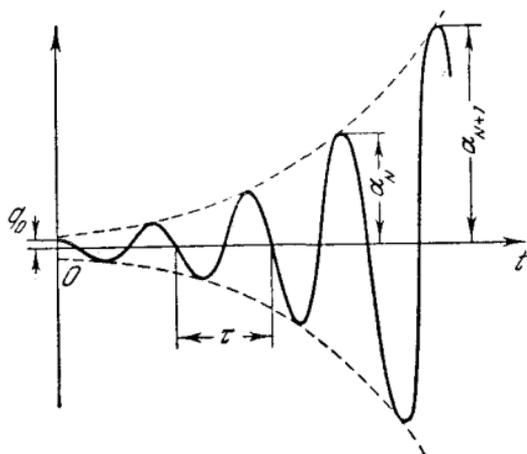


Рис. 27.

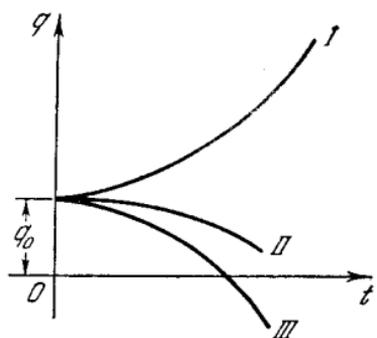


Рис. 28.

движение соответственно (рис. 28). В первом случае можно говорить об условном периоде в прежнем смысле, а также об инкременте колебаний:

$$\eta' = \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_N} = e^{n'\tau} \quad (2.80)$$

и о логарифмическом инкременте

$$\Lambda' = \ln \eta' = n'\tau. \quad (2.81)$$

Во втором случае (при  $n' > k$ ) опять получаем графики трех типов: кривая I соответствует «толчку вперед», кривая II — «слабому толчку назад», кривая III — «сильному толчку назад». Критический случай  $n' = k$  может быть рассмотрен таким же образом, как это было сделано при положительном

сопротивлению, когда  $n = k$ . Здесь на этом случае останавливаться не будем.

Обратимся к представлению движения на фазовой плоскости. Все изложенное применительно к случаю  $n > 0$

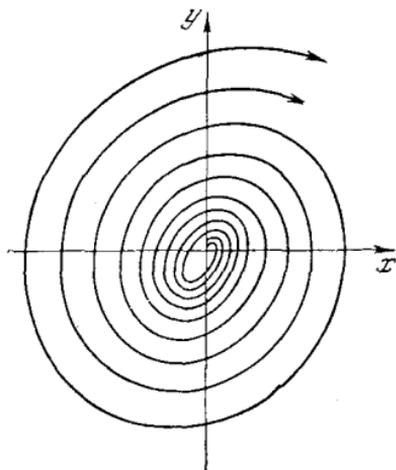


Рис. 29.

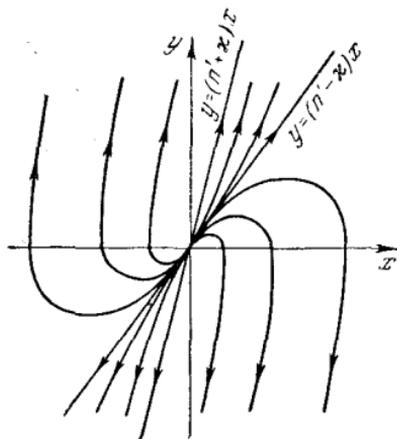


Рис. 30.

(стр. 54—59) остается в силе и здесь, конечно, с поправкой на знак. Так, для случая  $n' < k$  уравнение (2.69) дает

$$\rho = C e^{-\frac{n'}{v}\theta}.$$

Следовательно, в декартовых координатах аналогично (2.64) имеем

$$y^2 - 2n'xy + k^2x^2 = C e^{-\frac{2n'}{v} \operatorname{arctg} \frac{y-n'x}{vx}}. \quad (2.82)$$

Уравнение (2.82) определяет собой семейство раскручивающихся спиралей (рис. 29). Особая точка есть *неустойчивый фокус*. В случае  $n' > k$  вместо (2.75) имеем

$$\eta = \pm C \left| \xi \right|^{\frac{n'-k}{n'+k}}$$

и вместо (2.71) соответственно

$$y^2 - 2n'xy + k^2x^2 = \pm C \left| \frac{y - (n' + k)x}{y - (n' - k)x} \right|^{-\frac{n'}{k}}. \quad (2.83)$$

Уравнение (2.83) определяет собой семейство кривых, уходящих из начала в бесконечность (рис. 30). Особая точка есть *неустойчивый узел*.

**Пример.** Рассмотрим так называемую модель Ван-дер-Поля (рис. 31). На шероховатой ленте, приводимой в равномерное движение со скоростью  $v_0$  шкивами  $A$  и  $B$ , лежит груз  $D$ . Этот груз связан двумя одинаковыми пружинами  $C_1$  и  $C_2$  суммарной жесткости  $c$  с неподвижными точками. Исследуем движение груза с учетом реальной характеристики сухого трения  $F$  (рис. 32).

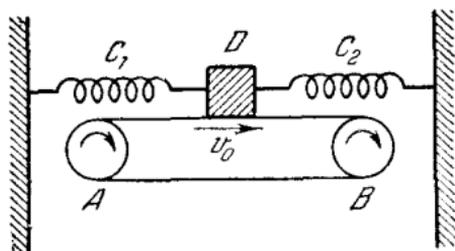


Рис. 31.

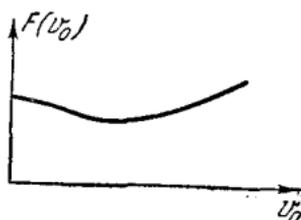


Рис. 32.

Принимая за координату  $x$  отклонение груза от среднего положения, дифференциальное уравнение движения можно записать в таком виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(v_0 - \dot{x}),$$

где сила сухого трения  $F(v_0 - \dot{x})$  есть функция относительно скорости груза и ленты. Разлагая эту функцию в ряд Тейлора в окрестности скорости  $v_0$  и ограничиваясь линейным приближением, имеем

$$F(v_0 - \dot{x}) = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0),$$

где  $F'(v_0)$  есть наклон характеристики в точке  $v_0$ , который может быть положительным, отрицательным и нулевым, как это видно из рисунка. Уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} + [b + F'(v_0)]\dot{x} + cx = F(v_0). \quad (*)$$

Далее введем преобразование координаты, положив

$$x = x_0 + z,$$

где  $x_0$  — статическое отклонение груза, находимое из условия

$$cx_0 = F(v_0).$$

Деля обе части уравнения (\*) движения на  $m$  и вводя обозначения

$$2n = \frac{b + F'(v_0)}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m},$$

окончательно получаем

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2z = 0.$$

При этом в зависимости от величины и знака  $F'(v_0)$  могут представиться следующие случаи:

- 1)  $0 < n < k$  — затухающие колебания, особая точка — устойчивый фокус;
- 2)  $0 < k < n$  — затухающее аperiodическое движение, особая точка — устойчивый узел;
- 3)  $n = 0$  — гармонические колебания; особая точка — центр;
- 4)  $n < 0$ , причем  $|n| < k$  — нарастающие колебания; особая точка — неустойчивый фокус;
- 5)  $n < 0$ , но  $|n| > k$  — нарастающее аperiodическое движение, особая точка — неустойчивый узел.

Сюда можно было бы добавить два критических случая:

- а)  $k = n > 0$  — переход от 1-го случая к 2-му.
- б) —  $n = k > 0$  — переход от 4-го случая к 5-му.

Напомним, что при рассмотрении данной задачи мы ограничились линейным приближением при разложении функции  $F$  в степенной ряд, поэтому все изложенное верно лишь при малых колебаниях груза.

## § 8. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

В реальных системах всегда имеется сопротивление. Однако, вследствие малости часто им можно пренебречь. Тогда дифференциальное уравнение (2.1) принимает вид

$$a\ddot{q} + cq = Q, \quad (2.84)$$

где  $Q$  — возмущающая сила. Предположим, что эта сила есть периодическая, изменяющаяся вообще по произвольному периодическому закону. Разделим все члены уравнений (2.84) на  $a$  и, кроме (2.10), введем еще обозначение

$$\frac{Q}{a} = \psi(t), \quad (2.85)$$

где  $\psi(t)$  есть так называемая *возмущающая функция*, имеющая некоторый период  $\tau$ , т. е.

$$\psi(t + \tau) = \psi(t).$$

Величину

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (2.86)$$

назовем *основной частотой* изменения возмущающей силы. Тогда уравнение (2.84) примет вид

$$\ddot{q} + k^2q = \psi(t). \quad (2.87)$$

Опираясь на физические факты, имеем право предположить, что функция  $\psi(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. эта функция ограничена, может иметь разрывы лишь первого рода и в конечном интервале имеет конечное число экстремальных значений. Но тогда эта функция может быть разложена в ряд Фурье:

$$\psi(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

или

$$\psi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} (a_s \cos s\omega t + b_s \sin s\omega t), \quad (2.88)$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_s &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \psi(t) \cos s\omega t \, dt, \\ b_s &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} \psi(t) \sin s\omega t \, dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

Здесь  $s = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Практически число  $n$  членов ряда Фурье конечное, определяемое необходимой точностью вычислений и быстротой сходимости ряда коэффициентов; часто число  $n$  можно брать очень небольшим, а иногда даже равным единице.

Практическим приемам разложения функций в ряд Фурье посвящен специальный раздел математики, называемый гармоническим анализом. В следующем параграфе этот вопрос будет освещен несколько подробнее.

Введем обозначения:

$$a_s = h_s \sin \delta_s, \quad b_s = h_s \cos \delta_s. \quad (2.90)$$

Тогда приближенно

$$\psi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^n h_s \sin(s\omega t + \delta_s). \quad (2.91)$$

Вспоминая обозначение (2.85) и полагая

$$H_s = ah_s, \quad (2.92)$$

мы можем сказать, что выражение  $H_s \sin(\omega t + \delta_s)$  представляет собой гармонику возмущающей силы порядка  $s$ , где  $H_s$  есть амплитуда соответствующей гармоники,  $\delta_s$  — начальная фаза. Каждому значению  $s$  естественно соответствует своя гармоника. Гармоника первого порядка ( $s = 1$ ) называется основной; ей соответствует основная частота  $\omega$ .

Итак, имеем приближенно

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{s=1}^n h_s \sin(\omega t + \delta_s). \quad (2.93)$$

Общее решение данного дифференциального уравнения может быть представлено в виде суммы

$$q = \bar{q} + q^*, \quad (2.94)$$

где  $\bar{q}$  — общее решение соответствующего уравнения без правой части:

$$\bar{q} = \alpha \sin(kt + \beta),$$

а  $q^*$  — частное решение данного уравнения. Мы говорим, что  $\bar{q}$  определяет собой собственные колебания системы,  $q^*$  — чисто вынужденные, а  $q$  — полное возмущенное движение системы, которому также приписывают наименование вынужденных колебаний.

Из курса математического анализа известно, что если правая часть линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму какого-то числа  $M$  слагаемых, то частное решение будет являться результатом суммирования парциальных частных решений, т. е.

$$q^* = \sum_{s=0}^{M-1} q_s^*. \quad (2.95)$$

В частности, если правая часть уравнения представляет собой ряд Фурье, то парциальные решения должны соответствовать каждой гармонике. В таком случае очевидно, что

$$q_0^* = \frac{a_0}{2k^2} \quad (2.96)$$

есть постоянная величина, характеризующая смещение центра колебаний.

Далее найдем одно какое-либо  $q_s^*$  при  $s \neq 0$ . Предполагая, что  $s\omega \neq k$ , ищем решение  $q_s^*$  в виде

$$q_s^* = C_s \sin(s\omega t + \delta_s). \quad (2.97)$$

Подстановка в уравнение (2.93) дает нам

$$C_s = \frac{h_s}{k^2 - (s\omega)^2}.$$

Итак, вынужденные колебания происходят по гармоническому закону. Амплитуда вынужденных колебаний, соответствующая  $s$ -й гармонике возмущающей силы, как положительная величина равна:

$$\alpha_s^* = \frac{h_s}{|k^2 - s^2\omega^2|}. \quad (2.98)$$

Поскольку  $C_s$  вообще имеет любой знак, будем различать два случая:

1) *возмущающая гармоника малой частоты*:  $s\omega < k$ ,  $C_s > 0$ . Тогда решение имеет вид

$$q_s^* = \alpha_s^* \sin(s\omega t + \delta_s); \quad (2.99)$$

2) *возмущающая гармоника большой частоты*:  $s\omega > k$ ,  $C_s < 0$ . В этом случае решение имеет вид

$$q_s^* = \alpha_s^* \sin(s\omega t + \delta_s - \pi), \quad (2.100)$$

т. е. изменение знака  $C_s$  влечет за собой отставание фазы колебаний. В первом случае возмущающая сила и вынужденные колебания находятся в одной фазе или, как говорят, *синфазны*, а во втором — в противоположных фазах или *антифазны*. Для обоих случаев  $q_s^*$  можно выразить одной формулой

$$q_s^* = \frac{h_s}{k^2 - (s\omega)^2} \sin(s\omega t + \delta_s). \quad (2.101)$$

Прежде чем перейти к случаю  $k = s\omega$ , рассмотрим так называемое явление *биений*, когда  $s\omega$  мало отличается от  $k$ . Не нарушая общности, мы допустим, что возмущающая сила синусоидальна, т. е. состоит из одной-единственной гармоники. Общее решение уравнения (2.93) будет иметь вид

$$q = A \cos kt + B \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta).$$

Итак, движение представляет собой наложение двух синусоид с круговыми частотами  $k$  и  $\omega$ . По начальным условиям

$$t = 0, \quad q = q^0, \quad \dot{q} = \dot{q}^0$$

легко находим постоянные интеграции  $A$  и  $B$ .

В самом деле, дифференцирование  $q$  дает нам

$$\dot{q} = Ak \sin kt + Bk \cos kt + \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \delta)$$

и тогда

$$A = q^0 - \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \delta, \quad B = \frac{\dot{q}^0}{k} - \frac{\omega}{k} \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \delta.$$

Общее решение принимает вид

$$q = \left[ q^0 \cos kt + \frac{\dot{q}^0}{k} \sin kt \right] - \\ - \frac{h}{k^2 - \omega^2} \left[ \sin \delta \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \sin kt \right] + \\ + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \delta). \quad (2.102)$$

Здесь первый член не зависит от возмущающей силы и определяет собой свободные колебания, обусловленные начальными условиями. Второй член представляет собой колебания с частотой свободных и обусловленных наличием внешней силы, а третий — вынужденные колебания с частотой возмущающих сил. Совокупность первых двух членов дает собственные колебания системы.

Предположим теперь, что  $\omega$  и  $k$  близки друг к другу, т. е. имеем случай биений. Введем обозначение

$$k - \omega = 2\varepsilon, \quad (2.103)$$

где  $\varepsilon$  — малая алгебраическая величина. Тогда

$$\omega = k - 2\varepsilon, \quad k + \omega = 2(k - \varepsilon),$$

и выражение во второй квадратной скобке уравнения (2.102) можно преобразовать следующим образом:

$$\sin \delta \cos kt + \frac{\omega}{k} \cos \delta \sin kt = \sin(kt + \delta) - \frac{2\varepsilon}{k} \cos \delta \sin kt.$$

Преобразуя, далее, разность синусов

$$\sin(kt + \delta) - \sin(\omega t + \delta) = 2 \cos\left(\frac{k + \omega}{2} t + \delta\right) \sin\left(\frac{k - \omega}{2} t\right)$$

и применяя введенные обозначения, окончательно приводим решение (2.102) к такому виду

$$q = q^0 \cos kt + \left[ \frac{q^0}{k} + \frac{h \cos \delta}{2k(k - \varepsilon)} \right] \sin kt - \\ - \frac{h}{2\varepsilon(k - \varepsilon)} \cos[(k - \varepsilon)t + \delta] \sin \varepsilon t. \quad (2.104)$$

Здесь первые два члена правой части определяют собой гармоническое колебание с круговой частотой  $k$ . Исследуем последний член. Если  $\varepsilon$  — величина очень малая, то  $\sin \varepsilon t$  изменяется чрезвычайно медленно. Рассматривая  $\frac{h}{2\varepsilon(k - \varepsilon)} \sin \varepsilon t$ , как амплитуду, получим колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Таким образом, третий член определяет биения, круговая частота которых равна  $(k - \varepsilon)$  и период  $\frac{2\pi}{k - \varepsilon}$  или

$$\tau_1 = \frac{4\pi}{k + \omega}. \quad (2.105)$$

Гармонический закон этих колебаний нарушен вследствие изменения, хотя и медленного, самой амплитуды. Половина полного периода колебаний амплитуды называется периодом биений:

$$\tau_2 = \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{k - \omega} \quad \text{при } k > \omega \quad \text{и} \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{\omega - k} \quad \text{при } k < \omega.$$

Объединяя, получим

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{|k - \omega|}. \quad (2.106)$$

Таким образом, колебания, изображаемые третьим членом уравнения (2.104), графически представляются искаженной синусоидой периода  $\tau_1$ , записанной в синусоиду периода  $2\tau_2$  (рис. 33).

Обратимся, наконец, к тому случаю, когда частоты собственных и вынужденных колебаний равны друг другу, т. е.

к случаю резонанса. Будем рассматривать этот случай как предельный, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Раскрывая неопределенность в последнем члене уравнения (2.104), где для любого заданного

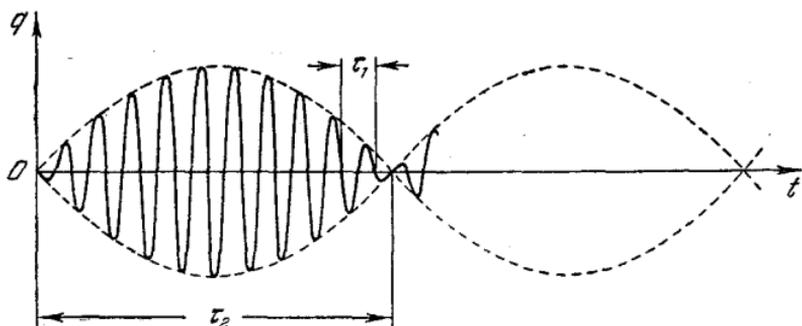


Рис. 33.

интервала  $t$  выбираем  $\varepsilon$  таким образом, чтобы произведение  $\varepsilon t$  было сколько угодно мало. Тогда

$$\lim_{\varepsilon t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon t} \right) = 1,$$

и мы имеем

$$q = q^0 \cos kt + \frac{\dot{q}^0}{k} \sin kt + \frac{h \cos \delta}{2k^2} \sin kt - \frac{h}{2k} t \cos (kt + \delta). \quad (2.107)$$

При неограниченном возрастании  $t$  последний член правой части уравнения (2.107) неограниченно увеличивается. Он называется *секулярным* или *вековым членом* решения. Вследствие этого получаем колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. Итак, резонанс имеет место при совпадении частоты собственных колебаний с частотой возмущающей силы и характеризуется неограниченным ростом амплитуды. Можно убедиться непосредственной подстановкой, что секулярный член является частным решением уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin(\omega t + \delta) \quad (2.108)$$

при  $\omega = k$ . Кроме того, нетрудно видеть, что при этом он может быть выражен в таком виде

$$q^* = \frac{h}{2k} t \sin \left( kt + \delta - \frac{\pi}{2} \right), \quad (2.109)$$

откуда следует, что при резонансе имеем сдвиг фазы  $\pi/2$ . Колебания, определяемые уравнением (2.109), изображаются

графически искаженной синусоидой, вписанной в угол, биссектрисой которого служит ось времени  $t$  (рис. 34).

Практически условия резонанса выполняются при непрерывном изменении возмущающей частоты  $\omega$ , что имеет место, например, при разгоне или торможении двигателя на упругом основании. При постоянстве  $\omega$  чаще встречаются биения, которые при большом периоде  $\tau_2$  в течение нескольких размахов достаточно близки к резонансу, являющемуся их пределом. Приведенный вывод уравнения (2.109) соответствует именно такой точке зрения.

Уравнение (2.109) можно вывести также из решения

$$q = A \cos kt + B \sin kt$$

методом вариации постоянных интегрирования  $A$  и  $B$  при  $\omega = k$ , а также раскрытием неопределенности по правилу Лопиталья из решения (2.102).

В чистом виде резонанс не осуществляется, так как практически всегда имеются силы сопротивления, приостанавливающие рост амплитуд. Резонанс можно объяснить непрерывным поступлением энергии в колеблющуюся систему от какого-то возбудителя через посредство возмущающей силы, когда этот возбудитель действует в такт с колебанием тела. Резонансом объясняются сильные колебания фундаментов машин, вибрации частей самолетов, мостов и т. п.

Пример 1. Виброграф для записи вертикальных колебаний. Принципиальная схема вибрографа изображена на рис. 35, а, б. Подставка  $B$  совершает вертикальные колебания вместе с испытуемым телом. С этой подставкой соединена рамка  $A$ , несущая на

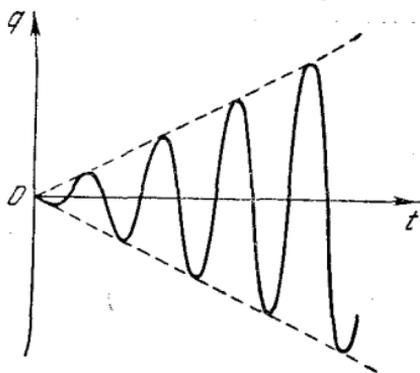


Рис. 34.

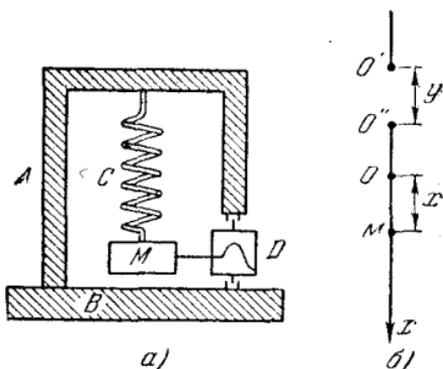


Рис. 35.

пружине  $C$  сейсмическую или инертную массу  $M$ , смещение которой от положения статического равновесия  $O$  в неподвижной системе отсчета есть  $x$ , тогда как смещение рамки равно  $y$ . Допустим для простоты, что рамка колеблется по гармоническому закону

$$y = s \sin \omega t,$$

где  $s$  — амплитуда колебаний испытуемого тела, и что силы сопротивления отсутствуют; тогда уравнение движения сейсмической массы в неподвижной системе отсчета имеет вид

$$m\ddot{x} = -c(x - y),$$

где  $c$  — коэффициент жесткости пружины.

Так как нас интересует запись вибрографа, осуществляемая на барабане  $D$ , связанным с подвижной рамкой, определим относительное смещение  $z$  в этой последней:

$$z = x - y.$$

Тогда

$$\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y} = \ddot{z} - s\omega^2 \sin \omega t$$

и уравнение примет вид

$$m\ddot{z} + cz = ms\omega^2 \sin \omega t.$$

Вводя обозначения

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad s\omega^2 = h,$$

получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в канонической форме

$$\ddot{z} + k^2 z = h \sin \omega t.$$

Вследствие неизбежности сопротивлений, пусть небольших, собственные колебания гаснут, и при малом сопротивлении виброграф запишет колебания:

$$z^* = s \frac{1}{\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 - 1} \sin \omega t.$$

Рассмотрим вопрос о том, какими следует выбрать параметры вибрографа с минимальным искажением записи исследуемых колебаний. Прежде всего, очевидно, необходимо, чтобы  $k$  и  $\omega$  отличались друг от друга. Если  $k \gg \omega$ , то  $z^*$  оказывается величиной очень малой, и записи колебаний почти не будет. Желательно сделать  $k \ll \omega$ , что имеет место при малой жесткости  $c$  и большой массе  $m$ . Тогда

$$\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \approx 0$$

и

$$z^* \approx -s \sin \omega t.$$

Знак минус показывает, что колебания груза по отношению к фундаменту прямо противоположны колебаниям фундамента, т. е. груз остается почти неподвижным в пространстве. Если считать, что в законе колебаний рамки присутствуют высшие гармоники, то при удовлетворении требования  $k \ll \omega$  тем более удовлетворяется требование  $k \ll N\omega$ , где  $N$  — номер гармоники. Запись будет достаточно точно воспроизводить вибрации основания. Конечно, сопротивления несколько искажают этот простой закон.

**Пример 2.** Торсиограф — прибор, предназначенный для записи крутильных колебаний валов. Прибор (рис. 36) состоит из кожуха  $A$ , маховичка  $M$  и спиральной пружины  $C$ , соединяющей маховичок с валом  $B$ , колебания которого требуется записать. Если обозначить через  $\varphi$  угол поворота вала и через  $\psi$  угол поворота маховичка, то дифференциальное уравнение вращательного движения этого последнего будет иметь вид

$$J\ddot{\psi} = -c(\psi - \varphi),$$

где  $J$  — момент инерции маховичка,  $c$  — коэффициент жесткости спиральной пружины.

Введем разность углов

$$\vartheta = \psi - \varphi,$$

регистрируемую торсиографом, и предположим, что вал вращается в среднем равномерно с угловой скоростью  $\omega_0$ , но на это вращение наложены гармонические колебания, т. е.

$$\varphi = \omega_0 t + \sigma \sin \omega t,$$

где  $\sigma$  — амплитуда гармонических колебаний вала. Тогда

$$\ddot{\psi} = \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} = \ddot{\vartheta} - \sigma\omega^2 \sin \omega t,$$

и дифференциальное уравнение примет вид

$$J\ddot{\vartheta} + c\vartheta = J\sigma\omega^2 \sin \omega t$$

или

$$\ddot{\vartheta} + k^2\vartheta = h \sin \omega t,$$

где

$$k^2 = \frac{c}{J}, \quad h = \sigma\omega^2.$$

Получаем решение того же типа, что и для вибрографа:

$$\vartheta^* = \sigma \frac{1}{\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 - 1} \sin \omega t,$$

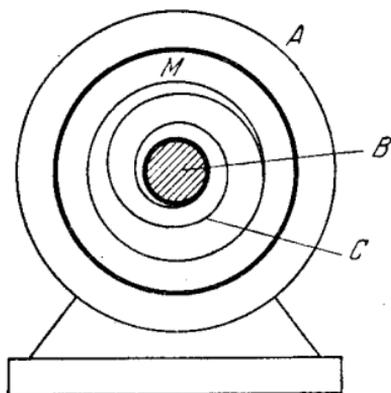


Рис. 36.

относительно которого можно повторить все основные выводы, сделанные в предыдущем примере. Интересно отметить, что здесь мы имеем колебания не около равновесного состояния, а относительно некоторого установившегося движения.

## § 9. ПРАКТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В предыдущем параграфе периодическое внешнее возмущение было представлено в виде ряда Фурье, коэффициенты которого вычисляются по интегральным формулам, выводимым в курсе математического анализа. Непосредственное выполнение квадратуры при вычислении этих коэффициентов может быть не только весьма трудным, но даже — при более или менее сложном виде разлагаемой функции — в конечной форме невыполнимым. К этому надо добавить, что аналитическое выражение возмущающей функции часто вообще бывает неизвестно, и она задается либо графически, как, например, в самопишущем приборе, либо численно для определенных значений аргумента.

Указанные соображения привели к разработке специальных методов вычисления коэффициентов Фурье, преследующих цель заменять точные их значения удовлетворительными приближенными значениями, получение которых было бы достаточно легко выполнимо. Эти методы, составляющие предмет практического гармонического анализа, как прикладной отрасли математики, можно подразделить на три группы.

А. Арифметические методы, в которых интегралы заменяются конечными суммами, вычисляемыми по определенным правилам.

Б. Графические методы, в основе которых лежит графическое интегрирование функций.

В. Механические методы, использующие особые приборы, называемые гармоническими анализаторами.

Практическому гармоническому анализу посвящена специальная литература и здесь мы рассмотрим лишь по одному примеру на каждый из перечисленных методов \*).

### А. Арифметический метод

Арифметический метод или метод суммирования, предложенный Перри, сводится к простому вычислению сумм, аппроксимирующих интегралы в коэффициентах Фурье (2.89)

\*) Обстоятельному изложению этих методов посвящена книга [23].

разложения (2.88). Предположим, что разлагаемая функция  $\psi(t)$  представлена графически. Изменим масштаб по оси абсцисс так, чтобы период был равен  $2\pi$ . Для этого положим

$$x = \omega t, \quad (2.110)$$

где  $\omega$  — частота периодической функции  $\psi$ , и обозначим

$$\psi(t) = f(x). \quad (2.111)$$

Пусть уравнение разлагаемой кривой (рис. 37) имеет вид

$$y = f(x), \quad (2.112)$$

тогда

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Разделим полный период на  $2n$  равных частей. Тогда точные

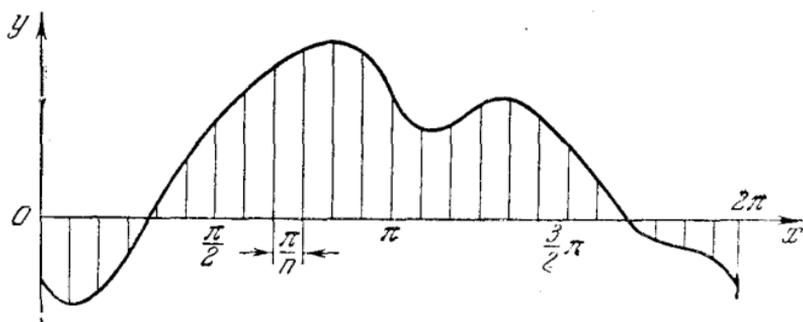


Рис. 37.

формулы (2.89), принимающие вид

$$\left. \begin{aligned} a_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos sx \, dx, \\ b_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin sx \, dx, \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

заменяются приближенными:

$$\left. \begin{aligned} a_s &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} y_k \cos sx_k, \\ b_s &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} y_k \sin sx_k, \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

где  $s = 0, 1, 2, \dots$ ;  $x_k = k \frac{\pi}{n}$ . Таким образом, здесь кривая заменяется ступенчатой линией, и для каждого интервала берется конечная ордината  $y_k$ . Можно с таким же правом взять не конечную, а начальную ординату или, заменяя прямоугольники трапециями, брать среднее арифметическое длин начальной и конечной ординат каждого интервала линий. Переходя к градусному измерению углов, мы для первой гармоники будем иметь аргументы синуса и косинуса соответственно равными:

$$1 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad 2 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad 3 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad \dots$$

для второй гармоники:

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad 2 \cdot 2 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad 2 \cdot 3 \cdot \frac{180^\circ}{n}, \quad \dots$$

и т. д. Пусть, например,  $2n = 24$ , тогда имеем соответственно

$$s = 1 \quad 15^\circ, \quad 30^\circ, \quad 45^\circ \dots$$

$$s = 2 \quad 30^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ \dots$$

$$s = 3 \quad 45^\circ, \quad 90^\circ, \quad 135^\circ \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Для полного расчета необходимо иметь заранее вычисленные значения косинусов и синусов этих углов. В таблицах 1 и 2 (стр. 77, 78) приведены указанные значения для  $s = 1, 2, 3, 4, 5$ , когда  $2n = 24$ .

Имея численные значения ординат

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n},$$

которые могут быть, например, взяты из графика функции  $y = f(x)$ , можно пользоваться непосредственно формулами (2.114). При этом, согласно сказанному выше, в приведенном ряде ординат опускаем либо первый, либо последний член. Для удобства вычисления члены сумм (2.114) целесообразно группировать так, чтобы собирать вместе слагаемые, имеющие одно и то же значение тригонометрической функции. Пользуясь методом Рунге и вводя обозначение

$$a = \frac{180^\circ}{n},$$

Таблица 1

последовательных значений синусов  
для определения гармоник 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков  
по методу Перри

№ ординаты	Для гармоник				
	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка	5-го порядка
1	+0,259	+0,500	+0,707	+0,866	+0,966
2	+0,500	+0,866	+1,000	+0,866	+0,500
3	+0,707	+1,000	+0,707	0,000	-0,707
4	+0,866	+0,866	0,000	-0,866	-0,866
5	+0,966	+0,500	-0,707	-0,866	+0,259
6	+1,000	0,000	-1,000	0,000	+1,000
7	+0,966	-0,500	-0,707	+0,866	+0,259
8	+0,866	-0,866	0,000	+0,866	-0,866
9	+0,707	-1,000	+0,707	0,000	-0,707
10	+0,500	-0,866	+1,000	-0,866	+0,500
11	+0,259	-0,500	+0,707	-0,866	+0,966
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
13	-0,259	+0,500	-0,707	+0,866	-0,966
14	-0,500	+0,866	-1,000	+0,866	-0,500
15	0,707	+1,000	-0,707	0,000	+0,707
16	-0,866	+0,866	0,000	-0,866	+0,866
17	-0,966	+0,500	+0,707	-0,866	-0,259
18	-1,000	0,000	+1,000	0,000	-1,000
19	-0,966	-0,500	+0,707	+0,866	-0,259
20	-0,866	-0,866	0,000	+0,866	+0,866
21	-0,707	-1,000	-0,707	0,000	+0,707
22	-0,500	-0,866	-1,000	-0,866	-0,500
23	-0,256	-0,500	-0,707	-0,866	-0,966
24	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Таблица 2

последовательных значений косинусов  
для определения гармоник 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков  
по методу Перри

№ ординаты	Для гармоник				
	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка	5-го порядка
1	+0,966	+0,866	+0,707	+0,500	+0,259
2	+0,866	+0,500	0,000	-0,500	-0,866
3	+0,707	0,000	-0,707	-1,000	-0,707
4	+0,505	-0,500	-1,000	-0,500	+0,500
5	+0,259	-0,866	-0,707	+0,500	+0,966
6	0,000	-1,000	0,000	+1,000	0,000
7	-0,259	-0,866	+0,707	+0,500	-0,966
8	-0,500	-0,500	+1,000	-0,500	-0,500
9	-0,707	0,000	+0,707	-1,000	+0,707
10	-0,866	+0,500	0,000	-0,500	+0,866
11	-0,966	+0,866	-0,707	+0,500	-0,259
12	-1,000	+1,000	-1,000	+1,000	-1,000
13	-0,966	+0,866	-0,707	+0,500	-0,259
14	-0,866	+0,500	0,000	-0,500	+0,866
15	-0,707	0,000	+0,707	-1,000	+0,707
16	-0,500	-0,500	+1,000	-0,500	-0,500
17	-0,259	-0,866	+0,707	+0,500	-0,966
18	0,000	-1,000	0,000	+1,000	0,000
19	+0,259	-0,866	-0,707	+0,500	+0,966
20	+0,500	-0,500	-1,000	-0,500	+0,500
21	+0,707	0,000	-0,707	-1,000	-0,707
22	+0,866	+0,500	0,000	-0,500	-0,866
23	+0,966	+0,866	+0,707	+0,500	+0,259
24	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000



специальных шаблонов в виде карточек с прямоугольными отверстиями. Эти шаблоны накладываются на заранее заготовленный лист с таблицей встречающихся в разложении значений синусов и косинусов так, что нужные значения этих функций выступают в отверстиях и умножаются на соответствующие ординаты кривой, после чего производится суммирование \*).

Пример. Найдём первые четыре гармоники для кривой, представленной на рис. 37. Полагая  $n = 12$ , т. е., деля период на 24 части (по  $15^\circ$ , или  $\frac{\pi}{12}$ ), имеем 25 ординат, из которых две ( $y_0$  и  $y_{24}$ ) совпадают:

$$-10, -15, -12, -6, +3, +11, +17, +22, +26, +29, +30, +29, +20, \\ +15, +16, +20, +21, +17, +12, +7, 0, -4, -6, -7, -10.$$

По первой формуле (2.114)

$$a_0 = \frac{1}{12} (-10 - 15 - \dots + 22 + 26 + \dots - 7 - 10) = 17,9.$$

Пользуясь таблицами 1 и 2, легко видеть, что в формулах (2.114) группировать для вычисления можно не только по два члена, но и большее число. Так, для первой гармоники ( $s = 1$ ) имеем

$$a_1 = \frac{1}{12} \{0,966 (-15 - 29 - 15 - 7) + 0,866 (-12 - 30 - 16 - 6) + \\ + 0,707 (-6 - 29 - 20 - 4) + 0,500 (-3 - 26 - 21 + 0) + \\ + 0,259 (+11 - 22 - 17 + 7) + 1,000 (-20 - 10)\} = -\frac{219}{12} \approx -18,3,$$

$$b_1 = \frac{1}{12} \{0,259 (-15 - 29 - 15 + 7) + 0,500 (-12 + 20 - 16 + 6) + \\ + 0,707 (-6 + 29 - 20 + 4) + 0,866 (+3 + 26 - 21 + 0) + \\ + 0,66 (+11 + 22 - 17 - 7) + 1,000 (+17 - 12)\} = +\frac{31}{12} \approx +2,6.$$

При вычислении коэффициентов второй гармоники видим, что тригонометрические функции принимают только три числовых значения: 0,500, 0,866 и 1,000, что еще более облегчает вычисление. Итак, имеем

$$a_2 = \frac{60,3}{12} \approx -50; \quad b_2 = \frac{44,5}{12} \approx -3,7.$$

Аналогично находим

$$a_3 = +1,8, \quad b_3 = +0,5, \quad a_4 \approx 0, \quad b_4 \approx -2,8.$$

\*) См., например, цитированную выше книгу [23].

## Б. Графический метод

Графические методы основаны на графическом интегрировании заданной функции. Рассмотрим метод, предложенный Мизесом. Как и в предыдущем случае, изменим масштаб по оси абсцисс так, чтобы период функции был равен  $2\pi$  (2.110). Разделим период на  $2n$  равных частей (рис. 38) и заменим

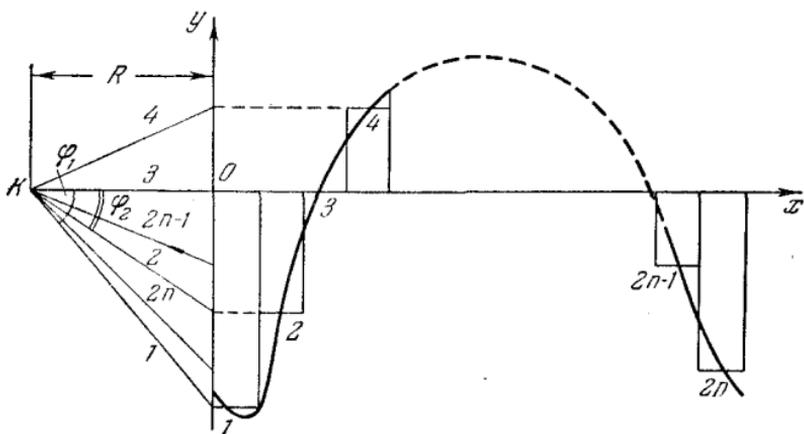


Рис. 38.

периодическую кривую ступенчатой линией так, чтобы сохранилась, хотя бы приблизительно, эквивалентность площадей прежних и новых элементарных фигур. Получающиеся прямоугольники проектируем на ось  $y$  и из точки  $K$ , находящейся на некотором принятом расстоянии  $R$  от точки  $O$ , приводим лучи к точкам деления оси  $y$ .

Для вычисления косинусных и синусных коэффициентов  $a_s$ ,  $b_s$  преобразуем формулы (2.113), применяя интегрирование по частям. Так как подынтегральная функция есть функция периодическая, то подстановка исчезнет, и мы получим

$$\left. \begin{aligned} a_s &= \frac{1}{\pi s} \int_0^{2\pi} y d(\sin sx), \\ b_s &= -\frac{1}{\pi s} \int_0^{2\pi} y d(\cos sx). \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

Построим две полуокружности радиусом  $R$  (рис. 39, а, б), каждую из которых разделим на  $n$  равных частей так, чтобы каждая дуга была равна  $\frac{\pi}{n}$ . Через точки деления (на рис. 39, а) проводим вертикали, а на рис. 39, б — горизонтали. Пусть требуется найти величину коэффициента гармоники порядка  $s$ . Тогда выделим из указанного семейства параллельных прямых те из них, которые последовательно проходят через

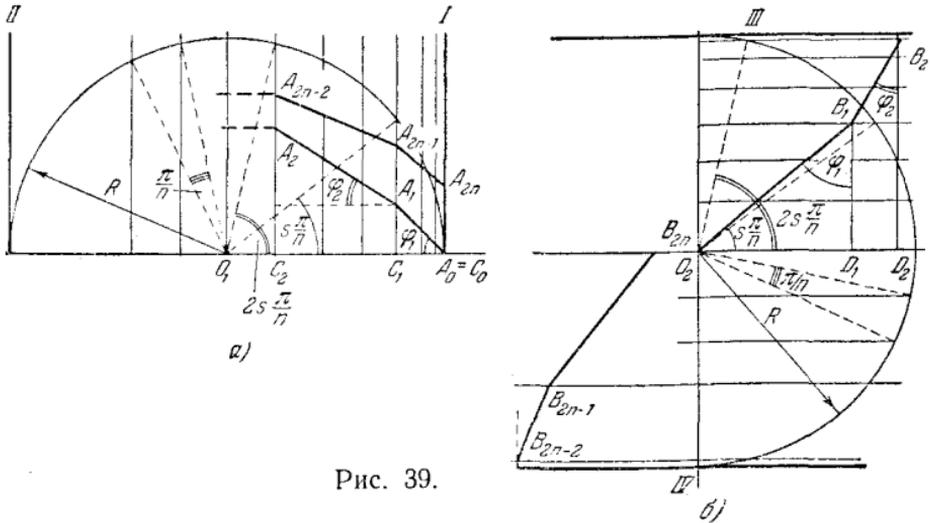


Рис. 39.

точки деления  $\pi/n$ ,  $2\pi/n$ ,  $3\pi/n$ , ... и т. д. (т. е. берем  $s$ -кратные центральные углы). После этого на рис. 39, а, начиная от точки  $A_0$ , проводим ломаную, звенья которой параллельны соответствующим лучам на рис. 38. На рис. 39, б, начиная из точки  $O_2$ , проводим ломаную, звенья которой перпендикулярны лучам рис. 38. На каждой фигуре число звеньев ломаной должно равняться числу лучей  $2n$ . По окончании построения спроектируем конечные точки ломаной на рис. 39, а на вертикаль, а на рис. 39, б — на горизонталь. Эти проекции, с точностью до постоянного множителя, будут равны коэффициентам  $b_s$  и  $a_s$  соответственно. Докажем это.

Из рис. 39, а имеем

$$\begin{aligned} C_1 A_1 &= C_1 A_0 \operatorname{tg} \varphi_1 = \left[ R - R \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right) \right] \operatorname{tg} \varphi_1 = \\ &= R \operatorname{tg} \varphi_1 \left[ \cos 0 - \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right) \right] = y_1 \Delta \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right), \end{aligned}$$

так как  $y_1 < 0$ . Находим, далее,

$$\begin{aligned} C_2 A_2 &= C_1 A_1 + C_2 C_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = y_1 \Delta \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right) + \\ &+ \left[ R \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right) - R \cos \left( 2s \frac{\pi}{n} \right) \right] \operatorname{tg} \varphi_2 = \\ &= y_1 \Delta \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right) + R \operatorname{tg} \varphi_2 \left[ -\Delta \cos \left( 2s \frac{\pi}{n} \right) \right] = \\ &= y_1 \Delta \cos \left( s \frac{\pi}{n} \right) + y_2 \Delta \cos \left( 2s \frac{\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

и т. д. Ломаная  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n-2} A_{2n-1} A_{2n}$  пройдет  $s$  раз (где  $s$  — порядок гармоники) влево и вправо между перпендикулярами  $I$  и  $II$  к основному диаметру окружности. В результате получаем, с точностью до множителя, аппроксимацию интеграла во второй формуле (2.116):

$$A_0 A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} y_k \Delta \cos \left( k \frac{s\pi}{n} \right).$$

Принимая во внимание знак и постоянный множитель, имеем

$$b_s = -\frac{1}{\pi s} A_0 A_{2n}, \quad (2.117a)$$

т. е.  $b_s > 0$ , если отрезок  $A_0 A_{2n}$  направлен вниз и наоборот. Аналогично из рис. 39, б можно найти, что

$$O_2 B_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} y_k \Delta \sin \left( k \frac{2\pi}{n} \right)$$

и тогда, принимая направление влево от точки  $O_2$  за положительное, приближенное значение коэффициента  $a_s$  будет равно

$$a_s = \frac{1}{\pi s} O_2 B_{2n}. \quad (2.117б)$$

Формулы (2.117а и б) решают поставленную задачу.

**Пример.** Указать графическое определение гармоники для кривой, изображенной на рис. 40, а. Выбирая полюсное расстояние  $R$ , строим окружность радиуса  $R$  (рис. 40, б). Разделим эту окружность на 12 частей ( $2n = 12$ ) и проведем через точки деления горизонталь и вертикали. Аппроксимируем кривую ступенчатой линией и проводим лучи  $K1, K2, \dots, K12$ ; на рис. 40, в строим параллели к проведенным лучам, а на рис. 40, г — перпендикуляры

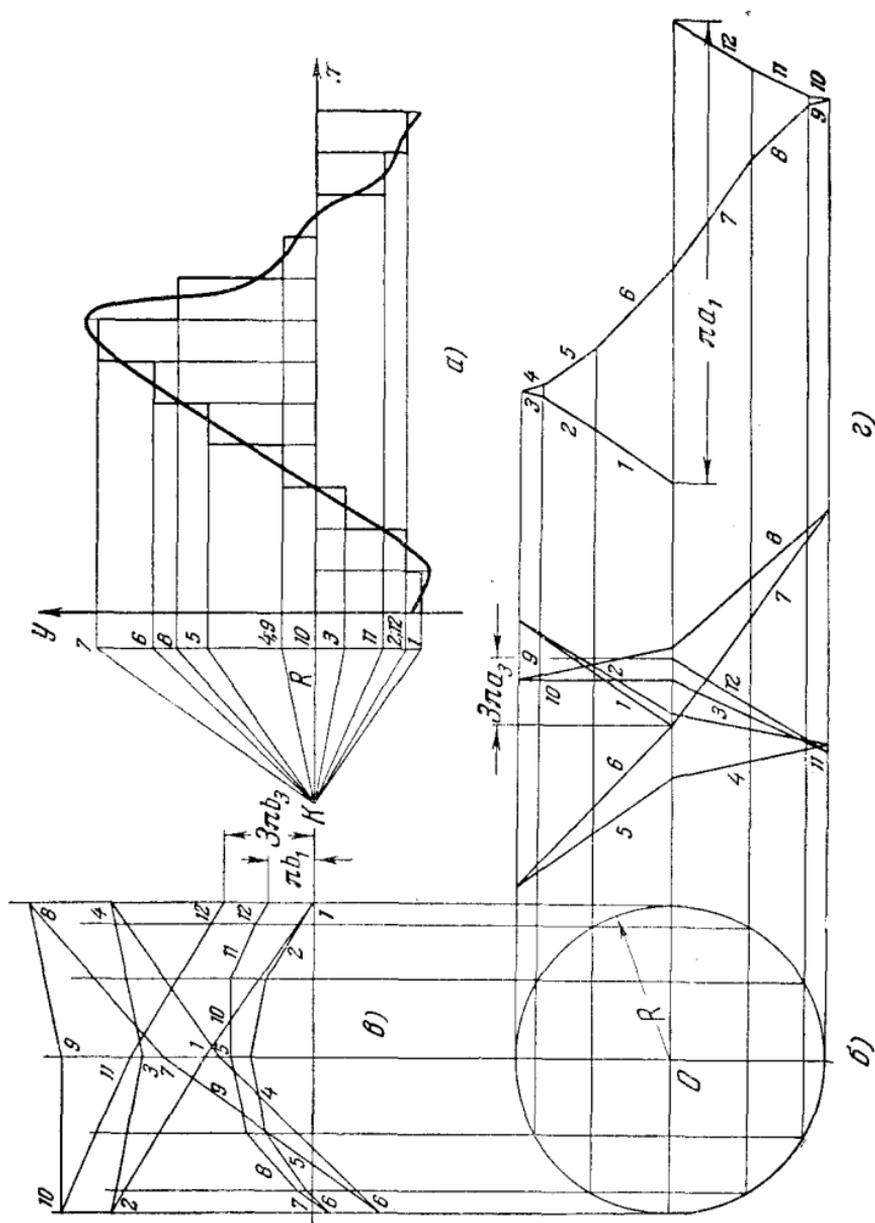


Рис. 40.

На этих рисунках даны полные построения для определения коэффициентов первой гармоники (причем получается  $a_1 < 0$ ,  $b_1 < 0$ ), а также указано построение, соответствующее коэффициентам третьей гармоники.

## В. Механический метод

В механических методах определение коэффициентов Фурье выполняется с помощью специальных приборов — гармонических анализаторов, действующих по тому же принципу, что и планиметр. Рассмотрим один из употребительных приборов этого рода — гармонический анализатор Генриди — Кореди. Для последующего расчета обратимся к выражениям коэффициентов Фурье (2.89), полагая

$$t = x, \quad \psi(t) = y = f(x), \quad \tau = l, \quad \omega = \frac{2\pi}{l},$$

найдем

$$a_s = \frac{2}{l} \int_0^l y \cos\left(s \frac{2\pi}{l} x\right) dx,$$

$$b_s = \frac{2}{l} \int_0^l y \sin\left(s \frac{2\pi}{l} x\right) dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и принимая во внимание обращение в нуль подстановки, подобно тому, как это имело место в формулах (2.116), получим

$$\left. \begin{aligned} a_s &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \sin\left(s \frac{2\pi}{l} x\right) dy, \\ b_s &= \frac{1}{s\pi} \int_0^l \cos\left(s \frac{2\pi}{l} x\right) dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

Обратимся к описанию прибора, пространственная схема которого представлена на рис. 41, а вид в плане на рис. 42.

Прибор состоит из рамы  $P$ , снабженной колесиками  $E_1$ ,  $E_2$  и  $D$ , которая ставится на плоскость  $xu$  так, что ось  $L$ , несущая колесики  $E_1$ ,  $E_2$ , остается все время параллельной оси  $Ox$ . Рама может таким образом перемещаться только

параллельно оси  $Oy$ . На раме помещается подвижная каретка  $W$ , снабженная штифтом  $F$ , имеющая возможность перемещаться параллельно оси  $Ox$ , причем полный ход каретки

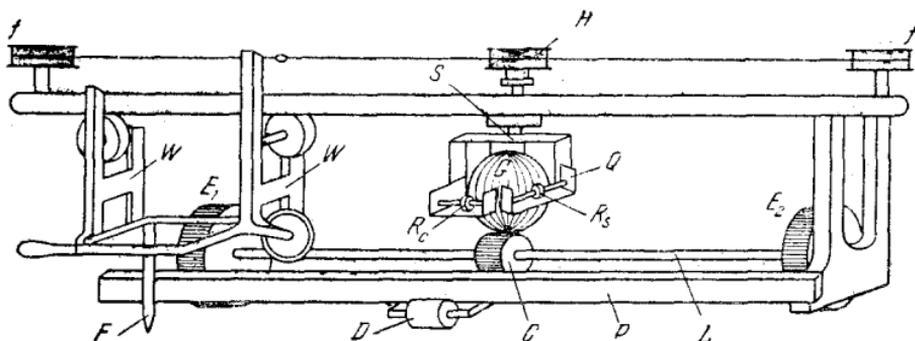


Рис. 41.

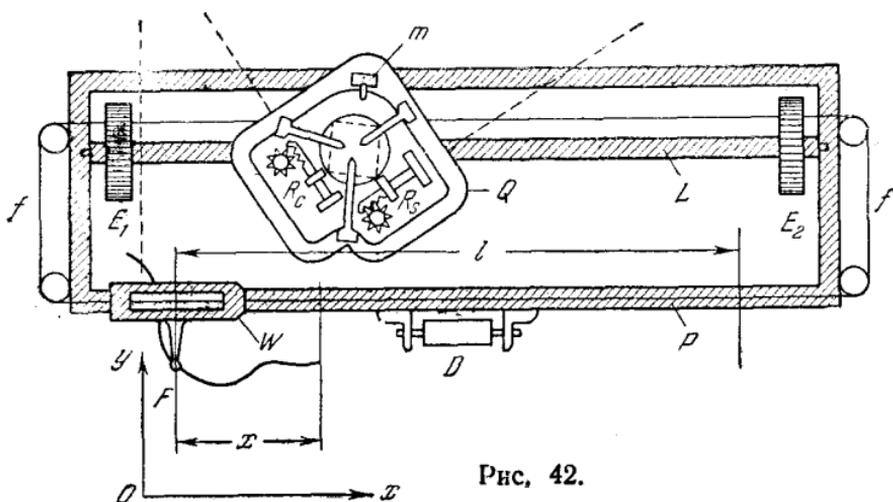


Рис. 42.

ограничен и равен некоторой длине  $l$ , к которой и необходимо привести базис анализируемой кривой. При обходе штифтом кривой  $y = f(x)$  одновременно перемещается рама и каретка; элементарное перемещение первой из них равно  $dy$ , второй —  $dx$ .

Движение каретки с помощью серебряной проволоки  $ff$  передается шкиву  $H$ , насаженному на стержень  $S$ , связанный с интегрирующим аппаратом  $Q$ ; этих аппаратов бывает в раме несколько в соответствии с числом получаемых гармоник.

Передача устроена так, что в то время, как каретка перемещается на полное расстояние  $l$ , шкив  $H$  совершает  $s$  оборотов, где  $s$  — порядок гармоники. При перемещении каретки

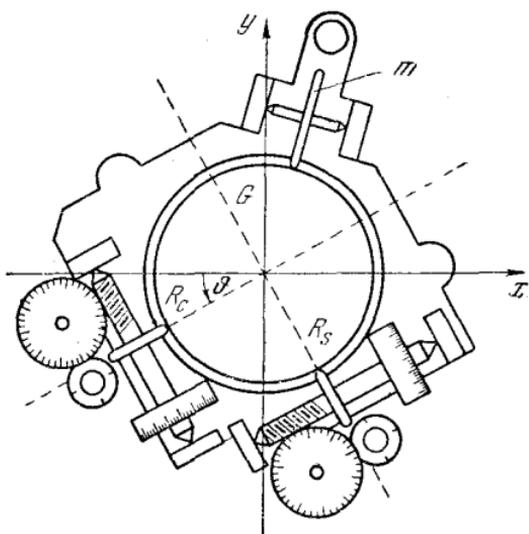


Рис. 43.

на расстояние  $x$  интегрирующий аппарат, изображенный отдельно на рис. 43, поворачивается на угол

$$\vartheta = s \frac{2\pi}{l} x. \quad (2.119)$$

Перемещение рамы передается цилиндрическому шкиву  $C$ , укрепленному на оси  $L$  и имеющему диаметр, несколько меньший, чем диаметр колесиков  $E_1, E_2$ . Посредством этого шкива поворачивается стеклянный шар  $G$ , который имеет диаметр, равный диаметру шкива  $C$ . Этот шар расположен внутри интегрирующего аппарата таким образом, что качается в двух точках своего большого горизонтального круга измерительных роликов  $R_S$  и  $R_C$ , которым он передает свое вращение, прижимаясь к ним под действием пружинящего ролика  $m$ . В начальный момент прибор устанавливается так, что ось ролика  $R_S$  параллельна оси  $Ox$ , а ось ролика  $R_C$  ей перпендикулярна.

Если обозначить радиус шара через  $R$ , радиус измерительного ролика через  $r$  и радиус колесика  $E_1$  или  $E_2$  через  $\rho$ ,

то при перемещении рамы  $P$  на величину  $dy$  шар  $G$  повернется вокруг оси, параллельной  $Ox$ , на угол

$$d\chi = \frac{dy}{\rho},$$

тогда при произвольном значении угла  $\vartheta$ , как видно из рис. 43, элементарные углы поворота шкивов  $R_C$  и  $R_S$  будут соответственно таковы:

$$d\psi_C = \frac{R}{r} \sin \vartheta d\chi, \quad d\psi_S = \frac{R}{r} \cos \vartheta d\chi.$$

Подставляя сюда значения  $\vartheta$  и  $d\chi$  и интегрируя, получим

$$\psi_C = \frac{R}{\rho r} \int_0^l \sin \left( s \frac{2\pi}{l} x \right) dy,$$

$$\psi_S = \frac{R}{\rho r} \int_0^l \cos \left( s \frac{2\pi}{l} x \right) dy.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (2.118), находим

$$a_s = -\frac{\lambda}{s} \psi_C, \quad b_s = \frac{\lambda}{s} \psi_S, \quad (2.120)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho r}{\pi R} \quad (2.121)$$

есть константа прибора.

## § 10. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Как было сказано в § 8, при рассмотрении вынужденных колебаний часто оказывается возможным пренебрегать сопротивлением, конечно, когда оно достаточно мало. Однако в ряде случаев такое пренебрежение может исказить результаты исследования не только в количественном, но также и в качественном отношении. В особенности это имеет место в областях, близких к резонансу, где учет сопротивления крайне необходим.

Рассматривая общий случай линейной системы с произвольным периодическим возмущением, разделим все члены

уравнения (2.1) на  $a$  и введем обозначения (2.10), (2.38) и (2.85). Тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \psi(t), \quad (2.122)$$

где для возмущающей функции  $\psi(t)$  останутся в силе соотношения (2.86), (2.88) и (2.89).

Общее решение уравнения (2.122) выразится по-прежнему формулой (2.94), только теперь  $\bar{q}$  будет иметь иной вид. Именно, при  $n < k$

$$\bar{q} = ae^{-nt} \sin(\nu t + \beta),$$

где  $\nu = \sqrt{k^2 - n^2}$ , а при  $n > k$

$$\bar{q} = ae^{-nt} \operatorname{sh}(\kappa t + \beta),$$

где  $\kappa = \sqrt{n^2 - k^2}$ , как это следует из решений (2.45) и (2.58). В первом случае ( $n < k$ ) имеем затухающие колебания, во втором ( $n > k$ ) — затухающее аperiodическое движение. Далее будем искать парциальное частное решение уравнения (2.122) в виде

$$q_s^* = \alpha_s^* \sin(s\omega t + \delta_s - \varepsilon_s), \quad (2.123)$$

где  $\alpha_s^*$  — амплитуда  $s$ -й гармоники вынужденных колебаний, а  $\varepsilon_s$  — соответствующий сдвиг фазы. Представляя в уравнении

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h_s \sin(s\omega t + \delta_s) \quad (2.124)$$

синус в правой части в виде суммы

$$\begin{aligned} \sin(s\omega t + \delta_s) &= \sin[(s\omega t + \delta_s - \varepsilon_s) + \varepsilon_s] = \\ &= \sin(s\omega t + \delta_s - \varepsilon_s) \cos \varepsilon_s + \cos(s\omega t + \delta_s - \varepsilon_s) \sin \varepsilon_s, \end{aligned}$$

подставляя это разложение и решение (2.123) в уравнение (2.124), получим результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\alpha_s^* (k^2 - s^2\omega^2) - h_s \cos \varepsilon_s] \sin(s\omega t + \delta_s - \varepsilon_s) + \\ + [2\alpha_s^* n s \omega - h_s \sin \varepsilon_s] \cos(s\omega t + \delta_s - \varepsilon_s) = 0. \end{aligned}$$

Это соотношение тождественно выполняется, если выражение в каждой квадратной скобке равно нулю. Отсюда легко находим

$$\left. \begin{aligned} \alpha_s^* &= \frac{h_s}{\sqrt{(k^2 - s^2\omega^2)^2 + 4n^2s^2\omega^2}}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_s &= \frac{2ns\omega}{k^2 - s^2\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Резонанс получается при  $k$ , равном или кратном  $\omega$ , т. е. вообще при  $k = s\omega$ . Следовательно, число резонансных частот вообще бесконечно велико. Наиболее резко резонанс проявляется при совпадении основной круговой частоты  $\omega$  с  $k$ , а именно при  $s = 1$ . Однако теперь, в отличие от результатов, полученных ранее в § 8, вследствие наличия сопротивления никакого безграничного роста амплитуд не будет.

Для исследования формул (2.125) рассмотрим, например, первую гармонику и ради упрощения индекс  $s = 1$  отбросим. Здесь очень удобно перейти к безразмерным параметрам, к которым относится введенный выше (стр. 51, формула (2.49)) безразмерный коэффициент затухания

$$\zeta = \frac{n}{k}$$

и безразмерная частота возмущающей силы

$$z = \frac{\omega}{k}. \quad (2.126)$$

Разделим числители и знаменатели дробей в правых частях уравнений (2.125) на  $k^2$ ; тогда, используя введенные обозначения, получим

$$\alpha^* = \lambda d, \quad (2.127)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4z^2\zeta^2}} \quad (2.128)$$

и

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2z\zeta}{1 - z^2}. \quad (2.129)$$

Здесь  $\lambda$  есть так называемый *коэффициент динамичности*, представляющий собой число, на которое нужно умножить статическое смещение

$$d = \frac{h}{k^2} = \frac{H}{c} \quad (2.130)$$

для получения амплитуды вынужденных колебаний. Наличие множителя  $\lambda$  обусловлено инерцией колеблющейся системы.

Рассматривая формулу (2.128), убеждаемся, что при  $z = 1$ , т. е. в случае резонанса ( $\omega = k$ ), коэффициент  $\lambda$  имеет конечное значение:

$$\lambda_{\text{рез}} = \frac{1}{2\xi}, \quad (2.131)$$

при этом  $\text{tg } \varepsilon_{\text{рез}} = \infty$  и тогда

$$\varepsilon_{\text{рез}} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.132)$$

т. е. независимо от затухания. Случай  $\xi = 0$  можно рассматривать как предельный, для которого при  $\omega = k$ , согласно (2.131), имеем  $\lambda = \infty$ .

Если же совпадают частоты возмущающей силы и свободных затухающих колебаний, т. е.  $\omega^2 = k^2 - n^2$ , или если перейти к безразмерным величинам:

$$z = \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (2.133)$$

то тогда

$$\lambda' = \frac{1}{\xi \sqrt{4 - 3\xi^2}}, \quad \text{tg } \varepsilon' = \frac{2}{\xi} \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (2.134)$$

Найдем экстремальное значение коэффициента динамичности  $\lambda$  [20]. Для этого будем искать экстремум подрадикального выражения в знаменателе (2.128):

$$y = (1 - z^2)^2 + 4z^2\xi^2.$$

Имеем

$$\frac{dy}{dz} = 0, \quad z(4z^2 - 4 + 8\xi^2) = 0.$$

Получаем два решения:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

Последнее решение имеет смысл лишь в случае  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Образует вторую производную

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 4(3z^2 - 1 + 2\xi^2)$$

и рассмотрим отдельно оба решения:

1)  $z = 0$ ,

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -4(1 - 2\xi^2).$$

Если  $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , то

$$y = y_{\max}, \quad \lambda = \lambda_{\min} = 1,$$

если же  $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , то

$$y = y_{\min}, \quad \lambda = \lambda_{\max} = 1.$$

$$2) \quad z = \sqrt{1 - 2\zeta^2},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = 8(1 - 2\zeta^2) > 0,$$

следовательно,

$$y = y_{\min}$$

и

$$\lambda = \lambda_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Легко убедиться, что в этом случае  $\lambda_{\text{рез}} < \lambda_{\text{max}}$ . На рис. 44 представлена так называемая резонансная диаграмма или

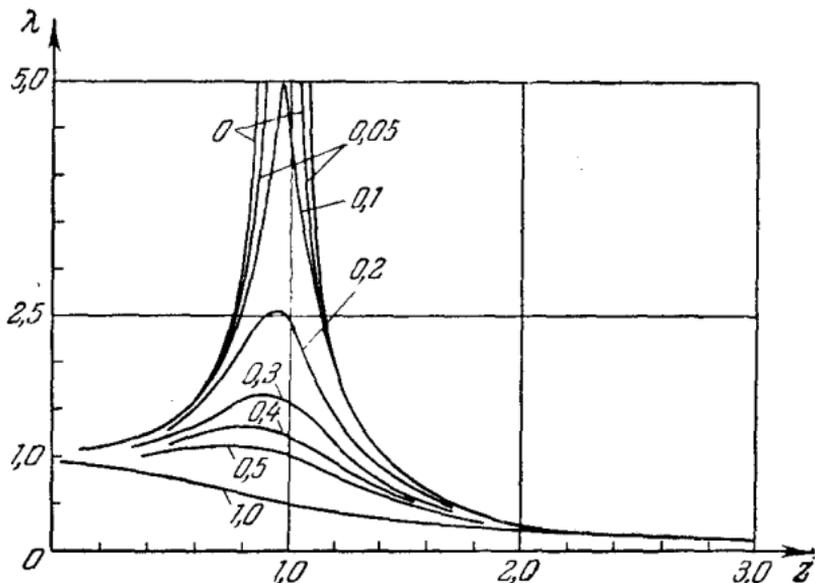


Рис. 44.

график коэффициента динамичности  $\lambda$ , а на рис. 45 — график сдвига фазы  $\epsilon$ . На этих рисунках числа, поставленные у кривых, показывают величину безразмерного коэффициента затухания  $\zeta$ .

Рассмотрим теперь случай, часто встречающийся в практике, когда амплитуда возмущающей силы  $H$  пропорциональна квадрату ее частоты  $\omega^2$ . Это имеет место тогда, когда воздействие вращающихся масс пропорционально квадрату угловой скорости.

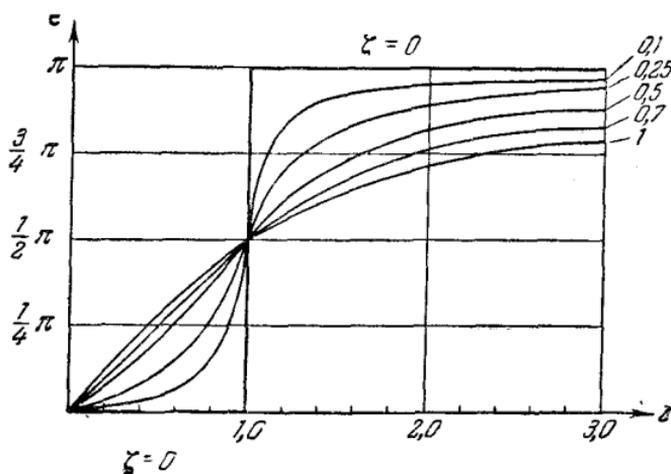


Рис. 45.

Итак, положим

$$H = l\omega^2, \quad (2.135)$$

где  $l$  — некоторая постоянная, размерность которой равна размерности обобщенной силы  $Q$ , умноженной на квадрат размерности времени. Тогда

$$h = \frac{l}{a} \omega^2$$

и амплитуда вынужденных колебаний

$$\alpha^* = \mu f, \quad (2.136)$$

где

$$f = \frac{l}{a}, \quad (2.137)$$

$$\mu = \frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2\zeta^2}}. \quad (2.138)$$

Аналогом коэффициента динамичности  $\lambda$  здесь является безразмерная величина  $\mu$ , для которой дан график на рис. 46\*). Что касается постоянной величины  $f$ , то, хотя она и имеет размерность обобщенной координаты  $q$ , а следовательно, и

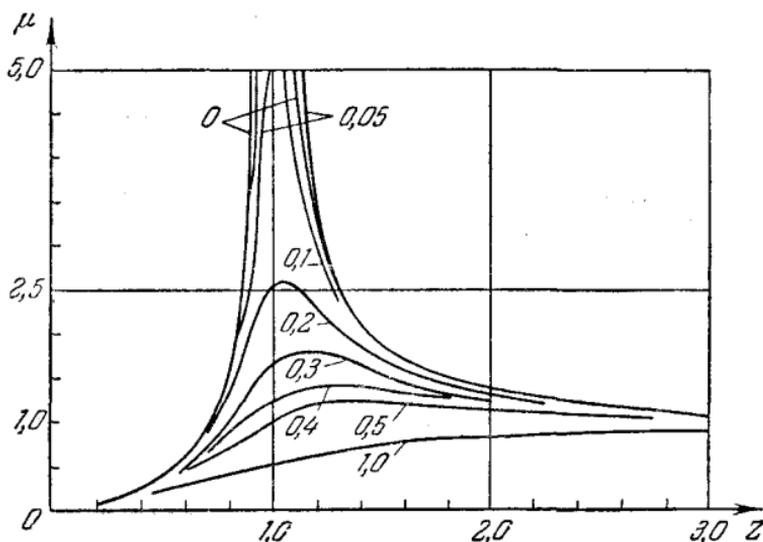


Рис. 46.

смещения, тем не менее она не является статическим смещением подобно величине  $a$ . Амплитуда  $a^*$  представлена в виде произведения  $\mu f$  лишь в целях удобства исследования.

Заметим, что в приведенных выше примерах с вибрографом и торсиографом (стр. 71—73) мы имели именно рассмотренный сейчас случай при  $\xi = 0$ . При этом коэффициент  $\mu$  равен:

$$\mu = \frac{z^2}{1 - z^2},$$

и при очень большом  $z$  мы имели  $\mu \approx -1$ .

Аналогичное условие должно выполняться в так называемых амортизирующих подвесках, предназначенных, напри-

\*) Обобщенные понятия коэффициента динамичности на различные случаи зависимости амплитуды возмущения от частоты даны в статье А. Н. Обморшева «О коэффициенте динамичности», Научные доклады Высшей школы. Серия «Машиностроение и приборостроение», 1958, № 1, стр. 183—188.

мер, для установки двигателей, которые не должны оказывать вибрирующего действия на основание. Амортизирующие подвески применяют также для установки приборов с целью предохранения их от внешних сотрясений. В акселерометрах — приборах для регистрации ускорений, напротив  $z$  будет малым, так что  $1 - z^2 \approx 1$  и  $\alpha^* \approx fz^2$ , т. е. пропорционально ускорению, которое при гармоническом возмущении пропорционально квадрату возмущающей частоты, а следовательно, и  $z^2$ .

В заключение следует отметить, что все вышеприведенные расчеты были выполнены для гармонического возмущения или для первой гармоники произвольного периодического возмущения. Однако эти расчеты остаются в силе и для произвольной гармоники. Только в этом случае всюду вместо  $z$  следует ставить  $sz$ , где  $s$  — порядок гармоники.

**Пример 1.** Индикатор паровой машины (рис. 47). Индикатор состоит из цилиндра  $S$ , в котором перемещается поршень  $M$  со стержнем  $AM$ , поршень удерживается пружиной  $D$ . За начало координат примем точку  $O$ ,

т. е. положение равновесия поршня индикатора при отсутствии возмущающей силы,  $f$  — статистическое удлинение пружины. Рассмотрим момент времени, когда поршень индикатора движется вверх. Дифференциальное уравнение движения последнего имеет вид

$$m\ddot{x} = Q - Q_1 - Q_2 - P,$$

где  $P$  — вес поршня,  $Q_1 = c(x - f)$  — сила упругости;  $Q_2 = b\dot{x}$  — сила сопротивления;  $Q = m\psi(t)$  — сила давления пара. Так как в положении равновесия  $cf = P$ , то после обычных преобразований получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \psi(t),$$

где

$$\psi(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{s=1}^{\infty} \sin(s\omega t + \delta_s).$$

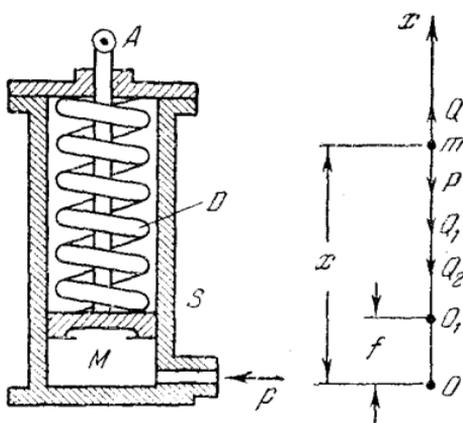


Рис 47.

Считая, что сопротивление мало, и ограничиваясь конечным числом членов, получим закон движения в следующей форме:

$$x = ae^{-nt} \sin(\omega t + \beta) + \frac{a_0}{2k^2} + \sum_{s=1}^N \alpha_s^* \sin(\omega t + \delta_s - \varepsilon_s).$$

Вследствие затухания первым членом справа можно пренебречь, так как он с течением времени стремится к нулю. Второй член определяет смещение центра колебаний и зависит от величины среднего давления пара. Из членов, стоящих под знаком суммы, наибольшее значение имеет первый член, определяющий первую гармонику. Последующие члены суммы обычно быстро убывают.

Выясним, каким условиям должны удовлетворять параметры индикатора, чтобы первая гармоника давления пара была достаточно точно записана. На основании формул (2.123), (2.128) и (2.130) соответствующее частное решение имеет вид

$$x_1^* = \lambda_1 \frac{H_1}{c} \sin(\omega t + \delta_1 - \varepsilon_1),$$

где  $\lambda_1 = \lambda$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  определяются по формулам (2.128) и (2.129). Очевидно, для корректной записи колебаний давления  $\lambda_1$  должно быть близким к единице, а  $\varepsilon_1$  — к нулю. Обоим этим условиям мы удовлетворим, если возьмем  $z$  достаточно малым ( $z \approx 0$ ). Для этого нужно, чтобы было  $k \gg \omega$ , т. е. чтобы собственная частота колебаний индикатора была много больше основной регистрируемой частоты. Следовательно, пружина должна быть достаточно жесткой. В этом случае

$$x_1^* \approx \frac{H_1}{c} \sin(\omega t + \delta_1).$$

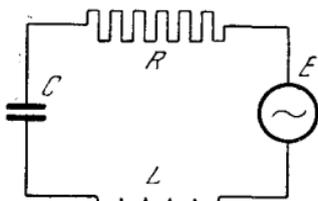


Рис. 48.

Конечно, в действительности дело обстоит сложнее, так как, во-первых, несмотря на убывание ряда коэффициентов Фурье, может оказать влияние какая-либо гармоника высшего порядка, для которой  $\omega$  близко к  $k$ , а во-вторых, играют роль также и собственные колебания поршня хотя они и затухают.

**Пример 2.** Электрический контур с генератором переменного тока (рис. 48).

Если  $E = E_0 \sin \omega t$  есть электродвижущая сила генератора, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , то, очевидно, уравнение тока в рассматриваемом контуре будет иметь вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E_0 \sin \omega t,$$

где все обозначения уже известны (стр. 42).

Дифференцируя обе части этого уравнения по времени, получаем

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E_0 \omega \cos \omega t$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2n \frac{di}{dt} + k^2 i = h \sin(\omega t + \delta),$$

где

$$2n = \frac{R}{L}, \quad k^2 = \frac{1}{LC}, \quad h = \frac{E_0 \omega}{L}, \quad \delta = \frac{\pi}{2}.$$

Для вынужденных колебаний тока решение очевидно. Оно найдется по уравнениям (2.123) и (2.125)

$$i^* = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + \epsilon),$$

где

$$\epsilon = \operatorname{arctg} \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}.$$

Мы получили уравнение переменного тока, написанное в таком виде, как это принято в электротехнике.

## § 11. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКОНЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

При всем большом практическом значении периодического возмущения, действующего на колебательную систему, дело им не ограничивается, и можно указать случаи, когда возмущающая сила не является периодической. Например, действие морского прилива на какое-либо береговое сооружение суммируется из действий волн различных периодов, вообще не соизмеримых между собой, и поэтому мареограф — прибор для регистрации уровня воды в море дает непериодическую кривую. Вследствие этого представляет интерес рассмотреть случай произвольной возмущающей силы. Это тем более важно, что изложенный выше анализ движения с помощью рядов Фурье перестает быть эффективным даже при периодическом возмущении, если сила изменяется достаточно резко, как, например, на рис. 49. В этом случае коэффициенты



Рис. 49.

Фурье образуют медленно сходящийся ряд, и метод становится громоздким. В таком случае предпочтительнее пользоваться известным из курса дифференциальных уравнений [24] методом вариации произвольных постоянных. Мы рассмотрим три случая.

### А. Сопротивление отсутствует

Решение уравнения (2.87)

$$\ddot{q} + k^2 q = \psi(t),$$

где  $\psi(t)$  — произвольная функция времени, может быть записано в том виде, что и решение однородного уравнения, именно:

$$q = K_1 \cos kt + K_2 \sin kt. \quad (2.139)$$

Однако здесь уже  $K_1$  и  $K_2$  не постоянные, а некоторые функции времени, которые должны быть так подобраны, чтобы удовлетворить данному уравнению. Дифференцируя (2.139), имеем

$$\dot{q} = \dot{K}_1 \cos kt + \dot{K}_2 \sin kt + k(-K_1 \sin kt + K_2 \cos kt).$$

Так как мы ввели две неизвестные функции  $K_1$  и  $K_2$ , то можно связать их некоторым условием. Положим

$$\dot{K}_1 \cos kt + \dot{K}_2 \sin kt = 0. \quad (a)$$

При таком условии выражение для  $\dot{q}$  будет иметь такой же вид, как и в случае постоянных  $K_1$  и  $K_2$ . Тогда

$$\ddot{q} = k(-\dot{K}_1 \sin kt + \dot{K}_2 \cos kt) - k^2(K_1 \cos kt + K_2 \sin kt)$$

и подстановка в уравнение (2.87) дает

$$-\dot{K}_1 \sin kt + \dot{K}_2 \cos kt = \frac{1}{k} \psi(t). \quad (б)$$

Решая совместно уравнения (a) и (б) относительно  $\dot{K}_1$  и  $\dot{K}_2$ , имеем

$$\dot{K}_1 = -\frac{1}{k} \psi(t) \sin kt, \quad \dot{K}_2 = \frac{1}{k} \psi(t) \cos kt,$$

откуда интегрированием находим

$$K_1 = C_1 - \frac{1}{k} \int_0^t \psi(u) \sin ku \, du,$$

$$K_2 = C_2 + \frac{1}{k} \int_0^t \psi(u) \cos ku \, du,$$

где переменная интегрирования обозначена через  $u$ .

Подставляя  $K_1$  и  $K_2$  в (2.139) и внося под этот интеграл  $\cos kt$  и  $\sin kt$ , после простых преобразований получим

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{k} \int_0^t \psi(u) \sin k(t-u) \, du, \quad (2.140)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий и совершенно не зависящие от возмущающей силы. В самом деле, при  $t=0$  интеграл в формуле (2.140) обращается в нуль так же, как и его производная по  $t$ . Заметим, что этот интеграл вообще не является периодической функцией времени, даже в предположении периодичности  $\psi(t)$ .

## Б. Малое сопротивление

Обратимся теперь к уравнению (2.122):

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \psi(t),$$

в котором положим  $n < k$ . Представим решение этого уравнения в форме:

$$q = e^{-nt} (K_1 \cos vt + K_2 \sin vt), \quad (2.141)$$

считая  $K_1$  и  $K_2$  функциями времени; здесь

$$v = \sqrt{k^2 - n^2}.$$

Образую производную от (2.141)

$$\dot{q} = e^{-nt} [(K_1 \dot{\phantom{K}}_1 \cos vt + K_2 \dot{\phantom{K}}_2 \sin vt) - n(K_1 \cos vt + K_2 \sin vt) - v(K_1 \sin vt - K_2 \cos vt)],$$

и функции  $K_1$  и  $K_2$  подчиним условию, аналогичному (а)

$$\dot{K}_1 \cos vt + \dot{K}_2 \sin vt = 0.$$

Находя, далее,  $\ddot{q}$  и подставляя значения  $q$ ,  $\dot{q}$  и  $\ddot{q}$  в уравнение (2.122), после упрощений получим

$$- \dot{K}_1 \sin vt + \dot{K}_2 \cos vt = \frac{1}{v} e^{nt} \psi(t).$$

Решая два последних уравнения относительно  $\dot{K}_1$  и  $\dot{K}_2$ , после интегрирования находим

$$K_1 = C_1 - \frac{1}{v} \int_0^t e^{nu} \psi(u) \sin vu \, du,$$

$$K_2 = C_2 + \frac{1}{v} \int_0^t e^{nu} \psi(u) \cos vu \, du,$$

где  $u$  — переменная интегрирования, а  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. Подставляя эти значения в выражение для  $q$  (2.141) и производя простые тригонометрические преобразования, приходим к окончательной форме решения:

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos vt + C_2 \sin vt) + \frac{1}{v} \int_0^t e^{-n(t-u)} \psi(u) \sin v(t-u) \, du. \quad (2.142)$$

Нетрудно видеть, что при  $n = 0$ ,  $v = k$ , и мы приходим к решению (2.140).

## В. Большое сопротивление

Полагая теперь в уравнении (2.122)  $n > k$ , запишем решение с помощью гиперболических функций

$$q = e^{-nt} (K_1 \operatorname{ch} kt + K_2 \operatorname{sh} kt), \quad (2.143)$$

где  $K_1$ ,  $K_2$  — функции времени и

$$k = \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Дифференцируя (2.143) по времени, имеем

$$\dot{q} = e^{-nt} [(K_1 \dot{\text{ch}} \kappa t + K_2 \dot{\text{sh}} \kappa t) - \\ - n(K_1 \text{ch} \kappa t + K_2 \text{sh} \kappa t) + \kappa (K_1 \text{sh} \kappa t + K_2 \text{ch} \kappa t)].$$

Подчиняя функции  $K_1$  и  $K_2$  условию (а)

$$\dot{K}_1 \text{ch} \kappa t + \dot{K}_2 \text{sh} \kappa t = 0,$$

из уравнения (2.122), после подстановки  $q$ ,  $\dot{q}$ ,  $\ddot{q}$  находим

$$\dot{K}_1 \text{sh} \kappa t + \dot{K}_2 \text{ch} \kappa t = \frac{1}{\kappa} e^{nt} \psi(t).$$

Решая последние два уравнения относительно  $\dot{K}_1$  и  $\dot{K}_2$  и интегрируя полученные равенства, получаем

$$K_1 = C_1 - \frac{1}{\kappa} \int_0^t e^{nu} \psi(u) \text{sh} \kappa u \, du,$$

$$K_2 = C_2 + \frac{1}{\kappa} \int_0^t e^{nu} \psi(u) \text{ch} \kappa u \, du,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Подстановка в формулу для  $q$  (2.143) дает нам окончательную форму решения

$$q = e^{-nt} (C_1 \text{ch} \kappa t + C_2 \text{sh} \kappa t) + \\ + \frac{1}{\kappa} \int_0^t e^{-n(t-u)} \psi(u) \text{sh} \kappa (t-u) \, du. \quad (2.144)$$

**Пример 1.** Исследовать действие гармонического возмущения на систему без сопротивления. Пусть

$$\psi(t) = h \sin \omega t$$

и в начальный момент времени  $t = 0$

$$q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0.$$

Из выражения (2.140) легко найти, что

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{k}.$$

Для вычисления интеграла от функции  $\sin \omega u \sin k(t-u)$  выполним тригонометрическое преобразование

$$\begin{aligned} \sin \omega u \sin k(t-u) &= \sin \omega u (\sin kt \cos ku - \cos kt \sin ku) = \\ &= \frac{1}{2} \{ \sin kt [\sin(\omega+k)u + \sin(\omega-k)u] - \\ &\quad - \cos kt [\cos(\omega-k)u - \cos(\omega+k)u] \}. \end{aligned}$$

Если  $\omega \neq k$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin \omega u \sin k(t-u) du &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \sin kt \left[ -\frac{\cos(\omega+k)u}{\omega+k} - \frac{\cos(\omega-k)u}{\omega-k} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \cos kt \left[ \frac{\sin(\omega-k)u}{\omega-k} - \frac{\sin(\omega+k)u}{\omega+k} \right] \right\} du. \end{aligned}$$

Отбрасывая свободные колебания и выполняя преобразования, находим известное решение

$$q = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right).$$

Допустим теперь, что  $\omega = k$ , т. е. имеем случай резонанса. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin \omega u \sin \omega(t-u) du &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \sin \omega t \left[ -\frac{\cos 2\omega u}{2\omega} \right] - \cos \omega t \left[ u - \frac{\sin 2\omega u}{2\omega} \right] \right\} du \end{aligned}$$

или

$$q = \frac{h}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{ht}{2\omega} \cos \omega t,$$

т. е. имеем также известное решение (см. формулу (2.107) на стр. 70).

**Пример 2.** К системе, обладающей линейным сопротивлением, в момент  $t=0$  прикладывается постоянная сила, которая снимается в момент  $t=t_1$ . Найти движение системы.

Имеем

$$\begin{aligned} \psi &= h \quad \text{при } 0 < t < t_1, \\ \psi &= 0 \quad \text{при } t > t_1. \end{aligned}$$

Допустим сначала, что сопротивление мало ( $n < k$ ). В первом интервале  $\psi(u) = h$  и тогда, согласно формуле (2.142), отбрасывая члены с  $C_1$  и  $C_2$ , имеем

$$q = \frac{h}{v} \int_0^t e^{-n(t-u)} \sin v(t-u) du.$$

Положим  $t - u = z$ . Тогда

$$\int_0^t e^{-n(t-u)} \sin(t-u) du = \int_0^t e^{-nz} \sin vz dz = \\ = \int_0^t \frac{e^{-nz} (-n \sin vz - v \cos vz)}{n^2 + v^2}. \quad (B)$$

Имея в виду, что  $v^2 = k^2 - n^2$ , после вычислений, находим

$$q = \frac{h}{vk^2} [v - e^{-nt} (v \cos vt + n \sin vt)].$$

При  $t > t_1$  интервал интегрирования в (2.142) разбивается на две части: от 0 до  $t_1$  и от  $t_1$  до  $t$ , во втором интервале  $\psi(t) = 0$ . Тогда предыдущие вычисления надо изменить лишь в том смысле, что интегрирование по  $t$  надо вести в пределах от 0 до  $t - t_1$ , а по  $z$  — от  $t - t_1$  до  $t$ . Делая соответствующие изменения в подстановке, находим

$$q = \frac{h}{vk^2} \{ e^{-n(t-t_1)} [v \cos v(t-t_1) + n \sin v(t-t_1)] - \\ - e^{-nt} (v \cos vt + n \sin vt) \}$$

При отсутствии сопротивления ( $n = 0$ ,  $v = k$ ) получим простые выражения

при  $0 < t < t_1$ :

$$q = \frac{h}{k^2} (1 - \cos kt),$$

при  $t > t_1$ :

$$q = \frac{h}{k^2} [\cos k(t-t_1) - \cos kt].$$

Допустим теперь, что сопротивление большое:  $n > k$ . Тогда придется обратиться к формуле (2.144). Положим и здесь  $t - u = z$ . Чтобы воспользоваться уже известным результатом (B), вспомним, что

$$\sin iu = i \operatorname{sh} u, \quad \cos iu = \operatorname{ch} u,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . В нашем случае

$$v = \sqrt{k^2 - n^2} = i\kappa.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-nz} \operatorname{sh} \kappa z \, dz &= i \int_0^t e^{-nz} \sin \nu z \, dz = \\ &= i \int_0^t \frac{e^{-nz} (-n \sin \nu z - \nu \cos \nu z)}{n^2 + \nu^2} dz = \\ &= -\frac{1}{k^2} \int_0^t e^{-nz} (\kappa \operatorname{ch} \kappa z + n \operatorname{sh} \kappa z) dz. \end{aligned}$$

Выполняя подстановку, имеем при  $0 < t < t_1$ :

$$q = \frac{h}{\kappa k^2} [\kappa - e^{-nt} (\kappa \operatorname{ch} \kappa t + n \operatorname{sh} \kappa t)]$$

и при  $t > t_1$ :

$$\begin{aligned} q = \frac{h}{\kappa k^2} \{ e^{-n(t-t_1)} [\kappa \operatorname{ch} \kappa (t-t_1) + n \operatorname{sh} \kappa (t-t_1)] - \\ - e^{-nt} (\kappa \operatorname{ch} \kappa t + n \operatorname{sh} \kappa t) \}. \end{aligned}$$

Г Л А В А П

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ  
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

**§ 1. КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ**

В зависимости от характера вопроса и свойств системы бывает допустима консервативная идеализация: изменением энергии колебательной системы можно пренебречь при не слишком большом интервале времени рассмотрения ее поведения. Такая аппроксимация удобна в смысле большей простоты исследования колебаний при одновременной возможности более глубоко подойти к ряду других вопросов. Кроме того, идеализированные консервативные системы часто оказываются по своим свойствам близкими к упоминавшимся выше автоколебательным системам, о которых подробнее будет идти речь в дальнейшем.

Поскольку консервативные системы характеризуются постоянством энергии, имеем

$$T + \Pi = \text{const.} \quad (3.1)$$

Кинетическая энергия  $T$  определяется первой из формул (2.2), т. е.

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2,$$

а потенциальная энергия в общем случае есть некоторая функция обобщенной координаты:

$$\Pi = \Pi(q).$$

Для большей общности мы можем считать коэффициент инерции  $a$  также зависящим от координаты  $q$  (например, приведенная масса или момент инерции кривошипно-шатунного механизма зависят от угла поворота вала машины).

Дифференцируя по времени уравнение энергии (3.1), легко найдем

$$\ddot{q} = f(q), \quad (3.2)$$

где

$$f(q) = -\frac{1}{a} \Pi'(q). \quad (3.3)$$

Для исследования движения, определяемого уравнением (3.2), мы можем либо заменить это уравнение двумя уравнениями первого порядка путем введения фазовых координат  $x$ ,  $y$ , либо выполнить непосредственную интеграцию хотя бы приближенным методом. При этом можно воспользоваться интегралом энергии.

### А. Качественное исследование

Исследуем движение нелинейной консервативной системы с помощью фазовой плоскости. Полагая  $q = x$ ,  $\dot{q} = y$ , имеем

$$\frac{dy}{dt} = f(x), \quad \frac{dx}{dt} = y,$$

откуда

$$y \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Интегрируя, естественно, получаем интеграл энергии:

$$y^2 + F(x) = h, \quad (3.4)$$

где  $h$  — постоянная интеграции, зависящая от начальных условий, а

$$F(x) = -2 \int f(x) dx = +\frac{2}{a} \Pi(x), \quad (3.5)$$

т. е. представляет собой функцию, пропорциональную потенциальной энергии.

Интегральные кривые, выражаемые уравнением (3.4), симметричны относительно оси  $x$ . Однако соответствующие движения не всегда осуществимы. В самом деле, так как

$$y = \pm \sqrt{h - F(x)}, \quad (3.6)$$

то для возможности движения должно быть  $h > F(x)$ .

Отсюда можно найти особые точки, в которых одновременно

$$F'(x) = -2f(x) = 0, \quad y = 0.$$

Обратимся к вопросу об исследовании фазовых траекторий в непосредственной близости к особой точке. Для большей общности рассуждений не будем стеснять себя требованием консервативности системы, которую предположим лишь автономной. Тогда движение будет описываться уравнением (2.5):

$$\ddot{q} = \varphi(q, \dot{q}),$$

или уравнениями (2.6)

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Выделим линейные части в выражениях  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ :

$$\left. \begin{aligned} P(x, y) &= ax + by + P_1(x, y), \\ Q(x, y) &= cx + dy + Q_1(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

тогда, исключая время  $t$ , получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy + Q_1(x, y)}{ax + by + P_1(x, y)}. \quad (3.8)$$

Допустим (и это обычно имеет место), что нелинейные функции  $P_1(x, y)$ ,  $Q_1(x, y)$  разложимы в степенные ряды в окрестности какого-либо положения равновесия. В этом случае, если коэффициенты  $a$  и  $b$ , а также  $c$  и  $d$  одновременно не равны нулю, то в малой окрестности соответствующей точки структура интегральных кривых такая же, как и для линейной системы, в которой  $P_1 = Q_1 = 0$ . В таком случае говорят, что *топологическая структура* малой окрестности особой точки для обеих систем одинаковая и особые точки для нелинейных систем те же, что и для линейных. Искажение же этой структуры наступает при достаточно большом удалении от особой точки.

Более сложный случай имеет место, если разложение  $P(x, y)$  или  $Q(x, y)$  начинается с нелинейных членов. Тогда могут появляться особые точки, не известные из линейной теории, как, например, точка возврата\*). При исследовании механических колебаний обычно  $P(x, y) = y$  и тогда усложнение может внести лишь функция  $Q_1(x, y)$ .

\*) Этот вопрос подробно рассмотрен в книге [27].

На основании сказанного представляет интерес изучение топологической структуры значительной области фазовой плоскости — иногда даже всей плоскости. Это удобно сделать с помощью функции энергии  $F(x)$  [равенство (3.5)]. Построим для некоторой системы кривую энергии  $z = F(x)$  (рис. 50, а) и фазовую диаграмму (рис. 50, б). На первой

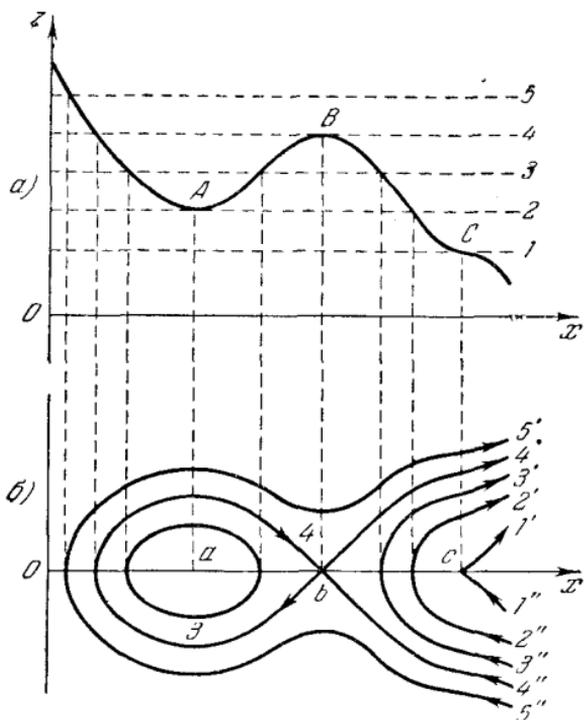


Рис. 50.

из них проведены горизонтали, соответствующие различным значениям постоянной  $h$ . Кривая энергии имеет точку минимума  $A$ , точку максимума  $B$  и точку перегиба  $C$ . Минимуму энергии соответствует на фазовой диаграмме особая точка  $a$  — центр, максимуму — особая точка  $b$  — седло; наконец, точке перегиба соответствует особая точка  $c$  — точка возврата, не встречающаяся в теории линейных систем. Цифрами обозначены интегральные кривые, каждая из которых состоит из одной (2, 3, 5) или нескольких фазовых траекторий (1 и 4). Интегральные кривые, проходящие через особые точки, называются *сепаратрисами* или *разделяющими*, поскольку

они делят фазовую плоскость на области, в которых структура фазовых траекторий вообще различна. На рис. 50 сепаратрисой является кривая  $4'' - 4 - 4'$ .

Движение называется *вибрационным* или *либрационным*, если соответствующая фазовая траектория, не имея в себе особых точек, замкнута вокруг центра (кривая 3). В этом случае имеем незатухающие колебания. Движение называется *ротационным*, если фазовая траектория является периодической относительно  $x$  кривой. Движение называется *лимитационным*, если изображающая точка асимптотически стремится к особой точке. Такова, например, на рис. 50 ветвь траектории 4, лежащая слева, а также справа снизу от седла  $b$ , и, кроме того, нижняя часть кривой 1, т. е.  $1''$ . Движение называется *инфинитным* или *убегающим*, если изображающая точка уходит в бесконечность (например, верхняя правая ветвь кривой 4, т. е.  $4'$ , или кривой 1, т. е.  $1'$ , а также кривая 5).

Поскольку сепаратрисы разделяют области различной топологической структуры, знание их существенно, если необходимо исследовать движение в конечной части фазовой плоскости.

Пример. Маятник (рис. 51). Положив в дифференциальном уравнении движения маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad x = \varphi, \quad y = \dot{\varphi},$$

получим

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x, \quad \frac{dx}{dt} = y.$$

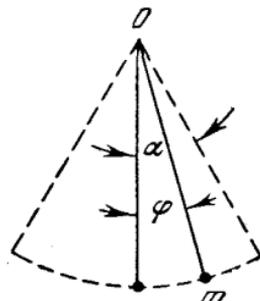


Рис. 51.

Разложив синус в ряд в окрестности положения равновесия  $\varphi = 0$ , найдем

$$Q = -\frac{g}{l} x + \frac{1}{6} \frac{g}{l} x^3 - \frac{1}{120} \frac{g}{l} x^5 + \dots$$

Следовательно, в этом случае [см. выражение (3.7)]

$$a = 0, \quad b = 1, \quad P_1(x, y) = 0,$$

$$c = -\frac{g}{l}, \quad d = 0, \quad Q_1(x, y) = \frac{1}{6} \frac{g}{l} x^3 - \frac{1}{120} \frac{g}{l} x^5 + \dots$$

Интегрирование уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{l} \frac{\sin x}{y}$$

дает

$$y^2 = \frac{2g}{l} \cos x + h.$$

На рис. 52 представлена фазовая диаграмма движения. Мы видим, что могут иметь место: 1) либрационные движения (1, 1', 1'', 2, 2' и 2'') — колебания маятника около положения равновесия;

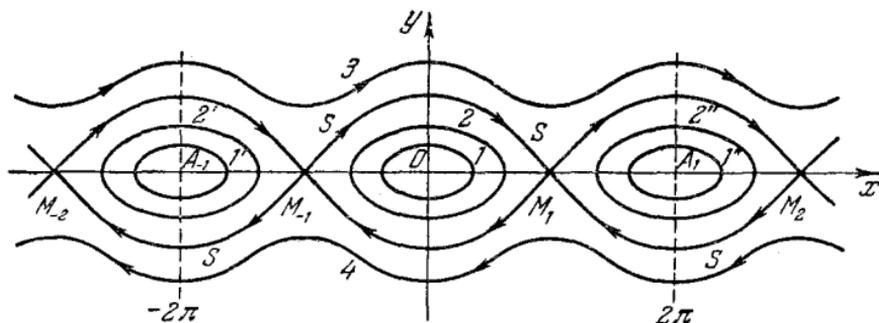


Рис. 52.

2) ротационные движения (3 и 4), возникающие при сообщении маятнику достаточно большой угловой скорости в ту или другую сторону. Кривая  $S$  является сепаратрисой с седлами  $M_1, M_2, \dots$ . Какая-либо ветвь сепаратрисы есть фазовая траектория движения с такой начальной угловой скоростью, при которой маятник асимптотически приближается к своему вертикальному обращенному положению, не переходя через него. Тот или иной случай зависит от значения  $h$ , т. е. от начальных условий.

Положения устойчивого равновесия определяются точками  $O, A, A_1, \dots$ ; это — особые точки типа центра. Очевидно, что в реальной модели эти точки совпадают, и мы имеем два положения равновесия:  $O$  — устойчивое,  $M$  — неустойчивое.

## Б. Количественное исследование

Рассмотрим сначала возможность получения точного решения уравнения (3.2). Первый интеграл его очевиден; это есть интеграл энергии, определяемый уравнением (3.1) или (3.4). Последнее уравнение, если перейти к обобщенной координате, можно представить в виде

$$\dot{q} = \pm \sqrt{h - F(q)}.$$

Колебания возможны лишь тогда, когда подкоренное выражение для некоторых значений  $q$ , и притом более чем для одного, обращается в нуль. Знак выбирается в соответствии с начальными условиями. Итак, имеем

$$t = \pm \int \frac{dq}{\sqrt{h - F(q)}}. \quad (3.9)$$

Корни функции

$$\tilde{F}(q) = h - F(q) \quad (3.10)$$

соответствуют точкам пересечения фазовой траектории с осью  $x$ . Пусть эти корни (предположим их простыми) будут  $q_1$  и  $q_2$ . Каждой величине  $q_1$  или  $q_2$  соответствует мгновенная остановка системы. В то время как получение  $q$  из уравнения (3.9), т. е. нахождение закона движения, в общем случае представляет значительные трудности, нахождение периода колебаний несравненно проще. Предположив, что  $q_1 < q_2$ , получим период, если возьмем интеграл в уравнении (3.9) со знаком плюс в пределах от  $q_1$  до  $q_2$  и прибавим к нему интеграл со знаком минус в пределах от  $q_2$  до  $q_1$ . Очевидно, имеем

$$\tau = 2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{\tilde{F}(q)}}. \quad (3.11)$$

Практически часто бывает, что движение симметрично относительно начала. Полагая тогда в формуле (3.11)  $q_2 = +q_0$ ,  $q_1 = -q_0$ , приходим к наиболее употребительному выражению периода

$$\tau = 4 \int_0^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{\tilde{F}(q)}}. \quad (3.12)$$

Если функция  $\tilde{F}(q)$ , не имея вещественных корней, является функцией периодической относительно  $q$  с некоторым периодом  $2\Omega$ , т. е.

$$\tilde{F}(q + 2\Omega) = \tilde{F}(q), \quad (3.13)$$

то имеем ротационное движение с периодом

$$\tau = \int_{-\Omega}^{+\Omega} \frac{dq}{\sqrt{\tilde{F}(q)}}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим определение периода по формуле (3.11) в том случае, когда разложение потенциальной энергии в ряд начинается с членов выше второго порядка малости:

$$\Pi(q) = c_1 q^3 + c_2 q^4 + c_3 q^5 + \dots, \quad (3.15)$$

где

$$c_j = \frac{1}{(j+2)!} \left( \frac{\partial^{j+2} \Pi}{\partial q^{j+2}} \right)_0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Так как в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум, то разложение должно начинаться с четной степени  $q$ . Пусть это будет при  $j = 2s$ . Тогда приближенно можно положить

$$\Pi = c_{2(s-1)} q^{2s}. \quad (3.16)$$

Выберем за начало отсчета времени тот момент, когда  $\dot{q} = 0$ ,  $q = q_0 > 0$ . Тогда, согласно равенствам (3.5) и (3.10), имеем

$$\tilde{F}(q) = \frac{2c_{2(s-1)}}{a} (q_0^{2s} - q^{2s}).$$

Вследствие четности функции  $\Pi(q)$  можно воспользоваться для периода упрощенной формулой (3.12), которая теперь принимает вид

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{a}{2c_{2(s-1)}}} \int_0^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{q_0^{2s} - q^{2s}}}.$$

Переходя к безразмерной переменной интегрирования

$$z = \frac{q}{q_0}, \quad (3.17)$$

получаем

$$\tau = \frac{4}{q_0^{s-1}} \sqrt{\frac{a}{2c_{2(s-1)}}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{2s}}}. \quad (3.18)$$

При  $s = 1$  имеем элементарный случай линейной системы:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = [\arcsin z]_0^1 = \frac{\pi}{2}; \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{a}{2c_0}}.$$

Полученная формула совпадет с уже известной, если положить  $2c_0 = c$ . При  $s = 2$  получается эллиптический интеграл. В общем случае положим

$$z^{2s} = x.$$

Тогда

$$dz = \frac{1}{2s} x^{\frac{1}{2s}-1} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^{2s}}} = \frac{1}{2s} \int_0^1 x^{\frac{1}{2s}-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Входящий сюда интеграл есть так называемая бэта-функция Эйлера, общий вид которой

$$B(p, q) = B(q, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (3.19)$$

Бэта-функция выражается через гамма-функции Эйлера следующим образом:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (3.20)$$

где

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx. \quad (3.21)$$

Отметим лишь некоторые свойства этих функций, известные из их теории, а именно:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p); \quad \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Используя эти соотношения, придадим формуле для периода (3.18) следующий вид:

$$\tau = \frac{1}{q_0^{s-1}} \sqrt{\frac{a}{c_{2(s-1)}}} I(s), \quad (3.22)$$

где

$$I(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2s}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\right)}. \quad (3.23)$$

Укажем значения  $I(s)$  для некоторых  $s$ :

$s$	1	2	3	4
$I(s)$	4,44	3,70	3,43	3,28

Располагая таблицами гамма-функций, по формулам (3.22) и (3.23) легко находим период для любого значения  $s$ .

Как уже указывалось, нахождение конечного уравнения, точно выражающего закон движения, весьма затруднительно и в элементарных функциях обычно невыполнимо.

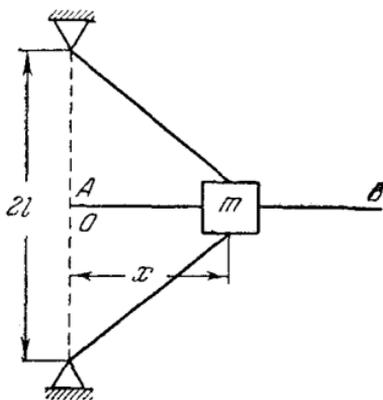


Рис. 53.

Пример. Горизонтальные колебания груза, связанного двумя проволоками (рис. 53). Пусть  $S$  — начальная растягивающая сила в проволоке,  $F$  — площадь ее поперечного сечения,  $E$  — модуль упругости,  $2l$  — начальная длина. Тогда относительное удлинение проволоки при отклонении груза массы  $m$  от его среднего положения на величину  $x$  будет равно

$$\frac{\sqrt{l^2 + x^2} - l}{l} \approx \frac{x^2}{2l^2}.$$

Усилие в проволоке определится как сумма

$$S + EF \frac{x^2}{2l^2},$$

и полная горизонтальная восстанавливающая сила будет равна

$$\left( S + EF \frac{x^2}{2l^2} \right) \frac{2x}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx \frac{2S}{l} x + \frac{EF}{l^3} x^3.$$

Соответствующая потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{S}{l} x^2 + \frac{EF}{4l^3} x^4.$$

Если предварительное натяжение  $S$  очень велико, то можно пренебречь вторым членом, и задача сводится к линейной. Наоборот, при очень малом  $S$  или его отсутствии по формулам (3.16) и (3.22) имеем

$$\tilde{F}(x) = \frac{EF}{2ml^3} (x_0^4 - x^4),$$

$$\tau = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{4ml^3}{EF}} I(2) = \frac{7,42}{x_0} \sqrt{\frac{ml^3}{EF}}.$$

## В. Метод Линдстедта <sup>1)</sup>

Как уже указывалось выше, точное решение задачи о нелинейных колебаниях консервативной системы в элементарных функциях в общем виде невыполнимо, даже если ограничиться отысканием периода. Поэтому рассмотрим приближенное решение задачи с помощью так называемого метода малого параметра, применимого к системам, мало отличающихся от линейных.

Метод малого параметра возник в начале прошлого столетия в применении к задачам небесной механики. В настоящее время этот метод известен в различных вариантах, имеющих между собой то общее, что искомое решение представляется в виде ряда, расположенного по степеням малого параметра. В задачах о колебаниях нелинейных систем очень удобен вариант этого метода, называемого методом Линдстедта. Рассмотрим его подробнее.

В дифференциальное уравнение движения

$$a\ddot{q} + \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = 0$$

подставим разложение потенциальной энергии (3.15), дополненное квадратичным членом

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2 + c_1q^3 + c_2q^4 + \dots \quad (3.24)$$

Вспоминая формулу (2.10)

$$k^2 = \frac{c}{a}$$

и вводя для сокращения записи обозначения

$$\gamma_1 = \frac{3c_1}{c}, \quad \gamma_2 = \frac{4c_2}{c}, \quad \dots, \quad \gamma_j = \frac{(j+2)c_j}{c}, \quad \dots, \quad (3.25)$$

имеем

$$\ddot{q} + k^2q + f(q) = 0. \quad (3.26)$$

Здесь функция

$$f(q) = k^2(\gamma_1q^2 + \gamma_2q^3 + \gamma_3q^4 + \dots) \quad (3.27)$$

характеризует собой отклонение системы от линейной. Будем считать, что величины  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  достаточно малые, вследствие чего указанное отклонение также мало, особенно

<sup>1)</sup> См., например, книгу [5].

при малых значениях координаты  $q$ . Тогда, очевидно, период колебаний также будет мало отличаться от соответствующего периода линейных колебаний, когда

$$f(q) = 0.$$

Допустим, что начальные условия имеют вид

$$t = 0; \quad q = q_0 = \beta; \quad \dot{q} = \dot{q}_0 = 0,$$

где  $\beta$  — малая величина, степени которой быстро убывают. Это и есть тот «малый параметр», по степеням которого производится разложение решения. Для дальнейшего удобно ввести «безразмерное время»  $\vartheta$  по формуле

$$\vartheta = kt \sqrt{1 + \mu}, \quad (3.28)$$

где  $\mu$  представляется в виде ряда

$$\mu = \beta\mu_1 + \beta^2\mu_2 + \beta^3\mu_3 + \dots \quad (3.29)$$

с неизвестными пока постоянными  $\mu_1, \mu_2, \dots$

Решение ищем в виде ряда

$$q(\vartheta) = \beta q_1(\vartheta) + \beta^2 q_2(\vartheta) + \beta^3 q_3(\vartheta) + \dots, \quad (3.30)$$

где  $q_1(\vartheta), q_2(\vartheta), \dots$  — неизвестные функции. Если условиться точкой обозначать производную по времени  $t$ , а штрихом — по «безразмерному времени»  $\vartheta$ , то имеем

$$\dot{q} = k \sqrt{1 + \mu} q', \quad \ddot{q} = k^2 (1 + \mu) q''.$$

Уравнение (3.26) принимает вид

$$(1 + \mu) q'' + q + \gamma_1 q^2 + \gamma_2 q^3 + \gamma_3 q^4 + \dots = 0.$$

Подставляя сюда разложения (3.29) и (3.30) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\beta$ , получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} q_1'' + q_1 &= 0, \\ q_2'' + q_2 &= -\mu_1 q_1'' - \gamma_1 q_1^2, \\ q_3'' + q_3 &= -\mu_2 q_1'' - \mu_1 q_2'' - 2\gamma_1 q_1 q_2 - \gamma_2 q_1^3, \\ q_4'' + q_4 &= -\mu_3 q_1'' - \mu_2 q_2'' - \mu_1 q_3'' - \gamma_1 q_2^2 - \\ &\quad - 2\gamma_1 q_1 q_3 - 3\gamma_2 q_1^2 q_2 - \gamma_3 q_1^4, \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Очевидно, что эти уравнения можно интегрировать последовательно. Начальные условия для них имеют вид

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 1, & q_2(0) &= q_3(0) = \dots = 0, \\ q_1'(0) &= 0, & q_2'(0) &= q_3'(0) = \dots = 0. \end{aligned}$$

Тогда из первого уравнения имеем

$$q_1 = \cos \vartheta.$$

Подстановка во второе уравнение дает

$$q_2'' + q_2 = \mu_1 \cos \vartheta - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_1}{2} \cos 2\vartheta.$$

При интегрировании этого уравнения первый член правой части порождает в решении секулярный, или вековой член  $\frac{1}{2} \mu_1 \vartheta \sin \vartheta$ , неограниченно возрастающий, что, очевидно, находится в противоречии с условием устойчивости системы в положении равновесия, когда  $\Pi(q)$  имеет минимум. Чтобы устранить противоречие, мы должны положить  $\mu_1 = 0$ . Тогда имеем

$$q_2 = -\frac{1}{6} \gamma_1 (3 - 2 \cos \vartheta - \cos 2\vartheta).$$

Переходя к третьему уравнению и выражая произведения и степени синуса и косинуса через функции кратных аргументов, имеем

$$\begin{aligned} q_3'' + q_3 = & -\frac{\gamma_1^2}{3} + \left( \mu_2 + \frac{5}{6} \gamma_1^2 - \frac{3}{4} \gamma_2 \right) \cos \vartheta - \\ & - \frac{1}{3} \gamma_1^2 \cos 2\vartheta - \left( \frac{1}{4} \gamma_2 + \frac{1}{6} \gamma_1^2 \right) \cos 3\vartheta. \end{aligned}$$

Для избежания резонанса следует положить

$$\mu_2 = -\frac{5}{6} \gamma_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_2$$

и тогда

$$\begin{aligned} q_3 = & -\frac{\gamma_1^2}{3} + \left( \frac{29}{144} \gamma_1^2 - \frac{1}{32} \gamma_2 \right) \cos \vartheta + \frac{1}{9} \gamma_1^2 \cos 2\vartheta + \\ & + \left( \frac{1}{48} \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \gamma_2 \right) \cos 3\vartheta \end{aligned}$$

и т. д. Таким образом, решение можно записать в виде тригонометрического ряда:

$$q = \left( -\frac{1}{2} \gamma_1 \beta^2 - \frac{1}{3} \gamma_1^2 \beta^3 + \dots \right) + \\ + \left[ \beta + \frac{1}{3} \gamma_1 \beta^2 + \left( \frac{29}{144} \gamma_1^2 - \frac{1}{32} \gamma_2 \right) \beta^3 + \dots \right] \cos \vartheta + \\ + \left( \frac{1}{6} \gamma_1 \beta^2 + \frac{1}{9} \gamma_1^2 \beta^3 + \dots \right) \cos 2\vartheta + \\ + \left[ \left( \frac{1}{48} \gamma_1^2 + \frac{1}{32} \gamma_2 \right) \beta^3 + \dots \right] \cos 3\vartheta + \dots$$

Период решения по  $\vartheta$  равен  $2\pi$ , тогда как по  $t$  он равен:

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \quad (3.32)$$

или приближенно, если ограничиться членами до  $\beta^2$  включительно:

$$\tau = \frac{2\pi}{k} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{5}{6} \gamma_1^2 - \frac{3}{4} \gamma_2 \right) \beta^2 \right]. \quad (3.33)$$

Эта формула получается разложением в биномиальный ряд дроби  $1/\sqrt{1+\mu}$

$$(1+\mu)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\mu + \dots$$

с удержанием первых двух членов разложения.

**Пример.** Приближенное вычисление периода колебаний маятника. Разлагая синус в ряд, получаем

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \dots \right) = 0.$$

Пользуясь методом Линдстедта, имеем

$$k^2 = \frac{g}{l}, \quad \gamma_1 = \gamma_3 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{6}, \quad \beta = \alpha.$$

Тогда по формуле (3.32) находим

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right).$$

Эта формула дает достаточно точные результаты.

### Г. Точная теория маятника

Круговой маятник (математический или физический), если пренебречь сопротивлением, можно рассматривать как консервативную систему и применить общие точные методы количественного исследования, приводящие к зависимости между перемещением и временем в виде (3.9) и к формуле периода (3.12). В дальнейшем ограничимся лишь отысканием периода. Маятник будем предполагать для простоты математическим; однако выводы останутся в силе и для маятника физического, в котором приведенная длина  $l$  соответствует длине математического маятника.

Приняв за обобщенную координату  $q$  угол отклонения маятника от вертикали  $\varphi$  (рис. 54), найдем

$$\Pi(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi) + \text{const}, \\ a = ml^2,$$

$$F(\varphi) = \frac{2}{a} \Pi(\varphi) = \\ = \frac{2g}{l}(1 - \cos \varphi) + \text{const}.$$

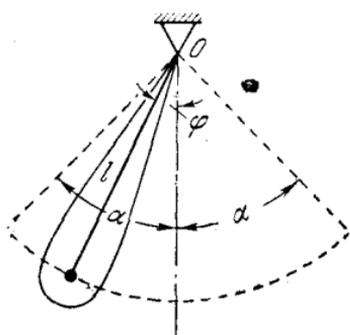


Рис. 54.

Далее, из уравнений (3.10) и (3.12), имея в виду, что

$$\tilde{F}(\varphi) = h + \frac{2g}{l} \cos \varphi = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

получим

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}},$$

где  $\alpha$  — амплитуда колебаний маятника. Выразим косинусы через синусы половинных углов по формулам

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

и, кроме того, положим

$$\sin \frac{\alpha}{2} = k, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \psi,$$

где  $\psi$  — новая переменная. Тогда

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}, \quad d\varphi = \frac{2k \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi,$$

и формула для периода после сокращений принимает вид

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k),$$

где  $K(k)$  есть так называемый полный эллиптический интеграл первого рода в форме Лежандра с модулем  $k$ :

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Этот интеграл легко может быть вычислен путем разложения функции в биномиальный ряд и почленного интегрирования. Итак, имеем:

$$(1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \psi + \dots$$

Если обозначить

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \psi d\psi,$$

интегрированием по частям находим:

$$I_{2n} = -[\sin^{2n-1} \psi \cos \psi]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \psi \cos^2 \psi d\psi$$

или

$$I_{2n} = (2n-1) I_{2n-2} + (2n-1) I_{2n},$$

откуда получаем рекуррентную формулу

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}.$$

Тогда

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2}, \dots$$

и, следовательно:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right], \quad (3.34)$$

что для маятника дает:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]. \quad (3.35)$$

При очень малом угле  $\alpha$ , пренебрегая всеми степенями синуса, получаем приближение, известное из элементарной теории:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Если же положить  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$  и удержать первые два члена, получим достаточное приближение, найденное ранее по методу Линдштедта

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right).$$

## § 2. ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Диссипативные системы характеризуются рассеянием энергии за счет сопротивлений, что при отсутствии поступления энергии извне обуславливает затухание колебательного процесса. Мы рассмотрим здесь две наиболее существенные нелинейные задачи: свободные колебания системы с сухим, или кулоновым трением и свободные колебания с квадратичным сопротивлением. В обоих случаях ограничимся линейной восстанавливающей силой. В заключение рассмотрим графический метод, предложенный французским инженером Льенаром и одинаково эффективный в применении к диссипативным системам и к системам автоколебательным, которым посвящен следующий параграф.

### А. Колебания системы с сухим трением

Рассмотрим движение прикрепленного к пружине груза массой  $m$ , находящегося на шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 55). При движении груза будет возникать сила трения, которую в первом приближении можно считать

независящей от скорости. Пусть  $f$  есть коэффициент трения при движении,  $f_0$  — коэффициент трения при покое, причем  $f_0 \geq f$ .

Составим дифференциальное уравнение движения груза, выбирая за начало координат положение 0 груза при ненапряженной пружине. Тогда

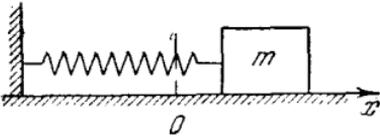


Рис. 55.

$$m\ddot{x} = -cx \pm fmg,$$

где  $c$  — коэффициент жесткости пружины. Знак перед членом  $fmg$ , выражающим силу трения, выбирается в зависимости от направления движения. Двойственность знака обуславливает нелинейность уравнения.

Для удобства записи уравнения движения введем так называемую функцию Кронекера  $\text{sgn}$  (signum — знак):

$$\text{sgn } \dot{x} = \begin{cases} +1, & \text{если } \dot{x} > 0, \\ -1, & \text{» } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Учитывая то обстоятельство, что сила трения направлена всегда противоположно скорости, можно написать:

$$m\ddot{x} + cx = -fmg \text{sgn } \dot{x}.$$

Система с сухим трением есть принципиально нелинейная система. В самом деле, характеристика сухого трения имеет вид, представленный на рисунке 56, где линеаризация,

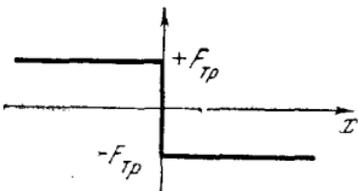


Рис. 56.

т. е. замена ступенчатой характеристики прямой, проходящей через начало координат, явилась бы слишком грубым приближением, могущим сильно исказить картину движения.

При рассмотрении влияния сухого трения на свободные колебания в ряде случаев (например, в гироскопических приборах) имеют дело не с силой трения, а с моментом трения; соответственно вместо перемещения  $x$  вводится угол поворота  $\varphi$ . Поэтому дальнейшие рассуждения будем вести для общего случая свободных колебаний при наличии трения, перейдя к обобщенной координате  $q$  и обобщенной силе трения.

Итак, дифференциальное уравнение колебаний при наличии трения будет иметь вид:

$$a\ddot{q} + cq = -b^* \operatorname{sgn} \dot{q}, \quad (3.36)$$

где  $b^*$  — абсолютная величина обобщенной силы трения при движении.

Разделим обе части уравнения (3.36) на  $a$  и введем обозначения:

$$\frac{c}{a} = k^2; \quad \frac{b^*}{a} = \frac{b^*}{c} \frac{c}{a} = rk^2;$$

где

$$r = \frac{b^*}{c} \quad (3.37)$$

есть отклонение системы от положения равновесия под действием обобщенной силы, равной силе трения при движении. Введем также абсолютную величину обобщенной силы трения при покое  $b_0^*$ . Тогда величина

$$r_0 = \frac{b_0^*}{c} \quad (3.38)$$

будет характеризовать так называемую *область застоя*, т. е. такую область изменения координаты  $q$  по каждую сторону от положения  $q = 0$ , в которой материальная система должна оставаться в покое, если она не имела до этого скорости.

Учитывая принятые обозначения, дифференциальное уравнение движения (3.36) может быть записано так:

$$\ddot{q} + k^2(q + r \operatorname{sgn} \dot{q}) = 0. \quad (3.39)$$

Введем новую переменную величину

$$z = q + r \operatorname{sgn} \dot{q}.$$

Второй член справа представляет собой нелинейную кусочно-непрерывную функцию. Поэтому такое преобразование нужно выполнить отдельно для каждого интервала монотонного изменения координаты. В пределах каждого такого интервала  $\dot{q} = \dot{z}$ ,  $\ddot{q} = \ddot{z}$ , а поэтому уравнение (3.39) принимает вид:

$$\ddot{z} + k^2 z = 0, \quad (3.40)$$

давая решение

$$z = A \cos kt + B \sin kt,$$

вследствие чего

$$q = A \cos kt + B \sin kt - r \operatorname{sgn} \dot{q}. \quad (3.41)$$

Пусть начальные условия таковы:

$$t = t_0 = 0, \quad q = q_0 > 0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0 = 0.$$

Рассмотрим движение на отдельных интервалах (рис. 57).

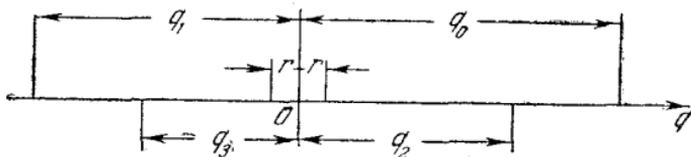


Рис. 57.

Первый интервал движения:  $\dot{q} < 0$ ,  $\operatorname{sgn} \dot{q} = -1$ . Из уравнения (3.41) имеем:

$$q = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + r,$$

$$\dot{q} = k(-A_1 \sin kt + B_1 \cos kt).$$

В соответствии с начальными условиями:

$$A_1 = q_0 - r, \quad B_1 = 0,$$

$$q = (q_0 - r) \cos kt + r.$$

В конце интервала  $\dot{q} = 0$ , а поэтому  $kt_1 = \pi$ , и тогда

$$q_1 = -(q_0 - 2r).$$

Второй интервал движения:  $\dot{q} > 0$ ,  $\operatorname{sgn} \dot{q} = +1$ . Из уравнения (3.41) имеем:

$$q = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt - r,$$

$$\dot{q} = k(-A_2 \sin kt + B_2 \cos kt).$$

Здесь начальные условия:

$$t = t_1 = \frac{\pi}{k}, \quad q = q_1 < 0, \quad \dot{q} = \dot{q}_1 = 0.$$

Тогда

$$A_2 = q_0 - 3r, \quad B_2 = 0, \\ q = (q_0 - 3r) \cos kt - r.$$

В конце интервала  $\dot{q} = 0$ ; следовательно,  $kt_2 = \pi$ , и тогда:

$$q_2 = q_0 - 4r.$$

Беря следующие интервалы движения, мы увидим, что нечетные интервалы будут аналогичны первому, а четные — второму. Можно составить последовательность отклонений:

$$q_0, \quad q_1 = (-1)(q_0 - 2r), \\ q_2 = (-1)^2(q_0 - 4r), \dots, \quad q_N = (-1)^N(q_0 - 2Nr).$$

Отсюда легко найти число колебаний до остановки. В самом деле, остановка произойдет тогда, когда сила трения покоя будет больше или равна восстанавливающей силе, т. е.

$$c|q_{N-1}| > b_0^* \geq c|q_N|$$

или, после деления на  $c$ :

$$|q_{N-1}| > r_0 \geq |q_N|.$$

Пока колебания происходят, знаки отклонений должны чередоваться, и если бы оказалось, что два последовательных отклонения имеют один и тот же знак, то это означало бы, что движение прекращается, так как в этом случае восстанавливающая сила оказывается не в состоянии даже перевести систему через нуль. Поэтому можно написать:

$$q_0 - 2(N-1)r > r_0 \geq q_0 - 2Nr.$$

Учитывая сказанное, мы можем утверждать, что левая часть этого двойного неравенства положительна, а правая может оказаться и отрицательной, что не противоречит неравенству.

Для нахождения полного числа  $N$  размахов до остановки прибавим ко всем частям написанного неравенства  $2Nr$ , вычтем  $r_0$  и разделим на  $2r$ . Получим:

$$\frac{q_0 - r_0}{2r} + 1 > N \geq \frac{q_0 - r_0}{2r}. \quad (3.42)$$

Отсюда можно найти искомое целое число  $N$ . Иногда для упрощения принимают, что коэффициент трения при

движении  $f$  равен коэффициенту трения при покое  $f_0$ , т. е.  $r = r_0$ . Тогда

$$\frac{q_0}{2r} + \frac{1}{2} > N \geq \frac{q_0}{2r} - \frac{1}{2}. \quad (3.43)$$

На графике колебаний (рис. 58) горизонтальная полоса шириной  $2r$  есть область застоя \*). В данном случае колеблющаяся система попадает в эту область, совершив три размаха, после чего движение прекращается. В каждом интервале

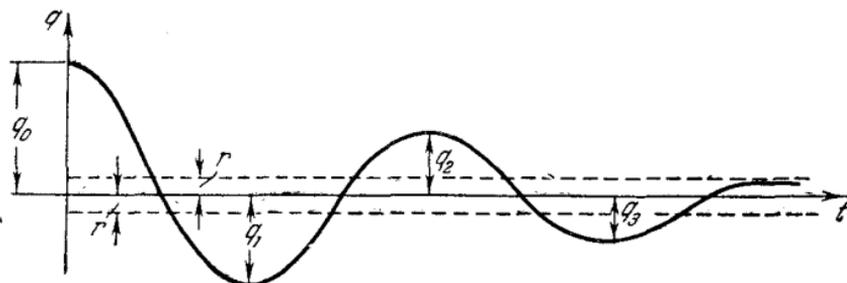


Рис. 58.

движение происходит по гармоническому закону с амплитудой

$$a_N = q_0 - (2n - 1)r \quad (3.44)$$

(где  $n = 1, 2, \dots, N$ ) около центра, смещенного на  $\pm r$  от нуля. Итак, амплитуды убывают в арифметической прогрессии с разностью  $2r$ . Промежуток времени между двумя последовательными остановками (между моментами, в которые  $\dot{q} = 0$ ) равен  $\pi/k$ ; таким образом, сухое трение не влияет на период колебаний:

$$\tau = \frac{2\pi}{k}. \quad (3.45)$$

Для получения фазовой картины движения введем фазовые координаты  $x = q$ ,  $y = \dot{q}$ , тогда уравнение (3.39) запишется в следующем виде:

$$\frac{dy}{dt} = -k^2(x + r \operatorname{sgn} y), \quad \frac{dx}{dt} = y.$$

\*) Если  $f = f_0$ , то область застоя имеет ширину  $2r_0$ .

Отсюда находим дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = -k^2 \frac{x + r \operatorname{sgn} y}{y},$$

интегрируя которое, имеем:

$$\frac{(x + r \operatorname{sgn} y)^2}{\left(\frac{C}{k}\right)^2} + \frac{y^2}{C^2} = 1. \quad (3.46)$$

Заметим, что интеграция должна выполняться для каждого интервала отдельно, когда  $\operatorname{sgn} y$  есть величина постоянная. Постоянная  $C$  определяется для каждого интервала так, чтобы начальные значения  $q$  и  $\dot{q}$  для  $n$ -го интервала совпадали с соответствующими конечными значениями для  $(n-1)$ -го интервала; таким образом обеспечивается непрерывность фазовой траектории. Этот метод называется *методом припасовывания решений*.

Уравнение (3.46) представляет таким образом семейство сопряженных между собою полуэллипсов, центры которых находятся в точках оси  $x$  с координатами  $+r$  и  $-r$

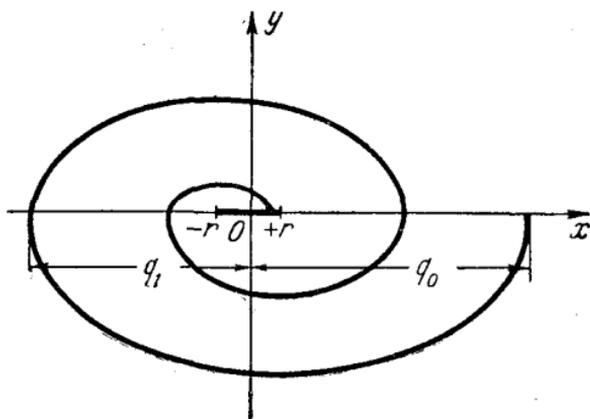


Рис. 59.

(рис. 59). Отрезок  $2r$  этой оси около точки  $O$  есть *отрезок покоя*, характеризующий область застоя.

Иногда для удобства вводят «безразмерное время» по формуле

$$\vartheta = kt. \quad (3.47)$$

Тогда, обозначая производные по  $\vartheta$ , как и прежде, штрихом сверху, вместо уравнения (3.39) получим:

$$q'' + q + r \operatorname{sgn} q' = 0.$$

Легко видеть, что в этом случае на фазовой плоскости

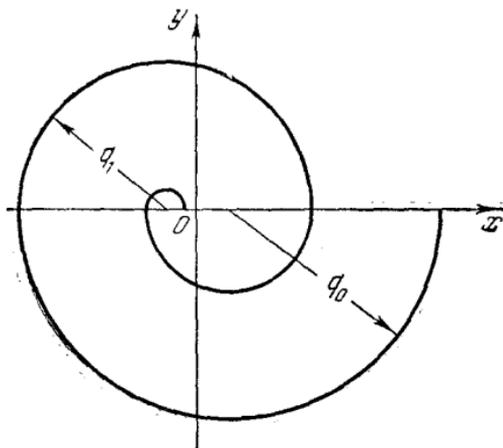


Рис. 60.

семейство полуэллипсов заменится семейством полуокружностей (рис. 60).

### Б. Колебания системы с квадратичным сопротивлением

При исследовании колебаний системы с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости, в уравнении движения приходится, как и в случае с сухим трением, брать двойной знак перед членом, выражающим сопротивление, или же пользоваться функцией  $\operatorname{sgn}$ . Таким образом, уравнение движения имеет вид:

$$a\ddot{q} + cq = \pm b^{**}\dot{q}^2$$

или

$$a\ddot{q} + cq = -b^{**}\dot{q}^2 \operatorname{sgn} \dot{q}. \quad (3.48)$$

Разделим обе части этого уравнения на  $a$  и введем обозначения:

$$\frac{c}{a} = k^2, \quad \frac{b^{**}}{a} = \beta. \quad (3.49)$$

Тогда имеем:

$$\ddot{q} + k^2q + \beta\dot{q}^2 \operatorname{sgn} \dot{q} = 0. \quad (3.50)$$

Допустим, что движение начинается в момент  $t=0$  при  $q=q_0 > 0$ ,  $\dot{q}_0=0$ . Тогда до первой остановки ( $\dot{q}=0$ ) движение происходит при  $\dot{q} < 0$ , поэтому на основании (3.50) имеем:

$$\ddot{q} + k^2q - \beta\dot{q}^2 = 0.$$

Введем новую переменную  $z$  по формуле

$$z = \dot{q}^2. \quad (3.51)$$

Тогда

$$\dot{z} = 2\dot{q}\ddot{q}, \quad \ddot{q} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dq},$$

и уравнение движения принимает вид:

$$\frac{dz}{dq} - 2\beta z = -2k^2q. \quad (a)$$

Решение этого уравнения состоит из двух частей:

$$z = \bar{z} + z^*,$$

где

$$\bar{z} = Ce^{2\beta q}$$

есть решение однородного уравнения, а

$$z^* = Aq + B$$

есть частное решение данного уравнения. Здесь  $C$  есть произвольная постоянная;  $A$  и  $B$  — постоянные, находимые путем подстановки частного решения в уравнение (a):

$$A = \frac{k^2}{\beta}, \quad B = \frac{k^2}{2\beta^2}.$$

Итак:

$$z = Ce^{2\beta q} + \frac{k^2}{2\beta^2} (1 + 2\beta q).$$

При  $t=0$ ,  $z=0$ , а поэтому:

$$C = -\frac{k^2}{2\beta^2} (1 + 2\beta q_0) e^{-2\beta q_0}.$$

Тогда

$$z = \frac{k^2}{2\beta^2} [(2\beta q + 1) - (2\beta q_0 + 1) e^{2\beta(q - q_0)}]. \quad (3.52)$$

Вспоминая значение  $z$ , имеем:

$$t = \frac{\beta \sqrt{2}}{k} \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{(2\beta q + 1) - (2\beta q_0 + 1) e^{2\beta(q - q_0)}}}. \quad (3.53)$$

Обращение этого интеграла могло бы дать закон движения. Однако указанный интеграл от трансцендентной функции не может быть выражен с помощью конечного числа элементарных функций, поэтому ограничимся лишь нахождением закона изменения амплитуд. Учитывая, что в момент первой остановки  $z = 0$ , из уравнения (3.52) находим:

$$(1 + 2\beta q_1) e^{-2\beta q_1} = (1 + 2\beta q_0) e^{-2\beta q_0}.$$

Для исследования движения от первой остановки до второй достаточно изменить знак у  $\beta$ ; получим

$$(1 - 2\beta q_2) e^{2\beta q_2} = (1 - 2\beta q_1) e^{2\beta q_1}$$

и так далее. Полагая

$$2\beta q_j = x_j, \quad (3.54)$$

имеем:

$$(1 + x_1) e^{-x_1} = (1 + x_0) e^{-x_0},$$

$$(1 - x_2) e^{x_2} = (1 - x_1) e^{x_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

Логарифмируя эти уравнения и вводя обозначения

$$y = f(x) = \ln(1 + x) - x, \quad (3.55)$$

получаем искомый закон:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= f(x_0), \\ f(-x_2) &= f(-x_1), \\ f(x_3) &= f(x_2), \\ f(-x_4) &= f(-x_3), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

На рис. 61 построена кривая  $y = f(x)$ , с помощью которой при любом значении  $x_0$  легко получить последующие амплитуды. На рис. 62 показана фазовая диаграмма, где  $x = q$ ,  $y = \dot{q} = \sqrt{z}$ . Эта диаграмма строится на основании уравнения (3.52) следующим образом. При движении от

$q = q_0$  до момента первой остановки уравнение (3.52) берется в том виде, как оно написано, от момента первой остановки до второй перед  $\beta$  надо изменить знак; после второй остановки знак опять меняется на обратный и так далее. Здесь никакого отрезка покоя нет, и начало  $O$  является асимптотической точкой; иначе говоря, особая точка есть устойчивый фокус.

Обратимся теперь к приближенному исследованию закона движения. Положим, что

$$\alpha = \beta q_0 \quad (3.57)$$

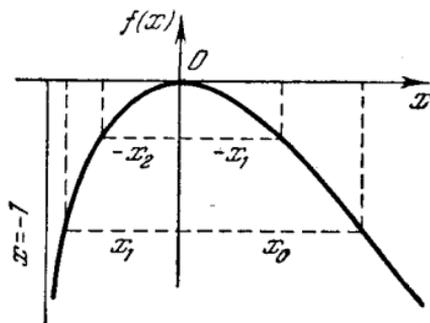


Рис. 61.

— величина малая; то есть это такой малый параметр, который характеризует отклонение системы от линейной. Далее,

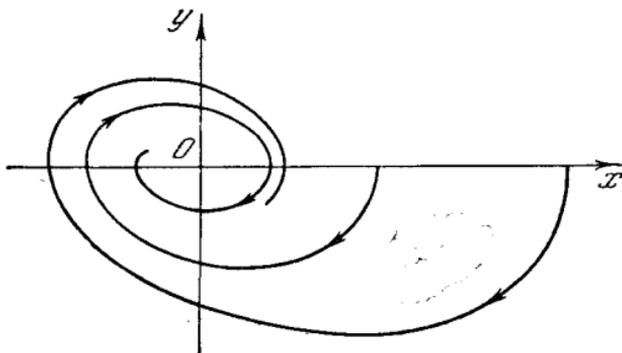


Рис. 62.

введем в уравнение (3.50) «безразмерное» время  $\vartheta$  по формуле

$$t = \frac{\vartheta}{k} \sqrt{1 + \mu}, \quad (3.58)$$

где постоянная  $\mu$  разлагается по степеням  $\alpha$ :

$$\mu = \alpha \mu_1 + \alpha^2 \mu_2 + \alpha^3 \mu_3 + \dots \quad (3.59)$$

Обозначая штрихом производные по  $\vartheta$ , из уравнения (3.50) имеем:

$$q'' + (1 + \mu)q \pm \beta q'^2 = 0.$$

Положим, далее,

$$q = q_0 z. \quad (3.60)$$

Тогда

$$z'' + (1 + \mu) z \pm \alpha z'^2 = 0. \quad (3.61)$$

Представляя решение в виде ряда, расположенного по степеням  $\alpha$ :

$$z = z_0(\vartheta) + \alpha z_1(\vartheta) + \alpha^2 z_2(\vartheta) + \dots \quad (3.62)$$

имеем начальные условия:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0; \quad z_0 = 1; \quad z_1 = z_2 = \dots = 0; \\ z'_0 = z'_1 = z'_2 = \dots = 0. \end{aligned}$$

Подставляя решение (3.62) в уравнение (3.61), а также учитывая значение  $\mu$  по формуле (3.59), находим:

$$\begin{aligned} z''_0 + \alpha z''_1 + \alpha^2 z''_2 + \alpha^3 z''_3 + \dots \\ \dots + (1 + \alpha\mu_1 + \alpha^2\mu_2 + \alpha^3\mu_3 + \dots)(z_0 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \dots) - \\ - \alpha(z'_0 - \alpha z'_1 + \alpha^2 z'_2 + \dots)^2 = 0. \end{aligned}$$

Собирая здесь члены с одинаковыми степенями  $\alpha$  и приравнявая их совокупности нулю, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} z''_0 + z_0 &= 0, \\ z''_1 + z_1 &= z_0'^2 - \mu_1 z_0, \\ z''_2 + z_2 &= 2z_0' z_1' - \mu_2 z_0 - \mu_1 z_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Учитывая начальные условия, из первого уравнения находим:

$$z_0 = \cos \vartheta.$$

Подстановка во второе уравнение после преобразования дает

$$z''_1 + z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\vartheta - \mu_1 \cos \vartheta.$$

Чтобы не было секулярных членов, должно быть

$$\mu_1 = 0.$$

Тогда, принимая во внимание начальные условия, имеем

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cos \vartheta + \frac{1}{6} \cos 2\vartheta.$$

Из третьего уравнения после упрощений находим:

$$z_2'' + z_2 = -\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \mu_2\right) \cos \vartheta + \frac{2}{3} \cos 2\vartheta - \frac{1}{3} \cos 3\vartheta.$$

Здесь

$$\mu_2 = \frac{1}{3},$$

вследствие чего

$$z_2 = -\frac{2}{3} + \frac{61}{72} \cos \vartheta - \frac{2}{9} \cos 2\vartheta + \frac{1}{24} \cos 3\vartheta.$$

Ограничиваясь малыми второго порядка малости, находим решение в следующем виде:

$$z = \left(\frac{1}{2} \alpha - \frac{2}{3} \alpha^2\right) + \left(1 - \frac{2}{3} \alpha + \frac{61}{72} \alpha^2\right) \cos \vartheta + \\ + \left(\frac{1}{6} \alpha - \frac{2}{9} \alpha^2\right) \cos 2\vartheta + \frac{1}{24} \alpha^2 \cos 3\vartheta. \quad (3.63)$$

Конец первого интервала имеет место при  $\vartheta = \pi$ . В этот момент

$$z = z^{(1)} = -1 + \frac{4}{3} \alpha - \frac{16}{9} \alpha^2 - \frac{1}{24} \alpha^3.$$

Продолжительность первого полупериода найдем из уравнения (3.58), подставив значение  $\vartheta = \pi$ :

$$t^* = \frac{\pi}{k} \sqrt{1 + \mu} \approx \frac{\pi}{k} \left(1 + \frac{1}{3} \alpha^2\right)^{1/2} \approx \frac{\pi}{k} \left(1 + \frac{1}{6} \alpha^2\right).$$

Если сделать подобный расчет для второго интервала, когда  $z$  изменяется от  $z^{(1)}$  до  $z^{(2)}$ , то оказывается, что с принятой степенью точности вторая половина периода равна первой, а тогда полный первый период равен:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{1}{6} \alpha^2\right). \quad (3.64)$$

Таким же образом можно исследовать движение и в последующие интервалы. С помощью формул (3.57) и (3.60) легко перейти к координате  $q$ .

## В. Метод Льенара

Многочисленные диссипативные, а также автоколебательные системы описываются уравнением вида

$$\ddot{q} + \varphi(\dot{q}) + q = 0. \quad (3.65)$$

Полагая здесь

$$x = q, \quad y = \dot{q},$$

нетрудно найти дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\varphi(y) - x}{y}. \quad (3.66)$$

Метод Льенара, являющийся разновидностью метода изоклин, излагаемого в теории дифференциальных уравнений, дает возможность по кривой

$$x = -\varphi(y) \quad (3.67)$$

построить поле направлений для данного дифференциального уравнения.

Допустим, что имеем точку  $M(x, y)$  с абсциссой  $x = OR$  и ординатой  $y = MR$ , принадлежащую фазовой траектории (рис. 63).

При этом считаем, что кривая (3.67) уже построена.

Проводя прямую  $ML$  параллельно оси  $x$ , находим точку ее пересечения  $N$  с кривой

(3.67), из которой опускаем перпендикуляр  $NS$  на ось  $x$ . Соединяя точку  $S$  с  $M$  и проводя в  $M$  отрезок, перпендикулярный к  $MS$ , находим направление касательной к фазовой траектории в точке  $M$ . В самом деле, из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MR}{OR - OS} = \frac{y}{x + \varphi(y)}.$$

Перпендикулярный к  $MS$  отрезок имеет угловой коэффициент  $-\operatorname{ctg} \alpha$ , т. е.

$$\frac{-\varphi(y) - x}{y},$$

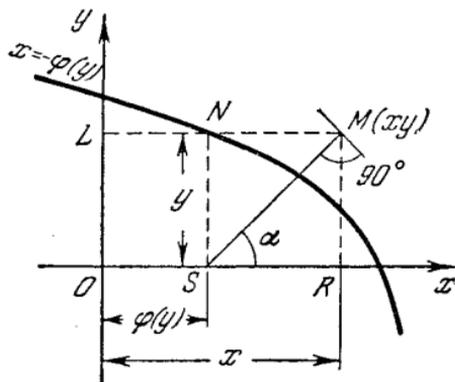


Рис. 63.

а это и есть правая часть уравнения (3.66), иначе говоря, угловой коэффициент касательной к фазовой траектории. Переходя от точки к точке, можно приближенно построить фазовую траекторию, а задаваясь различными точками  $M$  — семейство таких траекторий. На рис. 64 построено несколько

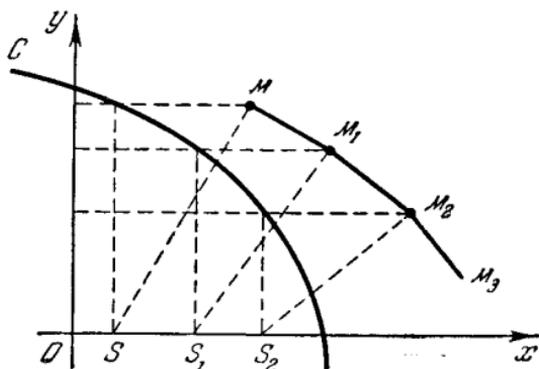


Рис. 64.

звеньев ломаной  $MM_1M_2M_3$ , являющейся аппроксимацией фазовой траектории при заданной кривой  $C$ , соответствующей уравнению (3.67).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Свободные колебания

$$\ddot{q} + k^2q = 0.$$

Преобразованием времени

$$\vartheta = kt$$

приводим уравнение к виду

$$q'' + q = 0,$$

где вторая производная берется уже по  $\vartheta$ . Уравнение (3.66) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Так как  $\varphi(y) = 0$ , то кривая  $x = -\varphi(y)$  совпадает с осью  $y$  и точка  $S$  на рис. 64 будет совпадать с началом координат для всех положений точки  $M$ . Следовательно, интегральные кривые должны быть концентрическими окружностями с центром в начале координат.

Пример 2. Система с кулоновым трением. Вводя безразмерное время  $\vartheta = kt$ , имеем согласно (3.39)

$$q'' + q = \pm r.$$

Здесь

$$\varphi(q') = \begin{cases} +r & \text{при } q' < 0, \\ -r & \text{при } q' > 0. \end{cases}$$

Кривая (3.67) распадается на две прямые:

$$x = +r \quad \text{при } y < 0,$$

$$x = -r \quad \text{при } y > 0.$$

Каждая интегральная кривая состоит из дуг окружностей с центрами в точках  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 65), причем эти полуокружности переходят друг в друга при пересечении с осью  $x$ . Отрезок  $S_1S_2$  есть упоминавшийся выше отрезок покоя.

Фазовую диаграмму можно получить таким способом: строим семейство окружностей с центром в  $O$ ; далее, разрезаем рисунок по оси  $x$  и сдвигаем верхнюю часть влево на  $r$ , а нижнюю — вправо на  $r$ . После этого надо фазовые траектории «сшить»: именно, подобрать полуокружности так, чтобы левый конец каждой нижней полуокружности сделался началом верхней (кроме точек, попавших на отрезок покоя  $S_1S_2$ ). Такое построение мы выполним в следующем примере.

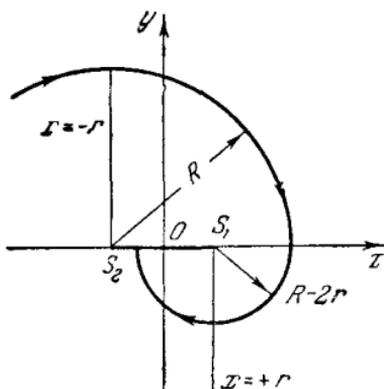


Рис. 65.

Пример 3. Система с линейным и кулоновым трением. Так как здесь преобразование времени не имеет смысла, то согласно уравнениям (2.39) и (3.39) имеем

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \pm k^2r.$$

Кривая (3.67) здесь распадается подобно предыдущему на две прямые, и мы имеем

$$\varphi(y) = \begin{cases} +k^2r - 2ny & \text{при } y < 0, \\ -k^2r - 2ny & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Конечно, можно использовать общее решение и получить семейство фазовых траекторий. Но мы пойдем путем, намеченным в конце предыдущего примера. Вводя линейное преобразование

$$x = z \pm r,$$

мы можем уравнение движения привести к виду

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + k^2z = 0.$$

Если  $n < k$ , то это есть дифференциальное уравнение затухающих колебаний, для которого фазовая диаграмма известна. Именно, мы имеем в качестве особой точки устойчивый фокус, к которому асимптотически приближаются закругляющиеся спирали (рис. 66, а).

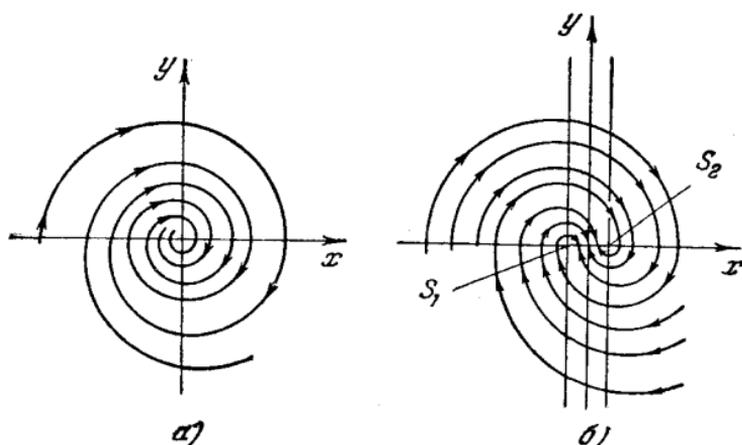


Рис. 66.

Располагая семейством таких спиралей, разрежем рисунок по оси  $x$ , и сдвинем верхнюю половину влево на  $r$ , а нижнюю вправо на  $r$  и «сошьем» подходящие фазовые траектории. Таким образом, получим на фазовой плоскости точный «портрет» движения системы с отрезком покоя  $S_1S_2$ , характеризующим зону застоя системы (рис. 66, б).

### § 3. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

#### А. Основные понятия

Нарушение консервативности системы возможно не только за счет рассеяния энергии, но и за счет ее поступления. Примером такой системы с притоком энергии может служить колебательная система, совершающая вынужденные колебания, обусловленные некоторым внешним фактором, именно, возмущающей силой, явно зависящей от времени. Нами было рассмотрено действие силы, являющейся периодической функцией времени, а также действие произвольно изменяющейся силы. Заметим, что силу, действующую по произвольному закону, можно рассматривать как наложение сил с непрерывным распределением частот, т. е. обладающую, как говорят, непрерывным спектром частот. Таким образом, в

приложении к линейным системам задача отыскания закона движения при поступлении энергии оказывается усложненной не в принципиальном, а в чисто практическом отношении. Выше был дан метод решения такой задачи (см. § 8 гл. II). Однако поглощение энергии системой из какого-то внешнего источника может иметь место и при отсутствии колебательных свойств этого последнего. Именно, парциальный отбор энергии может обуславливаться нелинейной структурой системы. Иначе говоря, автономная колебательная система, получая энергию из внешнего источника, сама управляет поступлением энергии. Такое состояние системы, при котором она способна при некоторых начальных отклонениях начать отбирать энергию для своего последующего движения, называется *самовозбуждением*, а ее колебания, устанавливающиеся при балансе поступающей и рассеиваемой энергии, называются *автоколебаниями*. Система, совершающая автоколебания, называется *автоколебательной системой*.

Автоколебательные системы чрезвычайно распространены. Таковыми, например, являются смычковые музыкальные инструменты. При движении смычка в одном направлении, казалось, он должен был бы вызвать монотонное воздействие на струну; однако упругие свойства этой последней и изменение силы трения между смычком и струной порождают автоколебания. Примитивно процесс можно описать так. За счет силы трения смычок увлекает струну в сторону своего движения. Возрастающая сила упругости приводит при некотором отклонении струны к ее срыву со смычка и к движению в обратном направлении. Заметим, что при этом происходит уменьшение силы трения, которая, даже в предположении ее независимости от скорости, при движении меньше, чем при покое. После наибольшего отклонения струны она начинает двигаться снова в сторону смычка, который в какой-то момент времени опять захватывает ее, и процесс повторяется. Аналогичные явления происходят в тормозных колодках, которые порождают своеобразный скрип, при снятии стружки режущим инструментом, когда автоколебания обуславливают волнистость стружки. Автоколебательной системой является ламповый генератор, а также часы. Между прочим, в часах с маятником отчетливо наблюдается такое явление: для того, чтобы часы «пошли», необходимо дать маятнику некоторое минимальное отклонение для преодоления сопротивлений;

после этого амплитуда колебаний устанавливается сама собою. Такое возбуждение, когда существует порог начального отклонения для порождения автоколебаний, называется жестким, в отличие от мягкого, когда сколь угодно малое начальное отклонение порождает автоколебания. В часах маятник или баланс отбирает порциями энергию от гирь или от пружины для поддержания колебательного процесса.

*Амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий и определяется исключительно параметрами системы.* Ранее мы видели, что в автономной линейной колебательной системе возможен периодический процесс лишь в случае ее консервативности; при этом амплитуда колебаний определяется начальными условиями. Таким образом, автоколебательные процессы присущи только нелинейным системам.

Для большей наглядности сказанного можно привести энергетические соображения. В линейной автономной системе рассеяние или поглощение энергии обуславливается членом  $b\dot{q}$  в уравнении (2.37), где при  $b > 0$  имеем убыль энергии, а при  $b < 0$  — ее приток. Вне зависимости от знака  $b$  (а следовательно, и  $n = \frac{b}{2a}$ ) закон движения выражается уравнением (2.45)

$$q = \alpha e^{-nt} \sin(\nu t + \beta).$$

Элементарное рассеяние или поглощение энергии (в зависимости от знака  $n$ ) за время  $dt$  равно

$$b\dot{q}dq = b\dot{q}^2 dt = \alpha^2 [-n \sin(\nu t + \beta) + \nu \cos(\nu t + \beta)]^2 e^{-2nt} dt.$$

Интегрируя это выражение, найдем изменение энергии за некоторый определенный промежуток времени, например, за период. Даже не производя выкладок, видно, что эта величина пропорциональна квадрату амплитуды, именно:

$$E = A\alpha^2,$$

где  $A$  — постоянная, зависящая от параметров  $n$  и  $\nu$ . Очевидно, что если на систему действуют две силы, пропорциональные скорости  $b_1\dot{q}$  и  $b_2\dot{q}$ , где  $b_1 > 0$ , а  $b_2 < 0$ , то на диаграмме энергии (рис. 67) будем иметь две прямые, исходящие из начала, и система будет либо неограниченно раскачиваться (если  $E_2 > E_1$ ), либо асимптотически затухать (при

$E_2 < E_1$ ). Таким образом, для установления автоколебаний по крайней мере одна из этих сил должна быть нелинейной. На рис. 68 представлены диаграммы энергии при нелинейной «ускоряющей» силе; здесь  $E_+$  — кривая притока энергии, а  $E_-$  — кривая рассеяния энергии.

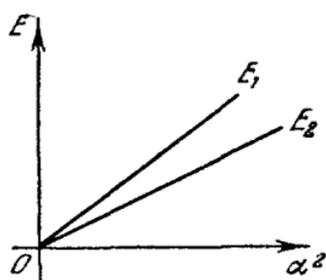


Рис. 67.

Точка пересечения обеих кривых соответствует балансу энергии и определяет собою амплитуду  $a$  автоколебаний. На рис. 68, а такая точка  $C$  одна, а на рис. 68, б имеем две точки  $C_1$  и  $C_2$ . Легко видеть, что в первом случае наступает мягкое возбуждение автоколебаний: если дать системе малое отклонение, то при  $a < a_C$  приток энергии превышает расход,

и амплитуда увеличивается, т. е. имеем нарастание колебаний. Если же сообщить системе значительное отклонение,

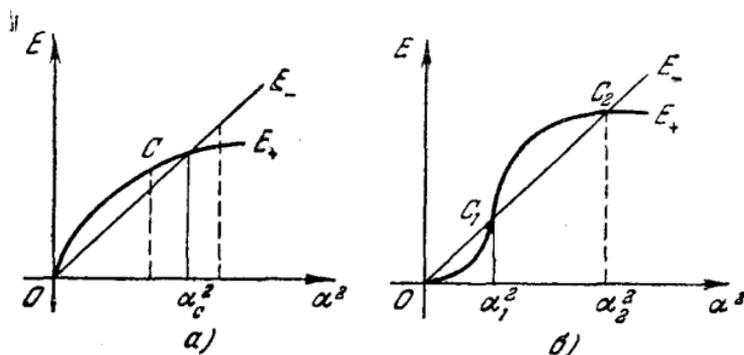


Рис. 68.

когда  $a > a_C$ , то расход энергии превысит приток и амплитуда колебаний, уменьшаясь, будет стремиться к  $a_C$ . Итак, получаются устойчивые автоколебания.

Аналогичные рассуждения применительно ко второму случаю приводят к выводу, что здесь имеет место жесткое возбуждение колебаний; при  $0 < a < a_1$ , расход энергии превышает приток и система стремится к состоянию покоя; при  $a_1 < a < a_2$  расход превышает приток: колебания нарастают, но только до  $a = a_2$ , так как при  $a > a_2$  расход снова превышает приток и амплитуда уменьшается. Таким

образом, автоколебания с амплитудой  $\alpha_1$  оказываются неустойчивыми, а с амплитудой  $\alpha_2$  — устойчивыми.

Поскольку автоколебательный процесс соответствует периодическому решению дифференциального уравнения движения, он должен отображаться на фазовой плоскости замкнутой интегральной кривой, охватывающей положение равновесия. Такая кривая получила название предельного цикла. Существование предельных циклов было обнаружено французским ученым Анри Пуанкаре, а на их связь с автоколебаниями было указано академиком А. А. Андроновым. Так как интегральные кривые, иначе говоря, фазовые траектории, не могут пересекаться, то фазовые траектории, не являющиеся предельными циклами, должны представляться какими-то кривыми, асимптотически приближающимися к предельным циклам или с них сходящими. На рис. 69 представлены

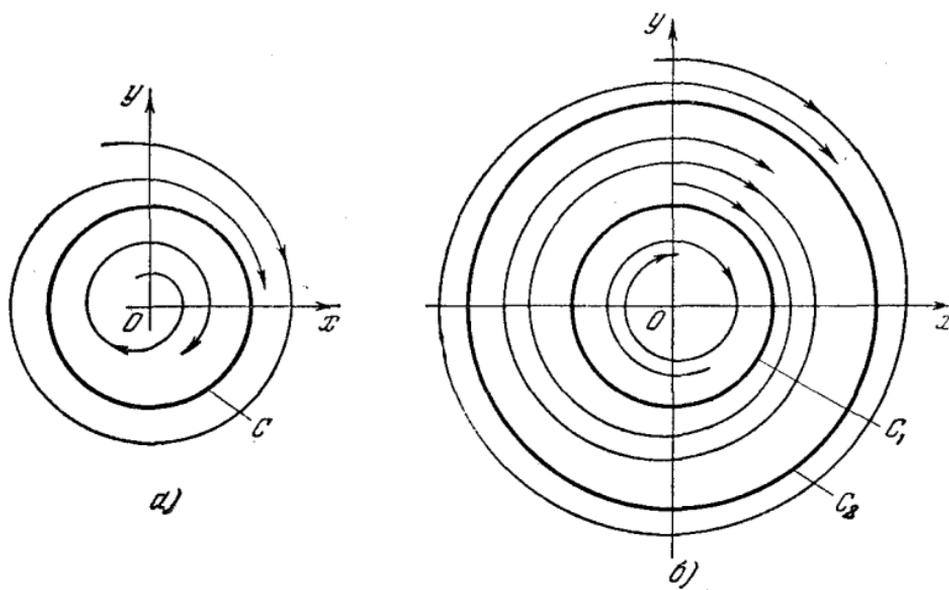


Рис. 69.

фазовые диаграммы движения для двух случаев, соответствующих рис. 68. Именно, на рис. 69, *a* имеем неустойчивую особую точку — фокус, из которой исходят расходящиеся спирали, приближающиеся изнутри к предельному циклу *C*. С другой стороны, при достаточном удалении изображающей точки от центра, она будет двигаться по одной из спиралей,

наматывающихся на предельный цикл снаружи. Таким образом, здесь имеется один единственный, и притом устойчивый, предельный цикл.

Обратимся к рис. 69, б, где имеются два предельных цикла  $C_1$  и  $C_2$ . Поскольку прочие фазовые траектории представляют собой спирали, сматывающиеся с цикла  $C_1$  и наматывающиеся на цикл  $C_2$ , то мы можем сказать, что  $O$  есть устойчивая особая точка — фокус,  $C_1$  — неустойчивый предельный цикл,  $C_2$  — устойчивый предельный цикл. Колебательный процесс, соответствующий циклу  $C_1$ , физически не существует: система либо приходит в состояние покоя, либо увеличивает свои размахи так, чтобы установились колебания, соответствующие циклу  $C_2$ . Здесь мы имеем пример жесткого возбуждения автоколебаний: необходимо для установления колебаний «забросить» изображающую точку за цикл  $C_1$ . Если же последний, стягиваясь к точке  $O$ , исчезает, получаем предыдущий случай мягкого возбуждения автоколебаний, так как в этом случае достаточно изображающую точку сколь угодно мало отклонить из точки  $O$ , чтобы установились колебания, соответствующие циклу  $C_2$ .

Ниже рассматриваются два аналитических метода исследования автоколебаний. Первый из них, называемый *методом осреднения*, который ведет свое начало от голландского физика и математика Б. Ван-дер-Поля и получил строгое обоснование и современную форму в трудах советских ученых Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси и А. А. Андропова. Кроме того, весьма эффективный, так называемый асимптотический метод, разработанный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, в приближении первого порядка оказывается также совпадающим с методом осреднения.

Другой метод, известный под названием *метода малого параметра*, был разработан А. Пуанкаре применительно к проблемам небесной механики и получил дальнейшее развитие в применении к нелинейным колебаниям, в особенности к автоколебаниям в работах А. А. Андропова и Б. В. Булгакова. Указанные методы применяются в случаях так называемых *квазилинейных систем*, или *систем томсоновского типа*, т. е. мало отличающихся от линейных. Системы с резко выраженной нелинейностью порождают так называемые *релаксационные колебания*, предельной формой которых являются разрывные колебания. График этих последних

выражается пилообразной кривой. Таковы, например, колебания струны в музыкальном смычковом инструменте. Разрывные колебания с математической стороны характеризуются тем, что в различных интервалах они описываются различными дифференциальными уравнениями, решение которых приходится «сшивать» или «припасовывать» подобно тому, как это делалось в случае свободных колебаний с сухим трением. На фазовой диаграмме предельный цикл также оказывается состоящим из отдельных кусков. Исследование релаксационных автоколебаний будет в дальнейшем показано на двух примерах.

Автоколебания возникают в системе тогда, когда она переходит через границу области устойчивости. Правда, может случиться, что при этом переходе система вообще пойдет в «разнос», но могут установиться и автоколебания. Вопрос решается исследованием нелинейных членов уравнения. Поясним сказанное примером из области электрических колебаний.

Имеем электрический колебательный контур (рис. 70), связанный с электронной лампой — триодом. Даны постоянные сосредоточенные параметры системы:  $L$  — самоиндукция,  $R$  — сопротивление,  $C$  — емкость,  $M$  — взаимоиנדукция, знак которой определяется направлением витков в соленоидах. На рисунке даны обозначения величин:  $i$  — ток в контуре;  $I_a$  — анодный ток;  $V_a$  — анодное напряжение;  $V$  — сеточное напряжение. Кроме того, показаны: батарея  $B$ , включенная в анодную цепь; анод  $A$ ; катод  $K$ ; сетка лампы  $G$ .

Уравнение тока  $i$  для колебательного контура имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Rt + \frac{1}{C} \int i dt = e,$$

где  $e$  — электродвижущая сила наведенного тока, равная

$$e = M \frac{dI_a}{dt}.$$

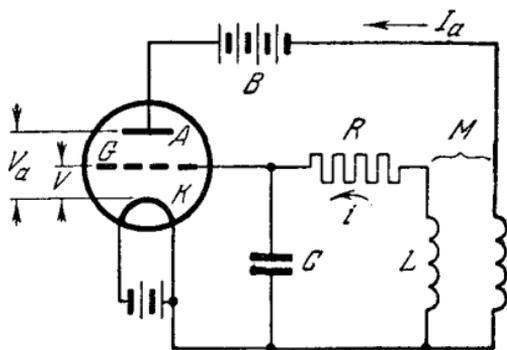


Рис. 70.

Анодный ток  $I_a$  есть функция линейной комбинации напряжений:

$$I_a = f(V + DV_a).$$

Так как параметр  $D$  — проницаемость лампы — обычно очень мал, то приближенно можно положить  $D \approx 0$ .

Распространенный вид функции  $f(V)$  — характеристики лампы — представлен на рис. 71. Эта характеристика, как видно, в некотором интервале может быть аппроксимирована отрезком прямой. Вводя так называемую крутизну характеристики

$$S = \frac{dI_a}{dV},$$

являющуюся постоянной для упомянутого участка, имеем:

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dV} \frac{dV}{dt} = S \frac{dV}{dt}.$$

Так как

$$V = \frac{1}{C} \int i dt,$$

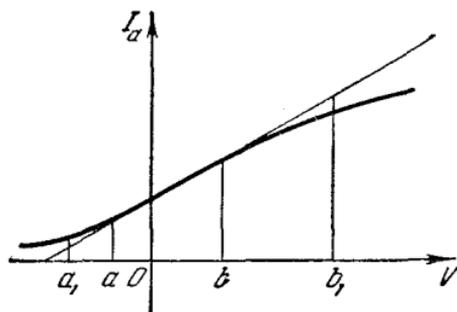


Рис. 71.

то наше уравнение после простых преобразований принимает вид:

$$LC\ddot{V} + (RC + MS)\dot{V} + V = 0$$

или

$$\ddot{V} + \frac{RC + MS}{LC} \dot{V} + \frac{1}{LC} V = 0. \quad (3.68)$$

Получено уравнение типа

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0,$$

где  $n$  в рассматриваемом примере уже не постоянно, а является вообще функцией  $q$  (в нашем случае  $V$ ) и, следовательно, уравнение нелинейное.

Если считать в первом приближении  $S = \text{const}$ , то при

$$RC - MS = 0$$

имеем консервативную систему с незатухающими электрическими колебаниями. При

$$RC - MS > 0$$

ток в электрическом контуре затухает либо по периодическому закону, либо аperiodически в зависимости от соотношения между величинами  $n = \frac{RC - MS}{2LC}$  и  $k = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , как это излагалось в линейной теории, в частности на рассмотренной выше модели Ван-дер-Поля (стр. 63). Наконец, когда

$$RC - MS < 0$$

имеем «отрицательное сопротивление»: контур оказывается *самовозбуждающимся* и дает в линейной трактовке задачи нарастающий ток. Порождаются ли здесь автоколебания или вообще имеет место расходящийся процесс, нам пока неизвестно; на этот вопрос возможно ответить, если пойти дальше линейной аппроксимации функции  $f(V)$ . Внешним неperiodическим источником энергии, могущим привести систему к автоколебаниям, является включенная в цепь батарея  $B$  (рис. 70).

Таким образом, если исходить из данных, при которых  $RC - MS = 0$ , то, меняя слегка хотя бы один из параметров  $R, C, M, S$ , мы можем качественно менять характер процесса в контуре, т. е. имеем так называемую грубую систему.

В дальнейшем (стр. 155) этот пример рассмотрим подробно в нелинейной трактовке, которая покажет возможность порождения автоколебаний.

## Б. Метод осреднения

Имеем квазилинейное уравнение

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \mu f(q, \dot{q}), \quad (3.69)$$

где  $f(q, \dot{q})$  — какая угодно функция от  $q, \dot{q}$ , а  $\mu$  — малая величина, показывающая отклонение системы от линейной. При  $\mu = 0$  система обращается в линейную и уравнение (3.69) имеет очевидное решение

$$q = \alpha \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.70)$$

где  $\alpha$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные.

Введем полную фазу

$$\psi = \omega t + \varphi \quad (3.71)$$

и будем искать решение уравнения (3.69) при  $\mu \neq 0$  также в форме (3.70), где только  $\alpha$  и  $\varphi$  — вообще переменные, *медленно изменяющиеся параметры*. Конечно, с таким же правом мы могли бы искать решение в форме — синуса.

Образует производную по времени:

$$\dot{q} = \dot{\alpha} \cos(\omega t + \varphi) - \alpha \dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) - \alpha \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

и введем требование:

$$\dot{\alpha} \cos(\omega t + \varphi) - \alpha \dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) = 0, \quad (a)$$

сравните с аналогичным требованием на стр. 98. Тогда, если принять во внимание уравнение (3.71), находим:

$$\dot{q} = -\alpha \omega \sin \psi,$$

$$\ddot{q} = -\dot{\alpha} \omega \sin \psi - \alpha \omega^2 \cos \psi - \alpha \omega \dot{\varphi} \cos \psi.$$

После подстановки в уравнение (3.69) и сокращений имеем:

$$-\dot{\alpha} \omega \sin \psi - \alpha \omega \dot{\varphi} \cos \psi = \mu f(\alpha \cos \psi, -\alpha \omega \sin \psi).$$

Из этого уравнения и из уравнения (a) легко находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{\mu}{\omega} f(\alpha \cos \psi, -\alpha \omega \sin \psi) \sin \psi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\mu}{\alpha \omega} f(\alpha \cos \psi, -\alpha \omega \sin \psi) \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

где  $\psi$  определяется формулой (3.71).

Мы получили дифференциальные уравнения для определения изменяющейся амплитуды  $\alpha$  и изменяющегося фазового угла  $\varphi$ . Правые части этих уравнений можно разложить в тригонометрические ряды:

$$-f(\alpha \cos \psi, -\alpha \omega \sin \psi) \sin \psi =$$

$$= \Phi(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} [P_j(\alpha) \cos j\psi + Q_j(\alpha) \sin j\psi],$$

$$-f(\alpha \cos \psi, -\alpha \omega \sin \psi) \cos \psi =$$

$$= \Psi(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} [R_j(\alpha) \cos j\psi + S_j(\alpha) \sin j\psi],$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos \psi, -\alpha\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \\ \Psi(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos \psi, -\alpha\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi. \end{aligned} \right\} (3.73)$$

Осредняя правые части уравнений (3.72) за один период, мы получим так называемые *уравнения установления* Ван-дер-Поля, совпадающие с уравнениями первого приближения по Крылову и Боголюбову:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\mu}{\omega} \Phi(\alpha), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \frac{\mu}{\alpha\omega} \Psi(\alpha). \end{aligned} \right\} (3.74)$$

Эти уравнения упрощаются, если предварительным преобразованием времени  $\vartheta = \omega t$  привести задачу к случаю  $\omega = 1$ .

Первое из уравнений (3.74) дает закон изменения амплитуды во времени, второе — поправку на частоту, которой является второй член правой части. Предельные циклы получаются в тех случаях, когда для некоторых значений  $\alpha$  имеем

$$\Phi(\alpha) = 0. \quad (3.75)$$

Таким образом, автоколебания возможны, если уравнение (3.75) имеет вещественные корни.

Устойчивость предельного цикла, а следовательно, и автоколебаний можно определить с помощью так называемого *метода возмущений*. Пусть  $\alpha_j$  есть какой-либо вещественный корень уравнения (3.75). Положим в первом уравнении (3.74)

$$\alpha = \alpha_j + \xi,$$

где  $\xi$  — малое изменение амплитуды автоколебаний, и разложим  $\Phi(\alpha)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\alpha_j$ . Предполагая, что  $\Phi'(\alpha_j) \neq 0$ , а также ограничиваясь линейным приближением и учитывая, что

$$\Phi(\alpha_j) = 0,$$

из первого уравнения (3.74) получим:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\mu}{\omega} \Phi'(\alpha_j) \xi.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\xi = C e^{\frac{\mu}{\omega} \Phi'(\alpha_j) t}.$$

Так как  $\omega$  всегда положительна, то при  $\mu > 0$  цикл устойчив, если

$$\Phi'(\alpha_j) < 0 \quad (3.76)$$

и наоборот. В самом деле, при выполнении условия (3.76)  $\xi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Многочисленные задачи приводятся к так называемому уравнению Ван-дер-Поля, которое после преобразования времени имеет вид:

$$\frac{d^2q}{d\vartheta^2} + q = \mu(1 - q^2) \frac{dq}{d\vartheta}, \quad (3.77)$$

где

$$f(q, \dot{q}) = (1 - q^2) \dot{q}.$$

Если ввести фазовые координаты  $x = q$ ,  $y = \dot{q}$ , это уравнение можно представить в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{d\vartheta} &= -x + \mu(1 - x^2)y, \\ \frac{dx}{d\vartheta} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

Полагая

$$x = \alpha \cos \vartheta, \quad y = -\alpha \sin \vartheta,$$

находим:

$$f(\alpha \cos \psi, -\alpha \sin \psi) \sin \psi =$$

$$= -\frac{\alpha}{8}(4 - \alpha^2) + \frac{\alpha}{2} \cos 2\vartheta - \frac{\alpha^3}{8} \cos 4\vartheta,$$

$$f(\alpha \cos \psi, -\alpha \sin \psi) \cos \psi = -\frac{\alpha}{4}(2 - \alpha^2) \sin 2\vartheta - \frac{\alpha^3}{8} \sin 4\vartheta.$$

Следовательно, в этом случае

$$\Phi(\alpha) = \frac{\alpha}{8}(4 - \alpha^2), \quad \Psi(\alpha) \equiv 0.$$

Приравнивая нулю  $\Phi(\alpha)$  и отбрасывая случай равновесия  $\alpha = 0$ , получаем предельный цикл при  $\alpha = 2$ . Здесь поправка на частоту в первом приближении равна нулю. Для проверки устойчивости предельного цикла находим:

$$[\Phi'(\alpha)]_{\alpha=2} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} \alpha^2 \right) \right]_{\alpha=2} = -1 < 0,$$

т. е. при  $\mu > 0$  цикл устойчив.

При  $\alpha = 0$  имеем:

$$[\Phi'(\alpha)]_{\alpha=0} = \frac{1}{2} > 0.$$

Следовательно, в начале координат имеем неустойчивый фокус, из которого выходят спирали, навивающиеся изнутри на предельный цикл.

Если  $\mu < 0$ , то предельный цикл неустойчив; с него сматываются спиралеобразные фазовые траектории во внешнюю и внутреннюю стороны. Начало — устойчивый фокус.

## В. Метод малого параметра

Возвращаясь к квазилинейному уравнению (3.69)

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \mu f(q, \dot{q}),$$

сопоставим с ним так называемое *укороченное уравнение*

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (3.79)$$

решение которого

$$q = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$$

назовем *порождающим решением* исходного уравнения (3.69) если решение последнего совпадает с написанным сейчас решением при  $\mu = 0$ . Очевидно, это имеет место не при любой амплитуде, а только при определенной, называемой *амплитудой порождающего решения*, или *порождающей амплитудой*.

Поскольку система автономна, за одну постоянную интегрирования можно принять начало отсчета времени, положив  $t_0 = 0$ . Для изучения автоколебаний займемся отысканием периодических решений уравнения (3.69). Если такие решения

возможны, то возможны и автоколебания. Пусть при  $\varphi = 0$  и при  $t = 0$

$$q(0) = \alpha_1, \quad q_0(0) = \alpha,$$

где  $q_0(t)$  есть порождающее решение. Период этого последнего:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega},$$

в то время как период истинного решения вообще отличен от  $\tau_0$  и равен, например:

$$\tau = \tau_0 + \chi, \quad (3.80)$$

где  $\chi$  — малая величина.

Амплитуда автоколебаний  $\alpha_1$  также отлична от  $\alpha$  на некоторую малую величину  $\beta$ :

$$\alpha_1 = \alpha(1 + \beta). \quad (3.81)$$

На рис. 72 порождающее решение изображается на фазовой

плоскости эллипсом, а периодическое решение данного уравнения при  $\mu \neq 0$  имеет вообще иную форму фазовой траектории, изображенной пунктирной замкнутой кривой.

Мы имеем право считать, что периодическое решение данного уравнения (а мы только такими решениями и интересуемся) зависит от малых

параметров  $\mu$  и  $\beta$  и может быть разложено в ряд по степеням этих параметров:

$$q(t) = q_0(t) + \mu q_1(t) + \beta q_2(t) + \mu^2 q_3(t) + \mu\beta q_4(t) + \dots, \quad (3.82)$$

где  $q_0(t)$  — порождающее решение. Тогда

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_0(t) + \mu \dot{q}_1(t) + \beta \dot{q}_2(t) + \mu^2 \dot{q}_3(t) + \mu\beta \dot{q}_4(t) + \dots \quad (3.83)$$

Вводим начальные условия. При  $t = 0$

$$q_0(0) = \alpha, \quad q(0) = \alpha(1 + \beta),$$

$$\dot{q}_0(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

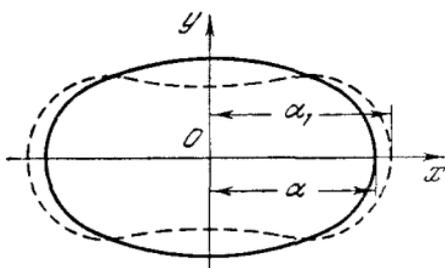


Рис. 72.

Из уравнений (3.82) и (3.83), в которых полагаем  $t = 0$ , путем сравнения членов, подобных относительно  $\beta$  и  $\mu$ , получаем:

$$q_2(0) = \alpha.$$

Все остальные данные — нули. Далее разложим в ряд нелинейную функцию

$$\begin{aligned} f(q, \dot{q}) = & f[q_0(t), \dot{q}_0(t)] + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 [\mu q_1 + \beta q_2 + \mu^2 q_3 + \mu\beta q_4 + \dots] + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)_0 [\mu \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2 + \mu^2 \dot{q}_3 + \mu\beta \dot{q}_4 + \dots] + \dots \end{aligned}$$

где значки «0» обозначают, что после дифференцирования сделана подстановка  $q = q_0(t)$ ,  $\dot{q} = \dot{q}_0(t)$ . Теперь наше исходное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_0(t) + \mu \ddot{q}_1(t) + \beta \ddot{q}_2(t) + \mu^2 \ddot{q}_3(t) + \mu\beta \ddot{q}_4(t) + \dots \\ \dots + \omega^2 q_0(t) + \omega^2 \mu q_1(t) + \omega^2 \beta q_2(t) + \omega^2 \mu^2 q_3(t) + \\ + \omega^2 \mu\beta q_4(t) + \dots = \mu f(q_0, \dot{q}_0) + \mu^2 \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 q_1 + \\ + \mu\beta \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 q_2 + \dots + \mu^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{q}_1 + \mu\beta \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{q}_2 + \dots \end{aligned}$$

Производя и здесь сравнение подобных членов, т. е. приравнивая друг другу величины одинакового порядка малости относительно  $\mu$  и  $\beta$  в отдельности, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_0(t) + \omega^2 q_0(t) &= 0, \\ \ddot{q}_1(t) + \omega^2 q_1(t) &= f[q_0(t), \dot{q}_0(t)], \\ \ddot{q}_2(t) + \omega^2 q_2(t) &= 0, \\ \ddot{q}_3(t) + \omega^2 q_3(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 q_1(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{q}_1(t), \\ \ddot{q}_4(t) + \omega^2 q_4(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 q_2(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}\right)_0 \dot{q}_2(t), \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.84)$$

Решая эти уравнения с учетом начальных условий, последовательно находим:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \alpha \cos \omega t, \\ q_1 &= \frac{1}{\omega} \int_0^t f [q_0(u), \dot{q}_0(u)] \sin \omega(t-u) du, \\ q_2 &= \alpha \cos \omega t, \\ q_3 &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)_0 q_1(u) + \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} \right)_0 \dot{q}_1(u) \right] \sin \omega(t-u) du, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3.85)$$

Далее, условие периодичности решения требует удовлетворения равенства:

$$q(\tau) = q(0) = \alpha(1 + \beta).$$

Принимая во внимание выражение (3.80) исправленного периода, мы можем написать разложение:

$$q(\tau) = q(\tau_0) + \chi \dot{q}(\tau_0) + \frac{1}{2} \chi^2 \ddot{q}(\tau_0) + \dots$$

Но так как согласно (3.82):

$$q(\tau_0) = q_0(\tau_0) + \mu q_1(\tau_0) + \beta q_2(\tau_0) + \mu^2 q_3(\tau_0) + \mu \beta q_4(\tau_0) + \dots,$$

имеем:

$$q_0(\tau_0) + \mu q_1(\tau_0) + \beta q_2(\tau_0) + \dots$$

$$\dots + \chi \dot{q}_0(\tau_0) + \chi \mu \dot{q}_1(\tau_0) + \chi \beta \ddot{q}_2(\tau_0) + \dots = \alpha + \alpha \beta.$$

Поскольку

$$q_0(\tau_0) = q_0(0) = \alpha, \quad q_2(\tau_0) = \alpha, \quad \dot{q}_0(\tau_0) = \dot{q}_0(0) = 0,$$

то должно быть:

$$q_1(\tau_0) = 0,$$

или

$$H(\alpha) = 0, \quad (3.86)$$

где согласно (3.85)

$$H(\alpha) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\tau_0} f(\alpha \cos \omega u, -\alpha \omega \sin \omega u) \sin \omega u du. \quad (3.87)$$

Уравнение (3.86) называется *уравнением порождающей амплитуды*; оно нередко бывает трансцендентным и решается графическим или численным методом.

Сравнивая уравнения (3.86) и (3.87) с уравнениями (3.75) и (3.73), видим, что первое приближение по методу Пуанкаре эквивалентно решению по методу осреднения, хотя эти методы исходят из различных предпосылок. При этом метод Пуанкаре позволяет строить высшие приближения, тогда как метод осреднения по своей сущности ограничивает решение лишь первым приближением. Условие устойчивости при  $\mu > 0$  получаем в виде неравенства

$$H'(\alpha_j) < 0, \quad (3.88)$$

где  $\alpha_j$  — корни уравнения (3.87)\*.

Для отыскания поправки на период разложим скорость сначала в окрестности невозмущенного периода, а затем в окрестности порождающего решения, находим:

$$\begin{aligned} \dot{q}(\tau_0) + \chi \ddot{q}(\tau_0) + \frac{1}{2} \chi^2 \ddot{\ddot{q}}(\tau_0) + \dots = \\ = \dot{q}_0(\tau_0) + \mu \dot{q}_1(\tau_0) + \beta \dot{q}_2(\tau_0) + \dots \\ \dots + \chi \ddot{q}_0(\tau_0) + \chi \mu \ddot{q}_1(\tau_0) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Так как здесь  $\dot{q}_0(\tau_0) = 0$ ,  $\dot{q}_2(\tau_0) = 0$ , то, ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем:

$$\mu \dot{q}_1(\tau_0) + \chi \ddot{q}_0(\tau_0) = 0.$$

Откуда получаем искомое значение поправки на период с точностью до малых первого порядка:

$$\chi = -\mu \frac{\dot{q}_1(\tau_0)}{\ddot{q}_0(\tau_0)}.$$

Подставляя сюда значение  $\ddot{q}_0(\tau_0) = -\alpha\omega^2$ , имеем:

$$\chi = \frac{\mu}{\alpha\omega^2} \dot{q}_1(\tau_0). \quad (3.89)$$

\* ) Более подробное и строгое изложение этого вопроса см. в книге [1].

Так как исправленная частота

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau_0 + \chi},$$

то

$$\Delta\omega \approx -\frac{2\pi}{\tau_0^2} \chi,$$

или

$$\Delta\omega = -\frac{\mu}{2\pi\alpha} \dot{q}_1(\tau_0). \quad (3.90)$$

Рассмотрим применение изложенного метода к *уравнению Рэлея*, часто встречающемуся в приложениях. Это уравнение, приведенное к единичной частоте, имеет вид:

$$\frac{d^2q}{d\theta^2} + q = \mu \left[ 1 - \left( \frac{dq}{d\theta} \right)^2 \right] \frac{dq}{d\theta} \quad (3.91)$$

или, если воспользоваться фазовыми координатами,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -x + \mu(1 - y^2)y, \\ \frac{dx}{d\theta} &= y. \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Составим уравнение порождающей амплитуды, для чего предварительно найдем:

$$\begin{aligned} q_1(\theta) &= -\int_0^\theta f(\alpha \cos u, -\alpha \sin u) \sin u \, du = \\ &= \int_0^\theta \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \alpha^3 \right) - \frac{\alpha}{2} \cos 2u + \frac{\alpha^3}{2} \cos 2u - \frac{\alpha^3}{8} \cos 4u \right] du. \end{aligned}$$

Так как

$$\tau_0 = 2\pi, \quad H(\alpha) = q_1(\tau_0) = 0,$$

то после интегрирования и соответствующих преобразований получаем:

$$\frac{\alpha}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} \alpha^2 \right) = 0.$$

Итак, предельный цикл есть; он соответствует  $\alpha = 2/\sqrt{3}$ . Устойчивость этого цикла доказывается так же, как это делалось ранее:

$$[H'(\alpha)]_{\alpha=2/\sqrt{3}} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \alpha^2 \right) \right]_{\alpha=2/\sqrt{3}} = -1 < 0.$$

Следовательно, найденный предельный цикл устойчив.

Определим поправку на период по формуле (3.89). Имеем:

$$\ddot{q}_0 = -\alpha \cos \vartheta,$$

$$q_1 = \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \alpha^3 \right) \vartheta - \frac{\alpha}{4} (1 - \alpha^2) \sin 2\vartheta - \frac{\alpha^3}{32} \sin 4\vartheta,$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} \alpha^3 - \frac{\alpha}{2} (1 - \alpha^2) \cos 2\vartheta - \frac{\alpha^3}{8} \cos 4\vartheta,$$

$$\dot{q}_1(0) = 0.$$

Следовательно,  $\chi = 0$ , т. е. в первом приближении поправка на период отсутствует.

## Г. Примеры автоколебаний электрических и механических систем

**1. Ламповый генератор.** Обратимся к схеме, представленной на рис. 70, предположив при этом, что рабочий участок характеристики  $a_1 b_1$  лампы на рисунке 71 не ограничивается отрезком прямой. Тогда наклон характеристики  $S$  уже нельзя считать постоянным.

Предположим, как это часто принимается, что  $S$  имеет вид:

$$S = S_0 - KV^2,$$

где  $S_0$  и  $K$  — постоянные. Подставим это значение в уравнение (3.68), которое примет вид:

$$\ddot{V} + \frac{1}{LC} (RC - MS_0 + MKV^2) \dot{V} + \frac{1}{LC} V = 0.$$

Положив

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

несколько преобразуем это уравнение

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V = \frac{MS_0 - RC}{LC} \left( 1 - \frac{MK}{MS_0 - RC} V^2 \right) \dot{V}.$$

Перейдем к безразмерному времени  $\vartheta$  по формуле

$$\vartheta = \omega t$$

и введем обозначения:

$$\frac{MS_0 - RC}{\sqrt{LC}} = \mu, \quad \sqrt{\frac{MK}{MS_0 - RC}} V = x.$$

Тогда наше уравнение принимает форму уравнения Ван-дер-Поля:

$$x'' + x = \mu (1 - x^2) x',$$

где штрихом обозначены производные по  $\varphi$ . Итак, при выполнении условия самовозбуждения (см. стр. 145)

$$MS_0 - RC > 0$$

в контуре возникают незатухающие электрические колебания, существование устойчивого предельного цикла для которых было показано выше при исследовании уравнения Ван-дер-Поля.

2. Маятник Фруда [28]. На горизонтальный вал (рис. 73), вращающийся равномерно с угловой скоростью  $\Omega$ , насажен достаточно свободно, но с некоторым трением, маятник, испытывающий при своем движении также линейное сопротивление. Очевидно, что дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = M(\Omega - \dot{\varphi}),$$

где  $J$  — момент инерции маятника,  $b$  — коэффициент линейного сопротивления,

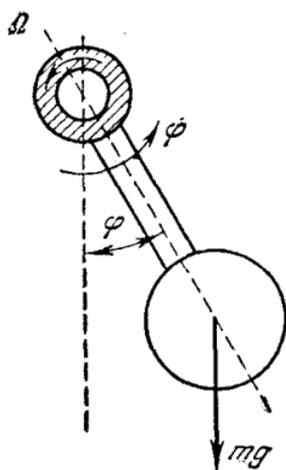


Рис. 73.

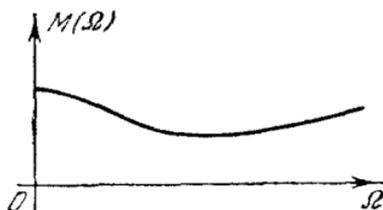


Рис. 74.

а  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  — момент силы сухого трения; остальные обозначения очевидны.

Предположим, что характеристика трения  $M(\Omega)$  имеет вид, представленный на рис. 74. Разложим  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  в степенной ряд в окрестности  $\Omega$ :

$$M(\Omega - \dot{\varphi}) = M(\Omega) - M'(\Omega)\dot{\varphi} - \frac{1}{2}M''(\Omega)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{6}M'''(\Omega)\dot{\varphi}^3 + \dots$$

Заметим, что на падающем участке характеристики  $M'(\Omega) < 0$ . Подставляя это разложение в уравнение движения и производя линеаризацию, получим:

$$J\ddot{\varphi} + [b + M'(\Omega)]\dot{\varphi} + mgl\varphi = M(\Omega).$$

Отсюда находим угол отклонения маятника от вертикали при равновесии:

$$\varphi_0 = \frac{M(\Omega)}{mgl}.$$

Вводя обозначение

$$\psi = \varphi - \varphi_0.$$

перепишем уравнение в следующем виде:

$$J\ddot{\psi} + [b + M'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl\psi = 0.$$

Если здесь  $b + M'(\Omega) > 0$ , то система диссипативная, если же  $b + M'(\Omega) < 0$ , то система самовозбуждающаяся, обладающая возможностью порождения автоколебаний. Уточнение может быть сделано лишь при учете нелинейных членов. То же относится к случаю  $b + M'(\Omega) = 0$ , когда консервативность системы только кажущаяся. Хотя в этом случае на фазовой плоскости и получается центр, но этот центр неустойчив по отношению к малым изменениям параметра: он может порождать фокус, как устойчивый, так и неустойчивый. Вопрос о действительном поведении системы решается уже нелинейной трактовкой задачи.

Удерживая в разложении  $M(\Omega - \dot{\varphi})$  члены до третьего порядка малости, получим следующее уравнение движения

$$J\ddot{\psi} + [b + M'(\Omega)]\dot{\psi} + mgl\psi = \frac{1}{2} M''(\Omega) \dot{\psi}^2 - \frac{1}{6} M'''(\Omega) \dot{\psi}^3.$$

Поскольку на падающем участке характеристика имеет точку перегиба, то здесь, если не точно, то с достаточным приближением можно положить  $M''(\Omega) = 0$ , тем более, что этот член, как показывает более точное исследование, на результате не отражается. Далее положим

$$b + M'(\Omega) = -b_1, \quad \frac{1}{6} M'''(\Omega) = b_2.$$

Тогда имеем:

$$J\ddot{\psi} - b_1\dot{\psi} + b_2\dot{\psi}^3 + mgl\psi = 0.$$

Полагая, далее,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad \vartheta = \omega_0 t, \quad x = \omega_0 \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \psi, \quad \mu = \frac{b_1}{J\omega_0},$$

приходим к уравнению Рэлея:

$$x'' + x = \mu(1 - x'^2)x'.$$

Существование и устойчивость предельного цикла для этого уравнения было показано. Итак, возникает автоколебательный процесс, маятник совершает незатухающее колебание постоянной амплитуды около своего отклоненного положения.

В обоих рассмотренных примерах мы имели автоколебательные процессы, каждый из которых отображается на фазовой плоскости

эллипсом (при «обычном времени»  $t$ ) или окружностью (при «безразмерном времени»  $\vartheta$ ). При малом  $\mu$  гармоническая аппроксимация вполне достаточна, и колебания получаются синусоидальными. Заметим, что при отыскании дальнейших приближений по методу Пуанкаре имеем почти синусоидальные колебания. Иную картину будем иметь в двух следующих примерах.

**3. Осциллятор Рэля при большой нелинейности.** Не уточняя вопроса о физической природе системы, предположим, что эта система описывается уравнением Рэля (3.91), или

$$q'' + q = \mu (1 - q'^2) q',$$

где штрих обозначает производную по безразмерному времени  $\vartheta = \omega_0 t$ . Выше мы исследовали это уравнение с помощью метода Пуанкаре, предполагая, что  $\mu$  есть малая величина. Тогда оказывалось, что получаемые автоколебания близки к синусоидальным и предельный цикл — к окружности (или вообще к эллипсу). Иначе говоря, имели случай квазилинейных колебаний. Заметим попутно, что дифференцируя один раз обе части написанного уравнения и вводя обозначения

$$q' \sqrt{3} = z,$$

сейчас же приходим к уравнению Ван-дер-Поля:

$$z'' + z = \mu (1 - z^2) z'.$$

При больших значениях параметра  $\mu$  получаются релаксационные колебания, для исследования которых изложенные методы неприменимы. Для конкретизации возьмем уравнение \*)

$$x'' + x = \left(1 - \frac{1}{3} x'^2\right) x', \quad (a)$$

которое подстановкой

$$x = q \sqrt{3}$$

приводится к уравнению Рэля, где  $\mu = 1$ .

При любом значении  $\mu$  можно применить метод Льенара. Построим на фазовой плоскости кривую

$$x = y - \frac{1}{3} y^2,$$

изображенную на рис. 75 пунктиром. Вспомним, что  $y = x'$ . Согласно изложенному выше правилу (стр. 134), строим интегральные кривые, дифференциальное уравнение которых имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3} y^2\right) y - x}{y}. \quad (6)$$

\*) Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952 [25].

Замкнутая кривая есть предельный цикл. Как видно, этот цикл уже заметно отличается от окружности и даже от эллипса.

Вторичное графическое или численное интегрирование уравнения (а) дает кривую

$$x = f(t),$$

определяющую закон движения (здесь уже взято  $t = \frac{\vartheta}{\omega_0}$ ). Тип этой кривой при  $\mu = 1$  представлен на рис. 76, а, при  $\mu = 10$  — на

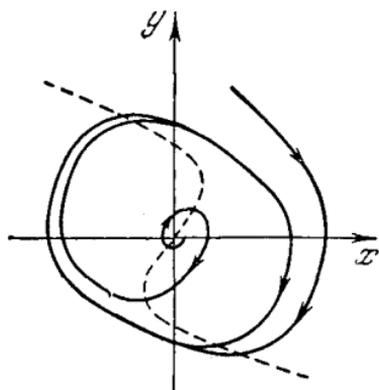


Рис. 75.

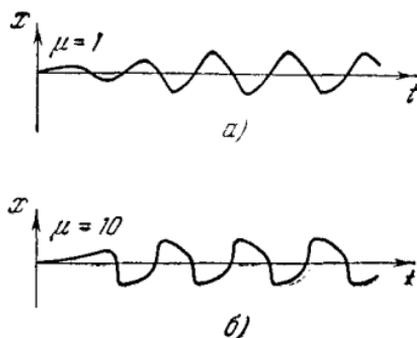


Рис. 76.

рис. 76, б<sup>1)</sup>. Как видим, при  $\mu = 1$  кривая еще в какой-то мере напоминает синусоиду, а уже при  $\mu = 10$  сильно от нее отличается, определяя собой характерные релаксационные колебания.

#### 4. Тормозная колодка.

Тормозное устройство, представленное на рис. 77, состоит из вала и упруго закрепленной колодки<sup>2)</sup>. Движение системы может быть описано двумя уравнениями первого порядка

$$\left. \begin{aligned} J\dot{\omega} &= -c\varphi + M(\Omega - \omega), \\ \dot{\varphi} &= \omega, \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

где  $J$  — момент инерции колодки, который будем считать очень малым,  $c$  — коэффициент жесткости пружины,  $M(\Omega - \omega)$  — момент силы трения, характеристика которого представлена на рис. 78. При относительной

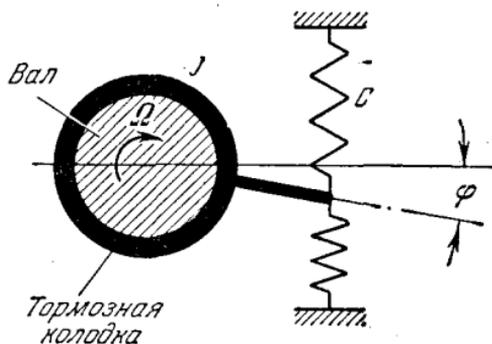


Рис. 77.

<sup>1)</sup> Об этом подробнее см. книгу [4].

<sup>2)</sup> Пример заимствован из книги: Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959, стр. 780 [1].

скорости, равной нулю ( $\Omega - \omega = 0$ ),  $M \doteq M_0$ , если  $c|\varphi| > M_0$  и  $M = c\varphi$ , если  $c|\varphi| \leq M_0$ . Состояние равновесия колодки определяется условием:

$$c\varphi_0 = M(\Omega), \quad \omega = 0.$$

Это состояние неустойчиво и, следовательно, система может самовозбуждаться, если  $M'(\Omega) < 0$ , что будем считать выполненным.

При пренебрежимо малом  $J$  колебательный процесс распадается на два типа движения:

1) Если момент силы пружины уравновешен или почти уравновешен моментом силы трения, то система будет иметь малые угловые ускорения  $\dot{\omega}$ , и тогда изображающаяся точка на фазовой плоскости (рис. 79) будет находиться на силовой характеристике

$$F \equiv -c\varphi + M(\Omega - \omega) = 0 \quad (\Gamma)$$

или, во всяком случае, около нее (в пределе, когда  $J = 0$ , точно на ней).

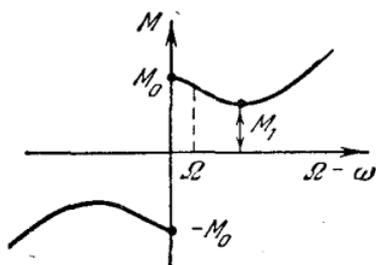


Рис. 78.

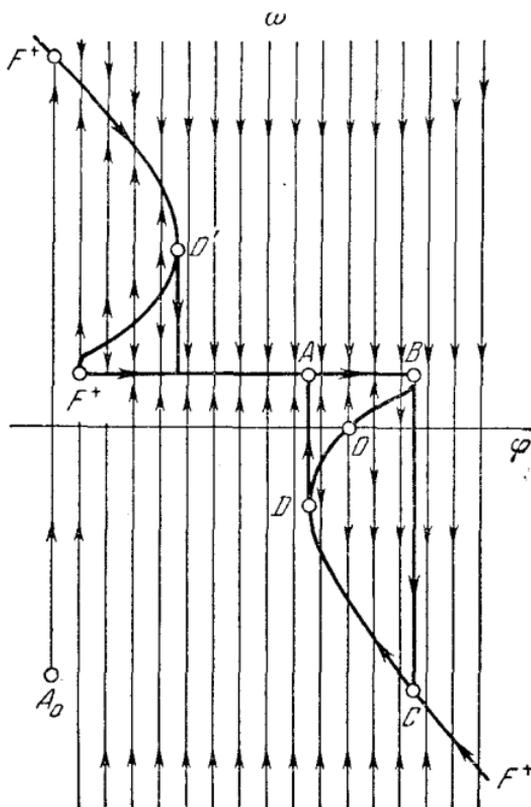


Рис. 79.

2) Если упомянутые моменты не уравновешивают друг друга, то при исчезающе малом  $J$  получаем чрезвычайно большие значения  $\omega$  (в пределе  $\rightarrow \infty$ ). Этому соответствуют вертикальные линии на фазовой диаграмме, если рассматривать в данном случае движение как такой мгновенный скачок, при котором скорость системы  $\dot{\omega}$  изменяется мгновенно, а координата  $x$  остается неизменной\*). Такое

\*) Об условиях скачка см. цитированную литературу [1].

условие является своеобразной формой учета малых параметров, существенных в начальной стадии движения (в данном случае малого момента инерции) и часто применяется при рассмотрении тех или иных процессов, связанных с явлением скачка.

Вспоминая правило определения направления движения изображающей точки на фазовой плоскости, мы можем сказать, что предельный цикл представляется в виде замкнутой линии  $ABCD$ , два участка которой  $BC$  и  $DA$  изображающая точка в нашем идеализированном случае ( $J = 0$ ) проходит мгновенно. Если поместить изображающую точку в произвольном месте  $A_0$ , то в конце концов она принуждена будет двигаться по контуру  $ABCD$ .

Обратимся к подсчету периода автоколебаний для такого предельного случая. На участке  $AB$  имеем  $\omega = \Omega$ , а поэтому момент трения просто изменяется между значениями  $M_0$  и  $M_1$ . Таким образом, обозначая время движения по  $AB$  через  $T_1$  и применяя уравнение (г) к участку  $AB$ , имеем

$$-c\Omega T_1 + M_0 - M_1 = 0,$$

откуда

$$T_1 = \frac{M_0 - M_1}{c\Omega}.$$

Что касается времени  $T_2$  — движения по  $CD$ , то здесь имеем

$$T_2 = \int_{M_0/c}^{M_1/c} \frac{d\varphi}{\omega} =$$

$$= -\frac{1}{c} \int_{\omega_C}^{\omega_D} \frac{M'(\Omega - \omega)}{\omega} d\omega,$$

так как  $c\omega = -M'(\Omega - \omega)$  и  $d\varphi = \omega dt$ .

По характеристике момента трения (рис. 78) можно найти величину этого интеграла численно или графически. Окончательно,

$$T = T_1 + T_2.$$

На рис. 80, а представлена кривая  $\omega(t)$ , состоящая из горизонтальных линий  $\omega = \Omega$ , соответствующих участку  $AB$  фазовой диаграммы, и кривых, расположенных между  $\omega_C$  и  $\omega_D$ , полученных из участка  $CD$  фазовой диаграммы численным или графическим интегрированием. На рис. 80, б кривая  $\varphi(t)$  получена из предыдущей также графическим или численным интегрированием. Итак, имеем пилообразную кривую, типичную для разрывных колебаний.

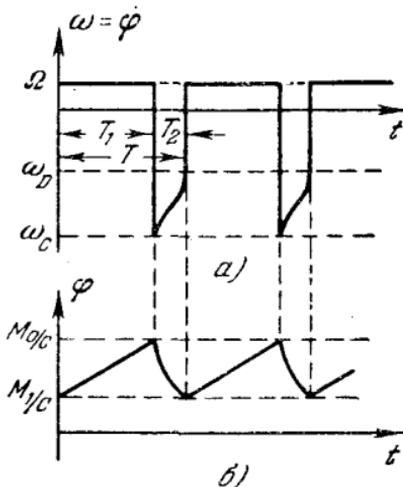


Рис. 80.

## § 4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение нелинейной системы, находящейся под действием произвольного возмущения, после деления на коэффициент инерции может быть записано в общем виде следующим образом:

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) = \psi(t). \quad (3.93)$$

Здесь  $\psi(t)$  — возмущающая функция, явно зависящая от времени,  $g(q)$  — восстанавливающая сила, в общем случае нелинейная,  $f(q, \dot{q})$  — комбинация диссипативной и ускоряющей сил; первая из них направлена противоположно скорости  $\dot{q}$ , а вторая — в сторону скорости (как при автоколебаниях). Одна из этих сил, а иногда и обе, могут отсутствовать. Часто бывает, что  $f$  является функцией только  $q$ .

В общем виде точное интегрирование уравнения (3.93) представляет непреодолимые трудности. Однако нас будет интересовать построение приближенного периодического решения в ряде случаев в предположении периодичности возмущения. Предварительно заметим, что принцип суперпозиции, имеющий место в линейных системах, здесь теряет свою силу, так что отделять вынужденные колебания от собственных уже нельзя. Мы ограничимся изложением лишь небольшого числа методов решения, отсылая за подробностями к соответствующим монографиям (см., например, [4, 5, 13, 25]).

### А. Метод Дуффинга

Из всего многообразия нелинейных колебательных систем, подвергающихся внешнему возмущению, рассмотрим только системы, которые находятся под действием гармонической возмущающей силы и описываются дифференциальным уравнением типа:

$$\ddot{q} + k^2 q = \mu f(q, \dot{q}) + h \cos \omega t, \quad (3.94)$$

где  $\mu$  — некоторая малая величина.

Обратимся сначала к случаю отсутствия сопротивления и зададимся специальным видом восстанавливающей силы,

часто встречающимся в приложениях, а именно, рассмотрим так называемое уравнение Дуффинга:

$$\ddot{q} + k^2(q + \mu q^3) = h \cos \omega t, \quad (3.95)$$

где  $\mu$  — может иметь как положительное, так и отрицательное значение;  $F(q) = k^2(q + \mu q^3)$  есть восстанавливающая сила, приведенная к единице коэффициента инерции. По аналогии с классификацией пружин по виду характеристики мы говорим, что при  $\mu > 0$  имеем жесткую восстанавливающую силу, при  $\mu < 0$  — мягкую, при  $\mu = 0$  — линейную (рис. 81).

Для отыскания периодического решения уравнения (3.95) воспользуемся методом последовательных приближений Дуффинга, заключающимся в том, что, задаваясь первым приближением решения в виде

$$q_1 = A \cos \omega t, \quad (3.96)$$

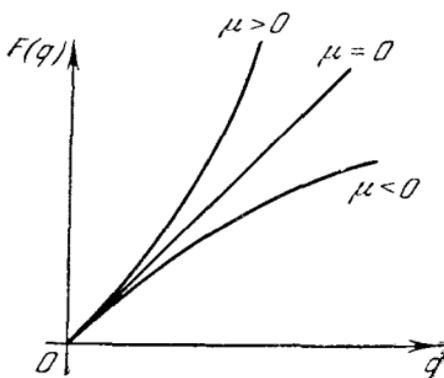


Рис. 81.

в последовательных приближениях коэффициент при  $\cos \omega t$  принимаем равным соответствующему коэффициенту в первом приближении.

Подставим первое приближение (3.96) в правую часть уравнения (3.95), которое перепишем следующим образом:

$$\ddot{q}_2 = -k^2(q_1 + \mu q_1^3) + h \cos \omega t.$$

Развертывая куб косинуса

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t,$$

получим

$$\ddot{q}_2 = - \left[ k^2 A \left( 1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - h \right] \cos \omega t - \frac{1}{4} \mu k^2 A^3 \cos 3\omega t,$$

что после двукратной интеграции с нулевыми постоянными дает

$$q_2 = \frac{1}{\omega^2} \left[ k^2 A \left( 1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - h \right] \cos \omega t + \frac{1}{36\omega^2} \mu k^2 A^3 \cos 3\omega t.$$

Полагая здесь коэффициент при  $\cos \omega t$ , равным  $A$ , получаем уравнение, связывающее  $\omega$  и  $A$ :

$$\omega^2 = k^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - \frac{h}{A}. \quad (3.97)$$

Мы должны решать обратную задачу: по заданной величине  $\omega^2$  находить амплитуду  $A$ , что приводит к решению кубического уравнения, которое может иметь один или три вещественных корня. Вопрос о возможности нескольких амплитуд будет исследован ниже при рассмотрении колебаний с сопротивлением. Отрицательные значения  $A$ , если таковые встречаются, соответствуют колебаниям с отставанием на полпериода от возмущающей силы.

На рис. 82 показаны кривые амплитуд для жесткой пружины а), линейной б) и мягкой в). «Скелетная» линия

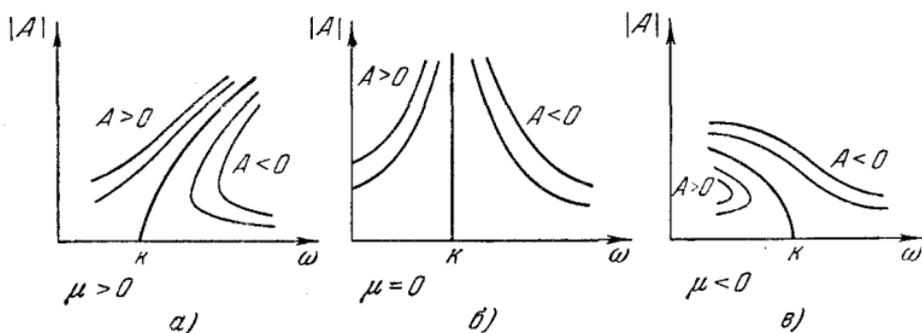


Рис. 82.

соответствует свободным колебаниям ( $h = 0$ ). Она является границей между колебаниями, синфазными с возмущением, и колебаниями, антифазными по отношению к нему.

Заметим, что применение принципа гармонического баланса, о котором сейчас будет идти речь, привело бы нас к тем же результатам.

## Б. Метод гармонического баланса

При отыскании периодического решения уравнения (3.94) удобно воспользоваться так называемым принципом *гармонического баланса*, предложенным Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, легшим в основу метода того же

наименования. Идея метода заключается в том, что задаваясь первым приближением решения

$$q_1 = A \cos(\omega t - \varepsilon), \quad (3.98)$$

подставляют его в уравнение (3.94), разлагают функцию  $f(q, \dot{q})$  в ряд Фурье и сравнивают между собой члены с косинусами и синусами аргумента  $\omega t$  или  $(\omega t - \varepsilon)$ . При этом предполагается, что вследствие малости  $\mu$  члены с высшими гармониками малы по сравнению с первыми гармониками. Вследствие этого указанный принцип получил также наименование *принципа эквивалентной линеаризации*. Беря следующие приближения решения, именно, вводя высшие гармоники, мы опять выполняем указанное сравнение коэффициентов, получая при этом, с одной стороны, уточненное значение  $A$  и  $\varepsilon$ , а с другой, определяя эти высшие гармоники.

Ограничиваясь случаем линейного сопротивления, воспользуемся принципом гармонического баланса в форме, указанной А. М. Кацем\*). В целях удобства примем такие обозначения постоянных, которые в предельном случае отсутствия нелинейности ( $\mu = 0$ ) приводят к формулам линейной теории колебаний в хорошо известных обозначениях. Для общности, следуя Кацу, представим сначала восстанавливающую силу  $F(q)$  в общем виде, полагая лишь, что  $F(q)$  — нечетная функция, т. е.  $F(-q) = -F(q)$ ; при этом функция  $\psi(t)$  изменяется, как и ранее, по закону косинуса.

Итак, рассмотрим систему, поведение которой описывается уравнением

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + F(q) = h \cos \omega t. \quad (3.99)$$

Будем искать первое приближение в виде

$$q = A \cos(\omega t - \varepsilon). \quad (3.100)$$

Тогда приближенно

$$\begin{aligned} & -\omega^2 A \cos(\omega t - \varepsilon) - 2n\omega A \sin(\omega t - \varepsilon) + F[A \cos(\omega t - \varepsilon)] = \\ & = h \cos \varepsilon \cos(\omega t - \varepsilon) - h \sin \varepsilon \sin(\omega t - \varepsilon). \end{aligned}$$

Разлагая  $F[A \cos(\omega t - \varepsilon)]$  в ряд Фурье и в соответствии с принципом гармонического баланса ограничиваясь первым

\*) Кац А. М., О вынужденных нелинейных колебаниях. Труды Ленинградск. Индустр. ин-та, № 3, 1939, раздел физ.-мат. наук, вып. 1, стр. 102—120.

косинусоидальным членом этого ряда, из сравнения подобных относительно косинуса и синуса членов находим

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi) \cos \psi d\psi - \omega^2 \right] A &= h \cos \varepsilon, \\ 2n\omega A &= h \sin \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

где для удобства положено  $\omega t - \varepsilon = \psi$ . При  $h = 0$  имеем свободные незатухающие колебания ( $n = 0$ ) с круговой частотой  $\omega_0$ , определяемой формулой

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (3.102)$$

Амплитуда  $A$  и фазовый угол  $\varepsilon$  для первого приближения находятся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.103)$$

имеющих тот же внешний вид, что и в случае линейной системы; однако в последней  $\omega_0$  не зависит от амплитуды.

Конкретизируем теперь сделанные общие выводы на случае уравнения типа Дуффинга, когда

$$F(q) = k^2(q + \mu q^3),$$

т. е. когда уравнение имеет вид

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2(q + \mu q^3) = h \cos \omega t. \quad (3.104)$$

Полагая

$$q = A \cos \psi = A \cos(\omega t - \varepsilon),$$

вычисляем по формуле (3.102)  $\omega_0^2$ :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} k^2(A \cos \psi + \mu A^3 \cos^3 \psi) \cos \psi d\psi$$

или

$$\omega_0^2 = k^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right), \quad (3.105)$$

что в линейном случае ( $\mu = 0$ ) дает  $\omega_0 = k$ . Далее, из уравнений (3.103) находим

$$\left. \begin{aligned} h &= A \sqrt{\left[ k^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \mu A^2 \right) - \omega^2 \right]^2 + 4n^2 \omega^2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2 + \frac{3}{4} \mu k^2 A^2}. \end{aligned} \right\} (3.106)$$

Первое уравнение разрешить относительно  $A$  очень трудно. Поэтому, вводя по формуле (3.105)  $\omega_0^2$ , представим его в виде

$$\omega^4 - 2(\omega_0^2 - 2n^2)\omega^2 + \omega_0^4 - \frac{h^2}{A^2} = 0$$

и разрешим относительно  $\omega$ , что дает нам

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2 \pm \sqrt{\frac{h^2}{A^2} - 4n^2(\omega_0^2 - n^2)}}. \quad (3.107)$$

Учитывая зависимость (3.105), строим кривые амплитуд (рис. 83, *a*, *b*, *в*), подобно тому, как это было сделано на рисунке 82. На каждом рисунке семейство кривых представлено для одного и того же затухания, но для различных значений амплитуды возмущающей силы. Скелетная линия соответствует свободным незатухающим колебаниям.

Обратимся теперь к вопросу о многозначности амплитуды, для чего изучим влияние изменения частоты возмущения на амплитуду (рис. 84). Допустим, что в случае жесткой восстанавливающей силы (рис. 84, *a*) мы начали увеличивать частоту от некоторого ее значения  $\omega_1$ , которой соответствует точка 1 на кривой. В точке 2 амплитуда получит наибольшее значение и начнет постепенно уменьшаться до точки 3, где произойдет срыв амплитуды до ее значения в точке 4, после чего опять наступит ее плавное уменьшение. Наоборот, при уменьшении возмущающей частоты от значения  $\omega_2$  мы попадаем в точку 5, где амплитуда совершает скачок до ее значения в точке 6, а далее плавно уменьшается. Таким образом, в точках 3 и 5 нарушается непрерывное изменение амплитуды. Это явление присуще только нелинейным системам.

Аналогично обстоит дело и в случае мягкой восстанавливающей силы (рис. 84, б), где разрывы имеют место в точках 2 и 5.

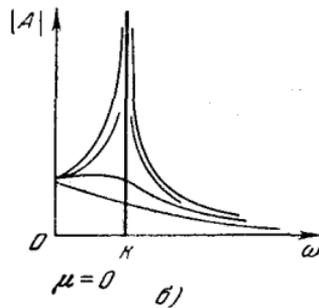
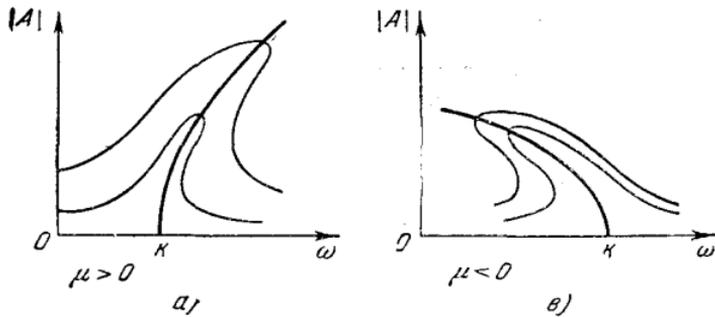


Рис. 83.

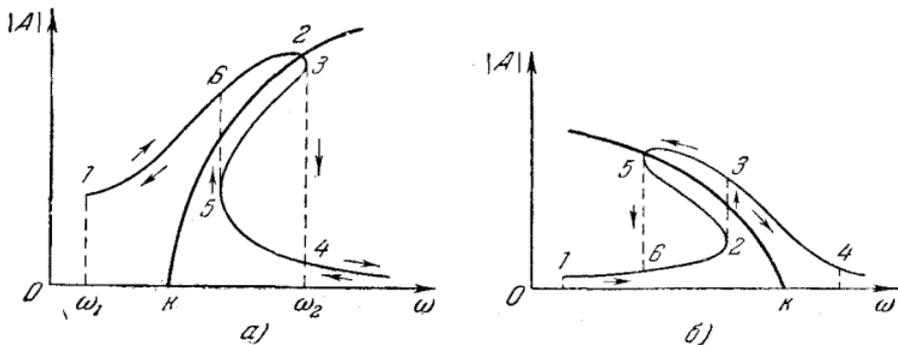


Рис. 84.

Итак, мы встречаемся с неоднозначностью амплитуды, величина которой зависит не только от величины частоты  $\omega$ , но и от направления изменения этой частоты.

Исследование показывает, что искусственным путем можно осуществить изменение амплитуды по среднему участку кривой между двумя вертикальными пунктирными линиями, но здесь амплитуды оказываются неустойчивыми, т. е. практически этот участок выпадает.

## В. Метод Галёркина

Метод, предложенный еще в 1915 г. Б. Г. Галёркиным в теории упругости и нашедший впоследствии обширное поле применения как в статике упругого тела, так и в теории колебаний, относится к числу так называемых вариационных методов, в которых сравнивается действительное состояние системы с возможным, близким к нему.

Рассмотрим теоретическое обоснование и применение метода Галёркина только к случаю колебаний системы с одной степенью свободы, в общем случае нелинейной. Из курса теоретической механики известен вариационный принцип Гамильтона, который в применении к консервативным системам говорит о том, что при сравнении движения по «прямому пути» (истинное движение) и по «окольному пути» (возможное движение, близкое к истинному) *действие* за некоторое время  $\tau$

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} (T - \Pi) dt$$

по первому из них есть экстремум (обычно минимум). Иначе говоря, *вариация действия* есть нуль, т. е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_0+\tau} (T - \Pi) dt = 0.$$

Здесь, как всегда,  $T$  есть кинетическая энергия,  $\Pi$  — потенциальная энергия системы. При этом считается, что начальные и конечные координаты и скорости всех точек на прямом и окольном пути совпадают; иначе говоря, их вариации равны нулю:

$$\delta q_j = 0, \quad \delta \dot{q}_j = 0$$

при  $t = t_0$  и при  $t = t_0 + \tau$ . Для одной степени свободы имеем лишь  $\delta q = 0, \delta \dot{q} = 0$ .

Принцип Гамильтона обобщается и на системы неконсервативные, но тогда он записывается так:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} (\delta T + Q \delta q) dt = 0, \quad (3.108)$$

где  $Q$  — обобщенная сила, состоящая в общем случае в колебательной системе из восстанавливающей силы, силы сопротивления и возмущающей силы. Предполагая возмущающую силу периодической с круговой частотой  $\omega$ , мы будем искать периодическое решение нелинейного уравнения системы с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.109)$$

причем это же значение  $\tau$  примем за интервал интегрирования в формуле (3.108). Тогда требование равенства нулю вариаций обобщенных координат и скоростей на границах интервала становится совершенно естественным.

Преобразуем уравнение (3.108) к более удобной форме. Так как  $T$  зависит от  $q$  и  $\dot{q}$ , то

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}.$$

Выполняя интегрирование второго члена, имеем

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^{t_0+\tau} - \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt,$$

но на основании сказанного о вариациях  $\delta q$  на концах интервала подстановка исчезает, а поэтому, меняя знак, окончательно получаем

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ -Q - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0. \quad (3.110)$$

Если бы мы считали, что уравнение

$$q = q(t),$$

пусть пока неизвестное, выражает собой точный закон движения, а  $\delta q$  — произвольное возможное перемещение, допускаемое связями, то из (3.110) сейчас же получили бы уравнение движения в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} - Q = 0.$$

Однако вместо точного решения, которое отыскать вообще очень трудно, зададимся его линейной аппроксимацией

$$\tilde{q} = \sum_{k=1}^r a_k \varphi_k(t), \quad (3.111)$$

где  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$  — некоторые функции, которыми мы задаемся, исходя из соображений простоты и целесообразности, а  $a_1, \dots, a_r$  — неизвестные пока постоянные коэффициенты, принимающие различные значения на прямом и окольном путях. Следовательно,

$$\delta \tilde{q} = \sum_{k=1}^r \varphi_k(t) \delta a_k.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.110), имеем

$$\sum_{k=1}^r \delta a_k \int_{t_0}^{t_0+\tau} \left[ Q + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \right] \varphi_k(t) dt = 0.$$

Здесь выражение в квадратных скобках есть результат подстановки в уравнение Лагранжа аппроксимации (3.111). Введем обозначение:

$$F(\tilde{q}, t) = -Q - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right). \quad (3.112)$$

Тогда уравнение движения может быть написано в виде

$$F(\tilde{q}, t) = 0, \quad (3.113)$$

а вариационное уравнение Галёркина следующим образом:

$$\sum_{k=1}^r \delta a_k \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(\tilde{q}, t) \varphi_k(t) dt = 0.$$

Так как вариации  $\delta a_k$  произвольны, то, полагая  $t_0 = 0$ , получаем уравнения

$$\int_0^{\tau} F(\tilde{q}, t) \varphi_k(t) dt = 0, \quad (3.114)$$

где  $k = 1, 2, \dots, r$ . После интегрирования получаем систему уравнений для определения постоянных  $a_k$ .

Рассмотрим часто встречающееся уравнение\*):

$$F(q, t) = a\ddot{q} + f(q) - H \sin \omega t = 0, \quad (3.115)$$

где  $a$  — коэффициент инерции (масса  $m$  или момент инерции  $J$ ). Предполагая, как это обычно бывает, что  $f(q)$  есть нечетная функция  $q$ , мы можем искать решение в виде суммы:

$$q = \sum_{k=0}^r a_{2k+1} \sin(2k+1)\omega t. \quad (3.116)$$

Таким образом, здесь

$$\varphi_k(t) = \sin(2k+1)\omega t.$$

Вспоминая, что

$$\int_0^{\tau} \sin[(2s+1)\omega t] \sin[(2k+1)\omega t] dt = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ \frac{\tau}{2}, & s = k, \end{cases}$$

где  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ , из (3.114) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 a \omega^2 a_{2k+1} &= \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\tau} f \left[ \sum_{s=0}^r a_{2s+1} \sin(2s+1)\omega t \right] \sin(2k+1)\omega t dt \end{aligned} \quad (3.117)$$

для  $k = 1, 2, \dots, r$  и

$$a \omega^2 a_1 + H = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\tau} f \left[ \sum_{s=0}^r a_{2s+1} \sin(2s+1)\omega t \right] \sin \omega t dt \quad (3.118)$$

для  $k = 0$ .

\*) Исследование этого уравнения, а также пример, заимствован из статьи А. И. Лурье и А. И. Чекмарева «Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков». Прикладная математика и механика, т. 1, 1938, вып. 3.

После вычисления интегралов найдем все значения  $a_1, a_3, \dots, a_{2r+1}$ .

**Пример.** Вынужденные колебания груза массы  $m$ , находящегося между двумя упругими стопорами с полным зазором  $2a_0$  (рис. 85, а). Упругая характеристика системы изображается в виде ломаной (рис. 85, б).

Уравнение движения системы имеет вид

$$m\ddot{x} + f(x) - H \sin \omega t = 0,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -a_0 \leq x \leq a_0, \\ c(x - a_0), & x > a_0, \\ c(x + a_0), & x < -a_0. \end{cases}$$

В решении (3.116) ограничимся первым приближением

$$x = a \sin \omega t.$$

Пусть  $|a| > a_0$  и  $a > 0$ . Обозначим через  $t_1$  наименьший корень уравнения

$$a_0 = a \sin \omega t.$$

Тогда

$$f(a \sin \omega t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < t_1, \\ c(a \sin \omega t - a_0) & \text{» } t_1 < t < \frac{\tau}{2} - t_1, \\ 0 & \text{» } \frac{\tau}{2} - t_1 < t < \frac{\tau}{2} + t_1, \\ c(a \sin \omega t + a_0) & \text{» } \frac{\tau}{2} + t_1 < t < \tau - t_1, \\ 0 & \text{» } \tau - t_1 < t < \tau. \end{cases}$$

Если же  $|a| < a_0$ , то  $f(a \sin \omega t) = 0$ .

Из уравнений (3.117) и (3.118), служащих для определения  $a_1, a_3, a_5, \dots$ , у нас, при ограничении первым приближением, остается только (3.118), где вместо  $a$  и  $a_1$  следует положить соответственно  $m$  и  $a$ . Имеем

$$m\omega^2 a + H = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\tau} f(a \sin \omega t) \sin \omega t dt.$$

При вычислении интеграла интервал от 0 до  $\tau$  делим на пять частей, согласно выражению функции  $f(a \sin \omega t)$ , данному выше.

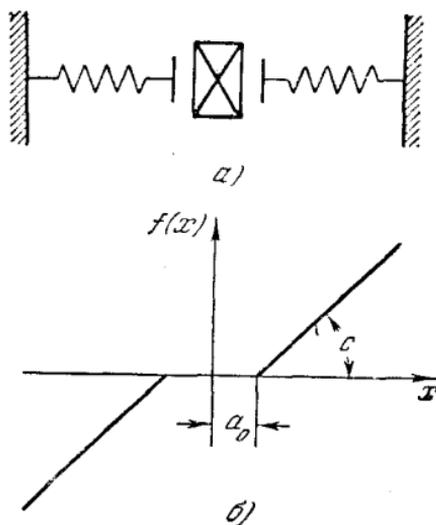


Рис. 85.

Из пяти интегралов останутся только два, и мы получим

$$\int_0^{\tau} f(\alpha \sin \omega t) \sin \omega t dt = \int_{t_1}^{\frac{\tau}{2}-t_1} c(\alpha \sin \omega t - a_0) \sin \omega t dt + \\ + \int_{\frac{\tau}{2}+t_1}^{\tau-1} c(\alpha \sin \omega t + a_0) \sin \omega t dt.$$

Учитывая, что  $\omega t_1 = \arcsin \frac{a_0}{\alpha}$  и что

$$\sin 2\omega t_1 = 2 \frac{a_0}{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{\alpha}\right)^2},$$

окончательно находим

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\tau} f(\alpha \sin \omega t) \sin \omega t dt = \\ = c\alpha + \frac{2}{\pi} c \left[ \alpha \arcsin \frac{a_0}{\alpha} + a_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{\alpha}\right)^2} \right].$$

При  $|\alpha| > a_0$  и  $\alpha < 0$  после тех же вычислений получим аналогичный результат, где только перед вторым членом справа будет стоять знак минус. Таким образом, вводя обозначение

$$y = \frac{\alpha}{a_0},$$

будем иметь

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{\tau} f(\alpha \sin \omega t) \sin \omega t dt = \\ = ca_0 y \pm \frac{2}{\pi} ca_0 \left[ y \arcsin \frac{1}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2} \right],$$

после чего уравнение для определения  $\alpha$  (или, что то же,  $y$ ) примет вид

$$\left[ \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 - 1 \right] y + \frac{d}{a_0} = \pm \frac{2}{\pi} \left[ y \arcsin \frac{1}{y} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2} \right], \quad (a)$$

где, по аналогии с линейными системами (стр. 37 и 90), положено

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad d = \frac{H}{c}.$$

Уравнение (а) трансцендентное; его достаточно просто можно решить графически (рис. 86), найдя точки пересечения прямой

$$z_1 = \left[ \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - 1 \right] y + \frac{d}{a_0}, \quad (6)$$

характерной для каждого отдельного случая (параметры  $\omega$ ,  $k$ ,  $d$ ,  $a_0$  — различные для разных систем), и раз навсегда по построенной кривой

$$z_2 = \pm \frac{2}{\pi} \left[ y \arcsin \frac{1}{y} + \sqrt{1 - \left( \frac{1}{y} \right)^2} \right]. \quad (в)$$

Из рисунка видно, что таких точек пересечения вообще две, из которых одна соответствует  $\alpha > 0$ , а другая —  $\alpha < 0$ ; в первом

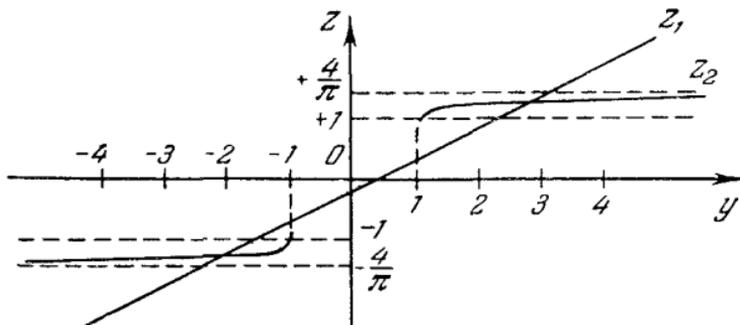


Рис. 86.

случае имеем колебания, синфазные с возмущением, во втором — антифазные. В некоторой области расположения прямой  $z_1$  пересечение линий может вообще отсутствовать. Однако это не означает, что колебаний нет; так как не надо забывать, что мы ограничились лишь первым приближением. Очевидно, в этом случае следует взять большее число членов решения (3.116) и лишь тогда уже выносить суждение о движении.

### Г. Вынужденные колебания с сухим трением

Влияние сухого трения на свободные колебания систем было рассмотрено выше (стр. 122). Тогда же было получено дифференциальное уравнение колебаний (3.39), а именно:

$$\ddot{q} + k^2(q + r \operatorname{sgn} \dot{q}) = 0,$$

где  $k$  — частота собственных колебаний линейной системы, а постоянная  $r$  выражается через обобщенную силу сухого трения  $b^*$  следующим образом:

$$r = \frac{b^*}{c}.$$

Предположим теперь, что восстанавливающая сила остается линейной, но вводится еще возмущение, действующее по гармоническому закону:

$$Q = H \sin \omega t$$

или, если отнести возмущающую силу к единице коэффициента инерции:

$$\frac{Q}{a} = h \sin \omega t = k^2 d \sin \omega t,$$

где согласно формуле (2.130)

$$d = \frac{H}{c} = \frac{h}{k^2}$$

есть статическое смещение системы под действием силы  $H$ . Итак, имеем уравнение

$$\ddot{q} + k^2 q = k^2 (d \sin \omega t - r \operatorname{sgn} \dot{q}). \quad (3.119)$$

Исследование движения, описываемого этим уравнением, представляет большие практические трудности. В самом деле, наиболее естественный путь — это интегрирование уравнения по отдельным этапам в зависимости от направления движения с приспособыванием решений в конце одного интервала и в начале следующего. Так мы поступали при исследовании свободных колебаний. Здесь дело осложняется наличием переменной внешней синусоидальной силы и возможностью вследствие этого остановок конечной продолжительности или пауз, в течение которых сила трения уже не постоянна. Правда, в это время движение отсутствует, но становится громоздким определение моментов остановок и постоянных интегриации.

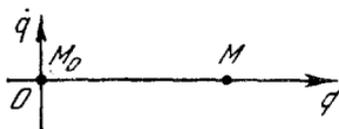


Рис. 87.

Не вдаваясь в утомительные подробности, наметим все же основные вехи этого метода, разработанного впервые Экколтом.

Пусть в начальный момент при  $t = 0$ ,  $q = 0$ ,  $\dot{q} = 0$ , и возмущающая сила начинает толкать изображающую точку  $M_0$  слева направо (рис. 87). Тогда, по достижении этой силой некоторого значения, точка начнет двигаться вправо, при этом  $\dot{q} > 0$ ,  $\operatorname{sgn} \dot{q} = +1$ . Уравнение примет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = k^2 (d \sin \omega t - r).$$

Движение начнется в тот момент  $t_0$ , когда будет выполняться равенство

$$d \sin \omega t_0 = r.$$

В дальнейшем для упрощения считаем, что коэффициенты трения покоя и движения равны между собой ( $r = r_0$ ). Обозначая  $\omega t_0 = \delta$ , можно написать

$$\ddot{q} + k^2 q = k^2 [d \sin (\omega t + \delta) - r],$$

что даст нам возможность отсчитывать время  $t$  от начала движения тела. На рис. 88 кривая  $A$  дает закон изменения

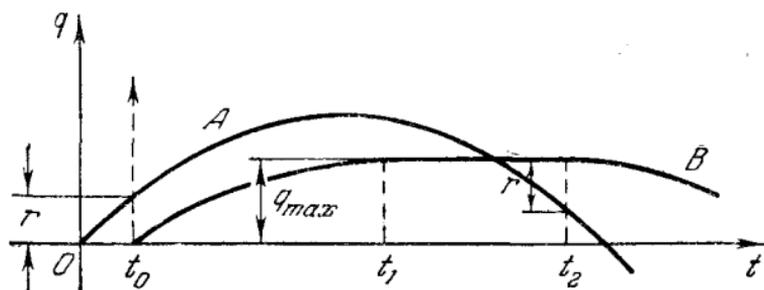


Рис. 88.

возмущающей силы; в измененном масштабе это есть  $d \sin (\omega t + \delta)$ . Кривая  $B$  определяет закон движения.

Допустим, что в момент времени  $t_1$  точка достигла наибольшего отклонения и остановилась; в этот момент (точнее говоря, непосредственно перед этим моментом)  $\ddot{q} < 0$ . Для того чтобы движение началось в обратную сторону, это неравенство должно сохраниться. После остановки сила трения меняет свое направление. В этом случае имеем

$$\ddot{q} = k^2 [d \sin (\omega t + \delta) + r - q].$$

Движение будет продолжаться без паузы, если в момент  $t_1$  мгновенной остановки удовлетворяется неравенство

$$d \sin (\omega t_1 + \delta) + r - q_{max} < 0.$$

Если же этого нет, то наступает пауза до момента времени  $t_2$ , когда, вследствие убывания синуса, будет

$$d \sin (\omega t_2 + \delta) + r - q_{max} < 0,$$

что и показано на рисунке. Величины  $t_1$  и  $q_{max}$  подлежат определению на основании решения дифференциального

уравнения и определения постоянных интегрирования по начальным условиям. Этот процесс может быть продолжен и далее, что дает точное, но громоздкое решение задачи.

В практических случаях вполне возможно отказаться от точного решения задачи и ограничиться получением общей оценки амплитуды вынужденных колебаний. Такое приближенное решение было указано Ден-Гартогом, который предложил эквивалентную линейризацию системы [10]. Сухое трение заменяется вязким сопротивлением, дающим за четверть периода эквивалентное рассеяние энергии. При этом предполагается, что трение вообще мало и собственные колебания отсутствуют.

Итак, параллельно с уравнением, описывающим поведение нелинейной системы (назовем ее системой I):

$$\ddot{q} + k^2 r \operatorname{sgn} \dot{q} + k^2 q = k^2 d \sin \omega t,$$

рассмотрим уравнение, описывающее поведение линейной системы (назовем ее системой II):

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = k^2 d \sin \omega t.$$

Пренебрегая для упрощения несущественным в данном случае сдвигом фаз, полагаем, что движение происходит по закону

$$q = \alpha^* \sin \omega t = \alpha^* \sin \left( \frac{2\pi}{\tau} t \right).$$

Найдем рассеяние энергии, отнесенной к единице инерционного коэффициента, в системе I за четверть периода:

$$W_I = \int_0^{\frac{\tau}{4}} k^2 r \dot{q} dt = k^2 r \alpha^* \omega \int_0^{\frac{\tau}{4}} \cos \omega t dt = k^2 r \alpha^*.$$

Рассеяние энергии в системе II за тот же промежуток времени будет

$$\begin{aligned} W_{II} &= \int_0^{\frac{\tau}{4}} 2n\dot{q}q dt = 2n\omega^2 (\alpha^*)^2 \int_0^{\frac{\tau}{4}} \cos^2 \omega t dt = \\ &= n\omega^2 (\alpha^*)^2 \int_0^{\frac{\tau}{4}} (1 + \cos 2\omega t) dt = \frac{\pi n \omega (\alpha^*)^2}{2}. \end{aligned}$$

Приравнивая друг другу значения  $W_I$  и  $W_{II}$ , находим величину эквивалентного коэффициента затухания:

$$n = \frac{2k^2 r}{\pi \omega \alpha^*} \quad (3.120)$$

и соответственно эквивалентного коэффициента сопротивления:

$$b = \frac{4b^*}{\pi \omega \alpha^*}. \quad (3.121)$$

Амплитуда  $\alpha^*$  вынужденных колебаний равна

$$\alpha^* = \lambda d,$$

где  $\lambda$  — коэффициент динамичности, определяемый по формуле (2.128):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4z^2\zeta^2}}$$

с безразмерными величинами

$$z = \frac{\omega}{k}, \quad \zeta = \frac{n}{k}.$$

Подставляя сюда значение  $n$  из формулы (3.120) и производя несложные алгебраические преобразования, приходим к выражению  $\lambda^*$  для случая сухого трения:

$$\lambda^* = \frac{1}{1-z^2} \sqrt{1 - \left(\frac{4r}{\pi d}\right)^2}. \quad (3.122)$$

Эта формула имеет смысл лишь при  $4r < \pi d$ . При резонансе ( $z = 1$ ) колебания неограниченно нарастают. Дело в том, что в этом случае, как видно из формул (3.120) и (3.121), эквивалентное линейное сопротивление убывает с ростом амплитуды. При малом сухом трении поглощение системой энергии извне за счет действия возмущающей силы превосходит ее рассеяние вследствие трения, которое пропорционально первой степени амплитуды. В то же время при вязком сопротивлении рассеяние энергии пропорционально квадрату амплитуды, чем и объясняется качественное различие в поведении системы при резонансе.

## § 5. СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### А. Основные понятия

До сих пор мы рассматривали такие механические и электрические системы, поведение которых описывалось дифференциальными уравнениями, либо вообще не содержащими время  $t$  в явном виде (автономные системы), либо содержащими его только в правой части, т. е. в выражении возмущающей силы, действующей на систему. Однако существуют системы, в которых некоторые параметры (к таковым относятся: коэффициент жесткости  $c$ , коэффициент инерции  $a$ , коэффициент сопротивления  $b$ ) изменяются в зависимости от времени. В том случае, когда такое изменение происходит по периодическому закону, имеет место *параметрическое возбуждение колебаний*, а линейные системы, в которых происходит это явление, называются *реолинейными системами*. Колебания, происходящие в таких системах, получили название *квазигармонических колебаний*.

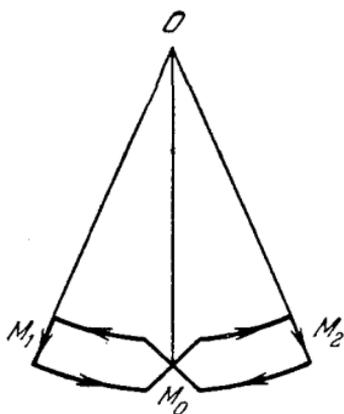


Рис. 89.

Простейшим примером реолинейной системы могут служить обыкновенные качели (рис. 89). Известно, что для раскачивания качелей человек, стоящий на доске, должен в крайних положениях  $M_1$  и  $M_2$  приседать, а в среднем положении  $M_0$  выпрямляться. Здесь мы имеем систему, эквивалентную математическому маятнику переменной длины, которая увеличивается в крайних положениях и уменьшается в среднем. Возникающее при этом увеличение амплитуды колебаний называется *параметрическим резонансом*.

Математически реолинейные системы описываются дифференциальными уравнениями с переменными периодически изменяющимися коэффициентами. Типичным уравнением такого рода является уравнение Хилла, которое в общем виде записывается так:

$$\ddot{q} + \psi(t)q = 0, \quad (3.123)$$

где  $\psi(t)$  — периодическая функция времени с периодом  $\tau$ .

Это уравнение имеет многочисленные применения в технике. Однако мы ограничимся изложением лишь элементов относящейся сюда теории, разработанной Флоке для уравнений с периодическими коэффициентами, и более подробно остановимся на двух частных случаях, имеющих наибольшее практическое значение.

Для упрощения дальнейших рассуждений заменим независимую переменную  $t$  безразмерной переменной  $x$ , так, чтобы период по  $x$  был равен  $2\pi$ . Именно, положим

$$t = \frac{\tau}{2\pi} x. \quad (3.124)$$

Тогда, обозначая штрихом дифференцирование по  $x$ , вместо (3.123) имеем

$$\ddot{q} + \Psi(x)q = 0, \quad (3.125)$$

где

$$\Psi(x) = \frac{\tau}{4\pi^2} \psi\left(\frac{\tau}{2\pi} x\right). \quad (3.126)$$

Этой новой формой уравнения Хилла мы и будем заниматься в дальнейшем.

## Б. Уравнение Хилла

Не задаваясь целью отыскания общего решения уравнения Хилла (3.125), что является задачей весьма трудной, ограничимся исследованием возможности получения периодических решений, характеризующих колебания с постоянной амплитудой и наступающих при определенных условиях, а также выяснением условий устойчивости системы [15], [25].

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнение второго порядка вообще имеет два линейно независимых решения. Обозначим эти решения для уравнения (3.125) через  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Поскольку при увеличении безразмерного времени  $x$  на период  $2\pi$  уравнение (3.125), вследствие периодичности  $\Psi(x)$ , сохраняет свою силу, то  $f_1(x + 2\pi)$  и  $f_2(x + 2\pi)$  также являются решением этого уравнения. Но тогда они должны выражаться линейно через  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} F_1(x) = f_1(x + 2\pi) &= a_{11}f_1(x) + a_{12}f_2(x), \\ F_2(x) = f_2(x + 2\pi) &= a_{21}f_1(x) + a_{22}f_2(x), \end{aligned} \right\} (3.127)$$

где  $a_{ij}$  — некоторая постоянная.

Мы говорим, что  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  образуют *фундаментальную систему решений* уравнения (3.123). То же можно сказать и о функциях  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ , так как взяв их за отправные, можно построить решения  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Это, в свою очередь, приводит к требованию разрешимости уравнений (3.127) относительно  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , т. е. к неравенству

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем теперь, что существуют такие *нормальные* решения уравнения (3.125), которые при увеличении аргумента  $x$  на период  $2\pi$  умножаются на некоторую постоянную величину  $s$ . Обозначая их звездочкой, по определению имеем

$$F^*(x) = f^*(x + 2\pi) = sf^*(x). \quad (3.128)$$

Поскольку  $f^*(x)$  есть решение, оно должно являться линейной комбинацией решений первоначальной фундаментальной системы, т. е.

$$f^*(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x). \quad (3.129)$$

То же мы можем написать для  $F^*(x)$ :

$$F^*(x) = \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x).$$

Подставляя в уравнение (3.128) написанные соотношения, далее выражая  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  через  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  по формулам (3.127) и перенося все члены в одну сторону, после соответствующей группировки имеем

$$[\lambda_1(a_{11} - s) + \lambda_2 a_{21}] f_1(x) + [\lambda_1 a_{12} + \lambda_2(a_{22} - s)] f_2(x) = 0.$$

Полученное соотношение должно удовлетворяться при любом  $x$ . Так как  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  линейно независимы, то выражение в каждой квадратной скобке должно равняться нулю:

$$(a_{11} - s)\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 = 0,$$

$$a_{12}\lambda_1 + (a_{22} - s)\lambda_2 = 0.$$

Эти два однородных относительно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  алгебраических уравнения удовлетворяются ненулевыми решениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

лишь в том случае, когда определитель системы равен нулю

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - s \end{vmatrix} = 0,$$

или в развернутом виде

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0. \quad (3.130)$$

Два корня  $s_1$  и  $s_2$  этого *определяющего уравнения* дают нам две системы значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  \*). Тогда, согласно соотношениям (3.129), (3.128), имеем соответственно:

$$f_1^*(x) = \lambda_1^{(1)} f_1(x) + \lambda_2^{(1)} f_2(x),$$

$$f_2^*(x) = \lambda_1^{(2)} f_1(x) + \lambda_2^{(2)} f_2(x),$$

$$F_1^*(x) = s_1 f_1^*(x),$$

$$F_2^*(x) = s_2 f_2^*(x).$$

Допустим, что начальные условия таковы:

$$f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_1'(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1.$$

Тогда, полагая в уравнениях (3.127)  $x = 0$ , имеем

$$a_{11} = f_1(2\pi), \quad a_{21} = f_2(2\pi).$$

Дифференцируя уравнения (3.127) по  $x$  и снова полагая  $x = 0$ , найдем

$$a_{12} = f_1'(2\pi), \quad a_{22} = f_2'(2\pi).$$

Вследствие полученных значений коэффициентов свободный член в уравнении (3.130) будет равен

$$f_1(2\pi) f_2'(2\pi) - f_2(2\pi) f_1'(2\pi).$$

С другой стороны, поскольку  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  являются решениями уравнения (3.125), можно написать

$$f_1''(x) + \Psi(x) f_1(x) = 0,$$

$$f_2''(x) + \Psi(x) f_2(x) = 0.$$

---

\*) Точнее, к двум отношениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , так как при умножении  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на одно и то же число, на то же число умножится  $f^*(x)$ , т. е. принципиально нового решения не получается.

Умножая первое из этих уравнений на  $f_2(x)$ , а второе — на  $f_1(x)$ , вычитая и интегрируя, получим

$$f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = \text{const.}$$

Подставляя сюда  $x=0$ , находим, что постоянная равна единице, следовательно, и свободный член в уравнении (3.130) также равен единице

$$f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = 1.$$

Обозначая

$$A = \frac{1}{2} [f_1(2\pi) + f_2'(2\pi)], \quad (3.131)$$

получаем определяющее уравнение в следующем виде:

$$s^2 - 2As + 1 = 0. \quad (3.132)$$

После этих предварительных рассуждений ищем решение уравнения (3.125) в виде

$$q = f^*(x) = e^{hx} \varphi(x), \quad (3.133)$$

где  $\varphi(x)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ , а  $h$  — некоторая подлежащая определению постоянная, которая может быть действительной, мнимой или вообще комплексной величиной. Увеличивая аргумент  $x$  на период  $2\pi$ , имеем

$$\begin{aligned} f^*(x + 2\pi) &= s f^*(x) = e^{h(x+2\pi)} \varphi(x + 2\pi) = \\ &= e^{2\pi h} e^{hx} \varphi(x) = e^{2\pi h} f^*(x). \end{aligned}$$

Так как у нас два фундаментальных нормальных решения  $f_1^*(x)$  и  $f_2^*(x)$ , которым соответствуют корни квадратного уравнения (3.132) так, что

$$F_j^*(x) = s_j f_j^*(x),$$

где  $j=1, 2$ , то имеем также два значения  $h$ :  $h_1$  и  $h_2$ . Из сказанного следует, что

$$s_j = e^{2\pi h_j}, \quad (3.134)$$

откуда обратно

$$h_j = \frac{1}{2\pi} \ln s_j. \quad (3.135)$$

Полагая вообще

$$h_j = \mu_j + i\nu_j, \quad (3.136)$$

где  $l = \sqrt{-1}$ , и учитывая, что в общем случае

$$\ln s_j = \ln |s_j| + l \arg s_j,$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \mu_j &= \frac{1}{2\pi} \ln |s_j|, \\ \nu_j &= \frac{1}{2\pi} \arg s_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

При вещественном  $s_j$  соответствующее  $\nu_j$  равно нулю. Если же корни  $s_1$  и  $s_2$  комплексные, то они непременно попарно сопряженные, и тогда  $\nu_1$  и  $\nu_2$  различаются только знаком.

Согласно выражению  $h_j$  (3.136), решение (3.133) можно переписать так:

$$q_j = e^{\mu_j x} (\cos \nu_j x + l \sin \nu_j x) \varphi_j(x). \quad (3.138)$$

Исследуем характер движения в зависимости от коэффициента  $A$  или, лучше сказать, его модуля  $|A|$ . При этом примем во внимание, что произведение модулей корней  $|s_1| |s_2| = 1$ .

1)  $|A| > 1$ . Корни вещественные ( $\nu_1 = \nu_2 = 0$ ), причем один из них (например,  $s_1$ ) численно больше единицы; тогда  $\mu_1 > 0$  и решение  $q_1$  будет *расходящееся*. Хотя при этом  $|s_2| < 1$  и  $\mu_2 < 0$  и решение  $q_2$  есть *сходящееся*, тем не менее система *динамически неустойчива*, так как полное решение вообще есть линейная комбинация  $q_1$  и  $q_2$ .

2)  $|A| < 1$ . Корни комплексные сопряженные ( $\nu_1 = -\nu_2$ ). Так как модули двух сопряженных величин между собой равны, то в данном случае каждый из них равен единице; тогда  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . Оба решения  $q_1$  и  $q_2$  ограниченные, а поэтому система *динамически устойчива*. Система совершает колебательные движения с ограниченной амплитудой. Что касается вопроса о периодичности решения, то, как видно из уравнения (3.138),  $q_j$  периодически, если  $\nu_j$  есть рациональное число. Полное решение является периодическим, если  $\nu_1$  и  $\nu_2$  являются оба рациональными числами. Это следует непосредственно из формулы (3.129), определяющей общее решение.

3)  $|A| = 1$ . В этом случае имеем два одинаковых вещественных корня, численно равных единице. При этом возможны комбинации: а)  $s_1 = s_2 = +1$ ; б)  $s_1 = s_2 = -1$ . Не задаваясь построением общего решения в этом переходном

случае, мы можем лишь утверждать, что одно решение из двух периодически. Если  $s = +1$ , то, например,

$$F_1(x) = e^0 \varphi_1(x + 2\pi) = \varphi_1(x) = f_1(x),$$

т. е. период решения равен  $2\pi$ . Если же  $s = -1$ , то

$$F_1(x) = e^{i\pi} \varphi_1(x + 2\pi) = -\varphi_1(x) = -f_1(x)$$

и, следовательно, для возвращения к значению плюс  $f_1(x)$  переменная  $x$  должна получить приращение еще на  $2\pi$ . Таким образом, период оказывается равным  $4\pi$ . Заметим, что при возвращении к переменной  $t$  период будет соответственно равным  $\tau$  и  $2\tau$ .

Если в уравнении (3.125) из совокупности параметров, от которых оно зависит, выбрать два и отложить их по осям прямоугольной системы координат, то таким образом в этой плоскости параметров можно построить *области динамической устойчивости и неустойчивости*. Границы этих областей определяются равенством

$$|A| = 1.$$

На границе областей, т. е. в переходном случае корни уравнения (3.130) кратные, а поэтому поведение системы требует особого исследования\*). Здесь заранее можно утверждать лишь то, что одно из двух решений периодически с периодом  $2\pi$  или  $4\pi$ .

Интересно отметить, что два решения одинакового периода ограничивают область неустойчивости, а два решения разных периодов — область устойчивости. В самом деле, допустим, например, что в интервале между  $s = 1$  и  $s = -1$  лежит область неустойчивости, и, следовательно, корни уравнения (3.130) вещественные. Но тогда при перемещении от одной границы к другой, вследствие непрерывности корней, один из них должен обратиться в 0, а тогда другой неизбежно будет равен бесконечности, что невозможно. Следовательно, между границами с разными периодами должна лежать область устойчивости, что и требовалось доказать.

В последующих двух разделах указанное построение областей будет показано для двух наиболее часто встречающихся вариантов уравнения Хилла.

---

\*) Как правило, эти границы относятся к неустойчивым областям [25].

## В. Уравнение Мейснера

В ранний период строительства и эксплуатации транспортных электровозов последние снабжались спарниками, которые порождали периодически изменяющуюся жесткость ведущей системы, что приводило часто к интенсивным колебаниям. Этот вопрос (см., например, [10], [28]) был подробно исследован швейцарским профессором Мейснером, который для описания явления получил дифференциальное уравнение угла поворота кривошипа с периодическим коэффициентом, причем жесткость системы он аппроксимировал ступенчатой характеристикой (рис. 90). Согласно этой характеристике функция  $\Psi(x)$  в уравнении (3.125) имеет следующие значения:

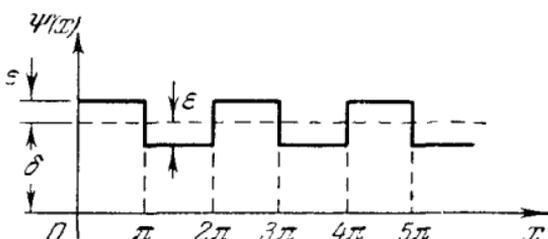


Рис. 90.

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x) &= \delta + \varepsilon, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ \Psi(x) &= \delta - \varepsilon, & \text{если } \pi < x < 2\pi, \end{aligned} \right\} \quad (3.139)$$

где  $\delta$  и  $\varepsilon$  — положительные величины. Уравнение движения принимает вид

$$\ddot{q} + (\delta \pm \varepsilon)q = 0. \quad (3.140)$$

Здесь величина  $\varepsilon$  характеризует собой *глубину пульсации*.

Введем обозначения

$$n_1 = \sqrt{\delta + \varepsilon}, \quad n_2 = \sqrt{\delta - \varepsilon}. \quad (3.141)$$

Тогда за первую половину периода ( $0 < x < \pi$ ) движение описывается уравнением

$$\ddot{q} + n_1^2 q = 0$$

и за вторую половину периода — уравнением

$$\ddot{q} + n_2^2 q = 0.$$

Соответствующие решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin n_1 x + C_2 \cos n_1 x, \\ q_2 &= C_3 \sin n_2 x + C_4 \cos n_2 x. \end{aligned} \right\} \quad (3.142)$$

Условия на границе двух полупериодов и в конце всего периода могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} (q_1)_{x=\pi} &= (q_2)_{x=\pi}, & (\dot{q}_1)_{x=\pi} &= (\dot{q}_2)_{x=\pi}, \\ (q_2)_{x=2\pi} &= s(q_1)_{x=0}, & (\dot{q}_2)_{x=2\pi} &= s(\dot{q}_1)_{x=0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.143)$$

Подставляя в уравнение (3.143) значения  $q_1$  и  $q_2$  из (3.142) при соответствующих значениях аргумента  $x$  и перенося все члены в одну сторону, получим для определения  $C_1, C_2, C_3, C_4$  четыре однородных уравнения. Эти уравнения могут дать отличные от нуля решения для  $C_1, C_2, C_3, C_4$  только в том случае, если определитель системы будет равен нулю.

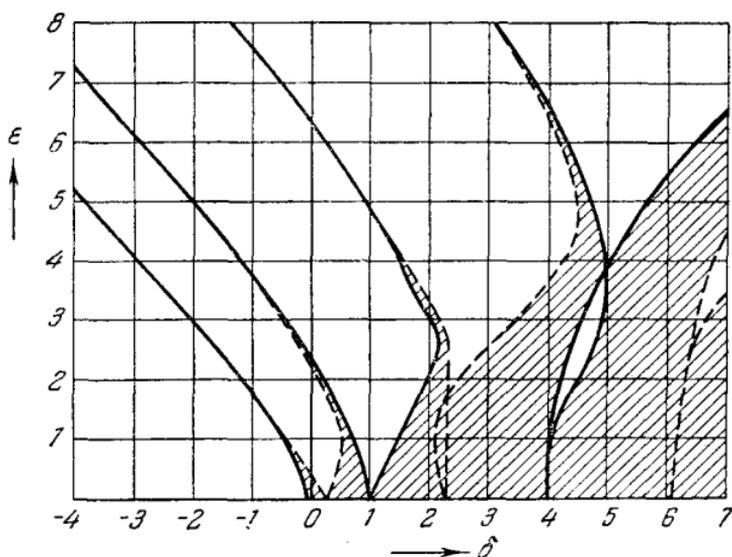


Рис. 91.

Составляя этот определитель, после несложных преобразований получим определяющее уравнение

$$s^2 - 2As + 1 = 0,$$

где

$$A = \cos \pi n_1 \cos \pi n_2 - \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} \sin \pi n_1 \sin \pi n_2. \quad (3.144)$$

Воспользуемся теперь общими рассуждениями предыдущего раздела. Вспоминая значения  $n_1$  и  $n_2$  из формул (3.141), мы можем построить граничные кривые

$$A(\delta, \varepsilon) = \pm 1. \quad (3.145)$$

Это сделано на рис. 91, где сплошные кривые соответствуют значению  $A = +1$ , а пунктирные —  $A = -1$ . Области устойчивости заштрихованы. Полученная диаграмма иногда называется *картой устойчивости*.

### Г. Уравнение Матъё

Другим важным вариантом уравнения Хилла является уравнение Матъё, подробно исследованное еще в прошлом столетии и впервые примененное в теории упругих колебаний Н. М. Беляевым в 20-х годах нашего века. При выбранном ранее безразмерном аргументе это уравнение имеет вид:

$$q'' + (\delta + \varepsilon \cos x) q = 0. \quad (3.146)$$

Здесь глубина пульсации характеризуется также величиной  $\varepsilon$ .

Исследование уравнения (3.146) труднее, чем уравнения Мейснера. Построение граничных кривых основано на том, что на этих кривых, как мы уже знаем, имеет место периодическое решение с периодом  $2\pi$  или  $4\pi$ . Представляя решение в виде ряда Фурье, который подставляется в уравнение (3.146), сравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях и выписывая условия совместности получающихся алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье, приходим к некоторым детерминантным уравнениям, связывающим  $\delta$  и  $\varepsilon$  для граничных кривых\*).

В случае малого  $\varepsilon$ , что часто встречается, эти кривые могут быть определены проще [25]. Представим в уравнении (3.146)  $q$  и  $\delta$  в виде степенных рядов, расположенных по степеням  $\varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} q &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \\ \delta &= \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.147)$$

\*) Этот вопрос подробно освещен в [15].

Здесь постоянные  $\delta_k$  и функции  $y_k(x)$  должны быть определены так, чтобы функция  $q(x)$  была решением уравнения (3.146) с периодом  $2\pi$  или  $4\pi$  и притом таким, которое сводилось бы к  $\cos nx/2$  или  $\sin nx/2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Подставляя разложения (3.147) в уравнение (3.146) и сравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , подобно тому, как это в свое время было показано для метода Линдстедта (стр. 144—145), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y_0'' + \delta_0 y_0 &= 0, \\ y_1'' + \delta_0 y_1 &= -\delta_1 y_0 - y_0 \cos x, \\ y_2'' + \delta_0 y_2 &= -\delta_2 y_0 - \delta_1 y_1 - \delta_1 \cos x, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.148)$$

При этом каждая функция  $y_k(x)$ , как указывалось выше, должна иметь период  $2\pi$  или  $4\pi$ . Тогда первое уравнение системы (3.148) даст нам для  $\delta_0$  следующее значение:

$$\delta_0 = \frac{1}{4} n^2,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Из того же уравнения для  $y_0$  получаем:

$$y_0 = \cos \frac{nx}{2} \quad \text{или} \quad y_0 = \sin \frac{nx}{2}.$$

При  $n = 0$ ,  $\delta_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ; второе уравнение дает

$$y_1'' = -\delta_1 - \cos x,$$

откуда, вследствие периодичности  $y_1$ , параметр  $\delta_1$  должен быть равен нулю, тогда

$$y_1 = \cos x + C.$$

Третье уравнение дает

$$y_2'' = -\delta_2 - \frac{1}{2} - C \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Для периодичности  $y_2$  должно быть  $\delta_2 = -\frac{1}{2}$ . Итак, получено приближенное уравнение первой граничной кривой

$$\delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 + \dots$$

Аналогично поступаем для  $n = 1, 2$  и т. д. Избавляясь всякий раз от непериодических членов и ограничиваясь малыми второго порядка малости, получим приближенные уравнения граничных кривых:

$$1) \delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2,$$

$$2) \delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \varepsilon,$$

$$3) \delta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \varepsilon,$$

$$4) \delta = 1 + \frac{5}{12} \varepsilon^2,$$

$$5) \delta = 1 - \frac{1}{12} \varepsilon^2,$$

.....

При малых значениях  $\varepsilon$  границы областей неустойчивости, определяемые по написанным уравнениям, хорошо совпадают с точными границами, вычисленными с помощью разложения решения в тригонометрические ряды. Вообще уравнения этих границ выражаются посредством так называемых функций Матьё [17].

На рис. 92 представлена карта устойчивости, построенная по такому же принципу, как и в предыдущем случае. Сплошные кривые соответствуют периодическому решению с периодом  $2\pi$ , а пунктирные — решению с периодом  $4\pi$ . Устойчивые области заштрихованы.

В заключение сделаем оценку ширины первой области неустойчивости. Пусть имеем уравнение

$$\ddot{q} + k^2 (1 + \mu \cos \omega t) q = 0.$$

Полагая

$$x = \omega t, \quad \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \delta, \quad \delta\mu = \varepsilon,$$

имеем

$$q'' + (\delta + \varepsilon \cos x) q = 0.$$

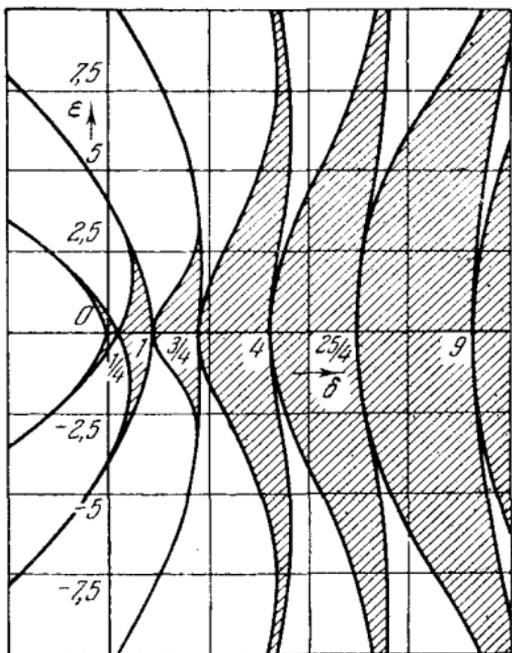


Рис. 92.

Граничные значения  $\delta$  можно записать так:

$$\delta = \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Иначе говоря,

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{4} \mp \frac{1}{2} \varepsilon} \approx \frac{1}{2} (1 \mp \varepsilon),$$

откуда приближенно

$$\omega = 2k (1 \mp \varepsilon).$$

Итак, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  частота критического возбуждения стремится к удвоенной собственной частоте системы.

#### Д. Влияние сопротивления на колебания системы с периодически изменяющейся жесткостью

Ограничимся случаем линейного сопротивления и рассмотрим систему, описываемую уравнением типа Матьё с демпфирующим членом:

$$q'' + 2\zeta q' + (\delta + \varepsilon \cos x) q = 0, \quad (3.149)$$

где, как и ранее,  $x = \omega t$ .

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций

$$q(x) = u(x) v(x). \quad (3.150)$$

Производя дифференцирование и подставляя в (3.149), мы получим некоторое уравнение с двумя зависимыми переменными —  $u(x)$  и  $v(x)$ . Потребуем, чтобы в этом уравнении не было членов с первой производной  $u(x)$ , т. е. чтобы коэффициент при  $u'(x)$  равнялся нулю:

$$v' + \zeta v = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v(x) = C e^{-\zeta x}. \quad (3.151)$$

Тогда для  $u(x)$  остается уравнение

$$u'' + (\delta - \zeta^2 + \varepsilon \cos x) u = 0. \quad (3.152)$$

Иначе говоря, имеем снова уравнение Матьё, в котором вместо  $\delta$  стоит

$$\delta^* = \delta - \zeta^2. \quad (3.153)$$

Будем искать решение (3.133) уравнения (3.152) в виде (3.133)

$$u(x) = e^{hx} \varphi(x),$$

где  $h$  находится по формуле (3.135)

$$h = \frac{1}{2\pi} \ln s,$$

причем  $s$  есть корень определяющего уравнения (3.132). Теперь, учитывая уравнение (3.138), можно написать решение (3.150) в следующем виде:

$$q_j = C_j e^{(\mu_j - \zeta)x} (\cos \nu_j x + i \sin \nu_j x) \varphi_j(x), \quad (3.154)$$

где

$$\mu_j = \frac{1}{2\pi} \ln |s_j|, \quad \nu_j = \frac{1}{2\pi} \arg s_j,$$

причем  $\nu_j$  может быть в частном случае равным нулю или  $\pi$  (в случае вещественных корней определяющего уравнения).

Пусть  $\mu_1 > \mu_2$ ; тогда при

$$\zeta > \mu_1$$

решение получается ограниченным, т. е. областей неустойчивости нет. Вообще же, если  $\zeta < \mu_1$ , эти области суживаются по сравнению с областями неустойчивости системы без демпфирования вследствие наличия в решении (3.154) убывающей экспоненциальной функции  $e^{(\mu_j - \zeta)x}$ .

При наличии затухания возможны также установившиеся периодические движения, получающиеся на границах областей устойчивости и неустойчивости. Применим метод Рэля для отыскания этих движений [28]. Этот же метод может быть применим и к случаю отсутствия затухания; при этом он позволяет найти граничные кривые с любой степенью точности.

Итак, возвращаемся к уравнению (3.149):

$$q'' + 2\zeta q' + (\delta + \varepsilon \cos x) q = 0.$$

Будем искать его решение в виде ряда

$$q = A_1 \sin \frac{x}{2} + B_1 \cos \frac{x}{2} + A_3 \sin \frac{3x}{2} + B_3 \cos \frac{3x}{2} + \dots,$$

иначе говоря,

$$q = \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \left( A_k \sin \frac{kx}{2} + B_k \cos \frac{kx}{2} \right). \quad (3.155)$$



## Е. Примеры

**Пример 1. Обращенный маятник.** Совершенно очевидно, что маятник  $OA$  (рис. 93), повернутый вверх около своей точки опоры  $O$ , неустойчив. Допустим, что этой точке опоры сообщено периодическое движение по вертикали так, что отношение ускорения  $a$  этого движения к ускорению силы тяжести  $g$  есть какая-то периодическая функция времени  $\Theta(t)$ .

Составим по правилам механики уравнение движения маятника в подвижной системе  $Oxy$ :

$$(J + mh^2) \ddot{\varphi} = mgh \sin \varphi + mah \sin \varphi,$$

где  $m$  — масса маятника,  $J$  — его момент инерции относительно центра тяжести  $G$ ,  $h = OG$ . Полагая  $\varphi$  малым углом и линеаризируя уравнение, после упрощения получим

$$\ddot{\varphi} + \kappa^2 [1 + \Theta(t)] \varphi = 0,$$

где

$$\kappa^2 = \frac{mgh}{J + mh^2}, \quad \Theta(t) = \frac{a}{g}, \quad a = \ddot{s}.$$

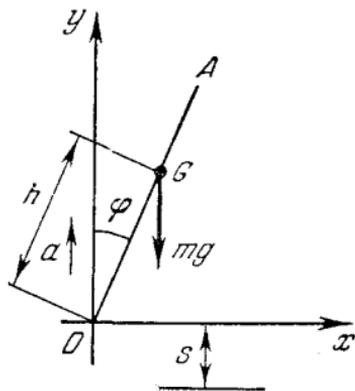


Рис. 93.

Пусть период вертикального движения равен  $\tau$ , и

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Переходя к новой независимой переменной  $x = \omega t$ , имеем:

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \varphi'',$$

где штрихом обозначена производная по  $x$ . Тогда уравнение движения примет вид

$$\varphi'' + \Psi(x) \varphi = 0,$$

где

$$\Psi(x) = - \left( \frac{\kappa}{\omega} \right)^2 \left[ 1 + \Theta \left( \frac{x}{\omega} \right) \right].$$

Иначе говоря, получаем уравнение Хилла. Если предположить, что ускорение  $a$  изменяется по ступенчатому закону (тогда скорость точки  $O$  изменяется в течение полупериода по линейному закону, а перемещение  $s$  — по закону параболы), то приходим к уравнению Мейснера, а если по гармоническому — к уравнению Матьё. Заметим, что в том и другом случае  $\delta < 0$ . Однако карты устойчивости в обоих случаях включают и отрицательные значения  $\delta$ . Таким образом, при определенных значениях параметров движения устойчивость возможна.

**Пример 2. Вертикальные колебания груза на тросе.** Груз  $M$  веса  $G$  подвешен к концу троса  $CD$ , верхний конец которого заделан неподвижно, а в сечении  $A$  трос периодически зажимается тисками (рис. 94). Площадь сечения троса равна  $F$ , модуль упругости  $E$ .

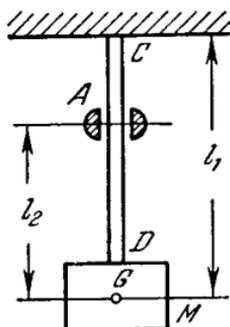


Рис. 94.

Допустим, что время зажатия равно времени освобождения троса, каждое из которых равно  $\frac{\tau}{2}$ . Как и ранее, введем обозначение

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

В данной задаче имеем колебания груза на упругом тросе, длина которого попеременно равна  $l_1$  и  $l_2$ . Введем вспомогательные длины  $l_0$  и  $\Delta l$  по уравнениям:

$$l_1 = l_0 + \Delta l, \quad l_2 = l_0 - \Delta l$$

или

$$l_0 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2), \quad \Delta l = \frac{1}{2}(l_1 - l_2).$$

Тогда коэффициент жесткости  $c$  может быть записан так:

$$c = \frac{EF}{l_0 \mp \Delta l} = \frac{EF}{l_0} \frac{1}{1 \mp \frac{\Delta l}{l_0}}$$

или приближенно

$$c = c_0 (1 \pm \mu),$$

где

$$c_0 = \frac{EF}{l_0}, \quad \mu = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Уравнение движения груза примет вид

$$m\ddot{y} + c_0(1 \pm \mu)y = 0.$$

Получили уравнение Мейснера, которое следует теперь упростить. Введем обозначения:

$$x = \omega t, \quad k^2 = \frac{c_0}{m}.$$

Тогда, принимая за независимое переменное  $x$ , уравнение движения напомним в таком виде

$$y'' + \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 (1 \pm \mu)y = 0.$$

Чтобы привести это уравнение к нормальной форме уравнения Мейснера, положим

$$\delta = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2, \quad \varepsilon = \mu\delta.$$

Следовательно, имеем

$$y'' + (\delta \pm \epsilon) y = 0.$$

Это уравнение нами было исследовано и для него построена карта устойчивости (рис. 91). В координатах  $\delta$ ,  $\epsilon$  уравнение

$$\epsilon = \mu \delta$$

представляет собой прямую, проходящую через начало координат и наклоненную к оси абсцисс под углом  $\vartheta = \arctg \mu$  (рис. 95). Если эту прямую перенести на карту рис. 91, то она пересечет области устойчивости и неустойчивости; следовательно, в рассмотренной системе (рис. 94) возможен параметрический резонанс. Вводя

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1} < 1,$$

имеем

$$\mu = \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}.$$

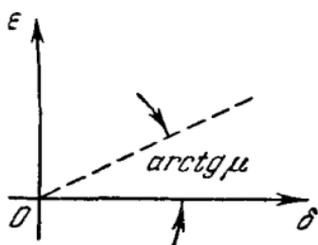


Рис. 95.

Таким образом, задаваясь отношением  $\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 = \delta$ , можно по карте устойчивости определить границы для  $\lambda$ , обеспечивающие устойчивость равновесного положения.

**Пример 3. Кривошипный механизм.** Задача о колебаниях системы коленчатого вала двигателя приводит к дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами \*).

Допустим, что на равномерное вращение вала двигателя с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 96) накладываются крутильные колебания амплитуды  $\alpha$  и круговой частоты  $\nu$ , происходящие по гармоническому закону

$$\psi = \alpha \sin \nu t,$$

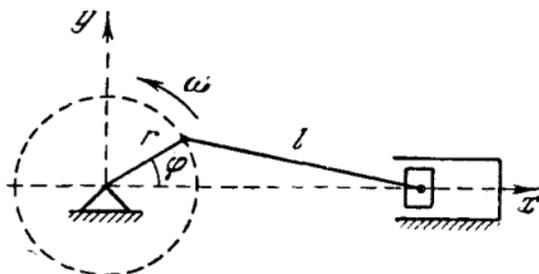


Рис. 96.

где  $\psi$  есть изменение угла  $\varphi$  за счет колебаний, причем угол  $\varphi$  изменяется в среднем по закону

$$\varphi = \omega t.$$

Предполагая для упрощения, что мы имеем дело с одноцилиндровым двигателем, можно считать, что система состоит из следующих

\*) Эта задача впервые рассматривалась немецким ученым Треффцем, а затем подробно была исследована Н. Е. Кочинным. Здесь приводится упрощенное изложение, подробнее см. [20].

частей: маховика, кривошипа, шатуна и поршня. Крутильные колебания возникают в участке вала между маховиком и кривошипом (рис. 97). Массу шатуна, предполагаемого недеформируемым, заменим, как это принято, двумя точечными массами, одну из которых сосредоточим в поршне, а другую — в цапфе кривошипа. Пусть  $x$  есть координата поршня. Тогда кинетическая энергия всей системы может быть записана так:

$$T = T_M + T_K + T_{\Pi},$$

где индекс «м» относится к маховику, «к» — к кривошипу и «п» — к поршню. В свою очередь,

$$T_M = \frac{1}{2} J_M (\omega + \dot{\psi}_M)^2,$$

$$T_K = \frac{1}{2} J_K (\omega + \dot{\psi}_K)^2,$$

$$T_{\Pi} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

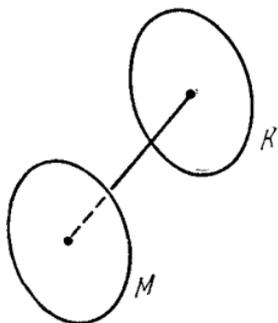


Рис. 97.

Здесь  $J_K$  есть момент инерции кривошипа плюс момент инерции части массы шатуна, сосредоточенной в кривошипе;  $m$  — масса поршня плюс масса части шатуна, сосредоточенной в поршне;  $\psi_M$  и  $\psi_K$  — отклонения углов поворота маховика и кривошипа от их значений при равномерном вращении. Полагая шатун очень длинным, будем считать, что перемещение поршня равно перемещению проекции цапфы кривошипа на оси машины; тогда с точностью до постоянной

$$x = x_K = r \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$\dot{x} = -r \dot{\varphi} \sin \varphi = -r (\omega + \dot{\psi}_K) \sin \varphi,$$

так как угловая скорость кривошипа состоит из постоянной части  $\omega$  и части  $\dot{\psi}_K$ , обусловленной колебаниями. Определяем полную кинетическую энергию системы

$$T = \frac{1}{2} J_M (\omega + \dot{\psi}_M)^2 + \frac{1}{2} \left[ J_K + \frac{1}{2} m r^2 (1 - \cos 2\varphi) \right] (\omega + \dot{\psi}_K)^2.$$

В то же время потенциальная энергия равна

$$\Pi = \frac{1}{2} c (\varphi_M - \varphi_K)^2 = \frac{1}{2} c (\psi_M - \psi_K)^2.$$

Составляем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_K} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_K} + \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_K} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_M} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_M} + \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_M} = 0.$$

Введем обозначение

$$J_{\text{пр}} = J_{\text{к}} + \frac{1}{2} m r^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

Это есть приведенный момент инерции кривошипа, являющийся, как легко видеть, периодической функцией времени. Тогда

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{м}} (\omega + \dot{\psi}_{\text{м}})^2 + \frac{1}{2} J_{\text{пр}} (\omega + \dot{\psi}_{\text{к}})^2.$$

Все производные, входящие в уравнения Лагранжа, вычисляются чрезвычайно просто (особенно, если принять во внимание постоянство  $\omega$ ), кроме производной  $\frac{\partial T}{\partial \psi_{\text{к}}}$ , которая дает

$$\frac{\partial T}{\partial \psi_{\text{к}}} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_{\text{к}}} = \frac{1}{2} m r^2 \sin 2\varphi (\omega + \dot{\psi}_{\text{к}})^2.$$

Если рассматривать колебания вала около состояния покоя, то  $\omega = 0$ , а  $\dot{\psi}_{\text{к}}$  есть исчезающе малая величина, которой можно пренебречь. Тогда имеем простые уравнения

$$\left. \begin{aligned} J_{\text{пр}} \ddot{\psi}_{\text{к}} - c (\psi_{\text{м}} - \psi_{\text{к}}) &= 0, \\ J_{\text{м}} \ddot{\psi}_{\text{м}} + c (\psi_{\text{м}} - \psi_{\text{к}}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{а})$$

Очевидно, при малой угловой скорости вращения имеем право пользоваться этими уравнениями. В общем случае, исследованном Н. Е. Кочиным \*), уравнения получаются более сложными, требующими специальных методов исследования. Мы будем исходить из уравнений (а). Деля первое из них на  $J_{\text{пр}}$ , а второе на  $J_{\text{м}}$ , и вычитая, имеем

$$\ddot{\psi} + c \left( \frac{1}{J_{\text{м}}} + \frac{1}{J_{\text{пр}}} \right) \psi = 0, \quad (\text{б})$$

где

$$\psi = \psi_{\text{м}} - \psi_{\text{к}}.$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение для угла закручивания  $\psi$ . Введя среднее значение приведенного момента инерции

$$J_{\text{ср}} = J_{\text{к}} + \frac{1}{2} m r^2,$$

\*) Кочин Н. Е., О крутильных колебаниях коленчатых валов, Прикладная математика и механика, II, 1934, № 1.

представим выражение в скобках в уравнении (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_{\text{пр}}} &= \frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_{\text{ср}} \left(1 - \frac{mr^2}{2J_{\text{ср}}} \cos 2\omega t\right)} \approx \\ &\approx \frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_{\text{ср}}} \left(1 + \frac{mr^2}{2J_{\text{ср}}} \cos 2\omega t\right) = \\ &= \left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_{\text{ср}}}\right) \left[1 + \frac{J_M mr^2}{2J_{\text{ср}}(J_M + J_{\text{ср}})} \cos 2\omega t\right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$k^2 = c \left(\frac{1}{J_M} + \frac{1}{J_{\text{ср}}}\right), \quad \mu = \frac{J_M mr^2}{2J_{\text{ср}}(J_M + J_{\text{ср}})},$$

где  $k$  есть квадрат собственной частоты при осредненном моменте инерции, а  $\mu$  характеризует глубину пульсации. Имеем

$$\ddot{\psi} + k^2 (1 + \mu \cos 2\omega t) = 0,$$

т. е. уравнение Матьё. Чтобы воспользоваться картой устойчивости, положим

$$x = 2\omega t.$$

Тогда соответственно надо положить

$$\delta = \left(\frac{k}{2\omega}\right)^2, \quad \varepsilon = \delta\mu,$$

и мы имеем

$$\psi'' + (\delta + \varepsilon \cos x) \psi = 0.$$

Таким образом, в кривошипно-шатунном механизме возможно явление параметрического резонанса и при заданной глубине пульсации  $\mu$  можно легко указать области неустойчивости.



Условием совместности этой системы является равенство нулю ее определителя  $\Delta(\lambda)$ , называемого *характеристическим определителем*:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n2}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5), степень которого равна  $2n$ , называется *характеристическим уравнением*. Корни этого уравнения могут быть как вещественными, так и комплексными, но только попарно сопряженными, так как в уравнении (4.5) все коэффициенты вещественны. Во избежание усложнений будем предполагать, что все корни уравнения (4.5) простые \*). Каждому корню  $\lambda_s$  этого уравнения соответствует своя система решений (4.3). Таким образом, полное решение представляется в виде

$$q_j = \sum_{s=1}^{2n} C_j^{(s)} e^{\lambda_s t}. \quad (4.6)$$

На первый взгляд мы имеем  $2n^2$  произвольных постоянных. Однако это не так. Если обозначить через  $A_{ji}(\lambda)$  минор характеристического определителя, соответствующий  $j$ -й строке и  $i$ -му столбцу, то, как известно,

$$C_1^{(s)} : C_2^{(s)} : \dots : C_n^{(s)} = A_{1l}(\lambda_s) : A_{2l}(\lambda_s) : \dots : A_{nl}(\lambda_s), \quad (4.7)$$

где  $l$  — номер строки, которая произвольна. Напомним, что минор  $j$ -й строки и  $i$ -го столбца определителя получается вычеркиванием соответствующих строки и столбца и умножением на  $(-1)^{j+i}$ ; такой минор с учетом знака называется также *алгебраическим дополнением*. Итак, опуская для сокращения записи обозначения зависимости элементов от  $\lambda$ , имеем

$$A_{ji}(\lambda) = (-1)^{j+l} \begin{vmatrix} f_{11} \dots f_{1,i-1} f_{1,i+1} \dots f_{1n} \\ \dots \\ f_{j-1,1} \dots f_{j-1,i-1} f_{j-1,i+1} \dots f_{j-1,n} \\ f_{j+1,1} \dots f_{j+1,i-1} f_{j+1,i+1} \dots f_{j+1,n} \\ \dots \\ f_{n1} \dots f_{n,i-1} f_{n,i+1} \dots f_{nn} \end{vmatrix}.$$

\*) Случай кратных корней подробно разобран в книге [31].

Имея в виду соотношения (4.7), можем написать

$$C_j^{(s)} = K_s A_{lj}(\lambda_s), \quad (4.8)$$

где  $K_1, \dots, K_{2n}$  — произвольные постоянные. Следовательно, произвольных постоянных оказывается как раз столько, сколько нужно, т. е.  $2n$ .

Вещественным корням  $\lambda_s$  соответствуют аperiodические движения, а сопряженным комплексным — колебательные. В самом деле, пусть, например,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — величины сопряженные, т. е.

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Тогда, очевидно, сопряженными должны быть и миноры  $A_{lj}(\lambda_1)$  и  $A_{lj}(\lambda_2)$  для каждого  $j$ . То же можно сказать и о постоянных  $C_j^{(1)}$  и  $C_j^{(2)}$ :

$$C_j^{(1)} = D_j + iE_j, \quad C_j^{(2)} = D_j - iE_j,$$

где  $D_j, E_j$  — действительные постоянные. Иначе говоря, комбинация двух решений дает

$$C_j^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_j^{(2)} e^{\lambda_2 t} = 2e^{\alpha t} (D_j \cos \beta t - E_j \sin \beta t).$$

Вещественные отрицательные корни  $\lambda$  или же отрицательные вещественные части комплексных корней характеристического уравнения определяют собой *устойчивые компоненты движения*, тогда как положительные корни или положительные вещественные части — *неустойчивые компоненты*. Система неустойчива, если неустойчива хотя бы одна компонента. Нулевой корень дает постоянное смещение, а пара чисто мнимых корней — гармоническое колебание. Итак, характер корней влияет на качественную картину движения. В следующих двух параграфах мы подробно рассмотрим вопрос об устойчивости.

## § 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ

### А. Общие понятия

В начале первой главы (§§ 2 и 3) были сформулированы определения устойчивости равновесия и движения системы. Обобщая оба определения, можно говорить об устойчивости состояния системы, под которым подразумевается либо

равновесие, либо заданное движение, когда речь идет о механической системе, либо же вообще какое-то, известное заранее, состояние в общем случае любой системы (например, в электрической системе состояние может характеризоваться совокупностью зарядов и контурных токов). Как уже говорилось ранее (гл. II, § 2), состояние системы характеризуется ее фазой, т. е. совокупностью фазовых координат, которыми в механической системе служат обычно обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и обобщенные скорости  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ .

Мы говорим (см. гл. I, § 3), что система устойчива, если для заданных пределов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  вариаций координат и скоростей соответственно можно указать такие значения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  начальных возмущений, что при начальных условиях

$$|\Delta q_i^0| < \delta_1, \quad |\Delta \dot{q}_i^0| < \delta_2$$

в последующем движении будут выполняться неравенства

$$|\Delta q_i| < \varepsilon_1, \quad |\Delta \dot{q}_i| < \varepsilon_2.$$

Если невозмущенное состояние есть состояние покоя, то вариации скоростей равны самим скоростям, и мы имеем определение устойчивости равновесия; в этом случае обычно и координаты отсчитывают от состояния покоя, т. е. вариации координат принимаются равными этим координатам. Если же невозмущенное состояние есть некоторое заданное движение, то сформулированное определение устойчивости относится к движению. Здесь уже вариации координат и скоростей вообще не совпадают с координатами и скоростями движения соответственно.

Для общности предпочтительнее говорить о фазовых координатах и отсчитывать их от заданного состояния, т. е. брать вариации обобщенных координат и их производные. Тогда для механических систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, число уравнений удвоится, что у нас уже имело место в случае систем с одной степенью свободы при интерпретации движения на фазовой плоскости.

Обозначим эти новые координаты, являющиеся вариациями фазовых, через  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ; для них будем иметь систему  $m$  уравнений первого порядка, которые предположим



где  $j = 1, 2, \dots, m$ . Подставляя эти значения в систему (4.10), после сокращения на  $e^{\lambda t}$  имеем

$$\begin{aligned} (p_{11} - \lambda)C_1 + p_{12}C_2 + \dots + p_{1m}C_m &= 0, \\ p_{21}C_1 + (p_{22} - \lambda)C_2 + \dots + p_{2m}C_m &= 0, \\ \dots & \\ p_{m1}C_1 + p_{m2}C_2 + \dots + (p_{mm} - \lambda)C_m &= 0. \end{aligned}$$

Для совместности этой системы ее характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \dots & p_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} - \lambda \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

должен быть равен нулю, откуда получаем *характеристическое уравнение системы первого приближения*:

$$\Delta(\lambda) = 0. \quad (4.13)$$

Совершенно очевидно, что если система уравнений (4.10) получена из системы (4.1) при  $m = 2n$ , то корни уравнений (4.5) и (4.13) тождественно совпадают. Заметим, что в общей теории устойчивости принято оперировать именно с уравнениями первого порядка типа (4.9) или после линеаризации (4.10). Все сказанное выше о корнях уравнения (4.4) остается в силе и для уравнения (4.13).

Ляпунову принадлежат следующие три теоремы, которые мы сформулируем без доказательства \*).

**1. Теорема об устойчивости по первому приближению.** *Если все корни характеристического уравнения (4.13) системы первого приближения (4.10) имеют отрицательные вещественные части (в частности, они вещественны и отрицательны), то система, описываемая полными уравнениями (4.9), устойчива.*

**2. Теорема о неустойчивости по первому приближению.** *Если среди корней характеристического уравнения (4.13) системы первого приближения (4.10) встречается хотя бы один вещественный или хотя бы одна*

\*) Доказательство приводимых здесь теорем Ляпунова можно найти в [12], [31], [14].

пара комплексных сопряженных с положительной вещественной частью при всех прочих корнях, имеющих отрицательные вещественные части, то система, описываемая полными уравнениями (4.9), неустойчива.

**3. Теорема об особенных случаях.** Если среди корней характеристического уравнения (4.13) системы первого приближения (4.10) встречаются хотя бы один нулевой или одна пара чисто мнимых корней, то по уравнениям первого приближения невозможно сделать заключение об устойчивости или неустойчивости исходной системы (4.9).

Оценка устойчивости линейных систем по виду корней характеристического уравнения, изложенная в предыдущем параграфе, очевидна. На основании первых двух теорем Ляпунова мы можем заключить, что нелинейные части  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , разложенные в степенные ряды, не влияют на характер устойчивости, установленный по уравнениям первого приближения. Именно, эти части не могут «испортить» устойчивую систему и «спасти» неустойчивую. Но вот особенные случаи надо исследовать уже с учетом нелинейных членов.

Напомним, что, занимаясь изучением нелинейных колебаний систем с одной степенью свободы при интерпретации движения на фазовой плоскости, мы уже касались в неявном виде этих теорем (стр. 132). В самом деле, было указано, что дифференциальное уравнение (3.8) фазовой траектории нелинейной системы, т. е. уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + Q_1(x, y)}{cx + dy + P_1(x, y)}$$

дает ту же топологическую структуру, а следовательно, и те же особые точки, что и линейная система (для которой  $P_1(x, y) = Q_1(x, y) = 0$ ), если только коэффициенты линейной части разложений (т. е.  $a, b, c$  и  $d$ ) одновременно не равны нулю. В противном случае [ $P_1(x, y) \neq 0, Q_1(x, y) \neq 0$ ] получаются особые точки высшего порядка, неизвестные в теории линейных систем. Таким образом, в первом случае мы имеем геометрическую интерпретацию первых двух теорем Ляпунова, а во втором — третью теорему, когда принципиальную роль играют члены высших порядков.

В заключение заметим, что в некоторых задачах из уравнений движения исключается время и в качестве независимого

переменного принимается какая-либо координата, называемая *основной* или *несущей*. Тогда можно оценивать устойчивость движения по отношению к этой координате. Однако это уже будет устойчивость не в смысле близости возмущенного и невозмущенного состояния системы, а в смысле близости траекторий. Такая устойчивость называется *орбитальной*. С ней приходится, например, встречаться в технике железнодорожного транспорта, когда несущей координатой является длина дуги (в частности, прямой) осевой линии рельсового пути; относительно этой координаты и оценивается устойчивость, а не относительно времени. В теории часовых механизмов играет существенную роль фазовая диаграмма и, следовательно, устойчивость фазовой траектории. Таким образом, здесь имеем также орбитальную устойчивость.

## В. Примеры

**Пример 1.** Материальная точка массы  $m$  описывает окружность радиуса  $r_0$  под действием центральной силы притяжения, пропорциональной  $n$ -й степени радиуса. Найти условия устойчивости траектории в зависимости от  $n$ .

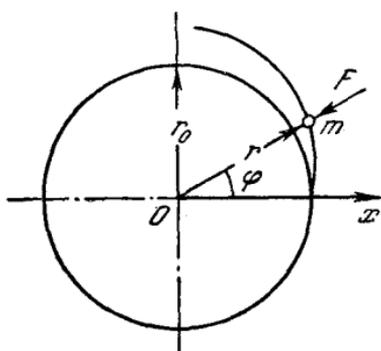


Рис. 98.

В курсе теоретической механики [11] выводится формула Бинэ для движения под действием центральной силы:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2} \left( \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right).$$

Здесь  $F$  — сила взаимодействия точки  $m$  с центром силы  $O$  (знак минус соответствует силе притяжения),  $c$  — постоянная площадей, или удвоенная секторная скорость точки. В нашем случае  $F = -ar^n$ , где  $a$  — неко-

торый коэффициент. На рис. 98 показана основная траектория в виде окружности и часть возмущенной.

Вводя обозначение

$$u = \frac{1}{r}$$

и приравняв оба выражения для  $F$ , имеем

$$u'' + u = \frac{a}{mc^2} \frac{1}{u^{n+2}},$$

где штрихами обозначена вторая производная по  $\varphi$ . Применяя метод возмущения, полагаем

$$u = u_0 + z,$$

где  $z$  — возмущение орбиты. Так как в невозмущенном состоянии  $u'' = 0$ ,  $u_0 = \frac{1}{r_0}$ , то

$$\frac{a}{mc^2} = u_0^{n+3}.$$

Составляем варьированное уравнение орбиты:

$$z'' + u_0 + z = \frac{u_0^{n+3}}{(u_0 + z)^{n+2}}$$

или

$$z'' + u_0 + z = u_0 \left(1 + \frac{z}{u_0}\right)^{-n-2}.$$

Разлагая правую часть в биномиальный ряд, линейризуя и сокращая, получаем

$$z'' + z + (n+2)z = 0$$

или

$$z'' + (n+3)z = 0.$$

Если  $n+3 < 0$ , имеем условие второй теоремы Ляпунова, траектория неустойчива; если  $n+3 \geq 0$ , имеем особые случаи (третья теорема), для рассмотрения которых нужно взять следующие члены разложения. Случай  $n+3 > 0$  будет отвечать устойчивой траектории и условие устойчивости определится неравенством

$$n > -3.$$

В случае  $n = -2$  имеем изменение силы  $F$  по закону всемирного тяготения.

Пример 2. Даны следующие уравнения движения:

$$\dot{x} = y + ax^3, \quad \dot{y} = -x + ay^3.$$

Исследовать вопрос об устойчивости.

Если ограничиться уравнением первого приближения, то, отбросив члены с  $a$ , получим

$$\ddot{x} + x = 0,$$

для которого характеристическое уравнение имеет мнимые корни,  $\lambda = \pm i$ . В этом случае решение линейного уравнения имеет вид

$$x = A \cos(t + \beta).$$

Однако, согласно 3-й теореме Ляпунова, мы не можем ничего сказать об устойчивости исходной системы.

Рассмотрим в плоскости  $Oxy$  (рис. 99) произвольную точку  $M$  с радиусом-вектором  $r$ . Обозначим квадрат этого радиуса через  $\rho$ :

$$\rho = x^2 + y^2.$$

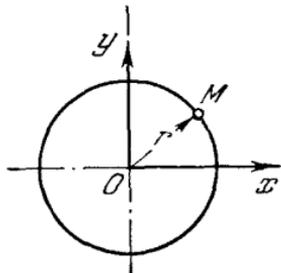


Рис. 99.

Далее возьмем производную по времени от  $\rho$  с учетом уравнения движения:

$$\frac{d\rho}{dt} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2\alpha(x^2 + y^2).$$

Теперь мы можем сказать, что если  $\alpha < 0$ , то  $\frac{d\rho}{dt} < 0$ , и  $\rho$  убывает, стремясь к нулю (по условию всегда  $\rho > 0$ ). Если же  $\alpha > 0$ , то  $\frac{d\rho}{dt} > 0$  и  $\rho$  неограниченно возрастает.

Итак, при  $\alpha < 0$  движение устойчиво. При  $\alpha > 0$  — неустойчиво. Заметим, что идея, положенная в рассмотрение этого примера, по существу есть идея так называемого второго метода Ляпунова \*).

### § 3. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Признаки, позволяющие делать заключение об устойчивости системы без решения дифференциальных уравнений движения, называют *критериями устойчивости*. Весьма удобный критерий устойчивости, опирающийся на соотношения между коэффициентами характеристического уравнения, был дан в 1877 г. Раусом и в 1895 г. в измененной, но более удобной форме Гурвицем.

Допустим, что мы имеем характеристическое уравнение с вещественными коэффициентами:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (4.14)$$

где  $a_0 > 0$ , что, конечно, не является ограничением. Будем называть корни этого уравнения *устойчивыми*, если они вещественные, отрицательные или комплексные с отрицательной вещественной частью. Образует из коэффициентов

\*) О втором методе Ляпунова см., например, [14].

определители по следующему закону:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \\ \dots, D_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n & \dots \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где  $a_k = 0$ , если  $k > n$ .

Коэффициентный критерий устойчивости определяется *теоремой Гурвица*: для того, чтобы все корни уравнения (4.14) были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы все определители (4.15) были положительны.

Не приводя доказательства этой теоремы по причине его сложности, ограничимся ее проверкой для простейших случаев \*). Предварительно разделим уравнение (4.14) на  $a_0$  и введем обозначения

$$A_k = \frac{a_k}{a_0}. \quad (4.16)$$

Кроме того, имея в виду вообще комплексные корни, будем писать  $z = x + iy$  вместо  $\lambda$ . Итак, будем исследовать уравнение

$$z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0. \quad (4.17)$$

1) Очевидно, для устойчивости единственного корня должно быть  $A_1 > 0$ , а поэтому и  $D_1 > 0$ ;

2) при  $n = 2$  уравнение (4.17) принимает вид

$$z^2 + A_1 z + A_2 = 0.$$

Обозначая корни этого уравнения через  $z_1$  и  $z_2$ , имеем

$$A_1 = -(z_1 + z_2), \quad A_2 = z_1 z_2.$$

\*) Доказательство критерия Гурвица можно найти в литературе, посвященной вопросам устойчивости движения, см., например, [3<sup>1</sup>].

Легко видеть, что как в случае действительных отрицательных, так и комплексных корней с отрицательной вещественной частью, должно быть  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ , т. е.  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ .

3)  $n = 3$ ;

$$z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0. \quad (a)$$

Найдем выражение критерия Рауса для этого случая. Будем рассматривать изменение корней в зависимости от изменения коэффициентов  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , которые для удобства можно предположить зависящими от некоторого параметра  $u$ . Тогда при изменении этого параметра аффикс каждого корня  $z_k$  (рис. 100), т. е. соответствующая точка в комплексной плоскости корней, описывает какую-то траекторию. Назовем правую полуплоскость областью неустойчивых корней,

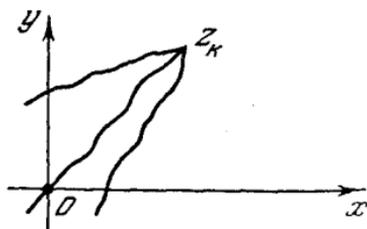


Рис. 100.

а левую — областью устойчивых корней. Ось  $Oy$  является границей устойчивости; на ней корни делаются чисто мнимыми или нулевыми.

Положим, что на границе устойчивости  $z_k = 0$ . Тогда  $A_3 = 0$ . Обратно, изменение знака  $A_3$  свидетельствует об изменении распределения корней по областям устойчивости и неустойчивости.

Допустим теперь, что  $z_k$  находится на границе устойчивости, принимая чисто мнимое значение  $z_k = iy_k$ . Подставляя это значение в уравнение (a) и отбрасывая для упрощения индексы, получаем

$$-iy^3 - A_1 y^2 + A_2 iy + A_3 = 0.$$

Написанное равенство возможно лишь в том случае, если

$$-A_1 y^2 + A_3 = 0; \quad (y^2 - A_2) y = 0.$$

Исключая отсюда  $y$ , получаем уравнение

$$A_1 A_2 - A_3 = 0,$$

левая часть которого есть так называемый *дискриминант Рауса*:

$$\Psi_3 = A_1 A_2 - A_3. \quad (4.18)$$

Найдем знак этого дискриминанта в области устойчивости, для чего разобьем левую часть уравнения (а) по корням:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0.$$

и из сравнения коэффициентов напишем соотношения:

$$\begin{aligned} A_1 &= -(z_1 + z_2 + z_3), \\ A_2 &= (z_1 + z_2)z_3 + z_1z_2, \\ A_3 &= -z_1z_2z_3. \end{aligned}$$

Если все  $z_k$  вещественны и отрицательны, то, очевидно:

$$A_1 > 0; \quad A_2 > 0; \quad A_3 > 0.$$

Допустим теперь, что

$$z_1 = -p + iq, \quad z_2 = -p - iq, \quad z_3 = -r,$$

где  $p, q, r$  — действительные положительные числа. Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= 2p + r > 0, \\ A_2 &= p^2 + q^2 + 2pr > 0, \\ A_3 &= r(p^2 + q^2) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, положительность коэффициентов есть необходимое условие устойчивости, однако это условие не является достаточным. Для вывода достаточного признака сделаем сначала предположение, что при наличии двух устойчивых корней — действительных или комплексных — один действительный корень переходит из устойчивой области в неустойчивую. Очевидно, при этом  $A_3$ , перейдя через нуль, станет отрицательным.

Сделаем, далее, предположение, что пара комплексных корней переходит в неустойчивую область. Положим

$$p = \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — малая величина, положительная или отрицательная. Подставляя значения  $A_1, A_2, A_3$  в  $\Psi_3$  и отбрасывая малые высших порядков, найдем:

$$\Psi_3 = 2\varepsilon(q^2 + r^2).$$

Следовательно, при переходе комплексных корней в неустойчивую область ( $\varepsilon < 0$ ) дискриминант Рауса  $\Psi_3$  делается отрицательным.

Если все три корня переходят через границу устойчивости, то меняют знак не только  $\Psi_3$ , но также  $A_1$  и  $A_3$ .

Итак, критерий устойчивости Рауса для уравнения 3-й степени заключается в выполнении неравенств

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad A_1 A_2 - A_3 > 0,$$

причем одно из первых двух неравенств следует из остальных. Нетрудно убедиться, что с помощью критерия Гурвица мы получим аналогичные условия.

4)  $n = 4$ ;

$$z^4 + A_1 z^3 + A_2 z^2 + A_3 z + A_4 = 0.$$

На границе устойчивости при  $z_k = 0$ ,  $A_4 = 0$ . Если  $z_k = iy_k$ , то, отбрасывая индексы, имеем

$$y^4 - iA_1 y^3 - A_2 y^2 + iA_3 y + A_4 = 0,$$

откуда

$$y^4 - A_2 y^2 + A_4 = 0, \quad (A_1 y^2 - A_3) y = 0.$$

Предположим, что  $y \neq 0$ . Приходим к уравнению

$$A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 = 0,$$

в левой части которого стоит дискриминант Рауса

$$\Psi_4 = A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4. \quad (4.19)$$

Обозначая корни уравнения через  $z_1, z_2, z_3, z_4$  подобно предыдущему, легко находим

$$A_1 = -[(z_1 + z_2) + (z_3 + z_4)],$$

$$A_2 = (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1 z_2 + z_3 z_4,$$

$$A_3 = -[(z_1 + z_2)z_3 z_4 + (z_3 + z_4)z_1 z_2],$$

$$A_4 = (z_1 z_2)(z_3 z_4).$$

Можно убедиться, что при всех устойчивых корнях эти коэффициенты положительны. Предположим теперь, что по крайней мере один из корней переходит в неустойчивую область. Если это произойдет с одним действительным корнем, то меняет знак по крайней мере коэффициент  $A_4$ , то же будет при одновременном переходе через границу устойчивости трех корней. При всех неустойчивых корнях по крайней мере  $A_1 < 0$ .

Допустим теперь, что одна пара комплексных корней, например  $z_1$  и  $z_2$ , переходит в неустойчивую область, тогда

как другая пара корней остается в устойчивой области. Эти последние могут быть также действительными. Мы можем положить

$$z_1 = -\varepsilon + i\gamma, \quad z_2 = -\varepsilon - i\gamma,$$

где  $\varepsilon$  — какая-то малая величина. Тогда

$$z_1 + z_2 = -2\varepsilon, \quad z_1 z_2 = \varepsilon^2 + \gamma^2.$$

Вследствие устойчивости корней  $z_3$  и  $z_4$  можно положить

$$z_3 + z_4 = -\alpha, \quad z_3 z_4 = \beta,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Составим выражение дискриминанта с точностью до малых первого порядка относительно  $\varepsilon$ . Имеем

$$\Psi_4 = 2[\alpha^2 \gamma^2 + (\beta + \gamma^2)^2] \alpha \varepsilon.$$

Итак, знак  $\Psi_4$  совпадает со знаком  $\varepsilon$ , т. е. в устойчивой области дискриминант положителен.

Если одновременно два действительных корня переходят из устойчивой области в неустойчивую, то можно положить

$$z_1 = -\varepsilon, \quad z_2 = -\eta, \quad z_3 + z_4 = -\alpha, \quad z_3 z_4 = \beta,$$

где  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — положительные величины, из которых  $\varepsilon$  и  $\eta$  — малые. Тогда, подобно предыдущему приближению находим

$$\Psi_4 = (\varepsilon + \eta) \alpha \beta^2,$$

т. е. и в этом случае дискриминант  $\Psi$  переходит от положительных значений к отрицательным.

Таким образом, условия устойчивости заключаются в выполнении неравенств:

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad A_4 > 0,$$

$$A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 > 0,$$

причем одно из двух первых неравенств есть следствие остальных. Подобно предыдущему, легко проверить выполнение условий Гурвица. В самом деле,

$$D_1 = a_1 = a_0 A_1 > 0,$$

$$D_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 = a_0^3 (A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4) > 0,$$

$$D_4 = a_4 D_3 = a_0 A_4 D_3 > 0.$$

Но

$$A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 = A_3 (A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4 > 0.$$

Следовательно,

$$A_1 A_2 - A_3 > \frac{A_1^2 A_4}{A_3} > 0,$$

а поэтому

$$D_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 = a_0^2 (A_1 A_2 - A_3) > 0.$$

Для уравнения высших степеней вывод условий устойчивости получается уже значительно более сложным.

**Пример.** Характеристическое уравнение некоторой системы первого приближения имеет вид:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + k\lambda + 1 = 0.$$

Определить области значения неизвестного пока коэффициента  $k$ , чтобы система была устойчива.

Здесь

$$A_1 = 2, \quad A_2 = A_4 = 1.$$

Условия

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_4 > 0$$

выполняются. Очевидно, что устойчивость возможна лишь в том случае, если  $A_3 = k > 0$ . Однако это условие необходимое, но еще не достаточное. Образует дискриминант Рауса

$$\Psi_4 = A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 = 2k - k^2 - 4.$$

Для устойчивости должно быть

$$\Psi_4 > 0.$$

Найдем корни уравнения  $\Psi_4 = 0$ :

$$k^2 - 2k + 4 = 0, \quad k_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

Итак, корни комплексные, а поэтому  $\Psi_4$  сохраняет свой знак при любом  $k$ . Но при  $k$ , равном нулю,  $\Psi_4 = -4 < 0$ , следовательно, условие положительности дискриминанта Рауса не выполнено, и ни при каких значениях коэффициента  $k$  система не может быть устойчива. Такие системы называются *структурно неустойчивыми*.

#### § 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРЕНЕБРЕЖИМО МАЛОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Предположим, что силы сопротивления столь малы, что ими можно пренебречь. Тогда все  $b_{ij} = 0$  (4.2), и уравнение (4.1) примет вид

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} p^2 + c_{ij}) q_j = 0, \quad (4.20)$$



или

$$\alpha_i^{(s)} = K_s A_{ji} (k_s^2). \quad (4.25)$$

Каждому корню  $k_s^2$  соответствует система значений  $q_j$  по формуле (4.21), определяющая так называемое *главное колебание* нашей системы. Общее решение получается в результате суммирования частных решений, т. е. полное движение системы есть результат наложения главных колебаний. Это есть так называемый принцип *суперпозиции (наложения) колебаний*. Итак, имеем

$$q_j = \sum_{s=1}^n K_s A_{ji} (k_s^2) \sin(k_s t + \beta_s), \quad (4.26)$$

где  $K_s$ ,  $\beta_s$  — произвольные постоянные,  $j$  — номер произвольной строки определителя частот. Здесь мы имеем  $n$  постоянных  $K_s$  и  $n$  постоянных  $\beta_s$  — всего  $2n$  произвольных постоянных. Миноры, соответствующие каждому корню  $k_s^2$ , определяют, как говорят, *форму главного колебания*, т. е. отношение амплитуд с учетом синфазности или антифазности. На этом в общем виде задача может считаться решенной.

Все расчеты упрощаются, если обобщенные координаты подобны так, что в выражении кинетической энергии все  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и в выражении потенциальной энергии все  $c_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Иначе говоря, вместо формул (1.30) и (1.34) соответственно имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i q_i^2, \quad (4.27)$$

где поставлено  $a_i$  вместо  $a_{ij}$  и  $c_i$  вместо  $c_{ij}$ , так как суммирование выражается уже по одному индексу. Координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , удовлетворяющие таким условиям, называются *главными, или нормальными*. Система совокупных дифференциальных уравнений движения (4.20) в этом случае превращается в систему независимых между собой дифференциальных уравнений

$$(a_i p^2 + c_i) q_i = 0, \quad (4.28)$$

где  $t = 1, 2, \dots, n$ . Решение имеет вид:

$$q_i = \alpha_i \sin(k_i t + \beta_i), \quad (4.29)$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  — произвольные постоянные, а круговые частоты  $k_i$  определяются по известным формулам:

$$k_i = \sqrt{\frac{c_i}{a_i}}. \quad (4.30)$$

Может возникнуть вопрос: если координаты избранной системы не являются главными, возможно ли путем соответствующего преобразования перейти к главным координатам? Оказывается, что этот вопрос имеет утвердительный ответ. Именно, всегда можно подобрать линейное преобразование координат, приводящее две квадратичные формы  $T$  и  $\Pi$ , выражаемые формулами (1.29) и (1.33), к виду (4.27), т. е. всегда можно подобрать главные координаты. При этом вся совокупность частот или, как говорят, *спектр частот* не изменяется. В самом деле, частоты связаны с физическими свойствами системы и, конечно, не могут зависеть от того или иного выбора координат.

Отыскание главных координат в общем случае представляет собой задачу не легче, чем решение уравнения частот при произвольно выбранных координатах, вследствие чего к ним прибегают, главным образом, в теоретических выкладках. Мы воспользуемся ими, например, при исследовании затухающих колебаний и при изучении резонанса. При этом ограничимся лишь случаем двух степеней свободы. Конечно, задача оказывается весьма простой, если мы сразу сможем указать главные координаты.

Покажем теперь, что уравнение частот (4.24) имеет относительно  $k^2$  все действительные положительные корни. Допустим среди этих корней имеются комплексные сопряженные. Например,

$$k_1^2 = \xi + i\eta, \quad k_2^2 = \xi - i\eta.$$

Тогда должны быть попарно сопряженными такие соответствующие миноры определителя, как, например,  $A_{jr}(k_1^2)$  и  $A_{jr}(k_2^2)$ . Этим минорам пропорциональны соответствующие амплитуды колебаний

$$\alpha_r^{(1)} = K_1 A_{jr}(k_1^2), \quad \alpha_r^{(2)} = K_2 A_{jr}(k_2^2).$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — произвольные постоянные, которые можно принять, например, равными единице. В таком случае  $\alpha_r^{(1)}$  и  $\alpha_r^{(2)}$  оказываются также сопряженными. Положим

$$\alpha_r^{(1)} = x_r + iy_r, \quad \alpha_r^{(2)} = x_r - iy_r.$$

Напишем теперь одно из уравнений, служащих для определения амплитуд, соответствующих корню  $k_1^2$ :

$$\sum_{r=1}^n (c_{jr} - a_{jr} k_1^2) \alpha_r^{(1)} = 0.$$

Умножим каждое из этих уравнений на  $\alpha_j^{(2)}$  и просуммируем по  $j$  от 1 до  $n$ :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (c_{jr} - a_{jr} k_1^2) \alpha_r^{(1)} \alpha_j^{(2)} = 0.$$

Подставляя сюда значения  $\alpha_r^{(1)}$  и  $\alpha_r^{(2)}$  и производя перегруппировку членов, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (c_{jr} - a_{jr} k_1^2) (x_r x_j + y_j y_r) + \\ + i \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (c_{jr} - a_{jr} k_1^2) (x_j y_r - x_r y_j) = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что все члены второй двойной суммы попарно сокращаются, вследствие чего, разрешая написанное уравнение относительно  $k_1^2$ , находим

$$k_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n c_{jr} x_j x_r + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n c_{jr} y_j y_r}{\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n a_{jr} x_j x_r + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n a_{jr} y_j y_r}.$$

Мы видим, что  $k_1^2$  есть действительная величина, вследствие чего  $\eta = 0$ , а тогда действительными должны быть и амплитуды, т. е. все  $y_j = 0$ . Остается показать положи-

тельность  $k_1^2$ . Для этой цели перепишем предыдущее выражение так:

$$k_1^2 = \frac{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n c_{jr} x_j x_r}{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n a_{jr} y_j y_r}.$$

Здесь в числителе стоит квадратичная форма, равная значению потенциальной энергии системы, в предположении, что обобщенные координаты  $q_j = x_j$ ; аналогично в знаменателе оказывается кинетическая энергия при  $\dot{q}_j = \dot{x}_j$ , т. е.

$$k_1^2 = \frac{\Pi(x)}{T(x)}.$$

Так как  $\Pi(x)$  и  $T(x)$  — знакоопределенные положительные квадратичные формы, то  $k_1^2$  есть величина не только действительная, но и положительная, что и требовалось доказать. Заметим, что  $\sqrt{k^2}$  мы берем только с положительным знаком, так как вследствие произвольности  $K_s$  и  $\beta_s$  отрицательные значения  $k$  не дают нового решения.

Решение уравнения частот, как и характеристического уравнения, представляет собой уже чисто алгебраическую задачу. Известно, что точное решение этой задачи вообще возможно лишь для полных уравнений не выше 4-й степени. Но даже для уравнений 3-й и 4-й степени применение регулярных методов практически бывает затруднительно. Поэтому часто пользуются всевозможными численными и графическими методами приближенного решения, применимыми также к уравнениям высоких степеней. Иногда бывает возможно левую часть характеристического уравнения представить, хотя бы приближенно, в виде произведения двух или большего числа полиномов достаточно низких степеней, и тогда решение значительно облегчается. В ряде конкретных случаев заранее заготавливаются специальные таблицы, графики или номограммы, с помощью которых получается достаточно быстрое и вполне удовлетворительное решение.

Пример. Продольные колебания системы, состоящей из четырех грузов равных масс  $m$ , связанных попарно тремя одинаковыми пружинами с коэффициентом жесткости  $c$  (рис. 101).

За обобщенные координаты примем расстояния  $x_1, x_2, x_3, x_4$  центров тяжести грузов от их положений равновесия, причем очевидно, что положения одного какого-либо груза мы можем

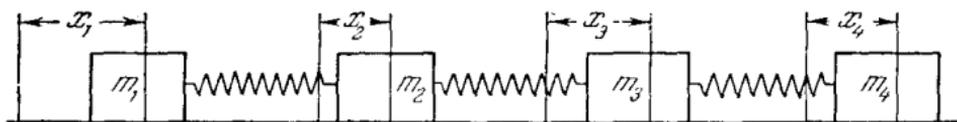


Рис. 101.

задавать произвольно. С помощью выражений кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2 + m_4 \dot{x}_4^2),$$

$$П = \frac{1}{2} [c_1 (x_2 - x_1)^2 + c_2 (x_3 - x_2)^2 + c_3 (x_4 - x_3)^2]$$

составим дифференциальные уравнения движения:

$$m_1 \ddot{x}_1 - c_1 (x_2 - x_1) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_1 (x_2 - x_1) - c_2 (x_3 - x_2) = 0,$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + c_2 (x_3 - x_2) - c_3 (x_4 - x_3) = 0,$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + c_3 (x_4 - x_3) = 0.$$

Интересно отметить, что, складывая почленно эти уравнения, получаем

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + m_3 \ddot{x}_3 + m_4 \ddot{x}_4 = 0,$$

откуда

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 + m_4 \dot{x}_4 = \text{const},$$

т. е. сумма количеств движения всех масс сохраняет постоянную величину, что вполне понятно, так как внешние силы отсутствуют. Мы можем поэтому утверждать, что одна из четырех степеней свободы обусловлена продольным движением всей системы в целом как сплошного твердого тела, а остальные три соответствуют колебаниям.

По условию  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ ;  $c_1 = c_2 = c_3 = c$ . Тогда дифференциальные уравнения движения можно написать так:

$$m \ddot{x}_1 + c x_1 - c x_2 = 0,$$

$$m \ddot{x}_2 - c x_1 + 2c x_2 - c x_3 = 0,$$

$$m \ddot{x}_3 - c x_2 + 2c x_3 - c x_4 = 0,$$

$$m \ddot{x}_4 - c x_3 + c x_4 = 0.$$

Уравнение частот имеет вид

$$\begin{vmatrix} c - mk^2 & -c & 0 & 0 \\ -c & 2c - mk^2 & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c - mk^2 & -c \\ 0 & 0 & -c & c - mk^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Можно показать, что один из четырех корней этого уравнения равен нулю, что соответствует упомянутому движению всей системы в целом. В самом деле, величина определителя, как известно, не изменится, если ко всем элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки. Прибавим к элементам первой строки соответствующие элементы всех прочих строк. Тогда все элементы первой строки будут содержать множитель  $k^2$ , который мы можем вынести за знак определителя, получив при этом

$$k^2 \begin{vmatrix} -m & -m & -m & -m \\ -c & 2c - mk^2 & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c - mk^2 & -c \\ 0 & 0 & -c & c - mk^2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. один корень действительно равен нулю.

Вводя для сокращения обозначение

$$\frac{mk^2}{c} = z,$$

перепишем уравнение частот в упрощенном виде

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1 - z & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 - z & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 - z & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 - z \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(1 - z) \begin{vmatrix} 2 - z & -1 & 0 \\ -1 & 2 - z & -1 \\ 0 & -1 & 1 - z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 - z & -1 \\ 0 & -1 & 1 - z \end{vmatrix} = 0,$$

и вычислим по известным правилам входящие сюда определители третьего порядка:

$$(1 - z) [(2 - z)^2 (1 - z) - (1 - z) - (2 - z)] + \\ + [-(2 - z)(1 - z) + 1] = 0.$$

После упрощений приходим к уравнению

$$z^4 - 6z^3 + 10z^2 - 4z = 0.$$

Это уравнение имеет один очевидный корень  $z = 0$ . Для отыскания других корней надо решить кубическое уравнение

$$z^3 - 6z^2 + 10z - 4 = 0.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что  $z = 2$  есть корень этого уравнения. Делением на  $z - 2$  приходим к квадратному уравнению

$$z^2 - 4z + 2 = 0,$$

корни которого имеют вид

$$z = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Располагая корни в возрастающем порядке, имеем

$$z_1 = 0, z_2 = 2 - \sqrt{2}, z_3 = 2, z_4 = 2 + \sqrt{2}.$$

Зная  $z$ , легко найти  $k$ , а также период  $\tau$  каждого главного колебания.

Займемся теперь отысканием формы главных колебаний. Известно, что амплитуды колебаний пропорциональны минорам соответствующих элементов какой-либо строки определителя частот. Составим миноры, например, для первой строки

$$A_{11}(z) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-z & -1 & 0 \\ -1 & 2-z & -1 \\ 0 & -1 & 1-z \end{vmatrix},$$

$$A_{12}(z) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-z & -1 \\ 0 & -1 & 1-z \end{vmatrix},$$

$$A_{13}(z) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2-z & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-z \end{vmatrix},$$

$$A_{14}(z) = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2-z & -1 \\ 0 & -1 & 2-z \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя последовательно все корни, находим

- 1)  $z = 0, A_{11} = 1, A_{12} = 1, A_{13} = 1, A_{14} = 1;$
- 2)  $z = 2 - \sqrt{2}, A_{11} = -1, A_{12} = -(\sqrt{2} - 1), A_{13} = \sqrt{2} - 1, A_{14} = 1;$
- 3)  $z = 2, A_{11} = 1, A_{12} = -1, A_{13} = -1, A_{14} = 1;$
- 4)  $z = 2 + \sqrt{2}, A_{11} = -1, A_{12} = \sqrt{2} + 1, A_{13} = -(\sqrt{2} + 1), A_{14} = 1.$

Эти результаты удобно представить графически, откладывая по ординатам отклонения грузов в какой-либо момент времени, иначе говоря, откладывая значения миноров (рис. 102).

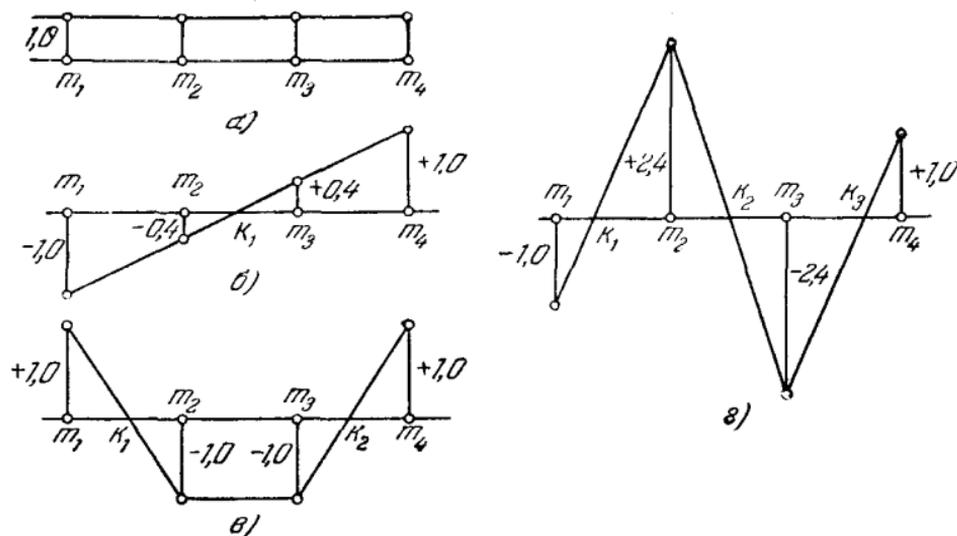


Рис. 102.

Схема *a* дает «нулевую» форму — равномерное движение системы, как твердого тела, схемы *b*, *v* и *г* дают соответственно 1, 2 и 3-ю формы колебаний. Буквой *K* отмечены узлы, т. е. такие точки в системе, которые в данном колебании остаются в покое.

## § 5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрим свободные незатухающие колебания системы с двумя степенями свободы. В этом случае уравнения движения (4.20) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}p^2 + c_{11})q_1 + (a_{12}p^2 + c_{12})q_2 &= 0, \\ (a_{12}p^2 + c_{12})q_1 + (a_{22}p^2 + c_{22})q_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  и  $c_{ij}$  входят в выражения кинетической энергии  $T$  и потенциальной энергии  $\Pi$ :

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad (4.32)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2). \quad (4.33)$$

Согласно теореме Сильвестра (стр. 26), для того чтобы квадратичные формы  $T$  и  $\Pi$  были знакоопределенными, положительными, должны выполняться неравенства:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0; \\ c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Решение системы

$$q_1 = \alpha_1 \sin(kt + \beta), \quad q_2 = \alpha_2 \sin(kt + \beta) \quad (4.35)$$

подставим в уравнение (4.31). Сокращая на  $\sin(kt + \beta)$ , получим

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}k^2) \alpha_1 + (c_{12} - a_{12}k^2) \alpha_2 &= 0, \\ (c_{12} - a_{12}k^2) \alpha_1 + (c_{22} - a_{22}k^2) \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Уравнение частот (4.24) в этом случае принимает вид

$$\Delta(k^2) = (c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (4.37)$$

Даже не прибегая к доказанной общей теореме о положительности корней уравнения частот, мы можем сделать в этом случае заключение о характере корней на основании очень простых соображений. Предположим для определенности, что

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}},$$

введем обозначение  $z = k^2$ . Далее дадим величине  $z$  ряд значений и определим в каждом случае знак  $\Delta(z)$ . Принимая во внимание неравенства (4.34), имеем

$$\begin{aligned} \Delta(0) &= c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \\ \Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) &= -\left(c_{12} - a_{12}\frac{c_{11}}{a_{11}}\right)^2 < 0, \\ \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) &= -\left(c_{12} - a_{12}\frac{c_{22}}{a_{22}}\right)^2 < 0, \\ \Delta(+\infty) &= +\infty > 0. \end{aligned}$$

Последнее соотношение справедливо в силу того, что знак  $\Delta(+\infty)$  определяется знаком старшего относительно  $z$  члена, именно, знаком коэффициента при  $z^2$ , который в силу (4.34) положителен

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Корни  $\Delta(z)$ , а их два, лежат в тех интервалах, где  $\Delta(z)$  меняет знак, т. е.

$$0 < z_1 < \frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}} < z_2 < \infty.$$

В точках  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 103) парабола пересекает ось абсцисс, что является геометрической интерпретацией установленного факта. Итак, корни уравнения частот действительны и положительны. Предельный случай мы имеем при

$$\Delta\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right) = \Delta\left(\frac{c_{22}}{a_{22}}\right) = 0,$$

когда

$$z = \frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_{12}}{a_{12}},$$

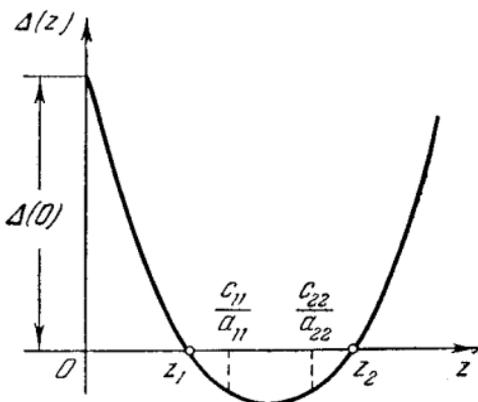


Рис. 103.

т. е. имеем случай равных частот. Тогда каждое из двух уравнений (4.36) обращается в тождество, и колебания по двум координатам будут происходить независимо одно от другого, но с одной и той же частотой.

Рассматривая случай неравных корней, можем написать уравнения движения при первом и втором главных колебаниях:

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(1)} &= \alpha_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1), & q_2^{(1)} &= \alpha_2^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1), \\ q_1^{(2)} &= \alpha_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2), & q_2^{(2)} &= \alpha_2^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Из уравнений (4.36) имеем

$$\frac{\alpha_2^{(i)}}{\alpha_1^{(i)}} = -\frac{c_{11} - a_{11}k_i^2}{c_{12} - a_{12}k_i^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_i^2}{c_{22} - a_{22}k_i^2} = \mu_i, \quad (4.39)$$

где  $i = 1, 2$ . Таким образом, при каждом главном колебании амплитуды находятся в постоянном отношении, определяющем форму колебания. Легко видеть, что числители и знаменатели дробей в отношении (4.39) представляют собой миноры определителя частот, которые в случае двухстепенной системы приводятся просто к элементам определителя, взятым с тем или иным знаком.

При каждом главном колебании обе координаты находятся либо в одной фазе, когда  $\mu > 0$ , либо в противоположных, когда  $\mu < 0$ , т. е. колебания происходят *синфазно* или *антифазно*. Однако во всех случаях изменения обеих координат осуществляются *синхронно*, иначе говоря, с одной частотой.

Результирующее движение определяется уравнениями

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \alpha_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2), \\ q_2 &= \alpha_2^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + \alpha_2^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Итак, полное колебание представляет собой результат суперпозиции двух главных синусоидальных колебаний. Если какой-либо множитель  $\mu_i$  отрицателен, то для сохранения положительности обоих значений  $\alpha^{(i)}$  (поскольку амплитуда всегда положительна) относят знак минус к синусу, прибавляя или отнимая от аргумента  $\pi$ . Число постоянных, входящих в решение, равно 6, но из них 4 связаны двумя зависимостями (4.39). Таким образом, произвольных постоянных остается четыре.

Обратимся теперь к вопросу о переходе к главным координатам. Пользуясь замечательным свойством систем линейных однородных дифференциальных уравнений, заключающимся в том, что все искомые переменные могут быть умножены на один и тот же множитель без нарушения системы уравнений, мы зададимся линейным преобразованием координат наиболее простого вида, именно, положим

$$q_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad q_2 = \mu_1 \vartheta_1 + \mu_2 \vartheta_2, \quad (4.41)$$

где  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — новые координаты, а  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  — некоторые постоянные. Подставим эти значения координат  $q_1$  и  $q_2$  в выражения (4.32), (4.33) для  $T$  и  $\Pi$ . После группировки членов получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{ (a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2) \dot{\vartheta}_1^2 + 2 [a_{11} + a_{12}(\mu_1 + \mu_2) + \\ &\quad + a_{22}\mu_1\mu_2] \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + (a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2) \dot{\vartheta}_2^2 \}, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \{ (c_{11} + 2c_{12}\mu_1 + c_{22}\mu_1^2) \vartheta_1^2 + 2 [c_{11} + c_{12}(\mu_1 + \mu_2) + \\ &\quad + c_{22}\mu_1\mu_2] \vartheta_1 \vartheta_2 + (c_{11} + 2c_{12}\mu_2 + c_{22}\mu_2^2) \vartheta_2^2 \}. \end{aligned}$$

Выберем теперь множители  $\mu_1$  и  $\mu_2$  так, чтобы выражения, заключенные в квадратные скобки, как для  $T$ , так и для  $\Pi$ ,

обратились бы в нуль. Для этого должны удовлетворяться два уравнения:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12}(\mu_1 + \mu_2) + a_{22}\mu_1\mu_2 &= 0, \\ c_{11} + c_{12}(\mu_1 + \mu_2) + c_{22}\mu_1\mu_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \mu_1\mu_2 &= \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}, \\ \mu_1 + \mu_2 &= \frac{a_{12}c_{11} - a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Согласно теореме Виета, получаем для определения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  следующее квадратное уравнение:

$$(a_{12}c_{22} - a_{22}c_{12})\mu^2 - (a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22})\mu + (a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}) = 0. \quad (4.43)$$

Можно показать, что корни этого уравнения вещественные. Введя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2, \\ a_2 &= a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2, \\ c_1 &= c_{11} + 2c_{12}\mu_1 + c_{22}\mu_1^2, \\ c_2 &= c_{11} + 2c_{12}\mu_2 + c_{22}\mu_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

мы из уравнений Лагранжа придем к двум независимым уравнениям колебаний

$$a_1\ddot{\vartheta}_1 + c_1\vartheta_1 = 0, \quad a_2\ddot{\vartheta}_2 + c_2\vartheta_2 = 0, \quad (4.45)$$

определяющим свободные колебания с круговыми частотами

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{a_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{a_2}}. \quad (4.46)$$

Как уже указывалось выше, на основании физических соображений, от преобразования координат частоты не меняются. Для двух степеней свободы этот факт легко устанавливается также математически из линейности преобразования (4.41).

Решение уравнений движения принимает вид

$$\vartheta_1 = a_1 \sin(k_1 t + \beta_1), \quad \vartheta_2 = a_2 \sin(k_2 t + \beta_2). \quad (4.47)$$

Допустим, что система совершает только первое главное колебание с частотой  $k_1$ . Тогда по формулам (4.41) и (4.47) находим

$$q_1^{(1)} = \vartheta_1 = \alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1),$$

$$q_2^{(1)} = \mu_1 \vartheta_1 = \mu_1 \alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1).$$

Аналогично имеем для второго главного колебания:

$$q_1^{(2)} = \vartheta_2 = \alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2),$$

$$q_2^{(2)} = \mu_2 \vartheta_2 = \mu_2 \alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2).$$

Вспомяная уравнения (4.39) и (4.41), мы видим, что множители  $\mu_1$  и  $\mu_2$  здесь те же самые, что и определяемые по формулам (4.39). Именно  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются отношениями миноров определителя частот и характеризуют формы главных колебаний.

**Пример 1.** Рассмотрим свободные колебания двух связанных грузов (рис. 104). Отсчитывая координаты  $x_1$  и  $x_2$  от положений статического равновесия грузов  $O_1$  и  $O_2$ , мы тем самым исключаем из рассмотрения веса грузов. Составим непосредственно дифференциальные уравнения движения по заданной схеме:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1).$$

Уравнение частот имеет вид

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 k^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Рис. 104.

Для упрощения возьмем случай  $m_1 = m_2 = m$ ,  $c_1 = c_2 = c$ . Тогда

$$c_{11} = 2c, \quad c_{12} = -c, \quad c_{22} = c, \quad a_{11} = a_{22} = m, \quad a_{12} = 0,$$

и уравнение частот принимает вид

$$m^2 k^4 - 3mck^2 + c^2 = 0,$$

откуда

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{m} (3 \pm \sqrt{5}).$$

По формулам (4.39) находим

$$\mu_1 = -\frac{c_{12} - a_{12} k_1^2}{c_{22} - a_{22} k_1^2}, \quad \mu_2 = -\frac{c_{12} - a_{12} k_2^2}{c_{22} - a_{22} k_2^2},$$

или

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1), \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

т. е. колебания с меньшей частотой  $k_1$  синфазны (грузы движутся в одну сторону (рис. 105, а)), а колебания с большей частотой  $k_2$  антифазны (грузы движутся в противоположные стороны (рис. 105, б)). В первом случае узла нет, во втором имеется один узел К. Легко проверить что уравнение (4.43), принимающее вид  $\mu^2 - \mu - 1 = 0$ , дает те же значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

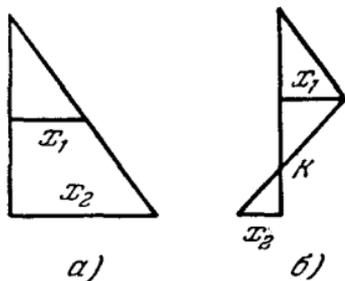


Рис. 105.

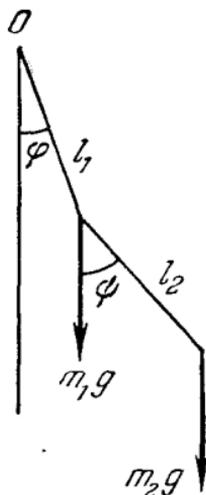


Рис. 106.

Пример 2. Колебания двойного маятника (рис. 106). Будем рассматривать малые колебания системы в случае

$$m_1 = m_2 = m, \quad l_1 = l_2 = l.$$

за обобщенные координаты примем углы  $\varphi$  и  $\psi$ . Составим выражения кинетической и потенциальной энергии в общем виде:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\psi - \varphi) \dot{\varphi} \dot{\psi} + l_2^2 \dot{\psi}^2],$$

$$П = m_1 g l_1 (1 - \cos \varphi) + m_2 g [l_1 (1 - \cos \varphi) + l_2 (1 - \cos \psi)].$$

Так как колебания малые, то с точностью до малых второго порядка имеем:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \cos \psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}, \quad \cos(\psi - \varphi) = 1 - \frac{(\psi - \varphi)^2}{2}.$$

Тогда, учитывая, что  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$ , получим

$$T = \frac{ml^2}{2} (2\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} + \dot{\psi}^2),$$

$$П = \frac{mgl}{2} (2\varphi^2 + \psi^2).$$

Составив дифференциальные уравнения движения по (1.6), найдем

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2mgl, & c_{12} &= 0, & c_{22} &= mgl, \\ a_{11} &= 2ml^2, & a_{12} &= a_{22} &= ml^2. \end{aligned}$$

Уравнение частот

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} 2mgl - 2ml^2k^2; & -ml^2k^2 \\ -ml^2k^2; & mgl - ml^2k^2 \end{vmatrix} = 0,$$

после упрощений, принимает вид

$$l^2k^4 - 4glk^2 + 2g^2 = 0.$$

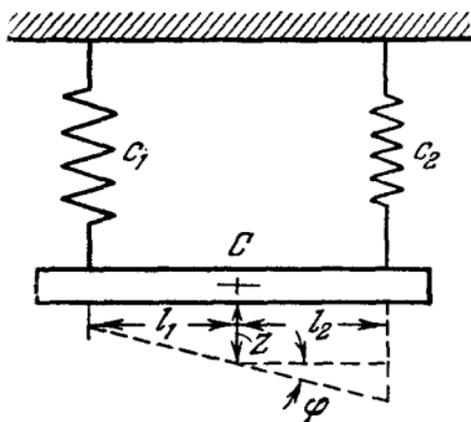
Отсюда

$$k_1^2 = \frac{g}{l}(2 - \sqrt{2}), \quad k_2^2 = \frac{g}{l}(2 + \sqrt{2}).$$

Из уравнений (4.39) находим коэффициенты  $\mu_1$  и  $\mu_2$ :

$$\mu_1 = \sqrt{2}, \quad \mu_2 = -\sqrt{2}.$$

**Пример 3.** Стержень, подвешенный на двух пружинах различной жесткости (рис. 107). Приведенная схема конкретизируется, например, в рессорном подвешивании автомобилей, вагонов и т. п.



Отсчитывая перемещения  $z$  и  $\varphi$  от положения статического равновесия, находим  $T$  и  $\Pi$ :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2;$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_1 (z - l_1 \varphi)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} c_2 (z + l_2 \varphi)^2, \end{aligned}$$

Рис. 107.

где  $M$  — масса стержня,  $J$  — его центральный момент инерции.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} M \ddot{z} + (c_1 + c_2) z + (c_2 l_2 - c_1 l_1) \varphi &= 0, \\ J \ddot{\varphi} + (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2) \varphi + (c_2 l_2 - c_1 l_1) z &= 0. \end{aligned}$$

Если параметры системы таковы, что удовлетворяется условие

$$c_1 l_1 = c_2 l_2,$$

то координаты  $z$  и  $\varphi$  — главные. Предполагая, что этого нет, напишем формулы преобразования координат к главным, считая  $q_1 = \varphi$ ,  $q_2 = z$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \vartheta_1 + \vartheta_2, \\ z &= \mu_1 \vartheta_1 + \mu_2 \vartheta_2.\end{aligned}$$

Выясним смысл  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ . Пусть система совершает только первое главное колебание ( $\vartheta_2 = 0$ ). Тогда  $z = \mu_1 \vartheta_1$ ,  $\varphi = \vartheta_1$ . Следовательно, стержень совершает угловое колебание вокруг некоторой точки  $P$  (рис. 108, а), главная координата  $\vartheta_1$  есть угол поворота относительно этой точки, а  $\mu_1$  — расстояние проекции  $C$  на горизонталь от  $P$ . Аналогично

интерпретируется второе главное колебание (рис. 108, б) как вращение вокруг точки  $Q$ . Заметим, что один из центров  $P$  или  $Q$  лежит в пределах стержня, другой вне его.

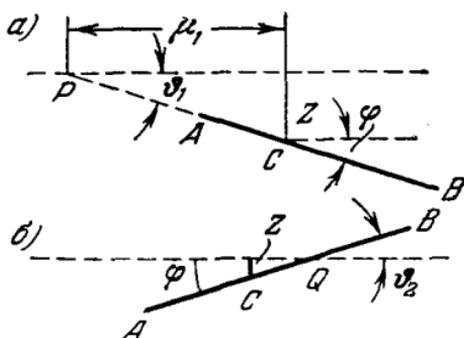


Рис. 108.

## § 6. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Дифференциальные уравнения малых движений (не обязательно колебаний) автономной системы с учетом сил линейного сопротивления имеют вид

$$\left. \begin{aligned}(a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11})q_1 + (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12})q_2 &= 0, \\ (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12})q_1 + (a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22})q_2 &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Напишем также выражение функции рассеяния:

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2^2), \quad (4.49)$$

где в силу положительной знакоопределенности  $\Phi$  должны выполняться неравенства

$$b_{11} > 0, \quad b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0. \quad (4.50)$$

Подставляя решение системы

$$q_1 = C_1 e^{\lambda t}, \quad q_2 = C_2 e^{\lambda t} \quad (4.51)$$

в уравнения (4.48) и сокращая на  $e^{\lambda t}$ , получим

$$\left. \begin{aligned}(a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})C_1 + (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})C_2 &= 0, \\ (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})C_1 + (a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22})C_2 &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Характеристическое уравнение (4.6) в данном случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}, & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{22}, & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.53)$$

Четырем корням этого уравнения соответствуют четыре решения, сумма которых, т. е. общее решение, определяет собой полное движение:

$$q_1 = \sum_{i=1}^4 C_1^{(i)} e^{\lambda_i t}, \quad q_2 = \sum_{i=1}^4 C_2^{(i)} e^{\lambda_i t}. \quad (4.54)$$

Из однородных уравнений (4.52) мы можем определить отношения коэффициентов:

$$\frac{C_2^{(i)}}{C_1^{(i)}} = -\frac{a_{11}\lambda_i^2 + b_{11}\lambda_i + c_{11}}{a_{12}\lambda_i^2 + b_{12}\lambda_i + c_{12}} = -\frac{a_{12}\lambda_i^2 + b_{12}\lambda_i + c_{12}}{a_{12}\lambda_i^2 + b_{22}\lambda_i + c_{22}}. \quad (4.55)$$

Таким образом, каждая пара коэффициентов, соответствующая одному корню, находится в постоянном отношении.

Корни уравнения (4.53) устойчивы, в чем можно убедиться, например, с помощью критерия Рауса. Для упрощения вывода мы сделаем переход к главным координатам.

Итак, положим

$$q_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad q_2 = \mu_1 \vartheta_1 + \mu_2 \vartheta_2,$$

откуда обратно

$$\vartheta_1 = \frac{q_2 - \mu_2 q_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \vartheta_2 = \frac{\mu_1 q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Если  $q_1 = C_1 e^{\lambda t}$  и  $q_2 = C_2 e^{\lambda t}$ , то  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  можно представить так:

$$\vartheta_1 = D_1 e^{\lambda t}, \quad \vartheta_2 = D_2 e^{\lambda t}.$$

Таким образом, главные координаты будут выражаться в тех же показательных функциях, а поэтому корни характеристического уравнения не изменяются.

Из трех квадратичных форм в общем случае мы можем привести к линейной комбинации квадратов переменных только две. Итак, имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(a_1\dot{\vartheta}_1^2 + a_2\dot{\vartheta}_2^2), \\ \Pi &= \frac{1}{2}(c_1\vartheta_1^2 + c_2\vartheta_2^2), \\ \Phi &= \frac{1}{2}(b_1\dot{\vartheta}_1^2 + 2b_0\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 + b_2\dot{\vartheta}_2^2), \end{aligned}$$

где  $b_1, b_2, b_0$  — новые значения коэффициентов сопротивления.

Дифференциальные уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} (a_1 p^2 + b_1 p + c_1)\vartheta_1 + b_0 p \vartheta_2 &= 0, \\ b_2 p \vartheta_1 + (a_2 p^2 + b_2 p + c_2)\vartheta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

Заметим, что коэффициенты подчинены условиям:

$$\begin{aligned} a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \\ b_1 b_2 - b_0^2 > 0. \end{aligned}$$

Напишем уравнение частот в развернутом виде

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \lambda^4 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \lambda^3 + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - b_0^2) \lambda^2 + \\ + (b_1 c_2 + b_2 c_1) \lambda + c_1 c_2 = 0. \end{aligned}$$

Разделим уравнение на  $a_1 a_2$  и введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 a_2}, \quad A_2 = \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - b_0^2}{a_1 a_2}, \\ A_3 &= \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{a_1 a_2}, \quad A_4 = \frac{c_1 c_2}{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Очевидно, все эти величины положительные. Остается проверить знак дискриминанта  $\Psi_4$  (4.19). Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= A_1 A_2 A_3 - A_3^2 - A_1^2 A_4 = \\ &= \frac{1}{(a_1 a_2)^3} [(a_1 b_2 + a_2 b_1)(a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_1 b_2 - b_0^2)(b_1 c_2 + b_2 c_1) - \\ &\quad - (b_1 c_2 + b_2 c_1)^2 a_1 a_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 c_1 c_2]. \end{aligned}$$

Произведя алгебраические преобразования, получим

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \frac{1}{(a_1 a_2)^3} [(a_1 b_2 + a_2 b_1)(b_1 b_2 - b_0^2)(b_1 c_2 + b_2 c_1) + \\ &\quad + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 b_1 b_2] > 0, \end{aligned}$$

т. е. все корни устойчивые.

Рассмотрим возможные варианты решения в зависимости от корней характеристического уравнения:

1) корни комплексные, попарно сопряженные:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm iv_1, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm iv_2.$$

Этот случай имеет место при малом сопротивлении. Движение представляет собой наложение двух затухающих колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos v_1 t + B_1^{(1)} \sin v_1 t] + \\ &\quad + e^{-n_2 t} [A_1^{(2)} \cos v_2 t + B_1^{(2)} \sin v_2 t], \\ \vartheta_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos v_1 t + B_2^{(1)} \sin v_1 t] + \\ &\quad + e^{-n_2 t} [A_2^{(2)} \cos v_2 t + B_2^{(2)} \sin v_2 t]. \end{aligned} \right\} (4.57)$$

Несмотря на то, что координаты  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — главные, они изменяются достаточно сложным образом. Решение зависит от 8 постоянных, которые подчинены четырем условиям (так как  $A$  и  $B$  зависят от  $C$ , для которых указаны четыре зависимости);

2) все корни действительные. Представим эти корни так:

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm \kappa_1, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm \kappa_2.$$

Тогда можно перейти к гиперболическим функциям:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \operatorname{ch} \kappa_1 t + B_1^{(1)} \operatorname{sh} \kappa_1 t] + \\ &\quad + e^{-n_2 t} [A_1^{(2)} \operatorname{ch} \kappa_2 t + B_1^{(2)} \operatorname{sh} \kappa_2 t], \\ \vartheta_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \operatorname{ch} \kappa_1 t + B_2^{(1)} \operatorname{sh} \kappa_1 t] + \\ &\quad + e^{-n_2 t} [A_2^{(2)} \operatorname{ch} \kappa_2 t + B_2^{(2)} \operatorname{sh} \kappa_2 t]. \end{aligned} \right\} (4.58)$$

Движение аperiodическое, имеющее место при большом сопротивлении;

3) два корня — комплексные сопряженные, два — вещественные

$$\lambda_{1,2} = -n_1 \pm iv, \quad \lambda_{3,4} = -n_2 \pm \kappa.$$

Решение имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= e^{-n_1 t} [A_1^{(1)} \cos vt + B_1^{(1)} \sin vt] + \\ &\quad + e^{-n_2 t} [A_1^{(2)} \operatorname{ch} \kappa t + B_1^{(2)} \operatorname{sh} \kappa t], \\ \vartheta_2 &= e^{-n_1 t} [A_2^{(1)} \cos vt + B_2^{(1)} \sin vt] + \\ &\quad + e^{-n_2 t} [A_2^{(2)} \operatorname{ch} \kappa t + B_2^{(2)} \operatorname{sh} \kappa t]. \end{aligned} \right\} (4.59)$$

Движение системы представляет собой наложение затухающих колебаний на аperiodическое движение.

Пример. Два электрических контура имеют между собой индуктивную связь (рис. 109). Все параметры контуров заданы. Требуется найти силу тока в каждом контуре  $i_1, i_2$  при замыкании. Дифференциальное уравнение для одного контура мы уже выводили и исследовали (гл. II, § 6, пример 2).

Здесь необходимо ввести в уравнение каждого контура добавочный член, выражающий влияние другого контура через посредство коэффициента взаимной индукции  $M$ . Итак, имеем

$$\begin{aligned} (L_1 p^2 + R_1 p + \frac{1}{C_1}) i_1 + M p^2 i_2 &= 0, \\ M p^2 i_1 + (L_2 p^2 + R_2 p + \frac{1}{C_2}) i_2 &= 0. \end{aligned}$$

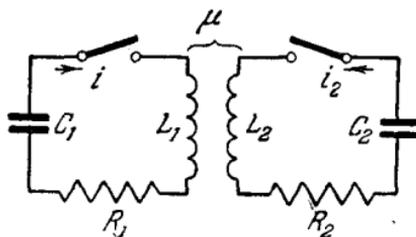


Рис. 109.

Деля первое уравнение на  $L_1$ , второе на  $L_2$  и вводя обозначения

$$\chi = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad l_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad l_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad g_1 = \frac{R_1}{2L_1}, \quad g_2 = \frac{R_2}{2L_2},$$

мы можем характеристическое уравнение написать так:

$$(\lambda^2 + 2g_1 \lambda + l_1^2)(\lambda^2 + 2g_2 \lambda + l_2^2) - \chi^2 \lambda^4 = 0.$$

Если бы контуры не были связаны индуктивно, то коэффициент  $\chi$  был бы равен нулю, и мы получили бы распадающееся уравнение. Если можно пренебречь сопротивлением, то  $g_1 = g_2 = 0$  и характеристическое уравнение получится биквадратное. В общем случае исследование производится согласно изложенной теории, где

$$\begin{aligned} a_{11} &= L_1, & a_{12} &= M, & a_{22} &= L_2, \\ b_{11} &= R_1, & b_{12} &= 0, & b_{22} &= R_2, \\ c_{11} &= \frac{1}{C_1}, & c_{12} &= 0, & c_{22} &= \frac{1}{C_2}. \end{aligned}$$

В зависимости от параметров системы токи  $i_1$  и  $i_2$  могут быть колебательными и аperiodическими.

## § 7. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ БЕЗ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим вынужденные колебания произвольной системы без сопротивления под действием периодического возмущения. Так как для линейных систем имеет место принцип суперпозиции, то можно ограничиться рассмотре-

нием возмущающих сил, действующих по гармоническому закону с одним аргументом, т. е. рассмотреть случай так называемого моногармонического возмущения. При этом дифференциальные уравнения движения на основании (1.39) и (4.20) имеют вид:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}p^2 + c_{ij}) q_j = H_i \sin(\omega t + \gamma), \quad (4.60)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Общее решение системы

$$q_i = \bar{q}_i + q_i^*, \quad (4.61)$$

где  $\bar{q}_i$  — решение соответствующих однородных уравнений, определяющее собственные колебания системы,  $q_i^*$  — частное решение, определяющее вынужденные колебания, которые ищем в тригонометрической форме:

$$q_i^* = \alpha_i^* \sin(\omega t + \gamma). \quad (4.62)$$

Подставляя это решение в уравнение (4.60) и сокращая на  $\sin(\omega t + \gamma)$ , получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n (c_{ij} - a_{ij}\omega^2) \alpha_j^* = H_i. \quad (4.63)$$

Обозначая определитель системы (4.63) через

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & \dots & c_{1n} - a_{1n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - a_{n1}\omega^2 & \dots & c_{nn} - a_{nn}\omega^2 \end{vmatrix}, \quad (4.64)$$

а минор элемента  $i$ -й строки  $j$ -го столбца через  $A_{ij}(\omega^2)$ , получаем такие значения амплитуд:

$$\alpha_j^* = \frac{1}{\Delta(\omega^2)} \sum_{i=1}^n H_i A_{ij}(\omega^2). \quad (4.65)$$

Очевидно, формулы (4.62), (4.65) имеют смысл лишь тогда, когда  $\Delta(\omega^2) \neq 0$ , т. е. когда ни одна из собственных частот  $k_i$  системы не совпадает с частотой возмущения  $\omega$ ; в противном случае наступает резонанс, при котором расчет выполняется по особым формулам. Итак, система имеет столько резонансных частот, сколько имеется степеней свободы.

Рассмотрим более детально задачу о вынужденных колебаниях системы с двумя степенями свободы, т. е. когда  $n = 2$ . В этом случае вид уравнений (4.60), (4.63) и (4.64) очевиден, причем определитель системы  $\Delta(\omega^2)$  можно представить очень просто в развернутой форме:

$$\Delta(\omega^2) = (c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2. \quad (4.66)$$

Выражения амплитуд (4.64) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^* &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_1(c_{22} - a_{22}\omega^2) - H_2(c_{12} - a_{12}\omega^2)], \\ \alpha_2^* &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_2(c_{11} - a_{11}\omega^2) - H_1(c_{12} - a_{12}\omega^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

Обратимся теперь к случаю резонанса, предположив, что частота  $\omega$  изменения возмущающей силы совпадает с одной из частот собственных колебаний. Пусть, например,  $\omega = k_1$ , для исследования движения обратимся к главным координатам, в которых уравнения движения системы с двумя степенями свободы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{\vartheta}_1 + c_1 \vartheta_1 &= \theta_1, \\ a_2 \ddot{\vartheta}_2 + c_2 \vartheta_2 &= \theta_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.68)$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — обобщенные силы, подлежащие определению. Для этого воспользуемся выражением элементарной работы в двух системах координат:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 = \theta_1 \delta \vartheta_1 + \theta_2 \delta \vartheta_2.$$

Имея в виду формулы преобразования (4.41)

$$q_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2, \quad q_2 = \mu_1 \vartheta_1 + \mu_2 \vartheta_2,$$

подставим значения  $\delta q_1$  и  $\delta q_2$  в выражение работы. Вспоминая, что

$$Q_1 = H_1 \sin(\omega t + \gamma), \quad Q_2 = H_2 \sin(\omega t + \gamma),$$

из сравнения коэффициентов при  $\delta \vartheta_1$  и  $\delta \vartheta_2$  находим

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (H_1 + \mu_1 H_2) \sin(\omega t + \gamma), \\ \theta_2 &= (H_1 + \mu_2 H_2) \sin(\omega t + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Подставив найденные значения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в уравнения (4.68), поделим их соответственно на  $a_1$  и  $a_2$  и введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= \frac{c_1}{a_1}, & h_1^* &= \frac{H_1 + \mu_1 H_2}{a_1}, \\ k_2^2 &= \frac{c_2}{a_2}, & h_2^* &= \frac{H_1 + \mu_2 H_2}{a_2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

где  $k_1, k_2$  — собственные частоты системы. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + k_1^2 \theta_1 &= h_1^* \sin(\omega t + \gamma), \\ \ddot{\theta}_2 + k_2^2 \theta_2 &= h_2^* \sin(\omega t + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

Сделаем теперь предположение, что  $\omega = k_1 \neq k_2$ . Тогда частные решения уравнений (4.71) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \frac{h_1^*}{2\omega} t \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right), \\ \theta_2^* &= \frac{h_2^*}{k_2^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \gamma). \end{aligned}$$

Переходя к прежним координатам, получим

$$\left. \begin{aligned} q_1^* &= \frac{h_1^*}{2\omega} t \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{h_2^*}{k_2^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \gamma), \\ q_2^* &= \mu_1 \frac{h_1^*}{2\omega} t \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \mu_2 \frac{h_2^*}{k_2^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

т. е. при резонансе неограниченно возрастают обе координаты, если они не являются главными. Аналогичные рассуждения можно привести для случая  $\omega = k_2 \neq k_1$ .

**Пример 1.** Вынужденные колебания двойного маятника под влиянием горизонтальных гармонических колебаний точки подвеса (рис. 110).

Пусть закон движения точки подвеса  $O$  выражается уравнением

$$\xi = s \sin \omega t.$$

Положим для упрощения  $m_1 = m_2 = m$ ,  $l_1 = l_2 = l$  и воспользуемся для изучения относительного движения методом сил инерции. Выражения этих сил таковы:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -m_1 \ddot{\xi} = m s \omega^2 \sin \omega t, \\ F_{2x} &= -m_2 \ddot{\xi} = m s \omega^2 \sin \omega t, \\ F_{1y} &= F_{2y} = 0. \end{aligned}$$

Принимая за обобщенные координаты углы  $\varphi$  и  $\psi$ , найдем обобщенные возмущающие силы из выражения элементарной работы, которое напомним в двух системах координат:

$$Q_\varphi \delta\varphi + Q_\psi \delta\psi = F_{1x} \delta x_1 + F_{2x} \delta x_2.$$

Так как

$$x_1 = l \sin \varphi, \quad x_2 = l (\sin \varphi + \sin \psi),$$

то

$$\delta x_1 = l \cos \varphi \delta\varphi,$$

$$\delta x_2 = l (\cos \varphi \delta\varphi + \cos \psi \delta\psi).$$

Полагая, вследствие малости углов  $\varphi$  и  $\psi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых вариациях, находим:

$$Q_\varphi = 2ml\omega^2 \sin \omega t, \quad Q_\psi = ml\omega^2 \sin \omega t.$$

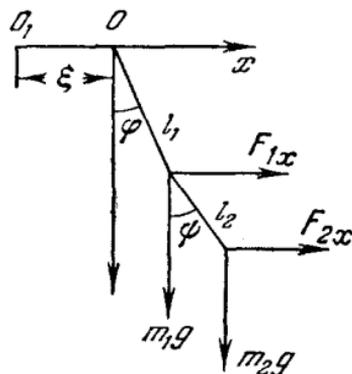


Рис. 110.

Из выведенных прежде (глава IV, § 5, пример 2) дифференциальных уравнений свободных колебаний двойного маятника в данном случае получим

$$(2ml^2 p^2 + 2mgl) \varphi + ml^2 p^2 \psi = 2ml\omega^2 \sin \omega t,$$

$$ml^2 p^2 \varphi + (ml^2 p^2 + mgl) \psi = ml\omega^2 \sin \omega t.$$

Тогда

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 2mgl - 2ml^2\omega^2, & -ml^2\omega^2 \\ -ml^2\omega^2, & mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = m^2 l^2 [2(g - l\omega^2)^2 - l^2\omega^4].$$

$$H_1 = H_\varphi = 2ml\omega^2, \quad H_2 = H_\psi = ml\omega^2.$$

Теперь по общим формулам (4.67) найдем амплитуды вынужденных колебаний:

$$\alpha_\varphi^* = \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_\varphi (c_{22} - a_{22}\omega^2) - H_\psi (c_{12} - a_{12}\omega^2)],$$

$$\alpha_\psi^* = \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_\psi (c_{11} - a_{11}\omega^2) - H_\varphi (c_{12} - a_{12}\omega^2)].$$

Подставляя в уравнения движения и упрощая, найдем

$$\varphi^* = \frac{s\omega^2 (2g - l\omega^2)}{2(g - l\omega^2)^2 - l^2\omega^4} \sin \omega t,$$

$$\psi^* = \frac{2gs\omega^2}{2(g - l\omega^2)^2 - l^2\omega^4} \sin \omega t.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что при  $\omega^2 = 2g$  колебания первого маятника полностью гаснут, тогда как колебания второго маятника определяются уравнением

$$\psi^* = -\frac{s\omega^2}{g} \sin \omega t,$$

т. е. находятся в противофазе с возмущением.

**Пример 2. Динамический поглотитель колебаний.** Отмеченное сейчас свойство связанных колебательных систем имеет важное техническое применение в так называемом динамическом поглотителе колебаний (рис. 111). Пусть на массу  $M$  (главную массу), установленную на пружине  $c_1$ , действует возмущающая сила  $Q = H \sin(\omega t + \delta)$ . К этой массе прикрепляется на пружине  $c_2$  вспомогательная масса  $m$  (или масса поглотителя), назначение которой — гасить колебания главной массы.

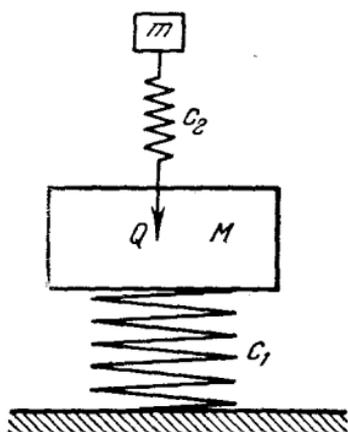


Рис. 111.

Принимая за обобщенные координаты вертикальные перемещения  $x_1$  и  $x_2$ , отсчитываемые вниз от положения равновесия центров тяжести обеих масс, получим

$$M\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) + H \sin(\omega t + \delta),$$

$$m\ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1),$$

или

$$[Mp^2 + (c_1 + c_2)]x_1 - c_2x_2 = H \sin(\omega t + \delta),$$

$$-c_2x_1 + (mp^2 + c_2)x_2 = 0.$$

Пользуясь выражениями для  $a_1^*$  и  $a_2^*$ , находим

$$x_1^* = \frac{H(c_2 - m\omega^2)}{\Delta(\omega^2)} \sin(\omega t + \delta), \quad x_2^* = \frac{Hc_2}{\Delta(\omega^2)} \sin(\omega t + \delta),$$

где

$$\Delta(\omega^2) = (c_1 + c_2 - M\omega^2)(c_2 - m\omega^2) - c_2^2.$$

Для гашения колебаний главной массы должно быть

$$c_2 - m\omega^2 = 0,$$

что возможно только при одной определенной частоте. Тогда

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{H}{c_2} \sin(\omega t + \delta - \pi).$$

Аналогичные устройства применяются также для гашения крутильных колебаний, но там роль масс играют моменты инерции.

### § 8. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С СОПРОТИВЛЕНИЯМИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ СКОРОСТИ

Рассмотрим, наконец, вынужденные колебания произвольной системы с линейным сопротивлением под действием моногармонического возмущения. В этом случае дифференциальные уравнения движения на основании уравнений (1.39) примут вид:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}p^2 + b_{ij}p + c_{ij}) q_j = H_i \sin(\omega t + \gamma), \quad (4.73)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Вследствие наличия в левых частях уравнений первых производных от координат по времени, уже нельзя в частном решении обойтись одним синусом того же аргумента. Придется вводить также косинус или, что одно и то же, сдвиг фазы.

Выполним расчет для случая двух степеней свободы. Имеем дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}) q_1 + (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12}) q_2 &= \\ &= H_1 \sin(\omega t + \gamma), \\ (a_{12}p^2 + b_{12}p + c_{12}) q_1 + (a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22}) q_2 &= \\ &= H_2 \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

частное решение которых ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} q_1^* &= \alpha_1^* \sin(\omega t + \gamma - \varepsilon_1), \\ q_2^* &= \alpha_2^* \sin(\omega t + \gamma - \varepsilon_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

Разлагая здесь синус, можем  $q_1^*$  и  $q_2^*$  представить еще и так:

$$\left. \begin{aligned} q_1^* &= M_1 \sin(\omega t + \gamma) + N_1 \cos(\omega t + \gamma), \\ q_2^* &= M_2 \sin(\omega t + \gamma) + N_2 \cos(\omega t + \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \alpha_1^* \cos \varepsilon_1, & N_1 &= -\alpha_1^* \sin \varepsilon_1, \\ M_2 &= \alpha_2^* \cos \varepsilon_2, & N_2 &= -\alpha_2^* \sin \varepsilon_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

или обратно

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^* &= \sqrt{M_1^2 + N_1^2}, & \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= -\frac{N_1}{M_1}, \\ \alpha_2^* &= \sqrt{M_2^2 + N_2^2}, & \operatorname{tg} \varepsilon_2 &= -\frac{N_2}{M_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

Для определения  $M_1, M_2, N_1, N_2$  подставим  $q_1^*$  и  $q_2^*$  из формул (4.76) в систему уравнений (4.74). Перенесем в полученных уравнениях все члены в одну сторону, собрав отдельно члены с синусами и членами с косинусами, и приравняем нулю коэффициенты при синусах и косинусах. Получим четыре уравнения с четырьмя неизвестными, именно:

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\omega^2) M_1 - b_{11}\omega N_1 + \\ + (c_{12} - a_{12}\omega^2) M_2 - b_{12}\omega N_2 &= H_1, \\ b_{11}\omega M_1 + (c_{11} - a_{11}\omega^2) N_1 + \\ + b_{12}\omega M_2 + (c_{12} - a_{12}\omega^2) N_2 &= 0, \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2) M_1 - b_{12}\omega N_1 + \\ + (c_{22} - a_{22}\omega^2) M_2 - b_{22}\omega N_2 &= H_2, \\ b_{12}\omega M_1 + (c_{12} - a_{12}\omega^2) N_1 + \\ + b_{22}\omega M_2 + (c_{22} - a_{22}\omega^2) N_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

Решая эту систему уравнений относительно  $M_1, N_1, M_2, N_2$ , мы тем самым получим и решение нашей задачи.

Определитель системы (4.79) имеет вид

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & -b_{11}\omega & c_{12} - a_{12}\omega^2 & -b_{12}\omega \\ b_{11}\omega & c_{11} - a_{11}\omega^2 & b_{12}\omega & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ c_{12} - a_{12}\omega^2 & -b_{12}\omega & c_{22} - a_{22}\omega^2 & -b_{22}\omega \\ b_{12}\omega & c_{12} - a_{12}\omega^2 & b_{22}\omega & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix}. \quad (4.80)$$

Обозначая, как мы это делали, миноры определителя символом  $A_{ij}(\omega^2)$ , получим расчетные формулы:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_1 A_{11}(\omega^2) + H_2 A_{31}(\omega^2)], \\ N_1 &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_1 A_{12}(\omega^2) + H_2 A_{32}(\omega^2)], \\ M_2 &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_1 A_{13}(\omega^2) + H_2 A_{33}(\omega^2)], \\ N_2 &= \frac{1}{\Delta(\omega^2)} [H_1 A_{14}(\omega^2) + H_2 A_{34}(\omega^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

Можно показать, что ни при каких значениях  $\omega$  определитель  $\Delta(\omega^2)$  не обращается в нуль, оставаясь всегда положительным.

**Пример.** Жидкостный успокоитель качки корабля типа Фрама. Схематически устройство успокоителя изображено на рис. 112. В плоскости поперечного сечения  $A$  корабля устанавливаются

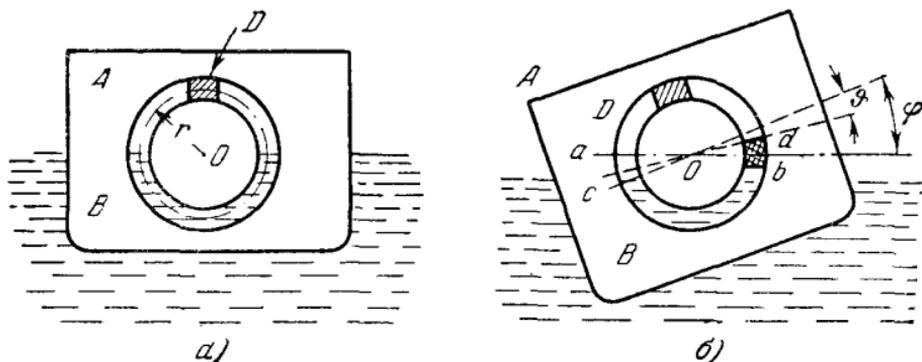


Рис. 112.

резервуары  $B$  с жидкостью удельного веса  $\gamma$ , образующие замкнутую цепь с дросселирующим устройством  $D$  для воздуха, занимающего часть цепи. Масса жидкости, заполняющей резервуары, оказывает восстанавливающее действие на отклоненный корабль.

Примем для упрощения расчета упомянутую цепь за круговое кольцо среднего радиуса  $r$ , с площадью поперечного сечения  $s$  и центром  $O$ , который предположим совпадающим с центром вращения корабля при качке. За обобщенные координаты примем угол качки  $\varphi$  и угол поворота  $\vartheta$  уровня жидкости в кольце относительно корабля.

Возвращающее действие оказывает вес жидкости, равный  $2\gamma sr(\varphi - \vartheta)$ , центр тяжести находится на прямой  $ab$ . Потенциальная энергия равна работе, совершенной весом жидкости объема  $bd$  при перетекании в объем  $ac$ , что соответствует приближенно понижению центра тяжести на величину  $2 \cdot \frac{1}{2} r(\varphi - \vartheta) = r(\varphi - \vartheta)$ .

Итак, имеем:

$$П = \frac{1}{2} c (\varphi - \vartheta)^2,$$

где

$$c = 2\gamma sr^2.$$

Пренебрегая для упрощения вертикальным перемещением центра тяжести корабля, для кинетической энергии системы находим:

$$T = \frac{1}{2} [J_1 \dot{\varphi}^2 + J_2 (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})^2],$$

где  $J_1$  — момент инерции корабля относительно оси  $O$ ,  $J_2$  — момент инерции жидкости относительно той же оси. На корабль действуют еще возвращающий момент воды —  $c_0\varphi$ , момент сил сопротивления —  $b_0\dot{\varphi}$  и возмущающий момент волны —  $H \sin \omega t$ . На жидкость в резервуарах и трубопроводе действует также момент сил сопротивления —  $b\dot{\vartheta}$ .

Из уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -c_0\varphi - b_0\dot{\varphi} + H \sin \omega t,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = -b\dot{\vartheta}$$

находим уравнения движения системы:

$$[(J_1 + J_2)p^2 + b_0p + (c_0 + c)]\varphi - (J_2p^2 + c)\vartheta = H \sin \omega t, \\ -(J_2p^2 + c)\varphi + (J_2p^2 + bp + c)\vartheta = 0.$$

Решение определяется уравнениями (4.75), (4.78), (4.79) и (4.81), где

$$q_1^* = \varphi^*, \quad q_2^* = \vartheta^*, \quad \gamma = 0, \quad H_1 = H, \quad H_2 = 0,$$

$$a_{11} = J_1 + J_2 \approx J_1, \quad a_{12} = -J_2, \quad a_{22} = J_2,$$

$$b_{11} = b_0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = b,$$

$$c_{11} = c_0 + c, \quad c_{12} = -c, \quad c_{22} = c.$$

Некоторое упрощение получается лишь за счет того, что  $H_2 = 0$ ,  $b_{12} = 0$ . При отсутствии описанного стабилизирующего устройства уравнение качки корабля имело бы вид

$$(J_1p^2 + b_0p + c_0)\varphi = H \sin \omega t,$$

решение которого было дано в главе II. При отсутствии сопротивлений —  $b_0\dot{\varphi}$  и  $b\dot{\vartheta}$  мы получили бы задачу принципиально не отличающуюся от рассмотренной в предыдущем параграфе.

## § 9. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Решение дифференциальных уравнений движения систем с двумя и более степенями свободы, а следовательно, и нахождение собственных частот колебаний этих систем часто бывает связано с громоздкими вычислениями. Если к тому же еще учесть, что во многих прикладных вопросах механики оказывается достаточным определение лишь приближенных

значений собственных частот различных форм колебаний, а подчас лишь собственной частоты основной формы колебаний, то решение задачи в таком случае прямым методом является мало оправданным.

Ниже рассматриваются некоторые приближенные методы определения частоты сложных систем и дается численное сравнение результатов.

### А. Метод Рэля

Сущность этого метода состоит в том, что заранее делаются некоторые допущения относительно конфигурации системы во время колебаний. Таким образом, налагая ограничения на колеблющуюся систему, вообще говоря, приходят к рассмотрению системы с большей жесткостью, чем данная, вследствие чего получается более высокая частота колебаний по сравнению с истинной.

Из закона сохранения механической энергии имеем

$$T + P = \text{const.}$$

Если считать, что упругие колебания отдельных точек системы около их положения равновесия происходят по гармоническому закону, то отклонения можно представить уравнением

$$y = y_0 \cos pt, \quad (4.82)$$

где  $p$  — циклическая частота колебаний,  $y_0$  — уравнение формы колебаний.

Тогда все точки упругой системы одновременно проходят через положение равновесия, имея наибольшие скорости, и одновременно достигают крайних положений, когда их скорости обращаются в нуль. В первом случае имеем максимум кинетической энергии системы, во втором — максимум потенциальной. Если теперь обозначить потенциальную энергию системы в положении равновесия через  $P_{st}$ , то уравнение энергии можно будет переписать в следующем виде:

$$T_{\max} + P_{st} = P_{\max} + P_{st}$$

или

$$T_{\max} = P_{\max}, \quad (4.83)$$

т. е. начальное значение потенциальной энергии не играет никакой роли. Кинетическая энергия определяется выражением:

$$T = \int_0^l \frac{mv^2}{2} dx = \int_0^l \frac{m(x)}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (4.84)$$

Так как из уравнения (4.82)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -y_0 p \sin pt,$$

то

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \int_0^l m(x) y_0^2 dx. \quad (4.85)$$

Потенциальная энергия также находится по известной формуле механики:

$$П = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 EI dx, \quad (4.86)$$

откуда

$$П_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y_0}{dx^2} \right)^2 EI dx. \quad (4.87)$$

Приравнявая  $T_{\max}$  и  $П_{\max}$  друг к другу и решая полученное выражение относительно интересующей нас частоты  $p$ , получим

$$p^2 = \frac{EI \int_0^l (y_0'')^2 dx}{\int_0^l m y_0^2 dx}. \quad (4.88)$$

Из этого выражения видно, что если бы нам было известно точное уравнение формы колебаний  $y_0$ , которая является некоторой функцией от  $x$ , то при подстановке его в полученное выражение можно было бы получить точное значение искомой частоты  $p$ .

Метод Рэля заключается в том, что вместо точного уравнения  $y_0 = \varphi(x)$  применяется приближенное, которое определяется действием статической нагрузки. Иначе говоря, предполагается, что форма колебаний системы с заданной нагрузкой совпадает со статической формой системы, находящейся под действием той же нагрузки. В этом основном предположении и вскрывается приближенный характер данного метода. Однако в большинстве случаев он дает неплохой результат, если учесть еще его относительную простоту. Необходимо отметить также, что метод Рэля позволяет определить только основную собственную частоту колебаний системы.

Для оценки точности рассмотренного приближенного метода решим одну упрощенную задачу — определить частоту и период собственных поперечных колебаний балки (рис. 113, а)

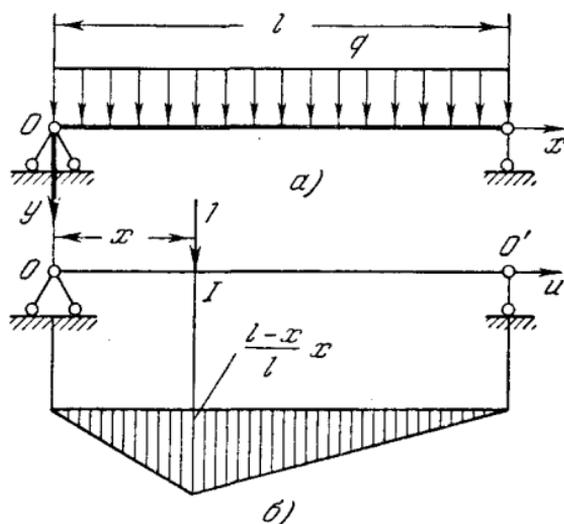


Рис. 113.

постоянной жесткости, лежащей на двух опорах и несущей равномерно распределенную нагрузку, отвлекаясь при этом от затухания. Будем считать, что поперечные прогибы балки малы по сравнению с ее длиной и, кроме того, прогибы балки при колебании будем также предполагать малыми. Эти допущения позволят нам пользоваться дифференциальным уравнением изогнутой оси балки и пренебрегать

влиянием перерезывающих сил и вращением отдельных элементов балки.

Считая начало координат в левом конце горизонтально расположенной балки, ось  $x$ -в направленной вправо, а ось  $y$ -в — вниз, будем иметь уравнение формы балки под действием равномерно распределенной нагрузки в следующем виде:

$$y_0 = \frac{ql^4}{24EI} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right). \quad (4.89)$$

Тогда при  $x = \frac{l}{2}$

$$Y_0 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad (4.90)$$

где  $Y_0$  — максимальный прогиб середины балки. Почленным делением уравнений (4.89) и (4.90) получим

$$y_0 = \frac{16}{5} \left( \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) Y_0. \quad (4.91)$$

Подставляя это уравнение в формулу (4.85), найдем

$$T_{\max} = \frac{128 \cdot 31}{25 \cdot 630} \frac{ql}{g} Y_0^2 p^2. \quad (4.92)$$

После подстановки (4.91) в уравнение (4.87) и почленного интегрирования получим

$$\Pi_{\max} = \frac{128 \cdot 24}{25 \cdot 5} \frac{EI}{l^3} Y_0^2. \quad (4.93)$$

Из выражений (4.92) и (4.93) определяем искомую частоту  $p$ , пользуясь равенством (4.83)

$$p^2 = \frac{126 \cdot 24}{31} \frac{EIg}{ql^4}.$$

Зная, что

$$\tau = \frac{2\pi}{p}, \quad (4.94)$$

найдем

$$\tau = 0,63617 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad (4.95)$$

## Б. Метод Рэлея — Ритца

В основе этого метода лежат те же энергетические соотношения (4.83), (4.88). Отличие состоит в том, что уравнение формы колебаний  $y_0(x)$  отыскивается в виде линейной комбинации аппроксимирующих функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ... ...,  $\varphi_n(x)$ , а именно:

$$y_0 = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x), \quad (4.96)$$

где  $a_i$  — некоторые постоянные.

При этом функция  $y_0(x)$  должна удовлетворять граничным условиям задачи при любых коэффициентах  $a_1$ ,  $a_2$ , ... ...,  $a_n$ , а это значит, что каждая аппроксимирующая функция  $\varphi_i(x)$ , взятая в отдельности, также должна удовлетворять граничным условиям. Кроме того, необходимо выбирать эти аппроксимирующие функции в столь общем виде, чтобы при достаточно большом числе  $n$  действительное состояние колеблющейся системы могло быть приблизительно представлено в виде

$$y = y_0 \cos pt,$$

где  $y_0$  определяется уравнением (4.96), иначе говоря, чтобы мы имели возможность решить нашу задачу с любой степенью точности.

Далее остается еще сказать о выборе коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ , ... ...,  $a_n$ . Взяв конечное число членов в выражении (4.96), мы накладываем некоторые ограничения на возможные формы колебания системы, благодаря этому и частота, вычисленная по уравнению (4.88), получится большая, чем точное ее значение. Чтобы получить возможно лучшее приближение, было предложено Ритцем выбирать коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ , ... ...,  $a_n$  в выражении (4.96) так, чтобы частота  $p$  была наименьшей, т. е. чтобы выполнялось условие экстремума

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \frac{EI \int_0^l (y_0'')^2 dx}{\int_0^l m y_0^2 dx} \right] = 0, \quad (4.97)$$

где  $l = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $n$  — число членов.

Прежде чем идти дальше и искать окончательный вид решения задачи, проанализируем уравнение (4.97) и после несложных математических преобразований напомним его в несколько более удобной форме.

Вводя обозначения

$$2\Pi_{\max} = EI \int_0^l (y_0'')^2 dx = \Psi(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (4.98)$$

и

$$\frac{2T_{\max}}{p^2} = \int_0^l m y_0^2 dx = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (4.99)$$

отметим, что потенциальная и кинетическая энергия будут однородными функциями второй степени относительно коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Следовательно,  $\Psi$  и  $\Phi$  суть квадратичные функции. Выражение (4.97) теперь запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\Psi}{\Phi} \right) = 0,$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Далее можно написать, что

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\Psi}{\Phi} \right) = \frac{\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}}{\Phi^2} = 0,$$

откуда

$$\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0.$$

Так как на основании обозначений (4.98) и (4.99)

$$p^2 = \frac{\Psi}{\Phi},$$

то, выражая  $\Psi$  через  $p^2$ , имеем

$$\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial a_i} - p^2 \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0.$$

Сокращая на  $\Phi$ , которое не равно нулю, получаем систему уравнений (4.97), записанную в преобразованном виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a_i} - p^2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0. \quad (4.100)$$

Для получения окончательного решения задачи необходимо отметить, что так как  $\Psi$  и  $\Phi$  являются квадратичными функциями, то их частные производные по  $a_i$  будут функциями линейными и притом однородными относительно  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Таким образом, выражение (4.100) представляет собой систему однородных уравнений первой степени относительно  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Как известно, такая система допускает решения, отличные от нуля только в том случае, когда ее детерминант  $\Theta$  равен нулю. Получаем уравнение относительно  $p^2$

$$\Theta(p^2) = 0. \quad (4.101)$$

Это и есть окончательный вид уравнения частоты, причем степень его относительно  $p^2$  равна числу уравнений (4.100), т. е. в конечном итоге — числу взятых аппроксимирующих функций. Низшая частота, т. е. минимальный корень уравнения (4.101), определяет основное колебание системы. Увеличивая последовательно число аппроксимирующих функций, мы будем, во-первых, получать все более и более точное значение частоты основного колебания, а, во-вторых, определять также частоты и других видов колебаний. Зная  $p^2$ , легко можно найти соотношения между параметрами, так как известно, что в системе линейных однородных уравнений неизвестные относятся, как соответствующие миноры детерминанта системы.

Решим теперь упрощенную задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе, методом Рэлея — Ритца, при этом общие допущения и ограничения, указанные ранее, оставим без изменений.

Ограничимся определением частоты только основного вида колебания. Так как балка закреплена на концах шарнирно, то граничными условиями можно считать следующие:

1) на каждом конце прогиб равен нулю, т. е.

$$y = 0,$$

2) на концах изгибающий момент равен нулю, т. е.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

3) в середине, в силу симметрии, касательная горизонтальна, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

4) в середине перерезывающая сила равна нулю, т. е.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Так как условие

$$\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

равносильно, согласно уравнению (4.82) условию

$$\frac{d^ny_0}{dx^n} = 0,$$

то, обозначив для удобства длину балки через  $2l$  и взяв начало координат в середине, направив ось  $x$ -в вправо по балке, а ось  $y$ -в вниз, граничные условия могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 & \text{при } x &= \pm l; \\ \frac{dy_0}{dx} &= 0 & \text{при } x &= 0; \\ \frac{d^2y_0}{dx^2} &= 0 & \text{при } x &= \pm l; \\ \frac{d^3y_0}{dx^3} &= 0 & \text{при } x &= 0. \end{aligned}$$

Попытаемся обойтись лишь алгебраическими функциями. Возьмем функцию  $\varphi_1(x)$  в виде полинома четвертой степени

$$\varphi_1(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Легко убедиться, что эта функция удовлетворит всем поставленным условиям, если

$$b = d = 0, \quad c = -\frac{6a}{5l^2}, \quad e = \frac{a}{5l^4}.$$

Тогда  $\varphi_1(x)$  примет такой вид

$$\varphi_1(x) = a - \frac{6a}{5l^2} x^2 + \frac{a}{5l^4} x^4.$$

Коэффициент  $a$  здесь не имеет существенного значения, так как функция  $\varphi_1(x)$  в выражении для  $y_0$  умножается на па-

раметр  $a_1$ , а поэтому его можно считать произвольным. Для удобства положим, что  $a = 5$ , тогда

$$\varphi_1(x) = 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}.$$

Остальные функции  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ , ... (см. выражение 4.96) постараемся образовать единообразно, для чего положим, что

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \psi_1(x) \varphi_1(x), \\ \varphi_3(x) &= \psi_2(x) \varphi_1(x), \\ \varphi_4(x) &= \psi_3(x) \varphi_1(x), \\ &\dots \\ \varphi_{i+1}(x) &= \psi_i(x) \varphi_1(x), \\ &\dots \end{aligned}$$

где функции  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ , ... подлежат определению. Возьмем выражение  $\varphi_{i+1}(x)$  и продифференцируем его трижды. Пользуясь формулой Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= \psi_i \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_{i+1}}{dx} &= \frac{d\psi_i}{dx} \varphi_1 + \psi_i \frac{d\varphi_1}{dx}, \\ \frac{d^2\varphi_{i+1}}{dx^2} &= \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \varphi_1 + 2 \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} + \psi_i \frac{d^2\varphi_1}{dx^2}, \\ \frac{d^3\varphi_{i+1}}{dx^3} &= \frac{d^3\psi_i}{dx^3} \varphi_1 + 3 \frac{d^2\psi_i}{dx^2} \frac{d\varphi_1}{dx} + 3 \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \psi_i \frac{d^3\varphi_1}{dx^3}. \end{aligned}$$

В соответствии с граничными условиями при  $x = \pm l$  обращаются в нуль функция  $\varphi_1(x)$  и ее вторая производная, а при  $x = 0$  обращаются в нуль первая и третья производные от этой функции. То же самое должно иметь место и в отношении любой функции  $\varphi_i(x)$  равно как функции  $\varphi_{i+1}(x)$ . Отсюда получаем условия для  $\psi_i(x)$ . Именно, как можно видеть из написанных равенств, должно быть

$$\frac{d\psi_i}{dx} = 0,$$

при  $x = 0$  и при  $x = \pm l$ ; кроме того,

$$\frac{d^3\psi_i}{dx^3} = 0$$

при  $x=0$ . Этим условиям можно удовлетворить, положив

$$\psi_i(x) = \left[ \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x^2}{2l^2} \right) \right]^i.$$

В таком случае нетрудно построить систему аппроксимирующих функций:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x) &= 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4}, \\ \varphi_2(x) &= \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x^2}{2l^2} \right) \left( 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right), \\ \varphi_3(x) &= \left[ \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x^2}{2l^2} \right) \right]^2 \left( 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (4.102)$$

В самом деле, во-первых, все эти функции удовлетворяют граничным условиям, а, во-вторых, поскольку  $x \leq l$ , влияние функций с возрастающим индексом будет все меньше и меньше. На доказательстве сходимости последовательных аппроксимаций при возрастании  $n$  мы здесь не останавливаемся.

Первоначально решим задачу в первом приближении, взяв для  $y_0$  первую аппроксимирующую функцию, т. е.

$$y_0 = a_1 \varphi_1(x) = a_1 \left( 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Тогда согласно (4.98) и (4.99):

$$\Psi = EI \int_0^l (y_0'')^2 dx = 76,8000 \frac{a_1^2}{l^3} EI,$$

$$\Phi = \int_0^l m y_0^2 dx = 12,5968 a^2 l \frac{q}{g}.$$

Далее, по формуле (4.100) находим  $p^2$

$$p^2 = \frac{EIg}{ql^4} \cdot \frac{76,8000}{12,5968}.$$

Вводя сюда  $l/2$  вместо  $l$ , т. е. считая  $l$  за полную длину балки, будем иметь

$$p^2 = 16 \cdot \frac{76,8000}{12,5968} \cdot \frac{EIg}{ql^4}.$$

По формуле (4.94) находим период

$$\tau = 0,63618 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \tag{4.103}$$

Теперь определим частоту и период колебаний во втором приближении, т. е. возьмем для  $y_0$  первые две аппроксимирующие функции:

$$y_0 = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x)$$

или, согласно (4.102):

$$y_0 = a_1 \left( 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right) + a_2 \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x^2}{2l^2} \right) \left( 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right).$$

Вычислив интегралы, получим для  $\Psi$  и  $\Phi$ :

$$\Psi = \frac{EI}{l^3} (76,80000 a_1^2 + 2 \cdot 11,58096 a_1 a_2 + 87,72241 a_2^2),$$

$$\Phi = \frac{lq}{g} (12,59683 a_1^2 + 2 \cdot 1,39949 a_1 a_2 + 0,32573 a_2^2).$$

Подставим в формулу (4.100) и произведем частное интегрирование по  $a_1$  и  $a_2$ . В результате получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( 76,80000 \frac{EI}{l^3} - 12,59683 \frac{lqp^2}{g} \right) a_1 + \\ & \quad + \left( 11,58096 \frac{EI}{l^3} - 1,39949 \frac{lqp^2}{g} \right) a_2 = 0, \\ & \left( 11,58096 \frac{EI}{l^3} - 1,39949 \frac{lqp^2}{g} \right) a_1 + \\ & \quad + \left( 87,72241 \frac{EI}{l^3} - 0,32573 \frac{lqp^2}{g} \right) a_2 = 0. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$z^2 = \frac{p^2 ql^4}{EIg} \tag{4.104}$$

и приравнявая детерминант этой системы нулю, получим уравнение частот

$$\begin{vmatrix} 76,80000 - 12,59683 z^2; & 11,58096 - 1,39949 z^2 \\ 11,58096 - 1,39949 z^2; & 87,72241 - 0,32573 z^2 \end{vmatrix} = 0.$$

После упрощений приходим к биквадратному уравнению

$$z^4 - 2 \cdot 255,900 z^2 + 3078,786 = 0,$$

из четырех корней которого имеют физический смысл только положительные. Однако из этих положительных корней мы возьмем лишь один, наименьший, и обозначим его через  $z_1$ . Этот корень соответствует низшему, основному типу колебаний. Итак, имеем

$$z_1 = 2,46778.$$

Подставляя в (4.104) и вводя  $l/2$  вместо  $l$ , т. е. считая, что  $l$  есть полная длина балки, находим выражение для искомой частоты

$$p = 4 \cdot 2,46778 \sqrt{\frac{EIg}{ql^4}}.$$

Наконец, пользуясь формулой (4.94), определяем период

$$\tau = 0,63651 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad (4.105)$$

Заметим, что здесь нам совершенно не нужен был больший корень  $z_2$ , так как этот корень соответствует уже другому, высшему типу колебаний той же балки и притом такому, при котором упругая линия балки симметрична относительно плоскости, равноудаленной от ее концов и перпендикулярной к прямой, соединяющей эти концы, это следует из выбора аппроксимирующих функций. В действительности же это будет уже третий тип колебаний. Но ведь мы ставим себе целью получить значение периода только для основного типа, для которого, пользуясь методом Рэля — Ритца, мы нашли два последовательных приближения. Если бы мы стали вести расчет, опираясь на корень  $z_2$ , то в этом случае получили бы для периода соответствующего типа колебаний только первое приближение; для следующего приближения нужно в выражении для  $y_0$  взять уже три аппроксимирующие функции  $\varphi_i(x)$  и т. д.

## В. Метод Данкерлея

В основу этого метода положен принцип последовательного нагружения системы в различных ее точках, т. е. система с большим числом степеней свободы как бы расчленяется на отдельные одностепенные системы, каждой из которых соответствует своя собственная частота. Приближенное

значение собственной частоты  $p$  исходной системы определяется по формуле Данкерлея:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_n^2}, \quad (4.106)$$

где  $p_i$  — собственная частота элементарной одностепенной системы.

Остановимся несколько подробнее на получении этой формулы. Вывод проведем, пользуясь методом приведения масс.

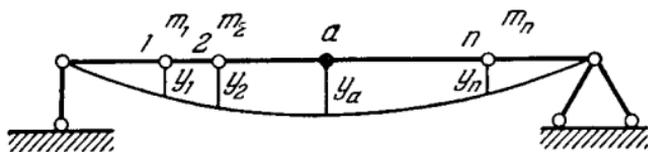


Рис. 114.

Допустим, система (рис. 114) последовательно загружается в точках 1, 2, ...,  $n$ . Тогда уравнение движения в каждом случае будет:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -c_1 y_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -c_2 y_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ m_n \ddot{y}_n &= -c_n y_n, \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

где  $c_i$  — коэффициент жесткости в данной точке. Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 \sin(p_1 t + \beta_1), \\ y_2 &= \alpha_2 \sin(p_2 t + \beta_2), \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n &= \alpha_n \sin(p_n t + \beta_n). \end{aligned}$$

Дифференцируя дважды и подставляя в (4.107), получим

$$\begin{aligned} m_1 p_1^2 &= c_1, \\ m_2 p_2^2 &= c_2, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ m_n p_n^2 &= c_n, \end{aligned}$$

Выразим  $c_i$  через коэффициент влияния  $\delta_{ii}$  — перемещение точки присоединения массы  $m_i$  от единичной силы, приложенной в той же точке

$$c_i = \frac{1}{\delta_{ii}};$$

тогда

$$\frac{1}{p_i^2} = m_i \delta_{ii}. \quad (4.108)$$

Теперь приведем все сосредоточенные массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  к одной точке системы  $a$  с одним условием: собственная частота системы с приведенной массой должна быть равна собственной частоте прежней системы в каждом отдельном случае приведения. Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p_{a_1}^2} &= m_1^{(a)} \delta_{aa}, \\ \frac{1}{p_{a_2}^2} &= m_2^{(a)} \delta_{aa}, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{p_{a_i}^2} &= m_i^{(a)} \delta_{aa}, \\ \dots &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{p_{a_n}^2} &= m_n^{(a)} \delta_{aa}, \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

где  $m_i^{(a)}$  — приведенная к точке  $a$  масса  $m_i$ , а  $p_{a_i}$  — «парциальная частота», соответствующая приведению  $i$ -й массы к точке  $a$ .

Так как, согласно вышеуказанному условию, должно осуществляться равенство

$$p_i = p_{a_i},$$

то, сопоставляя уравнения (4.108) и (4.109), получим

$$m_i \delta_{ii} = m_i^{(a)} \delta_{aa} \quad \text{или} \quad m_i^{(a)} = \frac{\delta_{ii}}{\delta_{aa}} m_i.$$

Теперь перейдем к рассмотрению такого случая, когда сосредоточенные нагрузки  $m_i$  действуют одновременно. Все эти нагрузки также приведем к некоторой одной точке  $a$ , сделав допущение, что колебательные свойства системы при

этом не меняются. Тогда получаем одну сосредоточенную в точке  $a$  нагрузку

$$M_a = \sum_{i=1}^n m_i^{(a)},$$

а поэтому частота системы  $p_a$  на основании вышесказанного определится по формуле

$$\frac{1}{p_a^2} = M_a \delta_{aa},$$

или

$$\frac{1}{p_a^2} = \delta_{aa} \sum_{i=1}^n m_i^{(a)} = \delta_{aa} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{ii}}{\delta_{aa}} m_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} m_i. \quad (4.110)$$

В конечном итоге, на основании (4.108), мы получаем формулу Данкерля

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_n^2}.$$

Для распределенной массы интенсивности  $\mu(x)$  будем иметь

$$\frac{1}{p^2} = \int_0^l \mu(x) \delta_{xx} dx, \quad (4.111)$$

где  $\delta_{xx}$  можно определить с помощью интеграла Мора \*)

$$\delta_{xx} = \int_0^l M_x^2(u) \frac{du}{EI}. \quad (4.112)$$

Таким образом,  $1/p^2$  можно рассматривать как результат нагружения массой  $\mu(x)$  «линии влияния частоты»  $\delta_{xx}$ .

В заключение необходимо отметить, что в силу указанных допущений собственная частота, рассчитанная по Данкерлю, всегда меньше истинной.

Вернемся к нашей задаче определения собственной частоты однопролетной балки длиной  $l$ , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

Для определения коэффициента влияния  $\delta_{xx}$  «заморозим» временно координату  $x$  — расстояние точки, нагруженной единичной силой до левого конца балки, и найдем с помощью

\*) См., например, книгу [29].

(4.112) выражение для  $\delta_{xx}$  в общем виде. Эпюра изгибающих моментов от единичной силы представлена на рис. 113. Уравнение изгибающего момента в интервале  $0-1$ :

$$M'_x = \frac{l-x}{l} u \quad \text{при} \quad 0 < u < x,$$

в интервале  $1-o'$

$$M''_x = \frac{l-u}{l} x \quad \text{при} \quad x < u < l.$$

Пользуясь интегралом Мора (4.112), найдем

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= \frac{1}{EI} \int_0^x \frac{(l-x)^2}{l^2} u^2 du + \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{x^2(l-u)^2}{l^2} du = \\ &= \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \frac{x^4}{l} - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{3} lx^2 \right). \end{aligned}$$

Теперь, зная, что  $\mu(x) = \frac{q}{g}$ , согласно (4.111), будем иметь

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{q}{g} \left( \frac{1}{3} \frac{x^4}{l} - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{3} lx^2 \right) dx, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{90} \cdot \frac{ql^4}{EIg}$$

или  $p = 9,4863 \sqrt{\frac{EIg}{ql^4}}$ . Зная, что  $\tau = \frac{2\pi}{p}$ , получим

$$\tau = 0,66195 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad (4.113)$$

### Г. Определение частоты основного типа колебаний однопролетной балки с помощью интегрирования дифференциального уравнения ее движения

Не останавливаясь на получении уравнения движения в общем виде, решим задачу определения частоты колебаний с распределенной нагрузкой. Так как метод прямого интегрирования, в котором ограничения и допущения в задаче сводятся к минимуму, является наиболее точным, то полученный ниже результат возьмем в качестве критерия точности ко всем остальным значениям частоты, определенным приближенными методами.

Здесь ограничения сводятся лишь к тому, что балка считается достаточно тонкой, чтобы не вводить в рассмотрение эффекта вращательного движения отдельных ее элементов и, кроме того, не будем принимать во внимание действие перерезывающих сил. Однако и эти факторы могут быть учтены [23]. Указанные ограничения имели место и в приближенных методах, но, если так можно выразиться, их «удельный вес» в сравнении с остальными ограничениями был весьма незначительным. Далее, мы предполагаем также, что материал балки однородный, изотропный и подчиняется закону Гука.

Считая длину балки равной  $l$  и беря начало координат в левом конце, направим ось  $x$ -в вправо, а ось  $y$ -в — вниз. Дифференциальное уравнение упругой линии

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (4.114)$$

продифференцируем дважды по  $x$ ; тогда справа получим интенсивность нагрузки  $q$ , т. е.

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = q.$$

Это все относится к покоящейся балке. Предположим теперь, что балка совершает колебания. Применяя принцип Даламбера, учтем инерционные силы, в результате чего получим

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q - \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

где уже взяты частные производные. Это и есть дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний балки.

Легко видеть, что решение написанного уравнения можно искать в виде суммы функций  $y(t, x) + y_0(x)$ , первая из которых удовлетворяет уравнению:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.115)$$

а вторая — уравнению

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q. \quad (4.116)$$

Но последнее уравнение определяет кривую изгиба балки под действием статической нагрузки; на ординаты этой кривой накладываются ординаты, даваемые первым членом решения, который, собственно говоря, и определяет колебания. Так как

нас интересуют только колебания, то мы отбросим вопрос отыскания второй функции и будем заниматься нахождением функции  $y(t, x)$  из уравнения (4.115). Перепишем его в несколько ином виде, а именно:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (4.117)$$

где принято

$$a^2 = \frac{EIg}{q}. \quad (4.118)$$

Решение уравнения (4.117) будем искать в следующей форме:

$$y = RX,$$

где  $R$  — функция только времени  $t$ , а  $X$  — только координаты  $x$ . Подставляя это решение в (4.117), получим

$$X \frac{d^2 R}{dt^2} + a^2 R \frac{d^4 X}{dx^4} = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{a^2}{X} \frac{d^4 X}{dx^4}.$$

Слева стоит функция времени  $t$ , а справа — координаты  $x$ ; равенство возможно только тогда, когда каждая часть рассматриваемого уравнения равна постоянной величине. Положим эту постоянную равной некоторому числу  $p^2$ . Тогда получим следующие два уравнения:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + p^2 R = 0, \quad (4.119)$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{p^2}{a^2} X = 0. \quad (4.120)$$

Решение уравнения (4.119) имеет вид

$$R = A \cos pt + B \sin pt,$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Решение уравнения (4.120) запишется в таком виде

$$X = C \operatorname{ch} kx + D \operatorname{sh} kx + E \cos kx + F \sin kx,$$

где  $C, D, E, F$  — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий,  $k$  — величина, введенная для удобства и связанная с  $p$  и  $a$  формулой

$$k^2 = \frac{p}{a}. \quad (4.121)$$

Так как на концах балки (т. е. при  $x=0$  и  $x=l$ ) прогиб и изгибающий момент равны нулю, то в этих точках

$$X=0, \quad \frac{d^2X}{dx^2}=0.$$

Отсюда имеем четыре уравнения для определения четырех постоянных:

$$\begin{aligned} C+E &= 0, & C-E &= 0, \\ C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl + E \cos kl + F \sin kl &= 0, \\ C \operatorname{ch} kl + D \operatorname{sh} kl - E \cos kl - F \sin kl &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений вытекает, что  $C=E=0$ , а тогда последние два будут совместны лишь в том случае, если

$$\operatorname{sh} kl \sin kl = 0.$$

Но  $\operatorname{sh} kl$  обращается в нуль только при  $kl=0$  (не считая мнимых корней), что же касается  $\sin kl$ , то он обращается в нуль не только при  $kl=0$ , но и при  $kl=\pi, 2\pi, \dots, i\pi$ , т. е. вообще при

$$k_i = \frac{i\pi}{l}, \quad (4.122)$$

где  $i=1, 2, 3, \dots$ . Тогда  $D=0$ , а величину  $F$  мы можем присоединить к постоянным  $A$  и  $B$ . Общее решение уравнения (4.117) можно записать теперь в виде

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \sin k_i x,$$

где  $k_i$  определяется из (4.122), а  $p_i$  найдем, если в выражение (4.121) подставить значение  $k$  (4.122) и  $a$  (4.118), в итоге будем иметь

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{q}}. \quad (4.123)$$

Формула (4.123) дает значения циклических частот последовательных типов колебаний. Нас интересует в данной задаче только основное колебание, т. е. колебание, имеющее место при  $i=1$ . В таком случае

$$p_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{q}},$$

а период  $\tau$  будет равен

$$\tau = 0,63662 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad (4.124)$$

В заключение сравним результаты, полученные различными методами (4.95), (4.103), (4.105), (4.113) и (4.124). Выпишем коэффициенты, стоящие при корнях выражений периода (4.95), (4.103), (4.105), (4.113) и (4.124):

$$0,63617; 0,63618; 0,63651; 0,66195; 0,63662.$$

Из числовых коэффициентов видно, что, за исключением коэффициента 0,66195, полученного методом Данкерлея, период колебаний все больше приближается к точному значению (0,63662).

Отклонения первых четырех чисел от последнего, выраженные в процентах, равны

$$-0,071\%; -0,069\%; -0,017\%; +3,978\%.$$

Эти данные показывают, что, беря вторую аппроксимацию по методу Рэлея—Ритца, мы получаем значение периода, чрезвычайно близкое к точному его значению; поэтому потребность в следующем приближении часто отпадает. Эти соображения применимы и в тех случаях, когда точное решение задачи невозможно или чрезвычайно сложно, и приходится пользоваться приближенными методами.

Метод Данкерлея дает наиболее грубый результат, но его преимущества заключаются в том, что он наиболее прост и дает завышенное значение периода, то есть может служить ориентировочным ограничением приближенного значения периода сверху.

## § 10. ДИНАМИЧЕСКИЙ ВИБРОГАСИТЕЛЬ БЕЗ ЗАТУХАНИЯ

Часто вынужденные колебания системы, вызываемые действием возмущающей силы, являются крайне нежелательными, а иногда вообще недопустимыми, особенно, если собственная частота системы совпадает с частотой возмущающей силы (случай резонанса). Если при этом не представляется возможным устранить эту силу или, в крайнем случае, изменить в системе массу или упругую постоянную, выводя тем самым систему из условий резонанса, является весьма целесообраз-

ным применение динамического виброгасителя\*). В общем случае динамический гаситель колебаний выполняет свою работу не только за счет надлежащей настройки, но и за счет более или менее значительного поглощения энергии (демпфирования колебаний).

Рассмотрим действие виброгасителя в случае, когда механическая система может быть представлена в виде основной массы  $M$ , установленной на пружине  $c_1$  и находящейся под действием возмущающей силы  $Q = H \sin(\omega t + \delta)$ . Виброгаситель состоит из вспомогательной массы  $m$ , прикрепленной на пружине  $c_2$  к основной массе (рис. 111). Найдем уравнения вынужденных колебаний этой двухстепенной системы. Такая задача нами уже решалась в примере 2 § 7 гл. IV. Здесь более подробно проанализируем получаемые при этом результаты. Если принять за обобщенные координаты вертикальные перемещения  $x_1$  и  $x_2$ , отсчитываемые вниз от положения равновесия центров тяжести обеих масс, получим

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) + H \sin(\omega t + \delta), \\ mx_2 &= -c_2(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

откуда по формулам (4.67) найдем

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= \frac{H(c_2 - m\omega^2)}{\Delta(\omega^2)} \sin(\omega t + \delta), \\ x_2^* &= \frac{Hc_2}{\Delta(\omega^2)} \sin(\omega t + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (4.125)$$

где

$$\Delta(\omega^2) = (c_1 + c_2 - M\omega^2)(c_2 - m\omega^2) - c_2^2. \quad (4.126)$$

Из (4.125) видно, что если

$$(c_2 - m\omega^2) = 0, \quad (4.127)$$

то основная масса будет находиться в покое, т. е. колебания в ней будут погашены. Так как собственная частота присоединенного виброгасителя

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}, \quad (4.128)$$

\*) В специальной литературе его часто называют также анти-вибратором или поглотителем колебаний.

то, подставив ее в выражение (4.127), получим

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 0. \quad (4.129)$$

Эта формула позволяет более четко сформулировать условие подбора параметров виброгасителя: для погашения колебаний основной массы необходимо, чтобы его собственная частота  $\omega_0$  была равна частоте возмущающей силы  $\omega$ . В этом случае уравнения движения (4.125) примут вид

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{H}{c_2} \sin(\omega t + \delta - \pi). \quad (4.130)$$

Следовательно, в установившемся режиме колебаний виброгасителя сила упругости пружины  $c_2$  изменяется по закону

$$F_{c_2} = x_2^* c_2 = H \sin(\omega t + \delta - \pi),$$

т. е. эта сила в каждый момент времени  $t$  равна возмущающей и противоположно ей направлена.

В практических применениях надо учитывать то обстоятельство, что выбор параметров виброгасителя, удовлетворяющих условию (4.128), может быть ограничен конструктивными условиями. Например, если взять слишком мягкую пружину, а следовательно, и слишком малую массу  $m$ , чтобы не нарушалось условие (4.128), то согласно (4.130) амплитуда колебаний виброгасителя  $|x_2^*|_{\max}$  при данном  $H$  может стать чрезмерно большой и перейти границу допустимого перемещения. Поэтому минимально возможное  $c_2$  лимитизируется значением  $H$  возмущающей силы.

При этом не будет излишним еще раз подчеркнуть то обстоятельство, что колебания основной системы будут погашены лишь в тех случаях, когда частота изменения возмущающей силы постоянна ( $\omega = \text{const}$ ). Это имеет место, например, в установках, непосредственно соединенных с синхронными электромоторами. В противном случае применение такого виброгасителя является крайне нежелательным, так как не только задача поглощения колебаний здесь не решается в заданном диапазоне частот, но и значительно ухудшаются динамические свойства основной системы с точки зрения устранения в ней колебаний. Действительно, если принять во внимание выражение (4.126) и приравнять его нулю, то получим биквадратное уравнение относительно

частоты  $\omega$ . Два положительных корня этого уравнения являются резонансными (собственными) частотами рассматриваемой системы. Собственная частота  $\Omega_0$  одномассовой системы без виброгасителя, очевидно, равна:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{M}}. \quad (4.131)$$

Так как применение гасителя, вообще говоря, имеет смысл, если основная система без него находится в состоянии резонанса или очень близка к нему ( $\Omega_0 \approx \omega$ ), то частота присоединенного виброгасителя  $\omega_0$  должна быть согласно (4.129) равной  $\Omega_0$ . В этом случае  $c_2/m = c_1/M$  и выражение (4.126) можно записать в следующем виде:

$$\Delta(\omega^2) = c_1 c_2 \left[ \left( 1 + \frac{m}{M} - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \right) - \frac{m}{M} \right].$$

Приравнявая нулю, найдем собственные частоты для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \Omega_0 \sqrt{1 + \frac{m}{2M} + \sqrt{\frac{m}{M} + \left(\frac{m}{2M}\right)^2}}, \\ \omega_2 &= \Omega_0 \sqrt{1 + \frac{m}{2M} - \sqrt{\frac{m}{M} + \left(\frac{m}{2M}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.132)$$

Так как  $\sqrt{\frac{m}{M} + \left(\frac{m}{2M}\right)^2}$  всегда больше, чем  $m/2M$ , то  $\omega_1 > \Omega_0 > \omega_2$ . Из (4.132) можно видеть также, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  мало отличаются друг от друга при малых значениях  $m/M$ . Следовательно, уже при сравнительно незначительном изменении частоты возмущения  $\omega$  система может попасть в резонансный режим  $\omega_1$  или  $\omega_2$ .

Этот весьма существенный недостаток сильно сужает область применения виброгасителя такого типа. Естественно возникает вопрос: нельзя ли устранить этот недостаток, и если можно, то в какой мере и каким путем? Первые соображения в этом направлении наталкивают нас на мысль: попытаться «раздвинуть» новые резонансные «пики» таким образом, чтобы они не попадали в диапазон возможных изменений частоты возмущающей силы. Согласно (4.132) это принципиально можно осуществить путем увеличения отношения  $m/M$ , т. е., по существу, увеличения массы виброгасителя  $m$ . Однако нетрудно сообразить, что этот путь

мало эффективен, так как увеличение  $m$  в большинстве случаев нежелательно, а иногда просто невозможно.

Другие соображения в несколько ином направлении могут привести к задаче создания такой конструкции гасителя, при которой  $\omega_0$  последнего менялось в соответствии с изменением  $\omega$  возмущения, т. е. чтобы гаситель как бы обладал следящей настройкой. Эта задача решена для гашения крутильных колебаний с помощью маятникового виброгасителя [12].

Весьма удачным решением этого вопроса является введение в конструкцию виброгасителя более или менее интенсивного демпфирования, т. е. применение так называемого динамического гасителя колебаний с затуханием.

## § 11. ДИНАМИЧЕСКИЙ ВИБРОГАСИТЕЛЬ С ЗАТУХАНИЕМ

Введением вязкого сопротивления основной недостаток виброгасителя — наличие двух резонансных частот — устраняется благодаря тому, что амплитуды колебаний при

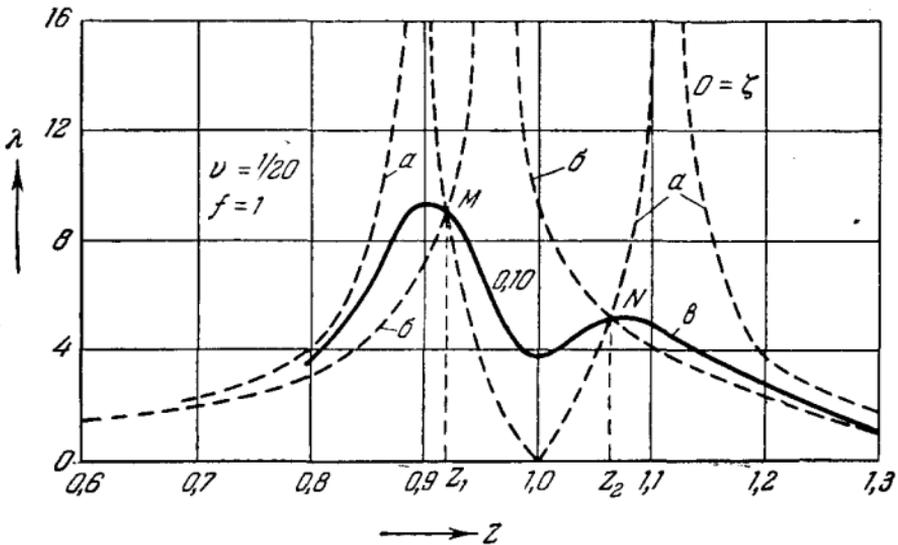


Рис. 115.

резонансных режимах можно значительно снизить, сделав их неопасными для основной системы.

На рис. 115 изображены амплитудные характеристики основной системы, к которой присоединены различного рода

поглотители: кривая *a* соответствует случаю действия виброгасителя без затухания ( $\xi = 0$ ), главная масса имеет две резонансные частоты, при которых амплитуды бесконечно велики; кривая *b* соответствует случаю жесткой связи поглотителя с главной массой; наконец, кривая *в* отражает случай динамического виброгасителя с затуханием  $\xi = 0,1$ . Из рисунка видно, что все три характеристики проходят через некоторые постоянные точки *M* и *N*. Как будет показано ниже, при исследовании уравнений движения системы это обстоятельство не случайно. Выведем эти уравнения с учетом затухания.

Отправляясь вновь к ранее рассмотренной системе (рис. 111), введем параллельно пружине гасителя  $c_2$  демпфирующее устройство с коэффициентом вязкого сопротивления  $b_2$ . Тогда уравнения движения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= -c_1x_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(x_2 - x_1) + \\ &\quad + H \sin(\omega t + \delta), \\ m\ddot{x}_2 &= -b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (4.133)$$

Пользуясь общими формулами (4.78), (4.80), (4.81), найдем амплитуду вынужденных колебаний основной массы:

$$(\alpha_1^*)^2 = H^2 \frac{(c_2 - m\omega^2)^2 + b_2^2\omega^2}{[(c_1 - M\omega^2)(c_2 - m\omega^2) - c_2^2 m\omega^2]^2 + b_2^2\omega^2(c_1 - M\omega^2 - m\omega^2)^2}. \quad (4.134)$$

Перейдем к безразмерной форме полученного уравнения, введя следующие обозначения:

$\alpha_{ст} = \frac{H}{c_1}$  — статическая деформация системы;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}$  — собственная частота виброгасителя;  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{M}}$  — собственная частота основной системы;  $z = \frac{\omega}{\Omega_0}$  — отношение частоты вынужденных колебаний к собственной частоте основной системы;  $f = \frac{\omega_0}{\Omega_0}$  — отношение собственных частот;  $\nu = \frac{m}{M}$  — отношение массы виброгасителя к массе основной системы  $\lambda = \frac{\alpha_1^*}{\alpha_{ст}}$  — коэффициент динамичности;  $\xi = \frac{b_2}{2m\Omega_0}$  — безразмерный коэффициент затухания.

Тогда уравнение (4.134) запишется в следующем виде:

$$\lambda = \sqrt{\frac{(2\xi z)^2 + (f^2 - z^2)^2}{(2\xi z)^2 (1 - z^2 - \nu z^2)^2 + [(f^2 - z^2)(1 - z^2) - \nu z^2 f^2]^2}}. \quad (4.135)$$

Из этого видно, что при заданных  $\nu$ ,  $f$  существует такое значение  $z$ , когда имеет место следующее соотношение подкоренных выражений:

$$\frac{(f^2 - z^2)^2}{[(f^2 - z^2)(1 - z^2) - \nu z^2 f^2]^2} = \frac{1}{(1 - z^2 - \nu z^2)^2}. \quad (4.136)$$

Очевидно, в этом случае коэффициент динамичности  $\lambda$  не зависит от затухания  $\xi$ . Следовательно, как бы мы не старались введением демфера уменьшить колебания системы, при некоторых значениях  $\omega$  возмущающей силы, соответствующих корням уравнения (4.136), мы все равно не достигнем желаемого результата. Именно это обстоятельство и позволяет нам найти алгоритмы оптимальной настройки виброгасителя. Действительно, в указанном нами случае амплитуда вынужденных колебаний будет определяться лишь значением двух параметров  $\nu$  и  $f$ . Поэтому уместно поставить задачу отыскания такого соотношения  $\nu$  и  $f$ , при котором  $\lambda$  в случаях, когда демпфирование не оказывает свое действие, будет возможно минимальным при всех корнях уравнения (4.136).

Так как уравнение (4.136) положительных корней имеет всегда лишь два  $z_1$ ,  $z_2$ , то наименьшее значение  $\lambda$  можно достигнуть в случае, когда оно будет одинаково при обоих корнях, т. е. когда

$$\lambda(z_1^2) = \lambda(z_2^2). \quad (4.137)$$

Эти функциональные выражения не обязательно находить из уравнения (4.135), они могут быть легко получены, если учесть, что  $\lambda$  в этом случае не зависит от  $\xi$  и, следовательно, равна отношению (4.136), поэтому имеем право условие (4.137) представить в развернутом виде, взяв правое соотношение равенства (4.136)

$$\frac{1}{1 - z_1^2 - \nu z_1^2} = \frac{1}{1 - z_2^2 - \nu z_2^2}. \quad (4.138)$$

Отсюда видим, что если  $z^2 > \frac{1}{1 + \nu}$ , что обязательно имеет место при одном из корней  $z_1^2$ ,  $z_2^2$ , то получим отри-

цательное значение  $\lambda$ . Так как физически это означает, что колебания по фазе смещены на  $180^\circ$ , а мы в уравнении (4.138) должны приравнять  $\lambda$  одного знака, то написанное уравнение можно откорректировать умножением на  $-1$  одной из его частей, не нарушив при этом физической сущности процесса. Далее, используя свойство корней квадратного уравнения, нетрудно из (4.136), (4.138) получить следующее соотношение \*)

$$f = \frac{1}{1+v}. \quad (4.139)$$

Это выражение дает нам условие оптимальной настройки виброгасителя, т. е. при выполнении полученного условия амплитуды колебаний основной системы при тех значениях частоты возмущающей силы, когда на них не сказывается влияние вязкого сопротивления, будут одинаковыми и минимально возможными. Таким образом, приходим к выводу, что в случае переменной частоты возмущающей силы и наличия демпфера, гаситель колебаний должен быть настроен на частоту  $\omega_0$  несколько меньшую, чем  $\Omega_0$ , причем это «смещение» частоты  $\omega_0$  тем больше, чем больше отношение масс  $v$ .

Подставив один из корней уравнения (4.136) в соответствующее скорректированное соотношение равенства (4.138), нетрудно вычислить значение амплитуды для рассмотренного случая. В результате преобразований получим

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{1 + \frac{2}{v}}. \quad (4.140)$$

Теперь наша задача сводится к тому, чтобы введением оптимального затухания амплитудная характеристика  $\lambda(z)$  не превышала значения (4.140) хотя бы при одном из двух корней  $z_1, z_2$ , т. е. чтобы один из ее экстремумов был равен  $\sqrt{1 + 2/v}$ . Для этого продифференцируем (4.135) по  $z$ , выразив в нем  $f$  через  $v$  из (4.139), и приравняем нулю в точке  $z_1^2$ , а затем в точке  $z_2^2$ . Эти вычисления приводят к следующим результатам:

$$\xi^2 \Big|_{z^2=z_1^2} = \frac{v \left( 3 - \sqrt{\frac{v}{v+2}} \right)}{8(1+v)^3}, \quad \xi^2 \Big|_{z^2=z_2^2} = \frac{v \left( 3 + \sqrt{\frac{v}{v+2}} \right)}{8(1+v)^3}.$$

\*) Подробнее см. книгу [10].

Практически целесообразно брать некоторое среднее значение из двух полученных выражений

$$\xi^2 = \frac{3\nu}{8(1+\nu)^3}. \quad (4.141)$$

Это выражение позволяет определить оптимальное затухание при выбранном  $\nu$ .

В качестве примера может служить жидкостной стабилизатор Фрама, используемый для успокоения качки корабля (рис. 112). Принцип его действия уже рассматривался ранее в § 8. Там же были получены уравнения движения системы корабль-стабилизатор. Сравнив их с (4.133), увидим, что имеется некоторое различие, однако принцип изложенных здесь предпосылок этим не упраздняется, а, наоборот, получает еще более глубокое развитие. В конечном итоге оптимальная настройка стабилизатора Фрама может осуществляться относительно частоты  $f$  путем соответствующего выбора  $S$ , которым определяется коэффициент возвращающего момента  $c$ , а также относительно  $\xi$  путем изменения дросселирующего отверстия  $D$  (рис. 112) в верхней части поглотителя.

В практике находят частое применение так называемые «демпферы Ланчестера». В последних упругая сила пружины отсутствует и поглощение колебаний осуществляется за счет затухания, т. е. только за счет сил сопротивления. Если в такой конструкции сопротивление линейно относительно скорости движения, то расчеты по оптимальной ее настройке аналогичны приведенным выше, но с учетом, что  $c_2 = 0$ , то есть «демпфер Ланчестера» с линейным сопротивлением есть частный случай динамического виброгасителя с затуханием.

В результате вычислений получаем следующие выражения:

$$z_1^2 = \frac{2}{2+\nu}, \quad \lambda_{z_1} = 1 + \frac{2}{\nu}, \quad \xi = \frac{1}{2(2+\nu)(1+\nu)},$$

где все обозначения имеют то же значение, что и ранее.

В некоторых конструкциях для поглощения колебаний применяется сухое трение. Условия оптимальной настройки такого гасителя можно получить, поставив задачу достижения максимальной энергии, рассеиваемой поглотителем [10].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
2. Андронов А. А., Собрание трудов, Изд. АН СССР, 1956.
3. Бабаков И. М., Теория колебаний, «Наука», 1965.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
5. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
6. Бутенин Н. В., Теория колебаний, «Высшая школа», 1963.
7. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, «Наука», 1965.
8. Воронков И. М., Курс теоретической механики, «Наука», 1964.
9. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960.
10. Ден-Гартог Дж. П., Механические колебания, перев. с англ., Физматгиз, 1960.
11. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. I и II, Гостехиздат, 1955.
12. Ляпунов А. М., Собрание сочинений в 6 томах, АН СССР, 1956—1965.
13. Малкин И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
14. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
15. Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функции Матье, перев. с англ. ИЛ, 1953.
16. Николаи Е. Л., Теоретическая механика, ч. 1 и 2, Физматгиз, 1958.
17. Обморшев А. Н., Сравнение различных методов определения частоты собственных колебаний балки, лежащей на двух опорах, Труды Кр. МММИ, в. 29.30, 1937.
18. Основы автоматического регулирования под общей ред. В. В. Солодовникова, т. 1 и 2, Машгиз, 1954—1959.
19. Памяти А. А. Андропова, Сборник статей, Изд. АН СССР, 1955.
20. Пановко Я. Г., Основы прикладной теории упругих колебаний, Машгиз, 1957.
21. Петров В. В., Уланов Г. М., Теория двух простейших релейных систем авторегулирования, Автоматика и телемеханика 11, 289, 1950.

22. Рэлей (Дж. В. Стретт), Теория звука, т. I и II, Гостехиздат 1955.
23. Серебренников М. Г., Гармонический анализ, Гостехиздат, 1948.
24. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.
25. Стокер Дж., Нелинейные колебания в механических и электрических системах, перев. с англ. ИЛ, 1952.
26. Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, «Наука», 1964.
27. Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, Гостехиздат, 1952.
28. Тимошенко С. П., Колебания в инженерном деле, Физматгиз, 1959.
29. Феодосьев В. И., Сопротивление материалов, «Наука», 1964.
30. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
31. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, «Наука», 1965.
32. Штейнвольф Л. И., Динамические расчеты машин и механизмов, Машгиз, 1961.
33. Яблонский А. А., Норейко С. С., Курс теории колебаний, «Высшая школа», 1961.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	6
Введение . . . . .	7
<b>Глава I. Основные положения . . . . .</b>	<b>10</b>
§ 1. Колебательная система . . . . .	10
§ 2. Устойчивость равновесия . . . . .	11
§ 3. Устойчивость движения . . . . .	17
§ 4. Классификация сил, действующих на колебательную систему . . . . .	18
§ 5. Обобщенное уравнение энергии . . . . .	22
§ 6. Квадратичные формы $T$ , $\Phi$ , $\Pi$ для линеаризованных систем . . . . .	23
§ 7. Дифференциальные уравнения малых колебаний системы около положения устойчивого равновесия . . . . .	28
<b>Глава II. Линейные системы с одной степенью свободы</b>	<b>31</b>
§ 1. Некоторые вопросы, связанные с построением схемы	31
§ 2. Интерпретация движения на фазовой плоскости . . . . .	33
§ 3. Свободные колебания без сопротивления . . . . .	36
§ 4. Электрические системы . . . . .	41
§ 5. Потеря устойчивости . . . . .	44
§ 6. Затухающие колебания . . . . .	49
§ 7. Нарастающие колебания . . . . .	60
§ 8. Вынужденные колебания без сопротивления при периодическом возмущении . . . . .	64
§ 9. Практический гармонический анализ . . . . .	74
§ 10. Вынужденные колебания с линейным сопротивлением при периодическом возмущении . . . . .	88
§ 11. Вынужденные колебания при произвольном законе возмущающей силы . . . . .	97

<b>Глава III. Нелинейные системы с одной степенью свободы</b>	<b>105</b>
§ 1. Консервативные системы . . . . .	105
§ 2. Диссипативные системы . . . . .	121
§ 3. Автоколебательные системы . . . . .	137
§ 4. Вынужденные колебания нелинейных систем . . . . .	162
§ 5. Системы, описываемые уравнениями с периодически изменяющимися коэффициентами . . . . .	180
<b>Глава IV. Линейные системы с конечным числом степеней свободы</b>	<b>201</b>
§ 1. Исследования дифференциальных уравнений движения автономной системы . . . . .	201
§ 2. Устойчивость системы . . . . .	203
§ 3. Критерий устойчивости . . . . .	210
§ 3. Свободные колебания в случае пренебрежимо малого сопротивления . . . . .	216
§ 5. Свободные колебания системы с двумя степенями свободы . . . . .	225
§ 6. Затухающие колебания системы с двумя степенями свободы . . . . .	233
§ 7. Вынужденные колебания системы без сопротивления . . . . .	237
§ 8. Вынужденные колебания системы с сопротивлениями, пропорциональными скорости . . . . .	243
§ 9. Приближенные методы определения частоты колебаний сложных систем . . . . .	246
§ 10. Динамический виброгаситель без затухания . . . . .	266
§ 11. Динамический виброгаситель с затуханием . . . . .	270
<b>Литература</b> . . . . .	<b>275</b>