#### Я.Г.Пановко

## ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Дается изложение основ теории механических колебаний, которое опирается на общин курс теоретической механики и иллюстрируется рядом типовых Отличительной' особенностью изложения является примеров. материала по главам не по признаку числа степеней свободы механической системы, а по признаку общности рассматриваемых, колебательных явлений. В соответствии с этим в главах I—IV рассматриваются определенные типы (свободные колебания, вынужденные колебания, колебательных явлений параметрические колебания, автоколебания). Особое уделяется внимание нелинейным задачам.

Для студентов и аспирантов втузов, а также для инженеров, занимающихся

#### задачами динамики механических систем. Содержание 5 Предисловие Введение 7 1. Общие задачи и содержание теории 2. Составление механической модели; ограничение числа степеней 10 свободы 3. Составление механической модели; силы, действующие при 14 колебаниях 4. Понятие о фазовой плоскости 18 Глава I. Свободные колебания 22 § 1. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии 22 трения 1. Основное дифференциальное уравнение и его решение 22 2. Метод Рэлея 29 3. Зависимость устойчивости равновесия от коэффициента жесткости 35 § 2. Системы с одной степенью свободы при наличии линейной 40 восстанавливающей силы и трения 1. Линейное трение 40 2. Нелинейное трение 45 3. Гистерезисное трение 54 4. Ударное демпфирование 55 § 3. Системы с одной степенью свободы при нелинейной 57 восстанавливающей силе

1. Обшие понятия 2. Точные решения

3. Приближенные способы

3. Собственные формы

§ 4. Линейные системы с несколькими степенями свободы

2. Решение системы дифференциальных уравнений

1. Способы составления дифференциальных уравнений движения

57

58

66

72

72

82

86

4. Ортогональность собственных форм	89
5. Роль начальных условий	92
6. Случай кратных и нулевых корней	94
7. Влияние трения	98
Глава II. Вынужденные колебания	101
§ 5. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии	101
трения	
1. Основное уравнение при силовом возбуждении	101
2. Случаи кинематического возбуждения	103
3. Действие гармонической вынуждающей силы	106
4. Действие произвольной вынуждающей силы	110
5. Действие периодической вынуждающей силы	116
§ 6. Системы с одной степенью свободы при наличии линейной	122
восстанавливающей силы и трения	
1. Действие гармонической вынуждающей силы	122
2. Действие произвольной вынуждающей силы	127
3. Действие периодической вынуждающей силы	128
4. Комплексная форма решения	132
5. Влияние нелинейно-вязкого трения при гармонической	140
вынуждающей силе	
6. Влияние гистерезиса	142
7. Случайные колебания	144
§ 7. Системы с одной степенью свободы при нелинейной	148
восстанавливающей силе	
1. Основные понятия	148
2. Основные колебания	149
3. Супергармонические колебания	152
4. Субгармонические колебания	154
5. Способ поэтапного интегрирования для кусочно-линейных систем	156
§ 8. Линейные системы с несколькими степенями свободы	160
1. Общие уравнения	160
2. Действие вынуждающих сил, изменяющихся по гармоническому	161
закону; непосредственное решение	101
3. Действие произвольных вынуждающих сил; разложение по	167
собственным формам	107
4. Действие периодических вынуждающих сил	170
Глава III. Параметрические колебания	171
§ 9. Общие понятия	171
1. Основное дифференциальное уравнение	171
2. Параметрические колебания около положения равновесия	172
3. Параметрические колебания около стационарного режима движения	174
§ 10. Параметрическое возбуждение по периодическому кусочно-	177
постоянному закону	1 / /
постоянному закону 1. Колебания при отсутствии трения	177
т. колования при отсутствии трения	1 / /

2. Влияние линейного трения		181
§ 11. Параметрическое возбуждение по	закону синуса	183
1. Общие сведения		183
2. Примеры		185
Глава IV. Устойчивость состояний р	авновесия и автоколебания	188
§ 12. Устойчивость состояний равнове	сия	188
1. Вступительные замечания		188
2. Системы с одной степенью свободы		189
3. Системы с двумя степенямисвободы без трения		193
4. Системы с двумя степенями свободы	4. Системы с двумя степенями свободы с трением	
§ 13. Стационарные режимы и предель	ные циклы	203
1. Общие понятия		203
2. Способ поэтапного интегрирования	для кусочно-линейных систем	209
3. Метод энергетического баланса		216
4. Метод малого параметра		218
§ 14. Переходные процессы и устойчин	вость стационарных режимов	222
1. Вступительные замечания		222
2. Способ поэтапного интегрирования	для кусочно-линейных систем	222
3. Метод энергетического баланса		224
4. Метод медленно меняющихся ампли	итуд	225
5. Метод точечных отображений		226
6. Устойчивость стационарных режимов		227
§ 15. Явления синхронизации		231
1. Вступительные замечания		231
2. Синхронизация квазилинейной автоколебательной системы		231
3. Синхронизация маятника		234
§ 16. Странные аттракторы		236
1. Генераторы стохастичности		236
2. Хаотический осциллятор Неймарка		238
3. Примеры странных аттракторов в неавтономных системах		242
Список литературы		246
Предметный указатель		249
	ый указатель	
Автоколебания 10	- странный 208, 236—244	
- стационарные 215	Аэрогидроупругость 190	
Автоколебательные системы 17	Балочная система 81	
Автопараметрические системы 10	Биения 86	
Амплитуда 26	Вековой член 109	
- комплексная 133	Вектор собственный 89	
Амплитудно-частотная	Виброгаситель динамически	й 163
характеристика 107	Вибротранспортировка 8	
Амплитудный спектр 136, 137	Возбуждение кинематическо	e 9
Антирезонанс 162	Восстанавливающие силы 5	
Аттрактор 208	Вынуждающие силы 9, 101	

Вынужденные колебания 8, 101	- собственное матрицы 89
Гамма-функция 47	Изгибные колебания 30
Гаситель колебаний динамический	Изображающая точка 18
163	Импульсная реакция 111
Генераторы стохастичности 235	Импульсы периодические 131
Гистерезис 54, 142	Инерционный коэффициент 23
Главные координаты 77, 167	Интеграл Фурье 138
Граничные условия 30	Интегральное квадратическое
Движение относительное 104, 105	уклонение 68
Декремент логарифмический 43	Интегрирование поэтапное 63, 156
Детерминированные функции	Кривая скелетная 150
времени 144	Критерий Рауса—Гурвица 201
Диаграмма Айнса—Стретта 184	- Сильвестра 73
- устойчивости 179	Критическая угловая скорость 200
- фазовая 20	Критическое затухание 44
Дивергенция 188	- значение параметра 36
Динамическая жесткость 107	Кулоново трение 49
комплексная 133	Каноническая форма 76
Динамический гаситель колебаний	Квадратическое трение 49
163	Квазиупругая характеристика 58
Диссипативная функция Рэлея 41	Квазиупругий коэффициент 24
Диссипативные силы 17, 190	Кинематические граничные условия
Дифференциальное уравнение для	30
And the continuous of the continuous continu	20
огибающей 48	Кинематическое возбуждение 9
* * • • •	
огибающей 48	Кинематическое возбуждение 9
огибающей 48 Добротность (системы) 124	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145 - прямая 145	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107 Комплексная амплитуда 133
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145 - прямая 145	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107 Комплексная амплитуда 133 - динамическая жесткость 133
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145 - прямая 145 - синтеза 145 - Циглера 189, 202 Закон сохранения энергии 60	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107 Комплексная амплитуда 133 - динамическая жесткость 133 - податливость 133 - обобщенная сила 132 Комплексное обобщенное
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145 - прямая 145 - синтеза 145 - Циглера 189, 202 Закон сохранения энергии 60 Затухание критическое 44	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107 Комплексная амплитуда 133 - динамическая жесткость 133 - податливость 133 - обобщенная сила 132 Комплексное обобщенное перемещение 132
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145 - прямая 145 - синтеза 145 - Циглера 189, 202 Закон сохранения энергии 60 Затухание критическое 44 Затухающие колебания 42	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107 Комплексная амплитуда 133 - динамическая жесткость 133 - податливость 133 - обобщенная сила 132 Комплексное обобщенное перемещение 132 Координатные функции 14
огибающей 48 Добротность (системы) 124 Единичные перемещения 78 - реакции 79 Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комплексная 133 - отрицательная 36 Задача идентификации 145 - обратная 145 - о дивергенции 189 - о флаттере 194 - оптимизации 145 - прямая 145 - синтеза 145 - Циглера 189, 202 Закон сохранения энергии 60 Затухание критическое 44	Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8 - затухающие 42 - изгибные 30 - моногармонические 107 - основные 148 - параметрические 10 - продольные 33 - свободные 8 - субгармонические 148, 154 - супергармонические 148, 152 - установившиеся вынужденные 107 Комплексная амплитуда 133 - динамическая жесткость 133 - податливость 133 - обобщенная сила 132 Комплексное обобщенное перемещение 132

Корреляционная функция 146	- позиционные силы 15
Коэффициент влияния для	- силы трения 16
перемещений 78	Обобщенный коэффициент вязкости
- восстановления 158	41
<ul> <li>динамичности 107, 124</li> </ul>	жесткости 24
- инерционный 23	Обратный способ составления
- квазиупругий 24	системы уравнений 74
- обобщенный вязкости 41	Однородная система 82
<ul><li> жесткости 24</li></ul>	Ортогональность собственных форм
- передачи силы 127	89
- расстройки 231	Основной способ составления
- собственных форм 87	системы уравнений 75
- эквивалентный линейного трения	Особые точки 21
141	Осциллятор хаотический Неймарка
Линеаризация прямая 67	236
Лобовое сопротивление 189	Относительное движение 104, 105
Логарифмический декремент 43	Отрицательная жесткость 36
Масса обобщенная 23	"Отрицательное трение" 180
- приведенная 23	Парадокс Циглера 203
Математическое ожидание 145	Параметрические колебания 9
Матрица депфирования 99	Параметрический резонанс 10, 172
- жесткости 89	Перемещения единичные 78
- инерции 89	Переходный процесс 205
Метод гармонического баланса 69	Период колебаний 26
- малого параметра 218	Периодические импульсы 131
- медленно меняющихся амплитуд	Периодическое изменение параметра
50, 225	172
- Рэлея 14, 29—35	Петля гистерезиса 54
- точечных отображений 226	Плоскость фазовая 18
- энергетического баланса 46, 140,	Плотность спектральная 147
216, 224	Подъемная сила 189
Модель Русакова — Харкевича 157	Портрет фазовый 20
Моногармонические колебания 107	Построение Кенигса—Ламерея 227,
Мягкое самовозбуждение 206	228
Нестационарные позиционные силы	Поэтапное интегрирование 156
171	Преобразование Фурье 138
Неустойчивый предельный цикл 207	Приведенная масса 23
- узел 189, 191	Приведенные вынуждающие силы
- фокус 189, 191	167
Нормальные координаты 77, 167	Припасовывание 63, 209
Область притяжения 208	Продольные колебания 33
Обобщенная масса 23	Процесс переходный 205
- сила линейного трения 40	Прямая линеаризация 64
Обобщенные вынуждающие силы 15	

Прямой способ составления системы уравнений 74	- поэтапного интегрирования 63, 156, 209
уравнении 74 Реакции единичные 79	- прямой линеаризации 67
Реакция импульсная 111	- примои линсаризации от Способы приближенного
	*
Режим- стационарный 211 В 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	определения частоты
Резонанс 109, 131	свободных колебаний 66
<ul> <li>параметрический 10, 172</li> </ul>	Среднеквадратическое значение 148
Репеллер 208	Стационарные случайные функции
Ротационное движение 60	145
Самовозбуждение 193	Стационарный режим 211
- жесткое 207	неустойчивый 227
- мягкое 206	устойчивый 227
Свободные колебания 8	Странный аттрактор 208, 236—244
Седло 40	Субгармоника 154
Сила кулонова трения 49	Субгармонические колебания 148,
- обобщенная линейного трения 40	154
- подъемная 189	Супергармонические колебания 148,
- чисто кубическая 65	152
Силовые граничные условия 30	Точка изображающая 18
Силы восстанавливающие 15	Точки особые 21
- вынуждающие 9	Траектория фазовая 18, 39
<ul> <li>диссипативные 17, 190</li> </ul>	Трение квадратическое 49
- нестационарные позиционные 171	- кулоново 49
- обобщенные вынуждающие 15	- линейное 40
- приведенные вынуждающие 167	- "отрицательное" 190
- смешанного характера 17	Угловая частота 26
Система балочная 81	Узел неустойчивый 189, 191
- однородная 82	- устойчивый 44
Системы автоколебательные 17	Уклонение интегральное
Скелетная кривая 150	квадратичное 68
Скорость дивергенции 190, 197	Уравнение в конечных разностях 48
- критическая 200	<ul> <li>Ван дёр Поля 220</li> </ul>
- флаттера 197	- дифференциальное для огибающей
Собственная форма 87	48
- частота 26	- Лагранжа 75
Собственное значение 89	- Матье 183
Собственный вектор 89	- Рэлея 204
Сопротивление лобовое 189	- частотное 83
Спектр собственных частот 83	Условие синхронизации 235
Спектральная плотность 147	- устойчивости 230
Способ построения системы	Условия граничные 30
уравнений обратный 74	- кинематические граничные 30
<ul><li> основной 75</li></ul>	- начальные 63
прямой 74	- перехода 63

- периодичности 63, 118, 210	- координатные 14
- силовые граничные 30	- Матье 183
Устойчивость вращающегося вола	Функция диссипативная Рэлея 41
197	- корреляционная 146
- равновесия 35	- центрированная 146
- стационарных режимов 222, 227	Фурье интеграл 138
Устойчивый предельный цикл 205	- преобразование 138
- узел 44, 237	Хаотический осциллятор Неймарк
- фокус 44, 237	236
Фазовая диаграмма 20	Характеристика амплитудно-
- плоскость 18	частотная 107
- траектория 18, 39	- жесткости 58
Фазовый портрет 20	- квазиупругая 58
Флаттер 194	- частотная 133
Фокус неустойчивый 189, 191	Центрированная функция 146
- устойчивый 44	Цикл предельный 205
Форма вынужденных колебаний 166	неустойчивый 207
- каноническая кинетической энергии	устойчивый 205
76	Частота собственная 26
потенциальной энергии 76	- угловая 26
- решения комплексная 132	Частотная характеристика 133
- собственная 87	Частотное уравнение 83
Функции времени	Эйлеров интеграл второго рода 47
детерминированные 144	Эквивалентный коэффициент
<ul><li>- случайные 144</li></ul>	линейного трения 141

Неймарка

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга входит в серию учебных пособий, выходящих в издательстве «Наука» в качестве дополнений к «Курсу теоретической механики» Н. В. Бутенина, Я. Л. Лунца и Д. Р. Меркина. Эти дополнения рассчитаны на студентов, которые по профилю подготовки нуждаются в более подробном ознакомлении с рядом избранных проблем механики: теорией устойчивости движения, теорией механических колебаний, аналитической механикой, теорией гироскопов, теорией механического удара и т. д.

Теория механических колебаний особенно важна для инженеров, работающих в области машиностроения, приборостроения, авиа- и судостроения, промышленного и транспортного строительства, а также в некоторых других областях техники. Каждая из названных областей ставит перед специалистами ряд ответственных практических задач, тесно связанных с проблемой механических колебаний; хотя постановка этих задач почти всегда обладает заметной спецификой, но все они, в конечном счете, решаются на основе общих принципов и методов, составляющих содержание теории колебаний.

Важность теории колебаний общепризнана, и в ряде ведущих втузов страны эта теория, или более или менее специализированные ее модификации, является самостоятельным элементом учебного плана, обязательной или факультативной дисциплиной; во многих других втузах систематически работают дополнительные семинары по теории колебаний, привлекающие не только студентов, но также аспирантов и молодых инженеров.

Настоящая книга предназначена служить учебным пособием для любых таких занятий; можно надеяться, что она окажется полезной и для лиц, приступающих к самостоятельному изучению теории механических колебаний. Эта теория является частью механики, выделенной признаком общности рассматриваемых колебательных явлений. В основном тот же признак использован и при дальнейшем внутреннем разделении теории в этой книге, где каждая из четырех глав посвящена колебаниям определенного типа (свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания).

В вычислительный аппарат теории механических колебаний все больше проникают понятия, заимствованные из теории электрических цепей и теории автоматического управления (частотные методы, комплексные представления сил и перемещений), а также матричные методы. Эти понятия отражены и в настоящей книге, но без особых подробностей — в конце концов, они имеют смысл только в области линейных колебаний.

В книге кратко описываются различные приближенные методы анализа нелинейных систем. Каждый из этих методов вводится в том месте изложения, где впервые он может оказаться полезным. Поэтому уже в первой главе можно найти элементарное изложение методов медленио меняющихся амилитуд, гармонического баланса и др., которые обычно излагаются (если вообще излагаются) лишь в самом конце курса.

По сравнению с другими книгами подобного назначения здесь относительно большее внимание уделено примерам, значительная часть которых — конечно, в сильно схематизированном виде — соответствует практическим ситуациям.

Автор благодарен всем коллегам, которые своими советами и замечаниями помогли улучшению книги.

Ленипград октябрь 1989 г.

Я. Г. Паповко

## **ВВЕДЕНИЕ**

1. Общие задачи и содержание теории. Сорок лет назад академик Н. Д. Папалекси писал: «Не будет, вероятно, преувеличением сказать, что среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, колебания, понимаемые в широком смысле этого слова, занимают во многих отношениях выдающееся, часто первенствующее место».

Можно было бы привести множество примеров, иллюстрирующих важность колебательных явлений в технических устройствах. В одних случаях колебания вредны (именно эти случаи впервые привлекли внимание инженеров к проблемам теории колебаний), в других случаях они приносят пользу и целенаправленно применяются в современной технике.

Механические колебания могут причинить значительный вред. Часто они создают прямую угрозу прочности весьма ответственным конструкциям, таким, как валопроводы, турбинные лопатки, воздушные винты, мосты, перекрытия промышленных зданий и т. п.; колебания неоднократно служили причиной многих аварий, а иногда и тяжелых катастроф. В других случаях колебания способны нарушить нормальные условия эксплуатации,таковы, например, вибрации станков, мешающие достижению желательной чистоты обработки деталей, или колебания приборов, установленных на вибрирующем основании (например, на автомобиле или на самолете), приводящие к нарушению точности показаний. Наконец, иногда колебания оказывают вредное физиологическое действие на лиц, организм которых подвергается длительным вибрациям (например, работающих с ручным пневмоинструментом вибрационного типа). Во всех перечисленных случаях теория колебаний решает предвидения и, по возможности, предотвращения вредного лействия колебаний.

С другой стороны, ныне все шире применяются различные технологические процессы, основанные на использовании искусственно возбуждаемых колебаний. К таким процессам относится, например, вибропогружение свай, при котором свая весьма быстро погружается в грунт под действием сравнительно небольшой вибрационной нагрузки; другим примером может служить вибротранспортировка сыпучих материалов, частицы которых перемещаются в одну сторону вдоль колеблющегося лотка («виброконвейера»). С помощью теории колебаний удается не только вскрыть довольно сложную природу соответствующих физических явлений, но и установить оптимальные параметры режима колебаний, при которых достигается наибольшая производительность технологического процесса.

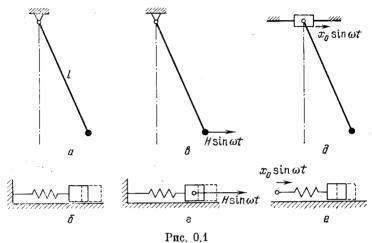
Таким образом, теория механических колебаний служит научной основой решения множества разнообразных технических задач большого практического значения.

Часто теорию колебаний разделяют на части по признаку числа степеней свободы механической системы: сначала рассматривают колебания систем с одной степенью свободы, затем колебания систем с несколькими степенями свободы и, наконец, колебания систем с бесконечно большим числом степеней свободы (систем с распределенными параметрами). Такое разделение имеет определенные методологические основания и долгое время было традиционным.

Однако в последнее время наметился иной и, по-видимому, более целесообразный принции, согласно которому отдельные разделы теории колебаний выделяются по признаку физического единства рассматриваемых явлений. Следуя этому принципу, даже читатель, знакомый лишь с началами теории колебаний, легко выделит два достаточно самостоятельных раздела: исследование свободных колебаний и исследование вынужденных колебаний. В первом из этих разделов изучаются колебания автономных систем, происходящие под действием восстанавливающих (и, возможно, диссипативных) сил около состояния равновесия; таковы, например, колебания после нарушения равновесия простейших систем, изображенных на рис. 0.1 (а — маятник, б — груз на пружине). Ко второму разделу относится изучение колебательных процессов, вызываемых и поддерживаемых вынуждающими силами, т. е. силами, заданными в виде явных функций

времени и не зависящими от движения системы. Примерами могут служить те же системы — маятник и груз на пружине, но при действии вынуждающих сил  $P\left(t\right)$   $\left(t-$  время).

В некоторых случаях вынужденные колебания возникают в результате кинематического возбуждения, т. е.

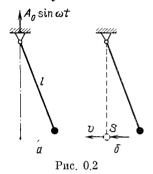


заданного в виде явной функции времени принудительного движения какой-либо точки (каких-либо точки) механической системы. Такие случаи иллюстрированы рис.  $0.1, \partial, e$ ; в схеме  $\partial$  колебания маятника вызываются заданным колебательным движением оси подвеса в горизонтальном направлении, а в схеме e колебания груза возникают вследствие заданного движения левого конца пружины.

При дальнейшем углублении в проблему механических колебаний можно обнаружить существование колебательных явлений иных типов, которые принципиально отличаются от только что названных.

Прежде всего отметим параметрические колебания, возникающие в системах, параметры которых (жесткость или масса) заданным образом периодически изменяются во времени. Примером параметрического возбуждения может служить маятник, ось подвеса которого совершает заданные колебания в вертикальном направлении (рис. 0.2, а). Если состояние относительного покоя будет каким-либо образом нарушено, то возникнут угловые

колебания, причем в зависимости от сочетания параметров системы указанные колебания могут быть как ограниченными, так и неограниченно возрастающими во времени. В последнем случае говорят о параметрическом резонансе системы. И по физической сущности, и по математическому описанию эта задача принципиально отличается



от задачи о вынужденных колебаниях маятника при заданном горизонтальном движении оси подвеса (рис.  $0.1, \partial$ ).

Совершенно особое явление представляют автоколебания— незатухающие стационарные колебания, поддерживаемые за счет энергии, которая подводится к системе от источников неколебатель-

ного характера. При этом силы, подводимые к системе от источников энергии, меняются во вре-

мени в зависимости от самого движения системы и при отсутствии движения равны нулю.

Простой пример автоколебательной системы показан на рис. 0.2, 6 — маятник, который при каждом прохождении через положение равновесия испытывает действие мгновенного импульса S заданной величины и направленного в сторону скорости. Такие импульсы могут поддерживать незатухающие колебания маятника при наличии трения в системе. Здесь нужно подчеркнуть, что действующие на автоколебательную систему внешние силы (в данном случае ударные) не являются вынуждающими силами в обычном смысле этого термина, так как они не заданы в виде явных функций времени, а управляются самим движением.

К колебательным также относятся системы с переменными параметрами, если эти параметры заданы периодическими функциями координат (а не времени). Иногда такие системы называют автопараметрическими.

Физические различия между природой колебаний указанных четырех типов весьма глубоки; в достаточной мере специфичны и соответствующие математические методы исследования. Каждому из этих типов колебаний ниже посвящена отдельная глава.

2. Составление механической модели; ограничение числа степеней свободы. Любая реальная механическая

система представима в виде бесконечного числа материальных точек, массы которых бесконечно малы; так как связи между этими точками не являются абсолютно жесткими, то число степеней свободы такой системы бесконечно велико. Точное решение задач о колебаниях деформируемых систем удается получить в замкнутой форме дишь в немногих, относительно простых случаях (например, задачи о свободных и вынужденных колебаниях упругих стержней постоянного сечения при равномерном распределении массы по длине стержня). В обшем случае это сделать невозможно, и приходится упрощать расчетную модель, в частности путем уменьшения числа степеней свободы. Можно указать три основных способа образования конечномерных моделей.

Первый способ состоит в том, что относительно менее массивные части системы полагаются вовсе лишенными массы и представляются в виде безынерционных элементов (жестких или деформируемых), а наиболее

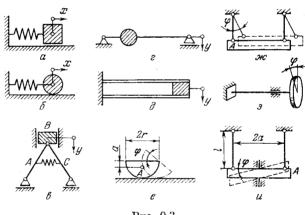


Рис. 0.3

жесткие части конструкции принимаются за абсолютно твердые тела; если размеры последних малы, то их считают материальными точками.

На рис. 0.3, a-u показаны примеры образованных таким способом систем с одной степенью свободы. Следует обратить внимание на их характерные особенности: упругие элементы, изображенные в виде пружин рис. a,  $\delta$ ,  $\theta$ , считаются безмассовыми; то же относится к упругим стержням на рис.  $\varepsilon$ ,  $\partial$ , s и жестким стержням

на рис. e, w, u; в схемах на рис.  $\delta$ , e качение не сопровождается скольжением: в схеме на рис. e груз считается сосредоточенным (материальная точка). Здесь же, а также в схеме на рис.  $\theta$  горизонтальные перемещения грузов считаются пренебрежимо малыми. В качестве обобщенной координаты принято: на рис. e, e, e, e — вертикальное перемещение, на рис. e — e — и — угол поворота.

На рис. 0.4 показаны образованные таким же образом системы, имеющие более чем одну степень свободы. Конфигурация системы, показанной на рис. a, определяется

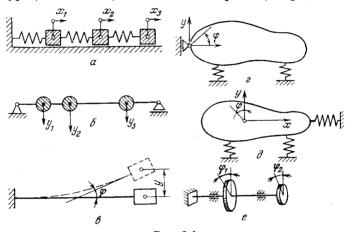
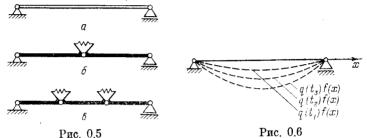


Рис. 0.4

перемещениями  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  поступательно движущихся грузов; эта система обладает тремя степенями свободы. То же относится и к системе на рис. б, если считать грузы материальными точками (при учете конечных размеров грузов и инерции их поворотов система на рис. б имеет шесть степеней свободы). Положение системы на рис. в определяется двумя обобщенными координатами вертикальным перемещением центра масс груза у и углом его поворота ф. Также две степени свободы имеет твердое тело, показанное на рис. г; здесь за обобщенные координаты принята вертикальная координата подвижной опоры и угол поворота тела вокруг этой опоры. В отличие от этого из-за податливости горизонтальной опоры тело на рис. д имеет три степени свободы. Если масса вала в системе на рис. е пренебрежимо мала, то система обладает двумя степенями свободы; в качестве обобщенных координат на рисупке показаны углы поворота массивных дисков  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ .

Согласно второму способу распределенные по всему объему системы свойства податливости локализуются в конечном числе точек (или линий). При этом система представляется в виде совокупности упруго (или вязкоупруго) сочлененных жестких элементов. Например, упругая балка с непрерывно распределенной массой



(рис. 0.5, a) может быть приближенно заменена цепочкой жестких звеньев, соединенных упругими шарнирами. При выборе числа шарниров следует исходить из требуемого уровня точности (см. варианты замены на рис. 0.5, 6, s).

Третий способ основан на некоторых априорных предположениях об изменениях конфигурации системы

в процессе колебаний.

Пусть для определенности речь идет о колебаниях показанной на рис. 0.4, a системы с тремя степенями свободы. Согласно этому способу можно принять, что отношения между перемещениями  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  нензменны во времени, а числовые значения таких отношений  $(x_2/x_1=\alpha,\ x_3/x_1=\beta)$  заранее назначаются; разумеется, это вносит элемент произвола в решение. В результате движение системы полностью описывается одной функцией времени, например  $x_1(t)$ , через которую непосредственно выражаются перемещения всех точек системы; такая система имеет всего одну степень свободы.

Соответственно тому же способу, для двухопорной балки (рис. 0.5, a) принимается, что в любой момент процесса колебаний форма изогнутой оси остается неизменной и меняется лишь ее масштаб. Если заранее задать форму в виде «подходящей» координатной функции f(x),

то прогибы оси балки будут описываться произведением

$$y(x, t) = q(t)f(x),$$
 (0.1)

в котором q(t) — функция времени, являющаяся единственной неизвестной задачи. Для иллюстрации на рис. 0.6 показана изогнутая ось балки в избранные моменты процесса колебаний  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$ ; все кривые имеют одну и ту же форму и различаются лишь масштабом. Таким образом, при фиксированном выборе функции f(x) выражение (0.1) определяет переход к системе с одной степенью

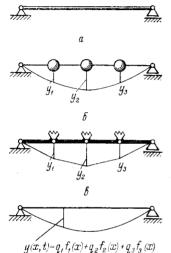


Рис 07

свободы, причем q(t) представляет собой обобщенную координату.

Эта идея приведения к системе с одной степенью свободы лежит в основе излагаемого ниже метода Рэлея (см.

стр. 29—35).

Точность решения может быть повышена, если вместо (0.1) описать движение балки суммой произведений

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^{s} q_j(t) f_j(x), (0.2)$$

где  $f_i(x)$  — задаваемые координатные функции,  $q_i(t)$  — искомые функции времени, играющие роль обобщенных координат, s — сохраняемое в модели число степеней свободы систе-

мы. О соображениях, которыми следует руководствоваться при выборе координатных функций, будет сказано ниже.

Одна и та же система может быть приведена к системе с несколькими степенями свободы любым из трех способов. В качестве примера на рис. 0.7, a-c показаны три варианта приведения для двухопорной балки с распределенной массой (рис. 0.7, a).

3. Составление механической модели; силы, действующие при колебаниях. В курсах механики указаны основные типы сил, которые могут действовать на материальную точку; силы, зависящие от времени; силы, зависящие от положения точки; силы, зависящие от скорости точки.

В большинстве случаев к этим типам сводятся и те обобщенные силы, которые действуют при колебаниях механических систем. Рассмотрим их подробнее, ограничиваясь здесь системами с одной степенью свободы.

Обобщенные вынуждающие силы — внешние силы типа Q(t), являющиеся заданными функциями времени;
такие силы служат причиной вынужденных колебаний.
Источники возникновения вынуждающих сил весьма разнообразны: периодически изменяющиеся силы давления
газовой смеси в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, инерционные эффекты в вибровозбудителях, переменное притяжение электромагнитов и др. Весьма различны и законы их изменения во времени, хотя в практике наиболее часто встречаются периодические вынуждающие силы. Иногда вынуждающие силы не детерминированы, а представляют собой случайные функции времени (случайные процессы).

В некоторых случаях возбуждение колебаний задается кинематически, когда каким-либо точкам системы «предписано» некоторое определенное движение — оно также может быть детерминированным или случайным процессом. В частности, кинематическим является возбуждение колебаний автомобиля или железнодорожного вагона при движении по неровному пути. Как будет показано ниже, любое кинематическое возбуждение может быть представлено в виде некоторого эквивалентного силового возбуждения, т. е. заменено действием соответствующих сил.

Обобщенные позиционные силы — силы, зависящие от положения (конфигурации) системы, т. е. от обобщенных координат. Среди позиционных сил особое значение имеют восстанавливающие силы, т. е. силы, возникающие при отклонениях системы от положения равновесия и направленные так, чтобы вернуть систему в это положение. Именно восстанавливающие силы обусловливают собственные колебательные свойства механических систем — их способность совершать свободные колебания.

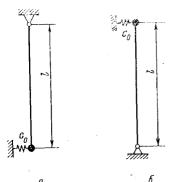
В механических системах с упругими элементами восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих элементов при колебаниях (упругие силы). В других случаях роль восстанавливающей силы может играть сила тяжести (маятник) или архимедова сила (корабль).

Зависимости восстанавливающих сил от обобщенных координат, как правило, нелинейны; однако при иссле-

довании малых колебаний— что во многих случаях достаточно— чаще всего допустима линеаризация таких зависимостей. Для системы с одной степенью свободы линейная восстанавливающая сила всегда может быть записана в виде

$$Q(q) = -cq, (0.3)$$

где q — обобщенная координата, c — обобщенный коэффициент жесткости. Например, если для маятника (рис. 0.1, a) принять за обобщенную координату угол от-



клонения от вертикали, то обобщенная сила (момент силы тяжести) равна  $-mgl\sin q \approx -mglq$ , т. е.

$$c = mgl.$$

Иногда обобщенная восстанавливающая сила возникает вследствие одновременного влияния двух различных причин. Таков, например, упруго закрепленный маятник (рис. 0.8, a), для которого

Рис. 0.8

$$c = c_0 l^2 + mgl,$$

где  $c_0$  — коэффициент жесткости пружины, т. е. статическая сила, способная вызвать удлинение пружины на единицу длины. Эти влияния могут быть противоположными по направлению; так, для опрокинутого маятника (рис.  $0.8, \delta$ )

$$c = c_0 l^2 - mgl.$$

Если пружина имеет малую жесткость, такую, что  $c_0 l < mg$ , то обобщенный коэффициент жесткости оказывается отрицательным, т. е. суммарная позиционная сила не является восстанавливающей.

Обобщенные силы трения зависят от обобщенных скоростей (по крайней мере от их знака) и направлены противоположно движению. Силы трения возникают в сочленениях звеньев и опорах механической системы, а также в материале ее звеньев. К этой категории также относятся силы сопротивления среды (жидкости, газа), в которой происходят колебания; такие и им подобные силы ниже условно также называются силами трения. Особенно значительно трение в демпферах, которые специально вводятся в механические системы для гашения колебаний. Чаще всего силы трения препятствуют развитию колебаний, например, служат причиной затухания свободных колебаний; механические системы, в которых действуют такие силы, называются диссипативными. В некоторых случаях силы трения оказывают противоноложное действие и возбуждают колебания (в автоколебательных системах — см. главу IV).

Зависимость обобщенной силы трения от обобщенной скорости наиболее часто представляют в одной из следующих форм (для диссипативных систем с одной степенью свободы):

сила линейного трения

$$Q(\dot{q}) = -b\dot{q}; \tag{0.4}$$

кулонова сила трения \*)

$$Q(\dot{q}) = -b \operatorname{sign} \dot{q}; \tag{0.5}$$

сила нелинейно-вязкого трения, обычно аппроксимируемая зависимостью

$$Q(\dot{q}) = -b|\dot{q}|^n \operatorname{sign} \dot{q} \tag{0.6}$$

или зависимостью

$$Q(\dot{q}) = -b_1 \dot{q} - b_3 \dot{q}^3 - b_5 \dot{q}^5 - \dots$$
 (0.7)

В некоторых системах действуют силы смешанного характера. Таковы, например, силы Q(q, t), зависящие от координат и времени, которые нельзя представить в виде суммы позиционной силы и вынуждающей силы; эти силы характерны для параметрических систем, о которых кратко было уже сказано выше. Смешанным характером обладают также силы  $Q(q, \dot{q})$ , зависящие от координат и скоростей и притом непредставимые в виде суммы позиционной силы и силы трения; иногда такие силы придают механической системе автоколебательные свойства.

При составлении механической модели большое значение имеет разумное пренебрежение несущественными составляющими сил, а для учитываемых в анализе составляющих — правильная схематизация их свойств. Так,

<sup>\*)</sup> Здесь имеется в виду простейший вид закона кулонова трепия, в котором не учитывается разница между коэффициентами трения покоя и трения движения.

<sup>2</sup> я. г. пановко

при определении собственных частот механических систем в большинстве случаев допустимо пренебречь действием сил трения; ими можно пренебречь и при исследовании вынужденных колебаний в достаточном удалении от резонанса. Аналогично этому, если рассматриваются малые колебания, то часто можно не учитывать нелинейность восстанавливающих сил.

Впрочем, подобные упрощения нужно делать осторожно, имея в виду, что, казалось бы, малые влияния иногда могут явиться причиной важных следствий принципиального характера. Так, даже весьма малые силы трения необходимо учитывать при анализе затухания свободных колебаний, а также при определении резонансных или околорезонансных амплитуд вынужденных колебаний. Подобно этому нужно помнить, что даже малые параметрические силы могут вызвать весьма опасные колебания типа параметрического резонанса (см. главу III).

4. Понятие о фазовой плоскости. Обычное описание движения системы с одной степенью свободы в виде зависимости обобщенной координаты от времени q=q(t) не является единственно возможным. В ряде случаев, особенно при изучении нелинейных механических колебаний, определенными достоинствами обладает представ-

ление движения на фазовой плоскости.

Состояние системы в любой фиксированный момент времени t определяется нарой соответствующих значений q и  $\dot{q}$  и может быть представлено изображающей (фазовой) точкой в плоской декартовой системе координат q,  $\dot{q}$ , если откладывать по оси абсцисс обобщенную координату q, а по оси ординат — обобщенную скорость  $\dot{q}$ . Такая плоскость называется фазовой.

В процессе движения рассматриваемой системы величины q и  $\dot{q}$  изменяются и соответственно меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется фазовой траекторией. На рис.  $0.9, a, \delta$  показаны фазовые траектории для случаев равномерного (a) и равноускоренного (b) движений материальной точки. Положение исходной изображающей точки  $M_0$  определяется начальными условиями.

Для построения фазовой траектории при заданном законе движения q(t) нужно путем дифференцирования образовать выражение скорости  $\dot{q}(t)$ , а затем исключить

время из двух уравнений:

$$q = q(t), \quad \dot{q} = \dot{q}(t).$$
 (0.8)

Функция

$$\dot{q} = \dot{q}(q) \tag{0.9}$$

п описывает фазовую траекторию данного движения. Впрочем, для построения фазовой траектории переход к явной функции (0.9) не обязателен; фазовую траекторию

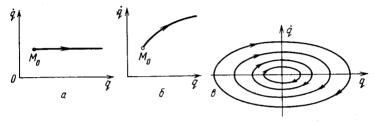


Рис. 0.9

можно строить непосредственно по уравнениям (0.8), которые представляют уравнение фазовой траектории в па-

раметрической форме.

Фазовая плоскость особенно удобна для представления колебательных процессов, когда координата и скорость не выходят за известные пределы; поэтому вся картина движения даже в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости. Таковы, например, свободные гармонические колебания

$$q = A\sin(kt + \alpha),$$

причем угловая частота k, а также зависящие от начальных условий величины A и  $\alpha$  известны. Для скорости имеем

$$\dot{q} = Ak\cos(kt + \alpha). \tag{0.10}$$

Исключив время из этих двух уравнений, получим уравнение фазовой траектории

$$q^2 + \frac{\dot{q}^2}{k^2} = A^2, {(0.11)}$$

т. е. уравнение эллипса.

В данном случае вся фазовая плоскость заполнена бесконечным множеством вложенных друг в друга таких эллипсов с общим центром в начале координат и отли-2\* чающихся друг от друга только параметром A (рис. 0.9, в). Направления движения изображающих точек вдоль фазовых траекторий показаны на рисунках стрелками. Все фазовые траектории системы однотипны, а начальные условия фиксируют определенный выбор конкретной траектории.

Совокупность фазовых траекторий описывает все возможные движения данной системы и называется фазовой диаграммой (фазовым портретом) данной системы. Структура фазовой диаграммы наглядно характеризует качественные особенности возможных движений рассматривае-

мой системы.

Следует иметь в виду, что фазовая диаграмма не только может служить иллюстрацией закона движения, после того как он найден путем интегрирования дифференциального уравнения задачи. В принципе фазовая диаграмма может быть построена непосредственно, по этому уравнению, без его решения в виде q = q(t).

Так, для автономной системы, описываемой нелиней-

ным дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + k^2 q = f(q, \dot{q}),$$
 (0.12)

после замены  $\ddot{q}=\dot{q}\frac{d\dot{q}}{dq}$  получается уравнение

$$\frac{\dot{dq}}{dq} = \frac{f(q, \dot{q}) - k^2 q}{\dot{q}},\tag{0.13}$$

которое определяет искомую связь между переменными q и  $\ddot{q}$ . В принципе решение этого дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$\dot{q} = \dot{q}(q, C), \tag{0.14}$$

где постоянная C определяется начальным условием  $\dot{q}=\dot{q}_0$  при  $q=q_0$  ( $q_0$  и  $\dot{q}_0$ — начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости). Каждому значению C соответствует определенная фазовая траектория, а совокупность таких траекторий образует фазовую диаграмму системы.

В некоторых случаях дифференциальное уравнение (0.13) удается решить апалитически в замкнутой форме; в частности, к квадратурам приводится случай, когда выражение  $f(q, \dot{q})$  не содержит  $\dot{q}$ , и переменные в (0.13) разделяются. В общем случае для интегрирования урав-

нения (0.13) нужно обращаться к ЭВМ. (В свое время были предложены различные специальные приемы графического интегрирования названного уравнения; теперь этими приемами практически не пользуются.)

состояниях равновесия равны нулю обобщенная скорость (знаменатель правой части уравнения (0.13)) и обобщенное ускорение (числитель правой части уравнения (0.13)). Таким образом, в точках фазовой плоскости, соответствующих состояниям равновесия, производная  $d\dot{q}/dq$  не определена и вместе с этим не определено направление касательной к фазовой траектории. точки называются особыми точками дифференциального уравнения. В качественной теории дифференциальных уравнений устанавливается, что через любую особую точку проходит либо больше чем одна фазовая траектория, либо не проходит ни одной. Например, как мы видели на рис. 0.9, e, через особую точку в начале координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (такая точка называется особой точкой типа «центр»; ниже будут рассмотрены особые точки других типов).

Через всякую *регулярную* точку фазовой плоскости (т. е. не особую точку) проходит одна и только одна фазовая траектория. Изображающие точки, лежащие в верхней полуплоскости, определяют состояния системы с положительными значениями обобщенной скорости, т. е. состояния, которым соответствует возрастание обобщенной координаты, поэтому такая изображающая точка движется вдоль фазовой траектории слева направо. Соответственно, изображающая точка, находящаяся в нижней полуплоскости, движется вдоль фазовой траектории справа налево. Отсюда также следует, что касательная к фазовой траектории в точках пересечения траектории осью q перпендикулярна этой оси.

#### Глава І

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

- § 1. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии трения
- 1. Основное дифференциальное уравнение и его решение. Изучение свободных колебаний представляет определенный интерес в связи с практическими задачами о движении механической системы после какого-либо возмущения ее состояния равновесия. Однако не только этим определяется важность темы, которой посвящена настоящая глава. Дело в том, что характеристики свободных колебаний (собственные частоты и собственные формы) полностью определяют индивидуальные динамические свойства механической системы и имеют первостепенное значение также при анализе ее вынужденных колебаний.

Рассмотрим в общем виде консервативную механическую систему с одной степенью свободы, для которой уравнение Лагранжа имеет известную из курса теоретической механики форму:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}.$$
 (1.1)

Здесь t — время, q — обобщенная координата,  $\dot{q}$  — обобщенная скорость, T — кинетическая энергия,  $\Pi$  — потенциальная энергия.

Прежде всего образуем выражение кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i, \tag{1.2}$$

где  $m_i$  — масса i-й материальной точки,  $\mathbf{v}_i$  — скорость этой точки. Если  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор i-й материальной точки

определяется только обобщенной координатой q и не зависит явно от времени, то скорость точки равна

$$\mathbf{v}_{i} = \frac{d\mathbf{r}_{i}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q}\dot{q},$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q} \right)^2.$$

Входящая сюда сумма в общем случае является функцией обобщенной координаты q; обозначив

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q}\right)^2 = A(q) \tag{1.3}$$

и разлагая последнее выражение в ряд Маклорена в окрестности значения q=0, получим

$$A(q) = A(0) + A'(0) q + \frac{A''(0)}{2} q^2 + \dots$$

Здесь штрихи обозначают производные функции A(q) по обобщенной координате q.

В этом параграфе рассматривается частный, но практически очень важный случай малых колебаний системы около положения ее равновесия; отсчет координаты q удобно вести от этого положения. При малых значениях q в разложении можно удержать лишь один первый член, который обозначим через a; тогда кинетическая энергия примет вид, сходный с выражением кинетической энергии одной материальной точки:

$$T = \frac{1}{2} \dot{aq^2}. \tag{1.4}$$

Входящий сюда множитель а называют коэффициентом инерции или инерционным коэффициентом (иногда его называют также обобщенной или приведенной массой).

Конечно, для определения инерционного коэффициента нет необходимости каждый раз фактически строить сумму (1.3), разлагать ее в ряд Маклорена и затем выделять первый член этого ряда. В зависимости от вида механической системы и выбора обобщенной координаты достаточно любым образом получить выражение кинетической энергии через квадрат обобщенной скорости; при

этом значение a определится как коэффициент в выражении (1.4).

Обратимся теперь к определению потенциальной энергии  $\Pi$ , которая представляет собой функцию обобщенной координаты q:

 $\Pi = \Pi(q). \tag{1.5}$ 

Если, как это чаще всего бывает, потенциальная энергия обладает свойствами непрерывности и дифференцируемости, то ее можно разложить в ряд Маклорена в окрестности значения q=0:

$$\Pi = \Pi(0) + \Pi'(0) q + \frac{\Pi''(0)}{2} q^2 + \dots,$$
 (1.6)

где, как и выше, штрихи обозначают дифференцирование по обобщенной координате q. Постоянному первому члену этого разложения может быть приписано любое значение, так как потенциальная энергия определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Поэтому удобно положить  $\Pi(0) = 0$ . Далее нужно вспомнить соотношение

$$\Pi' = -Q, \tag{1.7}$$

определяющее связь потенциальной энергии с обобщенной силой Q. Так как в положении равновесия обобщенная сила равна нулю, то при отсчете координаты q от положения равновесия системы производная  $\Pi'(0)$  обращается в нуль; при этом разложение (1.6) начнется с члена, содержащего вторую степень координаты q. Считая перемещения q малыми, мы сохраним в разложении (1.6) только упомянутый член, так что окончательно получим

$$\Pi = \frac{1}{2} cq^2, \tag{1.8}$$

где постоянная

$$c = \Pi''(0) \tag{1.9}$$

называется обобщенным коэффициентом жесткости или квазиупругим коэффициентом.

Знак постоянной c зависит от устойчивости положения равновесия, от которого ведется отсчет координаты q. Согласно теореме Лагранжа — Дирихле потенциальная энергия консервативной системы в положении устойчивого равновесия имеет минимум, т. е.  $\Pi''(0) > 0$ . Отсюда следует, что c > 0 вблизи устойчивого положения равновесия.

Для определения обобщенного коэффициента жесткости c в каждом конкретном случае достаточно построить выражение потенциальной энергии в виде квадратичной функции обобщенной координаты q, причем отсчет координаты q следует вести от положения равновесия и принять, что этому положению соответствует нулевое значение потенциальной энергии. Если окажется, что c < 0, то это будет означать неустойчивость соответствующего положения равновесия.

Подставив в уравпение Лагранжа (1.1) выражения (1.4) и (1.8) для кинетической и потенциальной энергии, получим основное дифференциальное уравнение задачи

о свободных колебаниях:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{1.10}$$

Иногда, в зависимости от вида механической системы, может оказаться более удобным не метод Лагранжа, а какой-либо иной путь составления дифференциального уравнения задачи; разумеется, что независимо от выбранного способа для рассматриваемых здесь линейных систем с одной степенью свободы без трения окончательное дифференциальное уравнение запишется в виде (1.10).

Введем обозначение

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}},\tag{1.11}$$

тогда вместо (1.10) получим

$$\ddot{q} + k^2 q = 0. ag{1.12}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \qquad (1.13)$$

причем постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются через начальные условия  $q(0) = q_0$  и  $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$  в виде

$$C_{1}=\frac{q_{0}}{k},\ C_{2}=q_{0}.$$

Окончательно имеем

$$q = \frac{q_0}{k} \sin kt + q_0 \cos kt.$$
 (1.14)

Иногда пользуются иной формой записи:

$$q = A \sin(kt + \alpha), \qquad (1.15)$$

где

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2 + q_0^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (1.16)$$

Из выражения (1.15) видно, что движение представляет собой незатухающие гармонические колебания с ампли- $\tau y \partial o \ddot{u} A$  и угловой частотой k (рис. 1.1). Подчеркнем, что

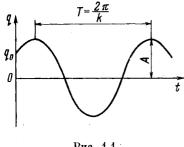


Рис. 1.1

амплитуда колебаний определяется начальными условиями по первой формуле (1.16), а угловая частота колебаний зависит только от параметров системы формулу (1.11)) и не зависит от начальных условий; по этому признаку величина k называется собственной частотой системы. Собственная частота представляет собой

число свободных колебаний за  $2\pi$  единиц времени.  $\Pi e$ риод свободных колебаний, т. е. длительность одного полного цикла колебаний, определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}. (1.17)$$

Пример 1.1. Определить собственную частоту системы (рис. 1.2), состоящей из упруго закрепленной горизонтально расположенной рейки A, которая лежит на упруго закрепленном однородном цилиндре B и катке C. Считать, что трение между рейкой и цилиндром исключает возможность проскальзывания рейки

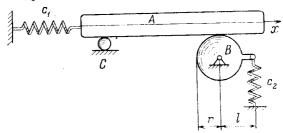


Рис. 1.2

по цилиндру. Обозначения:  $m_1$  — масса рейки,  $m_2$  — масса цилиндра,  $c_1$  — коэффициент жесткости горизонтальной пружины,  $c_2$  коэффициент жесткости вертикальной пружины, г — раднус сечения пилиндра, l — расстояние от оси цилиндра до точки крепления вертикальной пружины. Массами пружин и катка  $\mathcal C$  пре-

небречь.

Примем за обобщенную координату горизонтальное перемещение какой-либо точки рейки; так как рейка движется поступательно, то выбор этой точки безразличен. Отсчет координаты x будем вести от положения равновесия, когда обе пружины не деформированы.

При перемещении рейки, равном x, цилиндр поворачивается

на угол  $\phi = x/r$ . Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}^2;$$

подставив сюда  $I_2 = m_2 r^2 / 2$ ,  $\dot{\phi} = \dot{x} / r$ , получим

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left( m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) \dot{x}^2.$$

Отсюда непосредственно видно, что инерционный коэффициент в данном случае равен

$$a = m_1 + \frac{1}{2} m_2$$

Потенциальная энергия определяется деформациями обеих пружин:

$$\mathrm{II} = \frac{1}{2} \; c_1 x^2 + \frac{1}{2} \; c_2 \left( \frac{l}{r} \; x \right)^2 = \frac{1}{2} \left( c_1 + \frac{l^2}{r^2} \; c_2 \right) x^2.$$

Таким образом, коэффициент жесткости системы равен

$$c = c_1 + \frac{l^2}{r^2} c_2.$$

Теперь по формуле (1.11) находим собственную частоту:

$$k = \sqrt{\frac{\frac{c_1 + \frac{l^2}{r^2} \, c_2}{m_1 + \frac{1}{2} \, m_2}}{}.$$

Пример 1.2. Определить движение системы, возникающее после однократного вертикального удара по грузу, который связан с безмассовой жесткой упруго закрепленной балкой (рис. 1.3, a). Обозначения: 2l — длина балки, m — масса груза,  $c_0$  — коэффицент жесткости пружины, S — величина приложенного к грузу мгновенного ударного импульса.

Прежде всего найдем положение равновесия (рис. 1.3, б). Пусть в этом положении угол отклонения первоначально горизонтальной балки равен  $\phi_*$ : тогда малая статическая осадка пружины определяется выражением  $l\phi_*$ . На балку действуют следующие силы: вес груза mg, реакция пружины  $c_0^l\phi_*$ , реакция шарнирной опоры. Для определения угла  $\phi_*$  составим уравнение моментов

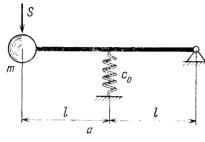
относительно центра шарнирной опоры:

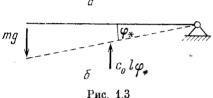
$$2mgl - c_0 l^2 \varphi_* = 0. (a)$$

Отсюда находим

$$\varphi_* = \frac{2mg}{c_0 l}.$$

Теперь перейдем к апализу движения и обозначим через ф угол дополнительного отклонения при движении системы после





удара. Тогда полный угол отклонения равен  $\phi_* + \phi$ , и полная реакция пружины составляет  $c_0 l$  ( $\phi_* + \phi$ ).

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения жесткой системы балка — груз:

$$2mgl - c_0 l^2 (\phi_* + \phi) =$$

$$= 4ml^2 \frac{d^2}{dt^2} (\phi_* + \phi),$$

где  $4ml^2$  — момент инерции системы. Если раскрыть скобки в левой части этого уравнения, то сумма первых двух членов согласно (а) окажется равной нулю, и мы получим диффе-

ренциальное уравнение для координаты ф, отсчитываемой от положения равновесия:

$$4m\varphi + c_0 \varphi = 0. 
 \tag{6}$$

Теперь легко заметить, что предварительное определение равновесного положения оказалось, в сущности, лишней операцией. Можно было поступить проще: заранее опустить из рассмотрения силы, действующие в системе, когда она находится в положении равновесия, и включить в дифференциальное уравнение движения только момент дополнительной реакции  $c_0$  (отот момент равен —  $c_0$  (этот момент равен —  $c_0$ ); при этом сразу получится уравнение (б). Обычно именно так и поступают в подобных случаях.

Сопоставляя уравнение (б) с основным уравнением (1.10), видим, что инерционный коэффициент и коэффициент жесткости соответственно равны a=4m,  $c=c_0$ . Теперь по формуле (1.11) на-

ходим собственную частоту:

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c_0}{m}}.$$

Перейдем к формулировке начальных условий, соответствующих движению после приложения ударного импульса S. В момент, пепосредственно следующий за ударом, положение балки остается

неизменным, следовательно,  $\varphi_0 = 0$ . Скорость груза получает мгновенное приращение  $\varphi_0 l$ , определяемое из теоремы об изменении количества движения:

$$2m\dot{\phi}_0l-0=S.$$

Следовательно, начальные условия имеют вид

$$\varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{S}{2ml}.$$

Согласно решению (1.14) движение описывается выражением

$$\varphi = \frac{S}{2mkl} \sin kt,$$

причем паибольшее отклонение от положения равновесия равно

$$\varphi_{\max} = \frac{S}{2mkl} = \frac{S}{\sqrt{c_0 ml}},$$

а вызванное ударом наибольшее усилие в пружине

$$c_0 \varphi_{\max} l = S \sqrt{\frac{c_0}{m}}.$$

2. Метод Рэлея. Во введении был пояснен приближенный способ приведения к системе с одной степенью свободы, основанный па априорных соображениях о конфигурации системы при ее колебаниях. После такого приведения нужно образовать соответствующие выражения для потенциальной и кинетической энергии и тем самым устаповить значения коэффициента жесткости с и инерционного коэффициента а. После этого по формуле (1.11) вычисляется собственная частота.

Рэлей доказал теорему, согласно которой вычисленный указанным способом результат всегда приводит к преувеличенном у значению собственной частоты.

Пусть, например, для системы на рис. 0.4, a дано: массы всех трех тел одинаковы и равны m, коэффициенты жесткости всех пружин также одинаковы и равны  $c_0$ . Следуя методу Рэлея, примем  $x_2 = \alpha x_1$ ,  $x_3 = \beta x_1$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые разумно выбранные числа.

Кинетическая энергия системы выражается через единственную обобщенную скорость  $\dot{x}_1$ :

$$T = \frac{1}{2} \dot{m} \dot{x}_{1}^{2} + \frac{1}{2} \dot{m} \dot{x}_{2}^{2} + \frac{1}{2} \dot{m} \dot{x}_{3}^{2} = \frac{1}{2} \dot{m} \dot{x}_{1}^{2} (1 + \alpha^{2} + \beta^{2}),$$

а потенциальная энергия системы — через единственную обобщенную координату  $x_1$ :

$$\begin{split} \Pi &= \frac{1}{2} \; c_0 x_1^2 + \frac{1}{2} \; c_0 \, (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} \; c_0 \, (x_3 - x_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \; c_0 x_1^2 \, [1 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - \alpha)^2]. \end{split}$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (1.13) в данном случае равны

$$a = m(1 + \alpha^2 + \beta^2);$$
  $c = c_0[1 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - \alpha)^2]$ 

и собственная частота определяется выражением:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{c_0}{m} \sqrt{\frac{1 + (\alpha - 1)^2 + (\beta - \alpha)^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2}}.$$

Конечно, этот результат зависит от выбранных значений  $\alpha$  и  $\beta$ . Если рассматривать частоту как функцию  $\alpha$  и  $\beta$ , то согласно упомянутой теореме Рэлея минимум этой функции определяет истинное значение искомой частоты; по этому поводу см. ниже более простой пример 1.3.

Остановимся на случае свободных изгибных колебаний балок\*). Прогиб у любой точки оси балки с абсциссой x меняется во времени, т. е.

$$y = y(x, t).$$
 (1.18)

Согласно основной идее метода Рэлея примем

$$y = q(t)f(x), \tag{1.19}$$

где f(x) — заранее назначаемая функция координаты x, характеризующая форму изогнутой оси балки при колебаниях, q(t) — некоторая, пока неизвестная, функция времени.

Так как функция f(x) задается более или менее произвольно, то результат решения задачи окажется, как правило, приближенным (если случайно в качестве f(x)будет принята истинная форма оси балки при колебаниях, то результат окажется точным).

Форму оси следует выбирать с учетом заданного способа закрепления балки, которым определяются граничные условия для функции f(x).

Различаются *кинематические* и *силовые* граничные условия. Рассмотрим эти условия в частных случаях, обозначив через  $x_*$  абсинссу рассматриваемого конца балки.

<sup>\*)</sup> Предполагается, что читатель изучал сопротивление материалов и знаком с теорией изгиба балок при статических нагрузках.

На жестко заделанном конце балки невозможны прогиб и поворот, т. е.

$$y(x_*, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x_*, t) = 0.$$

Эти равенства должны удовлетворяться в любой момент времени, что будет иметь место, если входящая в (1.19) функция f(x) удовлетворяет условиям

$$f(x_*) = 0, \quad f'(x_*) = 0.$$
 (1.20)

Здесь штрихом обозначена операция дифференцирования по координате х. Оба условия (1.20) — кинематические, т. е. относятся к перемещениям концевого сечения.

Если конец  $x = x_*$  шарнирно оперт, то на этом конце должны тождественно равняться нулю и прогиб и изгибающий момент \*)

$$y(x_*, t) = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_*, t) = 0.$$

Отсюда следуют граничные условия для функции f(x):

$$f(x_*) = 0, \quad f''(x_*) = 0.$$
 (1.21)

Первое из этих условий — кинематическое, второе условие — силовое.

Наконец, на свободном конце  $x=x_*$  должны равняться нулю изгибающий момент и поперечная сила, т. е.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_*, t) = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x_*, t) = 0.$$

При этом должны удовлетворяться два силовых грани ных условия:

$$f''(x_*) = 0, \quad f'''(x_*) = 0.$$
 (1.22)

Далее будем полагать, что функция f(x) выбрана с учетом тех или иных заданных граничных условий; обратимся к определению кинетической и потенциальной энергии.

<sup>\*)</sup> Здесь необходимо вспомнить соотношения теории сопротивления материалов:  $M=EJ\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},~~Q=EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3},~~$ где M-изгибающий момент, Q-поперечная сила, EJ-жесткость сечения при изгибе.

Скорость поперечного движения любой точки оси балки определяется выражением

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{q}(t) f(x).$$

Соответственно кинетическая энергия бесконечно малого элемента длиной dx равна

$$\frac{1}{2} m(x) dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2} m(x) \dot{q}^2(t) f^2(x) dx.$$

Здесь m(x) — интенсивность распределенной массы, m(x)dx — масса расматриваемого элемента. Интегрируя по всей длине l, находим полную кинетическую энергию балки

$$T = \frac{\dot{q}^2(t)}{2} \int_0^t m(x) f^2(x) dx.$$
 (1.23)

Сравнивая полученный результат с общим выражением (1.4) для кинетической энергии, приходим к заключению, что входящий в (1.23) интеграл представляет собой инерционный коэффициент:

$$a = \int_{0}^{l} m(x) f^{2}(x) dx.$$
 (1.24)

Для определения потенциальной эпергии нужно исходить из выражения

$$\Pi = rac{1}{2} \int\limits_0^l EJ \left(rac{\partial^2 y}{\partial x^2}
ight)^2\! dx,$$

которое устанавливается в курсе сопротивления материалов. Подставляя сюда

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q(t) f''(x),$$

находим

$$\Pi = \frac{q^{2}(t)}{2} \int_{0}^{t} EJ [f''(x)]^{2} dx.$$

Из сравнения этого результата с выражением (1.8) сле-

дует, что коэффициент жесткости определяется формулой

$$c = \int_{0}^{l} EJ [f''(x)]^{2} dx. \tag{1.25}$$

После определения коэффициентов a и c по формулам (1.24) и (1.25) собственная частота находится согласно (1.11) в виде

$$k = \sqrt{\int_{0}^{1} EJ(x) [f''(x)]^{2} dx} \int_{0}^{1} m(x) f^{2}(x) dx$$
 (1.26)

Можно доказать, что если функция f(x) удовлетворяет заданным кинематическим граничным условиям, то приближенный результат (1.26) всегда больше истинного значения низшей собственной частоты балки.

Метод Рэлея может быть использован для приближенного определения низшей собственной частоты любой системы с распределенными параметрами— не только балок, совершающих изгибные колебания, но и стержней при их продольных или крутильных колебаниях, а также— с соответствующей модификацией— рамных конструкций, пластин и оболочек.

Так, например, в случае продольных колебаний стержня аналогично сказанному принимается, что продольные перемещения u(x, t) описываются тем же произведением (1.19). При этом граничными условиями будут: на свободном конце  $f'(x_*) = 0$ , на закрепленном конце  $f(x_*) = 0$ . При помощи прежних рассуждений можно получить собственную частоту в виде

$$k = \sqrt{\frac{\int_{0}^{l} EF(x) [f'(x)]^{2} dx}{\int_{0}^{l} m(x) f^{2}(x) dx}}$$
 (1.27)

где F(x) — площадь сечения стержня.

Пример 1.3. Двухмассовая система (рис. 1.4, a) определяется следующими параметрами:  $m_1=m_2=m$ ,  $c_1=c_2=c_0$ .

3 я. г. Пановко

Найти собственную частоту по методу Рэлея, приняв  $x_2 = \alpha x_1$  ( $\alpha$  — постоянная), и исследовать, как влияет выбор значения  $\alpha$  в пределах  $0 \div 3$  на вычисляемое значение собственной частоты.

В данном случае имеем

$$T = \frac{1}{2} \dot{m} \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\alpha} \dot{x}_1)^2 = \frac{1}{2} \dot{m} \dot{x}_1^2 (1 + \alpha^2);$$

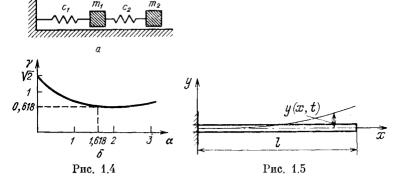
$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 x_1^2 + \frac{1}{2} c_0 (\alpha x_1 - x_1)^2 = \frac{1}{2} c_0 x_1^2 (\alpha^2 - 2\alpha + 2).$$

Следовательно,  $a=m(1+\alpha^2), \ c=c_0(\alpha^2-2\alpha+2)$  и собственная частота равна

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \gamma \sqrt{\frac{c_0}{m}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 2}{1 + \alpha^2}}.$$

Зависимость коэффициента  $\gamma$  от значений  $\alpha$  ( $\alpha>0$ ) показана на рис. 1.4,  $\delta$ . Как указывалось выше, при произвольном выборе  $\alpha$  вычисленное значение окажется выше истинного; точный результат  $\gamma=0.618$  (см. ниже пример 4.3) соответствует точке минимума кривой на рис. 1.4,  $\delta$ , где  $\alpha=1.618$ . Из графика, между прочим, видно, что в зоне минимума значения  $\alpha$  довольно слабо влияют на величину  $\gamma$ . Поэтому из-за произвола, допускаемого при выборе значения  $\alpha$ , обычно пе возникают большие ошибки в определении собственной частоты,

Как правило, то же относится и к другим мехапическим системам—в этом и состоит практическая ценность метода Рэлея.



Пример 1.4. Найти методом Рэлея собственную частоту колебаний консольной балки постоянного поперечного сечения EJ= = const; считается также постоянной интенсивность m ее массы (рис. 1.5).

Примем сначала

$$f(x) = \frac{x^2}{l},\tag{a}$$

что удовлетворяет кинематическим граничным условиям на левом конце и одному из силовых условий на правом конце (сило-

вое условие f''(l)=0 здесь нарушено!). Подставляя (a) в (1.26), вычисляем

$$k = \frac{4,47}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

В качестве формы колебаний лучше принять функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{2l} - \frac{x^3}{3l^2} + \frac{x^4}{42l^3},\tag{6}$$

которая удовлетворяет всем граничным условиям задачи:

$$f(0) = 0,$$
  $f'(0) = 0,$   
 $f''(l) = 0,$   $f'''(l) = 0.$ 

Подставив (б) в формулу (1.26), найдем

$$k = \frac{3.64}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

что лишь на 3,4 % отличается от известного точного значения

$$k = \frac{3.51}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

3. Зависимость устойчивости равновесия от коэффициента жесткости. Во всех рассмотренных выше случаях речь шла о колебаниях около положения заведомо устойчивого равновесия; формальным признаком устойчивости служит положительность коэффициента жесткости c, равного значению второй производной  $\Pi''(0)$  потенциальной энергии в положении равновесия. В реальных механических системах может оказаться, что c < 0.

При c < 0 основное дифференциальное уравнение (1.10) можно записать в виде

$$a\ddot{q} - c^*q = 0,$$
 (1.28)

где  $c^* = |c|$  — абсолютное зпачение обобщенного коэффициента жесткости. Решение уравнения (1.28)

$$q = A \operatorname{sh}(k^*t + \alpha), \tag{1.29}$$

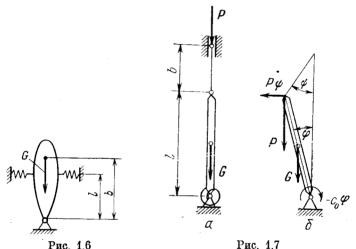
где  $k^* = \sqrt{c^*/a}$ , описывает монотонное удаление системы от равновесного положения и свидетельствует о его неустойчивости.

Знак коэффициента с зависит от параметров системы, т. е. в некоторых случаях состояние равновесия может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от комбинации значений этих параметров.

Обращаясь к рассмотрению таких случаев, будем считать, что существует лишь один варьируемый параметр S системы, при изменении которого может измениться знак коэффициента жесткости c = c(S). Состояния равновесия устойчивы в той области значений S, в которой c(S) > 0; при c(S) < 0 состояния равновесия неустойчивы (случаи «отрицательной жесткости»). Критические значения параметра S являются корнями уравнения c(S) = 0.

(1.30)

Пример 1.5. Для симметричной системы, изображенной на рис. 1.6, введем обозначения: G — вес тела, I — момент инерции тела относительно оси шарнира,  $c_0$  — суммарный коэффициент



жесткости обеих пружин, b — высота расположения центра тяжести тела, l — высота расположения оси пружин. Найти критическое значение коэффициента жесткости со.

При малых значениях угла отклонения тела дифференциальное уравнение вращательного движения имеет вид

$$I\varphi + (c_0l^2 - Gb)\varphi = 0.$$

Таким образом, в данном случае устойчивость равновесия определяется знаком разности  $c = c_0 l^2 - Gb.$ 

Критическое значение  $c_{0 \text{ кр}} = Gb/l^2$ .

 $\Pi$  р и м е р 1.6. Найти критическое значение силы P для системы, изображенной на рис. 1.7, а; весом верхнего стержня пренебречь. Коэффициент жесткости спиральной пружины, расположенной внизу стойки, равен  $c_0$  ( $c_0$  представляет собой упругий момент, соответствующий повороту стойки вокруг шарнира на угол, равный единице). Обозначим: l — высота стойки, b — длина верхнего стержня, G — вес стойки. Силы, действующие на стойку, при ее отклонении на малый угол  $\phi$ , показаны на рис. 1.7,  $\delta$ .

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движе-

ния стойки (для малых отклонений)

$$P\psi l + P\varphi l + \frac{Gl}{2}\varphi - c_0\varphi = \frac{Gl^2}{3g}\varphi.$$

Так как  $b\sin \psi = l\sin \phi$ , то при малых углах  $\psi$  и  $\phi$  можно принять  $\psi = \phi l/b$ . Таким образом, обобщенный коэффициент жесткости равен

$$c = c_0 - \frac{Gl}{2} - Pl\left(1 + \frac{l}{b}\right).$$

Отсюда непосредственно видно, что критическое значение силы P в соответствии с (1.30) определяется выражением

$$P_{\rm KP} = \left[c_0 - \frac{Gl}{2}\right] \left[l\left(1 + \frac{l}{b}\right)\right]^{-1}.$$

При увеличении размера b критическое значение  $P_{\kappa p}$  также увеличивается.

Пример 1.7. Основой изображенной на рис. 1.8, а системы служит жесткая рамка 1, вращающаяся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. Горизонтальный стержень 2

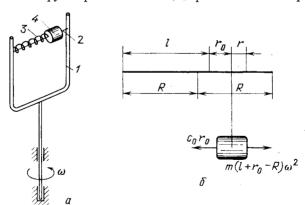


Рис. 1.8

длиной 2R служит направляющей осью для пружины 3; один конец пружины связан c рамкой, а к другому концу прикреплен груз 4 массы m, который может скользить без трения вдоль стержня 2. Коэффициент жесткости пружины равен  $c_0$ , а ее недеформированная длина равна l. Найти критическое значение угловой скорости.

Положению относительного равновесия груза соответствует растяжение пружины на величину  $r_0$ , которая может быть

найдена из схемы сил, данной на рис. 1.8, б, т. е. из соотношения

$$m(l+r_0-R)\omega^2 = c_0r_0.$$
 (a)

Устойчивость этого состояния равновесия груза зависит от значений угловой скорости вращения системы.

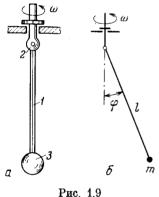
Вращение системы примем за переносное движение, тогда движение груза вдоль стержня будет являться относительным движением. Обозначив через г дополнительное удлинение пружины в произвольный момент процесса движения, запишем переносную силу инерции в виде  $m(l+r_0+r-R)\omega^2$ ; тогда дифференциальное уравнение относительного движения груза примет вид

$$\ddot{mr} = -c_0(r_0 + r) + m(l + r_0 + r - R)\omega^2,$$

или, при учете (а).

$$mr + (c_0 - m\omega^2)r = 0.$$

Следовательно, обобщенный коэффициент жесткости равен c = $=c_0-m\omega^2$ , и критическое значение угловой скорости составляет  $\omega_{\rm KP} = \sqrt{c_0/m}$ . Отметим, что оно не зависит от значений l и  $r_0$  и сов-



палает со значением собственной частоты колебаний груза на пружине при отсутствии вращения. При  $\omega > \omega_{\rm KD}$  состояния относительно равновесия груза неустойчивы.

Пример 1.8. Показанная на рис. 1.9, а система представляет собой маятник и состоит из стержня 1 с горизонтальной осью подвеса 2 и груза 3. Горизонтальная ось маятника равномерно вращается с постоянной угловой скоростью с вокруг вертикальной оси, совпадающей равновесным положением стержня. Найти критическое значение угловой скорости.

Введем следующие обозначения: l — длина стержня, m — масса груза, ф — малый угол отклонения

стержия от вертикали (рис. 1.9, б). В дифференциальное уравнение относительного движения маятника нужно ввести момент силы тяжести и момент переносной силы инерции:

$$-mgl\varphi + m\omega^2 l^2 \varphi = ml^2 \varphi.$$

(Кориолисова сила инерции параллельна оси подвеса и в уравнение моментов не входит.) Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) \varphi = 0,$$

из которого непосредственно видно, что критическая угловая скорость не зависит от массы груза и равна

$$\omega_{\rm kp} = \sqrt{g/l}$$
.

При  $\omega < \omega_{\kappa p}$  система устойчива, причем частота свободных колебаний определяется формулой

$$k = \sqrt{\omega_{\rm kp}^2 - \omega^2}.$$

При  $\omega > \omega_{\kappa p}$  состояние относительного равновесия неустойчиво.

В рассмотренных простых примерах по существу не было необходимости в составлении дифференциальных уравнений движения, так как для суждения об устойчивости и для определения критического значения параметра было достаточно построить выражение c(S). Однако для систем с несколькими степенями свободы — даже находящихся под действием только позиционных сил — исследование устойчивости требует предварительного составления дифференциальных уравнений движения (см. гл. IV).

Устойчивость состояний равновесия удобно исследовать также с помощью фазовых диаграмм. Отметим, что их можно построить и не решая заданное дифференциальное уравнение движения, т. е. не разыскивая закон движения  $q=q\left(t\right)$  в явной форме.

С помощью замены  $q=q\frac{dq}{dq}$  из (1.12) получается дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\dot{q}}{dq} = -\frac{k^2q}{\dot{q}}. (1.31)$$

После интегрирования мы вновь придем к уравнению (0.11) и к семейству эллипсов, показанному на рис. 0.9,  $\epsilon$ . Если c < 0, то после замены  $k_*^2 = -c/a$  получим вместо (1.31) дифференциальное уравнение фазовых траекторий

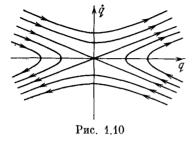
$$\frac{\dot{dq}}{dq} = \frac{k_*^2 q}{\dot{q}}.$$

Его решение имеет вид

$$q^2 - \frac{\dot{q}^2}{\iota^{*2}} = A^2_{\bullet}$$

Фазовые траектории для этого случая показаны на рис. 1.10. Они состоят из семейства гипербол и четырех полупрямых, являющихся асимптотами этих гипербол.

Заданное возмущение состояния равновесия определяет начальное положение изображающей точки. С течением времени эта точка будет монотонно удаляться от начала вдоль соответствующей криволинейной фазовой траектории: это означает монотонный уход системы от



состояния равновесия. Исключение составляют изображающие точки, лежащие на прямой  $\dot{q} = -k^*q$ ; если в начальный момент задано такое возмущение, что  $\dot{q}(0) = -k^*q(0)$ , то система будет стремиться к состоянию равновесия. Но это не может изменить оценки состояния равновесия как неустой-

чивого: достаточно любого сколь угодно малого нарушения указанного специально выбранного возмущения, как система станет неограниченно удаляться от состояния равновесия. В данном случае отвечающая положению равновесия особая точка (0, 0) называется седлом.

## § 2. Системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и трения

1. Линейное трение. Для изучения свободных колебаний системы с одной степенью свободы при наличии линейного трения будем исходить из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_*,\tag{2.1}$$

в котором  $Q_*$  — обобщенная сила линейного трения. Для ее определения примем, что на каждую точку системы действует сила линейного трения

$$\mathbf{R}_i = -\beta_i \mathbf{v}_i, \tag{2.2}$$

где β<sub>і</sub> — коэффициент трения. Вспомнив основное выражение обобщенной силы

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_{i} \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q}$$

и известное соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{r_i}}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{v_i}}{\partial \dot{q}}$$

будем иметь

$$Q_* = -\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q} = -\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}}.$$

Но так как

$$\mathbf{v}_{i} \frac{\partial \mathbf{v}_{i}}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\mathbf{v}_{i} \mathbf{v}_{i}) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_{i}^{2}}{\partial \dot{q}},$$

TO

$$Q_* = -\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{2} \frac{\partial \overline{v_i^2}}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i v_i^2}{2}.$$

Входящая сюда сумма

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i v_i^2}{2} \tag{2.3}$$

формально сходна с выражением кинетической энергии и ее называют диссипативной функцией Рэлея. Способ, использованный выше при построении выражения (1.4) для кинетической энергии, в данном случае также приведет к компактному выражению

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{bq^2}, \qquad (2.4)$$

где b — обобщенный коэффициент вязкости.

Окончательно приходим к следующему выражению для обобщенной силы трения:

$$Q_* = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\dot{bq}. \tag{2.5}$$

Так как по-прежнему  $T=\frac{1}{2}\,\dot{aq}^2,~\Pi=\frac{1}{2}\,cq^2,$  то уравнение Лагранжа (2.1) принимает вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0. \tag{2.6}$$

При не слишком больших значениях обобщенного коэффициента вязкости, когда  $b < 2\sqrt[3]{ac}$ , общее решение дифференциального уравнения (2.6) имеет вид

$$q = e^{-ht}(C_1 \sin k_* t + C_2 \cos k_* t), \tag{2.7}$$

где

$$h = \frac{b}{2a}, \quad k_* = \sqrt{k^2 - h^2},$$
 (2.8)

а постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий  $a(0) = a_1 + a(0) = a_2$ 

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

в форме

$$C_1 = \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{k_+}, \quad C_2 = q_0.$$

Другая форма решения имеет вид

$$q = Ae^{-ht}\sin(k_*t + \alpha), \tag{2.9}$$

где

$$A = \sqrt{\frac{(\dot{q}_0 + hq_0)^2}{k^2 - h^2} + q_0^2}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{q_0 \sqrt{k^2 - h^2}}{\dot{q}_0 + hq_0}.$$

Как видно из (2.7) или (2.9), движение представляет собой затухающие колебания с постоянной частотой, но

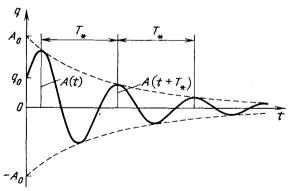


Рис. 2.1

постепенно убывающими амплитудами, так что процесс в целом характеризуется монотонным убыванием амплитуд (строго говоря, этот термин относится только к незатухающему процессу гармонических колебаний)— см. рис. 2.1.

Огибающие кривой процесса определяются функциями  $A = \pm A_0 e^{-ht}$ . (2.10)

где  $A_0$  — начальная ордината огибающей.

Угловая частота свободных затухающих колебаний определяется выражением

$$k_* = \sqrt{k^2 - h^2} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$
, (2.11)

соответственно длительность одного цикла составляет

$$T_* = \frac{2\pi}{k_*} = \frac{4\pi a}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

Чаще всего влияние трения на собственную частоту пренебрежимо мало, т. е. можно принять  $k_* \approx k, \ T_* \approx T.$ 

Последовательность максимальных отклонений следует закону геометрической прогрессии, так как согласно (2.10) отношение двух последовательных максимальных отклонений  $A(t):A(t+T_*)$ , разделенных интервалом времени  $T_*$ , является постоянной величиной, равной  $e^{hT_*}$ . Натуральный логарифм этого отношения называется логарифмическим декрементом; он равен

$$\Lambda = hT_* = \frac{2\pi b}{\sqrt{4ac - b^2}} \approx \frac{\pi b}{\sqrt{ac}}.$$
 (2.12)

Погарифмический декремент служит удобной количественной характеристикой темпа затухания свободных колебаний.

При достаточно больших значениях коэффициента вязкого трения, когда  $b>2\sqrt{ac}$ , общее решение дифференциального уравнения (2.6) вместо (2.7) запишется в виде

$$q = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}, (2.13)$$

где

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Постоянные интегрирования определяются через начальные условия выражениями

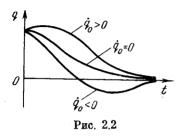
$$C_1 = \frac{-s_2 q_0 + \dot{q}_0}{s_1 - s_2}, \quad C_2 = \frac{-s_1 q_0 + \dot{q}_0}{s_2 - s_1}.$$

Движение, описываемое выражением (2.13)— неколебательное (рис. 2.2); при любых начальных условиях величины q и  $\dot{q}$  асимптотически стремятся к нулю.

В случае, когда  $b=2\sqrt{ac}$  (критическое загухание), решение дифференциального уравнения (2.6) имеет вид

$$q = e^{-ht} \left[ q_0 + (kq_0 + \dot{q}_0) t \right] \tag{2.14}$$

и по характеру не отличается от показанного на рис. 2.2.



Обратимся к представлению рассматриваемого движения на фазовой плоскости и начнем со случая относительно малого трения (см. выражение (2.9)). Образуем выражение скорости

$$\dot{q} = Ae^{-ht} [k_* \cos(k_*t + \alpha) - h \sin(k_*t + \alpha)]$$
 (2.15)

и будем рассматривать систему (2.9), (2.15) как уравнение фазовых траекторий в параметрической форме. На рис. 2.3, а изображены две типичные фазовые траектории; они представляют собой спирали, накручивающиеся

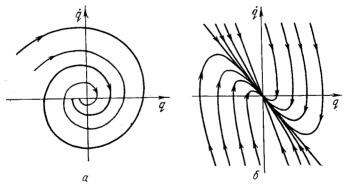


Рис. 2.3

на начало координат — особую точку, которая в данном случае называется устойчивым фокусом.

В случае относительно большого трения, когда движение описывается решением (2.13), для скорости находим:

$$\dot{q} = C_1 s_1 e^{s_1 t} + C_2 s_2 e^{s_2 t}. \tag{2.16}$$

Рассматривая (2.13) и (2.16) как уравнение фазовых траекторий в параметрической форме, приходим к фазовой диаграмме, показанной на рис. 2.3, б. В данном случае начало координат является особой точкой типа устойчивый узел.

Пример 2.1. По экспериментальной виброграмме свободных колебаний некоторой системы с одной степенью свободы установлено, что за один цикл амплитуда уменьшается на 40 %. Оценить, в какой мере трение в системе повлияло на частоту колебаний.

Прежде всего находим логарифмический декремент

$$\Lambda = hT_* = \ln \frac{1}{1 - 0.4} = 0.511,$$

отсюда

$$h = \frac{0.511}{T_*} = \frac{0.511}{2\pi} \sqrt{k^2 - k^2}.$$

Решая это уравнение, находим, что значение  $h^2$  весьма мало́ по сравнению с  $k^2$ :  $h^2 = 0.00661 k^2.$ 

Соответственно частота колебаний

$$k_{\star} = \sqrt{k^2 - h^2} = 0.997k$$

отличается от собственной частоты системы без трения всего на 0.3 %.

Из этого примера видно, что даже при заметном затухании колебаний (почти двукратное уменьшение амилитуды за один цикл) силы трения незначительно влияют на частоту колебаний.

2. Нелинейное трение. При обработке опытных виброграмм свободных затухающих колебаний чаще всего обнаруживается, что убывание амплитуд не следует закону геометрической прогрессии; это служит признаком того, что трение отличается от линейного.

Нелинейная зависимость сил трения от скорости может быть описана различными аналитическими выражениями. Примем, что обобщенная сила трения  $Q_*$  пропорциональна n-й степени скорости, причем ноказатель степени  $n \neq 1$  зависит от конкретных свойств силы трения; эту зависимость записывают в форме (0.6) или в эквивалентной форме

$$Q_* = -b |\dot{q}|^{n-1} \dot{q}. \tag{2.17}$$

В таком случае основное дифференциальное уравнение имеет вид

 $a\ddot{q} + b|\dot{q}|^{n-1}\dot{q} + cq = 0.$  (2.18)

Точное решение этого нелинейного дифференциального уравнения получить в замкнутой форме невозможно, но существует ряд способов, позволяющих построить приближенное аналитическое описание движения. Изложим некоторые из них.

Mето∂ энергетического баланса. Согласно этому методу предполагается, что искомое движение близко к гармоническому, но характеризуется медленно изменяющейся амплитудой и постоянной частотой, для которой можно принять значение k, соответствующее консервативной системе без трения. Таким образом, рассматривая какойлибо один цикл колебаний и совмещая начало отсчета

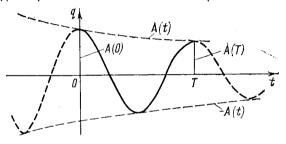


Рис. 2.4

времени с моментом, когда отклонение достигает максимума (рис. 2.4), можно приближенно принять, что движение описывается функцией

$$q = A(t)\cos kt, \qquad (2.19)$$

где A(t) — медленно меняющаяся функция времени, т. е.  $AT \ll A$ ,  $A \ll Ak$ . Тогда в выражении обобщенной скорости

 $\dot{q} = -Ak\sin kt + A\cos kt$ 

можно пренебречь вторым слагаемым и приближенно принять

 $\dot{q} = -Ak\sin kt.$ 

По выражению (2.17) образуем обобщенную силу трения:  $O_* = b \left( Ak \right)^n |\sin kt|^{n-1} \sin kt.$ 

Работа силы трения за рассматриваемый цикл равна

$$U = \int_{0}^{T} Q_{*}\dot{q}dt = -bk^{n+1} \int_{0}^{T} [A | \sin kt |]^{n+1} dt.$$

В этом вычислении можно приближенно принять, что в течение рассматриваемого периода величина A неизменна. Тогда получим

$$U = -4b (Ak)^{n+1} \int_{0}^{T/4} \sin^{n+1}kt dt = -4b A^{n+1} k^{n} \int_{0}^{\pi/2} \sin^{n+1}\psi d\psi.$$

Входящий сюда интеграл обозначим буквой I; он выражается через гамма-функцию  $\Gamma$  (эйлеров интеграл второго  $po\partial a$ ), для которой имеются готовые таблицы:

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin^{n+1} \psi \, d\psi = \frac{2^{n-2} n^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{n \, (n+1) \, \Gamma(n)}. \tag{2.20}$$

С помощью таких таблиц можно вычислить следующие значения I в зависимости от показателя n:

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
I	1,000	0,875	0,785	0,718	0,667	0,624	0,589

Окончательно имеем

$$U = -4bA^{n+1}k^nI(n). (2.21)$$

Полученное выражение равно изменению энергии системы за рассматриваемый цикл. Так как в начале и конце рассматриваемого цикла кинетическая энергия равна нулю, то изменение полной энергии определяется изменением потенциальной энергии  $\Pi$ ; конечно, при вычислении этого изменения необходимо учесть разницу между наибольшими отклонениями A(0) и A(T).

В начале цикла  $\Pi(0) = \frac{1}{2} cA^2(0)$ . В конце цикла

$$\Pi(T) = \frac{1}{2} cA^2(T).$$

Следовательно, приращение (отрицательное) потенциальной энергии равно

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}c[A^{2}(T) - A^{2}(0)] = \frac{1}{2}c[A(T) + A(0)][A(T) - A(0)].$$

Сумму, стоящую в правой части равенства в первых скобках, приближенно заменим через  $2A\left(0\right)$ , а разность, входящую во вторые скобки, обозначим через  $\Delta A$ . Тогда

будет

$$\Delta \Pi = cA\Delta A. \tag{2.22}$$

(Здесь вместо A (0) можно написать просто A.) Приравнивая работу (2.21) приращению энергии (2.22), получаем уравнение в конечных разностях

$$-4bA^{n+1}k^nI(n)=cA\Delta A,$$

или

$$\Delta A = -\frac{4b \left(Ak\right)^n I(n)}{c}.$$
 (2.23)

Это уравнение связывает приращение (отрицательное) амплитуды за один цикл со значением амплитуды в начале этого цикла. Рассматривая огибающую как непрерывную кривую, описываемую дифференцируемой функцией времени A = A(t), приближенно примем

$$\Delta A = T \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi}{k} \frac{dA}{dt}.$$

Тогда уравнение в конечных разностях (2.23) примет вид дифференциального уравнения для огибающей:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{2bk^{n+1}I(n)}{\pi c}A^{n}.$$
 (2.24)

При интегрировании этого уравнения нужно различать два случая: когда n=1 и когда  $n\neq 1$ .

В случае n=1 (линейное трение) согласно (2.20)  $I=\pi/4$ , и уравнение (2.24) принимает форму

$$\frac{dA}{dt} = -hA. \tag{2.25}$$

Здесь  $h = \frac{bk^2}{2c} = \frac{b}{2a}$ . Решение линейного уравнения (2.25) имеет вид

$$A = A_0 e^{-ht}, (2.26)$$

где  $A_0$  имеет смысл начальной ординаты огибающей. Таким образом, при n=1 мы приходим к прежнему (точному) результату (2.10). Хотя это совпадение относится только к огибающей (из-за различия между k и  $k_*$  графики движения будут неодинаковыми), но это убедительно свидетельствует в пользу приемлемости метода энергетического баланса.

В случае  $n \neq 1$  уравнение (2.24) нелинейно, но его точное решение затруднений не вызывает, так как переменные разделяются:

$$\frac{dA}{A^n} = -\frac{2bk^{n+1}I(n)}{\pi c} dt. \tag{2.27}$$

После интегрирования при начальном условии  $A(0) = A_0$  находим зависимость A(t):

$$A = \frac{A_0}{1 + \frac{2b(n-1)k^{n+1}I(n)A_0^{n-1}}{\pi c}t}.$$
 (2.28)

Конкретный вид этой зависимости определяется значением показателя n.

Прежде всего остановимся на случае, когда n=2 (квадратическое трение); при этом из (2.28) получается

$$A = \frac{A_0}{1 + \frac{4bk^3A_0}{3\pi c}t}$$
 (2.29)

т. е. огибающая имеет вид гиперболы.

С помощью решения (2.28) можно получить огибающую и для другого важного

частного случая, когда n=0. A(t) Согласно (2.17) этому слу-  $A_0$  чаю соответствует выражение

$$Q_* = -b \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} \qquad (2.30)$$

определяющее силу кулонова трения, величина которой не зависит от величины скоPric. 2.5

рости. Подставив n=0 в общее решение (2.28), получим

$$A = A_0 - \frac{2bk}{\pi c} t, \qquad (2.31)$$

т. е. убывание амплитуд следует линейному закону, а амплитуды образуют арифметическую прогрессию; этот результат также соответствует точному решению.

На рис. 2.5 показаны верхние огибающие для трех указанных выше значений n. Общий вид фазовых траек-

торий такой же, как и в случае линейного трения (рис. 2.3, a).

Отметим, что при  $n \neq 1$  отношение двух соседних наибольших отклонений непостоянно; отсюда можно заключить, что логарифмический декремент оказывается переменной величиной, зависящей от амплитуды:

$$\Lambda = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}$$

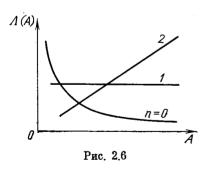
где i — номер рассматриваемого цикла. Если, как это предполагалось выше, разность  $\Delta A_i = A_{i+1} - A_i$  мала по сравнению с  $A_i$ , то можно записать

$$\Lambda = \ln \frac{A_{i+1} - \Delta A_i}{A_{i+1}} = \ln \left( 1 - \frac{\Delta A_i}{A_{i+1}} \right) \approx - \frac{\Delta A}{A}.$$

Подставив сюда выражение (2.23), получим зависимость логарифмического декремента от амплитуды:

$$\Lambda = \frac{4bk^n I(n)}{c} A^{n-1}.$$

Отсюда непосредственно видно, что лишь при n=1 логарифмический декремент не зависит от амплитуды колебаний и остается неизменным в процессе колебаний. При



n=2 в процессе затухающих колебаний логарифмический декремент убывает вместе с убыванием амплитуды, а при n=0(кулоново трение), наоборот, он увеличивается с уменьшением амплитуды.

Зависимости логарифмического декремента от амплитуды колебаний схематически показаны на рис. 2.6.

Метод медленно меняющихся амплитуд. Этот приближенный метод был предложен Ван дер Полем для широкого класса задач о колебаниях систем со слабой нелинейностью, когда дифференциальное уравнение движения можно представить в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q})_{\sharp}$$
 (2.32)

где  $f(q, \dot{q})$  — функция, состоящая из относительно малых нелинейных членов. Например, в задаче о затухающих свободных колебаниях систем с нелинейным трением нужно переписать уравнение (2.18) в виде (2.32), положив

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{b}{a} |\dot{q}|^{n-1} \dot{q}.$$
 (2.33)

Рассмотрим решение уравнения (2.32) по методу медленно меняющихся амплитуд для общего случая, а затем вернемся к частному случаю (2.33).

Решение дифференциального уравнения (2.32) разыскивается в виде

$$q = A\cos(k_0 t - \varphi), \qquad (2.34)$$

но предполагается, что A и  $\phi$  — функции времени.

В зависимости от свойств вновь введенных функций A(t) и  $\phi(t)$  зависимость (2.34) может оказаться более или менее близкой к гармоническим колебаниям с частотой  $k_0$ . При постоянных A и  $\phi$  выражение (2.34) совершенно точно описывает гармонические колебания. В случае, когда A и  $\phi$ —«почти постоянные», т. е. медленно меняющиеся функции времени, выражение (2.34) описывает колебания с медленно меняющимися амплитудой и фазой; этот случай типичен для систем со слабой нелинейностью, в частности для рассматриваемых здесь систем.

Если подставить выражение (2.34) в основное уравнение задачи (2.32), то получится уравнение, содержащее две неизвестные функции A и  $\phi$ . Для определенности замены одной функции q двумя функциями A и  $\phi$  нужно указать какое-либо дополнительное соотношение между последними; Ван дер Поль предложил принять в качестве такого соотношения следующее:

$$\dot{A}\cos(k_0t - \varphi) + \dot{A}\varphi\sin(k_0t - \varphi) = 0.$$
 (2.35)

Если теперь продифференцировать выражение (2.34), то с учетом (2.35) получится весьма простое выражение для скорости:

$$\dot{q} = -k_0 A \sin(k_0 t - \varphi),$$
 (2.36)

— такое же, как если бы величины A и φ были постоянными. Поэтому и выражение для ускорения окажется относительно простым и не будет содержать вторых 4\*

производных А и ф:

$$\ddot{q} = -\dot{A}k_0 \sin(k_0 t - \phi) - Ak_0^2 \cos(k_0 t - \phi) + Ak_0 \dot{\phi} \cos(k_0 t - \phi).$$
 (2.37)

Подставив выражения (2.34), (2.36) и (2.37) в заданное уравнение (2.32), получим уравнение первого порядка

$$-\dot{A}k_0\sin\psi + Ak_0\dot{\varphi}\cos\psi = f[A\cos\psi, -Ak_0\sin\psi], \quad (2.38)$$

где  $\psi = k_0 t - \varphi$ .

Из соотношений (2.35) и (2.38) можно найти следующие выражения для производных  $\hat{A}$  и  $\hat{\phi}$ :

$$\dot{A} = -\frac{1}{k_0} f \left[ A \cos \psi, -A k_0 \sin \psi \right] \sin \psi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{A k_0} f \left[ A \cos \psi, -A k_0 \sin \psi \right] \cos \psi.$$
(2.39)

До сих пор все выкладки были вполне строгими, и лишь теперь делается упрощение, вносящее некоторую приближенность в решение. Предполагая, что рассматриваемая система близка к линейной, мы можем считать, что переменные A и  $\phi$  не успевают получить заметных приращений за один цикл  $2\pi/k_0$  и что производные A и  $\phi$  постоянны в течение любого одного цикла. Поэтому, хотя эти производные выражаются сложными нелинейными функциями времени (2.39), не повлечет большой ошибки замена этих функций их средними за период  $2\pi/k_0$  значениями:

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi k_0} \int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -Ak_0\sin\psi)\sin\psi \,d\psi,$$

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{2\pi Ak_0} \int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -Ak_0\sin\psi)\cos\psi \,d\psi.$$
(2.40)

Копечно, при интегрировании в правых частях величина A считается постоянной. Именно эта операция усреднения составляет существо метода медленно меняющихся амплитуд.

Уравнения (2.40), запишем в более коротком виде:

$$\dot{A} = \frac{\Phi(A)}{2\pi k_0}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\Psi(A)}{2\pi k_0 A} \tag{2.41}$$

(укороченные уравнения Ван дер Поля), причем

$$\Phi(A) = -\int_{0}^{2\pi} f(A\cos\psi_{1} - Ak_{0}\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$\Psi(A) = \int_{0}^{2\pi} f(A\cos\psi_{1} - Ak_{0}\sin\psi)\cos\psi d\psi.$$
(2.42)

Таким образом, нужно прежде всего вычислить интегралы (2.42) в предположении, что A — постоянная величина. После этого интегрируются дифференциальные уравнения (2.41); конечно, на этом этапе выкладок уже признается, что величина A — переменная.

Возвращаясь к задаче о свободных колебаниях систем с нелинейным трением, образуем с помощью (2.33) выражения (2.42):

$$\Phi(A) = -\int_{0}^{2\pi} \left\{ -\frac{b}{a} \left| -Ak_{0} \sin \psi \right|^{n-1} (-Ak_{0} \sin \psi) \right\} \sin \psi d\psi =$$

$$= -\frac{4bA^{n}k_{0}^{n}}{a} \int_{0}^{\pi/2} \sin^{n+1} \psi d\psi,$$

 $\Psi(A)=0.$ 

Интеграл, входящий в выражение  $\Phi(A)$ , уже встречался выше и был обозначен через I(n) (см. (2.20)); следовательно

$$\Phi \left( A\right) =-\frac{4bA^{n}k_{0}^{n}I\left( n\right) }{a}.$$

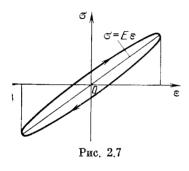
Теперь согласно (2.41) получаем укороченное уравнение

$$\dot{A} = -\frac{2bA^nk_0^{n-1}I(n)}{\pi a}.$$

Если теперь заменить  $a=c/k_0^2$ , то мы вновь придем к уравнению (2.24), полученному выше методом энергетического баланса в предположении, что  $k\approx k_0$ . Следовательно, дальнейшее решение приведет вновь к уравнению для огибающей (2.28).

Хотя в данном случае метод медленно меняющихся амплитуд не дал новых результатов, но ниже мы увидим, что он окажется весьма полезным при решении других нелинейных задач.

3. Гистерезисное трение. При циклическом деформировании упругих тел, даже при малых напряжениях наблюдается некоторое нарушение закона Гука, выражающееся в появлении *петли гистерезиса*; на рис. 2.7 пока-



зана такая петля в координатных осях напряжение с — деформация є. Расположенная внутри петли гистерезиса площадь диаграммы определяет энергию, рассеиваемую за один цикл колебаний в единице объема материала. Так как расстояния между ветвями обычно весьма малы, точную форму петли в экспериментах

установить затруднительно. В то же время площадь и етли может быть определена достаточно надежно. Установлено, что площадь петли гистерезиса для большинства конструкционных материалов практически не зависит от темпа деформирования (т. е. от частоты процесса), но зависит от амплитуды деформации.

Сказанное справедливо и по отношению к целой конструкции: рассеиваемая за один цикл в конструкции эпергия  $\Omega$  не зависит от частоты колебаний, но связана с их амплитудой. Эта зависимость обычно принимается в форме

$$\Omega = \alpha A^{n+1}, \tag{2.43}$$

где  $\alpha$  и n — постоянные, определяемые из экспериментов. Такая зависимость принципиально отличается от внешне сходной с ней зависимости (2.21), в которую входит амплитуда колебаний тоже в степени n+1, однако в выражение (2.21) входит также и частота k, от которой не зависит коэффициент  $\alpha$  выражения (2.43).

Для определения закона, описывающего затухание колебаний при гистерезисном трении, вновь воспользуемся уравнением энергетического баланса и приравняем рассеиваемую энергию (ее следует взять со знаком ми-

нус) приращению энергии (2.22) за один период:

$$-\alpha A^{n+1} = cA\Delta A.$$

Отсюда следует уравнение в конечных разностях

$$\Delta A = -\frac{\alpha}{c} A^n,$$

которое, как и (2.23), можно заменить дифференциальным уравнением

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\alpha k}{2\pi c} A^n. \tag{2.44}$$

После интегрирования этого уравнения при начальном условии  $A(0) = A_0$  получим

$$A = \frac{A_0}{1 + \frac{\alpha (n-1) k A_0^{n-1}}{2\pi c} t}.$$
 (2.45)

Отметим, что в частных случаях n=0, n=1, n=2 здесь вновь получаются результаты, схематически показанные выше на рис. 2.5. Любопытно, что при гистерезисном трении также может получиться экспоненциальная зависимость A(t) (если n=1), которая типична для случая линейного вязкого трения.

Наконец, укажем, что кулоново трение можно считать не только частным случаем нелинейного трения (2.17), но и частным случаем принятой здесь основной зависимости (2.43); в обоих случаях оно характеризуется значением n=0.

4. Ударное демпфирование. В некоторых системах основной причиной затухания колебаний является не непрерывное действие сил трения, а мгновенные потери энергии при соударениях. Рассмотрим случай, когда такие соударения происходят всякий раз, когда система проходит через положение равновесия, причем мгновенная потеря энергии пропорциональна энергии системы перед соударением. В этом случае мгновенную потерю энергии удобно представить через скорость системы v перед соударением;

$$\Omega = bv^2, \tag{2.46}$$

где b — некоторый постоянный коэффициент, имеющий размерность массы.

Рассмотрим какой-либо полуцикл колебаний, который начинается при наибольшем отклонении A(0).

В течение первой четверти цикла система движется с постоянной энергией  $\frac{1}{2}cA^{2}(0)$ , и квадрат скорости в конце этой четверти цикла равен  $v^2 = \frac{c}{c} A^2$  (0). этого происходит соударение и вследствие этого - мгновенная потеря энергии на величину (2.46); далее система начинает движение, обладая энергией

$$\frac{cA^2(0)}{2} - \frac{bc}{a}A^2(0) = \frac{cA^2(0)}{2}\left(1 - \frac{2b}{a}\right),\tag{2.47}$$

которая остается постоянной в течение всей второй четверти цикла. Поэтому, в момент, завершающий эту четверть цикла, потенциальная энергия равна величине (2.47):

ã Рис. 2.8

$$\frac{cA^{2}(T/2)}{2} = \frac{cA^{2}(0)}{2} \left(1 - \frac{2b^{6}}{a}\right).$$

Отсюда находим отношение отклонений в начале И первого полуцикла:

$$\frac{A(0)}{A(T/2)} = \frac{1}{\sqrt{1-2b/a}}.$$

Для следующего полуцикла аналогично можно получить

$$\frac{A(T/2)}{A(T)} = \frac{1}{\sqrt{1-2b/a}}.$$

Сравнивая наибольшие отклонения A(0) и A(T), находим

$$\frac{A(0)}{A(T)} = \frac{1}{1 - 2b/a},\tag{2.48}$$

т. е. отношение последовательных наибольших отклонений является постоянной величиной. Отсюда можно заключить, что огибающая кривой затухающих колебаний представляет собой экспоненту

$$A = A_0 e^{-ht},$$

которая характеризуется логарифмическим декрементом

$$\Lambda = hT = \ln \frac{1}{1 - 2b/a}.$$

При малых отношениях 2b/a можно принять

$$\Lambda \approx 2b/a. \tag{2.49}$$

Фазовая диаграмма для рассматриваемого процесса представлена на рис. 2.8; она состоит из отрезков оси  $\dot{q}$  и эллиптических дуг.

## § 3. Системы с одной степенью свободы при нелинейной восстанавливающей силе

1. Общие понятия. В некоторых случаях перемещения при колебаниях могут быть настолько значительными, что в разложении потенциальной энергии (1.6) необходимо учитывать не только член, содержащий  $q^2$ , но и последующие члены. Иногда разложение (1.6) вообще не содер-

жит квадратичного члена и начинается с члена выше второй степени. Отметим также, что в некоторых системах потенциальная энергия, соответствующая положению равновесия, не имеет аналитического минимума и вообще непредставима в виде (1.6).

Во всех этих случаях обобщенная восстанавливающая сила нелинейна и соответственно нелинейно дифференциальное уравнение движения.

Простейшим примером может служить задача о больших колебаниях математического маятника (рис. 3.1).

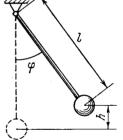


Рис. 3.1

Если принять за обобщенную координату  $\phi$  угол отклонения маятника от вертикали, то переменная высота h, на которой находится груз, равна

$$h = l(1 - \cos \varphi),$$

соответственно потенциальная энергия определяется выражением

$$\Pi = mgh = mgl(1 - \cos \varphi).$$

При весьма малых значениях ф можно принять

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

после чего потенциальная энергия оказывается квадратичной функцией обобщенной координаты ф, и мы приходим к линейной задаче.

Такое представление становится недостаточно точным при значительных углах отклонения. Для точного решения нужно подставить в уравнение Лагранжа (1.1)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi.$$

Так как кинстическая энергия равна

$$T=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2},$$

то согласно (1.1) получится нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

В более общем случае дифференциальное уравнение имеет вид

 $a\ddot{q} + F(q) = 0, (3.1)$ 

где

$$F(q) = \frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

представляет собой взятую с обратным знаком обобщенную восстанавливающую силу, являющуюся нелинейной функцией координаты q.

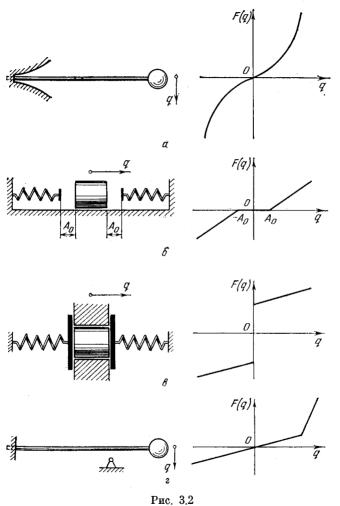
Зависимость F(q) называют квазиупругой характеристикой или характеристикой жесткости. На рис. 3.2 показаны некоторые нелинейные системы с одной степенью свободы и соответствующие им характеристики жесткости. Среди приведенных здесь характеристик можно выделить характеристики симметричные (рис. 3.2, a, 6, e) и несимметричные (рис. 3.2, e), характеристики с разрывами (рис. 3.2, e), характеристики гладкие (рис. 3.2, e) и ломаные (рис. 3.2, e).

2. Точные решения. В отмеченных выше случаях исследование свободных колебаний сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения (3.1). Выразив обобщенное ускорение через обобщенную ско-

рость  $\dot{q} = \dot{q} \, \frac{d\dot{q}}{dq}$ , получим вместо (3.1) уравнение первого порядка, связывающее скорость  $\dot{q}$  с координатой q:

$$\dot{q}\,\frac{dq}{dg} + \frac{F(q)}{a} = 0. \tag{3.2}$$

Предположим, что система совершает колебательное движение, и выберем за начало отсчета времени момент, когда обобщенная скорость равна нулю и достигается



наибольшее отклонение системы от положения равновесия  $(q_{max} = A)^*$ ).

<sup>\*)</sup> При немонотонных зависимостях F(q) и больших начальных возмущениях может оказаться, что обобщенная скорость в нуль никогда не обращается. Так, папример, если находящемуся

Разделяя переменные в уравнения (3.2) и интегрируя его, имеем

$$\int_{0}^{\dot{q}} \dot{q} \, d\dot{q} = -\frac{1}{a} \int_{A}^{q} F(q) \, dq,$$

или

$$\frac{\dot{q}^2}{2} = -\frac{1}{a} \int_A^q F(q) \, dq = \frac{1}{a} \int_q^A F(q) \, dq. \tag{3.3}$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии: кинетическая энергия в произвольный момент равна убыванию потенциальной энергии при переходе системы из крайнего положения в рассматриваемое. Из (3.3) находим обобщенную скорость в функции координаты:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{a} \int_{q}^{A} F(q) dq}.$$
 (3.4)

Знак минус перед корнем выбран потому, что в рассматриваемом интервале движения (первый полупериод) обобщенная скорость отрицательна.

Дальнейшее интегрирование соотношения (3.4) дает время в функции обобщенной координаты q:

$$t = -\int_{A}^{q} \frac{dq}{\sqrt{\frac{A}{(2/a)\int_{a}^{A} F(q) dq}}} = \int_{q}^{A} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2/a}\int_{a}^{A} F(q) dq}}.$$
 (3.5)

Если характеристика восстанавливающей силы симметричная, т. е. функция F(q) нечетная, то время перехода системы из крайнего положения  $(q_{\max} = A)$  в положение равновесия (q = 0) составит четверть периода; следова-

в устойчивом положении равновесия маятнику сообщить достаточно большую начальную скорость  $v>2\sqrt{gl}$ , то начнется безостановочное вращательное движение с неизменным знаком обобщенной скорости. Впрочем, и в этом ротационном процессе можно заметить колебательные свойства, так как значение обобщенной скорости колеблется около некоторого среднего значения.

тельно,

$$\frac{T}{4} = \int_{0}^{A} \frac{dq}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right) \int_{q}^{A} F(q) dq}};$$

соответственно частота свободных колебаний определяется формулой

$$k = \frac{2\pi}{T} = \pi : 2 \int_{0}^{A} \frac{dq}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right) \int_{q}^{A} F(q) dq}}.$$
 (3.6)

Изложенное решение не дает возможности найти в замкнутом виде закон движения q(t), но приводит задачу определения частоты свободных колебаний к квадратурам. Во всех случаях для вычислений по формуле (3.6) эффективно использование ЭВМ, хотя иногда их можно завершить и в аналитической форме.

Остановимся на частном случае чисто нелинейной характеристики, которая не содержит линейного члена,

$$F(q) = \beta q^{2n-1},\tag{3.7}$$

где в и п — постоянные. Последовательно находим

$$\int_{q}^{A} F(q) dq = \frac{\beta}{2n} (A^{2n} - q^{2n})_{s}$$

$$\int_{0}^{A} \frac{dq}{\sqrt{\frac{\beta}{an} (A^{2n} - q^{2n})}} = \sqrt{\frac{an}{\beta}} A^{1-n} \int_{0}^{1} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^{2n}}}.$$

Заменив здесь  $\gamma^{2n} = \psi$ , получим для входящего сюда интеграла следующее выражение через гамма-функцию:

$$\int_{0}^{1} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^{2n}}} = \frac{1}{2n} \int_{0}^{1} \psi^{\frac{1}{2n}-1} (1-\psi)^{-\frac{1}{2}} d\psi = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Окончательно по формуле (3.6) находим

$$k = I_*(n) \sqrt{\frac{\beta}{a}} A^{n-1},$$
 (3.8)

где

$$I_*(n) = \sqrt[4]{\pi n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)}.$$
 (3.9)

Значения  $I_*(n)$  даны в следующей таблице:

n	0,5	1	1,5	2	2,5	
<i>I</i> *	1,1111	1,0000	0,9149	0,8472	0,7923	

Из формулы (3.8) видно, что при  $n \neq 1$  частота свободных колебаний зависит от их амплитуды.

Типичная для нелинейных систем зависимость частоты от амплитуды не позволяет считать частоту параметром самой системы; поэтому для нелинейных систем обычно пользуются не термином «собственная частота», а термином «частота свободных колебаний».

Как мы видели, даже при сравнительно несложном виде зависимости (3.7) вычисления частоты приводят к неэлементарным функциям. Чаще всего эти вычисления

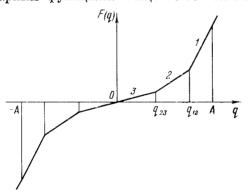


Рис. 3.3

приходится делать приближенно, так как входящий в формулу (3.6) интеграл не сводится к табулированным функциям. Однако в некоторых случаях, когда нелинейная характеристика восстанавливающей силы состоит из линейных участков (рис. 3.3), можно получить независимое от (3.6) точное решение задачи о свободных колеба-

ниях, пользуясь способом поэтапного интегрирования (припасовывания).

Способ основан на последовательном решении ряда линейных задач, относящихся к отдельным участкам. Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, условий перехода от этапа к этапу и условий периодичности.

Пусть кусочно-линейная характеристика системы симметрична и состоит из n участков, границы которых определяются значениями координат  $q_{12}, q_{23}, \ldots$  (в индексах указаны номера смежных участков, причем нумерация идет от крайнего участка к началу). Задаваясь, пример, начальными условиями q(0) = A,  $\dot{q}(0) = 0$  и интегрируя линейное дифференциальное уравнение, относящееся к первому этапу, мы сможем найти время пвижения на первом этапе  $t_1$  и соответствующую концу этапа скорость  $\dot{q}_{12}$ . Принимая известные значения  $q_{12}$  и  $\dot{q}_{12}$  за начальные условия движения на втором этапе, можно найти время движения  $t_2$  и скорость  $\dot{q}_{23}$  в конце этапа. Наконец, на *n*-м этапе, которому соответствует проходящий через начало координат участок характеристики, можно найти время  $t_n$  прохождения n-го этапа (от его начала  $q_{n-1,n}$  до q=0). В данном случае на этом можно остановиться, так как ввиду симметричности характеристики и симметрии движения сумма найденных промежутков времени равна четверти периода свободных колебаний:

$$\frac{T}{4}=t_1+t_2+\ldots+t_n.$$

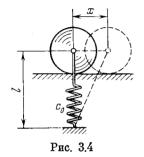
Отсюда можно определить частоту свободных колебаний:

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_n)}.$$
 (3.10)

В случаях несимметричной характеристики необходимо продолжить определение отрезков времен  $t_i$ , соответствующих отрицательным значениям координаты q. Вычисления заканчиваются в момент времени, когда обращается в нуль скорость  $\dot{q}$ ; сумма вычисленных таким образом отрезков времени равна полупериоду свободных колебаний.

Конечно, уже при трех-четырех участках аналитические выкладки становятся громоздкими и необходимо обращаться к машинному счету на ЭВМ.

Изложенный способ, в принципе, можно применить и в тех случаях, когда заданная характеристика жесткости криволинейная; для этого нужно заменить ее ломаной, составленной из достаточно большого числа прямолинейных отрезков. Поскольку для дальнейших выкладок потребуются ЭВМ, здесь уместно напомнить, что с помощью ЭВМ можно организовать и непосредственное вы-



числение частоты свободных колебаний по ранее полученному выражению (3.6).

Пример 3.1. Найти частоту малых свободных горизонтальных колебаний круглого однородного диска, упруго закрепленного при помощи пружины с вертикальной осью (рис. 3.4). Качение диска по горизонтальной плоскости происходит без скольжения. При вертикальном расположении оси пружины, т. е. в положении равновесия, натяжение пружины равно пулю. Обозначения: R — радиус диска, m — его масса, l — длина пружины в не-

деформированном состоянии,  $c_0$  — ее коэффициент жесткости.

Принимая за обобщенную координату х горизонтальное перемещение центра диска, находим кинетическую энергию:

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{I \dot{x}^2}{2R^2}$$

Подставляя  $I = mR^2/2$ , находим

$$T = \frac{3}{4} m \dot{x}^2,$$

т. е. инерционный коэффициент равен

$$a = \frac{3}{2} m.$$
(a)

Для определения потенциальной энергии пружины прежде всего найдем ее удлинение при горизонтальных отклонениях верхнего конца

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l.$$

Следовательно,

$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 \left[ \sqrt{l^2 + x^2} - l \right]^2.$$

Разлагая полученное выражение в ряд и удерживая один первый член разложения, находим

$$\Pi = \frac{c_0 x^4}{8l^2};$$

 $_{
m OTC}$  іода следует, что характеристика восстанавливающей силы чи-  $_{
m CTO}$  кубическая:

$$F(x) = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{c_0 x^3}{2l^2}.$$

Полученное выражение соответствует зависимости (3.7), в которой пужно положить  $\beta = c_0/(2l^2)$ , n=2. Теперь по формуле (3.8) и таблице значений  $I_*(n)$  находим искомую частоту свободных колебаний диска:

$$k = 0.8472 \sqrt{\frac{c_0}{3m}} \frac{A}{l} = 0.4891 \sqrt{\frac{c_0}{m}} \frac{A}{l}$$

Пример 3.2. Найти способом поэтапного интегрирования свизь между амплитудой и частотой свободных колебаний системы с зазором (рис. 3.2, б). Симметричная кусочно-линейная характеристика системы определяется уравнениями

$$F(x) = c_0(x + A_0), \quad x < -A_0,$$
  
 $F(x) = 0, \quad -A_0 < x < A_0,$   
 $F(x) = c_0(x - A_0), \quad x > A_0.$ 

На первом участке при  $x>A_{\scriptscriptstyle 0}$  дифферепциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{c_0}{m}(x - A_0) = 0,$$

и его общим решением служит выражение

$$x = C_1 \sin k_0 t + C_2 \cos k_0 t + A_0$$

в котором  $k_0 = \sqrt{c_0/m}$  (m — масса груза). Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0$$

и равны

$$C_1=0, \quad C_2=A-A_0.$$

Таким образом,

$$x = A \cos k_0 t + A_0 (1 - \cos k_0 t),$$
  
$$\dot{x} = -(A - A_0) k_0 \sin k_0 t.$$

Время  $t_1$  прохождения первого участка найдем из условия, что при  $t=t_1$  должно быть  $x=A_0$ :

$$t_1 = \frac{\pi}{2k_0}.$$

При этом скорость в конце первого этапа равна

$$\dot{x}_{12} = -(A - A_0) k_0.$$

Свободное движение на втором участке описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x}=0$$
,

имеющим решение

$$x = D_1 + D_2 t.$$

Совмещая повое начало отсчета времени с моментом перехода системы с первого участка на второй, определяем постоянные  $D_1$  п  $D_2$  из условий, что  $x=A_0,\;\dot x=-(A-A_0)\,k_0$  при t=0. Отсюда следует

 $D_1 = A_0, \quad D_2 = -(A - A_0)k_0,$ 

так что на втором этапе движения

$$x = A_0 - (A - A_0) k_0 t.$$

Теперь пайдем время, необходимое для перехода системы из положения, характеризуемого координатой  $x_{12}$ , в положение, соответствующее координате x=0:

$$t_2 = \frac{A_0}{(A - A_0) k_0}$$
.

Таким образом, частота свободных колебаний равна

$$k = \frac{2\pi}{t_1 + t_2} = \frac{k_0}{1 + \frac{2}{\pi (A/A_0 - 1)}}.$$

3. Приближенные способы. Из-за громоздкости интегралов, входящих в точную формулу (3.6), для определения частоты свободных колебаний часто пользуются приближенными способами. Конечно, их ценность несколько упала из-за возможностей, которые ныне предоставляют современные ЭВМ; однако эти способы до сих пор остаются весьма полезным средством для выявления общего характера зависимости частоты колебаний от их амплитуды, а также для прихидочных расчетов.

Рассмотрим несколько приближенных способов применительно к случаю симметричной характеристики F(q). Отметим, что некоторые из них разработаны для значительно более широкого круга задач, чем рассматриваемые в этом параграфе, и будут неоднократно встречаться в

последующем изложении.

Простейший способ. Наиболее прост, хотя не всегда достаточно точен, следующий прием. Примем, что колебания в нелинейной системе с симметричной характеристикой описываются законом

$$q = A \sin(kt + \alpha), \tag{3.11}$$

подобно тому как это происходит в линейных системах. Выражение (3.11) является точным решением только

тогда, когда характеристика F(q) линейна. В общем случае подстановка (3.11) в дифференциальное уравнение (3.1) не обращает его в тождество.

Отметим, что в моменты прохождения через положение равновесия уравнение (3.1) удовлетворяется выражением (3.11), и потребуем, кроме того, чтобы уравнение (3.1) удовлетворялось также в те моменты, когда обобщенная координата q достигает максимума, т. е. равна A. При этом обобщенное ускорение  $\ddot{q}$  также максимально по молулю:

$$\ddot{q}_{\max} = -Ak^2.$$

Следовательно, в указашные моменты должно выполняться равенство

$$-aAk^2 + F(A) = 0,$$

т. е.

$$k^2 = \frac{F(A)}{aA}. (3.12)$$

Последнее выражение позволяет легко получить достаточно правильное общее представление о связи частоты k с амплитудой A.

Так, если нелинейная характеристика имеет вид (3.7), то по формуле (3.12) найдем для частоты выражение

$$k = \sqrt{\frac{\overline{\beta}A^{2n-1}}{aA}} = \sqrt{\frac{\overline{\beta}}{a}} A^{n-1}$$

которое содержит верную степень амплитуды (см. точное решение (3.8)), но лишь приближенно определяет значение коэффициента при  $A^{n-1}$ ; если, например, n=2, то по формуле (3.8) найдем k=0.8472  $\sqrt{\frac{\beta}{a}}A$ , а по приближенной формуле  $k=\sqrt{\frac{\beta}{a}}A$  (ошибка составляет 18%).

Способ прямой линеаризации. Способ основан на непосредственной (прямой) замене нелинейной характеристики F(q) некоторым эквивалентным линейным выражением. Так, при симметричной характеристике вместо F(q) принимается

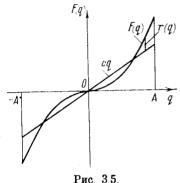
$$F_*(q) = cq, \tag{3.13}$$

где c — коэффициент линеаризации, значение которого подбирается из следующих соображений. Уклонение за-

меняющей характеристики (3.13) от заменяемой характеристики F(q) зависит от координаты q (рис. 3.5):

$$r(q) = F(q) - cq$$
.

В задачах о колебаниях, очевидно, более существенны уклопения r при больших значениях координаты q; поэтому в выражении интегрального уклонения естествен-



но «усилить» роль разностей *r* при бо́льших значениях координаты *q*. Примем за меру уклонения произведение

$$rq = [F(q) - cq]q$$

и рассмотрим интегральное квадратическое уклонение

$$S = \int_{-A}^{A} (rq)^2 dq,$$

Рис. 3.5. которое, очевидно, зависи

от выбора нараметра с. Для минимизации этого уклонения воспользуемся условием

$$\frac{dS}{dc} = 0, (3.14)$$

из которого и может быть найдено минимизирующее значение c. После этого задачу можно считать, в сущности, решенной, так как она приведена к линейному уравнению.

Итак, задача сводится к минимизации интеграла

$$S = \int_{-A}^{A} \{ [F(q) - cq] \, q \}^2 \, dq, \tag{3.15}$$

т. е. к определению минимизирующего значения с. Выполнив операции, указанные в (3.14) и (3.15), получим

$$c = \frac{5}{2A^5} \int_{-A}^{A} F(q) q^3 dq = \frac{5}{A^5} \int_{0}^{A} F(q) q^3 dq.$$
 (3.16)

Так, например, при характеристике (3.7) находим

$$c = \frac{5}{A^5} \int_0^A \beta q^6 dq = \frac{5}{7} \beta A^2.$$

Соответственно для частоты получится

$$k = 0.8452 \sqrt{\frac{\beta}{a}} A.$$

Погрешность этого результата составляет всего 0,23 %. Идею минимизации интегрального квадратического уклонения можно распространить и на случай несимметричных характеристик.

Метод гармонического баланса. Этот приближенный метод является одним из наиболее распространенных при решении многих нелипейных задач теории колебаний. Применительно к рассматриваемому здесь дифференциальному уравнению (3.1), когда F(q) = -F(-q), его простейший вариант состоит в следующем.

Как и выше, примем решение этого уравнения в виде (3.11) и подставим его в левую часть дифференциального уравнения (3.1). Второе слагаемое  $F[A\sin(kt+\alpha)]$  является периодической функцией периода  $2\pi/k$ , и его можно разложить в ряд Фурье. Сохранив в этом разложении один первый член, приближенно имеем

$$F[A\sin(kt+\alpha)] = b_1(A)\sin(kt+\alpha), \qquad (3.17)$$

где  $b_1$  — коэффициент Фурье, определяемый выражением

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad \psi = kt + \alpha. \quad (3.18)$$

Подстановка выражений (3.11) и (3.18) в уравнение (3.1) приводит к соотношению

$$-aAk^2 + b_1(A) = 0$$

из которого следует первое приближение для квадрата частоты:

$$k^2 = \frac{b_1(A)}{aA}. (3.19)$$

Пусть, например, функция F(q) определяется выраженнем (3.7). Тогда по формуле (3.18) находим

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \beta A^3 \sin^3 \psi \sin \psi \, d\psi = \frac{3}{4} \beta A^3,$$

т. е.

$$k^2 = 0.75 \frac{\beta}{a} A^2, \quad k = 0.8660 \sqrt{\frac{\beta}{a}} A$$

с ошибкой 2,2 %.

Метод медленно меняющихся амплитуд. Для того чтобы применить к рассматриваемой задаче изложенный выше метод медленно меняющихся амплитуд (см. стр. 50), нужно прежде всего выделить из заданной функции F(q) линейную часть cq (если функция F(q) чисто нелинейная, т. е. не содержит линейного слагаемого, то метод в принципе неприменим) и представить дифференциальное уравнение (3.1) в виде (2.32), положив

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{F(q)}{a} + k_0^2 q$$
 (3.20)

(здесь  $k_0^2 = c/a$  — квадрат собственной частоты линеаризованной системы). Далее образуются выражения (2.42):

$$\Phi(A) = -\int_{0}^{2\pi} \left[ -\frac{F(A\cos\psi)}{a} + k_0^2 A\cos\psi \right] \sin\psi \, d\psi, \quad (3.21)$$

$$\Psi(A) = \int_{0}^{2\pi} \left[ -\frac{F(A\cos\psi)}{a} + k_0^2 A\cos\psi \right] \cos\psi \,d\psi. \quad (3.22)$$

Рассматривая выражение (3.21), можно заметить, что под знаком интеграла перемножаются четная и нечетная функции угла  $\psi$ ; в заданном промежутке интегрирования эти функции ортогональны, так что  $\Phi(A) = 0$ . Отсюда, согласно первому уравнению (2.41), следует A = 0, или A = const - результат, который можно было предвидеть для рассматриваемой задачи о свободных колебаниях консервативной системы.

После того, как будет вычислено значение  $\Psi(A)$ , по второму выражению (2.41) образуется величина  $\phi$ . Важно отметить, что эта величина постоянная, так что  $\phi = \dot{\phi}t + \phi_0$  и аргумент в решении (2.34) принимает вид

$$\psi = k_0 t - \varphi = (k_0 - \dot{\varphi}) t - \varphi_0.$$

Таким образом, частота свободных колебаний заданной нелинейной системы определяется выражением

$$k = k_0 - \dot{\phi} = k_0 - \frac{\Psi(A)}{2\pi k_0 A}.$$
 (3.23)

Пример 3.3. Сопоставить с точным значением значения частоты свободных колебаний системы с зазором, найденные простейшим способом и способом прямой линеаризации (рис. 3.2, б). Характеристика системы описывается выражениями, данными в начале примера 3.2.

По простейшей формуле (3.12) находим

$$k^2 = k_0^2 \left( 1 - \frac{A_0}{A} \right), \tag{a}$$

где  $k_0^2 = c/m$ .

Для вычисления по способу прямой линеаризации пужно воспользоваться формулой (3.16), разделив область интегрирования

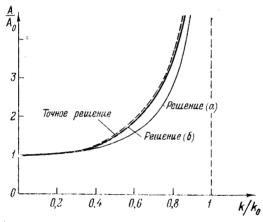


Рис. 3.6

при x>0 на два участка. На первом участке  $(0\leqslant x\leqslant A_0)$  F(x)=0 и интегрирование дает нуль. Поэтому

$$c = \frac{5}{A^5} \int_{A_0}^{A} c_0 (x - A_0) x^3 dx = c_0 \left( 1 - \frac{5A_0}{4A} + \frac{A_0^5}{4A^5} \right), \tag{6}$$

$$k^2 = k_0^2 \left( 1 - \frac{5A_0}{4A} + \frac{A_0^5}{4A^5} \right).$$

На рис. 3.6 показаны зависимости (a) и (б), а также найденпый в примере 3.2 результат гочного решения. Пример 3.4. Для системы с кубической характеристикой

$$F(q) = cq + \beta q^3$$

найти частоту свободных колебаний методами гармонического баланса и медленно меняющихся амплитуд.

Первое приближение по методу гармонического баланса найдем по выражению (3.19), подставив туда

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (cA \sin \psi + \beta A^3 \sin \psi) \sin \psi \, d\psi = cA + \frac{3}{4} \beta A^3.$$

Таким образом, получаем

$$k^2 = k_0^2 + \frac{3\beta A^2}{4a}.$$
 (a)

Для решения по методу медленно меняющихся амплитуд находим по выражению (3.22)

$$\Psi(A) = \int_{0}^{2\pi} \left( -\frac{\beta A^3 \cos^3 \psi}{a} \right) \cos \psi \, d\psi = -\frac{3}{4} \frac{\pi \beta A^3}{a}$$

и соответственно по выражению (3.23)

$$k = k_0 + \frac{3}{8} \frac{\beta A^2}{a k_0},$$

или

$$k^2 = k_0^2 + \frac{3\beta A^2}{4a} + \frac{9}{64} \frac{\beta^2 A^4}{a^2 k_0^2}.$$
 (6)

Как видно, результаты (a) и (b) совпадают с точностью до последнего слагаемого в выражении (b).

Здесь, кстати, отметим, что решение (б) становится очевидно ошибочным, если характеристика системы чисто нелинейная, т. е. когда c=0 и соответственно  $k_0=0$ . В этом можно видеть напоминание о том, что метод медленно меняющихся амплитуд в принципе применим только к системам с малыми нелинейностями.

## § 4. Линейные системы с несколькими степенями свободы

1. Способы составления дифференциальных уравнений движения. Наиболее общий вид дифференциальных уравнений движения может быть получен в форме уравнений Латранжа, которые при консервативных силах имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},\tag{4.1}$$

где T и II — кинетическая и потенциальная энергии,  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  — сбобщенные координаты и обобщенные скорости,  $j=1,\ 2,\ \ldots,\ s$  — номер координаты, s — число степеней своболы.

Из курса теоретической механики известно, что при малых движениях голопомной системы со стационарными связями около положения равновесия кинетическая и потенциальная энергии следующим образом выражаются через обобщенные координаты:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{s} c_{jk} q_j q_k.$$
 (4.2)

Здесь  $j=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ s;\ a_{jk}=a_{kj}$  — инерционные коэффициенты,  $c_{jk}=c_{hj}$  — квазиупругие коэффициенты, называемые также обобщенными коэффициентами жесткости.

If выражениям (4.2) можно прийти путем рассуждений, аналогичных изложенным выше при выводе выражений (1.4) и (1.8), относящихся к системе с одной степенью свободы.

Если соответствующее нулевым значениям координат положение равновесия устойчиво, то потенциальная энергия в этом положении имеет изолированный минимум, а второе из выражений (4.2) есть положительно определенная квадратичная форма. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства (критерий Сильвестра):

$$\begin{vmatrix} c_{11} > 0, & \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.3)$$

Применительно к системам с несколькими степенями свободы эти перавенства имеют тот же смысл, как и условие c>0 для системы с одной степенью свободы (см. § 1). При выполнении перавенств (4.3) система, выведенная из положения равновесия, совершает свободные колебания.

Подставив выражения (4.2) в уравнение (4.1), получим следующую систему линейных однородных диффе-

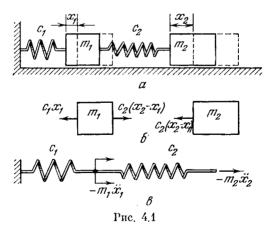
ренциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}q_k + c_{jk}q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$
 (4.4)

Конечно, фактическое составление системы уравнений (4.4) не обязательно вести по схеме Лагранжа. Во многих задачах о колебаниях удобно пользоваться более непосредственными способами — прямым и обратным.

Согласно прямому способу из системы выделяются сосредоточенные массы (или твердые тела) и каждая из них рассматривается как свободная материальная точка (или соответственно как свободное тело), находящаяся под действием позиционных (восстанавливающих) сил, которые выражаются через выбранные обобщенные координаты; после этого записываются соответствующие дифференциальные уравнения движения для материальных точек (или тел).

Обратный способ противоположен прямому: после отделения сосредоточенных масс (или твердых тел) рассматривается оставшаяся безынерционная система жестких и упругих связей, т. е. «безмассовый скелет» системы, который находится под действием кинетических



реакций отделенных частей системы, причем кинетические реакции (силы иперции) выражаются через обобщенные ускорения. Затем формулируются статические соотношения для перемещений безмассового (безынерционного) скелета системы.

Проследим особенности названных способов на примере системы с двумя степенями свободы, состоящей из двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных двумя пружинами, жесткости которых равны  $c_1$  и  $c_2$  (рис. 4.1).

За обобщенные координаты примем торизоптальные перемещения  $x_1$  и  $x_2$  грузов, отсчитывая эти перемещения от состояния равновесия, в котором пружины не деформированы. Удлинения пружин в процессе движения равны  $\Delta l_1 = x_1$ ,  $\Delta l_2 = x_2 - x_1$ .

Основной способ (уравнения Лагранжа). Прежде всего находим кинстическую энергию грузов

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}$$

и потенциальную эпергию деформации пружин

$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Далее образуем производные, необходимые для подстановки в уравнение Лагранжа (4.1):

$$\begin{split} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) &= m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \dot{x}_2, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} &= c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} &= c_2 (x_2 - x_1). \end{split}$$

Теперь записываем уравнения (4.1):

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0,$$
  
 $m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0.$  (4.5)

Прямой способ. Выделяем грузы и рассматриваем их жак свободные тела под действием сил упругости  $N_1$  и  $N_2$ , определяемых удлинениями  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  обеих пружин (рис. 4.1,  $\delta$ ):

$$N_1 = c_1 \Delta l_1 = c_1 x_1,$$
  
 $N_2 = c_2 \Delta l_2 = c_2 (x_2 - x_1).$ 

Дифференциальные уравнения движения грузов имеют вид

$$m_1\ddot{x}_1 = -N_1 + N_2,$$
  
 $m_2\ddot{x}_2 = -N_2.$ 

Подставив сюда выражения для сил  $N_1$  и  $N_2$ , приходим к ранее полученной системе уравнений:

$$m\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0,$$
  
 $m\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0.$ 

Обратный способ. Отделяем грузы и рассматриваем упругий безмассовый скелет системы под действием кинетических реакций  $-m_1\ddot{x}_1$  и  $-m_2\ddot{x}_2$  (рис. 4.1, в). В этой схеме первая пружина нагружена силой  $-m_1\ddot{x}_1-m_2\ddot{x}_2$ , а вторая пружина — силой  $-m_2\ddot{x}_2$ . Перемещение  $x_1$  конца первой пружины, равное ее удлинению, можно записать в виде

$$x_1 = \frac{\ddot{x_1} - m_2 \ddot{x_2}}{c_1}.$$

Перемещение правого копца второй пружины  $x_2$  равно сумме удлинений обеих пружин, т. е.

$$x_2 = \frac{\ddot{x_1} - \ddot{x_1} - \ddot{x_2}}{c_1} + \frac{\ddot{x_2}}{c_2}.$$

Из двух последних соотношений получаем

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + c_1 x_1 = 0,$$

$$\frac{c_2}{c_1} m_1 x_1 + m_2 \left( 1 + \frac{c_2}{c_1} \right) x_2 + c_2 x_2 = 0.$$
(4.6)

Полученные выше по основному и прямому способам формы записи совпали потому, что при нашем выборе обобщенных координат кинетическая энергия имеет каноническую форму:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} a_i \dot{q}_i^2, \tag{4.7}$$

т. е. не содержит произведений скоростей  $\dot{q}_i\dot{q}_k$  при  $j\neq k$ . При этом каждое из уравнений Лагранжа содержит только по одному обобщенному ускорению, как это получается и при пользовании прямым способом. Если обобщенные координаты были выбраны так, чтобы каноническую форму имела потепциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} c_i q_i^2, \tag{4.8}$$

то уравнения Лагранжа совпали бы с уравнениями, полученными с помощью обратного способа. Сопоставляя полученные варианты записи по прямому и обратному способам, можно сделать следующее общее заключение относительно структуры дифференциальных уравнений: при составлении системы уравнений по прямому способу  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , а при составлении по обратному способу  $c_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Таким образом, пользуясь прямым способом, мы приходим вместо (4.4) к системе

$$a_j q_j + \sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_k = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s), \quad (4.9)$$

а применяя обратный способ — к системе

$$\sum_{k=1}^{s} a_{jk}q_k + c_jq_j = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s)$$
 (4.10)

(вместо  $a_{ij}$  в уравнениях (4.7) и (4.9) записано  $a_{ij}$ , так как второй индекс становится лишним; аналогично, вместо  $c_{ij}$  в уравнениях (4.8) и (4.10) записано  $c_{ij}$ ).

Принципиально важно, что специальным выбором обобщенных координат можно придать каноническую форму как кинетической, так и потенциальной энергии. Такие координаты  $\xi_j$  ( $j=1, 2, \ldots, s$ ) называются нормальными или главными. При этом

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} a_{i} \dot{\xi}_{i}^{2}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} c_{i} \xi_{i}^{2}$$
 (4.11)

и уравнения Лагранжа приобретают наиболее простой вид

$$\ddot{a_i}\xi_i + c_j\xi_j = 0$$
  $(j = 1, 2, ..., s).$  (4.12)

Каждое из них интегрируется независимо от других. Короче говоря, при использовании главных координат система как бы представляет собой совокупность независимых парциальных систем с одной степенью свободы. Чаще всего заранее трудно указать, какие кинематические параметры (или их комбинации) являются главными координатами, и для перехода к ним требуются обширные выкладки, объем которых не уступает объему выкладок при решении задачи в произвольно принятых (не главных) обобщенных координатах. Поэтому введение понятия главных координат практически не облегчает решение задачи о свободных колебаниях, но весьма

полезно для углубленного понимания их закономерностей и для теоретического анализа.

Связь между вариантами записи (4.9) и (4.10) удобно проследить, исхдя из фундаментального соотношения, определяющего статические перемещения в упругой линейной системе общего вида

$$q_j = \sum_{k=1}^{s} \delta_{jk} F_k \quad (j = 1, 2, ..., s),$$
 (4.13)

в которой  $\delta_{\mathbb{A}}$  — коэффициент влияния для перемещений, т. е. значение *j*-й обобщенной координаты, соответствующее действию статически приложенной k-й обобщенной силы, равной единице (в строительной механике величины  $\delta_{j_k}$  называют единичными перемещениями). В матричной форме соотношения (4.13) имеют вид

$${q} = [\delta] {F},$$
 (4.14)

где

$$\{q\} = \begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{cases} \tag{4.15}$$

представляет собой матрицу-столбец (вектор) обобщенных координат,

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1s} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{sl} & \delta_{s2} & \dots & \delta_{ss} \end{bmatrix}$$
(4.16)

- матрицу коэффициентов влияния для перемещений,

$$\{F\} = \begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_s \end{cases} \tag{4.17}$$

матрицу-столбец (вектор) обобщенных сил.
 Введем матрицу

$$[\delta]^{-1} = [r] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{sl} & r_{s2} & \dots & r_{ss} \end{bmatrix}, \tag{4.18}$$

обратную матрице (4.16), и умножим слева матричное соотношение (4.14) на матрицу (4.18). Тогда получим  $[r]\{q\} = \{F\}.$  (4.19)

Для того чтобы выяснить физический смысл элементов  $r_{jk}$  матрицы (4.18), представим себе, что на все точки системы наложены дополнительные связи, обращающие в нуль все обобщенные перемещения, кроме перемещения  $q_k$ , причем последнему придано значение  $q_k = 1$ . Тогда  $r_{jk}$  представит собой реакцию j-й дополнительной связи, соответствующую перемещению  $q_k = 1$  (в строительной механике величины  $r_{jk}$  называют единичными реакциями).

Из соотношения (4.19) следуют дифференциальные уравнения прямого метода, а из соотношения (4.14) — уравнения обратного метода. В самом деле, в задачах о свободных колебаниях  $F_j = -m_j\ddot{q}_j$ , так что если ввести диагональную матрицу

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_s \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

то можно записать

$${F} = -[m] {\ddot{q}}.$$
 (4.21)

Подставляя (4.21) в (4.19), получим

$$[r] \{q\} = -[m] \{\ddot{q}\},$$
 (4.22)

т. е. уравнения типа (4.9); после подстановки (4.21) в (4.14) найдем

$$\{q\} = -[\delta][m]\{\ddot{q}\},$$
 (4.23)

т. е. уравнения типа (4.10).

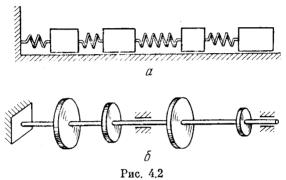
Хотя уравнения (4.9) и (4.10) в принципе эквивалентны, однако объемы операций, связанных с вычислением коэффициентов, могут оказаться различными.

Прямой способ особенно удобен для систем цепной структуры, если в таких системах упругие силы несложно выражаются через перемещения двух соседних тел. Таковы, например, системы, изображенные на рис. 4.2. Пусть  $q_j$  — обобщенная координата, представляющая горизонтальное перемещение j-то груза в схеме на

рис. 4.2, a или утловое перемещение j-го диска в схеме на рис. 4.2, 6. При этом сумму упругих сил, действующих на груз (рис. 4.2, a), или сумму упругих моментов, действующих на диск (рис. 4.2, 6), можно представить в единой форме:

$$Q_{j} = -c_{j}(q_{j} - q_{j-1}) + c_{j+1}(q_{j+1} - q_{j}), \qquad (4.24)$$

где  $c_i$  — жесткость упругой связи, расположенной между грузами (дисками) j-1 и  $j;\ c_{j+1}$  — жесткость упругой



связи, расположенной между грузами (дисками) *j* и *j* + 1. Соответственно дифференциальное уравнение движения *j*-го груза в схеме *a* имеет вид

$$m_j \dot{q}_j = -c_j (q_j - q_{j-1}) + c_{j+1} (q_{j+1} - q_j),$$
 (4.25)

т. е. соответствует форме (4.9). Таким же будет и дифференциальное уравнение движения j-го диска в схеме  $\delta$ , если заменить инерционный коэффициент  $m_j$  на момент инерции диска  $I_j$ .

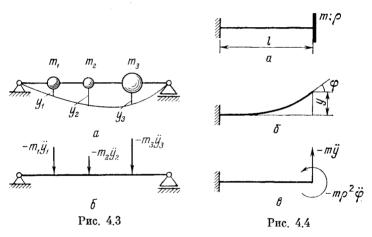
Отметим, что в каждом из уравнений (4.25) содержатся только по три неизвестные функции, а для крайних грузов (дисков) уравнение будет содержать только две неизвестные функции. При этом коэффициенты уравнения легко вычисляются по исходным данным задачи. Применение обратного способа в данном случае приводит к значительно более сложным уравнениям, так как число неизвестных функций, входящих в дифференциальные уравнения, возрастает с удалением от левого конца системы, и последнее уравнение содержит все в функций q<sub>j</sub>. При расчетах крутильных колебаний валов обычно пользуются прямым способом.

С другой стороны, для балочных систем с сосредоточенными массами удобнее обратный способ. Так, для системы, ноказанной на рис. 4.3, a, придем к кинетостатической схеме па рис. 4.3,  $\delta$ . В данном случае, пользуясь коэффициентами влияния  $\delta_{jk}$ , получаем уравнения типа (4.10):

$$y_{j} = -m_{1}\ddot{y}_{1}\delta_{j1} - m_{2}\ddot{y}_{2}\delta_{j2} - \ldots - m_{s}\ddot{y}_{s}\delta_{js} \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$
(4.26)

соответствующие матричному уравнению (4.23). Обратный способ особенно часто используется в динамике сооружений.

Пример 4.1. Составить дифферепциальные уравпения свободных колебаний консоли, песущей на свободном конце груз, обладающий конечным моментом инерции (рис. 4.4, a); считать, что



массой балки можно пренебречь по сравнению с массой груза. Обозначения: l — длина консоли, EJ — изгибная жесткость, m — масса груза,  $\rho$  — его радиус инерции.

Рассматриваемая система имеет две степени свободы, и за обобщенные координаты удобно выбрать прогиб у и угол поворота ф конца консоли (рис. 4.4, 6). Для составления дифферепциальных уравнений движения воспользуемся обратным способом и рассмотрим изгиб безыперционного скелета, показанного на рис. 4.4, в.

Впешними силами являются сила инерции груза — my и момент сил инерции —  $m\rho^2\phi$ . Тогда

$$y = -my\dot{\delta}_{11} - m\rho^2\phi\dot{\delta}_{12}, \ \phi = -my\dot{\delta}_{21} - m\rho^2\phi\dot{\delta}_{22}.$$

Коэффициенты влияния можно найти методами сопротивления ма-6 я, г, пановко териалов, например с помощью формулы Верещагина. В данном случае они выражаются следующим образом:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{8EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^2}{2EJ}, \quad \delta_{22} = \frac{l}{EJ}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$\label{eq:constraints} m\ddot{y}\frac{l^3}{3EJ} + m\rho^2\ddot{\phi}\frac{l^2}{2EJ} + y = 0, \quad m\ddot{y}\frac{l^2}{2EJ} + m\rho^2\ddot{\phi}\frac{l}{EJ} + \phi = 0.$$

Дальнейший апализ системы см. ниже, на стр. 86, 92 и 93.

2. Решение системы дифференциальных уравнений. Если условия (4.3) устойчивости состояния равновесия выполнены, то частное решение системы дифференциальных уравнений (4.26) можно записать в виде

$$q_j = A_j \sin(kt + \alpha)$$
  $(j = 1, 2, ..., s)$ . (4.27)

Этими выражениями описывается монотармонический колебательный режим с частотой k, общей для всех координат  $q_i$ .

Подставив (4.27) в уравнения (4.4), получим систему алгебраических уравнений

$$-k^{2}a_{11}A_{1} - k^{2}a_{12}A_{2} - \dots - k^{2}a_{1s}A_{s} + c_{11}A_{1} + c_{12}A_{2} + \dots + c_{1s}A_{s} = 0,$$

$$-k^{2}a_{21}A_{1} - k^{2}a_{22}A_{2} - \dots - k^{2}a_{2s}A_{s} + c_{21}A_{1} + c_{22}A_{2} + \dots + c_{2s}A_{s} = 0,$$

$$(4.28)$$

$$\begin{aligned} -k^2 a_{s1} A_1 - k^2 a_{s2} A_2 - \ldots - k^2 a_{ss} A_s + c_{s1} A_1 + \\ &+ c_{s2} A_2 + \ldots + c_{ss} A_s = 0, \end{aligned}$$

 $o\partial nopo\partial nyo$  относительно неизвестных амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_s$ . При колебаниях все они не могут равняться нулю; поэтому, согласно общему свойству однородных систем, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 & \dots & c_{1s} - a_{1s}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 & \dots & c_{2s} - a_{2s}k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{s1} - a_{s1}k^2 & c_{s2} - a_{s2}k^2 & \dots & c_{ss} - a_{ss}k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.29)$$

После развертывания определителя получится алгебраическое уравнение s-й степени относительно  $k^2$ ; напишем это частотное уравнение в виде

$$b_0 - b_1 k^2 + b_2 k^4 - b_3 k^6 + \dots + (-1)^s b_s k^{2s} = 0;$$
 (4.30)

при указанной расстановке знаков все коэффициенты  $b_j$  оказываются положительными. Число корней частотного уравнения равно s; эти корни, обозначаемые далее  $k_1^2$ ,  $k_2^2$ , ...,  $k_s^2$ , принято располагать в порядке возрастания. Для рассматриваемых систем, совершающих движение около состояния устойчивого равновесия, все эти корни вещественны и положительны \*). Таким образом, для частот k определяется s значений:

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_s,$$
 (4.31)

образующих спектр собственных частот системы. (Отрицательные корни можно не рассматривать, так как соответствующие им частные решения типа  $A'\sin(-kt)$  попросту сливаются с частными решениями  $A\sin(kt)$ 

Для системы с двумя степенями свободы частотное уравнение оказывается биквадратным:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) k^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12}) k^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) = 0, \quad (4.32)$$

и имеет два положительных корня  $k_1^2$  и  $k_2^2$ , лежащих в интервалах

$$0 < k_1^2 \leqslant \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} \leqslant k_2^2 < + \infty.$$

Если обобщенные координаты — главные, т. е. выбраны так, что  $a_{12}=0$ ,  $c_{12}=0$ , то корни частотного уравнения окажутся равными

$$k_1 = \sqrt{\frac{\overline{c}_{11}}{a_{11}}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\overline{c}_{22}}{a_{22}}}.$$

Вернемся к рассмотрению общего случая. Каждому корню  $k_i$  соответствует частное решение типа (4.27), следовательно, общее решение представит собой сумму

<sup>\*)</sup> Если после решения уравнения (4.30) выяснится противное, то это будет означать нарушение условий (4.3), т. е. неустойчивость состояния равновесия.

таких решений:

$$q_{j} = A_{j1} \sin(k_{1}t + \alpha_{1}) + A_{j2} \sin(k_{2}t + \alpha_{2}) + \dots$$
  
 
$$\dots + A_{js} \sin(k_{s}t + \alpha_{s}) \qquad (j = 1, 2, \dots, s),$$

где букве A теперь приписаны два индекса: первый попрежнему обозначает помер координаты, а второй — номер собственной частоты. Коротко решение можно записать в виде

$$q_j = \sum_{i=1}^{s} A_{ji} \sin(k_i t + \alpha_i)$$
  $(j = 1, 2, ..., s).$  (4.33)

Таким образом, как правило (т. е. при произвольных начальных условиях), изменение каждой из обобщенных координат следует полигармоническому закону, причем число гармонических составляющих равно числу степеней свободы системы. Отметим, что если собственные частоты несоизмеримы (как это нередко бывает в реальных задачах), то процесс, описываемый выражением (4.33), строго говоря, непериодический.

При близости хотя бы двух собственных частот общий закон движения оказывается весьма своеобразным. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, причем  $k_1 \approx k_2$ . Тогда, например, для первой обобщенной коорди-

наты имеем

$$q_1 = A_{11} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin(k_2 t + \alpha_2).$$
 (4.34)

Если ввести обозначения

$$B_{1,2} = \frac{1}{2} (A_{11} \cos \alpha_1 \pm A_{12} \cos \alpha_2),$$

$$B_{3,4} = \frac{1}{2} (A_{11} \sin \alpha_1 \pm A_{12} \sin \alpha_2),$$
(4.35)

то вместо (4.34) можно записать

$$q_1 = B_1 (\sin k_1 t + \sin k_2 t) + B_2 (\sin k_1 t - \sin k_2 t) + B_3 (\cos k_1 t + \cos k_2 t) + B_4 (\cos k_1 t - \cos k_2 t).$$
 (4.36)

Заменяя суммы и разности тригонометрических функций произведениями таких функций, получим

$$q_{1} = 2B_{1} \sin \frac{k_{1} + k_{2}}{2} t \cos \frac{k_{1} - k_{2}}{2} t + 2B_{2} \sin \frac{k_{1} - k_{2}}{2} t \times \times \cos \frac{k_{1} + k_{2}}{2} t + 2B_{3} \cos \frac{k_{1} + k_{2}}{2} t \cos \frac{k_{1} - k_{2}}{2} t - -2B_{4} \sin \frac{k_{1} + k_{2}}{2} t \sin \frac{k_{1} - k_{2}}{2} t. \quad (4.37)$$

Заметим, что функции аргумента  $\frac{k_1-k_2}{2}t$  меняются медленно по сравнению с функциями аргумента  $\frac{k_1+k_2}{2}t$ . Поэтому вместо (4.37) удобно записать

$$q_1 = D_1 \sin kt + D_2 \cos kt,$$
 (4.38)

где

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{4.39}$$

— среднее значение двух близких частот  $k_1$  и  $k_2,\,$ 

$$D_1 = 2\left(B_1 \cos\frac{\Delta k}{2} t - B_4 \sin\frac{\Delta k}{2} t\right),$$

$$D_2 = 2\left(B_2 \sin\frac{\Delta k}{2} t + B_3 \cos\frac{\Delta k}{2} t\right)$$
(4.40)

— медленно меняющиеся периодические функции времени; их частота  $\frac{\Delta k}{2} = \frac{k_1 - k_2}{2}$ .

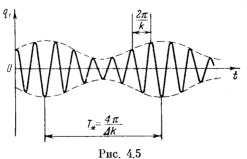
Окончательно находим вместо (4.34)

$$q_1 = A_* \sin(kt + \alpha_*),$$
 (4.41)

где

$$A_* = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad \alpha_* = \arctan \frac{D_1}{D_2}$$
 (4.42)

— медленно меняющиеся функции времени. Таким образом, движение носит синусоидальный характер с



периодически медленно меняющейся амплитудой; график этого движения показан на рис. 4.5. Период изменения амплитуды составляет

$$T_* = \frac{2\pi}{\Delta k/2} = \frac{4\pi}{k_1 - k_2} \tag{4.43}$$

и тем больше, чем ближе частоты  $k_1$  и  $k_2$ . Такие колебания называются биениями.

Движение, соответствующее второй обобщенной координате  $q_2$ , также представляет собой бисния, но сдвинутые по фазе относительно движения  $q_1$ .

Пример 4.2. Найти собственные частоты для системы, рассмотренной выше в примере 4.1.

Подставляя решение (4.27) в найденные рапее дифференциальные уравнения (стр. 82), получим однородную систему

$$\begin{split} \left(\frac{ml^3}{3EJ}\,k^2-1\right)A_1 + m\wp^2\,\frac{l^2}{2EJ}\,k^2A_2 &= 0,\\ \frac{ml^2}{2EJ}\,k^2A_1 + \left(\frac{m\wp^2l}{EJ}\,k^2-1\right)A_2 &= 0. \end{split}$$

Далее составляем определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{ml^3}{3EJ} k^2 - 1 & \frac{m\rho^2 l^2}{2EJ} k^2 \\ \frac{ml^2}{2EJ} k^2 & \frac{m\rho^2 l}{EJ} k^2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

после развертывания которого получим частотное уравнение

$$\frac{m^2 \rho^2 l^4}{12 (EJ)^2} k^4 - \left(\frac{m \rho^2 l}{EJ} + \frac{m l^3}{3EJ}\right) k^2 + 1 = 0.$$

Его корни (для  $\rho \ll l$ ) имеют вид

$$k_1^2 = \frac{3EJ}{ml^3} \left( 1 - \frac{9\rho^2}{4l^2} \right), \quad k_2^2 = \frac{9EJ}{ml^3} \left( 1 + \frac{4l^2}{9\rho^2} \right).$$

3. Собственные формы. Если вернуться к системе уравнений (4.28) и подставить в нее какой-либо i-й корень частотного уравнения, то одно из уравнений станет следствием остальных, т. е. независимых уравнений остается только s-1; сказанное вытекает из общих свойств однородных систем алгебраических уравнений. Эти уравнения связывают между собой s амплитуд  $A_{1i}, A_{2i}, \ldots, A_{si}$  и позволяют выразить все амплитуды через какую-либо одну из них, например через первую. Совокупность отношений

$$\varkappa_{2i} = \frac{A_{2i}}{A_{1i}}, \quad \varkappa_{3i} = \frac{A_{3i}}{A_{1i}}, \quad \dots, \quad \varkappa_{si} = \frac{A_{si}}{A_{1i}}$$
(4.44)

определяет относительные амплитуды рассматриваемой *i*-й гармоники, т. е. описывает конфигурацию системы в процессе свободных колебаний с *i*-й собственной частотой; эта конфигурация определена с точностью

до одного произвольного множителя, т. е. масштаб конфигурации остается неопределенным.

Такие конфигурации системы зависят только от свойств самой системы и называются собственными формами; каждому корню частотного уравнения соответствует своя собственная форма, определяемая отношениями (4.44), т. е. число собственных форм равно числу степеней свободы системы.

Величины  $\varkappa_{ji}$  пазываются коэффициентами собственных форм; они определяются только параметрами самой системы (коэффициенты формы не обязательно безразмерные величины, так как обобщенные координаты могут иметь различную размерность). Так как общий масштаб каждой из собственных форм произвольный, можно один (любой) коэффициент формы положить равным единице. Число остальных коэффициентов  $\varkappa_{ji}$  равно s-1 для каждой собственной формы, т. е. составляет s(s-1) для всех собственных форм.

Общее решение (4.33) с помощью коэффициентов формы записывается в виде

$$q_{j} = \sum_{i=1}^{s} \kappa_{ji} A_{1i} \sin(k_{i}t + \alpha_{i})$$

$$(j = 1, 2, ..., s, \kappa_{1i} = 1; i = 1, 2, ..., s), \quad (4.45)$$

т. е. содержит 2s постоянных (s амплитуд  $A_{1i}$  и столько же начальных фаз  $\alpha_i$ ); для определения этих постоянных служат 2s начальных условий, выражающих значения обобщенных координат и обобщенных скоростей в начальный момент.

Если подставить какое-либо i-е частное решение в систему (4.9), то получим следующие соотношения:

$$-a_j k_i^2 \kappa_{ji} + \sum_{r=1}^s c_{jr} \kappa_{ri} = 0$$
 (4.46)

$$(j = 1, 2, ..., s; i = 1, 2, ..., s).$$

Апалогично, после подстановки *i*-го частного решения в систему (4.10) найдем

$$-k_i^2 \sum_{r=1}^s a_{jr} \varkappa_{ri} + c_j \varkappa_{ji} = 0$$

$$(4.47)$$

$$(j = 1, 2, ..., s; i = 1, 2, ..., s).$$

Эти соотношения будут использованы ниже, в п. 3 § 8.

Пример 4.3. Найти собственные частоты и собственные формы для системы, показанной на рис. 4.1, приняв для примера  $c_1 = c_2$ ,  $m_1 = m_2 = m$ . Подставим решения (4.27) в полученные выше дифференциальные уравнения (4.5), положив  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ ; тогда получим

$$(2c_0 - mk^2)A_1 - c_0A_2 = 0,$$
  
-c\_0A\_1 + (c\_0 - mk^2)A\_2 = 0. (a)

Из равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} 2c_0 - mk^2 & -c_0 \\ -c_0 & c_0 - mk^2 \end{vmatrix} = 0$$

следует частотное уравпение

$$k^4 - 3 \frac{c_0}{m} k^2 + \frac{c_0^2}{m^2} = 0.$$

Отсюда находим два корпя:

$$k_{1,2}^2 = \frac{c_0}{2m} (3 \pm \sqrt{5}),$$

т. е.

$$k_1^2 = 0,382 \frac{c_0}{m}, \quad k_2^2 = 2,618 \frac{c_0}{m}.$$

Положив  $\varkappa_{11}=\varkappa_{12}=1$ , для определения остальных коэффициентов собственных форм воспользуемся нервым из уравнений (а) (то же можно получить и из второго уравнения):

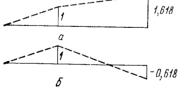


Рис. 4.6

$$\begin{split} \varkappa_{21} &= \frac{2c_0 - mk_1^2}{c_0} = 1,618, \\ \varkappa_{22} &= \frac{2c_0 - mk_2^2}{c_0} = -0,618. \end{split}$$

Соответствующие собственные формы показаны на рис. 4.6, *a*, *б*.

Полученные выше общие соотношения можно записать короче в матричной форме.

Вместо уравнения (4.4) имеем

$$[a] \{\ddot{q}\} + [c] \{q\} = 0,$$
 (4.48)

где  $\{q\}$  — матрица-столбец (4.15),

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}$$
(4.49)

- симметричная матрица инерционных коэффициентов,

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{bmatrix}$$
(4.50)

симметричная матрица коэффициентов жесткости.
 Решение уравнения (4.48) будем искать в виде

$${q} = {A} \sin(kt + \alpha),$$
 (4.51)

где

$$\{A\} = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{cases} \tag{4.52}$$

— матрица-столбец амплитуд. Подставляя (4.51) в (4.48), получаем матричное уравнение

$$-[a]\{A\}k^2 + [c]\{A\} = 0, (4.53)$$

т. е.

$$([c]-[a]k^2)\{A\}=0.$$
 (4.54)

Отсюда видно, что матрица-столбец  $\{A\}$  отлична от нуля только при условии

$$\det([c] - [a] k^2) = 0, \tag{4.55}$$

которое совпадает с частотным уравнением (4.29). Переинсав равенство (4.53) в виде

$$[a]^{-1}[c]{A} = k^2{A},$$
 (4.56)

вамечаем, что  $\{A\}$  является собственным вектором матрицы  $[a]^{-1}[c]$ , а  $k^2-$  собственным значением этой мат-

рицы.

4. Ортогональность собственных форм. Между амплитудами  $A_{rn}$  и  $A_{rm}$ , определяющими две какие-либо собственные формы (n и m), существует соотношение, выражающее важное свойство ортогональности собственных форм. Установим это соотношение исходя из общей формы уравнений (4.28) для амплитуд. При  $k^2 = k_n^2$  какаялибо j-я строка этой системы, записанная для n-й частоты, может быть представлена в виде

$$k_n^2 \sum_{r=1}^{s} a_{jr} A_{rn} = \sum_{r=1}^{s} c_{jr} A_{rn}$$
  $(j = 1, 2, ..., s)$ . (4.57)

Умножив равенство (4.57) на амплитуду  $A_{jm}$  и сложив все уравнения, получим

$$k_n^2 \sum_{j=1}^s A_{jm} \sum_{r=1}^s a_{jr} A_{rn} = \sum_{j=1}^s A_{jm} \sum_{r=1}^s c_{jr} A_{rn}, \qquad (4.58)$$

или, после изменения порядка суммирования в обеих частях равенства,

$$k_n^2 \sum_{r=1}^s A_{rn} \sum_{j=1}^s a_{jr} A_{im} = \sum_{r=1}^s A_{rn} \sum_{j=1}^s c_{jr} A_{jm}. \tag{4.59}$$

Так как  $c_{jr} = c_{rj}$ , можно записать

$$\sum_{j=1}^{s} c_{jr} A_{jm} = \sum_{j=1}^{s} c_{rj} A_{jm}.$$
 (4.60)

Но согласно (4.57)

$$\sum_{j=1}^{s} c_{rj} A_{jm} = k_m^2 \sum_{j=1}^{s} a_{rj} A_{jm}, \tag{4.61}$$

следовательно, соотношение (4.59) принимает вид

$$k_n^2 \sum_{r=1}^s A_{rn} \sum_{l=1}^s a_{jr} A_{jm} = k_m^2 \sum_{r=1}^s A_{rn} \sum_{j=1}^s a_{jr} A_{jm}$$
 (4.62)

(при записи правой части мы воспользовались равенством  $a_{rj} = a_{jr}$ ). Но, поскольку частоты  $k_n$  и  $k_m$  различны, из равенства (4.62) следует

$$\sum_{r=1}^{s} A_{rn} \sum_{j=1}^{s} a_{jr} A_{jm} = 0. {(4.63)}$$

Последиее соотношение выражает свойство ортогональности любых двух n-й и m-й собственных форм.

Свойство ортогональности, выраженное соотношением (4.63), формулируется более компактно в случаях, когда  $a_{jr}=0$  при  $j\neq r$ . Именно в такой форме обычно получаются инерционные коэффициенты при использовании прямого способа составления дифференциальных уравнений. При этом соотношение (4.63) упрощается и принимает вид (вместо  $a_{rr}$  достаточно писать  $a_r$ )

$$\sum_{r=1}^{8} a_r A_{rm} A_{rn} = 0. (4.64)$$

Согласно (4.59) вместо (4.63) можно также записать

$$\sum_{r=1}^{s} A_{rn} \sum_{j=1}^{s} c_{jr} A_{jm} = 0.$$
 (4.65)

Если  $c_{jr}=0$  при  $j\neq r$ , как это получается по обратному способу, то соотношение (4.65) упрощается:

$$\sum_{r=1}^{n} c_r A_{rm} A_{rn} = 0. {(4.66)}$$

Отметим, что любую конфигурацию системы можно разложить по собственным формам колебаний; это свойство окажется полезным при изучении вынужденных колебаний.

Пусть некоторая мгновенная конфигурация системы описывается совокупностью значений обобщенных координат  $B_1, B_2, \ldots, B_s$ ; для этих значений можно записать

$$B_j = d_1 A_{j1} + d_2 A_{j2} + \ldots + d_s A_{js} \ (j = 1, 2, \ldots, s)$$
 (4.67)

и рассматривать (4.67) как систему уравнений, определяющих коэффициенты линейного преобразования  $d_1, d_2, \ldots, d_s$ . Для того чтобы найти эти коэффициенты, нет необходимости решать систему (4.67), удобнее воспользоваться свойством ортогональности собственных форм. Имея в виду случаи, для которых указанное свойство формулируется в виде (4.65), умножим каждую строку системы (4.67) на соответствующее ее номеру j произведение  $a_j A_{jm}$  (m— номер искомого коэффициента  $d_m$ ), а затем сложим все строки. Тогда в левой части об-

разуется сумма  $\sum_{j=1}^{s} B_{j}a_{j}A_{jm}$ , а в правой части — сумма вида

$$d_1 \sum_{j=1}^{s} a_j A_{j1} A_{jm} + d_2 \sum_{j=1}^{s} a_j A_{j2} A_{jm} + \ldots + d_s \sum_{j=1}^{s} a_j A_{js} A_{jm}.$$

Согласно (4.65) среди этих членов отличен от нуля только член  $d_m \sum_{j=1}^s a_j A_{jm}^2$ , и в результате мы получаем компактное выражение

$$d_{m} = \frac{\sum_{j=1}^{s} a_{j} B_{j} A_{jm}}{\sum_{j=1}^{s} a_{j} A_{jm}^{2}}.$$
 (4.68)

Пример 4.4. Найти собственные формы для системы, рассмотренной в примерах 4.1 и 4.2.

Для определения собственных форм образуем отношение  $A_2:A_1$  из первого уравнения, данного в примере 4.2 (стр. 86):

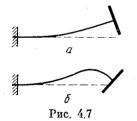
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1 - \frac{ml^3}{3EJ} k^2}{m\rho^2 \frac{l^2}{2EJ} k^2}.$$

Подставив сюда поочередно найденные выше значения  $k_1^2$  и  $k_2^2$ , получим

$$\mathbf{m_{21}} = \frac{A_{21}}{A_{11}} \approx \frac{3}{2l}, \quad \mathbf{m_{22}} = \frac{A_{22}}{A_{12}} \approx -\frac{2l}{3\rho^2}.$$

Эти отношения характеризуют обе собственные формы (рис. 4.7, a,  $\delta$ ). Как видно из рисунка, первая собственная форма характеризуется сравнительно малым углом поворота груза, а вторая форма — относительно небольшим прогибом конца.

Можно убедиться в ортогональности этих форм. Подставим в условие ортогональности (4.64)  $a_1 = m$ ,  $a_2 = m \rho^2$ , а также найденные отношения  $A_{21}/A_{11}$ ,  $A_{22}/A_{12}$ . Тогда



получим 
$$mA_{11}A_{12} + m\rho^2A_{21}A_{22} =$$

$$= {}^{mA_{11}A_{12}} \left[ 1 + \rho^2 \frac{3}{2l} \left( -\frac{2l}{3\rho^2} \right) \right] = 0.$$

5. Роль начальных условий. Для определения 2s постоянных, входящих в общее решение (4.45), ис-

пользуются значения обобщенных координат  $q_i(0)$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_i(0)$  в момент t=0. Подставив эти значения в общее решение (4.45) и в соответствующие выражения для скоростей, получим систему уравнений относительно постоянных  $A_{1i}$  и  $\alpha_i$ :

$$q_{j}(0) = \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{ji} A_{1i} \sin \alpha_{i},$$

$$\dot{q}_{j}(0) = \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{ji} A_{1i} k_{i} \cos \alpha_{i},$$

$$(j = 1, 2, ..., s).$$
(4.69)

Соотношения между амплитудами гармопических составляющих  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ , ...,  $A_{1s}$ , входящих в закон изменения любой координаты  $q_i$ , зависят от начальных условий.

При произвольно заданных начальных условиях изменение любой обобщенной координаты будет происходить по полигармоническому закону, так что отношения между обобщенными координатами будут непрерывно изменяться во времени. По этой причине экспериментальная запись (виброграмма, осциллограмма) реального процесса свободных колебаний, как правило, не представляет собой синусоиду, характерную для процесса свободных колебаний системы с одной степенью свободы. Однако при специальном выборе начальных условий можно добиться того, что движение будет описываться только какой-либо одной, например *r*-й, составляющей:

$$q_j = A_{jr} \sin(k_r t + \alpha_r)$$
  $(j = 1, 2, ..., s)$ . (4.70)

В этом случае отношения между обобщенными координатами будут оставаться неизменными во времени и соответствуют *r*-й собственной форме. В частности, для реализации этого *r*-го главного колебания достаточно, чтобы в начальный момент обобщенные скорости равнялись нулю, а обобщенным координатам были приданы значения, определяющие *r*-ю собственную форму.

Пример 4.5. Найти движение системы, рассмотренной в примере 4.1, если состояние равновесия парушается приложением к центру тяжести груза мгновенного импульса S.

В данном случае пачальные условия должны быть сформули-

рованы следующим образом:

$$y(0) = 0$$
,  $\dot{y}(0) = \frac{S}{m}$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

Общее решение имеет вид

$$y = A_{11} \sin (k_1 t + \alpha_1) + A_{12} \sin (k_2 t + \alpha_2),$$
  

$$\varphi = A_{21} \sin (k_1 t + \alpha_1) + A_{22} \sin (k_2 t + \alpha_2).$$

Подставляя сюда пайдепные в примере 4.4 отношения амплитуд, находим

$$\begin{split} y &= A_{11} \sin{(k_1 t + \alpha_1)} + A_{12} \sin{(k_2 t + \alpha_2)}, \\ \varphi &= \frac{3}{2l} A_{11} \sin{(k_1 t + \alpha_1)} - \frac{2l}{3\rho^2} A_{12} \sin{(k_2 t + \alpha_2)}. \end{split}$$

Для определения четырех неизвестных  $A_{11},\ A_{12},\ \alpha_1,\ \alpha_2$  используем указанные выше начальные условия:

$$\begin{split} A_{11} \sin \alpha_1 + A_{12} \sin \alpha_2 &= 0, \quad \frac{3}{2l} A_{11} \sin \alpha_1 - \frac{2l}{3\rho^2} A_{12} \sin \alpha_2 &= 0, \\ A_{11} k_1 \cos \alpha_1 + A_{12} k_2 \cos \alpha_2 &= \frac{S}{m}, \quad \frac{3}{2l} A_{11} k_1 \cos \alpha_1 - \frac{2l}{3\rho^2} A_{12} k_2 \cos \alpha_2 &= 0 \end{split}$$

Отсюда находим

$$A_{11} = \frac{Sl^2}{\sqrt{3mlEJ}}, \quad A_{12} = \frac{9S\rho^2}{8l\sqrt{mlEJ}}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

Следовательно, движение описывается уравнениями

$$\begin{split} y &= \frac{Sl^2}{\sqrt{m l E J}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin k_1 t + \frac{9}{8} \frac{\rho^3}{l^3} \sin k_2 t \right], \\ \varphi &= \frac{Sl}{\sqrt{m l E J}} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin k_1 t - \frac{3}{4} \frac{\rho}{l} \sin k_2 t \right] \end{split}$$

и посит двухчастотный характер.

6. Случан кратных и нулевых корней. До сих пор, говоря о корнях частотного уравнения, мы считали их простыми и не равными нулю. Однако в некоторых случаях частотное уравнение может иметь как нулевые, так и кратные корни.

Убедимся в возможности этого на примере механической системы с двумя степенями свободы. Из частотного уравнения (4.32) непосредственно видно, что при выполнении равенства

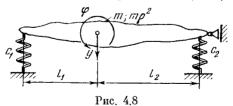
$$(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})^2 =$$

$$= 4\left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right)\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) (4.71)$$

два корня частотного уравнения будут равны друг другу, а при выполнении равенства

$$c_{11}c_{22} = c_{12}^2 (4.72)$$

один из корней частотного уравнения обращается в нуль. Не следует думать, что равенства (4.71) или (4.72)



выполняются при каких-то исключительных обстоятельствах; в действительности системы с кратными или нулевыми корнями встречаются довольно часто.

В качестве примера рассмотрим свободные колебания плоской системы с двумя степенями свободы, показанной на рис. 4.8. Обозначим через  $c_1$  и  $c_2$  коэффициенты жест-

кости пружин, а через *т* и р — массу и радиус инерции тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости чертежа через центр тяжести. За обобщенные координаты примем вертикальное перемещение центра тяжести тела *у* и угол поворота тела ф. Тогда кинетическая и потенциальная энергии запишутся в виде

$$\begin{split} T &= \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2), \\ \Pi &= \frac{c_1 (y + l_1 \varphi)^2}{2} + \frac{c_2 (y - l_2 \varphi)^2}{2}. \end{split}$$

Соответственно этому уравнения Лагранжа принимают форму

$$m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y + (c_1l_1 - c_2l_2)\varphi = 0,$$

$$m\rho^2\ddot{\varphi} + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\varphi + (c_1l_1 - c_2l_2)y = 0.$$
(4.73)

Теперь предположим, что параметры рассматриваемой системы удовлетворяют двум простым (и реально осуществимым) соотношениям:

$$c_1 l_1 = c_2 l_2, \quad \rho^2 = l_1 l_2;$$
 (4.74)

тогда вместо полученных дифференциальных уравнений имеем

$$m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y = 0,$$
  
 $m\varphi + (c_1 + c_2)\varphi = 0.$  (4.75)

Следовательно, инерционные коэффициенты и обобщенные коэффициенты жесткости в данном случае определяются формулами

$$a_{11} = a_{22} = m,$$
  $a_{12} = a_{21} = 0,$   
 $c_{11} = c_{22} = c_1 + c_2,$   $c_{12} = c_{21} = 0$ 

и условие (4.71) выполняется, т. е. обе частоты рассматриваемой системы равны одна другой. Впрочем, это видно непосредственно из уравнений (4.75), так как

$$k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\overline{c_1 + c_2}}{m}}.$$

Ввиду независимости уравнений (4.75) постоянные интегрирования одного уравнения не связаны с постоянными

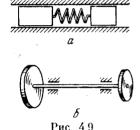
интегрирования другого уравнения:

$$y = A_1 \sin(kt + \alpha_1),$$
  

$$\varphi = A_2 \sin(kt + \alpha_2).$$

Для определения постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  служат четыре начальных условия.

В общей теории линейных дифференциальных уравнений устанавливается, что обычно (но не всегда!) при кратных корнях характеристического уравнения в решении возникают слагаемые типа  $t \sin kt$  и  $t \cos kt$ . жащие аргумент вне знаков тригонометрических функций: в наших задачах этим корням соответствовали бы



чининини нарастающие колебания. Однако в рассматриваемых здесь случаях свопининини бодных колебаний консервативных систем такие слагаемые явиться не могут - это противоречило бы справедливому для таких систем закону сохранения механической энергии (тем более это относится к диссипативным системам).

> Простые примеры систем с одной нулевой собственной частотой пока-

заны на рис. 4.9, а, б. Подробнее остановимся на системе, изображенной на рис. 4.9,  $\sigma$  и обозначим:  $\sigma$  — жесткость вала на кручение \*),  $\sigma$  и обозначим:  $\sigma$  — моменты инерции дисков относительно продольной оси системы.

Принимая за обобщенные координаты углы поворота ф1 и ф2 дисков относительно некоторого начального положения (в этом положении вал не закручен), получим следующие выражения для кинетической и потенциальной энергии системы:

$$T = \frac{I_1 \dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\phi}_2^2}{2}, \quad \Pi = \frac{c \ (\phi_2 - \phi_1)^2}{2}.$$

Соответственно этому уравнения Лагранжа имеют вил

$$I_1\varphi_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$$
  
 $\vdots$   
 $I_2\varphi_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0,$  (4.76)

<sup>\*)</sup> В сопротивлении материалов устанавливается:  $c = G J_p/l$ , где G — модуль сдвига,  $J_p$  — полярный момент внерции сечения вала, l — длина вала.

T. e.

$$a_{11} = I_1, \ a_{22} = I_2, \ a_{12} = a_{21} = 0,$$
  
 $c_{11} = c_{22} = c, \ c_{12} = c_{21} = -c.$ 

При этом выполняется условие (4.72) и один из корней частотного уравнения равен нулю. Действительно, подставив найденные значения коэффициентов в частотное уравнение, получим

$$-(I_1c+I_2c)k^2+I_1I_2k^4=0,$$

отсюда

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \sqrt{c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}.$$
 (4.77)

Для того чтобы понять физический смысл нулевой частоты, вернемся к системе дифференциальных уравнений (4.76). Их главная особенность состоит в том, что опи допускают не только частное решение колебательного типа

$$\varphi_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), 
\varphi_2 = A_2 \sin(kt + \alpha),$$
(4.78)

но также частное решение вида

$$\varphi_1=\varphi_2=C_1+C_2t,$$

которое описывает равномерное вращение всей системы как жесткого целого (без скручивания упругого вала). Этому частному решению и соответствует нулевой корень частотного уравнения  $k_1 = 0$ .

Частному решению (4.78) соответствует отличная от нуля частота  $k_2$ , данная в формуле (4.77), а также определенное отношение амилитуд колебательного движения

$$\mathbf{x}_{21} = \frac{A_2}{A_1} = -\frac{I_1}{I_2}.$$

Таким образом, общее решение представляется в виде

$$\varphi_1 = A_1 \sin(kt + \alpha) + C_1 + C_2 t, 
\varphi_2 = \kappa_{21} A_1 \sin(kt + \alpha) + C_1 + C_2 t$$
(4.79)

и содержит четыре постоянные:  $A_1$ ,  $\alpha$ ,  $C_1$  и  $C_2$ , определяемые из начальных условий.

Движение, описываемое законом (4.79), представляет собой колебания, наложенные на режим равномерно-

го вращения. Чисто колебательную составляющую движения легко выделить путем введения новой переменной

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

которая представляет взаимный угол поворота дисков, т. е. угол закручивания вала. Если теперь записать уравнения (4.76) в виде

$$\begin{split} & \overset{\cdots}{\varphi_{1}} - \frac{c}{I_{1}} (\varphi_{2} - \varphi_{1}) = 0, \\ & \overset{\cdots}{\varphi_{2}} + \frac{c}{I_{2}} (\varphi_{2} - \varphi_{1}) = 0 \end{split}$$

и затем вычесть первое уравнение из второго, то получим  $o\partial ho$  дифференциальное уравнение для функции  $\phi$ :

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{c}{I_1} + \frac{c}{I_2}\right) \varphi = 0.$$

Отсюда видно, что колебания угла ф следуют одночастотному закону

$$\varphi = A \sin(kt + \alpha).$$

Можно сказать, что рассматриваемая система имеет одну степень свободы, которой соответствует вращение системы как жесткого тела, и одну колебательную степень свободы. Аналогично, в более сложном случае, когда с валом связано *s* дисков, число колебательных степеней свободы равно *s*— 1.

7. Влияние трения. Дифференциальные уравнения движения изменятся, если учесть, что при колебаниях механической системы возникают силы трения. В случаях, когда они линейно зависят от скоростей точек системы, дифференциальные уравнения движения вместо (4.4) примут вид

$$a_{j1}\ddot{q}_1 + a_{j2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{js}\ddot{q}_s + b_{j1}\dot{q}_1 + b_{j2}\dot{q}_2 + \dots + b_{js}\dot{q}_s + c_{j1}q_1 + c_{j2}q_2 + \dots + c_{js}q_s = 0 \quad (j = 1, 2, ..., s) \quad (4.80)$$

или, в матричной форме,

$$[a] \{\ddot{q}\} + [b] \{\dot{q}\} + [c] \{q\} = 0,$$
 (4.81)

где матрицы [a] и [c] определяются выражениями

(4.49) m (4.50), a

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} \end{bmatrix}$$
(4.82)

— матрица демпфирования.

Решение уравнений (4.80) следует искать в форме, отличающейся от (4.27), а именно

$$q_j = A_j e^{\lambda t}$$
  $(j = 1, 2, ..., s).$  (4.83)

После подстановки (4.83) в (4.80) получится однородная система алгебраических уравнений относительно  $A_i$ ; в матричной форме эта система имеет вид

$$([a]\lambda^2 - [b]\lambda + [c]) \{A\} = 0.$$
 (4.84)

Для того чтобы все  $A_i$  одновременно не обращались в нуль, необходимо, чтобы равнялся нулю определитель системы (4.84); это приводит к характеристическому уравнению

$$\det([a]\lambda^2 + [b]\lambda + [c]) = 0. \tag{4.85}$$

Если все элементы матрицы (4.82) положительные, то вещественные части всех корней характеристического уравнения — отрицательны. При этом среди корней уравнения (4.85) могут оказаться отрицательные вещественные корни, каждому из которых согласно (4.83) соответствует монотонное затухающее движение неколебательного характера. Наряду с этим среди корней могут оказаться и комплексные сопряженные корни вида  $\lambda = -\alpha + i\beta$ ,  $\lambda' = -\alpha - i\beta$  ( $\alpha > 0$ ). Им соответству-

ет затухающее колебательное движение, описываемое выражением

$$q_{h} = e^{-\alpha t} (B_{h} \cos \beta t + C_{h} \sin \beta t).$$
(4.86)

Общее решение (4.80) получится как результат наложения всех частных решений.

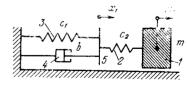


Рис. 4.10

Пример 4.6. Показанная на рис. 4.10 система состоит из способного перемещаться по горизонтали груза *I* массы *m*, двух упругих пружин 2 и 3 с коэффициентами жесткости  $c_2$  и  $c_1$  и линейного демпфера 4, характеризуемого коэффициентом вязкости b. Найти общий характер движения системы, которое возникнет по-

сле нарушения состояния равновесия груза. Пластинку 5 считать безынерционной.

Обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  отклонения пластинки и груза от положения равновесия. Тогда пля пластинки имеем

$$-c_1x_1-b\dot{x}_1+c_2(x_2-x_1)=0, (a)$$

для груза ---

$$-c_2(x_2-x_1) = mx_2. (6)$$

Полагая  $x_1 = A_1 e^{\lambda t}$ ,  $x_2 = A_2 e^{\lambda t}$ , получаем однородную систему  $(c_1 + c_2 + b\lambda)A_1 - c_2A_2 = 0$ ;  $-c_2A_1 + (c_2 + m\lambda^2)A_2 = 0$ .

Приравняв нулю определитель

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 + b\lambda & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + m\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

придем к характеристическому уравнению

$$mb\lambda^3 + m(c_1 + c_2)\lambda^2 + bc_2\lambda + c_1c_2 = 0.$$
 (B)

К тому же результату можно было прийти, если исключить координату  $x_1$  из уравнений (a) и (б) и записать уравнения третьего порядка для  $x_2$ :

$$mbx_2 + m(c_1 + c_2)x_2 + bc_2x_2 + c_1c_2x_2 = 0.$$
 (r)

Соответственно порядку уравнения (в) рассматриваемую механическую систему можно назвать системой с 11/2 степенями свободы (представление о нецелом числе степеней свободы было введено А. А. Андроновым и относится к вырожденным системам. В нашем примере достаточно было учесть массу пластинки 5, чтобы система дифференциальных уравнений имела четвертый порядок; такая механическая система обладает двумя степенями свободы).

Среди корней характеристического уравнения (в) по крайней мере один окажется вещественным отрицательным. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим левую часть уравнения. При  $\lambda=0$  она, очевидно, положительная, а при достаточно больших отрицательных значениях  $\lambda$  она становится отрицательной. Следовательно,

должен существовать корепь  $\lambda_1 = -\alpha_1$   $(\alpha_1 > 0)$ .

После того как этот корень найден (для вычисления достаточно самой простой ЭВМ), нужно левую часть уравнения (в) разделить на разность  $\lambda - \lambda_1$  и решить полученное таким образом квадратное уравнение. При этом найдутся два остальных корня, в общем случае комплексных, вида  $\lambda_{2,3} = -\alpha_2 \pm i\beta$  ( $\alpha_2 > 0$ ).

Таким образом, движение груза описывается выражением

$$x_1 = A_{11}e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} (A_{12} \sin \beta t + A_{13} \cos \beta t),$$

содержащим три постоянные. Для их нахождения необходимо указать три начальных условия, определяющих  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  и  $\dot{x}_2(0)$  в начальный момент времени. (Отметим, что начальное значение  $\dot{x}_1(0)$  независимо задать нельзя— опо определяется из соотношения (a).)

## Глава II

## вынужденные колебания

- § 5. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии трения
- 1. Основное уравнение при силовом возбуждении. Рассмотренные в главе I механические системы характеризуются действием позиционных сил, а в некоторых случаях также диссипативных сил. Эти силы не только влияют на движение системы, но и сами управляются этим движением, поскольку они зависят от обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Как указывалось во введении, иную важную категорию образуют выпуждающие силы, т. е. силы внешнего происхождения, описываемые заданными функциями времени и не зависящие от движения системы. Колебания, вызываемые вынуждающими силами, называются выпужденными. Независимо от физической природы выпуждающих сил мы будем исходить из того, что каждая из них задана в виде некоторой явной функции времени:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(t), \tag{5.1}$$

где  $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$  — порядковый номер материальной точки.

Если механическая система имеет одну степень свободы и приложенные к точкам системы внешние силы заданы в виде (5.1), то обобщенная вынуждающая сила определяется из выражения возможной работы

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i} \delta \mathbf{r}_{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i} \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q} \delta q$$
 (5.2)

в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{i} \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial q}.$$
 (5.3)

Соответственно уравнение Лагранжа принимает вид (при отсутствии трения)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q(t). \tag{5.4}$$

Подставляя сюда выражения (1.4) и (1.8) для кинетической и потенциальной энергии, приходим к дифференциальному уравнению задачи о вынужденных колебаниях

$$a\ddot{q} + cq = Q(t), \tag{5.5}$$

которое будем записывать в виде

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{Q(t)}{a}. ag{5.6}$$

Здесь через  $k^2 = c/a$  по-прежнему обозначен квадрат собственной частоты рассматриваемой системы.

Рассмотрим, например, действие горизонтальной силы P(t) на маятник (рис. 5.1, a). Примем за обобщенную

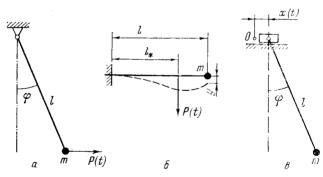


Рис. 5.1

координату угол  $\phi$  отклонения маятника от вертикали и обозначим через m массу маятника, а через l — его длину. Тогда при малых углах отклонения

$$T = \frac{m (l\dot{\varphi})^2}{2}, \quad \Pi = \frac{mgl\varphi^2}{2}, \quad Q = P(t) l$$
 (5.7)

и уравнение вынужденных колебаний (5.6) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{P(t)}{ml}.$$
 (5.8)

Иногда удобнее составлять дифференциальное уравнение вынужденных колебаний по описанным выше прямому или обратному способам. Пусть, например, в точке  $x=l_*$  балки приложена вынуждающая сила P(t) (рис. 5.1,  $\delta$ ); будем считать, что массой балки можно пренебречь по сравнению с массой m сосредоточенного груза, закрепленного на конце балки x=l. Для составления дифференциального уравнения колебаний удобно воспользоваться обратным способом. Рассматривая балку под действием силы P(t) и силы инерции —  $m\ddot{y}$ , можем записать

$$y = P(t) \delta(l, l_*) - my \delta(l, l),$$

где  $\delta(l, l_*)$  и  $\delta(l, l)$ — соответствующие коэффициенты влияния, определяемые методами теории сопротивления материалов,

$$\delta\left(l,\ l_{*}\right) = \frac{(3l-\ l_{*})l_{*}^{2}}{6EJ}, \quad \delta\left(l,\ l\right) = \frac{l^{3}}{3EJ^{\bullet}}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний груза запишется в виде

$$\frac{ml^3}{3EJ} \ddot{y} + y = \frac{P(t)(3l - l_*) l_*^2}{6EJ}.$$

Вынужденные колебания балки возникнут и в том случае, когда вертикальная сила не меняется по модулю  $(P=\mathrm{const})$ , но точка ее приложения движется вдоль балки. При этом абсцисса  $l_*$ , а вместе с этим и коэффициент влияния  $\delta\left(l,\,l_*\right)$  становятся функциями времени, так что дифференциальное уравнение принимает вид (если  $l_*=vt$ ):

$$\frac{ml^3}{3EJ}\ddot{y} + y = \frac{P(3l - vt)v^2t^2}{6EJ}.$$
 (5.9)

Решение этого уравнения см. ниже в примере 5.5.

2. Случаи кинематического возбуждения. К дифференциальному уравнению (5.6) сводятся не только задачи о силовом возбуждении, но также задачи о кинематическом возбуждении, когда колебания механической системы вызываются некоторым заданным (в частности, колебательным) движением каких-либо ее точек.

Так, например, если к грузу маятника не приложена сила, но ось шарнира обладает горизонтальной подвиж-

ностью и ей заданы колебания x = x(t), то они вызовут колебания и самого маятника (рис. 5.1, в). Для того чтобы получить дифференциальное уравнение абсолютного движения, запишем (сравнить с выражениями (5.7)):

$$T = \frac{m (\dot{x} + l\dot{\phi})^2}{2}, \quad \Pi = \frac{mgl\phi^2}{2}, \quad Q = 0;$$
 (5.10)

отсюда для угла ф следует уравнение Лагранжа

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = -\frac{\ddot{x}}{l}. \tag{5.11}$$

Как видно, оно совпадает с основным дифференциальным уравнением (5.8), составленным для случая силового возбуждения, если ввести эквивалентную вынуждающую силу  $Q(t) = -m\ddot{x}$ .

Возможна несколько иная трактовка этой задачи, если рассматривать движение маятника как сложное, состоящее из заданного поступательного переносного движения вместе с шарниром и искомого относительного вращательного движения. Дифференциальное уравнение относительного движения следует составлять с учетом переносной силы инерции  $-m\ddot{x}$ , момент которой составляет  $-ml\ddot{x}$ . При этом придем к уравнению моментов

$$-mgl\varphi - ml\ddot{x} = ml^2\varphi, \qquad (5.12)$$

которое совпадает с уравнением (5.11).

Формально системы, показанные на рис. 5.1, a, b, обладают различным числом степеней свободы, так как положение системы на рис. 5.1, b определяется двумя координатами — углом b и линейным перемещением b. Но координата b0 задана, она не «свободная», так что второй степенью свободы система в сущности не обладает; «свободной» координатой, b1. е. неизвестной функцией времени, является только угол отклонения b2 и, как мы видели, для его определения достаточно одного дифференциального уравнения (b3.6).

Конечно, в этой задаче можно составить и второе уравнение Лагранжа, соответствующее координате х. Из такого уравнения определяется приложенная к оси шарнира сила, необходимая для создания заданного движения шарнира: впрочем, вопрос об опреде-

лении этой силы может и не возникать.

На рис. 5.2 показаны еще два примера систем с кинематическим возбуждением колебаний. В первом случае вертикальные колебания упруго подвешенного груза 1 вызываются заданными вертикальными колебаниями платформы 2; во втором случае крутильные колебания

диска 1 возникают из-за вращательных колебаний опорного диска 2, которые здесь считаются заданными.

В подобных случаях удобнее составлять дифференциальные уравнения относительного движения тел, обо-

значенных на рисунках цифрами *I*. Результаты решения такой задачи позволяют сразу определить усилия в упругих элементах.

Пример 5.1. Составить дифференциальное уравнение вертикальных колебаний упруго подрессоренного груза при безотрывном движении колеса по неровному участку пути (рис. 5.3). Профиль участка задан уравнением

$$y = h(1 - e^{-\gamma x}),$$

где h — предел, к которому стремится высота неровности;  $\gamma$  — параметр, характеризующий кривизну профиля. Кроме того, дано:

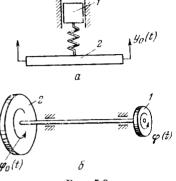


Рис. 5.2

m — масса груза, l — высота расположения центра тяжести груза при его относительном покое, c — коэффициент жесткости упругой подвески, v — постоянная горизонтальная скорость груза. Размерами колеса пренебречь.

Рассмотрим движение груза относительно поступательно движущихся осей  $\xi$ ,  $\eta$ , которые жестко связаны с центром колеса. Ось  $\xi$  совместим с вертикальной осью подвески, а горизонтальную

ось η проведем на высоте *l*, считая от уровня профиля. Тогда при движении по неровности абсолютная вертикальная координата начала подвижной координатной системы определяется выражением

$$y_* = h(1 - e^{-\gamma x}) + l.$$

Подставляя сюда x=vt и дважды дифференцируя по времени, находим переносное вертикальное ускорение

$$w_e = -h\gamma^2 v^2 e^{-\gamma vt}$$

и переносную силу иперции упруго подрессоренного груза $I_e = mh\gamma^2 v^2 e^{-\gamma vt}.$ 

Дифференциальное уравнение отпосительного движения груза имеет вид

$$m\eta = -c\eta + mh\gamma^2 v^2 e^{-\gamma vt};$$

приводя его к форме (5.6), имеем

$$\ddot{\eta} + k^2 \eta = h \gamma^2 v^2 e^{-\gamma v t}.$$

Решение этого уравнения см. ниже в примере 5.4 (стр. 114-115).

3. Действие гармонической вынуждающей силы. Обратимся теперь к решению основного дифференциального уравнения (5.6) и начнем со случая, когда обобщенная

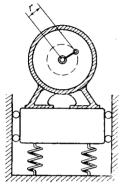


Рис. 5.4

вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону. Такова, например, переменная сила, передаваемая на фундамент машиной с неуравновешенным ротором (рис. 5.4). При надлежащем выборе начала отсчета времени этот закон можно записать в виде

$$Q = H \sin \omega t$$

где Н и ю — амплитуда и частота вынуждающей силы. Следует иметь в виду, что во многих случаях (к ним относится и показанный на рис. 5.4) амплитуда вынуждающей

силы связана с ее частотой. Решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{H}{a} \sin \omega t \tag{5.13}$$

состоит из двух частей: 1) решения однородного уравнения  $\ddot{q}+k^2q=0$ , а именно:  $C_1\sin kt+C_2\cos kt$ ; 2) частного решения уравнения (5.13), которое при  $\omega\neq k$  следует искать в виде  $A\sin\omega t$ . Подставив это выражение в (5.13), найдем, что  $A=\frac{H}{a(k^2-\omega^2)}\sin\omega t$ . Таким образом, решение уравнения (5.13) при произвольных начальных условиях имеет вид

$$q = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

В случае нулевых начальных условий, полагая q(0) = 0,  $\dot{q}(0) = 0$ , получаем

$$C_1 = -\frac{\omega H}{ak(k^2 - \omega^2)}, \quad C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$q = \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right). \tag{5.14}$$

Полученное решение представляет разность двух гармонических составляющих с различными частотами. В действительности этот процесс можно наблюдать лишь в самом начале, так как неучтенные при составлении уравнения силы трения вызывают постепенное затухание колебаний с собственной частотой k (см. ниже § 6). Поэтому по истечении некоторого времени колебания становятся практически моногармоническими с частотой  $\omega$ .

Если частоты  $\omega$  и k близки между собой, то возникнут биения, как и всегда при сложении двух гармонических колебаний (см. § 4, рис. 4.5); однако и в этом случае с течением времени и постепенным исчезновением одной из гармоник (с частотой k) движение будет все больше приближаться к моногармоническому с частотой  $\omega$ .

Таким образом, наиболее существенная, стационарная часть процесса (установившиеся вынужденные колебания) описывается первым членом выражения (5.14)

$$q = \frac{H}{a(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t. \tag{5.15}$$

Амплитуда этих колебаний, происходящих с частотой ю, определяется выражением

$$A = \frac{H}{a | k^2 - \omega^2|} = \frac{H}{|c - a\omega^2|},$$
 (5.16)

знаменатель которого ( $\partial u$ намическая жесткость) характеризует эффективную жесткость системы при гармоническом возбуждении. Выражение  $1/|c-a\omega^2|$  определяет амплитуду вынужденных колебаний при единичной амплитуде вынуждающей силы (амплитудно-частотная характеристика, для обозначения которой в технической литературе пользуются аббревиатурой АЧХ).

Выражению (5.16) можно придать вид

 $A = \mu q_{\rm cr}$ 

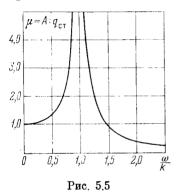
Здесь

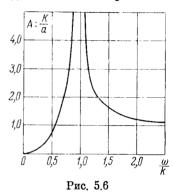
$$\mu = \frac{1}{|1 - \omega^2/\bar{k}^2|} \tag{5.17}$$

- коэффициент динамичности, показывающий, во сколь-

ко раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше перемещения  $q_{\rm cr} = H/c$ , вызываемого статически приложенной силой H. Для случая, когда H не зависит от  $\omega$ , зависимость коэффициента динамичности от отношения частот  $\omega/k$  представлена графиком на рис. 5.5 («резонансная кривая»).

Как видно, с возрастанием частоты  $\omega$  от нуля коэффициент динамичности увеличивается и при  $\omega/k \to 1$  стремится к бесконечности. При дальнейшем возрастании





частоты коэффициент динамичности постепенно убывает и при  $\omega/k > \sqrt{2}$  становится меньшим единицы; в этой области динамический эффект вынуждающей силы слабее, чем при ее статическом действии. Этим свойством часто пользуются в технике, а именно, для уменьшения колебаний объектов, подверженных действию гармонических вынуждающих сил, уменьшают жесткость упругих связей; при этом собственная частота уменьшается, а вместе с тем возрастает отношение  $\omega/k$ . Нужно отметить, что согласно (5.15) при  $\omega/k < 1$  перемещения находятся в фазе с вынуждающей силой, а при  $\omega/k > 1$ — в противофазе.

Если  $H = K\omega^2$ , где K — постоянная (например, в машинах с неуравновешенными роторами K = Mr, где M — масса ротора, r — эксцентриситет центра тяжести, см. рис. 5.4), то согласно формуле (5.16) амплитуда колебаний следующим образом связана с отношением частот  $\omega/k$ :

$$A = \frac{K}{a \left[ 1 - k^2/\omega^2 \right]}.$$

Соответствующая резонансная кривая показана на рис. 5.6. В отличие от резонансной кривой на рис. 5.5 при неограниченном возрастании частоты  $\omega$  амплитуда колебаний стремится не к нулю, а к значению K/a.

Особое состояние системы при  $\omega = k$  называется резонансом; для этого состояния решением (5.14) пользоваться нельзя, так как оно было получено в предположении, что  $\omega \neq k$ . В резонансном случае вместо (5.13) нужно исходить из дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{H}{a} \sin kt,$$

решение которого при нулевых начальных условиях имеет вид

$$q = -\frac{H}{2c} [kt \cos kt - \sin kt].$$

Здесь нужно обратить внимание на появление члена  $kt\cos kt$ , содержащего время вне знака косинуса, т. е. неограниченно возрастающего во времени; этот член называется резонансным (вековым). Ниже, в § 6, будет установлено, что силы трения ограничивают это возрастание, так что амплитуда колебаний остается конечной и при  $t \to \infty$ .

Пример 5.2. Вдоль пути синусоидального профиля

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{a}$$

(рис. 5.7) с постоянной горизонтальной скоростью v движется упруго подвешенный груз массы m. Определить наибольшее допусти-

мое значение коэффициента жесткости подвески с, если требуется, чтобы ампилитуда абсолютных колебаний груза не превосходила 0.054<sub>0</sub>.

Подставив в (а) x = vt, найдем ординаты нижнего конда пружины в функции времени:

$$y_0 = A_0 \sin \frac{\pi vt}{l}.$$

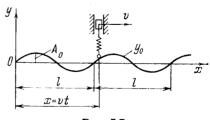


Рис. 5,7

Обозначив через у абсолютное вертикальное перемещение груза, отсчитываемое от равновесного уравнения, имеем дифференциальное уравнение  $-c(y-y_0) = m_y^{\bullet}$ , или

$$my + cy = cy_0.$$

Отсюда видно, что эквивалентная вынуждающая сила составляет  $P=cA_0\sin(\pi vt/l)$ , т. е. ее амилитуда равна  $cA_0$ . Соответственно выражению (5.16) находим амилитуду абсолютных колебаний груза:

$$\frac{A_0}{\left|1-\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right|}=\frac{A_0}{\left|1-\frac{\pi^2v^2m}{cl^2}\right|},$$

которая по условиям задачи пе должна превосходить значения  $0.05A_{\rm o}$ . Следовательно,

$$\frac{1}{\frac{m\pi^2v^2}{cl^2}-1}<0.05,$$

T. 0.

$$c<\frac{0,47mv^2}{l}.$$

Пример 5.3. Для условий предыдущего примера определить допустимые значения коэффициента жесткости c, если требуется, чтобы дополнительное усилие в подвеске не превосходило 5 % статического значения усилия mg.

тического значения усилия mg.

При прежних обозначениях наибольшая динамическая деформация подвески равна  $A-A_0$ , а наибольшее дополнительное уси-

ление в подвеске составляет

$$c(A-A_0) = \frac{cA_0}{|k^2/\omega^2-1|}$$

По условию должно быть

$$\frac{cA_0}{|k^2/\omega^2-1|} < 0.05mg_{\bullet}$$

где  $\omega = \pi v/l$ . Отсюда находим, что коэффициент жесткости должен быть либо достаточно малым, удовлетворяющим неравенству

$$c < \frac{m\omega^2}{1 + 20A_0\omega^2/g}$$

(при любых значениях безразмерной дроби 20  $A_0\omega^2/g$ ), либо достаточно большим, удовлетворяющим неравенству

$$c > \frac{m\omega^2}{1 - 20A_0\omega^2/g}$$

(при  $20A_0\omega^2/g < 1$ ).

4. Действие произвольной вынуждающей силы. Решение дифференциального уравнения (5.5) при произвольно заданной правой части может быть получено с по-

мощью известного из курса математики метода вариации произвольных постоянных. Однако более нагляден иной путь решения, к изложению которого мы и переходим.

Прежде всего рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть в момент  $t=\xi$  к покоящейся системе приложен обобщенный мгновенный импульс S; согласно (1.14) при  $t>\xi$  решение имеет вид

$$q = q(\xi)\cos k(t - \xi) + \frac{\dot{q}(\xi)}{k}\sin k(t - \xi).$$

Входящие сюда вначения обобщенной координаты и обобщенной скорости непосредственно после приложения импульса равны  $q(\xi)=0,\ \dot{q}(\xi)=\frac{S}{a}$ . Следовательно, движение описывается выражением

$$q = \frac{S}{ak}\sin k (t - \xi). \tag{5.18}$$

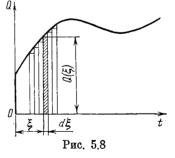
Функция

$$R(t,\xi) = \frac{\sin k (t-\xi)}{ak},$$

описывающая движение, вызываемое единичным импульсом, называется *импульсной реакцией* системы.

Теперь будем рассматривать произвольную вынуждаю-

теперь будем рассматривать щую силу Q = Q(t) как бесконечную последовательность элементарных импульсов  $Q(\xi) d\xi$ , показанных на рис. 5.8. Подставив в выражение (5.18)  $S = Q(\xi) d\xi$ , мы найдем колебания, вызываемые действием одного из таких элементарных импульсов. Чтобы определить движение, которое вызывается заданной силой, необходимо сложить влияния всех элементарных импульсов: Таких обром



тарных импульсов; таким образом, при нулевых начальных условиях находим

$$q = \frac{1}{ak} \int_{0}^{t} Q(\xi) \sin k (t - \xi) d\xi.$$
 (5.19)

Если кроме рассмотренной здесь силы Q = Q(t) в заданные моменты времени  $\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_r$  (здесь  $\xi_r < t$ ) на

систему действуют копечные мгновенные импульсы  $S_1, S_2, \ldots, S_r$ , то вместо (5.19) будет

$$q = \frac{1}{ak} \left[ \int_{0}^{t} Q(\xi) \sin k (t - \xi) d\xi + \sum_{i=1}^{r} S_{i} \sin k (t - \xi_{i}) \right].$$

Наряду с (5.19) существует другой вариант решения, который иногда оказывается более удобным. Преобразуем (5.19) с помощью правила интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Полагая здесь  $Q(\xi) = u$  и  $\sin k(t - \xi) d\xi = dv$ , находим  $du = Q(\xi) d\xi$  и  $v = \frac{1}{k} \cos k(t - \xi)$ . Соответственно (5.19) преобразуется к виду

$$q = \frac{1}{ak^2} \left[ Q(\xi) \cos k (t - \xi) - \int \dot{Q}(\xi) \cos k (t - \xi) d\xi \right] \Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{c} \left[ Q(t) - Q(0) \cos kt - \int_0^t \dot{Q}(\xi) \cos k (t - \xi) d\xi \right]. \quad (5.20)$$

Этим выражением можно пользоваться только в тех случаях, когда при t>0 функция Q(t) не имеет разрывов, т. е. производная Q(t) конечна на всем промежутке интегрирования.

Если сила Q(t) претерпевает конечные разрывы  $\Delta Q_1$ ,  $\Delta Q_2, \ldots, \Delta Q_r$  в заданные моменты времени  $\xi_1, \, \xi_2, \, \ldots, \, \xi_r$ 

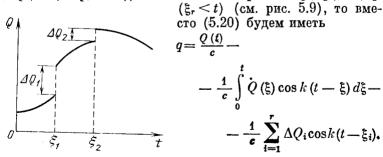


Рис. 5.9

Остановимся на двух важных частных случаях.

1. Действие кратковременной силы. Пусть сила  $Q=Q_0$  внезапно появляется в момент t=0, действует в течение малого промежутка времени  $t_*$ , а затем

внезапно исчезает (рис. 5.10). Если  $t_*$  меньше полупериода свободных колебаний T/2, то наибольшее отклонение системы достигается после исчезновения силы. Тогда для  $t > t_*$  согласно решению (5.19)

$$q = \frac{Q_0}{ak} \int_0^{t_*} \sin k (t - \xi) d\xi = \frac{2Q_0}{c} \sin \frac{kt_*}{2} \sin k \left(t - \frac{t_*}{2}\right).$$

Наибольшее отклонение равно

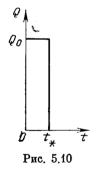
$$q_{\max} = \frac{2Q_0}{\epsilon} \sin \pi \alpha,$$

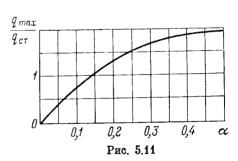
где  $\alpha = t_*/T$ . Коэффициент динамичности, равный отношению  $q_{\rm max}$  к статическому перемещению  $q_{\rm cr} = Q_0/c$ ,

$$\mu = 2 \sin \pi \alpha$$
,

определяется только значением α (рис. 5.11) и не превосходит значения 2.

Нужно заметить, что если постоянная сила действует в течение малой доли периода свободных колебаний, то





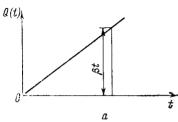
действие такой силы во много раз меньше статического; например, при  $t_*/T=0.01$  можно найти  $\mu=0.062$  — динамический эффект в 16 раз меньше статического. Вообще действие кратковременной силы определяется не столько ею самой, сколько значением ее импульса. В самом деле,

$$q = \frac{1}{ak} \int_{0}^{t_{\bullet}} Q(\xi) \sin k (t - \xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{ak} \left[ \sin kt \int_{0}^{t_{\bullet}} Q(\xi) \cos k\xi d\xi - \cos^{2}kt \int_{0}^{t_{\bullet}} Q(\xi) \sin k\xi d\xi \right]. (5.21)$$

8 я, г, пановко

Так как  $k\xi=rac{2\pi}{T}\xi$  меньше, чем величина  $rac{2\pi}{T}t_*$ , которую здесь следует считать малой, то  $k\xi$  — малое число. Поэтому можно принять  $\sin k\xi = 0$ ,  $\cos k\xi \approx 1$  и вместо (5.21)



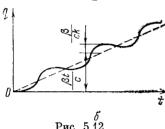


Рис. 5.12

получим 
$$q=\frac{\sin kt}{ak}\int\limits_0^{t*}Q\left(\xi\right)d\xi=\frac{S\sin kt}{ak},$$
 где  $S=\int\limits_0^{t*}Q\left(\xi\right)d\xi$ — импульс

Таким образом, движение приближенно определяется импульсом кратковременной силы: подробности ее изменения в промежутке време $t_*$  мало влияют на результаты.

Действие линейно возрастающей во време-

Рис. 5.12 ни силы  $Q(t) = \beta t$   $(t \ge 0)$ ; здесь  $\beta$  есть скорость изменения силы (рис. 5.12, a). По формуле (5.20) находим

$$q = \frac{1}{c} \left[ \beta t - \beta \int_{0}^{t} \cos k (t - \xi) d\xi \right] = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta}{ck} \sin kt.$$

График движения показан на рис. 5.12, б и выражает сумму линейного и синусоидального слагаемых. Линейное слагаемое представляет изменение обобщенной координаты, рассчитанное в предположении безынерционности системы (квазистатическое перемещение), а синусоидальное слагаемое отражает колебательную часть решения; амплитуда этих колебаний, равная  $\beta/ck$ , увеличивается с возрастанием скорости изменения силы в.

Пример 5.4. Найти относительные колебания груза в системе, рассмотренной выше в примере 5.1 (стр. 105-106).

Искомое движение должно быть найдено путем решения дифференциального уравнения, составленного выше в примере 5.1. Из записи этого уравнения видно, что вынуждающая сила (ею служит переносная сила инерции) равна

$$Q(t) = mh\gamma^2 v^2 e^{-\gamma vt}.$$

Подставляя это выражение в решение (5.19), находим

$$\eta = h \frac{\gamma^2 v^2}{k^2 + \gamma^2 v^2} \left( e^{-\gamma vt} + \frac{\gamma v}{k} \sin kt - \cos kt \right).$$

При достаточно больших значениях времени можно пренебречь первым членом в скобках и рассматривать только процесс установившихся колебаний:

$$\eta = h \frac{\gamma^2 v^2}{k^2 + \gamma^2 v^2} \left( \frac{\gamma v}{k} \sin kt - \cos kt \right).$$

Амплитуда этих колебаний равна

$$A = h \left(\frac{\gamma v}{k}\right)^2 / \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma v}{k}\right)^2}.$$

В случае, если  $\gamma v \ll k$  (что соответствует реальным условиям), находим

$$A = \left(\frac{\gamma v}{k}\right)^2 h,$$

т. е. амплитуда относительных колебаний пропорциональна квадрату скорости  $v^2$ .

Пример 5.5. Найти движение груза, находящегося на конце консольной балки, если сила P сохраняет неизменное значение, но точка ее приложения движется от левого конца балки к правому с постоянной скоростью v (рис. 5.1,  $\delta$ ).

Дифференциальное уравнение движения груза было получе-

но выше в виде (5.9), т. е.

$$\ddot{y} + k^2 y = \frac{Pv^2t^2(3l - vt)}{2ml^3}$$
,

где  $k^2 = 3EJ/(ml^3)$ . Согласно (5.19) имеем при t < l/v:

$$y = \frac{1}{mk} \int_{0}^{t} \frac{Pv^{2}\xi^{2} (3l - v\xi)}{2ml^{3}} \sin k (t - \xi) d\xi,$$

или, после вычислений,

$$y = \frac{pv^2}{2mk^2l^3} \left[ -vt^3 + 2lt^2 + \frac{6}{k^2} (vt - l + l\cos kt) - \frac{6v}{k^3} \sin kt \right].$$

Для вертикальной скорости груза находим

$$\dot{y} = \frac{3Pv^2}{2mk^2l^3} \left[ 2lt - vt^2 + \frac{2v}{k^2} \left( 1 - \frac{kl}{v} \sin kt - \cos kt \right) \right].$$

Полученным выражениям можно придать следующую форму:

$$y = y_{\text{cr}} \left[ \frac{3\tau^2 - \tau^3}{2} + \frac{3}{\alpha^2} (\tau - 1 + \cos \alpha \tau) - \frac{3}{\alpha^3} \sin \alpha \tau \right],$$

$$\dot{y} = ky_{\text{cr}} \left[ \frac{3(2\tau - \tau^2)}{2\alpha} + \frac{3}{\alpha^3} (1 - \alpha \sin \alpha \tau - \cos \alpha \tau) \right],$$

где  $y_{\rm cr}=P/(mk^2)$  — прогиб конца балки при статическом действии приложенной на конце силы P,  $\alpha=kl/v$  и  $\tau=vt/l$  — безразмерные параметры. В момент, когда сила сходит с балки,  $\tau=1$  и мы находим

$$\begin{split} &y_1 = y_{\text{cr}} \left[ 1 + \frac{3 \left( \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \right)}{\alpha^3} \right], \\ &\dot{y_1} = \frac{3ky_{\text{cr}}}{\alpha^3} \left[ \frac{\alpha^2}{2} + 1 - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right]. \end{split}$$

Так как в момент исчезновения силы отклонения балки y и скорость  $\dot{y}$  скачков не претерпевают, то последующее движение системы будет происходить по закону свободных колебаний

$$y = y_1 \cos kt + \frac{y_1}{k} \sin kt$$

(с отсчетом времени t от момента, когда сила сходит с балки). Наибольшее отклонение составит

$$y_{\text{max}} = \sqrt{y_1^2 + \left(\frac{\dot{y}_1}{k}\right)^2}.$$

Вычисления показывают, что оно может превзойти значение статического прогиба не более чем на 14—15 %.

5. Действие периодической вынуждающей силы. Во многих технических приложениях возникает задача

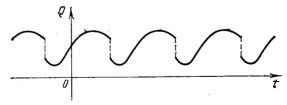


Рис. 5.13

о колебаниях, вызываемых действием негармонической, но периодической силы (рис. 5.13)

$$Q(t) = Q(t+T),$$
 (5.22)

где T — период изменения силы. На стр. 107 в связи со случаем гармонического возбуждения колебаний было отмечено, что вследствие неизбежных сопротивлений постепенно исчезают колебания, происходящие с собственной частотой, и можно принять, что по истечении некоторого времени обобщенная координата меняется в «ритме» изменения вынуждающей силы по закону (5.15). Те же соображения позволяют и в рассматриваемом здесь случае периодического возбуждения ограничиться учетом только установившихся вынужденных колебаний. Для решения этой задачи можно воспользоваться двумя путями.

Первый из них основан на разложении функции (5.22)

в ряд Фурье:

$$Q(t) = \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \cos n\omega t + H_n \sin n\omega t), \quad (5.23)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$G_{n} = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} Q(t) \cos n\omega t \, dt, \quad H_{n} = \frac{2}{T} \int_{0}^{T} Q(t) \sin n\omega t \, dt \quad (5.24)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

Записав уравнение (5.5) в виде

$$\ddot{aq} + cq = \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \cos n\omega t + H_n \sin n\omega t)_s$$

учтем, что система линейна; это значит, что можно рассмотреть по отдельности действие каждого из слагаемых вынуждающей силы и найти установившиеся вынужденные колебания, а затем сложить полученные результаты:

$$q = \frac{1}{c} \left[ \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \cos n\omega t + H_n \sin n\omega t}{1 - n^2 \omega^2 / k^2} \right]. \quad (5.25)$$

Таким образом, движение, вызываемое полигармонической вынуждающей силой, также является полигармоническим. Конечно, отношения между амплитудами гармоник этого движения не равны отношениям между амплитудами соответствующих гармоник вынуждающей силы; в частности, может случиться, что какая-либо n-я

составляющая вынуждающей силы с относительно небольшой амплитудой вызывает особенно значительные колебания. Это будет тогда, когда частота  $n\omega$  этой гармоники близка к собственной частоте k, так как при этом знаменатель соответствующего члена суммы (5.25) близок к нулю. При равенстве частот  $n\omega = k$  наступает резонанс (за исключением случаев, когда соответствующие величины  $G_n$  и  $H_n$  равны нулю).

Описанный способ отчетливо выделяет опасные возможности резонансных режимов, но не очень удобен, так как приводит к бесконечным рядам, которые не всегда

достаточно быстро сходятся.

Рассмотрим теперь иной способ, который приводит к замкнутому решению для установившихся вынужденных колебаний. Рассматривая действие периодической силы (5.22), будем разыскивать решение q=q(t), имеющее тот же период T, что и у силы, т. е. оно должно удовлетворять условиям периодичности:

$$q_0 = q(0) = q(T), \quad \dot{q}_0 = \dot{q}(0) = \dot{q}(T), \quad (5.26)$$

где  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  — обобщенная координата и обобщенная скорость в момент, принимаемый за начало отсчета времени t. Движение в интервале [0, T] описывается выражением

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{ak} \int_0^t Q(\xi) \sin k (t - \xi) d\xi,$$
 (5.27)

которое является обобщением решения (5.19) на случай

ненулевых значений  $q_0$  и  $\dot{q}_0$ .

Для дальнейшего необходимо образовать выражение обобщенной скорости  $\dot{q}$ . При дифференцировании по времени t интеграла, входящего в (5.27), должно получиться два слагаемых: первое представляет производную по верхнему пределу t и равно подынтегральной функции при  $\xi = t$ , а второе — результат дифференцирования по t, входящему как параметр под знак интеграла. Но первое из этих слагаемых равно нулю и, таким образом,

$$\dot{q} = -q_0 k \sin kt + \dot{q}_0 \cos kt + \frac{1}{a} \int_0^t Q(\xi) \cos k(t-\xi) d\xi.$$

Для момента времени t=T выражения (5.27) и (5.28) дают

$$q(T) = q_0 \cos kT + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kT + \frac{1}{ak} \int_0^T Q(\xi) \sin k (T - \xi) d\xi,$$
(5.29)

$$\dot{q}(T) = -q_0 k \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT + \frac{1}{a} \int_0^T Q(\xi) \cos k (T - \xi) d\xi.$$

Теперь введем сокращенные обозначения для постоянных величин:

$$\int_{0}^{T} Q(\xi) \cos k\xi \, d\xi = C_{0}, \quad \int_{0}^{T} Q(\xi) \sin k\xi \, d\xi = S_{0} \quad (5.30)$$

и перепишем выражения (5.29) в виде

$$\begin{aligned} q_0 &= q_0 \cos kT + \frac{q_0}{k} \sin kT + \frac{\sin kT}{ak} C_0 - \frac{\cos kT}{ak} S_0, \\ \dot{q}_0 &= -q_0 k \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT + \frac{\cos kT}{a} C_0 + \frac{\sin kT}{a} S_0. \end{aligned} \tag{5.31}$$

В левых частях этих соотношений заменено q(T) на  $q_0$  и  $\dot{q}(T)$  на  $\dot{q}_0$ , как это следует из условий периодичности решения (5.26). Два соотношения (5.31) представляют собой простую систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных  $q_0$  и  $\dot{q}_0$ ; решив ее, найдем

$$q_{0} = \frac{1}{2ak} \Big[ C_{0} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} + S_{0} \Big], \quad \dot{q}_{0} = \frac{1}{2a} \Big[ S_{0} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} - C_{0} \Big]. \quad (5.32)$$

Теперь с помощью выражения (5.27) можно окончательно получить

$$\begin{split} q\left(t\right) &= \frac{1}{2ak} \left[ \left( C_0 \cot g \, \frac{kT}{2} + S_0 \right) \cos kt \, + \right. \\ &+ \left( S_0 \cot g \, \frac{kT}{2} - C_0 \right) \sin kt \, + 2 \int_0^t Q\left( \xi \right) \sin k \left( t - \xi \right) d\xi \, \right]. \end{split} \tag{5.33}$$

Это решение представляет движение в промежутке времени [0, T], и в него нельзя формально подставлять t > T. Однако, имея график q(t) для  $0 \le t \le T$ , можно

вследствие периодичности решения без всяких изменений сместить его в соседние промежутки  $[T, 2T], [2T, 3T], \dots$ 

Пример 5.6. Найти установившиеся вынужденные колебания, вызываемые в линейной системе с одной степенью свободы

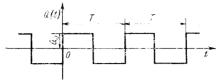


Рис. 5.14

периодической кусочно-постоянной вынуждающей Q(t+T) = Q(t) (рис. 5.14): силой  $Q_{\mathbf{i}}(t) = Q_{\mathbf{0}} \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{T}{2}, \quad Q_{\mathbf{i}}(t) = -[Q_{\mathbf{0}} \quad \text{при} \quad \frac{T}{2} < t < T.$ 

Пользуясь разложением в ряд Фурье, по формулам (5.24) находим

$$G_n = 0$$
  $(n = 0, 1, 2, 3, ...);$   
 $H_n = \frac{4Q_0}{\pi n}$   $(n = 1, 3, 5, ...);$   $H_n = 0$   $(n = 2, 4, 6, ...),$ 

и согласно (5.25) исследуемые колебания представляются суммой нечетных гармоник:

$$q = \frac{4Q_0}{\pi n} \sum_{n=1,3.5,...}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n \left[1 - (n\omega/k)^2\right]}.$$

При  $k/\omega=n$  ( $n=1,3,5,\ldots$ ) наступает резонанс. Воспользуемся теперь вторым способом решения. Для этого предварительно вычислим по формулам (5.30):

$$C_0 = \frac{2Q_0}{k} \sin \frac{kT}{2} \left( 1 - \cos \frac{kT}{2} \right), \quad S_0 = -\frac{2Q_0}{k} \cos \frac{kT}{2} \left( 1 - \cos \frac{kT}{2} \right).$$

Теперь выражение (5.33) принимает вид

$$\begin{split} q &= \frac{Q_0}{c} \left( 1 - \cos kt - \mathrm{t} \mathbf{g} \, \frac{kT}{4} \sin kt \right) \quad \left( 0 < t < \frac{T}{2} \right), \\ q &= -\frac{Q_0}{c} \left[ 1 - \cos k \left( t - \frac{T}{2} \right) - \mathrm{t} \mathbf{g} \, \frac{kT}{4} \sin k \left( t - \frac{T}{2} \right) \right] \\ &\qquad \left( \frac{T}{2} < t < T \right), \end{split}$$

Как видно, этот результат значительно более удобен для последующих вычислений, чем ряд, полученный выше по первому способу. Отметим, что и в этой записи сразу можно выделить прежнее условие резонанса  $kT/4 = n\pi/2$  (n = 1, 3, 5, ...).

Пример 5.7. Найти наибольшее отклопение линейной системы с одной степенью свободы от положения равновесия, если на мы с одной степенью своюды от положения равыческия, если на нее действует периодическая последовательность одностороние направленных мгновенных импульсов S, имеющих период чередования T, вдвое меньший собственного периода  $2\pi/k$ . В данном случае разложение в ряд особенно неэффективно изза его медленной сходимости. Воспользуемся вторым способом

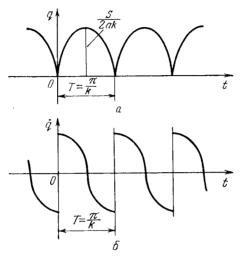


Рис. 5.15

решения и примем за начало отсчета времени момент, непосредственно следующий за моментом приложения какого-либо импульса. По формулам (5.30) найдем

$$C_0 = S, \qquad S_0 = 0.$$

Кроме того, в данном случае

$$\int_{0}^{t} Q(\xi) \sin k (t - \xi) d\xi = S \sin kt.$$

Подставляя его в выражение (5.33) и учитывая, что  $kT = \pi$ , получаем

$$q(t) = \frac{S \sin(\pi t/T)}{2ak}.$$

Наибольшее отклонение равно S/(2ak), т. е. в двое мень ше, чем в случае действия однократного импульса. График движения показан на рис. 5.15, а. На графике скорости (рис. 5.15, б) ясно видны разрывы скорости, обусловленные приложением импульсов,

## § 6. Системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и трения

Влияние трения на вынужденные колебания, происходящие вдали от резонансных режимов, обычно невелико, и в практических расчетах им чаще всего пренебрегают. Однако вблизи резопанса учет трения становится необходимым: без этого ошибки в определении амплитуд вынужденных колебаний становятся недопустимо большими.

При произвольно заданной вынуждающей силе анализ колебаний относительно прост при условии, что трение в системе — линейное. Значительно сложнее исследование колебаний систем с нелинейным трением — даже в простейшем случае чисто гармонической вынуждающей силы приходится довольствоваться лишь приближенным решением.

1. Действие гармонической вынуждающей силы. Если трение в системе линейное, то в случае вынужденных колебаний дифференциальное уравнение (2.6) должно быть дополнено членом, выражающим действие вынуждающей силы; здесь примем ее в виде

$$Q(t) = H\sin\omega t, \tag{6.1}$$

так что получится

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H\sin\omega t. \tag{6.2}$$

Вводя прежние обозначения

$$h = \frac{b}{2a}, \quad k^2 = \frac{c}{a},\tag{6.3}$$

приходим к уравнению в следующей форме:

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2q = \frac{H}{a}\sin\omega t. \tag{6.4}$$

Его общее решение имеет вид

$$q = e^{-ht} (C_1 \sin k_* t + C_2 \cos k_* t) +$$

$$+\frac{H}{a\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}\sin(\omega t-\gamma), \quad (6.5)$$

где

$$k_* = \sqrt{k^2 - h^2} \tag{6.6}$$

есть частота затухающих колебаний системы, а угол ү, характеризующий отставание фазы перемещения от фа-

зы силы, определяется выражением

$$tg \gamma = \frac{2h\omega}{k^2 - \omega^2}; \tag{6.7}$$

постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий.

Первая часть полученного решения представляет собой колебания с частотой  $k_{*}$ , которые с течением времени затухают и вскоре после начала процесса становятся

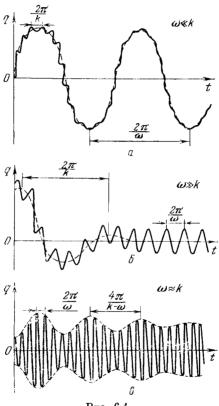


Рис. 6.1

практически несущественными. Основное значение имеет вторая часть общего решения

$$q = \frac{H}{a\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \sin(\omega t - \gamma), \quad (6.8)$$

описывающая незатухающие установившиеся колебания, происходящие с частотой возбуждения.

Постепенное установление стационарного колебательного процесса с частотой  $\omega$  иллюстрировано на рис. 6.1 для трех случаев. В первом случае (рис. 6.1, a), когда  $\omega \ll k$ , в начале движения основные колебания частоты  $\omega$  сопровождаются затухающими колебаниями большей частоты. В противоположном случае, когда  $\omega \gg k$  (рис. 6.1,  $\delta$ ) на основные колебания с частотой  $\omega$  накладываются затухающие колебания с меньшей частотой k. Наконец, при близких значениях частот k и  $\omega$  движение носит характер биений, которые постепенно затухают (рис. 6.1,  $\delta$ ).

Амплитуда установившихся колебаний определяется выражением

$$A = \frac{H}{a\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}} = \frac{H}{c\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4h^2\omega^2}{k^4}}}.$$
 (6.9)

Отношение амплитуды A к статическому перемещению  $q_{\rm cr}=H/c$  равно

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4h^2\omega^2}{k^4}}} \tag{6.10}$$

и представляет собой коэффициент динамичности. Зависимость коэффициента динамичности от отношения частот  $\omega/k$  показана на рис. 6.2, a для различных значений 2h/k, характеризующих демифирующее действие линейного трения; эти графики дополняют рис. 5.5, который относится к системам без трения.

Максимумы кривых  $\mu(\omega/k)$  лишь незначительно смещены влево от значения  $\omega/k=1$ ; поэтому резонансные значения динамического коэффициента обычно определяют при  $\omega=k$  по выражению

$$\mu_{\text{pes}} = \frac{k}{2h}.\tag{6.11}$$

Согласно (2.12) это значение выражается через логарифмический декремент:

$$\mu_{\text{pes}} = \frac{\pi}{\Lambda}.\tag{6.12}$$

Иногда резонансное значение коэффициента динамичности называют добротностью системы: чем больше добротность, тем острее резонансный пик.

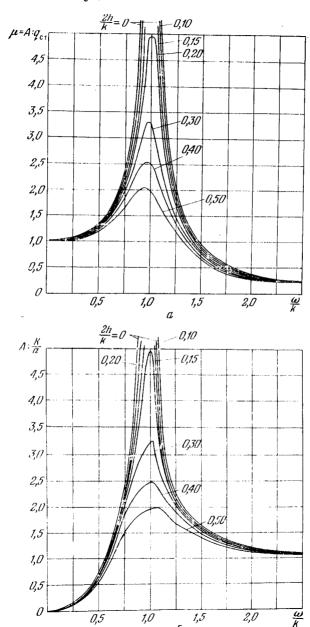


Рис. 6.2

В этом параграфе выше предполагалось, что амплитуда вынуждающей силы имеет заданное постоянное значение, не зависящее от частоты  $\omega$ . Если амплитуда H вынуждающей силы пропорциональна квадрату частоты  $(H = K\omega^2)$ , то, подобно (6.9), находим

$$A = \frac{K\omega^2}{ak^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4h^2\omega^2}{k^4}}}.$$
 (6.13)

На рис. 6.2, б показаны графики зависимости относительной амплитуды Aa/K от значений  $\omega/k$  при различных значениях отношения 2h/k.

Пример 6.1. Вертикальная вынуждающая сила (6.1) действует на тело массы m, которое оперто на систему пружин и вязких демпферов (рис. 6.3, a); c — коэффициент жесткости системы пружин; b — коэффициент вязкости демпферов. Определить

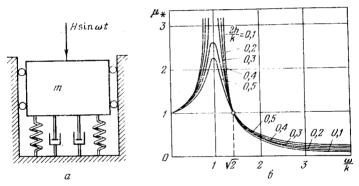


Рис. 6.3

амплитуду силы, передаваемой на основание пружинами и демпферами при установившихся вынужденных колебаниях системы.

Искомая сила, передаваемая на основание, определяется вы-

ражением

$$N = b\dot{q} + cq,$$

в котором q — вертикальное перемещение тела, отсчитываемое от состояния равновесия.

Подставляя сюда согласно (6.8)—(6.10)

$$q=\frac{\mu H}{c}\sin{(\omega t-\gamma)},$$

получаем после замены  $b = 2hc/k^2$ 

$$N = \mu H \left[ \sin \left( \omega t - \gamma \right) + \frac{2h\omega}{k^2} \cos \left( \omega t - \gamma \right) \right].$$

Максимальное значение силы N равно

$$N_{\max} = \mu H \sqrt{1 + \frac{4h^2\omega^2}{k^4}}.$$

Безразмерное отношение  $N_{\max}/H$ , называемое коэффициентом передачи силы, определяет, во сколько раз наибольшая сила, передаваемая основанию, больше амплитуды заданной вынуждающей силы; оно равно

$$\mu_{*} = \frac{N_{\max}}{H} = \mu \sqrt{1 + \frac{4h^{2}\omega^{2}}{k^{4}}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4h^{2}\omega^{2}}{k^{4}}}{\left(1 - \frac{\omega^{2}}{k^{2}}\right)^{2} + \frac{4h^{2}\omega^{2}}{k^{4}}}}$$

На рис. 6.3,  $\delta$  изображен график зависимости коэффициента передачи силы от отношения  $\omega/k$  при различных значениях 2h/k. Полезно заметить, что все кривые, независимо от коэффициента вязкости h, пересекаются в точке с координатами ( $\sqrt{2}$ ; 1); при  $\omega/k < \sqrt{2}$  вязкость демпферов способствует снижению общей силы, передаваемой на основание, а при  $\omega/k > \sqrt{2}$  (как это бывает в хорошо амортизированных системах) — эту силу увеличивает.

2. Действие произвольной вынуждающей силы. В общем случае, когда выпуждающая сила представляет собой произвольно заданную функцию времени Q(t), следует исходить из дифференциального уравнения

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t), \tag{6.14}$$

общее решение которого можно получить способом, которым мы пользовались в § 5 при выводе формулы (5.19).

Пусть к системе в момент  $\xi$  прикладывается мгновенный импульс величины S. Последующий процесс представляет собой затухающие колебания, описываемые выражением (2.9). Постоянные A и  $\alpha$  определим из условий в начале движения,— при  $t=\xi$  должно быть q=0 и  $\dot{q}_0=S/a$ :

$$A = \frac{Se^{h\xi}}{ak_*}, \quad \alpha = -k_*\xi.$$

Таким образом, движение, вызванное однократным имиульсом, описывается законом

$$q = \frac{Se^{-h(t-\xi)}}{ak_*} \sin k_* (t-\xi). \tag{6.15}$$

Рассматривая вынуждающую силу как последовательность элементарных импульсов  $Q(\xi)d\xi$  и интегрируя

(6.15), получим для пулевых начальных условий решение

$$q = \frac{1}{ak_*} \int_{0}^{t} Q(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin k_* (t-\xi) d\xi.$$
 (6.16)

В некоторых случаях удобно пользоваться решением в ином виде, подобном выражению (5.20). Если функция Q(t) дифференцируемая, то поступая, как в § 5, получим

$$q = \frac{1}{c} \left\{ Q(t) - Q(0) e^{-ht} \left( \cos k_* t + \frac{h}{k_*} \sin k_* t \right) - \int_0^t \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_* (t-\xi) + \frac{h}{k_*} \sin k_* (t-\xi) \right] d\xi \right\}.$$
 (6.17)

Если же сила Q(t) претерпевает конечные разрывы  $\Delta Q_1, \ \Delta Q_2, \dots$  в заданные моменты времени  $\xi_1, \ \xi_2, \dots$ , то

$$q = \frac{1}{c} \left\{ Q(t) - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) e^{-h(t-\xi)} \left[ \cos k_{*}(t-\xi) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*}(t-\xi) \right] d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) d\xi - \int_{0}^{t} \dot{Q}(\xi) d\xi + \int_{0}^{t} \dot{$$

 $-\sum_{i=0}^{r} \Delta Q_{i} e^{-h(t-\xi_{i})} \Big[ \cos k_{*} (t-\xi_{i}) + \frac{h}{k_{*}} \sin k_{*} (t-\xi_{i}) \Big] \Big\}.$  (6.18)
Пример 6.2. Найти движение системы, вызываемое дейст-

Puc. 6.4

вием линейно возрастающей во времени силы, график которой показап на рис. 5.12, а, учитывая вязкое сопротивление, характеризуемое коэффициентом h.

В данном случае удобно воспользоваться решением в форме (6.17).

Подставляя  $Q = \beta$ , находим

$$q = \frac{\beta t}{c} - \frac{\beta e^{-ht} \sin k_* t}{ck_*}.$$

Колебания постепенно затухают и движение приближается к движению вырожденной безмассовой системы  $q = \beta t/c$  (рис. 6.4).

3. Действие периодической вынуждающей силы. Если сила задана в виде периодической функции времени периода T, то, как и в § 5 п. 3, вызываемые ею установив-

шиеся вынужденные колебания можно найти двумя способами.

Чаще всего исходят из того, что периодическую функцию Q(t) можно разложить в ряд Фурье и затем суммировать движения, вызываемые каждой из гармоник. Тогда на основе решения (6.8) можно, подобно (5.25), записать для установившихся колебаний

$$q = \frac{1}{c} \left[ \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n \cos(n\omega t - \gamma_n) + H_n \sin(n\omega t - \gamma_n)}{\sqrt{\left(1 - \frac{n^2 \omega^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4h^2 \omega^2}{k^4}}} \right]. \quad (6.19)$$

Кроме обозначений, поясненных выше в связи с выражением (5.25), здесь обозначено:

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{2hn\omega}{k^2 - n^2\omega^2}.$$
 (6.20)

Как уже указывалось, ряд (6.19) иногда сходится недостаточно быстро и для достаточно точного описания движения приходится учитывать значительное число членов ряда. От этого педостатка свободен другой способ, который основан на свойстве периодичности установившегося процесса движения.

Примем некоторый момент за начало отсчета времени и обозначим, как обычно,  $q_0$  — начальное значение обобщенной координаты,  $\dot{q}_0$  — начальное значение обобщенной скорости. Тогда, подобно (5.27) и (5.28), найдем

$$q = e^{-ht} \left( \frac{\dot{q}_0 + hq_0}{k_*} \sin k_* t + q_0 \cos k_* t \right) + \frac{1}{ak_*} \int_0^t Q(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin k_* (t-\xi) d\xi.$$

$$\dot{q} = e^{-ht} \left( -\frac{k^2 q_0 + h\dot{q}_0}{k_*} \sin k_* t + \dot{q}_0 \cos k_* t \right) + \frac{1}{a} \int_0^t Q(\xi) e^{-h(t-\xi)} \cos k_* (t-\xi) d\xi - \frac{h}{ak_*} \int_0^t Q(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin k_* (t-\xi) d\xi.$$

$$(6.21)$$

Подставив сюда t=T, получим выражения для q(T) и  $\dot{q}(T)$ . Далее в соответствии с условиями периодичности в левые части вместо q(T) и  $\dot{q}(T)$  можно подставить соответственно  $q_0$  и  $\dot{q}_0$ . Это приводит к двум алгебраическим относительно  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  уравнениям:

$$\begin{split} q_0 \left( e^{hT} - \cos k_* T \right) - \frac{\dot{q}_0 + h q_0}{k_*} \, k_* T = \\ &= \frac{1}{a k_*} (C_* \sin k_* T - S_* \sin k_* T)_{\rm s} \\ q_0 \sin k_* T + \frac{\dot{q}_0 + h q_0}{k_*} \left( e^{hT} - \cos k_* T \right) = \\ &= \frac{1}{a k_*} (C_* \cos k_* T + S_* \sin k_* T), \end{split}$$

в которых для краткости введены обозначения

$$C_* = \int_0^T Q(\xi) e^{h\xi} \cos k_* \xi \, d\xi,$$

$$S_* = \int_0^T Q(\xi) e^{h\xi} \sin k_* \xi \, d\xi.$$
(6.23)

Из уравнений (6.22) находим значения  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  и, вернувшись к первому из выражений (6.21), получаем окончательное решение задачи:

$$q = \frac{e^{-hT}}{ak_* (1 - 2e^{hT} \cos k_* T + e^{2hT})} \times \times \{ [e^{hT} (C_* \sin k_* T - S_* \cos k_* T) + S_*] \cos k_* t + \\ + [e^{hT} (C_* \cos k_* T + S_* \sin k_* T) - C_*] \sin k_* t \} + \\ + \frac{1}{ak_*} \int_0^t Q(\xi) e^{-h(t-\xi)} \sin k_* (t-\xi) d\xi. \quad (6.24)$$

Уравнение (6.24) описывает закон движения системы в интервале времени [0, T]. Этот закон затем повторяется в следующих интервалах времени: [T, 2T], [2T, 3T] и т. д. Если построен график функции (6.24), то смещением его на период, два периода и т. д. получим графики движения для следующих (или предыдущих) интервалов времени.

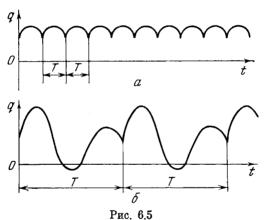
В частном случае, когда трение в системе отсутствует, т. е. h=0, выражение (6.24) переходит в ранее най-денное выражение (5.33).

Пример 6.3. Найти движение, которое вызывается действием односторонних  $nepuo\partial uveckux$  umnyльсов S. Период umnyльсов T и значения коэффициентов a, b и c будем считать заданными.

Совместив начало отсчета времени с моментом, наступающим сразу после приложения какого-либо импульса, получим по формулам (6.23), как в примере 5.6,  $C_* = S$ ,  $S_* = 0$ . При этом выражение (6.24) приобретает вид

$$q = \frac{Se^{-h(T-t)}\left[\sin k_* (T-t) + e^{hT}\sin k_* t\right]}{ak_* \left(1 - 2e^{hT}\cos k_* T + e^{2hT}\right)}.$$

При малом отношении периода T импульсов к собственному периоду  $2\pi/k_*$  (высокочастотное возбуждение) зависимость q(t) имеет вид, показанный на рис. 6.5, a; при этом за один период T



успевает осуществиться лишь часть одного цикла свободных колебаний и роль вязкого трения относительно невелика. В противоположном случае, когда указанное отношение периодов велико (низкочастотное возбуждение), зависимость q(t) подобна показанной на рис. 6.5, б. Здесь за один период T происходит более одного цикла свободных колебаний и становится заметной роль вязкого трения.

Особенно важен случай резонанса, когда период T импульсов в целое число раз больше периода  $2\pi/k_*$  свободных колебаний. Обозначив указанное число буквой r, имеем  $T=2\pi r/k_*$ . В этом случае  $\sin k_*T=0$ ,  $\cos k_*T=1$  движение описывается выражением

$$q = \frac{Se^{-ht}\sin k_*t}{ak_*\left(1 - e^{-hT}\right)}.$$

Вспомнив, что однократный импульс вызывает движение

$$q_1 = \frac{S}{ak_*} e^{-ht} \sin k_* t,$$

найдем, что в случае резопанса, вызываемого периодическими ударами, движение описывается тем же выражением, но с дополнительным коэффициентом:

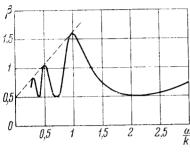


Рис. 6.6

$$q = q_1 \frac{1}{1 - e^{-hT}}.$$

Множитель  $1/(1-e^{-hT})$  характеризует влияние повторений ударов. Для этого множителя приближенно можно записать

$$\beta = \frac{1}{1 - e^{-hT}} \approx \frac{1}{hT} = \frac{k_*}{2\pi rh}.$$

Отсюда, между прочим, видно, что самым опасным является первый резонанс, когда

r=1. Зависимость коэффициента  $\beta$  от отношения частоты импульсов  $\omega=2\pi/T$  к собственной частоте  $k_{\pm}$  показана на рис. 6.6 для случая h/k=0,1.

4. Комплексная форма решения. При анализе установившихся вынужденных колебаний часто пользуются понятиями комплексных величин — комплексной обобщенной силы  $\tilde{Q}$  и комплексного обобщенного перемещения (комплексной координаты)  $\tilde{q}$ . Хотя комплексная форма защим может показаться несколько искусственной, но она очень удобна, в частности, тем, что любые линейные операции над функциями типа гармонических колебаний (дифференцирование, интегрирование, решение линейных уравнений и т. д.) выполняются гораздо проще, когда эти функции представляются не в виде синусов и косинусов, а в комплексной форме в виде экспонент (показательных функций).

Переход к комплексной форме может выполняться поразному. Например, при гармоническом возбуждении колебаний и надлежащем выборе начала отсчета времени гармоническую вынуждающую силу можно описать выражением  $Q=H\sin\omega t$  (такой выбор начала отсчета времени не обязателен; ниже будут рассмотрены иные варианты). Далее вводится комплексная вынуждающая сила  $\widetilde{Q}=He^{i\omega t}$ , мнимая часть которой равна заданной вынуждающей силе:  $\operatorname{Im} \widetilde{Q}=Q$  ( $e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$ ), и комплексное перемещение  $\widetilde{q}$ , мнимая часть которого

представляет собой искомую обобщенную координату:  $\operatorname{Im} \tilde{q} = q$ . Таким образом, дифференциальное уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$\operatorname{Im}(a\overset{\sim}{q} + b\overset{\dot{\circ}}{q} + c\overset{\sim}{q}) = \operatorname{Im}(He^{i\omega t}),$$

а отсюда — перейти к уравнению, связывающему комплексные величины  $\tilde{q}$  и  $\tilde{Q}^*$ ):

$$\ddot{aq} + \dot{bq} + cq = He^{i\omega t}. \tag{6.25}$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{q} = \tilde{A}e^{i\omega t}. (6.26)$$

Подставляя (6.26) в (6.25) и сокращая на общий множитель  $e^{i\omega t}$ , получаем уравнение относительно комплексной амплиту $\partial$ ы  $\widetilde{A}$ , из которого находим

$$\tilde{A} = \frac{H}{c - a\omega^2 + ib\omega}. (6.27)$$

Знаменатель правой части

$$\tilde{c} = c - a\omega^2 + ib\omega \tag{6.28}$$

называется комплексной динамической жесткостью. Таким образом, комплексная амплитуда вынужденных колебаний равна отношению амплитуды гармонической вынуждающей силы и комплексной динамической жесткости системы. Величина, обратная комплексной динамической жесткости

$$W = \frac{1}{c - a\omega^2 + ib\omega} \tag{6.29}$$

представляет собой частотную характеристику (комплексную динамическую податливость) системы. Как видно, частотная характеристика системы определяет комплексную амплитуду вынужденных колебаний при единичной амплитуде вынуждающей силы.

$$a\dot{q} + b\dot{q} + cq = He^{i\omega t}$$

мысленно подразумевая под q комплексное перемещение и имея в виду, что затем в найденном выражении q будет удержана только его мнимая часть (см. также сноску на стр. 134).

<sup>\*)</sup> Иногда вместо уравнения (6.25) пишут

Комплексная амплитуда (6.27) может быть представлена также в виде экспоненты. Для этого нужно прежде всего освободиться от мнимости в знаменателе, умножив числитель и знаменатель (6.27) на выражение  $c-a\omega^2-ib\omega$ . Тогда получится

$$\widetilde{A} = \frac{H\left[\left(c - a\omega^2\right) - ib\omega\right]}{\left(c - a\omega^2\right)^2 + \left(b\omega\right)^2}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\widetilde{A} = Ae^{-i\gamma},\tag{6.30}$$

где

$$A = |\widetilde{A}| = \frac{H}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}}, \quad \gamma = \arctan\left[\frac{b\omega}{c - a\omega^2}\right].$$
 (6.31)

Таким образом, согласно (6.26) и (6.30) комплексное перемещение определяется в виде

$$\tilde{q} = \tilde{A}e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t - \gamma)},\tag{6.32}$$

а его мнимая часть, т. е. искомое перемещение, — в виде

$$q = A\sin(\omega t - \gamma). \tag{6.33}$$

Естественно, полученные результаты совпадают с полученными выше (см. выражения (6.7) и (6.8)).

Принятый выше выбор начала отсчета времени, конечно, не имеет принципиального значения. Так, при другом специальном выборе начала отсчета времени ту же вынуждающую силу можно записать в виде  $Q = H\cos \omega t$ . Тогда комплексные величины вводятся так, чтобы было  $Q = \operatorname{Re} \widetilde{Q}, \ q = \operatorname{Re} \widetilde{q}$ . Для этих величин вновь получится уравнение  $(6.25)^*$ ) и останутся справедливыми все соотношения (6.26) - (6.32); лишь вместо (6.33) естественно получится

$$q = A \cos(\omega t - \gamma)$$
.

Наконец, если начало отсчета времени принято произвольно, то вынуждающая сила представляется в виде  $H\sin(\omega t + \varphi)$ . Вместо уравнения (6.25) будет

$$\ddot{aq} + b\ddot{q} + c\ddot{q} = He^{i(\omega t + \varphi)}$$

<sup>\*)</sup> В этом случае иногда поступают, как сказано в сноске на стр. 133, но удерживают в решении не мнимую, а действительную часть.

и вместо частного решения (6.26) нужно принять  $\tilde{q} = \tilde{A}e^{i(\omega t + \phi)}$ .

При этом опять окажутся справедливыми выражения (6.27)-(6.31), но вместо (6.32) получим

$$\tilde{q} = A e^{i(\omega t + \varphi - \gamma)},$$

а вместо (6.33) —

(6.34) компактную форму

$$q = A \sin(\omega t + \varphi - \gamma).$$

Как и должно было получиться, общие характеристики колебаний (амплитуда, частота) совпадают с тем, что было найдено выше для случая, когда вынуждающая сила записывалась в виде  $H\sin\omega t$ .

Комплексная форма удобна и при анализе действия произвольной периодической вынуждающей силы, которую можно представить в виде разложения в ряд Фурье (5.23). В данном случае к комплексной форме удобно перейти несколько иначе, чем это было сделано выше.

В каждый член ряда (5.23) подставим

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2} (e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}), \quad \sin n\omega t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}).$$

Тогда после перегруппировки слагаемых вынуждающая сила запишется в виде

$$Q(t) = \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[ (G_n - iH_n) e^{in\omega t} + (G_n + iH_n) e^{-in\omega t} \right].$$
(6.34)

Входящую сюда сумму можно представить в виде двух сумм. Первую из них запишем в виде  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{in\omega t}$ , где  $B_n = \frac{1}{2} (G_n - iH_n)$ , а вторую — в виде  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* e^{-in\omega t}$ , где  $B_n^* = \frac{1}{2} (G_n + iH_n)$ . Заменив вторую сумму эквивалентным выражением  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* e^{in\omega t}$ , придадим всему разложению

$$Q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\omega t}, \qquad (6.35)$$

в которой

$$B_n = \begin{cases} \frac{1}{2} (G_n - iH_n) & \text{при} & n > 0; \\ \frac{1}{2} G_0 & \text{при} & n = 0; \\ \frac{1}{2} (G_n + iH_n) & \text{при} & n < 0. \end{cases}$$

Отметим, что каждое из слагаемых  $B_n e^{in\omega t}$  — комплексная величина (кроме вещественного слагаемого  $B_0$ ), но сумма любой пары слагаемых с номерами n и -n — вещественна. Соответственно вещественна и вся сумма (6.35). Совокупность величин  $|2B_n|$  представляет амплитудный спектр силы Q(t).

Опираясь на представление (6.35), запишем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{aq} + \dot{bq} + cq = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\omega t}$$
 (6.36)

и будем разыскивать его решение в виде

$$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{A}_n e^{in\omega t}. \tag{6.37}$$

Подставляя (6.37) в (6.36) и почленно приравнивая коэффициенты при одинаковых членах  $e^{in\omega t}$ , входящих в обе части равенства, найдем комплексные амплитуды

$$\mathcal{A}_n = B_n W_n. \tag{6.38}$$

Здесь

$$W_n = \frac{1}{c - a \left(n\omega\right)^2 + ibn\omega} \tag{6.39}$$

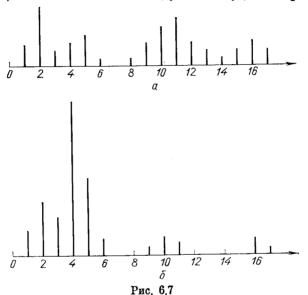
— частотная характеристика, подобная (6.29), но с заменой  $\omega$  на  $n\omega$ . Окончательно имеем

$$q = \sum_{n = -\infty}^{\infty} B_n W_n e^{in\omega t}. \tag{6.40}$$

Отметим, что здесь, как и в (6.36), каждому слагаемому номера n соответствует комплексно сопряженное слагаемое номера -n, так что сумма любой такой пары слагаемых вещественна.

Совокупность величин  $|2B_nW_n|$  образует амплитудный спектр перемещения q(t). Сопоставляя (6.35) и (6.40),

можно условно сказать, что амплитудный спектр перемещений «равен» амплитудному спектру вынуждающей силы, «умноженному» на частотную характеристику системы. Так как частотная характеристика зависит от номера n, то соотношения между амплитудами гармоник перемещения отличаются (чаще всего, существенно отличаются) от соотношений между амплитудами гармоник



вынуждающей силы. Естественно, что, как правило, особенно значительными оказываются амплитуды тех гармоник перемещения, частота которых близка к собственной частоте системы.

Один из примеров такого рода показан на рис. 6.7, который относится к случаю, когда на систему с собственной частотой k действует периодическая вынуждающая сила с периодом  $8\pi/k$ . Частоты гармоник этой силы равны  $\frac{k}{4}$ ;  $\frac{k}{2}$ ;  $\frac{3k}{4}$ ; k;  $\frac{5k}{4}$ ..., т. е. частота четвертой гармоники совпадает с собственной частотой системы. На рис. 6.7, a показаны амплитуды гармоник вынуждающей силы, а на рис. 6.7, b— амплитуды гармоник перемещения.

Таким образом, переход к комплексной форме создает определенные удобства при анализе колебаний, вызывае-

мых не только гармонической, но и произвольной периодической вынуждающей силой. Более того, комплексная форма также позволяет успешно изучать колебания, вызываемые действием непериодических вынуждающих сил Q(t). Такую силу можно представить в виде интеграла  $\Phi ypbe$ 

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (6.41)$$

который можно рассматривать как обобщение суммы дискретных слагаемых, данной в выражении (6.35). В (6.41) сила Q(t) представлена совокупностью элементарных гармонических составляющих со всеми частотами, непрерывно распределенными в бесконечных пределах  $[-\infty, \infty]$ , причем малому интервалу частот от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$  соответствует элементарная гармоническая составляющая с амплитудой  $F(\omega)d\omega$ . Соответственно сказанному,  $F(\omega)$  можно рассматривать как непрерывный амплитудный спектр силы Q(t). Для него справедливо выражение

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) e^{-i\omega t} dt, \qquad (6.42)$$

которое называется преобразованием Фурье или фурье-образом функции Q(t). Фурье-образ  $F(\omega)$  — комплексная функция частоты:

$$F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega), \tag{6.43}$$

в которой  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ — вещественные функции частоты. Поскольку Q(t)— вещественная функция, то из (6.42) следует, что

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \cos \omega t \, dt, \quad B(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(t) \sin \omega t \, dt,$$
(6.44)

а интеграл Фурье (6.41) для Q(t) принимает вид

$$Q(t) = 2\int_{0}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega - 2\int_{0}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega. \quad (6.45)$$

Согласно (6.38) элементарная вынуждающая сила  $F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$  вызывает колебания той же частоты, а их

амплитуда равна  $F(\omega)W(\omega)d\omega$ . Следовательно, колебания, вызываемые всеми элементарными воздействиями, т. е. заданной вынуждающей силой Q(t), определяются в виде интеграла

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) W(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (6.46)$$

где  $W(\omega)$  — частотная характеристика (6.29), которая в данном случае является непрерывной функцией частоты. Однако перемещение q(t) также можно представить в виде, аналогичном (6.41):

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \qquad (6.47)$$

где  $f(\omega)$  — амплитудный спектр перемещения. Сопоставляя выражения (6.46) и (6.47), видим, что

$$f(\omega) = F(\omega)W(\omega). \tag{6.48}$$

Таким образом, можно сказать, что амплитудный спектр перемещения равен амплитудному спектру вынуждающей силы, умноженному на частотную характеристику системы.

Рассмотрим пример. Положим, что на линейную систему с одной степенью свободы, начиная с момента t=0, действует произвольная вынуждающая сила Q(t), псчезающая в некоторый заданный момент T, так что при t>T сила равна нулю. Как будет происходить движение системы после исчезновения силы, т. е. при t>T?

Перемещения системы при t > T можно определить с помощью (5.19) в виде

$$q = \frac{1}{ak} \int_{0}^{T} Q(\xi) \sin k (t - \xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{ak} \left[ \sin kt \int_{0}^{T} Q(\xi) \cos k\xi d\xi - \cos kt \int_{0}^{T} Q(\xi) \sin k\xi d\xi \right].$$

Так как при t < 0 и t > T сила Q(t) равна нулю, то последнее выражение можно записать, формально расширив

пределы интегрирования:

$$q = \frac{1}{ak} \left[ \sin kt \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) \cos k\xi \, d\xi - \cos kt \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) \sin k\xi \, d\xi \right].$$

Согласно (6.48) можно записать

$$q = \frac{2\pi}{ak} \left[ A(k)\sin kt + B(k)\cos kt \right].$$

Здесь A(k) и B(k)— составляющие амплитудного спектра вынуждающей силы, соответствующие частоте  $\omega=k$ . Амплитуда колебаний величины q(t) определяется выражением

$$q_{\text{max}} = \frac{2\pi}{ak} \sqrt{A^2(k) + B^2(k)} = \frac{2\pi}{ak} |F(k)|.$$
 (6.49)

Отсюда видно, что при любой вынуждающей силе амплитуда «остаточных» колебаний зависит только от модуля величины  $F(\omega)$  при  $\omega=k$ .

5. Влияние нелинейно-вязкого трения при гармонической вынуждающей силе. Замкнутое решение задачи о вынужденных колебаниях при произвольных нелинейных силах трения затруднительно даже в простейшем случае действия моногармонической вынуждающей силы, когда дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + R(\dot{q}) + cq = H\cos\omega t. \tag{6.50}$$

Для приближенного решения этого уравнения воспользуемся методом энергетического баланса, т. е. заменим заданную нелинейную силу  $R(\dot{q})$  эквивалентной в энергетическом отношении линейной силой  $b_0\dot{q}$ ; коэффициент  $b_0$  будем разыскивать из условия равенства работ, совершаемых обеими силами за один период:

$$\int_{0}^{T} R(\dot{q}) \, \dot{q} \, dt = \int_{0}^{T} b_{0} \, \dot{q} \dot{q} \, dt. \tag{6.51}$$

Далее приближенно примем, что и в общем случае нелинейного трения стационарный колебательный процесс описывается, как в случае линейного трения, выражением

 $q = A\sin(\omega t - \gamma). \tag{6.52}$ 

При этом уравнение энергетического баланса (6.51) можно записывать для полупериода колебаний, в течение ко-

торого скорость (а вместе с этим и сила R) не меняет знак. Подставив (6.52) в (6.51), найдем

$$-\int_{0}^{\pi} R\left(-A\omega\sin\psi\right)A\sin\psi\,d\psi = \frac{\pi}{2}A^{2}\omega b_{0}, \quad (6.53)$$

где  $\psi = \omega t - \gamma$ . Отсюда следует формула, определяющая эквивалентный коэффициент линейного трения:

$$b_0 = -\frac{2\int\limits_0^\pi R\left(-A\omega\sin\psi\right)\sin\psi\,d\psi}{\pi A\omega}.\tag{6.54}$$

Пусть, например, сила трения задана нелинейной зависимостью (2.17). При этом

$$R(\dot{q}) = b\dot{q} |\dot{q}|^{n-1}$$

и числитель выражения (6.54) равен

$$2\int_{0}^{\pi}b\left(-A\omega\sin\psi\right)^{n}\sin\psi\,d\psi=-4A^{n}b\omega^{n}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{n+1}\psi\,d\psi.$$

Входящий сюда интеграл был выше обозначен через I (см. § 2, (2.20)), так что окончательно получаем

$$b_0 = \frac{4bI}{\pi} (\overline{A}\omega)^{n-1}. \tag{6.55}$$

Аналогично можно определить эквивалентный коэффициент  $b_0$  и в других случаях нелинейного трения.

После того как коэффициент  $b_0$  найден, задача сводится к рассмотрению эквивалентной линейной системы, движение которой определяется дифференциальным уравнением (6.4). Запишем соответствующее этой задаче выражение (6.9) для амплитуды колебаний, подставив  $h = b_0/2a$  и  $c = ak^2$ :

$$A = \frac{H}{c \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left[\frac{\overline{b_0(A) \omega}}{c}\right]^2}}.$$
 (6.56)

Здесь неизвестная амплитуда A входит не только в левую часть равенства, но и в правую его часть, так как коэффициент  $b_0$  зависит от той же амплитуды A. В связи с этим соотношение (6.56) следует рассматривать не как формулу, а как уравнение для определения амплитуды A.

Для построения резонансной кривой удобнее разрешить уравнение (6.56) относительно  $\omega/k$ :

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{2a^2k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_0^2}{2a^2k^2}\right)^2 - \frac{b_0^2}{a^2} + \left(\frac{H}{Ac}\right)^2}},$$

а затем, задаваясь значениями A, вычислять  $b_0(A)$  и определять соответствующие отношения  $\omega/k$ .

Для определения резонансной амплитуды положим в (6.56)  $\omega=k$ ; тогда уравнение примет вид

$$b_0(A) = \frac{H}{A\omega}.$$

В частности, если коэффициент  $b_0$  определяется формулой (6.55), можно найти  $A=\frac{1}{k} \sqrt[n]{\frac{\pi H}{4bI}};$  например, при n=2 (I=0,667) получим  $A=\frac{1,085}{k} \sqrt[N]{\frac{H}{h}}.$ 

Нужно отметить, что в рассматриваемых задачах амилитуда вынужденных колебаний непропорциональна амплитуле силы.

6. Влияние гистерезиса. То же соотношение энергетического баланса может быть положено в основу исследования вынужденных колебаний при наличии «частотно-независимого» гистерезиса. Для этого нужно приравнять площадь петли гистерезиса, определяемую формулой (2.43)

$$\Omega = \alpha A^{n+1}.$$

работе, совершаемой за один период эквивалентной силой линейного трения. Эта работа вдвое больше правой части соотношения (6.53), вычисленной для полупериода, так что получаем равенство

$$\alpha A^{n+1} = \pi A^2 \omega b_0.$$

Отсюда находим коэффициент эквивалентного линейного трения в виде

$$b_0 = \frac{\overline{\alpha A^{n-1}}}{\pi \omega},$$

и уравнение (6.56) принимает вид

$$A = \frac{H}{c \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha A^{n-1}}{\pi c}\right)^2}}.$$
 (6.57)

Решение этого нелинейного алгебраического уравнения несложно при значениях n=0 (сухое трение) и n=2; для вычислений при иных значениях n удобнее пользоваться обратной зависимостью

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{1 \pm \frac{H}{cA} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha A^n}{\pi H}\right)^2}}.$$

Для резонансных условий ( $\omega = k$ ) из (6.57) сразу нахоним  $A = \sqrt[n]{\pi H/\alpha}$ .

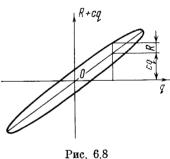
Отметим, что гистерезисную силу трения при незатухающих гармонических колебаниях удобно описывать соотношением

$$R = \frac{\alpha A^n}{\pi} \sqrt{1 - \frac{q^2}{A^2}} \operatorname{sign} \dot{q}. \tag{6.58}$$

(эллиптическая петля гистерезиса— см. рис. 6.8), которое соответствует выражению (2.43) для рассеиваемой за один цикл энергии. Если воспользоваться выражением

(6.58), то можно найти установившиеся вынужденные колебания, не прибегая к методу энергетического бабанса, непосредственно из дифференциального уравнения движения

$$\ddot{q} + \frac{\alpha A^n}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{q^2}{A^2}} \operatorname{sign} \dot{q} + k^2 q = \frac{H}{a} \sin \omega t. \quad (6.59)$$



Это, казалось бы, сложное, нелинейное уравнение имеет весьма простое точное решение

$$q = A\sin(\omega t - \gamma). \tag{6.60}$$

Для определения A и  $\gamma$  подставим решение (6.60) в уравнение (6.59), получим

$$-A\omega^{2}\sin(\omega t - \gamma) + \frac{\alpha A^{n}}{\pi a}\cos(\omega t - \gamma) + Ak^{2}\sin(\omega t - \gamma) = \frac{H}{a}\sin\omega t. \quad (6.61)$$

Второй член в левой части записан без множителя sign  $\dot{q}$ , так как нужная для уравнения смена знака силы тре-

ния (при изменении знака скорости) здесь обеспечивается изменением знака косинуса. Преобразуя соотношение (6.61), получаем

$$\begin{split} \left[ A \left( k^2 - \omega^2 \right) \cos \gamma + \frac{\alpha A^n}{\pi a} \sin \gamma - \frac{H}{a} \right] \sin \omega t - \\ - \left[ A \left( k^2 - \omega^2 \right) \sin \gamma - \frac{\alpha A^n}{\pi a} \cos \gamma \right] \cos \omega t = 0. \end{split}$$

Для тождественного выполнения этого равенства необходимо, чтобы выражения, стоящие в квадратных скобках, были порознь равны нулю, т. е.

$$A(k^2 - \omega^2)\cos\gamma + \frac{\alpha A^n}{\pi a}\sin\gamma = \frac{H}{a}$$

$$A(k^2 - \omega^2)\sin\gamma - \frac{\alpha A^n}{\pi a}\cos\gamma = 0.$$

Отсюда находим

$$A = \frac{H}{c \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha A^{n-1}}{\pi c}\right)^2}} t \operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha A^{n-1}}{\pi a (k^2 - \omega^2)}$$
(6.62)

Заметим, что первое из соотношений (6.62) совпадает с ранее найденным соотношением (6.57).

7. Случайные колебания\*). Всюду выше было принято, что вынуждающие силы заданы как детерминированные функции времени. Такая постановка задач теории вынужденных колебаний приемлема, когда случайные составляющие внешних сил (практически всегда неизбежные) относительно малы по сравнению с основными, детерминированными составляющими. Но в ряде прикладных задач весьма значительные вынуждающие силы в принципе не поддаются удовлетворительному детерминистическому описанию и должны считаться случайными функциями времени. Таковы, например, нагрузки на рабочие органы многих строительных и сельскохозяйственных машин, ветровые нагрузки на здания и инженерные сооружения и т. п. Со случайными функциями времени приходится иметь дело и в некоторых задачах о кинема-

<sup>\*)</sup> Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями теории вероятностей.

тическом возбуждении, например при анализе колебаний автомобиля, движущегося по неровной дороге, или при расчетах конструкций на сейсмические нагрузки.

Теория случайных вынужденных колебаний посвяще-

на решению задач следующих четырех типов:

1) отыскание вероятностных характеристик движения системы по заданным вероятностным характеристикам внешнего воздействия (прямая задача);

- 2) отыскание вероятностных характеристик внешних воздействий по известным (экспериментально найденным) вероятностным характеристикам вибраций (обратная задача):
- 3) определение свойств системы (ее оператора и параметров) по известным (экспериментально найденным) вероятностным характеристикам на входе и выходе системы (задача идентификации);
- 4) синтез систем, обладающих заданными свойствами по отношению к некоторому классу внешних воздействий (задача синтеза, часто являющаяся задачей оптимизации).

Очень коротко остановимся на первой задаче применительно к вынужденным колебаниям линейной механической системы с одной степенью свободы.

В практических условиях случайные вынуждающие силы нередко обнаруживают определенную однородность относительно времени, они колеблются около среднего неизменного значения, причем ни их средняя амплитуда, ни общий характер заметных изменений во времени не претерпевают. Однородны во времени и некоторые виды случайного кинематического возбуждения, как, например, воздействие неровностей дороги на движущийся по ней автомобиль, конечно, при условии, что на большом протяжении качество покрытия остается практически неизменным, а автомобиль движется с постоянной скоростью.

Такие воздействия с постоянными вероятностными характеристиками относятся к категории стационарных случайных процессов. В эту категорию входят и результаты таких воздействий, т. е. вызванные ими колебания механических систем (имеются в виду колебания около

устойчивого состояния равновесия).

Из стационарной случайной функции, описывающей вынуждающую силу, всегда можно выделить и вычесть ее математическое ожидание, постоянное вследствие ста-

ционарности функции; после этого рассматривается переменный «остаток»— центрированная случайная функция  $\mathring{Q}(t)$ . Выразительной характеристикой ее свойств служит корреляционная функция— математическое ожидание произведения  $\mathring{Q}(t)\mathring{Q}(t+\tau)$ , сомножители которого относятся к двум моментам времени, разделенным промежутком  $\tau$ . Эта функция оценивает степень зависимости между «сечениями» случайной функции в различные моменты времени. Если случайная функция действительно стационарна, то результаты вычислений не могут зависеть от выбора момента времени t, а будут зависеть только от абсолютной величины  $|\tau|$ .

В практических случаях корреляционную функцию  $k_Q(\tau)$  получают путем обработки данных натурных наблюдений и часто представляют в виде несложных аналитических выражений типа

$$De^{-\alpha|\tau|}$$
,  $De^{-\alpha\tau^2}$ ,  $De^{-\alpha|\tau|}\cos\beta t$ ,  $De^{-\alpha\tau^2}\cos\beta t$ 

с соответственно подобранными значениями параметров D,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Отметим, что в ходе такой обработки контролируется сама стационарность изучаемого процесса — по признаку независимости математического ожидания произведений  $Q(t)Q(t+\tau)$  от выбора значений t. Разумеется, что для заведомо стационарного случайного процесса корреляционную функцию можно определять как математическое ожидание произведения  $Q(0)Q(\tau)$ . Значение корреляционной функции при  $\tau=0$  представляет собой математическое ожидание квадрата стационарной случайной функции,  $\tau$ . е. ее дисперсию  $k_Q(0)=D$ .

При обсуждении детерминированных задач теории вынужденных колебаний в п. 5 § 5 и п. 5 § 6 колебательный процесс был представлен в виде суммы гармонических колебаний различных частот. Распределение амплитуд по различным частотам (дискретный или непрерывный амплитудный спектр) дает возможность судить о том, какого рода колебания доминируют в рассматриваемом процессе, какова его внутренняя структура. Такие спектральные представления могут относиться и к вынуждающей силе, и к координате системы q(t).

Аналогично этому стационарный случайный процесс также может быть описан суммой гармонических составляющих, но их амплитуды будут случайными величина-

ми. Спектром стационарной случайной функции принято называть распределение дисперсий по всем частотам. Если спектр непрерывный, то его описывают функцией  $S(\omega)$ — спектральной плотностью дисперсии стационарной случайной функции (часто слово «дисперсия» в этом наименовании опускают). Между спектральной плотностью  $S(\omega)$  и корреляционной функцией  $k(\tau)$  существуют соотношения

$$k(\tau) = \int_{0}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$
 (6.63)

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} k(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau, \qquad (6.64)$$

определяющие прямое и обратное косинус-преобразования Фурье.

Если в (6.63) положить  $\tau = 0$ , то для дисперсии стационарной случайной функции получится

$$D = k(0) = \int_{0}^{\infty} S(\omega) d\omega. \tag{6.65}$$

Таким образом, если корреляционная функция  $k_Q(\tau)$  известна (задана, найдена), то по выражению (6.64) находится спектральная плотность  $S_Q(\omega)$  и можно перейти к определению колебаний механической системы, вызванных действием случайной силы. Здесь основным является соотношение

$$S_q(\omega) = |W|^2 S_Q(\omega), \qquad (6.66)$$

связывающее спектральную плотность колебаний системы  $S_q(\omega)$  со спектральной плотностью вынуждающей силы. В этом соотношении W — частотная характеристика системы, которая для силового возбуждения была дана выше выражением (6.29), так что

$$|W|^2 = \frac{1}{(c - a\omega^2)^2 + (b\omega)^2}.$$
 (6.67)

После вычисления  $S_q(\omega)$  по выражению (6.66) можно найти дисперсию обобщенной координаты

$$D_q = \int_0^\infty S_q(\omega) d\omega, \qquad (6.68)$$

и, наконец, среднеквадратическое значение величины q:

$$\sigma_q = \sqrt{D_q}. \tag{6.69}$$

## § 7. Системы с одной степенью свободы при нелинейной восстанавливающей силе

1. Основные понятия. Нелинейность восстанавливающей силы существенно осложняет анализ колебаний, и в этом параграфе будет рассмотрено действие только гармонической вынуждающей силы; даже в этом наиболее простом случае приходится довольствоваться приближенным решением задачи. Характеристику нелинейной восстанавливающей силы будем считать симметричной:

$$F(q) = -F(-q), \tag{7.1}$$

а силы трения - отсутствующими.

При синусоидальном возбуждении дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + F(q) = H \sin \omega t.$$
 (7.2)

Необходимо сразу отметить, что функция

$$q = A \sin \omega t, \tag{7.3}$$

описывающая закон движения линейных систем, в данном случае не является точным решением задачи; если подставить (7.3) в уравнение (7.2), то оно не может быть тождественно удовлетворено ни при каком значении A. Естественно ожидать, что решение будет содержать также высшие гармоники с частотами  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ..., а возможно, и низшие гармоники с частотами  $\omega/2$ ,  $\omega/3$ , ...; ниже мы убедимся, что это в самом деле так. Колебания с высшими по отношению  $\omega$  частотами называются супергармоническими, колебания с низшими частотами — субгармоническими, а колебания с частотой  $\omega$  — основными.

В первом приближении можно ограничиться исследованием только основных колебаний: они чаще всего напболее важны; этому посвящен следующий п. 2. Дальнейшие уточнения можно получить, исследуя супергармонические колебания (см. п. 3) и субгармонические колебания (см. п. 4).

2. Основные колебания. Для нахождения основных колебаний приближенно примем закон движения в виде (7.3) и воспользуемся методом гармонического баланса (см. выше стр. 69-70). Образуем периодическую функцию  $F(A\sin\omega t)$  и, разложив ее в ряд Фурье, ограничимся учетом одного первого члена:

$$F(A \sin \omega t) \approx b_1 \sin \omega t.$$
 (7.4)

Здесь  $b_1$  определяется выражением (3.18). Подставив выражение (7.3) в первый член уравнения (7.2) и выражение (7.4)— во второй член того же уравнения, получим приближенное соотношение

$$-aA\omega^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A\sin\psi)\sin\psi \,d\psi = H, \qquad (7.5)$$

из которого можно определить амплитуду A.

Пусть, например, характеристика восстанавливающей силы имеет вид

$$F(q) = c_0 q + \beta q^3. \tag{7.6}$$

Прежде всего находим

$$\int_{0}^{2\pi} F(A\sin\psi)\sin\psi\,d\psi =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} (c_0 A \sin \psi + \beta A^3 \sin^3 \psi) \sin \psi d\psi = \pi c_0 A + \frac{3}{4} \pi \beta A^3.$$

При этом уравнение (7.5) принимает форму

$$A\left(\frac{c_0}{a} + \frac{3}{4}\frac{\beta}{a}A^2\right) = \frac{H}{a} + A\omega^2.$$
 (7.7)

Для выявления качественных свойств решения кубического уравнения (7.7) можно воспользоваться графическим способом; по своей наглядности он, пожалуй, превосходит аналитическое решение.

Построим график зависимости левой части от амплитуды A (см. кривую  $P_{\pi}(A)$  на рис. 7.1, a), а также прямую  $P_{\pi}(A)$ , соответствующую правой части; если часто-

та  $\omega$  невелика, то прямая  $P_{\pi}$  пересечет кривую  $P_{\pi}$  в одной точке, абсцисса которой  $A_1$  является единственным вещественным корнем уравнения (7.7). С увеличением частоты  $\omega$  угол наклона прямой к оси абсцисс будет возрастать, а значение корня  $A_1$ — увеличиваться. Наконец, при достаточно большом значении  $\omega = \omega_*$  прямая  $P_{\pi}$  коснется кривой  $P_{\pi}$  в третьем квадранте (рис. 7.1,  $\delta$ ),

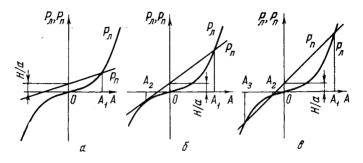


Рис. 7.1

а при дальнейшем увеличении  $\omega$  будет пересекать кривую  $P_{\pi}$  в трех точках (рис. 7.1,  $\theta$ ).

Соответственно уравнение (7.8) при  $\omega > \omega_*$  будет иметь три вещественных корня:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ . Изменение значений этих корней при постепенном увеличении частоты  $\omega$  показано на рис. 7.2, a; здесь же штриховой линией показана *скелетная кривая*, выражающая связь между частотой и амплитудой свободных колебаний той же системы.

Полученная амплитудно-частотная зависимость напоминает резонансную кривую для линейной системы, однако резонансный пик несколько «деформирован» соответственно искривлению скелетной линии при жесткой характеристике. Для системы с мягкой характеристикой амплитудно-частотная зависимость имеет вид, подобный рис. 7.2, 6.

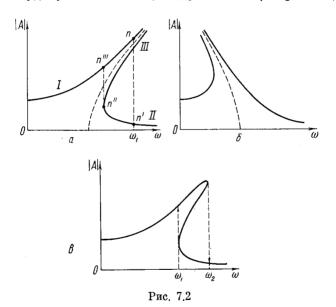
Хотя полученное решение приближенное, однако оно дает, по крайней мере качественно, верное представление об изменении амплитуды вынужденных колебаний с изменением их частоты: при достаточно больших значениях частоты вынуждающей силы решение становится неоднозначным и одному значению частоты соответствует три значения амплитуды А колебаний.

Дополнительные исследования (см. ниже § 9) показывают, что из трех возможных режимов движения при  $\omega > \omega_*$ 

$$q = A_1 \sin \omega t$$
,  $q = A_2 \sin \omega t$ ,  $q = A_3 \sin \omega t$ , (7.8)

устойчивы первый и второй, а третий режим неустойчив,— сколь угодно малые возмущения этого режима приводят движение системы к первому или второму режиму. В связи с этим физически о с у ществимы только первый и второй стационарные режимы.

Если постепенно увеличивать от нуля частоту  $\omega$ , то амплитуды увеличиваются, следуя ветви I (см. рис. 7.2, a).



Если при некотором значении частоты  $\omega = \omega_1$  система испытывает достаточно большое мгновенное возмущение, то происходит «срыв» амплитуды на ветвь II (точки n и n'). Если затем продолжать постепенное увеличение частоты  $\omega$ , то амплитуда колебаний будет уменьшаться, следуя кривой II. Если же после срыва амплитуд частоту  $\omega$  уменьшать, то будет происходить плавное возрастание амплитуды до точки n''. При дальнейшем уменьшении частоты амплитуда резко увеличивается (точка n'''

на ветви I) и затем вновь постепенно уменьшается, следуя ветви I.

Другое, также приближенное, решение можно получить по способу прямой линеаризации. Согласно этому приближенному способу (см. § 3) нелинейная характеристика F(q) заменяется эквивалентной линейной, так что дифференциальное уравнение (7.2) сразу принимает вид

 $a\ddot{q} + cq = H\sin\omega t. \tag{7.9}$ 

Величина c определяется так, как это было пояснено в  $\S$  3, по формуле (3.16); важно отметить, что в данном случае она не является параметром системы, а зависит от амплитуды колебаний. Амплитуда стационарной части решения линейного дифференциального уравнения (7.9), как известно, имеет вид

 $A = \frac{H}{c - a\omega^2} \tag{7.10}$ 

Так как c зависит от амплитуды A, то соотношение (7.10) следует рассматривать как уравнение для определения A. Так, при характеристике (7.6) находим по формуле (3.16)

$$c = \frac{5}{A^5} \int_0^A (c_0 q + \beta q^3) q^3 dq = c_0 + \frac{5\beta A^2}{7},$$

и (7.10) приобретает вид, подобный (7.7):

$$A\left(c_0+\frac{5}{7}\beta A^2\right)=\frac{H}{a}+A\omega^2.$$

Графическое решение этого уравнения в принципе совпадает с данным выше для уравнения (7.7).

Если в системе имеется трение, то обе ветви кривых смыкаются, как показано на рис. 7.2, e. При постепенном возрастании частоты становится неизбежным срыв амплитуд при  $\omega = \omega_2$ ; в случаях постепенного уменьшения частоты, которое начинается при достаточно больших ее значениях, срыв амплитуд происходит при  $\omega = \omega_1$ .

3. Супергармонические колебания. Для того чтобы отразить в решении супергармонические колебания, вновь воспользуемся методом гармонического баланса и положим (для случая симметричной характеристики восстанавливающей силы)

$$q = A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + \ldots + A_{\bullet} \sin \omega t. \quad (7.11)$$

В первый член дифференциального уравнения (7.2) подставим (7.11), а во второй член вместо функции

$$F(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + ... + A_s \sin s\omega t)$$

подставим s первых членов ее разложения в ряд Фурье  $F(A_1\sin\omega t + A_3\sin3\omega t + \ldots + A_s\sin s\omega t) \approx$ 

$$\approx b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3\omega t + \ldots + b_s \sin s\omega t$$
, (7.12)

коэффициенты которого

$$b_r = \frac{2}{T} \int_0^1 F(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots$$

$$\ldots + A_s \sin s\omega t \sin r\omega t dt \quad (r = 1, 2, \ldots, s) \quad (7.13)$$

нелинейно зависят от всех амплитуд  $A_1, A_3, \ldots, A_s$ .

Таким образом, подстановка (7.11) в дифференциальное уравнение (7.2) приводит к соотношению

$$-A_1\omega^2 a \sin \omega t - 9A_3\omega^2 a \sin 3\omega t - \ldots + b_1(A_1, A_3, \ldots) \times$$

$$\times \sin \omega t + b_3(A_1, A_3, \ldots) \sin 3\omega t + \ldots = H \sin \omega t. \quad (7.14)$$

Для тождественного выполнения этого равенства нужно приравнять коэффициенты при каждой из гармоник  $\sin \omega t$ ,  $\sin 3\omega t$ , ...,  $\sin s\omega t$ , содержащихся в левой и правой частях (7.14):

$$-s^2A_sa\omega^2 + b_s(A_1, A_3, ..., A_s) = 0.$$

Из нелинейных уравнений (7.15) можно найти значения амплитуд  $A_1, A_3, \ldots, A_s$ .

Пусть, например, характеристика силы имеет вид (7.6). Ограничиваясь двумя первыми членами суммы (7.12), имеем

$$F(q) \approx c_0(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t) + \beta(A_1 \sin \omega t + A_3 \sin 3\omega t)^3.$$

Далее, по формулам (7.13) находим

$$\begin{split} b_1 &= k_0^2 \left[ A_1 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{c_0} \left( A_1^3 - A_1^2 A_3 + 2 A_1 A_3^2 \right) \right]_{\mathbf{r}} \\ b_3 &= k_0^2 \left[ A_3 + \frac{1}{4} \frac{\beta}{c_0} \left( -A_1^3 + 6 A_1^2 A_3 + 3 A_3^3 \right) \right]_{\mathbf{r}} \end{split}$$

 $\left(k_{0}^{2}=c/a\right)$  и уравнения (7.15) принимают вид

$$(k_0^2 - \omega^2) A_1 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{a} (A_1^3 - A_1^2 A_3 + 2A_3^2 A_1) = \frac{H}{a},$$

$$(k_0^2 - 9\omega^2) A_3 + \frac{3}{4} \frac{\beta}{a} (-\frac{1}{3} A_1^3 + 2A_1^2 A_3 + A_3^3) = 0.$$

$$(7.16)$$

Положив в первом уравнении  $\beta = 0$ , приближенно найдем выражение для амплитуды основных колебаний:

$$A_1 = \frac{H}{a(k_0^2 - \omega^2)}. (7.17)$$

Сохранив в последних скобках второго уравнения (7.16) только основное слагаемое  $-\frac{1}{3}A_{1x}^3$  также приближенно получим амплитуду супергармонических колебаний

$$A_3=rac{eta A_1^3}{4a\left(k_0^2-9\omega^2
ight)} \epsilon$$

т. е. малую величину порядка  $\beta$ . Если подставить найденные первые приближения в отброшенные члены уравнения (7.16), то получим улучшенные значения  $A_1$  и  $A_3$ , причем поправка для  $A_1$  будет иметь порядок  $\beta$ , а поправка для  $A_3$ — порядок  $\beta^2$ . Этот процесс последовательных приближений можно продолжить и далее.

Важно отметить, что амплитуда супергармонических колебаний  $A_3$  мала сравнительно с амплитудой  $A_1$  основных колебаний (конечно, при условии, что не мала разность  $k_0^2 - 9\omega^2$ ).

4. Субгармонические колебания. Ограничимся случаем симметричной характеристики восстанавливающей силы вида (7.6) и для нахождения амплитуд субгармонических колебаний снова воспользуемся методом гармонического баланса.

Положим, что основную гармонику с частотой  $\omega$  вынуждающей силы сопровождает *субгармоника* с частотой  $\omega/3$ :

$$q = A_1 \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}$$
. (7.18)

Функция  $F\left(A_1\sin\omega t + A_{1/3}\sin\frac{\omega t}{3}\right)$  имеет период  $6\pi/\omega$ , втрое больший основного периода T. Разлагая ее в ряд

Фурье и ограничиваясь двумя первыми членами, найдем

$$F\left(A_1\sin\omega t + A_{1/3}\sin\frac{\omega t}{3}\right) = b_{1/3}\sin\frac{\omega t}{3} + b_1\sin\omega t, (7.19)$$

где

$$b_{1/3} = \frac{2}{3T} \int_{0}^{3T} F\left(A_{1} \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \frac{\omega t}{3} dt,$$

$$b_{1} = \frac{2}{3T} \int_{0}^{3T} F\left(A_{1} \sin \omega t + A_{1/3} \sin \frac{\omega t}{3}\right) \sin \omega t dt.$$
(7.20)

Далее подставляем (7.18) и (7.19) в уравнение (7.2); сравнивая коэффициенты гармоники и субгармоники в правых и левых частях, приходим к двум нелинейным уравнениям.

При характеристике (7.6) эти уравнения имеют вид

$$(k_0^2 - \omega^2) A_1 + \frac{1}{4} \frac{\beta}{a} \left( 3A_1^3 + 6A_{1/3}^2 A_1 - A_{1/3}^3 \right) = \frac{H}{a},$$
(7.21)

$$\left(k_0^2 - \frac{\omega^2}{9}\right)A_{1/3} + \frac{3}{4}\frac{\beta}{a}\left(A_{1/3}^3 - A_{1/3}^2A_1 + 2A_1^2A_{1/3}\right) = 0.$$

Приближенное значение для амплитуды  $A_1$  найдем из первого уравнения (7.21), положив в нем  $\beta=0$ :

$$A_1 = \frac{H}{a\left(k_0^2 - \omega^2\right)}. (7.22)$$

Далее, предположив, что  $A_{1/3} \neq 0$ , представим второе уравнение (7.21) в виде

$$A_{1/3}^2 - A_{1/3}A_1 + 2A_1^2 + \frac{4(9k_0^2 - \omega^2)a}{27\beta} = 0.$$

Отсюда следует выражение амплитуды субгармонических колебаний

$$A_{1/3} = \frac{A_1}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{16 \left(\omega^2 - 9k_0^2\right) a}{27A_1^2 \beta} - 7} \right]. \tag{7.23}$$

Отметим, что при  $\beta > 0$  для вещественности решения необходимо выполнение условия

$$\omega > 3k_0 \sqrt{1 + \frac{21}{16} \frac{\beta}{c} A_1^2},$$
 (7.24)

т. е. субгармонические колебания возможны лишь при достаточно больших (относительно основной частоты свободных колебаний) частотах возбуждения. Если  $\beta < 0$ , знак неравенства в (7.24) должен быть изменен на обратный.

С учетом (7.22) приближенно получим

$$A_{1/3} = \frac{H}{2a\left(k_0^2 - \omega^2\right)} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{16\left(\omega^2 - 9k_0^2\right)\left(\omega^2 - k_0^2\right)^2 a^3}{27H^2\beta} - 7} \right].$$
(7.25)

Исходя из первых приближений (7.22) и (7.25), можно получить с помощью основных уравнений (7.21) дальнейшие уточнения значений амплитуд колебаний  $A_1$ M A1/3.

На рис. 7.3 показаны зависимости амплитуд колеба-

ний  $A_1$  и  $A_{1/3}$  от частоты  $\omega$  вынуждающей силы. Таким образом, субгармонические колебания в системах с жесткой (мягкой) характеристикой возможны

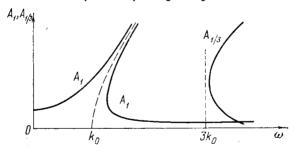


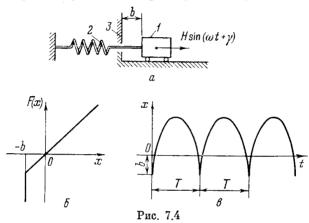
Рис. 7.3

лишь при достаточно больших (достаточно малых) значениях частоты о вынуждающей силы; однако если субгармонические колебания возникают, то их амплитуды могут значительно превосходить амплитуды основных колебаний, происходящих с частотой ю.

В наших выкладках мы не учитывали действие сил трения: более подробный анализ показывает, что эти силы не только уменьшают амплитуды субгармонических колебаний, но способны — при их достаточной интенсивности — полностью подавить субгармонические колебания. 5. Способ поэтапного интегрирования для кусочно-ли-

нейных систем. В отличие от ранее рассмотренных в этом

параграфе случаев задача о вынужденных колебаниях систем с кусочно-линейными характеристиками в принципе допускает точное решение, которое соответствует сказанному в § 3, где речь шла о свободных колебаниях. Здесь, при анализе вынужденных колебаний также нужно поочередно решить ряд линейных задач, соответствующих прямым участкам характеристики, расположенным



между точками перелома. Для определения постоянных интегрирования служат условия перехода от этапа к этапу, а также условия периодичности.

Проследим применение этого способа на случае вынужденных колебаний системы, показанной на рис. 7.4, а. Эта виброударная система (модель Русакова — Харкевича) состоит из груза 1, упругого элемента 2 и одностороннего ограничителя 3, установленного с зазором b. На груз действует гармоническая вынуждающая сила, которая вызывает колебания, достаточно значительные для того, чтобы происходили удары груза об ограничитель.

Отсчет перемещений груза будем вести от положения, в котором пружина не деформирована. Начало отсчета времени совместим с моментом непосредственно после какого-либо удара груза об ограничитель. При этом гармоническую вынуждающую силу запишем в виде  $H\sin(\omega t + \gamma)$ , полагая H и  $\omega$  известными, а начальную фазу  $\gamma$  неизвестной. Кусочно-линейная характеристика этой системы состоит из двух полупрямых (рис. 7.4,  $\delta$ ).

Примем, что при ударе груза об ограничитель скорость груза мгновенно меняется, следуя соотношению

$$\dot{x}(0) = -R\dot{x}(-0), \tag{7.26}$$

где R — коэффициент восстановления; аргумент (-0) означает момент времени, непосредственно предшествующий удару.

Не рассматривая всех возможных движений, исследуем возможность существования строго периодического режима периода T, равного периоду  $2\pi/\omega$  вынуждающей силы. Еще до составления и решения уравнений задачи можно ожидать, что движение будет происходить в общих чертах так, как показано на рис. 7.4,  $\epsilon$ ; через равные промежутки времени T происходят удары об ограничитель, сопровождаемые сменой знака скорости.

Рассмотрим один период движения, в начале которого x(0) = -b. (7.27)

Кроме того, можно записать следующие условия перио-

$$x(T) = x(0), (7.28)$$

$$\dot{x}(T-0) = \dot{x}(-0). \tag{7.29}$$

Условия (7.28), (7.29) вместе с условием (7.27) позволяют найти все постоянные, которые войдут в решение задачи. Исключим скорость  $\dot{x}(-0)$  из (7.26) с помощью соотношения (7.29); тогда получится связь между скоростями в начале периода и в его конце (т. е. непосредственно перед следующим ударом):

$$\dot{x}(0) = -R\dot{x}(T-0). \tag{7.30}$$

Решение основного дифференциального уравнения, записанного для интервала движения между двумя ударами,

$$m\ddot{x} + cx = H\sin(\omega t + \gamma),$$

имеет вид

дичности:

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{H \sin (\omega t + \gamma)}{m (k^2 - \omega^2)}.$$
 (7.31)

Отсюда следует, что скорость меняется по закону

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt + \frac{H\omega \cos (\omega t + \gamma)}{m (k^2 - \omega^2)}.$$
 (7.32)

Из условий (7.27), (7.28) и (7.30) находим

$$egin{aligned} C_2 + rac{H\sin\gamma}{m\left(k^2 - \omega^2
ight)} &= -b, \ C_1\sin kT + C_2\cos kT + rac{H\sin\left(\omega T + \gamma
ight)}{m\left(k^2 - \omega^2
ight)} &= -b, \ C_1k + rac{H\omega\cos\gamma}{m\left(k^2 - \omega^2
ight)} &= \end{aligned}$$

$$egin{align} & \mathcal{O}_1^{1k-1} & m\left(k^2-\omega^2
ight) = & \\ & = & -R\left[C_1k\cos kT - C_2k\sin kT + rac{H\omega\cos\left(\omega T + \gamma
ight)}{m\left(k^2-\omega^2
ight)}
ight]. \end{split}$$

В этих трех уравнениях содержатся три неизвестные величины: постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , а также начальная фаза ү вынуждающей силы. Пусть, например, b=0; тогда, учитывая, что  $\sin(\omega T + \gamma) = \sin \gamma$ ,  $\cos(\omega T + \gamma) = \cos \gamma$ , после решения уравнений найдем

$$egin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= rac{(1+R)}{(1-R)}\operatorname{ctg}rac{kT}{2}rac{\omega}{k}, \ C_1 &= -rac{H\sin\gamma}{m\left(k^2-\omega^2
ight)}\operatorname{tg}rac{kT}{2}, \ C_2 &= -rac{H\sin\gamma}{m\left(k^2-\omega^2
ight)}. \end{aligned}$$

Теперь можно записать закон движения, справедливый для интервала времени 0 < t < T (на других интервалах времени движение полностью повторяется):

$$x = rac{H}{m(k^2 - \omega^2)} \left[ \sin{(\omega t + \gamma)} - \sin{\gamma} \cos{kt} - \sin{\gamma} \sin{kt} \operatorname{tg} rac{kT}{2} \right].$$

Конечно, приведенное исследование колебаний виброударной системы недостаточно полно. Во-первых, формальная возможность режима колебаний с периодом Т еще не означает его физической осуществимости — для этого необходимо, чтобы такой режим был устойчивым. Во-вторых, в подобных системах наряду с изученным режимом возможны периодические режимы с периодами вдвое, втрое и т. д. большими (субгармоники), и следовало бы также исследовать их существование и устойчивость. Именно так ставятся и решаются задачи о работе различных виброударных механизмов.

### § 8. Линейные системы с несколькими степенями свободы

1. Общие уравнения. Если на линейную колебательную систему без трения с *s* степенями свободы действуют внешние силы, являющиеся заданными функциями времени, то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s), \quad (8.1)$$

где  $Q_j = Q_j(t)$  — обобщенные выпуждающие силы, соответствующие избранным обобщенным координатам  $q_j$ . Пользуясь общими выражениями (4.2) для кинетической и потенциальной энергии, приходим согласно (8.1) к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{jk}q_k + c_{jk}q_k) = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s).$$
 (8.2)

Если обобщенные координаты выбраны так, что кинетическая эпергия представляется канонической формой (4.6), то  $a_{jk}=0$  при  $j\neq k$ , и система уравнений (8.2) упрощается:

$$a_j q_j + \sum_{k=1}^{s} c_{jk} q_k = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s).$$
 (8.3)

К этим уравнениям, каждое из которых содержит по одному обобщенному ускорению, можно прийти с помощью прямого способа, не пользуясь уравнениями Лагранжа.

Если при соответствующем выборе обобщенных координат к канонической форме приводится потенциальная энергия  $(c_{jk}=0$  при  $j\neq k)$ , то уравнения (8.2) принимают вид

$$\sum_{k=1}^{s} a_{jk} q_k + c_j q_j = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., s).$$
 (8.4)

Каждое из уравнений (8.4) содержит по одной обобщенной координате; эти уравнения можно получить непосредственно по обратному способу.

Ниже мы остановимся на некоторых важных типах зависимостей обобщенных вынуждающих сил  $Q_i(t)$  от времени.

2. Действие вынуждающих сил, изменяющихся по гармоническому закону; непосредственное решение. Предположим, что обобщенные вынуждающие силы изменяются по гармоническому закону

$$Q_j = H_j^* \sin(\omega t + \delta_j)$$
  $(j = 1, 2, ..., s),$  (8.5)

т. е. имеют одинаковые частоты, но различные амплитуды и фазы. Вместо (8.5) можно записать:

$$Q^{j} = H_{i}^{*} \cos \delta_{i} \sin \omega t + H_{i}^{*} \sin \delta_{i} \cos \omega t.$$
 (8.6)

Далее, можно разделить задачу на две задачи: одна из них относится к случаю действия синусоидальных вынуждающих сил

$$Q_j = H_j \sin \omega t \tag{8.7}$$

(здесь принято обозначение  $H_j = H_j^* \cos \delta_j$ ), а вторая — к случаю действия косинусоидальных вынуждающих сил

$$Q_j = G_j \cos \omega t \tag{8.8}$$

(где  $G_j = H_j^* \sin \delta_j$ ). Эти задачи совершенно однотипны, поэтому ограничимся случаем действия синусоидальных сил (8.7). Тогда уравнения (8.2) запишутся так:

$$\sum_{k=0}^{s} (a_{jk}q_k + c_{jk}q_k) = H_j \sin[\omega t \quad (j = 1, 2, ..., s). \quad (8.9)$$

Установившееся движение будем разыскивать в виде

$$q_j = A_j \sin \omega t \quad (j = 1, 2, ..., s).$$
 (8.10)

В этой записи видно, что все обобщенные координаты изменяются с единой частотой, равной частоте вынуждающих сил.

Подставляя (8.10) в дифференциальные уравнения (8.9), приходим к следующей системе алгебраических уравнений для определения амплитуд колебаний  $A_i$ :

$$\sum_{k=1}^{s} (c_{jk} - \omega^2 a_{jk}) A_k = H_j \quad (j = 1, 2, ..., s). \quad (8.11)$$

К такой же системе можно прийти, если в (8.9) ввести правые части  $H_j e^{i\omega t}$  и разыскивать решение в виде  $q_j = A_j e^{i\omega t}$ .

Решение системы уравнений (8.11) имеет вид

$$A_j = \frac{\Delta_j}{D}$$
  $(j = 1, 2, ..., s).$  (8.12)

Здесь D — определитель, составленный из коэффициентов системы (8.11),

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & c_{12} - a_{12}\omega^2 & \dots & c_{1s} - a_{1s}\omega^2 \\ c_{21} - a_{21}\omega^2 & c_{22} - a_{22}\omega^2 & \dots & c_{2s} - a_{2s}\omega^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{s1} - a_{s1}\omega^2 & c_{s2} - a_{s2}\omega^2 & \dots & c_{ss} - a_{ss}\omega^2 \end{vmatrix}, \quad (8.13)$$

и  $\Delta_j$ — определитель, который получается из D путем замены j-го столбца правыми частями системы (8.11). Совокупность значений  $A_j$  определяет форму вынужденных колебаний, т. е. конфигурацию системы при ее наибольшем отклонении от состояния равновесия.

Если сравнить полученный определитель D (8.13) с частотным определителем (4.29), то можно заметить, что они совпадают при  $\omega = k$ . Но в этом случае определитель D обращается в нуль, так как именно из этого условия были найдены собственные частоты  $k_1, k_2, \ldots, k_s$ . Однако если D=0, а  $\Delta_i \neq 0$ , то, как это видно из фор-

Однако если D=0, а  $\Delta_j\neq 0$ , то, как это видно из формулы (8.12), все амплитуды  $A_j$  становятся неограниченными, т. е. возникает резонанс. Таким образом, можно сказать, что резонанс наступает при совпадении частоты вынуждающей силы с любой из собственных частот.

Остановимся подробнее на случае системы с двумя степенями свободы. Из уравнений (8.11) можно получить следующие формулы для амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{split} A_{1} &= \frac{H_{1}\left(c_{22} - a_{22}\omega^{2}\right) - H_{2}\left(c_{12} - a_{12}\omega^{2}\right)}{\left(c_{11} - a_{11}\omega^{2}\right)\left(c_{22} - a_{22}\omega^{2}\right) - \left(c_{12} - a_{12}\omega^{2}\right)^{2}},\\ A_{2} &= \frac{H_{1}\left(c_{12} - a_{22}\omega^{2}\right) - H_{2}\left(c_{11} - a_{11}\omega^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(c_{11} - a_{11}\omega^{2}\right)\left(c_{22} - a_{22}\omega^{2}\right) - \left(c_{12} - a_{12}\omega^{2}\right)^{2}}. \end{split} \tag{8.14}$$

. .

Положим, далее, что надлежащим выбором координат достигнуто выполнение равенств  $a_{12}=a_{21}=0$  и, кроме того, задано  $H_2=0$ .

При этих условиях выражения (8.14) принимают вид

$$A_{1} = \frac{H_{1}\left(c_{22} - a_{22}\omega^{2}\right)}{\left(c_{11} - a_{11}\omega^{2}\right)\left(c_{22} - a_{22}\omega^{2}\right) - c_{12}^{2}},$$

$$A_{2} = \frac{H_{1}c_{12}}{\left(c_{11} - a_{11}\omega^{2}\right)\left(c_{22} - a_{22}\omega^{2}\right) - c_{12}^{2}}.$$
(8.15)

Условие

$$(c_{11} - a_{12}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - c_{12}^2 = 0 (8.16)$$

определяет два резонансных значения частоты возмущающей силы; они равны собственным частотам  $k_1$  и  $k_2$  рассматриваемой системы с двумя степенями свободы.

Условие

$$c_{22} - a_{22}\omega^2 = 0 (8.17)$$

определяет частоту антирезонанса. При этой частоте колебания, соответствующие первой координате, полностью отсутствуют, а напбольшее значение второй координаты согласно (8.15) равно

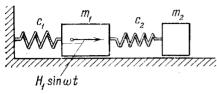
$$A_2 = -\frac{H_1}{c_{12}}$$
.

В этом результате содержится интересная возможность практической борьбы с колебаниями; ею пользуются в некоторых областях техники. Допустим, что имеется некоторая система с одной степенью свободы, подверженная действию гармонической вынуждающей силы. Усложнив систему путем добавления дополнительной массы на упругой связи и подчинив значения жесткости и массы дополнительной части условию (8.17), можно добиться устранения вибраций основной части системы; в этом случае дополнительная часть системы называется динамическим гасителем колебаний (динамическим виброгасителем).

Следует иметь в виду, что такой гаситель эффективен лишь при строгом постоянстве частоты о возмущающей силы; в противном случае он может оказаться даже вредным. Для смягчения этого недостатка обычно вводят в систему динамического гасителя силы трения,

которые делают гаситель «в среднем» полезным в достаточно пироком диапазоне частот  $\omega$ .

 $\Pi$  р и м е р 8.1. На левый груз системы с двумя степенями свободы (рис. 8.1) действует гармоническая вынуждающая сила  $H_1 \sin \omega t$ . Найти, при каких соотношениях массы  $m_2$  правого груза



Proc. 8.1

и коэффициента жесткости  $c_2$  правой пружины исчезают колебания левого груза, т. е. правый груз оказывается динамическим гасителем колебаний. Коэффициент жесткости  $c_1$  левой пружины и масса  $m_1$  левого груза заданы.

Принимая за обобщенные координаты отклоне-

ния  $x_1$  и  $x_2$  грузов от положения равновесия, составляем дифференциальные уравнения движения:

$$H_1 \sin \omega t - c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) = m_1 \ddot{x}_1,$$
  
 $-c_2 (x_2 - x_1) = m_2 \ddot{x}_2.$ 

Приводя эти уравнения к форме (8.3)

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = H_1 \sin \omega t,$$
  

$$m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = 0,$$

устанавливаем:

$$a_{11} = m_1,$$
  $a_{12} = a_{21} = 0,$   $a_{22} = m_2,$   $c_{11} = c_1 + c_2,$   $c_{12} = c_{21} = -c_2,$   $c_{22} = c_2.$ 

Согласно условию (8.17) должно быть

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0,$$

т. е. искомое соотношение (условие настройки динамического гасителя) имеет вид

$$\frac{c_2}{m_2} = \omega^2$$

и не зависит от значений  $c_1$  и  $m_1$ . На рис. 8,2 показано изменение амилитуд  $A_1$  и  $A_2$  в зависимости от частоты  $\omega$  возмущающей силы. При построении графиков было принято  $H_1=10$  H,  $c_1=c_2=10$  H/cm,  $m_1=m_2=1000$  кг. При этом собственные частоты равны  $k_1=0.618$  c<sup>-1</sup>,  $k_2=1.618$  c<sup>-1</sup>, а соответствующая антирезонансу частота равна 1 c<sup>-1</sup>.

Пример 8.2. Найти амилитуды колебаний сосредоточенных грузов, связанных с двухопорной упругой балкой (рис. 8.3, а). Массы грузов одинаковые и равны m, жесткость EI сечения балки постоянная. На средний груз действует вынуждающая сила

 $H \sin \omega t$ .

Дифференциальные уравнения движения систем этого типа удобнее составлять с помощью обратного способа. Приняв за обобщенные координаты  $y_1, y_2, y_3$  — отклонения грузов от положений

равновесия, --- имеем

$$y_1 = -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12} - m_3 \ddot{y}_3 \delta_{13} + H \sin \omega t \delta_{12},$$

$$y_2 = -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} - m_3 \ddot{y}_3 \delta_{23} + H \sin \omega \delta_{22},$$

$$y_3 = -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{31} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{32} - m_3 \ddot{y}_3 \delta_{33} + H \sin \omega t \delta_{32},$$

где  $\delta_{ij}$  — коэффициенты влияния (единичные перемещения); не

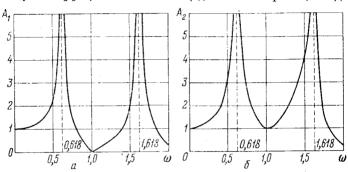


Рис. 8.2

задерживаясь на их вычислении, приведем сразу окончательные значения:

$$\begin{split} \delta_{11} &= \delta_{33} = \frac{75}{\beta}, & \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{117}{\beta}, \\ \delta_{22} &= \frac{243}{\beta}, & \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{51}{\beta}, \end{split}$$

где  $\beta=9\cdot 1296EJ/l^3.$  С учетом этих значений, а также равенств  $m_1=m_2=m_3=m$  дифференциальные уравнения приобретают вид

$$75m\ddot{y}_1 + 117m\ddot{y}_2 + 51m\ddot{y}_3 + \beta y_1 = 117H \sin \omega t,$$
  
 $117m\ddot{y}_1 + 243m\ddot{y}_2 + 117m\ddot{y}_3 + \beta y_2 = 243H \sin \omega t,$   
 $51m\ddot{y}_1 + 117m\ddot{y}_2 + 75m\ddot{y}_3 + \beta y_3 = 117H \sin \omega t.$ 

Теперь можно составить уравнения (8.11) для определения амплитуд колебаний:

$$(\beta - 75m\omega^2)A_1 - 117m\omega^2A_2 - 51m\omega^2A_3 = 117H,$$

$$-117m\omega^2A_1 + (\beta - 243m\omega^2)A_2 - 117m\omega^2A_3 = 243H,$$

$$-51m\omega^2A_1 - 117m\omega^2A_3 + (\beta - 75m\omega^2)A_3 = 117H;$$

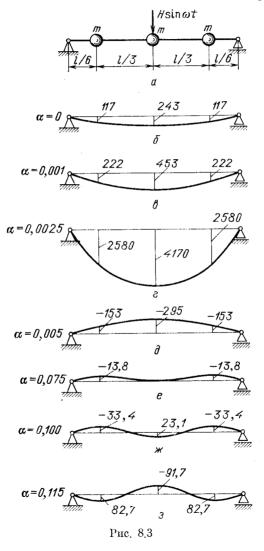
отсюда находим

$$A_1 = A_3 = \frac{H}{\beta} \frac{417}{1 - 369\alpha + 3240\alpha^2},$$

$$A_2 = \frac{H}{\beta} \frac{243 - 3240\alpha}{1 - 369\alpha + 3240\alpha^2},$$

где  $\alpha = m\omega^2/\beta$ . Как видно, амплитуды колебаний зависят от характерного параметра  $\alpha$ , меняющегося с изменением частоты возбуж-

дения. При  $\alpha_1 = 0.00278$  и  $\alpha_2 = 0.11111$  знаменатели найденных выражений обращаются в нуль, т. е. амплитуды колебаний становятся неограниченными (резонансные состояния, когда частота возбуждения совпадает с какой-либо собственной частотой рассматри-



ваемой системы). На рис. 8.3, 6-s показаны формы изогнутой оси балки при  $H/\beta=1$  и нескольких значениях параметра  $\alpha$  (так как при изменении  $\alpha$  значения  $A_1$  и  $A_2$  изменяются на несколько

порядков, кривые построены в различных масштабах). Кривая на рис.  $\delta$  построена для  $\alpha=0$  (статическое нагружение). По форме от нее мало отличается кривая на рис.  $\epsilon$ , относящаяся к сравнительно небольшому значению параметра  $\alpha$ . Кривая на рис.  $\epsilon$  построена для околорезонансных условий и близка к первой собственной форме. Кривая на рис.  $\delta$  относится к «межрезонансным» условиям  $\alpha_1 < 0.005 < \alpha_2$ ; здесь пужно отметить, что перемещения находятся в противофазе с вынуждающей силой (подобно зарезонансным режимам систем с одной степенью свободы). Кривая на рис.  $\epsilon$  соответствует антирезонансу (при  $\alpha=0.075$  значение  $\Delta_2$  обращается в нуль). На рис.  $\alpha$  показана кривая для частоты, немного меньшей, чем вторая собственная частота, а кривая на рис.  $\alpha=0.075$  значение  $\alpha=0.075$  значени

3. Действие произвольных вынуждающих сил; разложение по собственным формам. В случаях, когда вынуждающие силы изменяются не по гармоническому закону, целесообразен переход к нормальным (главным) координатам. При этом вместо системы дифференциальных уравнений (8.2) или систем (8.3) и (8.4) получается система независимых дифференциальных уравнений

в которой  $\eta_j$  — нормальные координаты,  $k_j$  — собственные частоты,  $Q_j^*$  — приведенные обобщенные силы. После того как образована система (8.18), дальнейшее решение сводится к исследованию колебаний ряда независимых систем с одной степенью свободы (см. п. 4 § 5).

Пусть обобщенные координаты первопачально припяты таким образом, что исходная система дифференциальных уравнений записывается в виде (8.3). Для требуемого перехода к системе (8.18) нужно предварительно найти собственные частоты  $k_i$  и коэффициенты собственных форм  $\varkappa_{ri}$ . Далее положим

$$q_r = \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{r\,i} \eta_i. \tag{8.19}$$

Тогда (8.3) запишется в виде-

$$a_j \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{ji} \ddot{\eta}_i + \sum_{r=1}^{s} c_{jr} \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{ri} \eta_i = Q_j.$$
 (8.20)

Изменим порядок суммирования во втором слагаемом:

$$\sum_{r=1}^{s} c_{jr} \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{ri} \eta_{i} = \sum_{i=1}^{s} \eta_{i} \sum_{r=1}^{s} c_{jr} \varkappa_{ri},$$

и заметим, что входящая сюда сумма по r согласно (4.46) равна

$$\sum_{r=1}^{s} c_{jr} \varkappa_{ri} = a_{j} k_{i}^{2} \varkappa_{ji}.$$

Теперь уравнения (8.20) принимают вид

$$a_j \sum_{i=1}^s \varkappa_{ji} (\eta_i + k_i^2 \eta_i) = Q_j.$$
 (8.21)

Умножим каждое из этих равенств на  $\varkappa_{jm}$  и затем сложим их:

$$\sum_{j=1}^{s} \varkappa_{jm} a_{j} \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{ji} (\ddot{\eta} + k_{i} \eta_{i}) = \sum_{j=1}^{s} Q_{j} \varkappa_{jm},$$

или

$$\sum_{i=1}^{s} \left( \ddot{\eta}_{i} + k_{i}^{2} \eta_{i} \right) \sum_{j=1}^{s} a_{j} \varkappa_{ji} \varkappa_{jm} = \sum_{j=1}^{s} Q_{j} \varkappa_{jm}. \tag{8.22}$$

Согласно свойству ортогональности собственных функций (4.65) равны нулю все входящие в левую часть суммы но j, кроме той, в которой индекс i совпадает с индексом m. Поэтому (8.22) можно записать в виде

$$\left(\overset{\cdot \cdot}{\mathfrak{\eta}_m} + k_m^2 \mathfrak{\eta}_m\right) \sum_{j=1}^s a_j \varkappa_{jm}^2 = \sum_{j=1}^s Q_j \varkappa_{jm}.$$

Окончательно получаем дифференциальные уравнения в нормальных координатах

$$\ddot{\eta}_m + k_m^2 \eta_m = Q_m^* \quad (m = 1, 2, \dots s), \tag{8.23}$$

где

$$Q_m^* = \frac{\sum_{j=1}^s Q_j \varkappa_{jm}}{\sum_{j=1}^s a_j \varkappa_{jm}^2} \quad (m = 1, 2, ..., s)$$
 (8.24)

есть приведенные вынуждающие силы.

Если обобщенные координаты были выбраны так, что исходные дифференциальные уравнения записываются в виде (8.4), то аналогично можно прийти к (8.23),

причем

$$Q_m^* = \frac{k_m^2 \sum_{j=1}^s Q_j x_{jm}}{\sum_{j=1}^s c_j x_{jm}^2}.$$
 (8.25)

Таким образом, составлению уравнений (8.21) должно предшествовать определение собственных форм, т. е. коэффициентов  $\kappa_{jm}$ , и собственных частот  $k_m$ ; затем образуются выражения (8.24) или (8.25), и задача сводится к интегрированию независимых уравнений (8.23), каждое из которых описывает движение некоторой системы с одной степенью свободы. После интегрирования этих уравнений можно получить выражения для первоначально выбранных обобщенных координат  $q_r$  с помощью соотношений (8.19).

Пример 8.3. На левый груз рассмотренной ранее системы с двумя степенями свободы (рис. 8.1) действует вынуждающая сила

$$Q_1 = H_1(1 - e^{-\alpha t})$$

 $(H_1$  и  $\alpha$  — заданные постоянные). Найти движение системы. Для этой системы при  $c_1=c_2=c,\ m_1=m_2=m$  в § 4 было найдено

$$k_1^2 = 0.382 \frac{c}{m}, \quad k_2^2 = 2.618 \frac{c}{m},$$
 $\kappa_{21} = 1.618, \quad \kappa_{22} = -0.618.$ 

По формуле (8.24) находим приведенные вынуждающие силы:

$$Q_1^* = \frac{Q_1}{m + m \cdot 1,618^2} = \frac{0,278H_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}),$$

$$Q_2^* = \frac{Q_1}{m + m \cdot 0,618^2} = \frac{0,727H_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Теперь образуем оба уравнения (8.23):

$$\ddot{\eta}_1 + 0.382 \frac{c}{m} \eta_1 = \frac{0.278H_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}),$$

$$\ddot{\eta}_2 + 2.618 \frac{c}{m} \eta_2 = \frac{0.727H_1}{m} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Решение этих уравнений находим с помощью выражения (5.19):

$$\begin{split} &\eta_1 = \frac{0,278H_1}{c} \left[ 1 - \frac{1}{1+\beta_1^2} \, e^{-\alpha t} - \frac{\beta_1}{1+\beta_1^2} \left( \sin k_1 t + \beta_1 \cos k_1 t \right) \right], \\ &\eta_2 = \frac{0,222H_1}{c} \left[ 1 - \frac{1}{1+\beta_2^2} \, e^{-\alpha t} - \frac{\beta_2}{1+\beta_2^2} \left( \sin k_2 t + \beta_2 \cos k_2 t \right) \right]. \end{split}$$

Здесь  $\beta_1 = \alpha/k_1$ ,  $\beta_2 = \alpha/k_2$ . Наконец, согласно (8.19) находим

$$\begin{split} x_1 &= \eta_1 + \eta_2 = \frac{H_1}{c} \left[ 1 - \left( \frac{0.278}{1 + \beta_1^2} + \frac{0.722}{1 + \beta_2^2} \right) e^{-\alpha t} - \right. \\ &\left. - \frac{0.278}{1 + \beta_1^2} \left( \sin k_1 t + \beta_1 \cos k_1 t \right) - \frac{0.722\beta_2}{1 + \beta_2^2} \left( \sin k_2 t + \beta_2 \cos k_2 t \right) \right], \\ x_2 &= \varkappa_{21} \eta_1 + \varkappa_{22} \eta_2 = \frac{H_1}{c} \left[ 0.312 - \left( \frac{0.449}{1 + \beta_1^2} - \frac{0.137}{1 + \beta_2^2} \right) e^{-\alpha t} - \right. \\ &\left. - \frac{0.449}{1 + \beta_1^2} \left( \sin k_1 t + \beta_1 \cos k_1 t \right) + \frac{0.137}{1 + \beta_2^2} \left( \sin k_2 t + \beta_2 \cos k_2 t \right) \right]. \end{split}$$

4. Действие периодических вынуждающих сил. В случаях, когда действующие на систему вынуждающие силы изменяются по периодическому закону, возможны два пути решения задачи — в сущности те же, что и для систем с одной степенью свободы.

Первый путь основан на разложении периодических вынуждающих сил в ряды Фурье; после такого разложения определяются гармонические движения, вызываемые отдельными гармониками сил (см. выше п. 2 настоящего параграфа), и найденные результаты надлежащим образом складываются.

Второй путь основан на предварительном переходе к нормальным координатам, как это было изложено в п. 3 этого параграфа. Это приводит к ряду задач о колебаниях систем с одной степенью свободы и позволяет получить решения в замкнутой форме, как это было изложено в § 5, п. 5.

Хотя в расчетной практике чаще идут по первому пути (например, при исследовании крутильных колебаний валов двигателей внутреннего сгорания), однако иногда предпочтительнее может оказаться второй путь, особенно в тех случаях, когда тригонометрические ряды, в которые разложены вынуждающие силы, медленно сходятся.

#### Глава III

### ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

#### § 9. Общие понятия

1. Основное дифференциальное уравнение. В рассмотренных выше задачах о колебаниях действующие силы можно было отнести к одной из трех категорий: позиционные (в частности, восстанавливающие) силы, зависящие только от обобщенных координат  $q_i$ ; диссипативные силы, определяемые обобщенными скоростями  $q_i$ ; вынуждающие силы, являющиеся заданными функциями времени t.

Однако существуют силы более сложной природы, в частности нестационарные позиционные силы, которые зависят от координат  $q_i$ , а также от времени t (в явном виде):

$$Q_j = Q_j(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$$
  $(j = 1, 2, \ldots, s),$  (9.1) и притом так, что их невозможно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат, а другое — только от времени.

Ограничимся рассмотрением линейных систем с одной степенью свободы, когда при малых отклонениях от положения равновесия обобщенная сила определяется выражением

Q = -cq, (9.2)

причем, в отличие от случаев действия стационарных восстанавливающих сил, параметр  $c=c\left(t\right)$  является функцией времени.

Дифференциальное уравнение движения

$$a\ddot{q} + c(t)q = 0 (9.3)$$

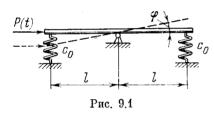
содержит переменный коэффициент и описывает параметрические колебания.

Как мы увидим ниже, свойства движения, описываемого уравнением (9.3), существенно отличаются от свойств свободных колебаний, определяемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

Важное значение имеют нередко встречающиеся в приложениях случаи  $nepuo\partial uческого$  изменения параметра, когда

$$c(t+T) = c(t). (9.4)$$

Соответствующие этим случаям колебания называются параметрически возбуждаемыми или, короче, параметрическими. Решением дифференциального уравнения (9.3) при условии (9.4) мы займемся ниже, но уже здесь отметим, что амплитуды параметрических колебаний—в зависимости от значений постоянных системы—либо



остаются ограниченными, либо возрастают во времени. Очевидную опасность представляют колебания с возрастающими амплитудами; это явление называют параметрическим резонансом. По некоторым признакам, о кото-

рых будет сказано ниже, нараметрический резонанс существенно отличается от «обычного» резонанса и в определенном смысле опаснее последнего.

существенно отличается от «ооычного» резонанса и в определенном смысле опаснее последнего.

2. Параметрические колебания около положения равновесия. Прежде чем обратиться к решению дифференциального уравнения (9.3) и исследованию возможности параметрического резонанса, рассмотрим некоторые простые механические системы, колебания которых являются параметрическими; в этих случаях часто параметрическими называют и сами системы.

В качестве первого примера рассмотрим симметричную абсолютно жесткую балку длиной 2l со средней шарнирно неподвижной опорой и двумя упругими опорами на кондах. Коэффициенты жесткости упругих опородинаковы и равны  $c_0$  (рис. 9.1). К балке приложена переменная горизонтальная сила P(t), заданная в виде периодической функции времени. В положении равновесия ось балки горизонтальна. При малых отклонениях балки от положения равновесия (см. штриховую линию

на рисунке) на нее действует момент сил упругости  $-c_0 \varphi l^2$  и момент продольной силы  $P(t) \varphi l$ ; полный момент, представляющий собой обобщенную силу в данной задаче,

$$M = -[c_0l - P(t)]\varphi l,$$

оказывается функцией координаты  $\phi$  и времени t. Соответствующее дифференциальное уравнение движения имеет вид

 $-\left[c_{0}l-P(t)\right]l\varphi=I\ddot{\varphi}$ 

(где I — момент инерции балки относительно оси вращения), или

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_0 l - P(t)}{I} l \varphi = 0.$$

Оно относится к типу (9.3).

Другим примером может служить маятник с колеблющейся по вертикали точкой подвеса (рис. 9.2, a). Пусть l — длина маятника, m — масса груза, y = y(t) — заданный периодический закон движения точки подвеса.

Дифференциальное уравнение малых относительных колебаний маятника имеет вид

$$(-mg - my) l\varphi = ml^2 \varphi$$

 $(-m\ddot{y}$  — переносная сила инерции), или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + \dot{y}(t)}{t} \varphi = 0; \qquad (9.5)$$

как видно, эта система также относится к типу параметрических.

В качестве третьего примера рассмотрим вертикальный

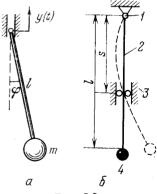


Рис. 9.2

безмассовый упругий стержень 2 длиной l, показанный на рис. 9.2,  $\delta$ . С концом стержня связан сосредоточенный груз 4. Верхней опорой служит неподвижный шарнир l, а нижней опорой служит втулка l с коротким подпинником. Если считать подшинник шарнирной опорой и пренебречь влиянием силы тяжести груза, то коэффициент изгибной жесткости балки определяется

формулой теории сопротивления материалов

$$c=\frac{3EJ}{l\left(l-s\right)^{2}},$$

где s — расстояние между опорами.

Втулке задано периодическое движение около некоторого среднего положения, определяемого расстоянием  $s_0$ . Состоянию равновесия соответствует положение груза на вертикали и прямолинейная форма оси стержня.

При возмущении этого состояния груз отклоняется в сторону, ось балки изгибается, и последующее движение груза описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \frac{3EJ}{ml \left[l - s(t)\right]^2} x = 0, \tag{9.6}$$

которое также относится к рассматриваемому здесь типу. Исследование решений подобных дифференциальных уравнений позволит судить об устойчивости состояния равновесия, около которого происходят колебания. Если параметрически возбуждаемые колебания постепенно затухают (или по крайней мере не имеют тенденции к возрастанию), то состояние равновесия следует признать устойчивым; если же колебания происходят с возрастающими амплитудами (параметрический резонанс), то состояние равновесия неустойчиво. Поэтому в подобных случаях самым важным является выяснение ос-

3. Парамстрические колебания около стационарного режима движения. К необходимости исследовать свойства решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами приводят также задачи об устойчивости стационарных режимов движения. Обычно дело сводится к следующему.

новной тенденции параметрических колебаний.

Допустим, что после решения некоторой задачи о движении механической системы найден режим движения, описываемый функцией q=q(t). Для исследования устойчивости этого режима необходимо предположить, что он каким-либо образом нарушен и возмущенное движение описывается функцией  $q+\delta q$ , близкой к функции q(t); здесь  $\delta q(t)$ — вариация функции q(t), т. е. отклонение системы от исследуемого режима движения. Если функция  $\delta q$  с течением времени возрастает, то исследуемый режим q=q(t) и е у с т о й ч и в; в случае постепенного затухания функции  $\delta q$  режим q=q(t) у с т о й ч и в.

Как оказывается, для функции  $\delta q(t)$  в ряде случаев можно получить дифференциальное уравнение типа (9.3). Характер решения этого уравнения позволяет сделать заключение об устойчивости режима движения q=q(t).

Поясним сказанное примером из области вынужденных колебаний систем с нелинейной восстанавливающей силой (см. гл. II, § 7). Дифференциальное уравнение колебаний такой системы имеет вид

$$a\ddot{q} + F(q) = Q(t), \tag{9.7}$$

причем F(q) и Q(t)— заданные функции координаты и времени. Как мы знаем, решение этого уравнения может быть неоднозначным и возможно существование нескольких стационарных режимов с различными амплитудами

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), q_3 = q_3(t).$$

Так как среди этих режимов физически осуществимы только устойчивые режимы, то полное решение задачи о вынужденных колебаниях должно содержать не только выяснение (точное или приближенное) возможных режимов, но и анализ их устойчивости.

Для исследования устойчивости какого-либо из найденных режимов, например режима  $q_1 = q_1(t)$ , предположим, что он каким-либо образом возмущен и, следовательно, движение системы будет описываться суммой  $q_1 + \delta q_1$ ; здесь второе слагаемое,  $\delta q_1$ , представляет собой возмущение функции  $q_1$ .

Об устойчивости стационарного режима  $q_1=q_1(t)$  можно судить по характеру изменения во времени возмущения  $\delta q_1$ . Если выяснится, что при  $t\to\infty$  возмущение  $\delta q_1\to 0$  или остается ограниченным, то возмущенное движение будет стремиться к стационарному режиму или оставаться вблизи него; следовательно, последний устойчив. Если же при  $t\to\infty$  варпация  $\delta q_1$  неограниченно возрастает, то исследуемый стационарный режим неустойчив.

Решение  $q_1(t)$  должно удовлетворять дифференциальному уравнению (9.7):

$$a\ddot{q}_1 + F(q_1) = Q(t);$$
 (9.8)

но тому же дифференциальному уравнению (9.7) должна удовлетворять также функция  $q_1 + \delta q_1$ :

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F(q_1 + \delta q_1) = Q(t).$$

Рассматривая малые величины  $\delta q_1$ , мы можем принять

$$F(q_1 + \delta q_1) \approx F(q_1) + F'(q_1) \delta q_1,$$

где штрих обозначает дифференцирование по координате  $q_1$ , т. е.

$$a\ddot{q}_1 + a\delta\ddot{q}_1 + F(q_1) + F'(q_1)\delta q_1 = Q(t).$$
 (9.9)

Вычитая уравнение (9.8) из уравнения (9.9), получим  $a\delta\ddot{q}_1+F'(q_1)\delta q_1=0.$  (9.10)

Но так как  $q_1$  представляет некоторую известную функцию времени (стационарный режим), то и  $F'(q_1)$  также является функцией времени, т. е. дифференциальное уравнение (9.10) есть уравнение типа (9.3).

Пусть, например,

$$F(q) = \beta q^3$$
,  $Q(t) = H \sin \omega t$ ,

и необходимо исследовать устойчивость стационарного режима

$$q_1 = A_1 \sin \omega t$$
,

который был найден в § 7 гл. II.

В данном случае

$$F'(q) = 3\beta q^2 = 3\beta A_1^2 \sin^2 \omega t$$

и для вариации стационарного режима получим дифференциальное уравнение

$$a\ddot{\delta q} + (3\beta A_1^2 \sin^2 \omega t) \,\delta q = 0, \qquad (9.11)$$

полностью соответствующее уравнению (9.3).

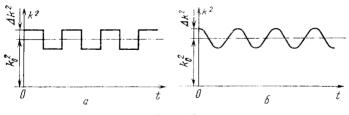


Рис. 9.3

В следующих двух параграфах будут рассмотрены решения дифференциальных уравнений тина (9.3), которое запишем в виде

 $\ddot{q} + k^2(t) q = 0. (9.12)$ 

Однако сразу отметим, что интегрирование этого уравне-

ния при произвольной периодической функции  $k^2(t)$  весьма сложно. Поэтому ниже мы остановимся только на двух относительно простых случаях, когда изменение параметра следует периодическому кусочно-постоянному закону либо закону синуса (в обоих случаях с дополнительным постоянным слагаемым — см. рис. 9.3).

# § 10. Параметрическое возбуждение по периодическому кусочно-постоянному закону

1. Колебания при отсутствии трения. Рассмотрим случай, соответствующий случаю рис. 9.3, а. При этом дифференциальное уравнение (9.12) принимает вид

$$\ddot{q} + k_0^2 (1 \pm \mu) q = 0, \tag{10.1}$$

где  $\mu = \Delta k^2/k_0^2$ .

Ввиду того что в течение каждого полупериода  $T/2 = \pi/k_0$  дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, можно воспользоваться способом припасовывания.

Рассмотрим какой-либо период T изменения коэффициента  $k^2$  и совместим с началом этого периода начало отсчета времени. В первом полупериоде, когда 0 < t < < T/2, дифференциальное уравнение (10.1) имеет вид

$$\ddot{q}_1 + k_0^2 (1 + \mu) q_1 = 0, \tag{10.2}$$

а во втором полушериоде T/2 < t < T соответственно будет

$$\ddot{q}_2 + k_0^2 (1 - \mu) q_2 = 0. \tag{10.3}$$

Дифференциальные уравнения (10.2) и (10.3) с постоянными коэффициентами имеют решения

$$q_1 = C_1 \sin k_1 t + D_1 \cos k_1 t, q_2 = C_2 \sin k_2 t + D_2 \cos k_2 t,$$
 (10.4)

причем  $k_1=k_0\sqrt{1+\mu}$ ,  $k_2=k_0\sqrt{1-\mu}$ . В этих решениях содержатся четыре постоянные,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ , для определения которых необходимы четыре условия. Два условия относятся к моменту времени t=T/2, общему для обоих полупериодов; в указанный момент должно быть

$$q_1\left(\frac{T}{2}\right) = q_2\left(\frac{T}{2}\right), \ \dot{q}_1\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_2\left(\frac{T}{2}\right).$$
 (10.5)

Это дает следующие соотношения:

$$\begin{split} C_1 \sin\frac{k_1T}{2} + D_1 \cos\frac{k_1T}{2} &= C_2 \sin\frac{k_2T}{2} + D_2 \cos\frac{k_2T}{2}, \\ k_1 \left( C_1 \cos\frac{k_1T}{2} - D_1 \sin\frac{k_1T}{2} \right) &= k_2 \left( C_2 \cos\frac{k_2T}{2} - D_2 \sin\frac{k_2T}{2} \right). \end{split} \tag{10.6}$$

Запишем еще два соотношения:

$$\lambda q_1(0) = q_2(T), \ \lambda \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(T),$$
 (10.7)

в которых  $\lambda$  — некоторое, пока неизвестное число. Соотношениями (10.7) утверждается, что по истечении рассматриваемого периода обобщенная координата и обобщенная скорость изменяются в  $\lambda$  раз. Соответственно этому движение в следующем периоде начнется при измененных в  $\lambda$  раз начальных условиях, т. е. будет повторять движение в рассматриваемом периоде, но в измененном в  $\lambda$  раз масштабе.

Если  $|\lambda| > 1$ , то колебания в каждом следующем периоде будут усиливаться, а если  $|\lambda| < 1$ , то они будут постепенно затухать. Таким образом, устойчивость или неустойчивость системы определяется значением молуля  $\lambda$ .

Подставив решения (10.4) в соотношения (10.7), по-

лучим

$$\lambda D_1 = C_2 \sin k_2 T + D_2 \cos k_2 T, \lambda C_1 k_1 = C_2 k_2 \cos k_2 T - D_2 k_2 \sin k_2 T.$$
(10.8)

Система уравнений (10.6) и (10.8) однородна относительно постоянных  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  и имеет отличные от нуля решения только в том случае, если равен нулю определитель, составленный из ее коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{k_1T}{2} & \cos\frac{k_1T}{2} & -\sin\frac{k_2T}{2} & -\cos\frac{k_2T}{2} \\ k_1\cos\frac{k_1T}{2} & -k_1\sin\frac{k_1T}{2} & -k_2\cos\frac{k_2T}{2} & k_2\sin\frac{k_2T}{2} \\ 0 & \lambda & -\sin k_2T & -\cos k_2T \\ k_1\lambda & 0 & -k_2\cos k_2T & k_2\sin k_2T \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув определитель, получим следующее квадратное уравнение:

 $\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0, \tag{10.9}$ 

в котором для краткости обозначено

$$A = \cos\frac{k_1 T}{2} \cos\frac{k_2 T}{2} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \sin\frac{k_1 T}{2} \sin\frac{k_2 T}{2} =$$

$$= \cos \pi \alpha \sqrt{1 + \mu} \cos \pi \alpha \sqrt{1 - \mu} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}} \sin \pi \alpha \sqrt{1 + \mu} \sin \pi \alpha \sqrt{1 - \mu}, \quad (10.10)$$

причем  $\alpha = k_0 T/(2\pi)$  есть отношение среднего значения  $k_0$  собственной частоты к частоте пульсации параметра. Корни уравнения (10.9) следующие:

$$\lambda_1 = A - \sqrt{A^2 - 1}, \ \lambda_2 = A + \sqrt{A^2 - 1}.$$
 (10.11)

Для того чтобы числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  были вещественными, как это предполагается по смыслу решаемой задачи, должно быть

$$|A| > 1,$$
 (10.12)

т. е. либо A>1, либо A<-1. Но в обоих этих случаях модуль одного из корней (10.11) больше единицы:

если 
$$A > 1$$
, то  $\lambda_2 > 1$ ;  
если  $A < -1$ , то  $|\lambda_1| > 1$ .

Отсюда следует, что если выполнено неравенство (10.12), то колебания будут с каждым новым периодом увеличиваться. Неравенство представляет собой не только условие вещественности множителя  $\lambda$ , но одновременно и условие возникновения параметрического резонанса.

Так как значение A зависит от двух постоянных системы  $\alpha$  и  $\mu$ , то их значения полностью определяют устойчивость системы.

На рис. 10.1 представлена построенная с помощью условия (10.12) диаграмма устойчивости, по осям которой отложены значения  $4\alpha^2$  и  $2\mu\alpha^2$ . В незаштрихованных областях значения параметров  $\alpha$  и  $\mu$  таковы, что условие (10.12) выполняется, т. е. система неустойчива. Заштрихованные области диаграммы соответствуют устойчивым состояниям системы. С помощью такой диаграммы можно сразу судить об устойчивости по данным значениям  $\alpha$  и  $\mu$  без всяких дополнительных вычислений.

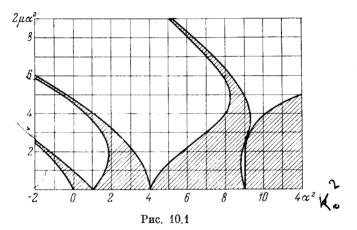
Прежде всего обратим внимание на те зоны областей неустойчивости, которые расположены вблизи горизон-12\* тальной оси, т. е. соответствуют малым значениям параметра  $\mu$ . Как видно, в этих зонах  $4\alpha^2 \approx n^2$ , т. е.

$$\alpha \approx \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10.13}$$

То же можно найти из (10.10), положив  $\mu=0.$  В самом деле,

$$A = \cos^2 \pi \alpha - \sin^2 \pi \alpha = \cos 2\pi \alpha$$
,

т. е. при произвольных значежиях  $\alpha$  имеем  $|A| \leq 1$ . Равенство |A| = 1, соответствующее возникновению пара-



метрического резонанса, возможно при условии, что аргумент  $2\pi\alpha$  удовлетворяет равенству

$$2\pi\alpha=\pi n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

из которого также следует соотношение (10.13).

Таким образом, если выполняется условие (10.13), то параметрический резонанс возникает при сколь угодно малой глубине пульсации. При этом основное значение имеет случай n=1, когда  $\alpha=1/2$ , т. е. когда среднее значение собственной частоты в д в о емень ше частоты параметрического возбуждения.

При значительной глубине пульсации и заметном отличии  $\mu$  от нуля параметрический резонанс возникает в целых областях значений α, расположенных вблизи значений (10.13); чем больше заданное значение  $\mu$ , тем шире эти области. По этой причине отстройка от парамет-

рического резонанса труднее, чем от обычного резонанса; параметрический резонанс более опасен, чем обычный, еще и по той причине, что линейное демифирование (которое выше вообще не учитывалось) лишь несколько суживает области неустойчивости, по неспособно ограничить возрастание амплитуд колебаний в этих областях\*).

Пример 10.1. Груз I массы m упруго подвешен на цилиндрической витой пружине 2 длиной l; коэффициент жесткости пружины равен c. Разрезная втулка 3 периодически обжимает верхною часть пружины так, что длительность каждого обжима  $t_*$  равна длительности интервала между двумя последовательными обжимами. Длина деформируемой части пружины при обжиме мало отличается от длины l (рис. 10.2). Найти наименьшее значение  $t_*$ , при котором возникает параметрический резонанс.

Замечая, что период изменения жесткости  $T=2t_{*}$ , и учитывая

малость глубины пульсации, запишем условие параметрического резоданса (40.13):

$$\alpha = k_0 T/(2\pi) = n/2$$
  $(n = 1, 2, ...).$ 

Подставляя сюда  $k_{0}=\sqrt{c/m},\ T=2t_{*},\$ паходим

$$t_* = \frac{\pi n}{2} \sqrt{\frac{m}{c}};$$

наименьшее значение  $t_*$  соответствует n=1:

$$t_* = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{c}},$$

т. е. вчетверо меньше периода свободных колебаний груза.

Рис. 10,2

2. Влияние линейного трения. При наличии вязкого трения вместо дифференциального уравнения (10.1) имеем

$$\ddot{q} + 2\dot{hq} + k_0^2 (1 \pm \mu) q = 0, \tag{10.14}$$

в котором по-прежнему  $h = \frac{b}{2a}$ , где b — коэффициент вязкости, a — инерционный коэффициент. Рассуждая, как и в п. 1, запишем решение для обоих полупериодов:

$$q_1 = C_1 e^{-ht} \sin k_1^* t + D_1 e^{-ht} \cos k_1^* t,$$
  

$$q_2 = C_2 e^{-ht} \sin k_2^* t + D_2 e^{-ht} \cos k_2^* t,$$

<sup>\*)</sup> При действии нелинейно-вязких сил треппя амплитуды колебаний оказываются ограниченными.

где

$$k_1^* = \sqrt{k_1^2 - h^2} = \sqrt{(1 + \mu)k_0^2 - h^2},$$

$$k_2^* = \sqrt{k_2^2 - h^2} = \sqrt{(1 - \mu)k_0^2 - h^2}.$$

Условия в момент t=T/2 имеют вид

$$q_1\!\left(\!\frac{T}{2}\right) = q_2\!\left(\!\frac{T}{2}\right)\!, \quad \dot{q}_1\!\left(\!\frac{T}{2}\right) = \dot{q}_2\left(\!\frac{T}{2}\right)\!,$$

или

$$C_{1} \sin \frac{k_{1}^{*}T}{2} + D_{1} \cos \frac{k_{1}^{*}T}{2} = C_{2} \sin \frac{k_{2}^{*}T}{2} + D_{2} \cos \frac{k_{2}^{*}T}{2}, \quad (10.15)$$

$$C_{1} \left( -h \sin \frac{k_{1}^{*}T}{2} + k_{1}^{*} \cos \frac{k_{1}^{*}T}{2} \right) - D_{1} \left( h \cos \frac{k_{2}^{*}T}{2} + k_{2}^{*} \cos \frac{k_{2}^{*}T}{2} \right) + k_{1}^{*} \sin \frac{k_{2}^{*}T}{2} \right) = C_{2} \left( -h \sin \frac{k_{2}^{*}T}{2} + k_{2}^{*} \cos \frac{k_{2}^{*}T}{2} \right) - D_{2} \left( h \cos \frac{k_{2}^{*}T}{2} + k_{2}^{*} \sin \frac{k_{2}^{*}T}{2} \right).$$

Далее составляем два условия типа (10.7):

$$\lambda q_1(0) = q_2(T), \ \lambda \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(T),$$

т. е.

$$\lambda D_1 = e^{-hT} \left( C_2 \sin k_2^* T + D_2 \cos k_2^* T \right),$$

$$\lambda \left( C_1 k_1^* - D_1 h \right) = e^{-hT} \left[ C_2 \left( -h \sin k_2^* T + k_2^* \cos k_2^* T \right) - D_2 \left( h \cos k_2^* T + k_2^* \sin k_2^* T \right) \right]. \quad (10.16)$$

Четыре уравнения (10.15) и (10.16) образуют систему, однородную относительно постоянных  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ ; отличные от нуля решения соответствуют случаю, когда равен нулю определитель, составленный из коэффициентов системы, развернув который, придем, аналогично (10.9), к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - 2A_1\lambda + B_1 = 0. ag{10.17}$$

В каждом конкретном случае по заданным значениям  $k_0$ ,  $\mu$ , h, T можно вычислить значения  $A_1$  и  $B_1$ , а затем определить корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  квадратного уравнения (10.17). Признаком неустойчивости служит вещественность кор-

ней п неравенство  $|\lambda| > 1$  для наибольшего по модулю

корня.

Не останавливаясь на подобном исследовании корней, заметим, что для их вещественности (т. е. для неустойчивости системы) необходимо выполнение условия

$$|A_1| > \sqrt{B_1},\tag{10.18}$$

более жесткого, чем условие |A|>1, полученное выше для случая отсутствия трения. В частности, при h>0 и  $\mu\to 0$  условие (10.18) не выполняется, т. е. параметрический резонанс невозможен. Это означает, что для возникновения параметрического резонанса необходима некоторая, достаточно большая, глубина пульсации  $\mu$ . В целом трение оказывает стабилизирующее действие и приводит к некоторому сужению областей неустойчивости.

# § 11. Параметрическое возбуждение по закону синуса

**1.** Общие сведения. Этот случай изменения параметра иллюстрирован на рис. 9.3, *б*. Соответствующее дифференциальное уравнение движения запишем в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 (1 - \mu \cos \omega t) q = 0. \tag{11.1}$$

Как и в § 10, здесь  $k_0$  — среднее значение собственной частоты,  $\mu$  — относительная глубина пульсации переменного коэффициента. Дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (11.1) называется уравнением Матье. Обычно это уравнение записывают в форме

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + (a - 2\varepsilon\cos 2\tau) q = 0, \tag{11.2}$$

к которой можно прийти, положив в уравнении (11.1)

$$\omega t = 2\tau, \quad k_0^2 = \frac{a\omega^2}{4}, \quad \mu = \frac{2\varepsilon}{a}, \tag{11.3}$$

Решениями уравнения (11.2) служат специальные функции, называемые функциями Матье, свойства которых подробно изучены. Как и в случае рассмотренного в § 10 параметрического возбуждения, эти решения могут быть или ограниченными, или неограниченно возрастающими. Выделение соответствующих этим случаям областей параметров а и є приводит к диаграмме устойчивости, кото-

рая дана в готовом виде на рис. 11.1 (диаграмма Айнса — Стретта); она сходна с диаграммой устойчивости, изображенной на рис. 10.1. Границам между областями устойчивости и неустойчивости соответствуют периодические движения. Диаграмма устойчивости симметрична

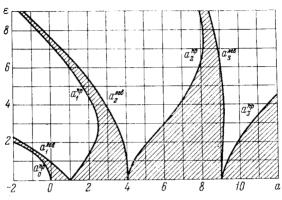


Рис. 11.1

относительно оси a, так как знак  $\epsilon$  в уравнении (11.2) не имеет значения.

Если дифференциальное уравнение задачи приведено к форме (11.2), то по данным значениям a и  $\varepsilon$  с помощью диаграммы устойчивости можно сразу сделать заключение об устойчивости или неустойчивости системы. Как и выше, речь может идти либо об устойчивости состояния равновесия (q — отклонение от этого состояния), либо об устойчивости некоторого основного движения (в этом случае под q следует понимать вариацию координаты).

Для приближенного определения границ между областями устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров а, в может быть применен способ гармонического баланса. На границах первой области неустойчивости движение должно быть периодическим, причем период, как мы видели в § 10, вдвое больше периода изменения параметра. Но период изменения параметра в уравнении (11.2) равен л, так что указанное движение имеет период 2 л и его можно представить в виде ряда

 $q = A_1 \sin \tau + B_1 \cos \tau + A_3 \sin 3\tau + B_3 \cos 3\tau + \dots$  (11.4)

Ограничиваясь первыми двумя членами, подставим их

сумму в уравнение (11.2); приравнивая нулю коэффициенты при sin т и cos т, получаем два однородных уравнения

$$(a - \varepsilon - 1)A_1 = 0, (a + \varepsilon - 1)B_1 = 0,$$
 (11.5)

из которых следуют уравневия обеих границ:

$$a^{\text{np}} = 1 + \varepsilon, \quad a^{\text{ne}} = 1 - \varepsilon.$$
 (11.6)

Эти уравнения можно уточнить, принимая во внимание большее число членов ряда (11.4).

Приведем без вывода более точные уравнения для первых четырех областей неустойчивости, обозначая значения a на границах n-й области неустойчивости через  $a_n^{\text{пр}}$  и  $a_n^{\text{лев}}$ :

$$a_{0}^{\text{TIP}} = -\frac{1}{2} \, \epsilon^{2} + \frac{7}{128} \, \epsilon^{4} - \dots,$$

$$a_{1}^{\text{TIP}} = 1 + \epsilon - \frac{1}{8} \, \epsilon^{2} - \frac{1}{64} \, \epsilon^{3} - \frac{1}{1536} \, \epsilon^{4} + \dots,$$

$$a_{1}^{\text{TIRB}} = 1 - \epsilon - \frac{1}{8} \, \epsilon^{2} + \frac{1}{64} \, \epsilon^{3} - \frac{1}{1536} \, \epsilon^{4} - \dots,$$

$$a_{2}^{\text{TIP}} = 4 + \frac{5}{12} \, \epsilon^{2} - \frac{763}{13824} \, \epsilon^{4} + \dots,$$

$$a_{2}^{\text{TIRB}} = 4 - \frac{1}{12} \, \epsilon^{2} + \frac{5}{13824} \, \epsilon^{4} - \dots,$$

$$a_{3}^{\text{TIRB}} = 9 + \frac{1}{16} \, \epsilon^{2} + \frac{1}{64} \, \epsilon^{3} + \frac{13}{20480} \, \epsilon^{4} + \dots,$$

$$a_{3}^{\text{TIRB}} = 9 + \frac{1}{16} \, \epsilon^{2} - \frac{1}{64} \, \epsilon^{3} + \frac{13}{20480} \, \epsilon^{4} - \dots$$

В заключение заметим, что не учтенное здесь вязкое трение песколько суживает границы областей неустойчивости, подобно тому как это было пояснено в § 10.

2. Примеры.

Пример 11.1. Найти условия устойчивости вертикального состояния равновесия обращенного маятника (рис. 11.2,), если точка его подвеса гармонически колеблется около среднего положения по закону  $y = A\cos\omega t$  с частотой  $\omega$  и амилитудой A. Длина маятника равна l.

Понятно, что при пеподвижной опоре обращенный маятник пеустойчив; однако, как мы сейчае увидим, колебания опорной точки могут придать устойчивость такому маятнику. Составляя дифференциальное уравнение относительного движения, необходимо учесть переносную силу иперцип  $-m\ddot{y} = mA\omega^2\cos\omega t$ . Ее момент составляет  $-mA\omega^2 l \varphi\cos\omega t$ , и уравнение моментов запишется в форме

$$mgl\varphi - mA\omega^2l\varphi\cos\omega t = ml^2\varphi,$$

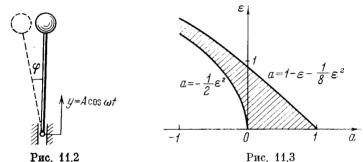
т. е.

$$\ddot{\varphi} + \left( -\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \varphi = 0.$$

Для приведения уравнения к виду (11.2) положим

$$2\tau = \omega t$$
,  $a = -\frac{4g}{\omega^2 l}$ ,  $\varepsilon = -\frac{2A}{l}$ .

Как видно, в нашем примере оба параметра а и є отрицательные. Знак є вообще роли не играет (об этом уже говорилось выше). и главной особенностью рассматриваемой системы является



отрицательность величины а. Как видно из диаграммы устойчивости на рис. 11.1, устойчивость возможна и при отрицательных значениях а; действительно, каждому значению є отвечает некоторая, довольно узкая область значений a < 0, в пределах которой состояние равновесия устойчиво. Согласно (11.7) эти значения лежат в инвервале  $a_0^{\text{пр}} < a < a_1^{\text{лев}}$ , т. е.

$$-\frac{1}{2} \varepsilon^2 < a < 1 - \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2$$

(рис. 11.3). При малых амплитудах колебаний A, т. е. малых значениях параметра є, правое неравенство удовлетворяется при любых отрицательных значениях а и практически остается лишь одно неравенство  $a>-\frac{1}{2}\,\epsilon^2$ , т. е.

$$|a| < \frac{1}{2} \varepsilon^2$$
.

Подставляя сюда выражения а и є, получим условие устойчивости в виде

$$A\omega > \sqrt{2gl}$$
.

Это неравенство определяет нижний уровень максимальной скорости Аф колебаний точки подвеса, который обеспечивает устойчивость опрокинутого маятника; как видно, указанная скорость должна превышать скорость свободного падения тела с высоты, равной длине маятника.

Пример 11.2. Исследовать устойчивость режимов стационарно движения

$$q = A_i \sin \omega t \qquad (i = 1, 2, 3)$$

в системе с нелинейной восстанавливающей силой  $F(q) = \beta q^3$ .

Дифференциальное уравнение относительно вариации  $\delta q$  было составлено выше (см. (9.11)). Запишем его в виде

$$\ddot{\delta q} + (3\alpha A_i^2 \sin^2 \omega t) \, \delta q = 0,$$

где коэффициент  $\alpha$  равен коэффициенту  $\beta$ , разделенному на инерционный коэффициент системы. Для того чтобы привести уравнение к форме (11.2), нужно положить

$$\omega t = \tau$$
,  $a = \frac{3\alpha A_i^2}{2\omega^2}$ ,  $\varepsilon = \frac{3\alpha A_i^2}{4\omega^2}$ .

Таким образом, в данном случае  $a=2\varepsilon$  и на диаграмме устойчивости всевозможные пары значений a,  $\varepsilon$  лежат на луче, который выходит из начала координат под углом  $\arctan \frac{1}{2}$  к оси (см. схему на рис. 11.4). Поочередная подстановка значений  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  в

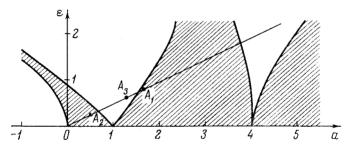


Рис. 11.4

выражении a и  $\epsilon$  приводит к расположению точек, показанному на рис. 11.4, т. е. точки  $A_1$  и  $A_2$  соответствуют устойчивым, а точка  $A_3$  — неустойчивым решениям. Этим подтверждается сказанное в  $\S$  7 относительно устойчивости найденных там решений на различных ветвях резонансной кривой.

#### Глава IV

### УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И АВТОКОЛЕБАНИЯ

#### § 12. Устойчивость состояний равновесия

1. Вступительные замечания. Вопросов устойчивости состояний равновесия мы уже касались в главе I (см. стр. 35—40, 44), но поскольку она была посвящена свободным колебаниям, мы рассматривали только такие системы, в которых отсутствует приток энергии при их движении вблизи положения равновесия.

В настоящем параграфе рассматриваются более сложные случаи, относящиеся к автономным системам. движении которых возможен приток энергии извне. Эти случаи связаны с конкретными ситуациями, которые несмотря на свой частный характер можно считать достаточно типичными. В каждой из рассмотренных здесь задач выделяется один «ответственный» параметр, от которого зависит устойчивость или неустойчивость соответствующей механической системы, и задача сводится к определению критического значения этого параметра, при vстойчивость котором неустойчивостью. сменяется Во всех изучаемых здесь случаях рассматриваются только малые отклонения системы от состояния равновесия, т. е. анализируются линейные задачи, - этого достаточно для того, чтобы судить о тенденциях возмущенного движения и тем самым сделать заключение об устойчивости (или неустойчивости) «в малом».

Сначала, в п. 2, на двух примерах обсуждаются вопросы устойчивости систем с одной степенью свободы, связанные с аэроупругой неусточивостью типа дивергенции и действием сил «отрицательного» трения. Эти примеры позволяют выявить особые точки фазовой плос-

кости двух ранее не упоминавшихся типов — неустойчивый узел и неустойчивый фокус.

В п. З рассматривается устойчивость систем с двумя степенями свободы без трения. Первый случай относится к аэроупругой неустойчивости типа флаттер, а второй случай — к устойчивости вращающегося вала с эксцентрично насаженным диском. В этих случаях задача сводится к анализу знаков вещественных частей корней биквадратного характеристического уравнения и поэтому относительно проста.

Несколько сложнее решается вопрос об устойчивости систем с двумя степенями свободы при наличии трения, который приводит к анализу знаков вещественных частей корней полного уравнения четвертой степени. В п. 4 сначала приводится используемый в подобных случаях

критерий Рауса — Гурвица, а затем рассматривается конкретный пример (задача Циглера).

- 2. Системы с одной степенью своболы.
- а) Задача о дивергенции. Рассмотрим жесткую тонкую пластинку, упруго опертую вдоль левого края и шарнирно опертую вдоль правого края. Пластинка находится в

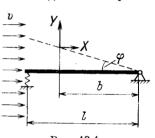


Рис. 12.1

потоке газа (жидкости), скорость *v* которого направлена вдоль срединной плоскости пластинки в невозмущенном состоянии равновесия (рис. 12.1). В этом положении аэродинамические силы равны нулю (если пренебречь весьма малой силой трения потока о поверхность пластинки) и пластинка находится в равновесии под действием силы тяжести и реакций опор. Найти критическую скорость потока.

При отклонении пластинки возникают аэродинамические давления, зависящие от угла отклонения ф. Соответствующие количественные закономерности устанавливаются в аэрогидродинамике: мы приведем их в готовом виде. Равнодействующую давлений можно разложить на составляющие (лобовое сопротивление и подъемную силу)

$$X = k_x \frac{\rho v^2}{2} l \varphi, \quad Y = k_y \frac{\rho v^2}{2} l \varphi,$$
 (12.1)

здесь  $k_x$ ,  $k_y$  — постоянные аэродинамические коэффициен-

ты,  $\rho$  — плотность газа, l — размер пластинки вдоль потока (перпендикулярный плоскости рисунка размер принят равным единице). Точка приложения равнодействующей аэродинамических давлений находится на расстоянии b от оси шарнира, которое приближенно будем считать не зависящим от угла  $\phi$ . Момент сил, возникающих при отклонении пластинки относительно оси шарнира, равен

$$M = -c_0 l^2 \varphi + X b \varphi + Y b,$$

где  $c_0$  — коэффициент жесткости упругой опоры. Подставляя сюда (12.1), получаем

$$M = -c_0 l^2 \varphi + k_x \frac{\rho v^2}{2} b l \varphi^2 + k_y \frac{\rho v^2}{2} b l \varphi.$$

Обозначим через *I* момент инерции пластинки относительно оси шарнира; тогда дифференциальным уравнением движения будет

$$\ddot{I\varphi} + \left(c_0 l - k_y \frac{\rho v^2}{2} b\right) l\varphi = 0$$

(слагаемое, определяющее момент силы X, опущено как имеющее второй порядок малости).

Условие устойчивости имеет вид

$$c_0 l - k_x \frac{\rho v^2}{2} b > 0,$$

а критическое значение скорости равно

$$v_{\rm kp} = \sqrt{\frac{2c_0 l}{k_y \rho b}}; \qquad (12.2)$$

отсюда, в частности, можно видеть, что с увеличением коэффициента жесткости упругой опоры критическая скорость увеличивается. Задачи этого типа относятся к теории аэрогидроупругости; рассмотренное явление потери устойчивости называется дивергенцией, а выражение (12.2) определяет скорость дивергенции. В приведенном решении явление существенно схематизировано.

б) «Отрицательное трение». Всюду выше, где учитывалось наличие зависящих от скоростей сил, мы считали эти силы диссипативными; будучи направленными противоположно соответствующим скоростям, они способствуют демифированию колебаний. Однако в некоторых механических системах развиваются силы, также завися-

щие от скоростей, но совпадающие с ними по направлению. Такие силы оказывают дестабилизирующее действие и способствуют раскачке колебаний, а не их демпфированию; иногда силы этого типа называют силами «отрицательного трения».

Прежде всего остановимся на формальной стороне вопроса и положим, что кроме восстанавливающих сил действуют силы, линейно зависящие от скорости и совпадающие с ней по направлению. Тогда вместо (2.6) имеем дифференциальное уравнение

$$a\ddot{q} - b\dot{q} + cq = 0 \tag{12.3}$$

(b > 0). При прежних обозначениях

$$\frac{b}{2a} = h$$
,  $\frac{c}{a} = k^2$ ,  $\frac{c}{a} - h^2 = k_*^2$ 

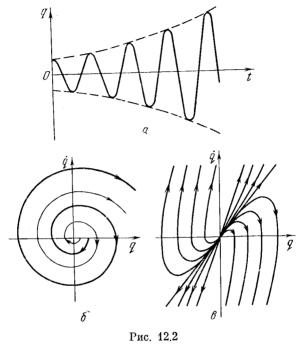
решение дифференциального уравнения (12.3) запишется, подобно (2.9), в форме

$$q = e^{ht} \left( \frac{\dot{q}_0 - q_0 h}{k_*} \sin k_* t + q_0 \cos k_* t \right),$$

где постоянные интегрирования выражены через начальные возмущения. Отсюда видно, что при сколь угодно малых начальных везмущениях  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  возникнут колебания, амплитуды которых будут возрастать по показательному закону (рис. 12.2, a), т. е. состояние равновесия системы неустойчиво. На рис. 12.2,  $\delta$  показана фазовая диаграмма; в этом случае состоянию равновесия соответствует особая точка типа неустойчивый фокус. При весьма большом трении (большем критического) фазовая диаграмма принимает вид, показанный на рис. 12,2,  $\epsilon$ ; начало координат представляет собой особую точку типа неустойчивый узел.

Примером механической системы, в которой при колебаниях может возникнуть сила отрицательного трения, служит система, показанная на рис. 12.3, a. Она состопт из тела I, упруго закрепленного на пружинах 2, и барабана 3, который прижат к телу и вращается с постоянной угловой скоростью. Между барабаном и телом действует сила сухого трения R, характеристика которой показана на рис. 12.3, 6. В отличие от обычной схематизации, эта характеристика отражает реально наблюдаемое влияние значения скорости скольжения на значение

силы трения. Отметим, что в первом квадранте характеристика состоит из двух участков: падающего при  $0 < v < v_*$  и восходящего при  $v > v_*$ .



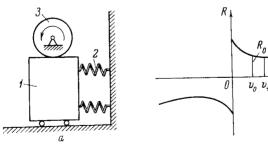


Рис. 12.3

Пусть скорость скольжения при покое тела 1 равна  $v_0$ ; ей соответствует сила трения  $R_0$ . Из уравнения равновесия

$$R_0-cx_0=0$$

можно определить укорочение пружин в равновесном состоянии системы:

$$x_0 = R_0/c. (12.4)$$

Рассмотрим теперь движение тела около этого состояния равновесия и обозначим через x дополнительное перемещение тела. При этом скорость скольжения перестает быть постоянной величиной и выражается разностью

$$v=v_0-\dot{x},$$

которая определяет также переменную силу трения R, отличающуюся от номинального значения  $R_0$ . При малых колебаниях, когда скорость  $\dot{x}$  мала по сравнению с  $v_0$ , можно принять

$$R = R_0 - R_0' \dot{x} \left( R_0' = \frac{dR}{dv} \Big|_{v_0} \right).$$
 (12.5)

Дифференциальное уравнение движения тела запишется в виде

$$R-c(x_0+x)=m\ddot{x},$$

нли, с учетом (12.4) и (12.5),

$$m\ddot{x} + R_0'\dot{x} + cx = 0. {(12.6)}$$

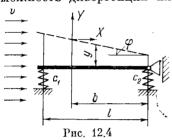
Отсюда видно, что при  $v>v_*$ , когда  $R_0'>0$ , колебания будут затухающими; если же  $v< v_*$ , то  $R_0'<0$  и уравнение (12.6) принимает вид (12.3). Таким образом, если  $v_0>v_*$ , то состояние равновесия устойчиво; если же  $v_0< v_*$ , то после любого сколь угодно малого возмущения в системе происходит самовозбуждение колебаний.

Следует иметь в виду, что наше решение определяет лишь начальную тенденцию возмущенного движения. С возрастанием амплитуд колебаний линеаризованное представление силы трения (12.5) будет становиться все менее точным, и для полного анализа всего последующего процесса необходимо учитывать действительную нелинейность силы трения; об этом см. ниже § 13.

3. Системы с двумя степенями свободы без трения. Исследование устойчивости состояний равновесия механических систем с несколькими степенями свободы также состоит в изучении свойств возмущенного движения, т. е. того движения, которое будет происходить после произвольного сколь угодно малого нарушения состояния равновесия. Названные свойства определяются видом 13 я. г. пановко

корней соответствующего характеристического уравнения. Если среди корней  $\lambda=\alpha+i\beta$  имеется хотя бы один с ноложительной вещественной частью  $\alpha>0$ , то отвечающее ему движение будет «уводить» систему от состояния равновесия — либо монотонно (если  $\beta=0$ ), либо в виде нарастающих колебаний (если  $\beta\neq0$ ). Поэтому исследования устойчивости рассматриваемых ниже систем с двумя степенями свободы сводятся к анализу знаков вещественных частей корней.

а) Задача о флаттере. В п. 2а была рассмотрена возможность дивергенции пластинки в потоке газа, причем



принималось, что пластинка шарнирно закреплена вдоль одного края, а вдоль другого края она упруго оперта (см. выше рис. 12.1). При упругом опирании обоих краев (рис. 12.4) появляется еще одна опасность возникновения неустойчивости, связанная с неконсервативными

свойствами рассматриваемой системы с двумя степенями свободы.

Обозначим: y(t) — перемещение центра тяжести пластинки,  $\phi(t)$  — угол поворота пластинки,  $c_1$  и  $c_2$  — коэффициенты жесткости упругих опор,  $mt^2/12$  — момент инерции пластинки относительно оси, проходящей через центр тяжести пластинки перпендикулярно плоскости чертежа, t — длина пластинки вдоль потока, t — расстояние от точки приложения полъемной силы

$$Y = k_y \frac{\rho v^2}{2} l \varphi$$

до правого края,

$$R_1=c_1\Big(y+\frac{\mathrm{q} l}{2}\Big),\quad R_2=c_2\left(y-\frac{\mathrm{q} l}{2}\right)$$

- упругие силы реакции.

Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{split} & -R_1 - R_2 + Y = \ddot{my}, \\ & -R_1 \frac{l}{2} + R_2 \frac{l}{2} + Y \Big( b - \frac{l}{2} \Big) = \frac{ml^2}{12} \ddot{\varphi}. \end{split}$$

Подставляя сюда выражения для Y,  $R_1$  и  $R_2$ , получаем однородную систему

в которой

$$\begin{split} c_{11} &= \frac{c_1 + c_2}{m}, \qquad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2) \, l}{2m} - \frac{k_y}{m} \frac{\rho v^2}{2} \, l, \\ c_{21} &= \frac{6 \, (c_1 - c_2)}{m l}, \quad c_{22} = \frac{3 \, (c_1 + c_2)}{m} + 6 \, \frac{k_y}{m l^2} \frac{\rho v^2}{2} (l - 2b). \end{split}$$

Сразу отметим, что неравенство  $c_{12} \neq c_{21}$  служит признаком неконсервативности системы; ниже мы непосредственно убедимся в том, что энергия рассматриваемой системы может с течением времени убывать (при малых скоростях потока) или возрастать (при достаточно больших скоростях потока). Принимая частное решение системы (12.7) в виде

$$y = A_1 e^{\lambda t}, \quad \varphi = A_2 e^{\lambda t},$$

получаем

$$A_1(\lambda^2 + c_{11}) + A_2c_{12} = 0,$$
  
 $A_1c_{21} + A_2(\lambda^2 + c_{22}) = 0;$ 

отсюда следует характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\lambda^4 + \lambda^2 (c_{11} + c_{22}) + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0.$$

Таким образом, корни характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2,3,4} =$$

$$=\pm\sqrt{-\frac{c_{11}+c_{22}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{c_{11}+c_{22}}{2}\right)^2-(c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21})}}.$$

(12.8)

Если разность  $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$  отрицательная, то один из корней (соответствующий двум знакам плюс) оказывается вещественным и положительным; отвечающее это-13\*

му корню движение представляет собой апериодический монотонный уход системы от положения равновесия. Следовательно, это положение — неустойчивое.

Если же эта разность положительная и удовлетворяет

неравенству

$$c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}>\left(\frac{c_{11}+c_{22}}{2}\right)^2$$

то корни (12.8) оказываются комплексными:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$
,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ,  $\lambda_3 = -\alpha + i\beta$ ,  $\lambda_4 = -\alpha - i\beta$ ,

где  $\alpha$  и  $\beta$  — положительные и вещественные. Первой паре этих корней соответствует движение

$$y = A_{11}e^{\lambda_1 t} + A_{12}e^{\lambda_2 t} = B_1 e^{\alpha t} \sin{(\beta t + \gamma_1)},$$
  
$$\varphi = A_{21}e^{\lambda_1 t} + A_{22}e^{\lambda_2 t} = B_2 e^{\alpha t} \sin{(\beta t + \gamma_2)},$$

т. е. колебания с монотонно возрастающими амплитудами. Отсюда ясно, что в рассматриваемом случае состояние равновесия также неустойчиво.

Таким образом, для того чтобы рассматриваемая система после возмущения оставалась в окрестности положения равновесия (что и принимается здесь за признак

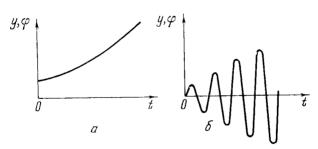


Рис. 12.5

устойчивости), необходимо, чтобы разность  $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}$  удовлетворяла двум неравенствам:

$$0 < c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \tag{12.9}$$

При нарушении первого неравенства возникает дивергенция (рис. 12.5, a), а при нарушении второго перавенства — колебания с возрастающими амплитудами (рис. 12.5, б); такие колебания называются флаттером.

Границам области устойчивости соответствуют знаки равенств в (12.9). Если подставить в (12.9) выражения  $c_{ij}$ , то можно найти два критических значения скорости, которая служит параметром, определяющим устойчивость:

скорость дивергенции

$$v^{(1)} = \sqrt{\frac{\frac{2c_{1}c_{2}l}{\rho k_{y}\left[c_{1}\left(b-l\right)+c_{2}b\right]}}{}}$$

и скорость флаттера

$$v^{(2)} = 2 \, \sqrt{\frac{\frac{1}{3\rho k_y} \frac{c_1^2 - c_1 c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}}.$$

Отметим, что при малых жесткостях правой опоры, когда  $c_2 < c_1 \left( \frac{l}{b} - 1 \right)$ , критическая скорость  $v_{\rm кp}^{(1)}$  оказывается минмой, т. е. дивергенция невозможна. Если, напротив, жесткость левой опоры меньше жесткости правой опоры, то минмым становится выражение критической скорости  $v_{\rm kp}^{(2)}$ , т. е. невозможен флаттер.

Флаттер представляет реальную опасность для многих конструкций, находящихся в потоке жидкости или газа (крыло или хвостовое оперсние самолета, общивка летательного аппарата, лопатка турбины и т. п.).

б) Устойчивость вращающегося вала. Рассмотрим систему, состоящую из вертикального упругого безынерционного вала I, с серединой которого жестко связан эксцентрично насаженный диск 2, обладающий горизонтальной плоскостью симметрии. Вал с диском вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 12.6, a).

Введем координатную систему xyz, равномерно вращающуюся вокруг оси недеформированного вала с угловой скоростью  $\omega$ . Ось x совместим с осью недеформированного вала, ось y направим параллельно эксцентриситету e = AC (A — центр сечения вала, C — центр тяжести диска), а ось z — перпендикулярно осям x и y; орты осей y и z обозначим через i и j соответственно, — см. рис. 12.6,  $\delta$ . При таком выборе подвижной координатной

системы относительное движение диска, обусловленное изгибом вала, окажется поступательным.

Исследуем это относительное движение, обозначив:  ${\bf r}$  — радиус-вектор центра тяжести диска C, x, y, z — декартовы координаты точки C в подвижной координатной системе,  ${\bf \rho}$  — радиус-вектор точки крепления A диска к валу (при этом  ${\bf \rho}+{\bf e}={\bf r})$ , c — коэффициент жесткости

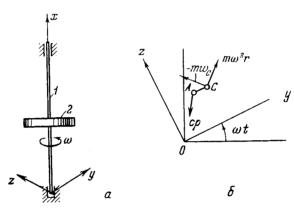


Рис. 12.6

вала (для изображенной схемы  $c = 48EJ/l^3$ , где EJ — изгибная жесткость сечения вала, l — его длина).

При составлении дифференциальных уравнений относительного движения центра диска C нужно учесть силу упругости вала  $-c\rho$ , переносную силу инерции  $-m\mathbf{w}_e$  и кориолисову силу инерции  $-m\mathbf{w}_e$ . Сила упругости приложена в точке A, а обе силы инерции — в точке C.

Силу упругости можно записать в виде

$$-c\mathbf{p} = -c\mathbf{r} + c\mathbf{e} = -c[(y-e)\mathbf{j} + z\mathbf{k}].$$

Перепосная сила инерции равна

$$-m\mathbf{w}_e = m\omega^2\mathbf{r} = m\omega^2(y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Для кориолисовой силы инерции последовательно получим:

$$-m\mathbf{w}_{c} = 2m(\mathbf{v}_{r} \times \boldsymbol{\omega}_{e}) = 2m[(\dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega}\mathbf{i}] =$$

$$= 2m\boldsymbol{\omega}(\dot{z}\mathbf{j} - \dot{y}\mathbf{k}).$$

Проекции этих сил на оси подвижной координатной системы даны в следующей таблице:

Силы	Проекции сил	
	на ось у	на ось z
Сила упругости	-c (y - e)	cz
Переносная сила инерции	$ \begin{array}{c c} -c & (y-e) \\ m\omega^2 y \end{array} $	$m\omega^2z$
Кориолисова сила инерции	$2m\omega z$	$-2m\omega \dot{y}$

Соответственно данным таблицы дифференциальные уравнения относительного движения центра диска  ${\cal C}$  имеют вид

$$m\ddot{y} = -c(y - e) + m\omega^2 y + 2m\omega \dot{z},$$
  

$$m\ddot{z} = -cz + m\omega^2 z - 2m\omega \dot{y}.$$

Подставив сюда  $k^2=c/m$  (k — собственная частота поперечных колебаний невращающейся системы), получим при  $\omega \neq k$ 

Эта неоднородная система уравнений допускает решение  $y_* = \frac{e}{1-\omega^2/k^2}; \ z_* = 0;$  ему соответствует неизменный во времени изгиб вала во вращающейся плоскости xy. Для того чтобы исследовать устойчивость этого режима, предположим, что он каким-либо образом был нарушен и возникло возмущенное движение, описываемое функциями.

$$y = y_* + Y, \quad z = Z,$$

где Y(t) и Z(t) — малые отклонения от режима, устойчивость которого исследуется. Подставив y, z в (12.10), получим систему уравнений, которая при учете выражений  $y_*$  и  $z_*$  приводится к однородному виду

$$\ddot{Y} - 2\omega \dot{Z} + (k^2 - \omega^2) Y = 0,$$
  
 $\ddot{Z} + 2\omega \dot{Y} + (k^2 - \omega^2) Z = 0.$ 

Полагая, как и выше

$$Y = A_1 e^{\lambda t}, Z = A_2 e^{\lambda t},$$

получаем однородную относительно  $A_1$  и  $A_2$  систему уравнений:

$$A_1 \lambda^2 - 2\omega A_2 \lambda + (k^2 - \omega^2) A_1 = 0,$$
  

$$A_2 \lambda^2 + 2\omega A_1 \lambda + (k^2 - \omega^2) A_2 = 0.$$

Она имеет отличные от нуля корни только в том случае, когда равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} k^2 - \omega^2 + \lambda^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & k^2 - \omega^2 + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0;$$

в результате получим характеристическое уравнение

$$(k^2 - \omega^2 + \lambda^2)^2 + (2\omega\lambda)^2 = 0.$$

При  $k \neq \omega$  все корни характеристического уравнения мнимые:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm (k \pm \omega) i.$$

Это означает, что при  $k \neq \omega$  система устойчива: после любого начального возмущения она будет совершать гармонические колебания с частотами  $k+\omega$  и  $k-\omega$  (нужно отметить, что эти частоты отличаются от собственной частоты колебаний невращающейся системы). Лишь в особом случае, когда  $\omega=k$ , возникает нулевой (двойной) корень, которому соответствует неустойчивость системы. Впрочем, с приближением угловой скорости  $\omega$  к значению k само значение  $y_*$  неограниченно возрастает. Угловую скорость  $\omega=k$  называют критической скоростью; некоторый диапазон значений угловой скорости, близких к критическому значению, в эксплуатационных условиях «запрещается». Важно, что при  $\omega>k$  система вновь устойчива!

4. Системы с двумя степенями свободы с трением. В обоих рассмотренных в и. З примерах характеристическое уравнение оказалось биквадратным и найти его корни было легко. В более сложных случаях, например для полного уравнения четвертой степени, определение корней оказывается гораздо более трудной задачей. Однако для суждения о знаках вещественных частей корпей нет необходимости решать характеристическое уравнение,—Раус и Гурвиц указали условия, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения, для того чтобы вещественные части всех корней были отрицательными; приведем условия Рауса — Гурвица без вывода.

Пусть характеристическое уравнение записано в виде

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n = 0;$$

для того, чтобы среди его корней не было ни одного с положительной вещественной частью, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\begin{vmatrix} b_0 > 0, & b_1 > 0, \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} > 0, \dots \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0$$

В частности, для характеристического уравнения третьей степени условия Рауса — Гурвица имеют вид

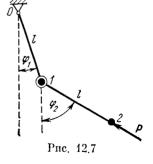
$$b_0 > 0$$
,  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$ ,  $b_1b_2 - b_0b_3 > 0$ . (12.11)

а для уравнения четвертой степени -- вид

$$b_0 > 0$$
,  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$ ,  $b_4 > 0$ ,  
 $b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0$ . (12.12)

В качестве примера рассмотрим плоскую систему типа двойного маятника (рис. 12.7) с вязкоупругими шар-

нирами в точках 0 и 1. Массу системы будем считать сосредоточенной в точках 1 и 2. В точке 2 на систему действует «следящая» сила P, направление которой совнадает с осью стержня 1-2 при любых отклонениях системы. Обозначим: b и c — коэффициенты вязкости и жесткости шарниров,  $m_1 = 2m$  и  $m_2 = m$  — массы, сосредоточенные в точках 1 и 2, 1 — длина каждого из стерж-



ней,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  — углы отклонения стержней от положения равновесия, принимаемые за обобщенные координаты. Силы тяжести для упрощения задачи учитывать не будем.

В данном случае условия Рауса — Гурвица (12.12) приводят к следующим неравенствам:

1) 
$$b > 0$$
; 2)  $P < \frac{45}{14} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{ml^3}$ ;

3) 
$$P < \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{ml^3}$$
; 4)  $c^2 > 0$ .

Первое и четвертое неравенства выполняются автоматически, а из двух остальных неравенств более жестким является третье. Оно позволяет найти критическое значение силы

$$P_{\rm Rp} = \frac{41}{28} \, \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \, \frac{b}{ml^3}$$

и если b = 0, то  $P_{\text{кр}} = 1,464 \ c/l$ .

В заключение отметим, что если бы в данной задаче с самого начала положить b=0 и определять критическую силу подобно тому, как это было сделано в п. 3 (из анализа биквадратного уравнения), то для критической силы получится иное (неверное) значение

$$P_{\rm Kp} = 2,086 \frac{c}{l}$$
.

Это несоответствие составляет содержание так называемого парадокса Циглера, на обсуждение которого мы здесь останавливаться не будем.

## § 13. Стационарные режимы и предельные циклы

1. Общие понятия. Для суждения об устойчивости состояний равновесия выше мы пользовались линеаризованными уравнениями, описывающими малые движения в окрестности этих состояний. Такой анализ позволяет уловить начальные тенденции возмущенных движений, но — в случаях неустойчивости — не позволяет проследить дальнейшее развитие процесса движения при возрастании отклонений.

Исследование движения «в большом» в принципе невозможно с помощью линеаризованных уравнений: нелинейные члены уравнений, будучи пренебрежимо малыми при малых отклонениях системы от состояния равновесия, начинают играть все более заметную роль при увеличении отклонений; при этом вид нелинейности существенно влияет на развитие процесса с возрастанием вре-

В данном случае условия Рауса — Гурвица (12.12) приводят к следующим неравенствам:

1) 
$$b > 0$$
; 2)  $P < \frac{45}{14} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{ml^3}$ ;

3) 
$$P < \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{ml^3}$$
; 4)  $c^2 > 0$ .

Первое и четвертое неравенства выполняются автоматически, а из двух остальных неравенств более жестким является третье. Оно позволяет найти критическое значение силы

$$P_{\rm Kp} = \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b}{ml^3}$$

и если b = 0, то  $P_{\text{кр}} = 1{,}464 \ c/l$ .

В заключение отметим, что если бы в данной задаче с самого начала положить b=0 и определять критическую силу подобно тому, как это было сделано в п. 3 (из анализа биквадратного уравнения), то для критической силы получится иное (неверное) значение

$$P_{\rm Kp} = 2,086 \frac{c}{l}$$
.

Это несоответствие составляет содержание так называемого парадокса Циглера, на обсуждение которого мы здесь останавливаться не будем.

## § 13. Стационарные режимы и предельные циклы

1. Общие понятия. Для суждения об устойчивости состояний равновесия выше мы пользовались линеаризованными уравнениями, описывающими малые движения в окрестности этих состояний. Такой анализ позволяет уловить начальные тенденции возмущенных движений, но — в случаях неустойчивости — не позволяет проследить дальнейшее развитие процесса движения при возрастании отклонений.

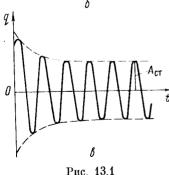
Исследование движения «в большом» в принципе невозможно с помощью линеаризованных уравнений: нелинейные члены уравнений, будучи пренебрежимо малыми при малых отклонениях системы от состояния равновесия, начинают играть все более заметную роль при увеличении отклонений; при этом вид нелинейности существенно влияет на развитие процесса с возрастанием вре-

мени. В частности, во многих случаях возрастание колебаний постепенно замедляется и движение стремится к некоторому стационарному режиму — режиму автоколебаний. В общих чертах природу этого явления можно понять с помощью качественных соображений, пе прибегая к количественному исследованию.

Рассмотрим, например, колебательную систему с трением, когда характеристика трения описывается нелинейной функцией скорости  $R(\dot{q}) = -b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^2$  (рис.

 $R(\dot{q})$ 

a Act of the second sec



13.1, а). Дифференциальное уравнение движения (уравнение Рэлея) имеет вид

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^3 + cq = 0$$
(13.1)

 $(a>0, b_1>0, b_3>0, c>0).$ 

При малых отклонениях от состояния равновесия основное значение имеет ный член силы трения, который в данном случае оказыдестабилизируюдействие; из-за состояние равновесия тойчиво, и сколь угодно малые начальные возмущения вызовут постепенно стающие колебания (об этом см. выше в связи с уравнением (12.3)). Но при этом будет увеличиваться демифирующее влияние ского члена. так что колебаний станет замедляться и движение будет миться к режиму автоколебаний, характеризуемому по-

стоянным значением амплитуды; в целом движение будет развиваться так, как это показано на рис. 13.1, б.

При достаточно больших начальных возмущениях рассматриваемой системы демифирующее действие кубического члена вначале окажется значительнее, чем дестабилизирующее действие линейного члена, т. е. колебания

в начале процесса будут затухать. Однако с уменьшением колебаний относительное влияние кубического члена будет также убывать, т. е. движение станет стремиться к тому же стационарному режиму, который характеризуется балансом противоположных влияний (рис. 13.1, в).

Эти два случая движения удобно иллюстрировать на фазовой плоскости (рис. 13.2, а). Кривая I соответствует движению, возникающему после малых начальных возмущений, кривая II — движению, начинающемуся после значительных возмущений; обе эти кривые описывают переходный процесс. Замкнутая кривая A, к которой неограниченно приближаются кривые типа I и II, описывает стационарный режим автоколебаний и является устойчивым предельным циклом. Вообще устойчивыми предельными циклами называются изолированные замкнутые

фазовые траектории, к которым неограниченно приближаются все расположенные в их окрестности другие фа-

зовые траектории.

Сопоставляя демпфируюдестабилизирующие влияния, мы, в сущности. имели в виду постепенное изменение энергии системы вследствие работы, совершаемой различными составляющими силы трения. Дестабилизирующие слагаемые совершают положительную работу и увеличивают энергию системы, а демпфирующие слагаемые совершают отрицательную работу, уменьшают энергию мы. На рис. 13.2, б схематически показаны вклапы обоих слагаемых, рассчитанные

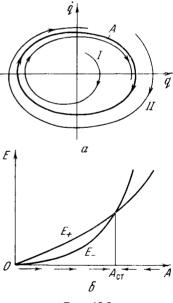


Рис. 13.2

за один период:  $E_+$  — приращение энергии, вызываемое действием линейного слагаемого силы трения,  $E_-$  — абсолютное значение изменения энергии, вызываемого действием кубического слагаемого силы трения. Как видио, эти вклады, и притом в неодинаковой мере, зависят от амплитуды колебаний. При малых амплитудах имеет место нера-

венство  $E_+ > E_-$ , т. е. происходит приток энергии в систему и амплитуды возрастают, пока не будет достигнут стационарный режим, характеризуемый амплитудой  $A_{\rm cr}$ . Если вследствие больших начальных возмущений колебания начинаются с амплитудами, бо́льшими чем  $A_{\rm cr}$ , то разность  $E_+ - E_-$  отрицательная и колебания убывают, стремясь к тому же стационарному режиму. Возможные тенденции движения показаны стрелками под осью абсцисс.

Такими же свойствами обладает и система, описываемая дифференциальным уравнением Вандер Поля

$$\ddot{q} - \mu (1 - q^2) \dot{q} + q = 0 \tag{13.2}$$

 $(\mu-\text{постоянная})$ . Положим, что после некоторого малого начального возмущения начинаются колебания с малыми амилитудами. Пока колебания малы и выполняется неравенство  $q^2 < 1$ , второе слагаемое уравнения (13.2) оказывает, по-видимому, дестабилизирующее действие, и колебания будут возрастать. Но с их увеличением указанное неравенство станет нарушаться и коэффициент при q будет положительным в тех интервалах времени, в которых  $q^2 > 1$ . В этих интервалах времени второе слагаемое левой части (13.2) будет оказывать демпфирующее влияние. При дальнейшем возрастании колебаний демпфирующее действие будет увеличиваться и движение системы станет приближаться к стационарному режиму, которому соответствует взаимная компенсация дестабилизирующего и демпфирующего влияний. В целом

рис. 13.1, б и в, а также рис. 13.2, а и б. Подобные случаи, когда возрастание колебаний происходит после сколь угодно малых начальных возмущений состояния равновесия, называются случаями мягкого самовозбуждения.

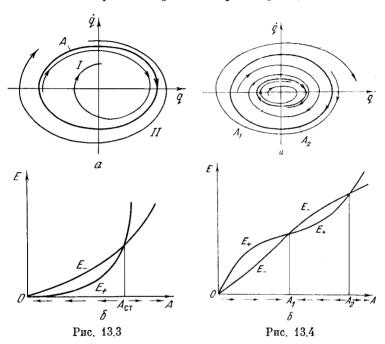
процесс установления будет протекать соответственно

Наряду с этим существуют системы с противоположными свойствами. Такова, например, система, описываемая дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} + b_1\dot{q} - b_3\dot{q}^3 + cq = 0 \tag{13.3}$$

 $(a>0, b_1>0, b_3>0, c>0)$ . Здесь знаки слагаемых силы трения противоположны знакам в уравнении (13.1). Поэтому если начальные возмущения малы, то колебания будут затухать (начало координат является устойчивым фокусом), но если начальные возмущения достаточ-

но велики, то амплитуды колебаний будут неограниченно увеличиваться. В этом случае фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 13.3, а. Здесь также существует предельный цикл A, однако он неустойчив, так как все окрестные фазовые траектории удаляются от



него — либо внутрь, к началу координат, либо вовне (в зависимости от расположения начальной изображающей точки). Эти траектории на рис. 13.3, а обозначены цифрами I и II. Вообще неустойчивыми предельными циклами называются такие изолированные замкнутые фазовые траектории, от которых удаляются все расположенные в их окрестности другие фазовые траектории.

Кривые, характеризующие приток энергии  $E_+$  и энергетические потери  $E_-$ , показаны на рис. 13.3,  $\delta$ ; здесь же стрелками показаны тенденции движения при различных амплитудах колебаний. Такая система может служить примером системы с жестким самовозбуждением, поскольку возрастающие колебания возникают лишь после достаточно больших начальных возмущений.

В более сложных случаях возможно существование нескольких предельных циклов. Так, для системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$a\ddot{q} - b_1\dot{q} + b_3\dot{q}^2 - b_5\dot{q}^5 + cq = 0$$
 (13.4)

 $(a>0, b_1>0, b_3>0, b_5>0, c>0)$ , фазовая диаграмма имеет вид, показанный на рис. 13.4, a, а энергетические кривые даны на рис. 13.4,  $\delta$ .

Во всех рассмотренных случаях можно заметить чередование устойчивых и неустойчивых стационарных состояний: на рис. 13.2, а неустойчивая особая точка окружена устойчивым предельным циклом, на рис. 13.3, а устойчивая особая точка окружена неустойчивым предельным циклом, на рис. 13.4, а неустойчивая особая точка окружена устойчивым циклом  $A_1$ , который в свою очередь располагается внутри неустойчивого предельного цикла  $A_2$  (для последнего случая на рис. 13.4, б показаны энергетические кривые). Можно сказать, что устойчивые состояния равновесия и устойчивые предельные циклы притягивают к себе лежащие в их окрестностях фазовые траектории и по этому существенному признаку называются аттракторами (от английского to attract—притягивать). Ниже, в § 16 будет рассмотрен аттрактор иного рода со столь удивительными свойствами, что его называют странным аттрактором.

Каждому аттрактору на фазовой плоскости соответствует определенная область притяжения, причем границами между этими областями служат неустойчивые предельные циклы (иногда такие циклы, а также неустойчивые состояния равновесия называют репеллерами — от английского глагола to repel — отталкивать). Эта картина подобна тому, как на земной поверхности границы между бассейнами рек проходят по линиям водораздела.

При простой структуре фазовой диаграммы, когда существует единственный аттрактор — устойчивое состояние равновесия как на рис. 2.3, или устойчивый предельный цикл как на рис. 13.3 — его областью притяжения служит вся фазовая плоскость. В более сложных случаях стремление возмущенного движения к тому или иному аттрактору зависит от того, в какой из областей притяжения оказалась изображающая точка при начальном возмущении. Так, для системы с двумя предельными циклами (рис. 13.4) часть фазовой плоскости, расположенная внутри неустойчивого предельного цикла  $\Lambda_2$ , яв-

ляется областью притяжения к аттрактору  $A_1$ , а часть фазовой плоскости, расположенную вне предельного цикла  $A_2$ , можно считать областью притяжения к бесконечности.

Изложенные представления отпосятся к автономным системам с одной степенью свободы, но могут быть распространены на более сложные системы путем перехода от фазовой плоскости к фазовому пространству более высокой размерности. В частности, для неавтономных систем с одной степенью свободы пользуются представлением о трехмерном фазовом пространстве, причем координатами изображающей точки служат величины  $q, \dot{q}$  и t. Фазовое пространство для автономной системы с двумя степенями свободы оказывается четырехмерным и т. д. Конечно, в этих и еще более сложных случаях представления о фазовых диаграммах лишаются простоты и наглядности, которыми обладают эти диаграммы на фазовой плоскости.

Дальнейшее содержание настоящего параграфа посвящено способам определения стационарных режимов; анализ устойчивости (неустойчивости) таких режимов, т. е. выделение аттракторов и репеллеров, рассматривается в следующем параграфе.

2. Способ поэтапного интегрирования для кусочнолинейных систем. Как мы видели выше, в нелинейных системах с кусочно-линейными характеристиками удобно разделить весь процесс движения на последовательность интервалов, в каждом из которых дифференциальное уравнение линейно и легко решается в замкнутом виде. Тогда задача сводится к последовательному решению нескольких дифференциальных уравнений и припасовыванию найденных решений путем согласования значений координаты и скорости на границах интервалов.

В качестве первого примера рассмотрим систему с вязким трением, на которую в моменты прохождения через положение равновесия с положительной скоростью  $(q=0,\ \dot{q}>0)$  действуют мгновенные импульсы S, направленные в сторону движения (см., например, рис.  $0.2,\delta$ ). В промежутках времени между двумя последовательными импульсами движение системы описывается дифференциальным уравнением (2.6), решение которого примем в форме (2.7). Входящие сюда постоянные определяются условиями в начале рассматриваемого

*n*-го промежутка q(0) = 0,  $\dot{q}(0) = \dot{q}_n^+$ :

$$C_1 = \dot{q}_n^+/k_*, \qquad C_2 = 0.$$

Таким образом, для q и  $\dot{q}$  имеем

$$q = (q_n^+/k_*) e^{-ht} \sin k_* t;$$

$$\dot{q} = \dot{q}_n^+ e^{-ht} [\cos k_* t - (h/k_*) \sin k_* t].$$
(13.5)

В последний момент перед приложением очередного (n+1)-го импульса, т. е. при  $t=2\pi/k_*$ , обобщенная скорость равна

$$\dot{q}_{n+1}^- = q_n^+ e^{-2\pi h/k_*}.$$

Следовательно, непосредственно после приложения следующего импульса

$$\dot{q}_{n+1}^{+} = \dot{q}_{n+1}^{-} + \frac{S}{a} = \dot{q}_{n}^{+} e^{-2\pi h/h*} + \frac{S}{a}.$$
 (13.6)

В стационариом режиме, т. е. при движении по предельному циклу, должно быть  $q_{n+1}^+ = q_n^+$ ; из этого условия периодичности следует выражение для обобщенной скорости сразу после приложения любого из мгновенных импульсов:

$$\dot{q}^+ = \frac{S}{a (1 - e^{-2\pi h/h_*})}$$

Соответственно для обобщенной координаты находим

$$q_{\max} \approx \frac{S}{ak_* (1 - e^{-2\pi h/h_*})}.$$

Энергия, рассеиваемая в рассмотренной системе за время свободного движения между двумя последовательными импульсами, мгновенно восполняется благодаря скачку скорости в момент приложения импульса.

Сходными автоколебательными свойствами обладает система, в которой наряду с обычной силой вязкого трения действует сила отрицательного кулонова трения. Характеристика трения показана на рис. 13.5, а, так что дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + b\dot{q} - R_0 \operatorname{sign} \dot{q} + cq = 0.$$
 (13.7)

Здесь причиной самовозбуждения колебаний служит отрицательная сила кулонова трения. При малых отклонениях системы от состояния равновесия влияние указанной силы значительнее демпфирующего влияния силы вязкого трения и состояние равновесия неустойчиво. Однако при дальнейшем развитии колебаний эти влияния сравняются и установится стационарный режим автоколебаний (рис. 13.1, б). После большого начального

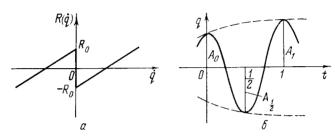


Рис. 13,5

отклонения (рис. 13.1,  $\theta$ ) постенению устанавливается тот же стационарный режим.

Рассмотрим какой-либо интервал процесса, в котором координата убывает (см. на рис. 13.5, б интервал, отмеченный числами 0 и 1/2); на этом интервале дифференциальное уравнение (13.7) принимает форму

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = -R_0,$$

и его решение при начальных условиях  $q_0 = A_0$ ,  $\dot{q}_0 = 0$  имеет вид

$$q = \left(A_0 + \frac{R_0}{c}\right)e^{-ht}\left(\cos k_*t + \frac{h}{k_*}\sin k_*t\right) - \frac{R_0}{c}.$$

Далее находим скорость

$$\dot{q}=-\left(A_0+\frac{R_0}{c}\right)e^{-ht}\frac{k^2}{k_+^2}\sin k_*t$$

(обозначения соответствуют принятым в  $\S 2$ ). В точке 1/2 скорость обращается в нуль, и этому моменту соответствует равенство

$$k_*t_{1/2}=\pi,$$

причем координата q принимает значение

$$q = A_{1/2} = -A_0 e^{-\frac{\pi h}{h_*}} - \frac{R_0}{c} \left( 1 + e^{-\frac{\pi h}{h_*}} \right). \tag{13.8}$$

На следующем интервале времени 1/2-1 скорость положительная, и из уравнения (13.7) имеем

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = R_0. \tag{13.9}$$

Для этого интервала времени при смещенном в точку 1/2 начале отсчета получим

$$\begin{split} q &= \left(A_{1/2} - \frac{R_0}{c}\right) e^{-ht} \Big(\cos k_* t + \frac{h}{k_*} \sin k_* t \Big) + \frac{R_0}{c}, \\ \dot{q} &= -\left(A_{1/2} - \frac{R_0}{c}\right) e^{-ht} \frac{k^2}{k_*^2} \sin k_* t. \end{split}$$

В состоянии 1, когда  $\dot{q}_1 = 0$ ,

$$k_*t_1=\pi$$
,

координата q равна

$$q = A_1 = -A_{1/2}e^{-\frac{\pi h}{h_*}} + \frac{R_0}{c} \left(1 + e^{-\frac{\pi h}{h_*}}\right).$$

Подставив сюда выражение (13.8), найдем связь между двумя последовательными положительными отклонениями:

$$A_1 = A_0 e^{-\frac{2\pi h}{h_*}} + \frac{R_0}{c} \left( 1 + e^{-\frac{\pi h}{h_*}} \right)^2, \tag{13.10}$$

причем длительность одного цикла (перпод автоколебаний) составляет  $2\pi/k_*$ . В стационарном режиме должно быть  $A_1=A_0=A_{\rm cr}$ . Отсюда находим

$$A_{\rm ct} = \frac{R_0}{c} \frac{(1 + e^{-\pi h/h})^2}{1 - e^{-2\pi h/h}}$$
 (13.11)

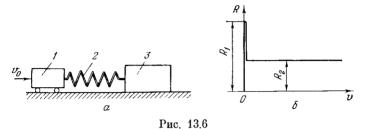
При малых значениях отношения  $h/k_{st}$  можно принять

$$A_{\rm cr} = \frac{2R_0 k}{\pi c h}.$$

В качестве третьего примера рассмотрим систему, показанную на рис. 13.6, а. Она состоит из равномерно движущегося ведущего звена 1, приводящего через пружину 2 в движение груз 3. Между грузом и поверх-

ностью, по которой он скользит, развивается сила сухого трения; характеристика трения имеет вид, показанный на рис. 13.6,  $\delta$ , и схематически отражает известное из экспериментов различие между предельной силой трения покоя и силой трения движения.

Введем обозначения:  $v_0$  — скорость ведущего звена, c — коэффициент жесткости пружины, m — масса груза,



 $k = \sqrt{c/m}, \ R_1$  — предельная сила трения покоя,  $R_2$  — сила трения движения.

Очевидно, возможно такое движение рассматриваемой системы, при котором скорость груза 3 также равна  $v_0$ . При этом пружина 2 сжата постоянной силой P, равной силе трения движения  $R_2$ . Однако, как мы убедимся, этот режим может оказаться неустойчивым и при определенных обстоятельствах около него возникают автоколебания.

Если скорость  $v_0$  мала, то какое-либо случайное пренятствие может оказаться достаточным для остановки груза на некоторое конечное время.

Ведущее звено, продолжая движение вправо, будет сжимать пружину до тех пор, пока сила сжатия P не сравняется с силой трения покоя  $R_1$ . Лишь после этого произойдет срыв груза, причем сила трения мгновенно уменьшится до значения  $R_2$ . Но сила сжатия пружины в первый момент начавшегося движения будет по-прежнему равна  $R_1$ , и, следовательно, равновесие сил, действующих на груз, нарушится.

Совместим с моментом срыва начало отсчета времени t=0 и заметим, что в этот момент равны нулю как координата x, так и скорость  $\dot{x}$ :

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$
 (13.12)

(отсчет перемещений будем вести от места остановки груза).

214

Рассмотрим теперь процесс последующего движения. К некоторому моменту времени t>0 длина пружины изменится на отрезок  $x-v_0t$  и соответственно сила упругости пружины уменьшится до значения

$$P(t) = R_1 - c(x - v_0 t). \tag{13.13}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения груза запишется в виде

$$R_1 - c(x - v_0 t) - R_2 = m\ddot{x},$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 v_0 t + \frac{R_1 - R_2}{m}$$
.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (13.12), имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{v_0}{k} \sin kt + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos kt). \tag{13.14}$$

Первое слагаемое правой части выражает равномерное движение со скоростью ведущего звена, а остальные слагаемые — дополнительные колебания груза.

Скорость груза меняется по закону

$$\dot{x} = v_0 - v_0 \cos kt + \frac{k(R_1 - R_2)}{c} \sin kt$$

и в некоторый момент времени может вновь обратиться в нуль. Условие новой остановки груза приводит к уравнению

$$v_0 - v_0 \cos kt_1 + \frac{k(R_1 - R_2)}{c} \sin kt_1 = 0,$$

в котором  $t_1$  — время от момента срыва до момента новой остановки. Введем безразмерный параметр

$$\alpha = \frac{k(R_1 - R_2)}{cv_0}.$$

Теперь условие остановки принимает вид

$$\alpha \sin kt_1 = \cos kt_1 - 1$$
.

Решив это уравнение, найдем

$$\sin kt_1 = -\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \cos kt_1 = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$
 (13.15)

Модули полученных выражений всегда меньше единицы, так что из (13.15) всегда следует вещественное значение  $t_1$ . Получив это значение  $t_1$ , можно но формуле (13.14) определить координату x груза в момент новой остановки, т. е. путь, пройденный грузом за время  $t_1$ :

$$x_1 = v_0 i_1 - \frac{v_0}{k} \sin k t_1 + \frac{R_1 - R_2}{c} (1 - \cos k t_1) = v_0 t_1 + \frac{2\alpha v_0}{k}.$$

С учетом выражений (13.15) найдем по соотношению (13.13) силу сжатия пружины в момент остановки:

$$P(t_1) = 2R_2 - R_1$$
.

Отсюда видно, что  $P(t_1) < R_1$  (так как  $R_2 < R_1$ ). Следовательно, после остановки груз некоторое время будет оставаться на месте, пока сила сжатия пружины вновы не достигнет значения предельной силы трения покоя. После этого произойдет новый срыв груза и начиется следующий цикл, полностью совпадающий с предыдущим. Таким образом, рассматриваемый процесс представляет собой стационарные автоколебания.

За время, в течение которого груз покоптся, спла сжатия постепенно возрастает на величину

$$\Delta P = R_1 - P(t_1) = 2(R_1 - R_2),$$

и соответствующее дополнительное укорочение пружины составит

$$\Delta l = \frac{\Delta P}{c} = \frac{2\left(R_1 - R_2\right)}{c}.$$

Этой же величиие равен путь, пройденный ведущим звеном за время остановки груза. Следовательно, длительность состояния покоя груза равна

$$t_2 = \frac{\Delta l}{v_0} = \frac{2(R_1 - R_2)}{cv_0} = \frac{2\alpha}{k}.$$
 (13.16)

(Тот же результат можно найти из условия  $v_0(t_1+t_2)=x_1$ , выражающего равенство перемещений груза и ведущего звена за один полный цикл рассматриваемого процесса.)

Таким образом, период автоколебаний определяется формулой

 $T=t_1+t_2,$ 

для пользования которой сначала нужно найти  $t_1$  из выражений (13.15), а затем  $t_2$  из формулы (13.16).

Чем меньше скорость ведущего звена, тем более резко выражен процесс автоколебаний. Действительно, при малых значениях  $v_0$  безразмерный параметр  $\alpha$  становится весьма большим и из выражения (13.15) следует приближенно

$$\sin kt_1 \rightarrow 0$$
,  $\cos kt_1 \rightarrow -1$ ,  $\tau$ . e.  $t_1 = \frac{\pi}{k}$ .

Соответственно (13.16) это приводит к следующей формуле для периода автоколебаний:

$$T=\frac{\pi+2\alpha}{k}.$$

Здесь ясно видно, что роль второго слагаемого в числителе возрастает с уменьшением скорости  $v_0$ .

Законы движения при двух различных малых значениях  $v_0$  графически показаны на рис. 13.7, a; на

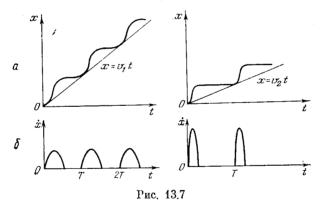


рис. 13.7, б показаны соответствующие законы изменения скорости. С уменьшением скорости период автоколебаний растет.

3. Метод энергетического баланса. Этот метод, которым мы пользовались при исследовании свободных колебаний систем с нелинейным трением (п. 2 § 2) позволяет получить приближенное решение задачи о стационарных автоколебаниях квазилинейных систем, движение которых описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q}).$$
 (13.17)

Здесь, как указывалось,  $f(q, \dot{q})$  — функция, состоящая из малых нелинейных членов. Поскольку эти члены малы, естественно принять  $k=k_0$  и искать решение в виде

$$q = A\cos(k_0 t - \varphi), \qquad (13.18)$$

где A и  $\phi$  — постоянные. В этой записи существенно предположение о том, что частота автоколебаний k рав на собственной частоте линеаризованной системы. Выражение (13.18) не может строго удовлетворить уравнению (13.17): этому мешает правая часть  $f(q, \dot{q})$ , которая после подстановки (13.18) принимает вид

$$f_*(k_0 t - \varphi) = f[A\cos(k_0 t - \varphi), -Ak_0 \sin(k_0 t - \varphi)]$$
 (13.19)

и тождественно в нуль не обращается. После умножения на инерционный коэффициент a правая часть будет представлять собой пекоторую неуравновешенную силу. В соответствии с основной идеей энергетического метода потребуем, чтобы работа этой силы за период  $2\pi/k_0$  равнялась нулю. Работа силы  $af_*$  на элементарном перемещении dq равна  $af_*dq = af_*q dt$ . При учете соотношений (13.18) и (13.19) условие энергетического баланса запишется в виде

$$-aAk_{0} \int_{0}^{2\pi/k_{0}} f\left[A\cos(k_{0}t - \varphi), -Ak_{0}\sin(k_{0}t - \varphi)\right] \times \\ \times \sin(k_{0}t - \varphi) dt = 0. \quad (13.20)$$

Обозначив

$$k_0 t - \varphi = \psi,$$

$$\Phi(A) = -\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -Ak_0\sin\psi)\sin\psi d\psi, \quad (13.21)$$

получим условие для определения стационарной амилитуды автоколебаний в виде \*)

$$\Phi(A) = 0. (13.22)$$

В качестве примера найдем амплитуду автоколебаний для системы, описываемой дифференциальным урав-

<sup>\*)</sup> Отметим, что выражение (13.21) точно совпадает с выражением (2.42), которое было найдено в § 2 методом медленно меняющихся амплитуд. Согласпо этому методу для определения стационарных амплитуд также следует положить  $\Phi(A)=0$ .

нением (13.7); выше эта задача была точно решена способом поэтапного интегрирования (припасовывания).

В данном случае

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{b}{a}\dot{q} + \frac{R_0}{2}\operatorname{sign}\dot{q}$$

И

$$f(A\cos\psi, -Ak_0\sin\psi) = \frac{Abk_0}{a}\sin\psi + \frac{R_0}{k}\operatorname{sign}(-\sin\psi),$$

т. е.

$$f\left(A\cos\psi,\,-Ak_0\sin\psi\right) = \begin{cases} \frac{Abk_0}{a}\sin\psi - \frac{R_0}{a} \text{ при } 0 < \psi < \pi, \\ \frac{Abk_0}{a}\sin\psi + \frac{R_0}{a} \text{ при } \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

Согласно формуле (13.21) находим

$$\Phi(A) = -\left[\int_{0}^{\pi} \left(\frac{Abk_{0}}{a}\sin\psi - \frac{R_{0}}{a}\right)\sin\psi d\psi + \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{Abk_{0}}{a}\sin\psi + \frac{R_{0}}{a}\right)\sin\psi d\psi\right] = -\frac{\pi Abk_{0}}{a} + \frac{4R_{0}}{a}.$$
(13.23)

Теперь из условия (13.22) находим для амилитуды автоколебаний прежнее выражение (13.11).

4. Метод малого параметра. Как и в методе медленно меняющихся амплитуд, нужно прежде всего выделить из заданной функции  $F(q,\dot{q})$  линейную часть и представить основное дифференциальное уравнение в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q}). \tag{13.24}$$

Для квазилинейных систем нелинейную функцию  $f(q, \dot{q})$  можно представить в виде  $\mu f_*(q, \dot{q})$ , где  $\mu$ — заведомо малый параметр. Однако в подобных случаях можно поступить и по-пному— формально ввести в правую часть (13.24) множитель  $\mu=1$  и записать уравнение (13.24) в виде

$$\ddot{q} + k_0^2 q = \mu f(q, \dot{q}). \tag{13.25}$$

Тогда в последующих выкладках буква и будет служить лишь «сигналом малости» того сомножителя, около которого она стоит; если в этих выкладках возникнут степени буквы  $\mu$  (т. е.  $\mu^2$ ,  $\mu^3$  и т. д.), то они будут как бы отмечать величины второго, третьего и т. д. порядков малости. Разумеется, что при таком формальном введении параметра  $\mu$  в окончательных результатах нужно вновь положить  $\mu=1$ .

Согласно основной идее рассматриваемого метода, решение уравнения (13.25) ищется в виде ряда по степеням малого параметра µ

$$q(t) = q_0(t) + \mu q_1(t) + \mu^2 q_2(t) + \dots,$$
 (13.26)

в котором  $q_0(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ , ...— пока неизвестные функции. Поскольку частота искомого процесса движения, обозначенная пиже через k, может не совпадать с собственной частотой линеаризованной системы  $k_0$ , принимается аналогичное разложение

$$k_0^2 = k^2 + \mu \gamma_1 + \mu^2 \gamma_2 + \dots,$$
 (13.27)

где ү1, ү2 — постоянные, также пока неизвестные.

Теперь выражения (13.26) и (13.27) подставляются в обе части основного уравнения (13.25). Слагаемые полученного равенства будут пропорциональны различным степеням малого параметра µ, и следовательно, после группировки слагаемых равенству можно придать вид

$$D_0 + \mu D_1 + \mu^2 D_2 + \ldots = 0.$$
 (13.28)

Здесь  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ...— некоторые комплексы выражений, не содержащие малого параметра. Так как соотношение (13.28) должно выполняться при любом значении  $\mu$ , необходимо, чтобы порознь равнялись нулю  $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ...

При этом получается система уравнений следующего вида:

$$\begin{array}{l} \overset{\cdots}{q_{0}}+k_{0}^{2}q=0,\\ \overset{\cdots}{q_{1}}+k_{0}^{2}q_{1}=P_{1}\left[q_{0}\left(t\right),\,\dot{q}_{0}\left(t\right)\right],\\ \overset{\cdots}{q_{2}}+k_{0}^{2}q_{2}=P_{2}\left[q_{1}\left(t\right),\,\dot{q}_{1}\left(t\right)\right], \end{array} \tag{13.29}$$

Конкретный вид выражений  $P_1, P_2, \ldots$  зависит от того, какова заданная функция  $f(q, \dot{q})$ ; конечно, в развернутые выражения  $P_1, P_2, \ldots$ , войдут также постоянные  $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ 

Далее последовательно, одно за другим, решаются уравнения (13.29), причем постоянные  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  определяются из условия отсутствия в решениях вековых (резонансных) членов, т. е. таких, которые содержат время t вне знаков тригонометрических функций; те же условия позволяют также найти и амилитуду автоколебаний.

Не останавливаясь на обсуждении выкладок в общем случае, обратимся к задаче об автоколебаниях системы, описываемой уравнением Ван дер Поля (13.2), которое запишем в виле

$$\ddot{q} + q = \mu (1 - q^2) \dot{q}. \tag{13.30}$$

Отметим, что в данном случае  $k_0^2 = 1$ ; поэтому коэффициент при q в левой части уравнения (13.30) пужно представить в виде (13.27):

$$1 = k^2 + \mu \gamma_1 + \mu^2 \gamma_2 + \dots$$

Ограничиваясь учетом слагаемых до первого порядка малости, подставим в (13.30)

$$1 = k^2 + \mu \gamma_1, \quad q = q_0 + \mu q_1. \tag{13.31}$$

При этом получится

$$\begin{aligned} (\ddot{q}_0 + \mu \ddot{q}_1) + (k^2 + \mu \gamma_1) (q_0 + \mu q_1) &= \\ &= \mu \left[ 1 - (q_0 + \mu q_1)^2 \right] (\dot{q}_0 + \mu \dot{q}_1), \end{aligned}$$

или, объединяя члены одного порядка малости,

$$\ddot{(q_0} + k^2 q_0) + \mu \ddot{(q_1} + k^2 q_1 + \gamma_1 q_0 - \dot{q}_0 + \dot{q}_0 q_0^2) + \dots = 0,$$
(43.32)

где многоточие обозначает слагаемые второго и высших порядков малости. Из (13.32) получаем уравнения вида (13.29):

$$\ddot{q}_0 + k^2 q_0 = 0, \tag{13.33}$$

$$\ddot{q}_1 + k^2 q_1 = -\gamma_1 q_0 + \dot{q}_0 - \dot{q}_0 q_0^2. \tag{13.34}$$

Будем вести отсчет времени от момента, когда координата q максимальна; искомую амплитуду автоколебаний обозначим через A. В начальный момент скорость  $\dot{q}$  равна нулю, так что можно записать q(0) = A,  $\dot{q}(0) = 0$ , или, согласно второму соотношению (13.31),

$$q_0(0) + \mu q_1(0) = A$$
,  
 $\dot{q}_0(0) + \mu \dot{q}_1(0) = 0$ .

Для того чтобы и эти соотношения удовлетворялись при любых значениях µ, должно быть

$$q_0(0) = A, \quad \dot{q}_0(0) = 0,$$
 (13.35)

$$q_1(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = 0.$$
 (13.36)

Теперь можно записать решение уравнения (13.33), удовлетворяющее начальным условиям (13.35),

$$q_0 = A\cos kt, \tag{13.37}$$

и затем перейти к уравнению (13.34), которое с учетом (13.37) получает вид

$$\ddot{q}_1 + k^2 q_1 = -\gamma_1 A \cos kt - Ak \sin kt + A^3 k \sin kt \cos^2 kt$$
.

Сделав замену  $\sin kt \cos^2 kt = \frac{1}{4} (\sin kt + \sin 3kt)$ , окончательно имеем

$$q_1 + k^2 q_1 =$$

$$= -\gamma_1 A \cos kt - Ak \left(1 - \frac{A^2 k}{4}\right) \sin kt + \frac{A^3 k}{4} \sin 3kt. \quad (13.38)$$

Для того чтобы в решении этого уравнения отсутствовали вековые слагаемые, необходимо, чтобы коэффициенты при  $\cos kt$  и  $\sin kt$  равнялись нулю. Первое условие дает  $\gamma_1=0$ ; согласно (13.27) получаем, что  $k^2=k_0^2=1$ , т. е. в данном случае частота автоколебаний совпадает с собственной частотой липеаризованной системы. Теперь из второго условия  $1-\frac{A^2k}{4}=0$  находим амплитуду ав-

из второго условия  $1-\frac{A^{n}}{4}=0$  находим амилитуду автоколебаний A=2.

Следует обратить внимание на то, что полученная амплитуда оказалась не зависящей от малого параметра µ, входящего в заданное уравнение (13.30). Однако отсюда не следует, что его значение вообще несущественно для рассматриваемой системы. Значение µ определяет быстроту приближения системы к движению по предельному циклу — чем больше µ, тем быстрее происходит это приближение. Кроме того, значение µ влияет и па подробности движения по предельному циклу.

В самом деле, из (13.38) при начальных условиях (13.36) можно найти

$$q_1 = \frac{A^3}{32k} (3\sin kt - \sin 3kt).$$

Следовательно, с учетом (13.37), получаем

$$q = q_0 + \mu q_1 = A \cos kt + \frac{\mu A^3}{32k} (3 \sin kt - \sin 3kt),$$

т. е. движение зависит от значения µ.

### § 14. Переходные процессы и устойчивость стационарных режимов

1. Вступительные замечания. Для анализа переходных процессов также могут быть применены изложенные выше методы; в частности, для кусочно-линейных систем целесообразно использовать способ поэтапного интегрирования, а для пелинейных систем со слабой нелинейностью — энергетический метод или метод медленно меняющихся амплитуд.

Получаемые с помощью указанных методов результаты полезны еще и в том отношении, что они позволяют исследовать устойчивость стационарных режимов.

2. Способ поэтапного интегрирования для кусочнолинейных систем. Идея способа была пояснена выше, а особенности применения к задачам исследования переходных процессов можно проследить на примере системы, описываемой дифференциальным уравнением (13.7).

Не повторяя прежних выкладок, примем в качестве псходного соотношение (13.10), которое связывает две последовательные амплитуды  $A_0$  и  $A_1$ .

В § 13 при нахождении стационарных режимов амплитуды полагались неизменными, однако здесь при определении переходного процесса необходимо учитывать различие между ними.

Введем обозначения

$$\alpha = (e^{-\pi h/h*} + 1)^2, \quad \beta = e^{-2\pi h/h*};$$
 (14.1)

тогда для любой п-й амплитуды можно записать

$$A_n = \beta A_{n-1} + \alpha R_0/c. \tag{14.2}$$

С помощью последнего рекуррентного соотношения можно найти любую амплитуду через предыдущую и, если потребуется, оцепить быстроту приближения переходного процесса к стационарному режиму.

Решение может быть существенно упрощено, если, как и выше (см. § 2, п. 2), вместо дискретной совокупности ординат рассматривать непрерывную функцию A(t) (огибающую). Для такого перехода нужно заменить конечную разность  $\Delta A = A_n - A_{n-1}$  выражением

$$\Delta A = \frac{2\pi}{k_*} \, \frac{dA}{dt}.$$

Тогда с помощью (14.2) получим дифференциальное уравнение для верхней огибающей

$$\frac{2\pi}{k_*} \frac{dA}{dt} = (\beta - 1) A + \alpha \frac{R_0}{c}.$$

После интегрирования найдем при начальном условии A = A(0) при t = 0

$$A = \left[ A(0) - \frac{\alpha R_0}{(1-\beta)c} \right] e^{-h_* t(1-\beta)/(2\pi)} + \frac{\alpha R_0}{(1-\beta)c}, (14.3)$$

или, с учетом выражения (13.11),

$$A = [A(0) - A_{ct}] e^{-h_* t(1-\beta)/(2\pi)} + A_{ct}$$

При достаточно малых значениях коэффициента вязкого трения  $h/k_*$  можно принять  $\alpha\approx 4,\ \beta\approx 1-2\pi h/k_*.$  При этом получится

$$A = [A(0) - A_{cr}] e^{-ht} + A_{cr}, (14.4)$$

где согласно (13.11)

$$A_{\rm cr} = 2R_0 k_*/(\pi ch).$$
 (14.5)

Для того чтобы убедиться в достаточно высокой точности последних выражений, рассмотрим пример, положив, что  $h/k_*=0.05$ . В таблице представлены безразмерные значения первых 15 амплитуд, вычисленных по рекуррентной формуле (14.2) и по приближенному уравнению (14.4) (для того чтобы найти амплитуды  $A_n$ , нужно внесенные в таблицу числа умпожить на величину  $R_0/c$ ). Значение A(0) полагалось равным нулю, а значения  $A_{cr}$ , соответствующие  $n \to \infty$ , определялись по выражениям (13.11) и (14.5).

Номер амплиту- ды п	Значение безразмерной амплитуды с $A_n/R_{ullet}$		
	по формуле (14.2)	по уравнению (14.4)	
0	0	0	
1	3,440	3,433	
2	5,952	5,940	
2 3 4 5	7,787	7,771	
4	9,127	9,109	
5	10,106	10,086	
6	10,821	10,799	
7	11,344	11,320	
8 9	11,725	11,701	
9	12,003	11,979	
10	12,207	12,182	
11	12,356	12,331	
12	12,464	12,439	
13	12,544	12,518	
14	12,602	12,576	
15	12,644	12,618	
∞	12,758	12,732	

3. Метод энергетического баланса. При нахождении стационарных режимов в  $\S$  13 мы исходили из того, что сила  $af_*$  совершает за один период работу, равную нулю. Здесь при исследовании переходных процессов необходимо учесть, что энергия системы за период изменяется, так как работа силы  $af_*$  отлична от нуля; вместо (13.20) имеем

$$-aAk_{0} \int_{0}^{2\pi/h_{0}} f[A\cos(k_{0}t - \varphi), -Ak_{0}\sin(k_{0}t - \varphi)] \times \\ \times \sin(k_{0}t - \varphi) dt = \Delta II. \quad (14.6)$$

Здесь левая часть представляет собой работу названной силы за один период, а правая часть — приращение энергии системы за то же время. Это приращение можно определить по выражению

$$\Delta\Pi = \frac{cA^2(T)}{2} - \frac{cA^2(0)}{2} \approx cA\Delta A.$$

Подставляя его в уравнение энергетического баланса (14.6) и пользуясь формулой (13.21), получим

$$\Delta A = \frac{\Phi(A)}{k_0^2}.\tag{14.7}$$

Будем рассматривать зависимость A = A(t) как пепрерывную функцию времени; тогда можно приближенно принять

$$\frac{k_0}{2\pi} \Delta A = \frac{dA}{dt}.$$

Вместо (14.7) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\Phi(A)}{2\pi k_0},\tag{14.8}$$

совпадающее с укороченным уравнением (2.41). Интегрируя это дифференциальное уравнение при начальном условии  $A = \hat{A}(0)$  при t = 0, найдем уравнение огибаюшей.

В качестве примера найдем переходный процесс для системы, рассмотренной в п. 2. В данном случае по формуле (13.21) находим

$$\Phi \left( A
ight) =-rac{\pi bk_{0}}{a}\,A+rac{4R_{0}}{a}$$

и дифференциальное уравнение (14.8) приобретает вид

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4R_0 - \pi b k_0 A}{2\pi k_0 a}.$$

Отсюда после интегрирования следует прежний результат (14.5), справедливый для случаев малого трения.

4. Метод медленно меняющихся амплитуд. Для определения переходного процесса по этому методу непосредственно используются выведенные в § 2 укороченные уравнения (2.41).

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван дер Поля (13.30):

$$\ddot{q} + q = \mu (1 - q^2) \dot{q}.$$

По первому из уравнений (2.42) находим

$$\Phi(A) = -\mu \int_{0}^{2\pi} (1 - A^{2} \cos^{2} \psi) (-A \sin \psi) \sin \psi \, d\psi =$$

$$= \mu \pi A \left( 1 - \frac{A^{2}}{4} \right). \quad (14.9)$$

Теперь составляем уравнение (2.41):

$$\dot{A} = \frac{\mu A}{2} \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right)$$

п интегрируем его при начальном условии  $A = A_0$  при t = 0:

$$A = 2A_0 \left( \left| 4 - A_0^2 \right| e^{-\mu t} + A_0^2 \right)^{-1/2}.$$

Отсюда видно, как с течением времени амплитуда от начального значения  $A_0$  постепенно приближается к стационарному значению A=2 (см. также стр. 221).

Полученное выражение достаточно полно характеризует переходный процесс и, в частности, теми его приближения к стационарному режиму. Поэтому обычно опускают исследование изменения фазы  $\varphi$  (впрочем, это сделать совсем не трудно; в рассматриваемой задаче можно найти, что  $\varphi = 0$ ).

5. Метод точечных отображений. Примеры, разобранные в пп. 2-4, показывают, что для описания колебательных процессов в системах с одной степенью свободы не обязательно знать закон движения q=q(t); практически достаточны рекуррентные соотношения между последовательными амплитудами (см., например, (14.2)). Как мы видели, для того чтобы связать значения двух последовательных амплитуд, нужно выделить типовой промежуток времени, на концах которого отклонения системы достигают максимума, и скорости равны нулю. Далее изучается движение на этом промежутке времени и определяется амплитуда  $\overline{A}$  в конце промежутка через амплитуду A в начале, т. е. образуется соотношение

$$\overline{A} = f(A), \tag{14.10}$$

которое можно рассматривать как функциональную зависимость  $\overline{A}$  от A. Для зависимости (14.2) график (14.10) показан на рис. 14.1, a. В данном случае график представляет собой прямую, потому что на типовом промежутке времени движение механической системы описывается линейными дифференциальными уравнениями. В более общем случае график (14.10) оказывается криволинейным, как это показано на рис. 14.1,  $\delta$ .

Для того чтобы найти амплитуду стационарного режима колебаний (соответствующего предельному циклу), нужно в (14.10) положить  $\overline{A}=A$  и решить уравнение

$$A = f(A)$$
. (14.11)  
Графическое решение этого уравнения показано на

Графическое решение этого уравнения показано на рис. 14.1, в. Здесь кроме графика правой части (14.11), соответствующего рис. 14.1, б, проведена биссектриса ко-

ординатного угла, служащая графиком левой части (14.11). Абсцисса  $A_{\rm cr}$  точки пересечения определяет искомую амилитуду стационарного режима.

Такие графики позволяют не только найти амплитуду стационарного режима, но и найти переходный процесс. Для этого пользуются построением Кенигса — Ламерея,

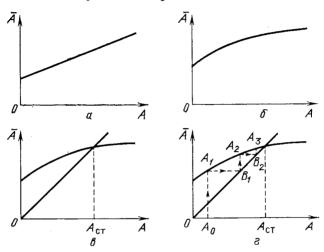


Рис. 14.1

которое состоит в следующем. Задавшись первоначальным значением амплитуды  $A_0$ , нужно отложить его на оси абсцисс, а затем построить ломаную  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ , ..., как это показано на рис. 14.1, z для случая, когда начальное отклонение мало  $(A_0 < A_{ct})$ . Как видно, эта ломаная в конце концов приводит к точке пересечения графиков — стационарному режиму. Можно убедиться, что если  $A_0 > A_{ct}$ , то переходный процесс постепенно приближается к тому же стационарному режиму.

6. Устойчивость стационарных режимов. Каждый из разобранных выше способов определения переходных процессов дает непосредственную возможность выяснить устойчивость (неустойчивость) стационарного режима или состояния равновесия.

Прежде всего остановимся на системе с нелинейным трением, характеристика которого показана на рис. 13.5, а. Для этой системы стационарная амплитуда определяется выражением (13.11) в виде  $A_{\rm cr} = \alpha R_0/\left[c\left(1-\beta\right)\right]$ , а пе-

реходный процесс — соотношением (14.2). Для того чтобы проверить устойчивость стационарного режима, положим, что он некоторым образом нарушен, так что амплитуда колебаний приобрела значение  $A_{\rm cr} \pm \Delta_0$ , где  $\Delta_0$  — начальное возмущение стационарной амплитуды. Тогда (14.2) можно записать в виде

$$A_{cr} + \Delta_1 = \beta (A_{cr} + \Delta_0) + \alpha R_0/c,$$

где  $\Delta_1$  — возмущение последующей амплитуды. В дальнейшем движении амплитуды колебаний будут подчиняться соотношению

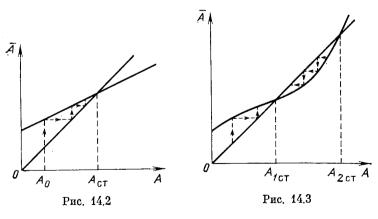
$$A_{cr} + \Delta_n = \beta (A_{cr} + \Delta_{n-1}) + \alpha R_0/c,$$
 (14.12)

в котором  $\Delta_{n-1}$  и  $\Delta_n$  — два последовательных значения возмущения амплитуды. Из (14.12) находим

$$\Delta_n = \beta \Delta_{n-1}.$$

Отсюда видно, что поскольку  $\beta < 1$ , то  $\Delta_n < \Delta_{n-1}$ ; убывание возмущений означает, что стационарный режим устойчив.

Если для той же системы решение найдено методом точечных отображений, то об устойчивости стационарного режима можно судить с помощью построения Кенигса— Ламерея (см. рис. 14.2) в окрестности абсциссы  $A_{\rm cr.}$ 



Здесь непосредственно видно, что возмущенное движение постепенно приближается к движению по предельному циклу.

Для системы с двумя предельными циклами (см. рис. 13.4, a) построение Кенигса — Ламерея в принципе

выглядит, как показано на рис. 14.3. Вид ломаных отчетливо обнаруживает устойчивость первого стационарного режима и неустойчивость второго.

В некоторых случаях имеет смысл изучать не последовательность амплитуд, а последовательность (также дискретную) максимальных значений скорости, такую, как, например, была найдена выше в виде (13.6). Применительно к этой зависимости возмущенное движение будет описываться соотношением

$$\dot{q}^+ + \Delta_n = (\dot{q}^+ + \Delta_{n-1}) e^{-2\pi h/h_*} + S/a,$$

в котором  $\Delta_{n-1}$  и  $\Delta_n$  — последовательные значения возмущения скорости  $\dot{q}^+$ . Учитывая найденное выше значение  $\dot{q}^+$ , из записанного соотношения следует

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} e^{-2\pi h/h_*},$$

т. е.  $\Delta_n < \Delta_{n-1}$  — стационарный режим устойчив.

Если стационарный режим найден энергетическим методом или методом Ван дер Поля из условия  $\Phi(A)=0$  (см. выражение (2.42)), то наряду с этим режимом нужно рассмотреть возмущенный режим, т. е. смежное движение, характеризуемое амплитудами  $A_{\rm cr}+\delta A$ ; здесь  $\delta A$  — вариация амплитуды, являющаяся некоторой функцией времени. Характер изменения  $\delta A$  с течением времени позволяет судить об устойчивости исследуемого режима. Поскольку возмущенный режим описывается соотношением (14.8), — конечно, с заменой A на  $A_{\rm cr}+\delta A$ , — имеем

$$\frac{d}{dt}(A_{\rm cr} + \delta A) = \frac{\Phi(A_{\rm cr} + \delta A)}{2\pi k_0} \tag{14.13}$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}(A_{\rm cr} + \delta A) = \frac{d(\delta A)}{dt},$$

$$\Phi(A_{\rm cr} + \delta A) \approx \Phi(A_{\rm cr}) + \Phi'(A_{\rm cr})\delta A = \Phi'(A_{\rm cr})\delta A,$$

поскольку  $\Phi(A_{\rm cr}) = 0$ .

Таким образом, соотношение (14.13) принимает вид

$$\frac{d\left(\delta A\right)}{dt}=\frac{\Phi'\left(A_{\rm CT}\right)\delta A}{2\pi k_{0}}.$$

Отсюда окончательно находим

$$\delta A = \delta A_0 e^{\frac{\Phi'(A_{\rm CT})t}{2\pi k_0}} \, , \label{eq:deltaA}$$

где  $\delta A_0$  — начальное возмущение амплитуды стационарного режима. Если

 $\Phi'(A_{cr}) < 0, \tag{14.14}$ 

то возмущения амплитуды будут асимптотически стремиться к нулю, т. е. движение будет приближаться к нарушенному стационарному режиму и последний является у с т о й ч и в ы м. Если же  $\Phi'(A_{\rm cr}) > 0$ , то возмущения будут возрастать с течением времени и движение будет все больше отклоняться от исследуемого стационарного режима; в этом случае стационарный режим неустойчив.

Таким образом, соотношение (14.14) представляет со-

бой условие устойчивости стационарного режима.

Так, например, для системы, описываемой уравнением Ван дер Поля (13.30), было найдено выражение  $\Phi(A)$  в виде (14.9). Следовательно,  $\Phi'(A) = \mu \pi \left(1 - \frac{3}{4} A^2\right)$ ; при  $A = A_{\rm cr} = 2$  имеем  $\Phi'(2) = -2\mu \pi < 0$ , т. е. условие устойчивости (14.14) выполнено — найденный предельный цикл устойчив. Иной результат получится, если дифференциальное уравнение движения механической системы имеет вид

 $a\ddot{q} - b\dot{q} + R_0 \operatorname{sign} \dot{q} + cq = 0.$  (14.15)

В отличие от условий примера, рассмотренного в начале п. 2 § 13 (см. уравнение (13.5)), в данном случае дестабилизирующей является сила отрицательного вязкого трения, а сила кулонова трения демпфирует колебания.

Приводя уравнение (14.15) к виду (2.32), получим

$$f(q, \dot{q}) = \frac{b}{a} \dot{q} - \frac{R_0}{a} \operatorname{sign} \dot{q}.$$

Теперь по первой из формул (2.42) находим

$$\Phi\left(A\right) = \frac{\pi b k_0}{a} A - \frac{4R_0}{a}.$$

Приравняв этот результат нулю, определим амплитуду стационарных автоколебаний:

$$A_{\rm ct} = \frac{4R_0}{\pi bk}.$$

Однако этот режим неустойчивый, так как производная  $\Phi'(A_{cr})$  не удовлетворяет условию (14.14):

$$\Phi'(A_{\rm cr}) = \frac{\pi b k_0}{a} > 0.$$

При любом возмущении такого стационарного режима система либо будет стремиться к устойчивому в малом состоянию равновесия  $(A \to 0)$ , либо неограниченно удаляться от стационарного режима  $(A \to \infty)$ — в зависимости от знака начального возмушения.

# § 15. Явления синхронизации

1. Вступительные замечания. Всюду выше в этой главе обсуждались явления, происходящие в автономных системах, когда движение происходит под действием сил. зависящих только от самого движения. Определенный интерес представляют свойства движения автоколебательной системы, если на нее действует некоторая заданная вынуждающая сила.

Рассматривая ниже в п. 2 случай действия гармонической вынуждающей силы, мы установим, что при достаточной близости периодов вынуждающей силы и автоколебаний происходит синхронизация - движение происходит с периодом вынуждающей силы, а автоколебательная составляющая движения оказывается как бы подавленной; существенно, что синхронизация происходит при сколь угодно малой амплитуде вынуждающей силы. Иногда явление синхронизации называют захватыванием.

В п. 3 мы рассмотрим иной важный случай синхронизации, когда вынуждающая сила действует не на автоколебательную систему, а на нелинейную систему, способную совершать «убегающие» движения.

2. Синхронизация квазилинейной автоколебательной системы. Рассмотрим случай, когда на квазилинейную автоколебательную систему с одной степенью свободы действует гармоническая вынуждающая сила, причем частота  $\omega$  силы близка к собственной частоте  $k_0$  линеаризованной системы. Дифференциальное уравнение задачи имеет вил

$$\ddot{q} + k_0^2 q = f(q, \dot{q}) + \frac{P}{a} \sin \omega t.$$
 (15.1)

Поставим задачу определения условий существования периодических движений с частотой возмущающей силы ю.

Для того чтобы воспользоваться ранее полученными соотношениями, введем коэффициент расстройки

$$\varepsilon = \frac{k_0^2}{\omega^2} - 1,\tag{15.2}$$

т. е. примем

$$k_0^2 = \omega^2 (1 + \varepsilon),$$

считая, что значение є мало по сравнению с единицей. Теперь можно переписать уравнение (15.1) в виде

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(q, \dot{q}) - \varepsilon \omega^2 q + \frac{P}{a} \sin \omega t, \qquad (15.3)$$

и, пользуясь основной идеей метода медленно меняющихся амплитуд, вновь будем разыскивать решение в виде (2.34), учитывая прежнее условие (2.35). При этом мы придем к соотношениям типа (2.39), но — соответственно правой части уравнения (15.3) — они будут иметь несколько иной вип:

$$\begin{split} \dot{A} &= -\frac{1}{\omega} f \left[ A \cos \left( \omega t - \varphi \right), \ -A \omega \sin \left( \omega t - \varphi \right) \right] \sin \left( \omega t - \varphi \right) + \\ &+ \varepsilon \omega A \sin \left( \omega t - \varphi \right) \cos \left( \omega t - \varphi \right) - \frac{P}{a \omega} \sin \omega t \sin \left( \omega t - \varphi \right), \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\omega A} f \left[ A \cos \left( \omega t - \varphi \right), \ -A \omega \sin \left( \omega t - \varphi \right) \right] \cos \left( \omega t - \varphi \right) - \end{split}$$

$$- \varepsilon \omega \cos^2(\omega t - \varphi) + \frac{P}{aA\omega} \sin \omega t \cos(\omega t - \varphi)$$

Соответственно вместо укороченных уравнений типа (2.41) получится

$$\dot{A} = \frac{\Phi(A)}{2\pi\omega} - \frac{P\cos\phi}{2a\omega},$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\Psi(A)}{2\pi A\omega} - \frac{\varepsilon\omega}{2} + \frac{P\sin\phi}{2aA\omega}.$$
(15.4)

В рассматриваемом случае стационарного режима обе эти производные должны быть равны нулю:

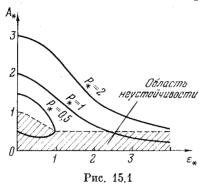
$$\frac{\Phi(A)}{2\pi\omega} - \frac{P\cos\varphi}{2a\omega} = 0, \quad \frac{\Psi(A)}{2\pi A\omega} - \frac{\varepsilon\omega}{2} + \frac{P\sin\varphi}{2aA\omega} = 0. \quad (15.5)$$

Наибольший интерес представляет значение амплитуды A. Для его определения исключим фазу  $\phi$  из уравнений (15.5); тогда получим

$$\Phi^{2}(A) + [\Psi(A) - \pi A \omega^{2} \varepsilon]^{2} = \left(\frac{\pi P}{a}\right)^{2}. \tag{15.6}$$

График получаемой отсюда зависимости  $A = A(\varepsilon)$  иногда называют резонансной кривой.

Вернемся к первому примеру п. 2 § 13, когда на систему действует вынуждающая сила  $P\sin\omega t$ , частота которой близка к собственной частоте линеаризованной си-



стемы. В соответствии с (13.7) (см. также рис. 13.5, a) для этой системы

$$f(q, \dot{q}) = -\frac{b}{a}\dot{q} + \frac{R_0}{a}\operatorname{sign}\dot{q},$$

и по формулам (2.42) находим

$$\Phi(A) = -\frac{\pi b\omega}{a}A + \frac{4R_0}{a},$$

$$\Psi(A) = 0.$$

Следовательно, соотношение (15.6) принимает вид

$$\left(\frac{4R_0}{a} - \frac{\pi b\omega}{a} A\right)^2 + (\pi A\omega^2 \varepsilon)^2 = \left(\frac{\pi P}{a}\right)^2.$$

Удобно ввести безразмерные величины

$$\varepsilon_* = \varepsilon \frac{a\omega}{b}, \quad A_* = A \frac{\pi b\omega}{4R_0}, \quad P_* = P \frac{\pi}{4R_0}.$$

Тогда получим

$$(1-A_*)^2+(\varepsilon_*A_*)^2=P_*^2$$

Отсюда находим

$$A_* = \frac{1 \pm \sqrt{P_*^2 (1 + \epsilon_*)^2 - \epsilon_*^2}}{1 + \epsilon_*^2}.$$

На рис. 15.1 показаны графики зависимостей безразмерной амплитуды  $A_*$  от параметра расстройки  $\epsilon_*$  при

трех значениях безразмерной силы:  $P_* = 0.5$ ; 1; 2. Заштрихованной области соответствуют неустойчивые решения, когда синхронизация не осуществляется (само исследование устойчивости здесь опущено).

3. Синхронизация маятника. Рассмотрим маятник с вертикально колеблющейся точкой подвеса (см.

рис. 9.2, a), движение которой задано законом

$$y = A \sin \omega t. \tag{15.7}$$

В главе III мы исследовали малые колебания такого маятника около положения равновесия; в частности, отмечалось, что в этой системе нижнее положение равновесия может оказаться неустойчивым, а верхнее положение — устойчивым.

Здесь мы не будем заниматься изучением малых колебаний, а исследуем возможность непрерывного вращения маятника, поддерживаемого колебаниями оси. Вращение со средней угловой скоростью ю, равной частоте колебаний оси, и представляет явление синхронизации в рассматриваемой системе: возмущающее воздействие (колебания оси) «навязывает» свой ритм движению системы.

Таким образом, предполагаемый стационарный синхронизированный режим описывается законом

$$\varphi = \omega t - \alpha, \tag{15.8}$$

где  $\phi$  — угол отклонения маятника,  $\alpha$  — начальный сдвиг фаз.

Обратимся к составлению дифференциального уравнения относительного движения, а затем с помощью этого уравнения выясним, возможен ли режим движения (15.8). В уравнение моментов относительно колеблющейся оси введем момент силы тяжести  $-mgl\sin \varphi$  и момент линейного трения  $-b\varphi$ . Кроме того, в уравнение моментов следует ввести также момент переносной силы инерции. Эта сила и является причиной синхронизации; она направлена по вертикали, и ее проекция на ось уравна

$$-m\ddot{y} = mA\omega^2 \sin \omega t.$$

Момент переносной силы инерции относительно оси маятника составляет  $mA\omega^2 l \sin \varphi \sin \omega t$ . Таким образом, дифференциальное уравнение относительного движения

маятника запишется в виде

$$ml^2 \ddot{\varphi} = - mgl \sin \varphi - b \dot{\varphi} + mA \omega^2 l \sin \varphi \sin \omega t. \quad (15.9)$$

Для проверки возможности синхронизированного вращения маятника попробуем подставить (15.8) в дифференциальное уравнение (15.9):

$$ml\sin(\omega t - \alpha) (A\omega^2 \sin \omega t - g) = b\omega.$$
 (15.10)

Так как здесь левая часть переменна, а правая часть постоянна, то полученное соотношение тождественно не удовлетворяется. Это означает, что функция (15.8) не является точным решением дифференциального уравнения (15.9), т. е. что равномерное вращение маятника невозможно.

Однако можно принять (15.8) в качестве приближенного решения задачи и, отказавшись от требования о тождественном выполнении равенства (15.9), ограничиться более слабым требованием о выполнении его в среднем. Именно в этом можно видеть применение той же идеи, которая лежит в основе метода медленно меняющихся амплитуд. Найдя среднее значение левой части соотношения (15.10)

$$\frac{ml\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega}\sin\left(\omega t-\alpha\right)\left(A\omega^{2}\sin\omega t-g\right)dt=\frac{mlA\omega^{2}}{2}\cos\alpha,$$

приравняем его правой части того же соотношения. После этого получим

$$\cos \alpha = \frac{2b}{mlA\omega}.$$
 (15.11)

Выражение (15.11) позволяет найти сдвиг фаз; но еще более важно, что из этого выражения следует условие синхронизации (захватывания)

$$\frac{2b}{mlA\omega} < 1. \tag{15.12}$$

Как видно, чем больше дебаланс маятника ml и максимальная скорость Aω колебаний оси маятника, тем легче осуществляется синхронизация. Важный фактор, который может воспрепятствовать синхронизации,— это трение в системе, характеризуемое коэффициентом b; чем больше трение, тем труднее достигается синхронизация.

### § 16. Странные аттракторы

1. Генераторы стохастичности. До недавнего времени считалось, что единственной причиной случайных колебаний механических систем служат те или иные внешние («входные») воздействия — случайные вынуждающие силы (см., например, стр. 144—148), случайное кинематическое возбуждение, случайное изменение параметров системы в процессе ее движения и т. п. При этом механическая система представляется как некий трансформатор стохастичности, преобразующий случайность на в случайность на выходе; полагается как бы очевидным, что с исчезновением случайности на входе и стремлением к нулю дисперсии входного воздействия исчезает случайность и на выходе, а дисперсия на выходе также стремится к нулю. Соответственно изучение случайных колебаний сводится к определению связи между вероятностными характеристиками выхода с вероятностными харакнапример, теристиками входа (см., (6.66))\*).

Однако совсем недавно выяснилось, что иногда случайные колебания могут происходить в полностью детерминированных механических системах, которые таким образом оказываются уже не трансформаторами, а генераторами стохастичности. Колебания в таких системах непредсказуемы в точном смысле этого слова, но допускают описание с помощью вероятностных характе-

ристик.

Возникновение стохастичности в детерминированной системе — поразительный факт, возможность которого трудно согласуется с традиционными представлениями. Тем не менее эта возможность твердо установлена как средствами строгой теории, так и убедительными экспериментами; выяснено также, в каких случаях механическая система может оказаться генератором стохастичности (отметим, в частности, что генераторы стохастичности — это всегда нелинейные системы, но, разумеется, не любые). Обнаружение генераторов стохастичности по его значению для науки и практики справедливо уподобляют открытию регулярных автоколебаний.

<sup>\*)</sup> Такая трактовка возникновения стохастичности относится к динамическим системам любой природы — электромеханическим, радиотехническим, биологическим, экономическим и т. п.

С появлением нового понятия несколько расширились представления о типах аттракторов в фазовом пространстве. Прежде считалось, что в фазовом пространстве любой динамической (в частности механической) системы могут существовать аттракторы только двух описанных выше типов — устойчивые особые точки (устойчивый фокус, устойчивый узел) и устойчивые предельные циклы. Теперь установлено, что наряду с ними в некоторых случаях существуют аттракторы особого рода — не точки или линии, а некоторые с пло ш ны е з о ны фазового пространства, к которым притягиваются фазовые траектории, находящиеся в окрестности таких зон; эти зоны принято называть странными аттракторами.

Фазовые траектории, начинающиеся в области притяжения странного аттрактора, постепенно приближаются к нему, причем изображающая точка, попав в зону странного аттрактора, далее уже не выходит из нее, но вместо повторяющегося движения, типичного для предельного цикла, совершает в этой зоне хаотическое движение, лишенное свойства повторяемости. В понятии странного аттрактора причудливо сочетаются свойства неустойчивости и устойчивости. С одной стороны, движение изображаюв зоне странного аттрактора неустойчиво, с другой стороны, условно можно сказать, что система в зоне странного аттрактора обладает свойством устойпелом: чивости после некоторого В если чального возмущения изображающая точка вышла пределы странного аттрактора, но остается в области его притяжения, то фазовая траектория вернется в эти пределы (тем более, если изображающая точка после начального возмущения не выведена за пределы странного аттрактора, то она и далее будет оставаться в этих пределах).

Дальнейшее изложение посвящено разбору конкрет-

ных примеров.

В п. 2 рассматривается простейший и весьма наглядный пример, когда странный аттрактор обнаруживается на фазовой плоскости; в некотором смысле — это исключительный случай, потому что, как правило, странные аттракторы возможны при условии, что фазовое пространство системы имеет размерность не менее трех.

В п. 3 приводятся примеры странных аттракторов в трехмерном фазовом пространстве (для неавтономных систем с одной степенью свободы).

2. Хаотический осциллятор Неймарка. В § 13 (стр. 209) была рассмотрена предельно упрощенная модель часов - упругая система с вязким трением, автоколебательные свойства которой определяются действием мгновенных конечных импульсов, прикладываемых к системе в моменты ее прохождения через положение равновесия с положительной скоростью. Рассматриваемый здесь аттрактор Неймарка возможен применительно к упругой системе, обладающей противоположными свойствами — ее движение сопровождается действием непрерывной силы отрицательного вязкого трения и конечных мгновенных имнульсов, направленных против движения. Импульсы прикладываются в моменты, когда система подходит к положению q=0 с достаточно большой положительной скоростью  $\dot{q}^- \geqslant v$  (v — заданное значение скорости, знаки «+» и «-» и другие обозначения соответствуют сказанному в § 13).

п другие ооозначения соответствуют сказанному в § 15). Так как при  $\dot{q}^- < v$  импульсы не возникают, то, после сколь угодно малого начального возмущения состояния равновесия, под действием отрицательного трения будут происходить разрастающиеся колебания, причем  $\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n e^{2\pi h/k_*}$  (здесь h>0 соответствует дифференциальному уравнению  $\ddot{q}-2h\dot{q}+k^2q=0$  для системы с отрицательным трением). Разрастание колебаний будет происходить до тех пор, пока в конце некоторого n-го цикла колебаний скорость  $\dot{q}_n$  достигнет значения v (или превзойдет это значение). Тогда на систему воздействует импульс S, и скорость мгновенно уменьшится до значения

$$\dot{q}_n^+ = \dot{q}_n^- - S/a,$$

которое окажется начальным для последующего (n+1)-го цикла. В конце (n+1)-го цикла скорость станет равной

$$\dot{q}_{n+1}^- = \dot{q}_n^+ e^{2\pi h/h_*}.$$

При достаточно большом значении импульса S этот результат окажется меньшим, чем v, т. е. вновь возникнет описанный выше процесс разрастания колебаний в отсутствие демпфирующих импульсов, который будет происходить до тех пор, пока  $\dot{q}^- < v$ . После того как будет выполнено условие  $\dot{q}^- \geqslant v$ , произойдет новое скачкообразное уменьшение скорости и т. д. В целом можно ожидать, что установится процесс, внешне напоминающий

биения, когда этапы возрастания амплитуд чередуются с этапами их убывания. Как будет показано на численном примере, эти представления верпы, по обнаруживаемые в системе «биения» пе обладают свойством периодичности.

Отметим, что в рассматриваемой системе возможен с та ц и о на р ны й р е ж и м движения (предельный цикл), которому соответствует равенство  $q_{n+1}^+ = q_n^+ = q_{\rm cr}^+$  Подставляя сюда найденные выше выражения, найдем

$$q_{\mathrm{cr}}^{+} = rac{S}{a\left(e^{2\pi h/k_{*}}-1
ight)}.$$

Однако этот предельный цикл неустойчив, в чем можно убедиться, в частности, с помощью построения Кенигса—Ламерея. То же построение позволит обнаружить и странный аттрактор в рассматриваемой системе. Для этой цели будем исходить из точечного преобразования

$$ar{q}^+ = egin{cases} \dot{q}^+ e^{2\pi h/h_*} - rac{S}{a} & ext{при } ar{q}^- \geqslant v, \ \dot{q}^+ e^{2\pi h/h_*} & ext{при } ar{q}^- < v, \end{cases}$$

которое показано на рис. 16.1, а. Здесь предположено, что импульс S достаточно большой и точка C (соответствующая неустойчивому стационарному режиму) расположена выше точки A, т. е.  $\dot{q}_{\rm cr} > v$ . (Отметим, что при малых значениях S точка C может оказаться ниже точки A, но в этом случае странный аттрактор не существует.) рис. 16.1, 6 буквой D отмечено произвольно принятое начальное значение скорости ф и показан первый (восходящий) марш лестницы Кенигса — Ламерея DE. На рис. 16.1, в показан следующий (нисходящий) марш лестницы Кенигса — Ламерея ЕГ, и в общих чертах становится ясным дальнейшее развитие процесса колебаний с последовательным чередованием маршей вверх - вниз, однако подчеркием, что такое чередование не означает установление периодического процесса и что значения  $\dot{m{q}}$ не могут быть меньше ординаты точки B и больше ординаты точки A. Соответственно этому зона странного аттрактора определяется шестиугольником, заштрихованным на рис. 16.1, г, а область его притяжения располагается в промежутке значений  $0 \le \dot{q} \le \dot{q}_{\rm cr}$ . Если движение системы начинается вне отмеченной зоны притяжения, когда начальная скорость превосходит значение  $\dot{q}_{cr}$ , то ступени лестницы Кенигса — Ламерея будут неограниченно уходить вправо вверх.

Иллюстрируем сказанное прямыми вычислениями для случая, когда  $h/k_*=0.01517$ , v=2 м/с, S/a=0.21 м/с.

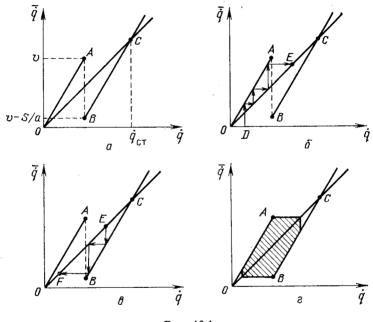


Рис. 16.1

При этих данных координаты точек, лежащих в зоне странного аттрактора, находятся в пределах от 1,79 м/с (уровень нижней границы зоны) до 2 м/с (уровень верхней границы зоны); теми же числовыми пределами ограничены значения абсцисс названных точек. Точка C, определяющая неустойчивый предельный цикл, расположена относительно близко к зоне странного аттрактора, обе ее координаты равны 2,1 м/с. В качестве начального значения скорости  $q_0^+$  принято 1,6 м/с. В таблице приводятся результаты вычислений пятидесяти последовательных значений скорости  $\ddot{q}^+$ . Хотя вычисления выполнялись с точностью до десяти знаков после запятой, для эконо-

мии места в таблицу внесены значения  $\dot{q}^+$  после округления до трех знаков после запятой. Из-за этого значения при  $n=2, 3, \ldots, 7$  выглядят совпадающими со зна-

n	$\begin{vmatrix} \overline{q} + \\ q \end{vmatrix}$	n	$\left \begin{array}{c} \overline{q}_n^+ \\ \overline{q}_n^- \end{array}\right $	n	$\begin{vmatrix} - \\ q \\ n \end{vmatrix}$	n	$\left \begin{array}{c} \overline{q} \\ \overline{q} \\ \end{array}\right $	n	$\frac{-}{q} + \frac{-}{n}$
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1,760 1,936 1,920 1,902 1,882 1,860 1,836 1,809 1,990 1,979	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	1,967 1,954 1,939 1,923 1,906 1,886 1,865 1,842 1,816 1,997	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	1,987 1,976 1,963 1,950 1,935 1,918 1,900 1,880 1,858 1,833	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40	1,807 1,988 1,977 1,965 1,951 1,936 1,920 1,902 1,882 1,860	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50	1,836 1,810 1,991 1,980 1,968 1,955 1,940 1,924 1,906 1,887

чениями при  $n=36,\,37,\,\ldots,\,41.$  В действительности этого совпадения нет. (Подробнее об этом см. в п. 4.) Углубленное изучение этого аттрактора показывает, что при  $t\to\infty$  марши лестницы Кенигса — Ламерея плотно заполняют всю заштрихованную на рис. 16.1, z зону.

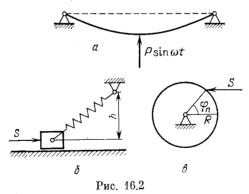
Фазовую диаграмму рассматриваемой системы можно представить себе, если взять за основу изображенную на рис. 13.4, a фазовую диаграмму автоколебательной системы и заменить здесь линию  $A_1$  (устойчивый предельный цикл) кольцевой зоной конечной толщины.

Прежде всего отметим, что начало координат на фазовой плоскости — неустойчивый фокус. Главная отличительная особенность фазовой диаграммы — упомянутая кольцевая зона, которая и является странным аттрактором. Наконец, существенным элементом фазовой диаграммы является неустойчивый предельный цикл — замкнутая линия, окружающая в некотором поколении зону странного аттрактора (см. кривую  $A_2$  на рис. 13.4, a) и служащая границей области притяжения к странному аттрактору. Фазовые траектории, начинающиеся этой области, не только притягиваются к странному аттрактору, но, можно сказать, «втягиваются» в него. Оказавшись внутри зоны странного аттрактора, изображающая точка не выходит из нее и далее совершает здесь хаотическое движение. Если после достаточно большого возмущения начальная изображающая точка оказалась за 16 Я. Г. Пановко

пределами названной области притяжения, то фазовая траектория будет раскручиваться, все больше удаляясь от границы области.

При малой толщине кольцевой зоны (и соответственно малых размерах шестиугольника на рис. 16.1; г) свойства системы будут близки к свойствам «обычной» автоколебательной системы, которой соответствует рис. 13.4, а.

3. Примеры странных аттракторов в неавтономных системах. На рис. 16.2, a показан сжатый, потерявщий устойчивость упругий стержень, па который действует в поперечном направлении вынуждающая сила  $P\sin \omega t$ . Если амплитуда этой силы мала, то стержень будет совершать малые колебания около показанного на рисунке изогнутого положения. В противоположность этому, если амплитуда силы весьма значительна, то установятся большие колебания — такие, что в течение одного цикла стержень будет проходить все три положения равновесия: 1) изображенное на рисунке сплошной линией; 2) положение, симметричное первому (при прогибе стержия вверх); 3) среднее положение, отмеченное на рисунке штриховой



линией. Обнаружено, что в некотором промежутке значений  $P_1 < P < P_2$  колебания носят хаотический характер, а в фазовом пространстве системы существует странный аттрактор (при  $P > P_2$  колебания вновь приобретают упорядоченный характер). Эти результаты не только были найдены путем вычислений, но получили подтверждение на специальной экспериментальной установке (см. [33]).

Совершенно теми же свойствами обладает система, показанная на рис. 16.2, б. Упругая пружина в изображенном на рисунке недеформированном состоянии имеет длину l, большую h, так что система обладает тремя положениями равновесия. Система испытывает действие мгновенных импульсов S, прикладываемых к грузу с периодом T. Дифференциальное уравнение движения груза вдоль горизонтальной направляющей имеет вид

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c(a - x) \left[ \frac{l}{\sqrt{(a - x)^2 + h^2}} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} S\delta(t - nT).$$
(16.1)

Здесь обозначено: m — масса груза, x — его координата, отсчитываемая от изображенного на рис. 16.2,  $\delta$  положения равновесия, k — коэффициент линейного трения между грузом и направляющей, c — коэффициент жесткости пружины,  $a = \sqrt[7]{l^2 - h^2}$  — проекция размера l на горизонтальное направление.

Отметим, что при малых отклонениях груза от положения равновесия, когда  $x \ll a$ , уравнение допускает линеаризацию и принимает вид

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + \frac{ca^2x}{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} S\delta(t - nT).$$

Подробный анализ здижения после решения дифференциального уравнения (16.1) на ЭВМ приводит к следующим заключениям. При малых значениях S происходят малые колебания вблизи показанного на рисунке положения равновесия, затем в некотором диапазоне значений S колебания носят хаотический характер, а при еще больших значениях импульса вновь устанавливаются периодические колебания, но очень большой амплитуды.

Еще один пример системы, в фазовом пространстве которой возможен странный аттрактор, показан на рис. 16.2,  $\varepsilon$ . Она представляет собой свободно вращающийся на оси массивный ротор, к фиксированной точке которого с заданным периодом T прикладываются горизонтальные мгновенные конечные импульсы S. Пусть непосредственно перед n-м ударом положение ударяемой точки определяется углом  $\phi_n$ , а угловая скорость ротора равна  $\omega_n$ . Вследствие приложения импульса угловая скорость приобретает мгновенное приращение  $(SR/I)\sin\phi_n$  (I-момент инерции ротора относительно оси вращения) и перед

(n+1)-м ударом состояние ротора будет определяться углом  $\phi_{n+1}$  и угловой скоростью  $\omega_{n+1}$ :

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_{n+1}T, \ \omega_{n+1} = \omega_n + (SR/I)\sin\varphi_n.$$

С помощью этих рекуррентных соотношений можно проследить развитие процесса во времени. Нак установлено, в определенном (довольно узком) диапазоне значений SR/I значения  $\omega_n$  образуют хаотическую последовательность, причем хаотизации движения не могут помешать силы трения, хотя соответствующий диапазон значений SR/I окажется несколько иным.

4. Заключительные замечания. Среди различных способов выявления странных аттракторов в конкретных динамических системах одним из основных следует считать численное интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений. Именно так были получены результаты, приведенные в табл. на с. 240. Там было отмечено, что вычисления производились с точностью до десятого знака после запятой, но для большей компактности представленной таблицы в нее внесены значения скорости, округленные до третьего знака. При этом особо подчеркивалось, что совпадение некоторых табличных значений скорости (например, при n=7 и n=41) — лишь кажущиеся и поэтому последующие значения скорости (в том же примере начиная с n=8 и n=42) расходятся уже в третьем знаке. Тем самым обнаруживается некая неупорядоченность движения, которую можно трактовать как признак хаотичности и наличия странного аттрактора (разумеется, это признак недостаточно убедителен, хотя бы потому, что вычислениями охвачены лишь первые пятьдесят шагов пропесса).

Допустим теперь, что в процессе вычислений какие-то два значения скорости при  $n=n_1$  и  $n=n_2$  точно совпали. Тогда движение на интервале между шагами  $n_1$  и  $n_2$  представляет собой некий, возможно весьма длительный цикл, который затем будет повторяться. Такая повторяемость, казалось бы, свидетельствует об упорядоченности и отсутствии хаоса. Однако когда вычисления выполняются с конечным числом знаков, то раньше или позже совпадение обязательно произойдет. Так, например, при неизменном значении целой части результата и учете девяти знаков после запятой можно получить не более десяти различных результатов, следовательно, совпадение неизбежно произойдет не позже чем через миллиард

шагов. Таким образом, при вычислениях на ЭВМ всякое движение рассматриваемого типа формально выглядит как упорядоченный процесс. Нужно предупредить читателя, что к этому заключению следует относиться с осторожностью. С практической точки зрения колебательное движение, цикличность которого обнаруживается лишь после десятков или сотен миллионов шагов, естественно трактовать как случайный процесс. С теоретической же точки зрения существование цикла вообще остается недоказанным из-за ограниченной точности вычислений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Среди многих книг, специально посвященных общим вопросам теории механических колебаний, в первую очередь следует отметить:

- 1. Бабаков И. М. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Наука, 1965.
- 2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний.— М.: Высшая школа, 1980.
- 3. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний.— М.: Наука, 1988.
- 4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний.— 2-е изд. М.: Наука, 1964.

Этим вопросам посвящены также переводные книги:

- 5. Ден Гартог Дж. П. Механические колебания.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1960.
- 6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.— М.: Наука, 1967.
- 7. Кин Н. Тонг. Теория механических колебаний.— М.: Наука, 1963.
- 8. Цзе Ф. С., Морзе И. Е., Хинкл Р. Т. Механические колебания.— М.: Машиностроение, 1966.

Проблемам нелинейных колебаний специально посвящены книги:

- 9. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.
- 10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963,
- Булгаков Б. В. Колебания.— М.: Гостехиздат, 1954 (значительная часть книги относится к проблемам линейных колебаний).

- 12. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— 2-е изд.— М.: Наука, 1987.
- 13. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
- 14. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.

Более краткое изложение этой темы можно найти в книгах:

- 15. Блакьер О. Анализ нелинейных систем/Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.
- 16. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний.— Л.: Судпромгиз, 1962.
- 17. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем/Пер. с англ.— М.: Энергоиздат, 1962.
- 18. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы.— 3-е изд.— М.: Наука, 1965.
- 19. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.

Вопросы, связанные с параметрическими колебаниями и динамической неустойчивостью колебательных систем, изложены в книгах:

- 20. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем.— М.: Гостехиздат, 1956.
- 21. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости.— М.: Физматгиз, 1961.

Другим современным задачам теории нелинейных колебаний посвящены книги:

- 22. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
- 23. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике.— М.: Наука, 1981.
- 24. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин.— Л.: Машиностроение, 1968.
- 25. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел.— М.: Наука, 1976.
- 26. Коловский М. 3. Нелинейная теория виброзащитных систем.— М.: Наука, 1966.
- 27. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением.— М.: Наука, 1964.

Проблемы случайных колебаний разбираются в книгах: 28. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем.— М.: Наука. 1979.

- 29. Светлицкий В. А. Случайные колебания.— М.: Машиностроение, 1976.
- 30. Случайные колебания/Пер. с англ. Под ред. С. Кренделла.— М.: Мир, 1967.

О странных аттракторах см. [3], а также в книгах:

- 31. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания.— М.: Наука, 1986.
- 32. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.
- 33. Шустер Г. Детерминированный хаос/Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.

Общим вопросам теории механических колебаний, а также различным практическим аспектам проблемы вибраций посвящен шеститомный справочник:

34. Вибрация в технике/Под ред. В. Н. Челомея.— М.: Машиностроение, 1979.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

— стационарные 215
Автоколебательные системы 17
Автопараметрические системы 10
10
Амплитуда 26
— комплексная 133
Амплитудно-частотная характеристика 107
Амплитудный спектр 136, 137
Антирезонанс 162
Аттрактор 208
— странный 208, 236—244
Аэрогидроупругость 190

Балочная система 81 Биения 86

Автоколебания 10

Вековой член 109
Вектор собственный 89
Виброгаситель динамический 163
Вибротранспортировка 8
Возбуждение кинематическое 9
Восстанавливающие силы 5
Вынуждающие силы 9, 101
Вынужденные колебания 8, 101

Гамма-функция 47
Гаситель колебаний динамический 163
Генераторы стохастичности 235
Гистерезис 54, 142
Главные координаты 77, 167
Граничные условия 30

Движение относительное 104, 105 Декремент логарифмический 43 Детерминированные функции времени 144 Диаграмма Айнса — Стретта 184 устойчивости 179 — фазовая 20 Дивергенция 188 Динамическая жесткость 107 - комплексная 133 Динамический гаситель колебаний 163 Диссипативная функция Рэлея 41 Диссипативные силы 17, 190 Дифференциальное уравнение для огибающей 48 Добротность (системы) 124

Единичные перемещения 78 — реакции 79

Жесткое самовозбуждение 207 Жесткость динамическая комилексная 133 — отрицательная 36

Задача идентификации 145

— обратная 145

о дивергенции 189

— о флаттере 194

— оптимизации 145

— прямая 145— синтеза 145

Циглера 189, 202

Закон сохранения энергии 60 Затухание критическое 44 Затухающие колебания 42 Захватывание 231

захватывание 231 Значение критическое парамет-

ра 36

собственное матрицы 89

Изгибные колебания 30 Изображающая точка 18 Импульсная реакция 111 Импульсы периодические 131 Инерционный коэффициент 23 Интеграл Фурье 138 Интегральное квадратическое уклонение 68 Интегрирование поэтапное

Каноническая форма 76 Квадратическое трение 49 Квазиупругая характеристика 58

Квазиупругий коэффициент 24 Кинематические граничные условия 30

156

Кинематическое возбуждение 9 Колебания вынужденные 8

- затухающие 42
- изгибные 30
- моногармонические 107
- основные 148
- параметрические 10
- продольные 33
- свободные 8
- субгармонические 148, 154
- супергармонические 148, 152
- установившиеся вынужденные 107

Комплексная амплитуда 133 — динамическая жесткость 133

— податливость 133 — обобщенная сила 132

Комплексное обобщенное перемещение 132

Координатные функции 14 Координаты главные 77, 167

— нормальные 77

Корреляционная функция 146 Коэффициент влияния для перемещений 78

- -- восстановления 158
- динамичности 107, 124
- инерционный 23
- квазиупругий 24
- обобщенный вязкости 41
- жесткости 24
- передачи силы 127
- расстройки 231 собственных форм 87
- эквивалентный линейного трения 141

Кривая скелетная 150 Критерий Рауса — Гурвица 201 — Сильвестра 73 Критическая угловая скорость 200

Критическое затухание 44 — значение параметра 36 Кулоново трение 49

Линеаризация прямая 67 Лобовое сопротивление 189

Логарифмический декремент 43 Масса обобщенная 23

— приведенная 23

Математическое ожидание 145 Матрица депфирования 99

— жесткости 89

— инерции 89

Метод гармонического баланса 69

малого параметра 218

- медленно меняющихся амп-
- литуд 50, 225 Рэлея 14, 29—35
- точечных отображений 226
- энергетического баланса 46, 140, 216, 224

Русакова — Харкевича Модель 157 колебания Моногармонические

107

Мягкое самовозбуждение 206

Нестационарные позиционные силы 171

Неустойчивый предельный цикл 207

- узел 189, 191
- фокус 189, 191

Нормальные координаты 77, 167

Область притяжения 208 Обобщенная масса 23 сила линейного трения 40 Обобщенные вынуждающие си-

позиционные силы 15

– силы трения 16

лы 15

Обобщенный коэффициент вязкости 41

– жесткости 24

Обратный способ составления системы уравнений 74 Однородная система 82

Ортогональность собственных форм 89

Основной способ составления системы уравнений 75 Особые точки 21

Осциллятор хаотический марка 236

104. Относительное движение 105 Отрицательная жесткость 36

«Отрицательное трение» 180

Парадокс Циглера 203 Параметрические колебания 9 Параметрический резонанс

Перемещения единичные 78 Переходный процесс 205 Период колебаний 26 Периодические импульсы 131 Периодическое изменение параметра 172

Петля гистерезиса 54 Плоскость фазовая 18 Плотность спектральная 147 Подъемная сила 189

Портрет фазовый 20 Построение Кенигса — Ламерея 227, 228

Поэтапное интегрирование 156 Преобразование Фурье 138 Приведенная масса 23 Приведенные вынуждающие

силы 167 Припасовывание 63, 209 Продольные колебания 33 Процесс переходный 205 Прямая линеаризация 64 Прямой способ составления системы уравнений 74

Реакции единичные 79 Реакция импульсная 111 Режим стационарный 211 Резонанс 109, 131 параметрический 10, 172 Репеллер 208 Ротационное движение 60

Самовозбуждение 193

— жесткое 207 мягкое 206

Свободные колебания 8 Сепло 40

Сила кулонова трения 49

 обобщенная линейного трения 40

— подъемная 189

 – чисто кубическая 65 Силовые граничные условия 30 Силы восстанавливающие 15

вынуждающие 9

диссипативные 17, 190

нестационарные позиционные 171

— обобшенные вынуждающие 15

 приведенные вынуждающие 167

 смешанного характера 17 Система балочная 81 однородная 82

Системы автоколебательные 17 Скелетная кривая 150 Скорость дивергенции 190, 197

критическая 200флаттера 197

Собственная форма 87

— частота 26

Собственное значение 89 Собственный вектор 89 Сопротивление лобовое 189 Спектр собственных частот 83 Спектральная плотность 147 Способ построения системы

уравнений обратный 74 — — — основной 75

— — — прямой 74 — поэтапного интегрирования

63, 156, 209 — прямой линеаризации 67 Способы приближенного опреде-

ления частоты свободных колебаний 66

Среднеквадратическое значение

Стационарные случайные функции 145

Стационарный режим 211

— — неустойчивый 227 — устойчивый 227

Странный аттрактор 208, 236— 244

Субгармоника 154

колебания Субгармонические 148, 154 Супергармонические колебания  $148, \bar{1}52$ 

Точка изображающая 18 Точки особые 21 Траектория фазовая 18, 39 Трение квадратическое 49

— кулоново 49 — линейное 40

— «отрицательное» 190

Угловая частота 26 Узел неустойчивый 189, 191 устойчивый 44

Уклонение интегральное квадратичное 68

Уравнение в конечных разностях 48

— Ван дер Поля 220

 дифференциальное для огибающей 48

— Лагранжа 75— Матье 183

Рэлея 204

частотное 83

Условие синхронизации 235

 устойчивости 230 Условия граничные 30

кинематические граничные

начальные 63

— перехода 63

— периодичности 63, 118, 210

— силовые граничные 30

Устойчивость вращающегося вала 197

равновесия 35

стационарных режимов 222,

Устойчивый предельный цикл 205

— узел 44, 237

— фокус 44, 237

Фазовая диаграмма 20

— плоскость 18

траектория 18, 39

Фазовый портрет 20 Флаттер 194

Фокус неустойчивый 189, 191

устойчивый 44

Форма вынужденных колебаний

кинетической - каноническая энергии 76

— потенциальной энергии 76 — решения комплексная 132

— собственная 87

Функции времени детерминированные 144

— случайные 144

— координатные 14

— Матье 183

Функция диссипативная Рэлея

корреляционная 146

центрированная 146 Фурье интеграл 138

преобразование 138

Хаотический осциллятор марка 236

Характеристика амплитудночастотная 107

— жесткости 58

— квазиупругая 58

— частотная 133

Центрированная функция 146 Цикл предельный 205

— неустойчивый 207

— — устойчивый 205

Частота собственная 26 — угловая 26

Частотная характеристика 133 Частотное уравнение 83

Эйлеров интеграл второго рода 47Эквивалентный коэффициент

линейного трения 141

## ОГЛАВЛЕНИЕ

предисловие	Ü
Введение	7
1. Общие задачи и содержание теории (7). 2. Составление механической модели; ограничение числа степеней свободы (10). 3. Составление механической модели; силы, действующие при колебаниях (14). 4. Понятие о фазовой плоскости (18).	
Глава І. Свободные колебания	22
§ 1. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии трения	22
1. Основное дифференциальное уравнение и его решение (22). 2. Метод Рэлея (29). 3. Зависимость устойчивости равновесия от коэффициента жесткости (35).	
§ 2. Системы с одной степенью свободы при наличии ли- нейной восстанавливающей силы и трения	40
1. Линейное трение (40). 2. Нелинейное трение (45). 3. Гистерезисное трение (54). 4. Ударное демпфирова- ние (55).	
§ 3. Системы с одной степенью свободы при нелиней- ной восстанавливающей силе	57
<ol> <li>Общие понятия (57). 2. Точные решения (58). 3. При- ближенные способы (66).</li> </ol>	
§ 4. Линейные системы с несколькими степенями сво- боды	72
<ol> <li>Способы составления дифференциальных уравнений движения (72).</li> <li>Решение системы дифференциальных уравнений (82).</li> <li>Собственные формы (86).</li> <li>Ортогональность собственных форм (89).</li> <li>Роль начальных условий (92).</li> <li>Случам крагных и нулевых корней (94).</li> <li>Влияние трения (98).</li> </ol>	
Глава II. Вынужденные колебания	101
§ 5. Линейные системы с одной степенью свободы при отсутствии трения	101
1. Основное уравнение при силовом возбуждении (101). 2. Случаи кинематического возбуждения (103). 3. Действие гармопической вынуждающей силы (106). 4. Действие произвольной вынуждающей силы (110). 5. Действие периодической вынуждающей силы (116).	
<ol> <li>Системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и трения</li> </ol>	122
<ol> <li>Действие гармонической вынуждающей силы (122).</li> <li>Действие произвольной вынуждающей силы (127).</li> <li>Действие периодической вынуждающей силы (128).</li> <li>Комплексная форма решения (132).</li> <li>Влияние нелинейно-вязкого трения при гармонической вынуждающей силе (140).</li> <li>Влияние голебания (144).</li> </ol>	

	§	7.	Системы с одной степенью свободы при нелиней- ной восстанавливающей силе	148
		٠.	1. Основные понятия (148). 2. Основные колебания (149). 3. Супергармонические колебания (152). 4. Субгармонические колебания (154). 5. Способ поэтапного интегрирования для кусочно-линейных систем (156).	
	§	8.	Линейные системы с несколькими степенями сво-	400
			1. Общие уравнения (160). 2. Действие вынуждающих сил, изменяющихся по гармоническому закону; непосредственное решение (161). 3. Действие произвольных вынуждающих сил; разложение по собственным формам (167). 4. Действие периодических вынуждающих сил (170).	160
$\Gamma$ $\pi$	ав	a	III. Параметрические колебания	171
	§	9.	Общие понятия	171
			1: Основное дифференциальное уравнение (171). 2. Параметрические колебания около положения равновссия (172). 3. Параметрические колебания около стационарного режима движения (174).	
	§	10.	Параметрическое возбуждение по периодическому	177
			кусочно-постоянному закону	177
	e		линейного трения (181).	409
	§	11.	Параметрическое возбуждение по закону синуса 1. Общие сведения (183). 2. Примеры (185).	183
Гл	ав	a ]	[V. Устойчивость состояний равновесия и автоколе-	
			бания	188
	§	12.	Устойчивость состояний равновесия	188
			1. Вступительные замечания (188). 2. Системы с одной степенью свободы (189). 3. Системы с двумя степенями свободы без трения (193). 4. Системы с двумя степенями свободы с трением (200).	
	§	<b>1</b> 3.	Стационарные режимы и предельные циклы	203
			1. Общие понятия (203). 2. Способ поэтапного интегри- рования для кусочно-линейных систем (209). 3. Метод эпергетического баланса (216). 4. Метод малого пара- метра (218).	
	§	14.	Переходные процессы и устойчивость стационарных	<b>2</b> 22
			режимов  1. Вступительные замечания (222). 2. Способ поэтапного интегрирования для кусочно-линейных систем (222). 3. Метод энергетического баланса (224). 4. Метод медленно меняющихся амплитуд (225). 5. Метод точечных отображений (226). 6. Устойчивость стационарных режимов (227).	
	§	15.	Явления синхронизации	<b>2</b> 31
			1. Вступительные замечания (231). 2. Синхронизация квазилинейной автоколебательной системы (231). 3. Синхронизация маятника (234).	
	§	16.	Странные аттракторы	236
			1. Генераторы стохастичности (236). 2. Хаотический ос- циллятор Неймарка (238). 3. Примеры странных аттрак- торов в неавгономных системах (242).	
Сп	acc	кл	итературы	246
Пр	ед	иет	ный указатель	249