

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН**

Современная теория колебаний и волн представлена в книге не формально-методической стороной, а своими явлениями и эффектами, встречающимися в медицине, биофизике, гидродинамике, радиоэлектронике, физике плазмы и других областях науки и техники. В новом издании (1-е изд. — 1984 г.) отражены результаты последних лет.

Для студентов и аспирантов, имеющих дело в своих исследованиях с колебательными и волновыми процессами, а также для научно-технических работников, занятых в этой области.

### Содержание

Предисловие ко второму изданию	8
Предисловие к первому изданию	9
Введение	11
<b>Часть I. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ</b>	
<b>Глава 1. Линейный осциллятор</b>	<b>17</b>
1.1. Общие замечания	17
1.2. Два примера. Фазовый портрет осциллятора	19
1.3. Резонанс. Действие непериодической внешней силы на осциллятор	28
1.4. Нормальные колебания. Аналогия с квантовой механикой. Операторы рождения и уничтожения	35
<b>Глава 2. Колебания в системе двух связанных осцилляторов</b>	<b>38</b>
2.1. Исходные уравнения	38
2.2. Свободные колебания двух связанных осцилляторов	40
2.3. Возбуждение двух связанных осцилляторов внешней силой. Теорема взаимности	49
<b>Глава 3. Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов</b>	<b>51</b>
3.1. Классическая теория дисперсии	51
3.2. Колебания в ансамбле нетождественных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения	56
<b>Глава 4. Колебания в упорядоченных структурах. Предельный переход к сплошной среде. Волны. Дисперсия</b>	<b>60</b>
4.1. Общие замечания	60
4.2. Колебания в упорядоченных структурах (цепочки из связанных частиц и из тождественных связанных осцилляторов)	61
4.3. Предельный переход от упорядоченных структур к одномерной сплошной среде. Временная и пространственная дисперсия. Физическая природа дисперсии	70
4.4. Типичные дисперсионные характеристики сред-моделей	76
4.5. Формальный способ получения дисперсионного уравнения. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем	81
4.6. Квазичастицы	88
<b>Глава 5. Свойства волн малой амплитуды в сплошных средах</b>	<b>90</b>
5.1. Общие замечания	90

5.2. Уравнения гидродинамики. Дисперсионное уравнение для звуковых волн	91
5.3. Стратифицированная жидкость. Звук в океане	94
5.4. Гравитационные волны в несжимаемой жидкости. Внутренние волны. Волны Россби	98
5.5. Волны в сверхтекучей жидкости	111
5.6. Волны в плазме. Гидродинамическое описание	118
<b>Глава 6. Устойчивость и неустойчивость линеаризованных систем с дискретным спектром</b>	<b>129</b>
6.1. Общие замечания и определения	129
6.2. Критерий Рауса-Гурвица и трехмерные системы	132
6.3. Метод D-разбиений	136
6.4. Устойчивость неавтономных систем	139
6.5. Механизмы неустойчивостей	141
<b>Глава 7. Устойчивость распределенных систем со сплошным спектром</b>	<b>149</b>
7.1. Общие замечания	149
7.2. Примеры неустойчивостей	152
7.3. Абсолютная и конвективная неустойчивости. Метод характеристик	160
7.4. Волны в потоках. Электронные потоки. Неустойчивость Гельмгольца	164
7.5. Усиление и непропускание. Критерии разделения	172
<b>Глава 8. Скорость распространения волн</b>	<b>177</b>
8.1. О различных способах введения понятия групповой скорости	177
8.2. Групповая скорость волн в некоторых сплошных средах	184
<b>Глава 9. Энергия и импульс волн</b>	<b>190</b>
9.1. Уравнение переноса усредненной плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде	190
9.2. Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией	193
9.3. Импульс волнового пакета	198
<b>Глава 10. Волны с отрицательной энергией. Связанные волны</b>	<b>200</b>
10.1. Общие замечания	200
10.2. Волны с положительной и отрицательной энергией	201
10.3. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера	207
<b>Глава 11. Параметрические системы и параметрическая неустойчивость</b>	<b>216</b>
11.1. Общие замечания	216
11.2. Параметрический резонанс. Теорема Флоке (Блоха). Уравнение Матье	217
11.3. Волны в периодических структурах. Зоны Матье и диаграммы Бриллюэна	229
11.4. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы. Лазеры на свободных электронах	234
<b>Глава 12. Адиабатические инварианты. Распределение волн в неоднородных средах</b>	<b>240</b>
12.1. Приближение Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна и адиабатические	240

инварианты	
12.2. Эквивалентность ротатора осциллятору	245
12.3. Распространение волн в неоднородных средах Приближение геометрической оптики	247
12.4. Распространение волн в плоскостлой среде в приближении геометрической оптики	254
12.5. Линейное взаимодействие волн в неоднородной среде	260
<b>Часть II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ</b>	
<b>Глава 13. Нелинейный осциллятор</b>	<b>271</b>
13.1. Вводные замечания	271
13.2. Качественное и аналитическое описание. Примеры нелинейных систем	273
13.3. Нелинейный резонанс	284
13.4. Перекрытие нелинейных резонансов	288
<b>Глава 14. Периодические автоколебания</b>	<b>296</b>
14.1. Определение	296
14.2. Генератор Ван-дер-Поля. Зависимость формы автоколебаний от параметров системы	299
14.3. Релаксационные автоколебания. «Быстрые» и «медленные» движения	302
<b>Глава 15. Нелинейные динамические системы (общие свойства и методы исследования)</b>	<b>307</b>
15.1. Основные типы траекторий. Грубость (структурная устойчивость) динамической системы	307
15.2. Основные бифуркации на плоскости. Индексы Пуанкаре	312
15.3. Точечные отображения	316
15.4. Бифуркации периодических движений	319
15.5. Гомоклинические структуры	322
<b>Глава 16. Автоколебания в многочастотных системах</b>	<b>328</b>
16.1. Вынужденная синхронизация	328
16.2. Конкуренция	341
16.3. Взаимная синхронизация мод	346
<b>Глава 17. Резонансное взаимодействие осцилляторов</b>	<b>350</b>
17.1. Взаимодействие трех связанных осцилляторов в системе с квадратичной нелинейностью	350
17.2. Резонансное взаимодействие волн в слабонелинейных средах с дисперсией	360
17.3. Взрывная неустойчивость	367
<b>Глава 18. Простые волны и образование разрывов</b>	<b>370</b>
18.1. Кинематические волны	370
18.2. Бегущие волны в нелинейной среде без дисперсии	374
18.3. Определение координат разрыва	382
18.4. Слабые ударные волны. Граничные условия на разрыве	385
<b>Глава 19. Стационарные ударные волны и солитоны</b>	<b>389</b>
19.1. Структура разрыва	389

19.2. Уединенные волны — солитоны	397
19.3. Солитоны как частицы	403
19.4. Неодномерные солитоны	405
<b>Глава 20. Модулированные волны в нелинейных средах</b>	<b>410</b>
20.1. Общие замечания	410
20.2. Самомодуляция. Возвращаемость	414
20.3. Самофокусировка	424
20.4. Взаимодействие волновых пучков и пакетов	428
20.5. Взаимодействие друг с другом волн, имеющих случайно модулированные фазы. Кинетика волн	431
<b>Глава 21. Автоколебания в распределенных системах</b>	<b>438</b>
21.1. Общие замечания	438
21.2. Среда без дисперсии. Разрывные волны	439
21.3. Стационарные волны	440
21.4. Существование и роль предельных циклов	444
21.5. Конкуренция стационарных волн в активной среде	446
21.6. Периодические автоколебания в гидродинамических течениях	448
<b>Глава 22. Стохастическая динамика простых систем</b>	<b>456</b>
22.1. Как появляется случайность в динамической системе	456
22.2. Стохастическая динамика одномерных отображений	465
22.3. Генератор шума. Качественное описание и эксперимент	470
22.4. Статистическое описание простого генератора шума	473
22.5. Пути возникновения странных аттракторов	477
22.6. Размерность стохастических множеств	489
<b>Глава 23. Возникновение турбулентности</b>	<b>493</b>
23.1. Общие замечания	493
23.2. Возникновение стохастических автоколебаний в гидродинамическом эксперименте	496
23.3. Стохастическая модуляция	503
23.4. Идеальные течения и турбулентность	508
<b>Глава 24. Самоорганизация</b>	<b>513</b>
24.1. Основные явления, модели, математические образы	513
24.2. Бегущие импульсы	519
24.3. Спиральные и цилиндрические волны. Ведущие центры	521
24.4. О механизмах самоорганизации	524
Литература	528
Предметный указатель	558

#### Предметный указатель

Автономная система 18	— удвоения 320, 497
Акустическая ветвь 66	Брюсселятор 154
Аттрактор 299	Взаимодействие резонансное волн
— странный 305, 464, 470, 477, 496	350, 360
Бифуркация 312	— — осцилляторов 350
— рождения инвариантного тора 320	Вина график 342

Волна Россби 98, 407  
— внутренняя 98  
— гравитационная 100, 379  
— кинематическая 370  
— модулированная 410  
— простая 376  
— разрывная 439  
— с положительной и отрицательной энергией 201  
— стационарная 440  
— ударная 385, 389  
Волновод 107  
Волновой пакет 178, 191  
Вынужденное рассеяние  
Мандельштама-Бриллюэна 350, 360  
Ганна диод 142  
Гомоклиническая структура 322  
Двухжидкостная гидродинамика 120  
Диаграмма Ламерея 317, 477  
Динамическая система 129, 307  
— — грубая 307, 311 Дисперсия 60, 70  
— аномальная 53  
— временная 74  
— нормальная 53  
— пространственная 74  
Диссипативная структура 515  
Заряд топологический 522  
Затухание Ландау 125  
Звук ионный 126  
Клистрон 31, 371  
Колебания нормальные, форма 45  
— связанные, форма 45  
Критерий Бриггса 173  
— Рауса - Гурвица 132  
Лазер на свободных электронах 237  
Лампа бегущей волны 86, 155, 157, 283  
— двухлучевая 165  
— обратной волны 155, 158  
Ленгмюровские колебания 121  
Ляпуновский характеристический показатель 219

Маятник Капицы 235  
Метод Ван-дер-Поля 261, 285, 288, 331, 342  
— Галеркина 451  
— *D*-разбиений 136  
— Уизема 193, 243  
— асимптотический 220  
— возмущений в теории колебаний и волн 221, 377  
— множителей Лагранжа 34  
— обратной задачи рассеяния 401  
— прямой вариационный 243  
— связанных волн 208  
— усреднения при движении в быстро осциллирующем поле 234  
Мода бароклиническая 110  
— баротропная 111  
Модель Вольтерра 20, 345  
— Ландау-Хопфа 494  
— Лотки 19  
— «хищник-жертва» 20  
Модуляция 410  
— стохастическая 503  
Мультипликатор 318  
Неустойчивость 27, 129, 148  
— Гельмгольца 102  
— Джинса 152  
— Тьюринга 153  
— абсолютная 150, 160  
— взрывная 367  
— конвективная 149, 160  
— стохастическая 296  
Оптическая ветвь 66  
Отображение Пуанкаре 316, 476  
Парадокс Ферми-Паста-Улама 421  
Перекрытие резонансов 290  
Переमेжаемость 487  
Переход к турбулентности 499, 501  
Постоянная Фейгенбаума 478  
Предельный цикл 296  
Приближение Буссинеска 96  
— Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна 240, 241, 248

— геометрической оптики 182  
Равновесия состояния 21-28, 134,  
136, 298, 307, 313, 335  
Радиус Дебая 118  
Реакция Белоусова-Жаботинского  
513, 522. 523  
Резистивный усилитель 205  
Резонанс 28  
— волновых систем 81  
— нелинейный 284  
— параметрический 217  
Релаксационные автоколебания 302  
Рефрактерности время 521, 523  
Связанность 45  
Сепаратриса 24, 276, 319, 519  
Сила Миллера 238  
Синергетика 513  
Синхронизм волн 86, 207, 368  
Синхронизма условие 360, 431  
Система Лоренца 483  
— Морса-Смейла 325  
Скорость групповая 76, 177, 184  
— распространения энергии 184  
— фазовая 72, 76, 177  
Солитон 277, 389, 397. 419  
— Россби 409  
— диссипативный 519  
— как частица 403  
Теорема Лиувилля 463  
— Чу 201  
Турбулентности возникновение 500  
Турбулентность 436, 493  
— волновая 436  
— гидродинамическая 493  
— слабая 436  
Уравнение Бюргерса 370  
— Ван-дер-Поля 299  
— Гинзбурга-Ландау 417  
— Кадомцева-Петриашвили 405  
— Клейна-Гордона 71. 78, 190. 370

— Кортевега-де Вриза 277, 397  
— Ландау 507  
— Матье 217  
— Хилла 218  
— Хохлова-Заболотской 405  
— Шредингера 400  
— дисперсионное 81  
— нелинейное параболическое 415  
— характеристическое 27, 83  
Устойчивость 129, 149  
— асимптотическая 131  
— неавтономных систем 139  
— орбитальная 131  
— по Ляпунову 130  
— структурная 307  
Фазовая плоскость 21  
Фазовое пространство 134, 135, 307,  
459  
Формула Рэлея 183  
Функция Мельникова 327  
— корреляционная 462  
Центр ведущий 521  
Цепочка одинаковых маятников 67  
— связанных частиц 61  
— точечных вихрей 509  
Частота Вайсяля 97  
— нормальная 42  
— парциальная 42  
— плазменная 119  
— циклотронная 214  
Число Маха 511  
— Прандтля 484  
— Рейнольдса 494  
— Рэлея 484  
— Тейлора 501  
Энтропия Колмогорова-Синяя 469  
Эргодичность 461  
Эффект Доплера 207, 215  
Ячейка Бенара 513, 514  
— Хеле-Шоу 449

---

---

## Предисловие ко второму изданию

В новом издании отражены результаты последних лет. Заново написана глава 12, в которую включено подробное изложение приближения геометрической оптики, введены параграфы о распространении волн в плоскостой среде и линейном взаимодействии волн в неоднородных средах. Значительно обновлен список рекомендуемой литературы.

Авторы признательны Г. М. Полотовскому за большую работу по подготовке рукописи к изданию, особенно по уточнению математических фрагментов текста.

## Предисловие к первому изданию

Книг по теории колебаний и различным вопросам теории волн сейчас довольно много. Одни из них посвящены, в основном, математическому аппарату теории, другие — детальному исследованию сравнительно узкого круга проблем, третьи — исключительно математическим, биологическим или иным системам определенной природы. При этом теория колебаний и теория волн обычно составляют предмет различных книг. Цель этой книги — познакомить читателя с современной теорией колебаний и волн по возможности шире, совместив при этом наглядность изложения с достаточным для физика уровнем строгости. Книга построена таким образом, что на первый план выдвигаются не формальные методы, а основные колебательно-волновые явления и эффекты. Мы стремились показать единство колебательных явлений природы, рассматривая примеры из самых различных областей.

Книга разделена на две части: в первой обсуждаются колебания и волны в линейных системах и средах, во второй — в нелинейных. С нашей точки зрения, такое разделение значительно облегчает восприятие теории колебаний и волн на современном уровне. Так, распространение плоской гармонической волны в периодически слоистой среде описывается практически той же математической моделью, что и явление параметрической неустойчивости в сосредоточенной системе с одной степенью свободы, и их параллельное рассмотрение вполне естественно. Анализ же, например, автоколебаний в возбудимой среде — ансамбле автогенераторов — представляется непосредственным обобщением задачи о взаимодействии небольшого числа генераторов и т. д.

Основой для книги послужили лекции, читаемые авторами на протяжении двадцати лет на физических факультетах Горьковского и Саратовского государственных университетов. Многолетний опыт общения со студентами и определил в значительной степени соотношение между подробными выводами и расчетами и ссылками типа «нетрудно видеть» и «ученые доказали», которыми мы вынужденно пользуемся лишь в тех местах, где громоздкость аппарата грозит заслонить идею. Надеемся, что книга будет полезна не только студентам и аспирантам, но и опытным исследователям, которые по роду своей деятельнос-

ти сталкиваются с анализом колебательных и волновых явлений самой различной природы.

Помимо разделов, традиционно входящих в программы курсов по теории колебаний и теории волн, в книге содержится совсем новый материал, который до настоящего времени практически не излагался в монографической и, тем более, в учебной литературе. Это, в частности, анализ стохастического поведения простых систем, обсуждение связи гидродинамической турбулентности со стохастическими автоколебаниями и их математическим образом — странным аттрактором, рассмотрение основных идей и феноменов теории самоорганизации — нового раздела теории нелинейных колебаний и волн.

Мы пользуемся случаем, чтобы выразить свою глубокую благодарность Андрею Викторовичу Гапонову-Грехову, по инициативе которого написана эта книга. Многолетняя совместная работа и общение с ним одного из авторов сыграли решающую роль в ее создании. Мы признательны также нашим коллегам и сотрудникам Института прикладной физики АН СССР, НИИ механики и физики при СГУ, радиофизического факультета ГГУ и физического факультета СГУ за многократные полезные дискуссии по затронутым в книге проблемам.

## Введение

Идея о колебательной общности кажущихся непохожими на первый взгляд явлений самой различной природы (механических, электромагнитных, химических, биологических и т. д.) в наше время представляется естественной не только искусственным исследователям, но даже вчерашним школьникам. Действительно, в ответ на вопрос, что такое гармонический осциллятор, многие из них приведут в качестве примера и маятник «ходиков», и электрический контур, составленный из емкости и индуктивности одновременно. Тем не менее и сегодня колебательные явления и эффекты, наблюдаемые в не столь тривиальных ситуациях, зачастую не всегда легко связать с основными элементарными процессами. Особенно это относится к волновым задачам. Поэтому имеется насущная потребность в учебном курсе, в котором современная теория колебаний и волн предстала бы перед читателем своими явлениями и эффектами, обнаруживаемыми в самых различных приложениях, но допускающими единое описание и понимание. Подчеркнем, что, хотя формально единство колебательных и волновых процессов совершенно различной природы основывается на сходстве математических моделей, оно не исчерпывается им. Ничуть не менее важным является «межведомственная» система понятий, моделей и приближений, позволяющая ориентироваться в чрезвычайном разнообразии колебательных и волновых процессов, которые встречаются в природе и технике.

Попытаемся кратко сформулировать предмет теории колебаний и волн. Теория колебаний и волн — это область науки, исследующая колебательные и волновые явления в системах различной природы; причем эта теория в первую очередь интересуется общими свойствами колебательных процессов, а не деталями поведения системы, связанными с проявлением ее конкретной природы (физической, биологической и т. д.). Основываясь на анализе моделей, теория колебаний и волн устанавливает общие свойства в реальных системах. Содержание теории заключается в том, что она позволяет определить связь между параметрами системы и ее колебательными или волновыми возможностями в случае тех или иных эффектов.

Применение теории колебаний и волн в каждом конкретном случае предполагает определенную идеализацию реальной системы — по-

строение модели и написание для нее соответствующих уравнений (обыкновенных дифференциальных, в частных производных, разностных и т. д.); принимаемые идеализации для одних и тех же систем могут быть различны в зависимости от того, об исследовании какого явления идет речь, т. е. модель должна соответствовать не только системе, но и явлению. Например, когда речь идет только об условиях раскачки качелей при периодическом изменении их длины, модель может быть совсем простой — линейный осциллятор с переменной частотой. Когда же требуется определить условие стабилизации колебаний, их форму и т. д., необходимо усовершенствовать модель, учитывая (как минимум) зависимость частоты колебаний от их амплитуды. Таким образом, мы приходим к модели нелинейного осциллятора с периодически изменяемым параметром. Другой пример — морские волны. Их также можно описывать с помощью линейной модели (волнового уравнения для волн с дисперсией), если мы интересуемся поведением волн не слишком большой амплитуды далеко от берега. Для описания же опрокидывания волны и образования бурунов мы, конечно, должны строить нелинейную модель.

Подчеркнем еще раз, что на основе сложившихся представлений теории колебаний и волн можно связать те или иные явления в конкретной системе с ее характеристиками, фактически не решая задачи. Например, когда речь идет о преобразовании энергии одних колебаний в другие в слабо нелинейной системе или среде, будь то волны на воде, электромагнитные колебания в ионосфере или колебания маятника на пружине, можно сказать сразу, что такое преобразование возможно только в случае, когда выполнены определенные резонансные условия между собственными частотами подсистем.

Впервые наиболее ясно мысль о колебательном единстве, казалось бы, совершенно разных явлений высказал Рэлей в своей «Теории звука», в которую он поместил дополнительную главу об электрических колебаниях, подчеркивая, что оба вида малых колебаний — звуковые и электрические — в определенном смысле одинаковы. Книга Рэрея — это фактически первый курс теории колебаний и волн в линейных системах — «линейных колебаний».

Однако линейные колебания — колебания малой амплитуды, для которых характерен аддитивный отклик на аддитивные воздействия (выполняется принцип суперпозиции), по существу, есть результат приближенности описания. Уравнения линейных колебаний получаются в результате линеаризации исходной модели какого-либо выделенного состояния или движения исследуемой системы или среды. При более об-

щем рассмотрении оказывается, что большинство явлений нашего мира нелинейно. Первой из наук с этим столкнулась небесная механика. Было обнаружено, что период обращения планет зависит от их энергии (третий закон Кеплера). Нелинейность — неотъемлемое свойство любой системы, эволюционирующей во времени. В частности, всякий переход из одного квазиравновесного состояния в другое связан с проявлением нелинейности — возникновение и эволюция Вселенной, рождение, жизнь и смерть звезд, слияния и распады частиц, их рождение из вакуума, наконец, самопроизвольное образование сложных структур, приведшее в конечном итоге к возникновению органической жизни. Сейчас исследование нелинейных проблем привлекает большое внимание не только механиков, физиков, но и биологов, химиков, экономистов и т. д. К числу «нелинейных наук» сейчас относятся и теория элементарных частиц, и неравновесная термодинамика, и динамика атмосферы и океана, и многие другие области современной науки.

Уже в первые десятилетия нашего века нелинейные проблемы обсуждались не только применительно к механике (задача трех тел, волны на воде и т. д.) и к акустике, но и в связи с исследованием свойств твердых тел (учет ангармоничности колебаний атомов в кристаллической решетке в теории теплопроводности). Нелинейные задачи ставились зарождающейся радиотехникой (детектирование и генерация колебаний); они непрерывно появлялись в других разделах науки и техники. Однако «нелинейные трудности» в этих различных областях казались совершенно специфическими и не связанными друг с другом. И лишь в 20–30-е годы в значительной мере благодаря деятельности Леонида Исааковича Мандельштама — создателя советской школы «нелинейных физиков» — среди специалистов различных областей физики и техники начало вырабатываться «нелинейное мышление», и они начали перенимать нелинейный опыт друг у друга. Общность нелинейных явлений различной природы и общность их моделей, образов и методов рассмотрения стали почти очевидными. Сформировался своеобразный нелинейный язык, оперирующий такими понятиями, как нелинейный резонанс, автоколебания, синхронизация, конкуренция, параметрическое взаимодействие и т. д.<sup>1</sup> Этот язык сопутствовал формированию современной теории колебаний и волн.

Подчеркнем здесь, что в настоящее время колебательные и волновые задачи считаются предметом единой теории. Исторически же

<sup>1</sup> Изложение с единой точки зрения колебательных и волновых явлений различной природы на уровне курса общей физики содержится в книге: Горелик Г. С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959.

теория колебаний и теория волн значительный период времени развивались независимо. Дело в том, что до середины 50-х годов теория волн интересовалась в основном линейными задачами (исключением были гидродинамика и газодинамика), интересы же классической теории колебаний были сосредоточены на нелинейных проблемах. Причем теория колебаний нелинейных систем с одной степенью свободы к этому времени была уже практически завершена. Это оказалось возможным благодаря введению А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным понятия грубых динамических систем — систем, качественно не меняющих своего поведения при малом изменении параметров<sup>1</sup>. Детальный анализ грубых систем в совокупности с полным исследованием качественных перестроек двумерных фазовых портретов при сколь угодно малом изменении параметров позволяет ответить практически на любой вопрос о поведении нелинейной динамической системы с двумерным фазовым пространством.

Интенсивные исследования нелинейных волн начались лишь в 60-е годы: именно тогда родились нелинейная физика плазмы, нелинейные оптика и акустика, электродинамика, физика высоких энергий (включая физику взрыва и ударных волн). Появилась нелинейная термодинамика, описывающая переходы в системах (в частности, химических и биологических), далеких от термодинамического равновесия.

Для иллюстрации современного состояния теории нелинейных колебаний и волн остановимся здесь кратко лишь на двух ее направлениях — исследовании когерентных состояний и сложных детерминированных структур и анализе случайного (стохастического) поведения детерминированных систем. Взаимосвязь динамики и статистики волнует физиков уже на протяжении столетия, и, конечно, главным всегда был вопрос: можно ли строго получить статистическое описание из динамического? До недавнего времени ответ был отрицательным. Возникновение случайности в классической (неквантовой) динамической системе (не подверженной действию шумов) связывалось исключительно с ее сложностью — чрезвычайно большим числом степеней свободы (например, газ в сосуде), когда детерминированное описание просто теряет смысл, хотя в принципе и возможно. При этом переход к вероятностному описанию основывался на какой-либо гипотезе (например, эргодической). Появившаяся сейчас строгая теория позволяет утверждать, что нелинейные динамические системы могут в прямом смысле

---

<sup>1</sup>Основополагающую роль в развитии нелинейной теории колебаний сыграла книга: Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М: Наука, 1981 (1-е изд. — 1937 г.).

«порождать статистику», т. е. статистический подход здесь не приближенный метод описания, а единственно верное отражение реального поведения динамической системы. Поразительность недавних физических и математических открытий заключается, в частности, в том, что случайное поведение демонстрируют уже и очень простые нелинейные системы (с малым числом степеней свободы), например, шарик в бильярде с вогнутыми стенками, электрон в ноле двух синусоидальных волн и др. Как возникает случайность в детерминированной системе вопреки единственности решения? Односложный ответ — в результате неустойчивости индивидуальных движений, происходящих внутри ограниченного фазового объема. Неустойчивость всех финитных движений (движения происходят в ограниченной области пространства) гарантирует сложность почти всех отдельных движений и бесконечное их разнообразие, благодаря чему естественным образом появляется понятие ансамбля и основывающееся на нем статистическое описание.

Сейчас построена, в основном, подтверждаемая экспериментом теория перехода от детерминированного поведения к стохастическому для самых разнообразных динамических систем (гидродинамических течений, радиотехнических генераторов случайных сигналов, автокаталитических химических реакций и др.).

Может показаться естественным, что если уже поведение системы с малым числом степеней свободы может быть сложным, то система с бесконечным числом степеней свободы заведомо должна демонстрировать случайное поведение. Однако в общем случае это не так. В свое время была выдвинута гипотеза о том, что в системах с очень большим числом степеней свободы наличия даже слабой нелинейности достаточно, чтобы энергия, запасенная в отдельных степенях свободы, распределилась по всем модам и таким образом установилось термодинамическое равновесие. Для поддержания этих представлений в конце 40-х годов была проведена серия численных экспериментов с моделями нелинейных цепочек из большого числа частиц, но термализации не обнаружилось — система периодически возвращалась в состояние с начальным распределением энергии (парадокс Ферми–Паста–Улама). В действительности нелинейные волновые системы бывают двух типов — интегрируемые (или близкие к ним), они демонстрируют лишь простое периодическое или квазипериодическое поведение, и неинтегрируемые. Неинтегрируемые системы при достаточно большой начальной энергии стохастизируются. По случайному стечению обстоятельств цепочка, с которой работали Ферми, Паста и Улам, при выбранных ими значениях параметров оказалась близкой к интегрируемой.

И в интегрируемых, и в неинтегрируемых системах возможно существование частных решений, соответствующих так называемым когерентным образованиям, или пространственным структурам. Пример — солитоны, стационарные ударные волны и др.

Когерентные нелинейные образования сейчас детально исследованы в физике твердого тела (домены), в физике плазмы (ленгмюровские солитоны), в геофизике и океанологии (циклоны и антициклоны, ринги), в физике планетных атмосфер (Красное пятно Юпитера), в нелинейной оптике (сверхкороткие импульсы). Сейчас есть надежда на подтверждение представлений об элементарных частицах как о солитонах квантовых полей.

С точки зрения биофизики чрезвычайно интересны когерентные образования в диссипативных неравновесных средах — диссипативные структуры и автоволны<sup>1</sup>. Примерами таких автоволн и диссипативных структур служат волны горения, импульсы возбуждения в нервных и мышечных волокнах, пространственно-временное изменение численности в популяциях организмов, концентрационные волны в автокаталитических химических реакциях. Основная особенность этих пространственно-временных структур заключается в том, что они слабо зависят от свойств источника неравновесности, граничных условий и начального состояния среды. Диссипативные структуры в неравновесных средах сейчас представляют собой чрезвычайно привлекательный объект исследования как одна из наиболее типичных и естественных форм самоорганизации.

Конечно, в рамках одной книги, в которой обсуждению последних результатов предшествует подробное изложение классической теории, невозможно познакомить читателя с современной теорией колебаний и волн (в особенности нелинейной) в полной мере. Мы, однако, надеемся, что заключительные главы книги послужат введением в эту чрезвычайно увлекательную область науки.

<sup>1</sup>Термин введен Р. В. Хохловым по аналогии с автоколебаниями.

# Часть I

## КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

---

### Глава 1

## Линейный осциллятор

### 1.1. Общие замечания

Как мы знаем, для теории колебаний и груз на пружине, и колебательный контур — это один и тот же объект исследования. Оба они описываются известным дифференциальным уравнением и характеризуются одним и тем же фазовым пространством — плоскостью, разбитой на траектории семейством вложенных друг в друга эллипсов. Это вроде бы тривиально. «Но не тривиально то, что это тривиально», — говорил Л. И. Мандельштам, т. е. не тривиально, что эта аналогия между колебаниями груза на пружине и колебаниями заряда или тока в контуре является настолько далеко идущей, что она стала привычным способом рассуждения у физиков, несмотря на то, что сами явления относятся к двум различным областям [1]. Сказанному и соответствуют содержание и идеология данной главы, в которой обсуждаются свойства линейного осциллятора — основной модели линейной теории колебаний и волн.

Уравнение движения линейного осциллятора, описывающее его свободные колебания, имеет вид

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  — смещение от положения равновесия для механических систем (например, координата грузика на пружине), заряд в электрических системах (например, заряд на пластинах конденсатора в колебательном контуре) или что-нибудь еще в зависимости от природы осциллятора;  $\gamma$  — параметр, характеризующий потери (трение, сопротивление и т. п.);  $\omega_0$  — собственная частота осциллятора;  $\dot{x} = dx/dt$  и  $\ddot{x} = d^2x/dt^2$  — соответствующие производные по времени. Линейный

осциллятор — частный (но очень важный) пример линейных динамических систем, поведение которых описывается функциональным линейным уравнением  $\widehat{L}u = 0$ , где  $\widehat{L}$  — линейный оператор (напомним, что если  $u_1$  и  $u_2$  — решения уравнения  $\widehat{L}u = 0$ , то его решениями являются также комбинации  $C_1u_1 + C_2u_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные). Уравнение (1.1) в явном виде не содержит зависимости от времени. Это результат того, что система, которую оно описывает, не испытывает действия переменных сил, и ее параметры постоянны во времени — система автономная. Если теперь предположить, что  $\gamma = 0$  (или добротность системы  $Q = \omega_0/(2\gamma)$  бесконечна), то мы приходим к уравнению осциллятора, совершающего гармонические колебания:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.2)$$

Такой осциллятор называется консервативным, поскольку его энергия сохраняется во времени. Это утверждение легко доказать даже для более общего, чем (1.2), случая — случая нелинейного осциллятора:

$$\ddot{x} = f(x). \quad (1.3)$$

Полная энергия системы (1.3) складывается из суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \int_{x_0}^x f(\zeta) d\zeta. \quad (1.4)$$

Зависимость потенциальной энергии от координаты

$$W_{\text{п}} = - \int_{x_0}^x f(\zeta) d\zeta \quad (\text{форма потенциальной «ямы»})$$

определяет поведение системы (1.3). Выбор знака в формуле для потенциальной энергии легко понять, если вычислить  $W_{\text{п}}$ , скажем, для уравнения (1.2): если  $x_0 = 0$ , то  $W_{\text{п}} = \omega_0^2 x^2/2$ , т. е. знак выбран так, чтобы потенциальная энергия маятника была тем больше, чем больше он отклонен. Дифференцируя (1.4) по времени, находим, что

$$\dot{W} = \dot{x}\ddot{x} - \dot{x}f(x) = \dot{x}[\ddot{x} - f(x)] = 0.$$

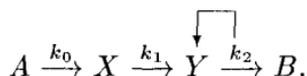
Таким образом,  $W(x, \dot{x})$  не зависит от времени. Полная энергия сохраняется, т. е. колебательная система, соответствующая уравнению (1.3), консервативна.

Уравнения (1.3) и (1.2) — это обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Они описывают системы с одной степенью свободы. Число степеней свободы вдвое меньше порядка дифференциального уравнения, описывающего систему [2]. Поэтому системе с одной степенью свободы соответствует двумерное фазовое пространство — поверхность, с полутора степенями свободы — трехмерное фазовое пространство, а системе с двумя степенями свободы — естественно, четырехмерное.

## 1.2. Два примера. Фазовый портрет осциллятора

Прежде чем рассматривать движение линейного осциллятора — системы с одной степенью свободы — на фазовой плоскости, приведем еще два нетривиальных, хотя уже и ставших классическими примера линейных осцилляторов, которые встречаются в химии и биологии.

В химии простейшим примером колебательной реакции, протекающей в гомогенной (однородной) среде, является модель Лотки [3, 4], кинетическая схема которой имеет вид



Данная запись соответствует следующей гипотетической реакции. В некотором объеме находится вещество  $A$ , расход которого в процессе реакции почти незаметен (в этом случае говорят, что  $A$  находится в избытке). Происходит превращение молекул вещества  $A$  в молекулы вещества  $X$ . Эта реакция нулевого порядка протекает с постоянной скоростью  $k_0$ . Далее вещество  $X$  превращается в вещество  $Y$  с тем большей скоростью, чем больше концентрация молекул вещества  $Y$  (это обстоятельство в кинетической схеме отмечено обратной стрелкой над  $Y$ ). Эта реакция является реакцией второго порядка. Наконец, молекулы вещества  $Y$  необратимо распадаются, образуя вещество  $B$  (реакция первого порядка). Используя правила составления кинетических уравнений [4] и сохранив для концентрации веществ обозначения  $X$ ,  $Y$  и  $B$ , запишем математическую модель реакции Лотки в следующем виде:

$$\dot{X} = k_0 - k_1 XY, \quad \dot{Y} = k_1 XY - k_2 Y, \quad \dot{B} = k_2 Y. \quad (1.5)$$

Если концентрации  $X$  и  $Y$  не меняются во времени, то реакция может протекать так, что скорость образования  $B$  будет постоянной.

Сказанному соответствуют условия  $\dot{X} = \dot{Y} = 0$ , или

$$k_0 - k_1 X_0 Y_0 = 0, \quad k_1 X_0 Y_0 - k_2 Y_0 = 0, \quad (1.6)$$

где  $X_0$  и  $Y_0$  — равновесные концентрации. Из системы (1.6) следует, что

$$X_0 = \frac{k_2}{k_1}, \quad Y_0 = \frac{k_0}{k_2}. \quad (1.7)$$

Предположим, что существуют малые отклонения  $x(t)$  и  $y(t)$  от равновесных значений концентраций  $X_0$ ,  $Y_0$ , т.е. будем считать, что  $X(t) = X_0 + x$  и  $Y(t) = Y_0 + y$ , причем  $x \ll X_0$ ,  $y \ll Y_0$ . Подставляя выражения для  $X(t)$  и  $Y(t)$  в первые два уравнения системы (1.5), учитывая (1.7) и пренебрегая произведениями переменных величин как членами второго порядка малости, получаем

$$\dot{x} = -k_2 y - \frac{k_1 k_0}{k_2} x, \quad \dot{y} = \frac{k_1 k_0}{k_2} x. \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.8) легко сводится к уравнению линейного осциллятора (1.1), если формально считать, что  $k_1 k_0 / k_2 = 2\gamma$ ,  $k_1 k_0 = \omega_0^2$ . Разумеется, нелинейная система уравнений (1.5) богаче решениями, чем уравнение линейного осциллятора (1.1), которое получилось из нее лишь в силу сделанных допущений о малости возмущений концентрации. Мы вернемся к нелинейной модели Лотки как составному элементу более сложных периодических химических реакций (например, реакции Белоусова–Жаботинского).

Второй пример — известная модель экологии «хищник-жертва» (модель Вольтерра [2–5]). В этой модели рассматриваются два вида животных, один из которых питается другим. Соответствующую задачу часто формулируют в виде вопроса: могут ли, например, лисы съесть всех зайцев?

Пусть на замкнутом ареале живут два вида — хищники и вегетарианцы-жертвы. Жертвы (их число  $N_1(t)$ ) питаются растительной пищей, имеющейся в избытке, а хищники (их число  $N_2(t)$ ) питаются только жертвами. Если жертвы живут на ареале одни и пищи им хватает, то численность этого вида будет увеличиваться:

$$\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1 \quad (1.9)$$

( $\varepsilon_1$  — постоянный положительный коэффициент прироста). Заметим, что уравнение (1.9) аналогично рассмотренной выше химической реакции первого порядка. Если бы на ареале жили одни хищники, то из-за

отсутствия пищи они бы вымерли:

$$\dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2 \quad (1.10)$$

( $\varepsilon_2$  — постоянный положительный коэффициент вымирания). Можно допустить, что при совместном проживании видов численность хищников будет увеличиваться тем быстрее, чем больше их частота столкновений с жертвами. Эта частота столкновений пропорциональна  $N_1 N_2$ . Таким образом, для описания численности двух совместно существующих видов мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2), \quad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1), \quad (1.11)$$

где  $\gamma_2$  — положительная постоянная, характеризующая гибель жертв из-за встречи с хищниками;  $\gamma_1$  — положительная постоянная, характеризующая размножение хищников.

Подобно тому, как мы поступали в случае модели Лотки, найдем состояния равновесия  $N_1^0$  и  $N_2^0$ . Из уравнений (1.11) при  $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$  имеем

$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}. \quad (1.12)$$

Для малых отклонений численности видов от стационарных значений ( $N_1 = N_1^0 + N_1'(t)$  и  $N_2 = N_2^0 + N_2'(t)$ ) после линеаризации уравнений (1.11) получим

$$\dot{N}_1' = -\gamma_2 N_1^0 N_2' = -\frac{\gamma_2 \varepsilon_2}{\gamma_1} N_2', \quad \dot{N}_2' = \gamma_1 N_2^0 N_1' = \frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\gamma_2} N_1'. \quad (1.13)$$

Дифференцируя первое уравнение системы (1.13) по времени и используя второе, приходим к уравнению для гармонического осциллятора:

$$\ddot{N}_1' + \omega_0^2 N_1' = 0, \quad (1.14)$$

где  $\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  (такое же уравнение получается и для  $N_2'$ ). Если в (1.14) ввести обозначение  $N_1' = x$ , то приходим к уравнению (1.2).

Вернемся к исходной модели. Введем новую переменную  $y = \dot{x}$  и перепишем уравнение (1.2) в виде системы двух уравнений:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x. \quad (1.15)$$

Плоскость переменных  $x$  и  $\dot{x}$  называется фазовой плоскостью уравнения (1.2). Каждой точке фазовой плоскости («изображающей», или «фазовой», точке) соответствует вполне определенное состояние системы.

Траектория изображающей точки называется фазовой траекторией. Через каждую точку фазовой плоскости проходит одна и только одна траектория. Заметим, что фазовая траектория может состоять всего из одной точки, называемой положением равновесия. Скорость изображающей точки называется диаграммной скоростью. В положении равновесия она равна нулю. Фазовую траекторию и диаграммную скорость не следует смешивать с действительными траекторией и скоростью движения.

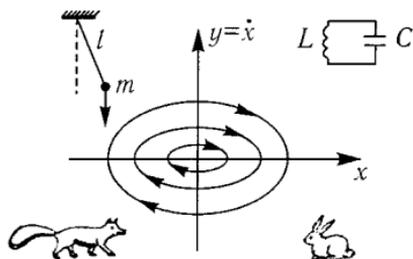


Рис. 1.1. Фазовый портрет гармонического осциллятора, описываемого уравнением (1.2):  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  — математический маятник;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — электрический контур;  $\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$  — линеаризованная модель «хищник–жертва»; в начале координат — состояние равновесия типа «центр»

Уравнение, определяющее семейство интегральных кривых  $y = y(x, C)$  на фазовой плоскости, имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}. \quad (1.16)$$

Интегрируя (1.16), находим, что интегральные кривые для осциллятора — это набор эллипсов, оси которых совпадают с координатными осями (рис. 1.1):

$$\frac{y^2}{C} + \frac{x^2 \omega_0^2}{C} = 1. \quad (1.17)$$

Параметр  $C$  определяется начальными условиями. Дополнив интегральные кривые стрелками, определяющими направления движения (в нашем случае — по часовой стрелке — в верхней полуплоскости  $dx/dt > 0$ ), получим полный фазовый портрет линейного осциллятора. Одна из фазовых траекторий состоит всего из одной точки, которая соответствует состоянию равновесия. Состояниям равновесия соответствует равенство нулю или отсутствие сил, вызывающих движение, т. е.  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ . В нашем случае состояние равновесия находится в начале координат ( $x = 0, y = 0$ ). Это изолированное состояние равновесия, к которому не стремится ни одна траектория, называют центром.

Скорость движения изображающей точки вдоль фазовой траектории (диаграммная скорость) для гармонического осциллятора не зависит от траектории, по которой движется изображающая точка, период обращения всегда равен  $T = 2\pi/\omega_0$ . Рассмотрим ансамбль одинаковых осцилляторов с разными начальными энергиями и одинаковыми начальными фазами (на фазовой плоскости начальные состояния будут изображаться точками на прямой, проходящей через начало координат). Через произвольное время фазы всех осцилляторов по-прежнему будут одинаковы, т.е. движение линейного осциллятора является изохронным.

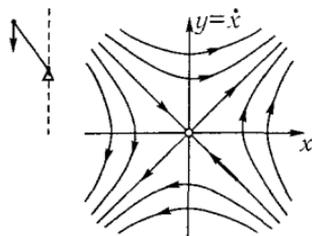


Рис. 1.2. Фазовый портрет линейной системы с отталкивающей силой, описываемой уравнением (1.18): состояние равновесия — седло; биссектрисы квадрантов — сепаратрисы

Какие еще возможны фазовые портреты для линеаризованных систем с одной степенью свободы? Пусть уравнение осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} - a^2x = 0. \quad (1.18)$$

Такое уравнение описывает, например, малые отклонения маятника от положения равновесия в верхней точке, его фазовый портрет представлен на рис. 1.2 [2]. Как и в предыдущем случае, заменим (1.18) двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = a^2x. \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x}{y}, \quad (1.20)$$

интегрирование которого дает семейство равноугонных гипербол, отнесенных к главным осям:

$$y^2 - a^2x^2 = C \quad (1.21)$$

( $C$  — постоянная интегрирования). Если  $C = 0$ , то получаем прямые  $y = ax$  и  $y = -ax$ , которые являются асимптотами семейства гипербол (рис. 1.2) и проходят через состояние равновесия, расположенное в начале координат ( $x = 0, y = 0$ ). Состояние равновесия в этом случае называется седлом. Здесь имеется аналогия с соответствующим географическим понятием [4]. В горах перевалом (или седлом) называют самую низшую точку между вершинами, к которой стекают потоки с вершин. С перевала потоки обрушиваются в разные долины. «Разнодолинные» потоки разделяет водораздел — линия, проходящая через седло. На нашем фазовом портрете через седло проходят асимптоты гиперболы, которые называются сепаратрисами. Отметим, что небольшие движения в окрестности седла, очевидно, неустойчиво<sup>1</sup>. Малые отклонения приводят к большим последствиям (строгое определение устойчивости дано ниже).

Как изменится движение осциллятора и его фазовый портрет, если существенны потери (трение, вязкость и т. д.), т. е. когда  $\gamma \neq 0$  (1.1)? Согласно (1.1) или эквивалентной системе уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2 x. \quad (1.22)$$

Уравнение интегральных кривых имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\gamma y + \omega_0^2 x}{y}. \quad (1.23)$$

Состояние равновесия в этом случае также единственное, и ему соответствует начало координат ( $x = 0, y = 0$ ). Для интегрирования (1.23) сделаем замену  $y = xz$  и перепишем (1.23) в виде

$$\frac{z dz}{z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2} = -\frac{dx}{x}.$$

После интегрирования и перехода к старым переменным при достаточно малом затухании, когда  $\gamma^2 < \omega_0^2$ , находим связь между  $y$  и  $x$ :

$$\sqrt{y^2 + 2\gamma xy + \omega_0^2 x^2} = C_1 \exp\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \arctg \frac{y + \gamma x}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x}\right), \quad (1.24)$$

<sup>1</sup>Из (1.19) следует, что в верхней полуплоскости координата  $x$  должна возрастать, а в нижней убывать. Все траектории, за исключением состояния равновесия и двух сепаратрис, соответствуют нефинитным движениям системы (рис. 1.2).

которая и позволяет построить фазовый портрет линейного осциллятора с затуханием ( $C$  — произвольная постоянная). Скорость изображающей точки при ее движении по фазовой траектории  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{y^2 + (2\gamma y + \omega_0^2 x)^2}$  не обращается в нуль нигде, кроме начала координат. Подчеркнем, что при движении по любой траектории скорость изображающей точки стремится к нулю при приближении к точке равновесия. Чтобы лучше понять детали фазового портрета, введем новые переменные  $u = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}x$ ,  $v = y + \gamma x$  и будем считать их прямоугольными координатами. Тогда очевидно, что

$$y^2 + 2\gamma xy + \omega_0^2 x^2 = u^2 + v^2,$$

$$u^2 + v^2 = C_1^2 \exp\left(\frac{2\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \arctg \frac{v}{u}\right),$$

и в полярных координатах ( $u = \rho \cos \varphi$ ,  $v = \rho \sin \varphi$ ) вместо (1.24) окончательно получим

$$\rho = C_1 \exp\left(\frac{\gamma \varphi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right). \quad (1.25)$$

Поскольку решения уравнения (1.1) известны, легко показать, что  $\varphi = -(\omega t + \alpha)$ ,  $\alpha = \arctg[(y_0 + \gamma x_0)/(x_0 \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})]$  ( $y_0$ ,  $x_0$  — значения  $y$  и  $x$  при  $t = 0$ ), и, следовательно,  $\varphi$  убывает со временем, а  $\rho \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

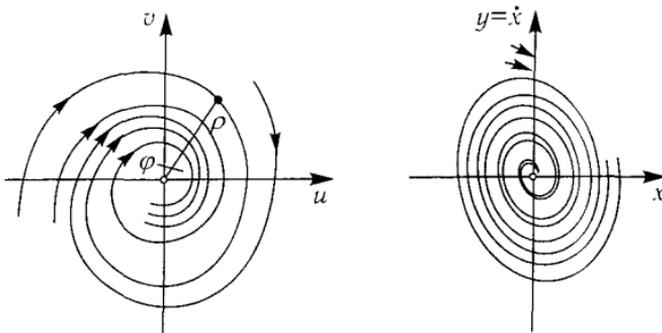


Рис. 1.3. Фазовый портрет линейного осциллятора с малым затуханием: состояние равновесия — устойчивый фокус

Таким образом, фазовые траектории на плоскости  $uv$  представляют собой логарифмические спирали, скручивающиеся к точке равновесия ( $u = 0$ ,  $v = 0$ ), которая называется устойчивым фокусом (рис. 1.3).

При малых значениях  $\gamma / \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  витки спирали близки к окружностям  $u^2 + v^2 = C_1^2$ , которые на плоскости  $xy$  превращаются в эллипсы  $y^2 + 2\gamma xy + \omega_0^2 x^2 = C_1^2$ . Следовательно, при малых  $\gamma / \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  витки спирали близки на одном обороте к эллипсам с соответствующими значениями  $C_1$ , так что фазовый портрет на плоскости  $xy$ , так же как и на плоскости  $uv$ , является семейством логарифмических спиралей с устойчивым фокусом в начале координат. Таким образом, из вида фазового портрета можно сделать вывод о том, что при любых начальных условиях (кроме определяющих состояние равновесия) движение нашей диссипативной системы представляет собой затухающий колебательный процесс. Все спирали на фазовой плоскости асимптотически приближаются к началу координат, а радиус-вектор изображающей точки уменьшается с каждым оборотом спирали.

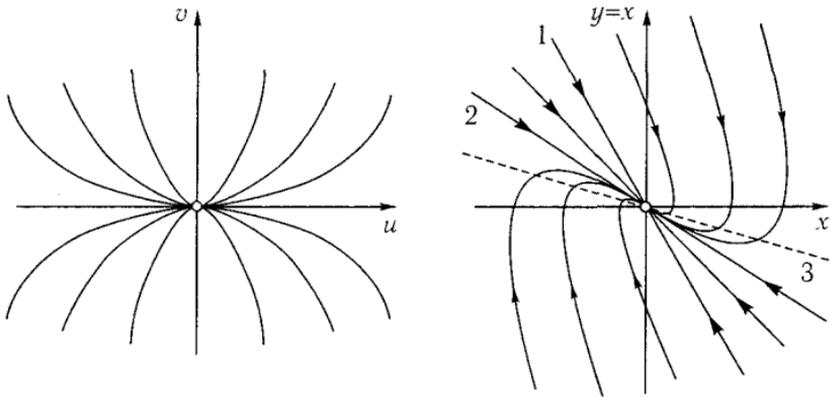


Рис. 1.4. Фазовый портрет линейного осциллятора, совершающего затухающие аperiodические колебания: состояние равновесия — устойчивый узел; 1 —  $y = -q_2x$ ; 2 —  $y = -q_1x$ ; 3 —  $y = -q_1q_2x/(q_1 + q_2)$

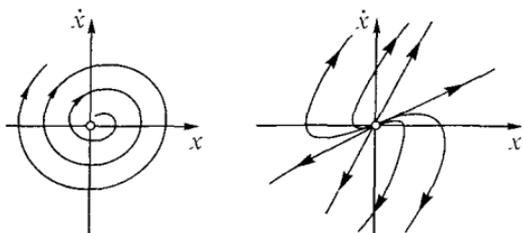
Если  $\gamma^2 > \omega_0^2$ , то процесс становится затухающим аperiodическим (рис. 1.4). Состояние равновесия становится устойчивым узлом ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ). Мы предоставляем читателю возможность показать, что в этом случае интегральные кривые определяются уравнением

$$v = C_1 u^a,$$

где  $v = y + q_1x$ ,  $u = y + q_2x$ ,  $q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$ ,  $q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$ ,  $a = q_2/q_1 > 1$  [2] (рис. 1.4). Изменение знака  $\gamma$  (отрицательные трение, сопротивление, проводимость и т. д.) приводит к тому, что состояния равновесия становятся неустойчивыми (рис. 1.5). В системе, описыва-

емой уравнением (1.19) (система с отталкивающей силой), включение трения, как положительного, так и отрицательного, не изменит принципиально фазового портрета (см. рис. 1.2), так как состояние равновесия — седло.

Рис. 1.5. Фазовые портреты линейного осциллятора при  $\gamma < 0$ . Состояния равновесия неустойчивы



Как известно, решение уравнения (1.1) для  $\gamma^2 \neq \omega_0^2$  имеет вид

$$x = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t),$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — корни характеристического уравнения  $p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$ . Расположение его корней на комплексной плоскости  $p$  однозначно определяет тип состояния равновесия системы, а следовательно, и движение осциллятора (рис 1.6).

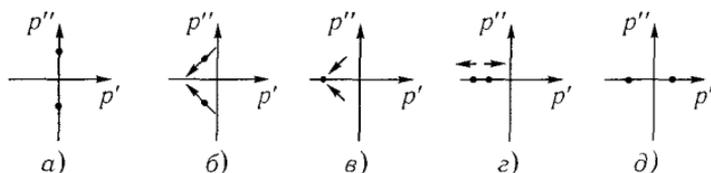


Рис. 1.6. Расположение корней на комплексной плоскости  $p = p' + ip''$  и их связь с типом состояния равновесия системы: а —  $\gamma = 0$ ,  $p_{1,2} = \pm i\omega_0$  — центр; б —  $\omega_0 > \gamma > 0$ ,  $p_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  — фокус; в —  $\gamma = \omega_0$ ,  $p_{1,2} = -\gamma$  — фазовый портрет качественно изменяется; г —  $\gamma > \omega_0$ ,  $p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  — узел; д —  $\gamma = 0$ ,  $p_{1,2} = \pm\omega_0$  — седло

В случае  $\gamma = 0$  корни характеристического уравнения чисто мнимые; по мере увеличения  $\gamma$  ( $\gamma \neq 0$ ) они начинают двигаться в левой полуплоскости, оставаясь комплексно-сопряженными. При  $\gamma^2 = \omega_0^2$  корни сливаются на действительной оси, а при дальнейшем возрастании  $\gamma$  распадаются на два действительных корня. Положению равновесия типа «седло» соответствуют два действительных корня разных знаков. Изменение знака  $\gamma$  приводит к смещению корней в правую полуплоскость, и состояния равновесия становятся неустойчивыми. На рис. 1.7 приве-

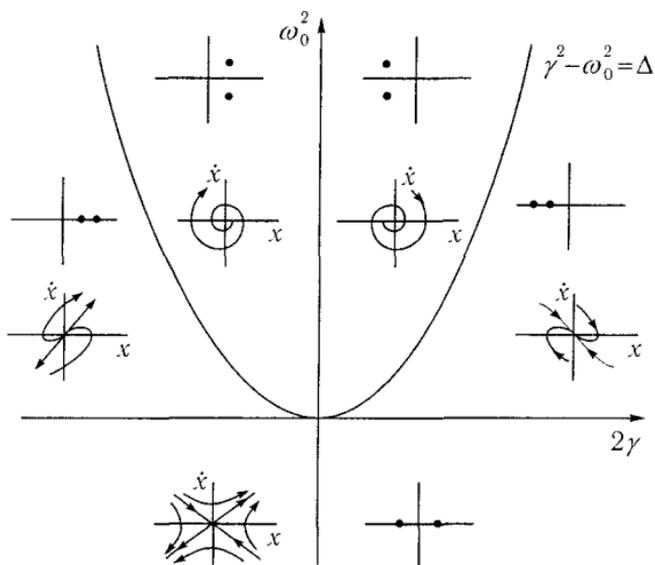


Рис. 1.7. Разбиение плоскости параметров  $2\gamma$ ,  $\omega_0^2$  на области с различным типом состояний равновесия (расположение корней на комплексной плоскости и соответствующие фазовые портреты)

дено разбиение плоскости параметров  $2\gamma$ ,  $\omega_0^2$  на области с различным типом состояний равновесия. Эта картинка дает почти все, что нужно знать о состояниях равновесия на плоскости.

### 1.3. Резонанс. Действие неперiodической внешней силы на осциллятор

До сих пор речь шла об автономном осцилляторе. Пусть теперь на линейный осциллятор действует периодическая внешняя сила. Исходным для анализа будет уравнение

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t, \quad (1.26)$$

где  $F_0$  — постоянная амплитуда внешней силы,  $\omega$  — ее частота.

Явление резонанса состоит в резком возрастании амплитуды установившихся колебаний, которое наступает при приближении частоты  $\omega$  гармонического внешнего воздействия к собственной частоте  $\omega_0$  осциллятора (в более общем случае — к частоте  $\omega_i$  одного из собственных колебаний анализируемой системы).

Рассмотрим снова осциллятор без затухания ( $\gamma = 0$ ). Общее решение уравнения (1.26) в этом случае имеет вид

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \rho \cos \omega t,$$

где  $\rho = F_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$ . Выберем в качестве начальных условий при  $t = 0$   $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(0) = 0$ . Тогда  $A = -\rho$ ,  $B = 0$ , и движение такого неавтономного осциллятора будет описываться функцией

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

Проследим, как происходит нарастание амплитуды колебаний осциллятора при резонансе, когда  $\omega \rightarrow \omega_0$ . В этом случае  $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega) \times (\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$  и

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \frac{\sin [(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)t/2} t \sin \omega_0 t.$$

При точном резонансе  $x(t) = (F_0/2\omega_0)t \sin \omega_0 t$ , т.е. при периодическом воздействии амплитуда колебания ведет себя как неперiodическая функция времени (рис. 1.8). Множитель  $t$  соответствует секулярному росту амплитуды, а скорость ее нарастания зависит от величины  $F_0$ .

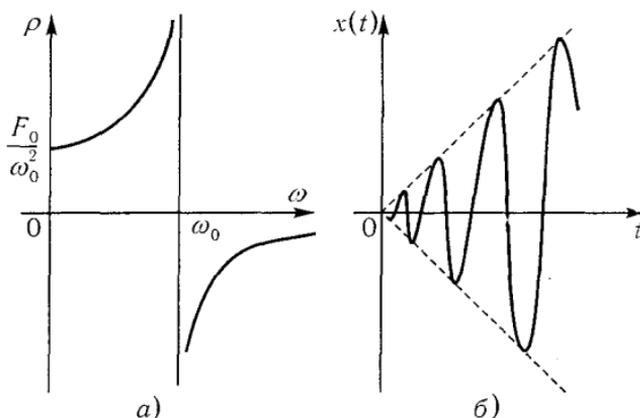


Рис. 1.8. Поведение решения уравнения (1.26) при резонансе (а) и осциллограмма при  $\gamma = 0$  (б)

Секулярный рост амплитуды — одно из простейших проявлений неустойчивости системы по отношению к внешним воздействиям. Та-

кая неустойчивость есть следствие идеализации исходной модели. В зависимости от ситуации модель должна учитывать либо нелинейные эффекты (система остается консервативной), либо линейную диссипацию (вязкость, трение, сопротивление и т. п.). В первом случае нелинейные эффекты приводят к сдвигу частоты и постепенному выходу из резонанса; это можно увидеть, если «подправить» уравнение (1.26) при  $\gamma = 0$  следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu \omega_n^2(x)x = F \cos \omega t,$$

где  $\omega_n^2(x) = \alpha x + \beta x^2 + \dots$ ;  $\alpha, \beta, \mu$  — постоянные. Анализ нелинейной задачи мы отложим до гл. 13. Сейчас же рассмотрим резонанс в осцилляторе с конечной добротностью. Используем метод комплексных амплитуд, т. е. будем считать, что все переменные — величины комплексные, а в решении примем во внимание лишь их действительную часть. Тогда уравнение (1.26) запишется в виде

$$\ddot{\bar{x}} + 2\gamma\dot{\bar{x}} + \omega_0^2\bar{x} = F_0 \exp(i\omega t),$$

где  $x = \operatorname{Re} \bar{x}$ . Если подождать достаточно долго, собственные колебания осциллятора затухнут; поэтому посмотрим лишь на вынужденное решение  $\bar{x} = \rho \exp[i(\omega t - \theta)]$ , где  $\rho$  и  $\theta$  нужно определить. После подстановки решения в (1.27) и разделения действительной и мнимой частей получим

$$\rho^2 = \frac{F_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансная кривая, изображенная на рис. 1.9, соответствует установившемуся стационарному процессу и определяет зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешней силы. Следует отметить, что теперь максимальная амплитуда колебаний достигается не при точном совпадении собственной частоты осциллятора с частотой вынуждающей силы, а смещается влево по оси частот на величину, зависящую от  $\gamma$  (рис. 1.9). Действительно, если  $\omega_0 = \operatorname{const}$ , то, продифференцировав выражение для  $\rho^2$  по  $\omega$ , находим, что максимум  $\rho$  имеет место при  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ . Если  $\omega \approx \omega_0$ , то очевидно, что  $\rho$  можно переписать так:

$$\rho^2 = \frac{F_0^2}{4\omega_0^2 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]}.$$

Тогда  $\rho_{\max}^2 = F_0^2 / (4\omega_0^2 \gamma^2)$  при  $\omega = \omega_0$ , а ширина резонансной кривой на уровне  $\rho_{\max}^2 / 2$  равна  $2(\omega - \omega_0) = 2\gamma$ . Разумеется, следует считать, что  $\gamma \ll \omega$ , поскольку  $\omega \approx \omega_0$ . Явление резонанса проявляется буквально на каждом шагу. Приведем несколько примеров.

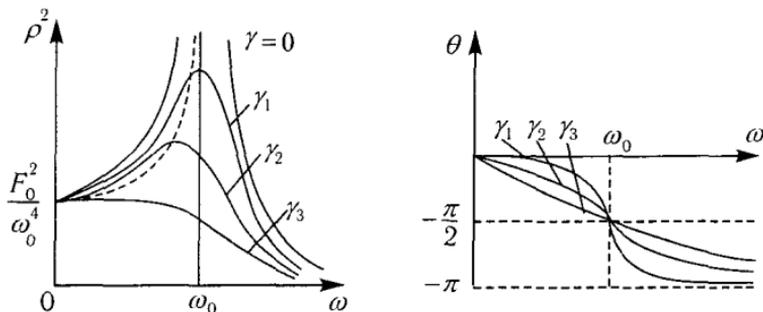


Рис. 1.9. Резонансные кривые и сдвиг фаз между внешней силой и смещением осциллятора в зависимости от частоты: штриховая кривая — траектория смещения максимума  $\rho^2$  в зависимости от  $\gamma$  ( $\gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1$ )

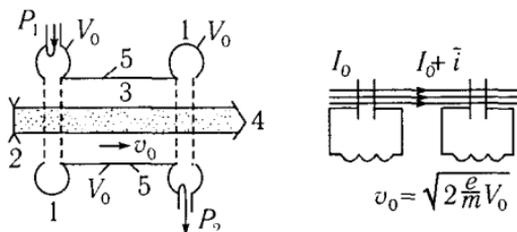


Рис. 1.10. Схема двухрезонаторного клистрона: 1 — входной и выходной объемные резонаторы; 2 — электронная пушка; 3 — электронный поток; 4 — коллектор, собирающий электроны; 5 — труба дрейфа;  $V_0$  — потенциал трубы дрейфа;  $P_1$  и  $P_2$  — мощности входного и выходного сигналов;  $I_0$  — постоянная составляющая тока пучка;  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона

Явление резонанса лежит в основе принципа действия сверхвысокочастотных электронных приборов, в которых используются высокодобротные объемные резонаторы. Типичными приборами этого класса являются клистроны, а простейшим из них можно назвать двухрезонаторный пролетный усилительный клистрон (рис. 1.10) [6]. Входной сигнал от внешнего источника с частотой  $\omega$ , близкой к собственной частоте  $\omega_0$  резонатора, воздействует на электронный пучок внутри высокочастотного зазора. Поэтому на входе в трубу дрейфа электроны

имеют разные скорости. Труба дрейфа — пространство, свободное от внешних высокочастотных полей. В этом пространстве из-за конечного времени пролета электроны, покинувшие резонатор с большими скоростями, догоняют электроны, вылетевшие раньше с меньшими скоростями. Это приводит к группированию электронов, образованию электронных сгустков — уплотнений и в результате — к возникновению переменной составляющей тока ([7], гл. II). Если частота возбуждения входного резонатора близка к собственной частоте выходного, то электронные сгустки будут возбуждать его резонансным образом, что приведет к усилению входного сигнала. Когда входной сигнал велик, в пучке начинают сказываться нелинейные процессы и возникают гармоники тока частоты  $\omega$ . Такие гармоники будут эффективно возбуждать колебания в выходном резонаторе опять-таки при выполнении условий резонанса во времени, которые для  $n$ -й гармоники запишутся в виде  $n\omega \approx n\omega_0$  ( $n$  — целое число). Это будет уже клистрон — умножитель частоты.

Использование явления резонанса чрезвычайно разнообразно. На его основе определяют, в частности, собственные колебания молекул в веществе. Молекулы некоторых газов, молекулы с электрическим дипольным моментом, парамагнитные атомы и ионы во внешнем магнитном поле и т. п. имеют такой набор энергетических уровней, которому соответствуют собственные (резонансные) частоты, лежащие в сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне радиоволн. Если такая молекула или атом облучаются электромагнитными СВЧ-колебаниями, частота которых удовлетворяет условию  $h\nu = \mathcal{E}_в - \mathcal{E}_н$  ( $h$  — постоянная Планка;  $\mathcal{E}_в$ ,  $\mathcal{E}_н$  — значения энергии на верхнем и нижнем уровнях), то может произойти резонансное поглощение.

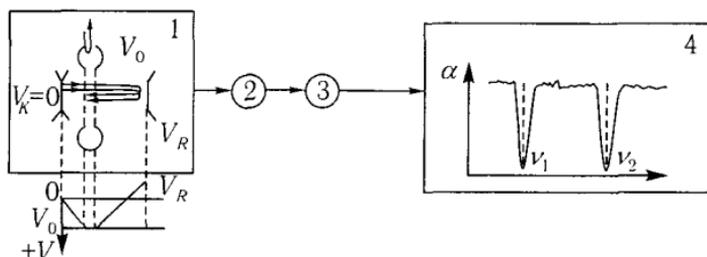


Рис. 1.11. Блок-схема радиоспектроскопа: 1 — отражательный клистрон; 2 — поглощающая ячейка с исследуемым веществом; 3 — приемник; 4 — регистрирующее устройство ( $\alpha$  — величина, характеризующая поглощение,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — резонансные частоты)

Для изучения поглощения СВЧ-колебаний атомами или молекулами применяют радиоспектроскопы (рис. 1.11) [8]. От генератора СВЧ-колебаний<sup>1</sup> излучение попадает в поглощающую ячейку — объемный резонатор (или отрезок волновода), заполненный исследуемым веществом. Когда частота сигнала, подаваемого от внешнего источника, совпадает в резонаторе или волноводе с резонансной частотой поглощения исследуемого вещества, то происходит поглощение СВЧ-излучения, которое приводит к ослаблению сигнала на выходе приемника и к появлению пиков на кривой зависимости поглощаемой мощности от частоты, т. е. максимумов поглощения спектральных линий. Исследование резонансных частот, ширины и формы спектральных линий позволяет определить структуру молекул, структуру атомных ядер и строение электронных оболочек атомов, устанавливать характер взаимодействия между атомами и молекулами в веществе и т. д. (подробнее см. [8]).

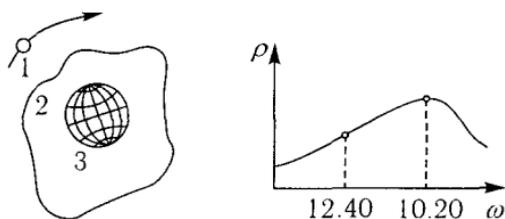


Рис. 1.12. К определению собственных параметров осциллятора Земля—атмосфера [12]:  $T = 2\pi/\omega = 12$  ч 40 мин;  $T_0 = 2\pi/\omega = 10$  ч 20 мин; 1 — Луна; 2 — атмосфера; 3 — Земля

Резонанс можно использовать и для глобальных измерений. С его помощью удалось, например, определить параметры осциллятора Земля—атмосфера. Внешней силой в этом случае служит Луна, которая вращается вокруг Земли и вызывает два раза в сутки приливы атмосферы с периодом 12 ч 40 мин. Очевидно, что если атмосферу сместить, то благодаря возвращающей гравитационной силе возникнут ее колебания относительно Земли. Для измерения параметров  $\gamma$  и  $\omega_0$  такого гло-

<sup>1</sup>В качестве генератора СВЧ-колебаний часто применяют отражательные клистроны (рис. 1.11), в которых модуляция электронов по скорости и передача энергии сгруппированным пучком электронов высокочастотному полю осуществляется в одном резонаторе благодаря тому, что электроны группируются в тормозящем статическом поле в пространстве резонатор—отражатель (отражатель — электрод с потенциалом  $V_R$  на рис. 1.11) и возвращаются в резонатор. Частоту колебаний можно плавно изменять, меняя напряжение на отражателе. Сигнал от клистрона, поступающий в ячейку, модулируется по частоте.

бального осциллятора достаточно найти  $\rho$  и  $\theta$  (см. рис. 1.9) при каком-нибудь одном значении  $\omega$ . Так и было сделано: измерили атмосферные приливы и время их задержки, что позволило по одной известной точке построить резонансную кривую  $\rho = \rho(\omega)$  (рис. 1.12). Непосредственно период колебаний  $T_0$  атмосферы удалось измерить в 1883 г. при взрыве вулкана Кракатау. Он оказался равным 10 ч 30 мин, в то время как период  $T_0$ , соответствующий рис. 1.12, равен 10 ч 20 мин.

Зададимся теперь вопросом: какую работу совершает внешнее поле над осциллятором? Работа, совершаемая силой  $F = F_0 \cos \omega t$  за время  $dt$ , равна  $F dx$ , а мощность  $P = F dx/dt$ . Из уравнения (1.26) следует, что  $P(t) = F\dot{x} = (\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot{x})\dot{x}$ . Если учесть, что  $x = \rho \cos(\omega t - \theta)$ ,  $\dot{x} = -\rho\omega \sin(\omega t - \theta)$ , а  $\ddot{x} = -\rho\omega^2 \cos(\omega t - \theta)$ , то средняя за период  $T = 2\pi/\omega$  мощность равна

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T [(\ddot{x} + \omega_0^2 x)\dot{x} + 2\gamma\dot{x}^2] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma\rho^2\omega^2 [1 - \cos(2\omega t - 2\theta)] d(\omega t) = \gamma\rho^2\omega^2. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\langle P(t) \rangle = 0$  при  $\gamma = 0$ . Казалось бы, странный результат? Однако следует помнить, что это — мощность потерь в стационарном режиме, т.е. когда осциллятор уже запас всю положенную ему энергию и внешняя сила идет лишь на покрытие диссипативных расходов. В этом и объяснение парадокса: при  $\gamma = 0$  внешняя сила вообще не совершает работы над осциллятором.

Как поведет себя гармонический осциллятор под действием произвольной непериодической внешней силы  $F(t)$ , когда движение описывается уравнением  $\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$ ? Воспользуемся для получения ответа методом неопределенных коэффициентов (методом множителей Лагранжа), полагая  $x(t) = A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t$ . Тогда

$$\dot{x}(t) = \dot{A}(t) \cos \omega t + \dot{B}(t) \sin \omega t - A(t)\omega \sin \omega t + B(t)\omega \cos \omega t,$$

где  $\dot{A} = dA/dt$  и  $\dot{B} = dB/dt$ . Так как мы ввели две произвольные функции, а уравнение всего одно, можно наложить на них произвольную связь. Из соображений арифметического удобства потребуем выполнения равенства  $A(t) \cos \omega t + B(t) \sin \omega t = 0$ . Тогда, следовательно,

$$\ddot{x}(t) = -\dot{A}(t)\omega \sin \omega t - A(t)\omega^2 \cos \omega t + \dot{B}(t)\omega \cos \omega t - B(t)\omega^2 \sin \omega t.$$

Подставляя  $\ddot{x}(t)$  и  $\omega^2 x(t)$  в исходное уравнение, окончательно получаем

$$-\dot{A}(t)\omega \sin \omega t + \dot{B}(t)\omega \cos \omega t = F(t).$$

Разрешим это уравнение и уравнение связи как систему уравнений относительно  $\dot{A}(t)$  и  $\dot{B}(t)$ . Элементарные преобразования дают

$$A(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad B(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Если, например,  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , как и в предыдущих задачах, то  $B(t) = \frac{F_0}{\omega} \left[ \frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t) \right]$  и при  $t \rightarrow \infty$  решение уходит в бесконечность — секулярный рост. Очевидно, что если с ростом  $t$  коэффициенты  $A(t)$  и  $B(t)$  остаются малыми, то резонанса не будет. Таким образом, условие отсутствия резонанса можно записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau) \begin{pmatrix} \sin \omega \tau \\ \cos \omega \tau \end{pmatrix} d\tau = 0.$$

Математически последнее соотношение означает, что функция  $F(t)$  не должна содержать собственных функций нашей задачи. Если же  $F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{0i} \cos \omega_i t$  (внешняя сила может быть представлена рядом Фурье) и одна из  $\omega_i$  совпадает с собственной частотой  $\omega$  осциллятора, то возникает резонанс. Все составляющие других частот в этом случае будут мало существенными.

## 1.4. Нормальные колебания.

### Аналогия с квантовой механикой.

### Операторы рождения и уничтожения

Вновь рассмотрим гармонический осциллятор, но будем исходить из его функции Гамильтона

$$\mathcal{H} = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}, \quad (1.27)$$

где  $q$  и  $p$  — координата и импульс соответственно, а  $\omega$  — собственная частота осциллятора. В гамильтоновой форме уравнения движения

осциллятора имеют вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\omega^2 q. \quad (1.29)$$

Умножим (1.28) на  $\pm i\omega$  и сложим полученные выражения с (1.29). Тогда приходим к уравнениям

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a, \quad (1.30)$$

$$\frac{da^*}{dt} = i\omega a^*, \quad (1.31)$$

где комплексно-сопряженные величины  $a$  и  $a^*$  введены соотношениями

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip). \quad (1.32)$$

Решения уравнений (1.30) и (1.31) можно записать следующим образом:

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\omega q(0) + ip(0)]e^{-i\omega t},$$

$$a^*(t) = a^*(0)e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}[\omega q(0) - ip(0)]e^{i\omega t}.$$

Уравнения (1.30) и (1.31) называются уравнениями нормальных колебаний,  $a(t)$  и  $a^*(t)$  часто называют просто нормальными колебаниями осциллятора [9, 10].

Заметим (это понадобится нам в дальнейшем), что наглядно  $a(t)$  и  $a^*(t)$  могут быть представлены как вращающиеся в разные стороны векторы одинаковой длины.

Как видно из (1.32),

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a^* + a), \quad p = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a^* - a),$$

следовательно, по определению (1.27) функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{pp^* + \omega^2 qq^*}{2} = \omega a^* a. \quad (1.33)$$

В квантовой механике для гамильтониана осциллятора имеет место, как известно, соотношение

$$\mathcal{H} = \hbar\omega(a^+ a + \frac{1}{2}), \quad (1.34)$$

где  $\hbar = h/(2\pi)$ , а величины  $a = (1/\sqrt{2\hbar\omega})(\omega q + ip)$  и  $a^+ = (1/\sqrt{2\hbar\omega}) \times (\omega q - ip)$  называют соответственно операторами уничтожения и рождения [11]. Добавочную по сравнению с классическим случаем энергию  $\hbar\omega/2$  называют нулевой энергией осциллятора. В классическом пределе, когда  $\mathcal{H} \gg \hbar\omega/2$ , мы будем не раз пользоваться выражением для числа квантов  $N = aa^+$  (из (1.34) видно, что  $N = \mathcal{H}/(\hbar\omega) - 1/2$ ). В заключение остановимся на интерпретации энергетического состоя-

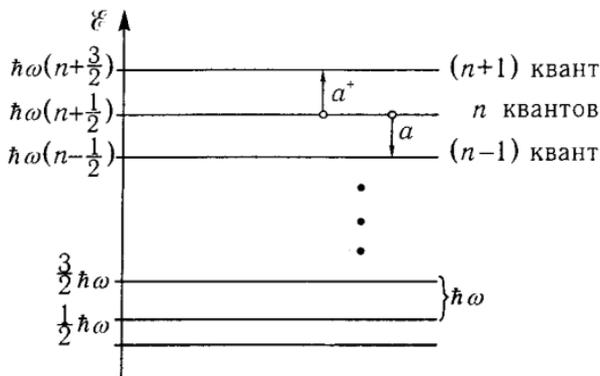


Рис. 1.13. К интерпретации операторов рождения ( $a^+$ ) и уничтожения ( $a$ ) и оператора числа частиц  $N$

ния осциллятора, которую предложил и обосновал Дирак [11]: гамильтониан описывает систему из  $n$  тождественных невзаимодействующих квантов, которые находятся в состояниях с энергией  $\hbar\omega$ . Мы уже говорили, что  $N$  характеризует число частиц. Теперь это должно стать понятным; каждое из собственных значений оператора  $N$  дает определенное число квантовых частиц, например, фотонов или фононов, о которых пойдет речь в гл. 3.

В квантовом случае, если на осциллятор, находящийся в состоянии с  $n$  квантами, подействовать оператором  $a^+$ , он перейдет в состояние с  $(n+1)$  квантами. Отсюда название оператора  $a^+$  — оператор рождения. Если же на осциллятор в состоянии с  $n$  квантами подействовать оператором  $a$ , то произойдет переход в состояние с  $(n-1)$  квантами; поэтому  $a$  — оператор уничтожения. Сказанное об операторах  $N$ ,  $a^+$  и  $a$  иллюстрирует рис. 1.13.

## ГЛАВА 2

# Колебания в системе двух связанных осцилляторов

### 2.1. Исходные уравнения

В предыдущей главе мы познакомились с явлением резонанса в его простейшей форме — внешним резонансом в линейном осцилляторе. Если система не столь проста, например, обладает несколькими степенями свободы, возможен другой эффект, такой, как внутренний резонанс — резонанс между отдельными подсистемами. Как мы увидим, в результате внутреннего резонанса отдельные подсистемы (их называют парциальными) обмениваются энергией друг с другом, т. е. это уже взаимодействие подсистем. Очевидно, что внешний резонанс можно рассматривать как частный случай внутреннего, если энергию одной из подсистем считать бесконечной. При этом будет уже не взаимодействие, а просто воздействие одной подсистемы на другую.

Вообще в системах уже с двумя степенями свободы проявляются многие эффекты, характерные и для более сложных систем. Поэтому данную главу мы посвятим достаточно подробному анализу системы двух связанных осцилляторов.

Воспользуемся обычно приводимыми простейшими примерами связанных осцилляторов (рис. 2.1). Это, в частности, два математических маятника длиной  $l_1$  и  $l_2$  с одинаковыми массами грузов  $m_1 = m_2 = m$ , находящиеся в поле тяготения. Маятники связаны невесомой пружиной с жесткостью  $k$  (рис. 2.1а). Движение такой консервативной системы с двумя степенями свободы в линейном приближении описывают уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\omega_1^2 x_1 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1), & \frac{dx_1}{dt} &= v_1, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\omega_2^2 x_2 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2), & \frac{dx_2}{dt} &= v_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\omega_{1,2}^2 = g/l_{1,2}$ . Эти уравнения могут быть получены либо из выражения для энергии системы, которое для малых отклонений маятников

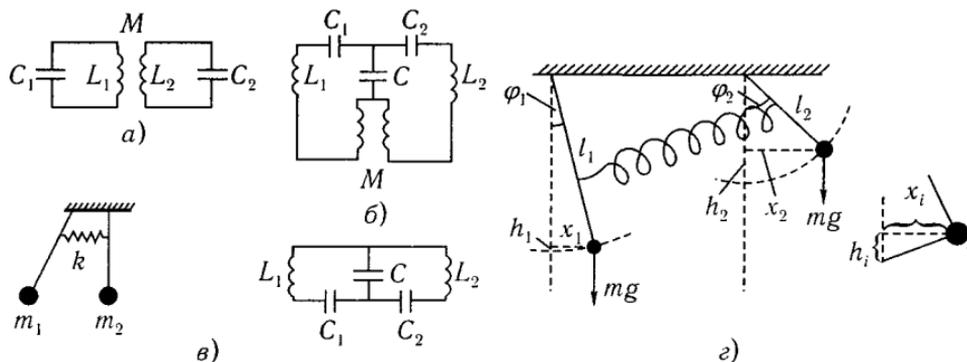


Рис. 2.1. Простейшие примеры электрических и механических систем двух связанных осцилляторов: *a* — инерциальная (индуктивная) связь; *б* — смешанная связь; *в* — силовая (емкостная) связь; *г* — два связанных маятника в поле тяготения

имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) \quad (2.2)$$

(первое слагаемое в  $\mathcal{H}$  очевидно, а второе и третье — соответственно потенциальная энергия грузов в поле тяжести и потенциальная энергия упругости пружины — энергия связи), либо из физических соображений, основанных на том, что ускорение маятника связано с существованием возвращающих сил гравитационного поля ( $-m\omega_{1,2}^2 x_{1,2}^2$ ) и пружины ( $k(x_{2,1} - x_{1,2})$ ). Обычно систему (2.1) переписывают в виде уравнений связанных осцилляторов:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{k}{m}(x_2 - x_1), \quad \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \frac{k}{m}(x_1 - x_2). \quad (2.3)$$

Прежде чем переходить к анализу системы уравнений (2.3), приведем один менее известный пример системы связанных осцилляторов. Этот пример связан с задачей, часто встречающейся в вакуумной и квантовой СВЧ-электронике: возбуждение резонансной колебательной системы заданными источниками, характер которых определяется свойствами активной среды (электронный поток, газовая смесь, парамагнитный кристалл и т. п.). Если резонатор пустой («холодный») и потерями можно пренебречь, то он ведет себя как совокупность несвязанных осцилляторов — нормальных мод. Возмущение комплексной диэлектрической проницаемости среды, которой заполнен резонатор,

приводит к тому, что моды становятся связанными [1, 2]. Объясняется это просто — все моды модулируют среду и таким образом через нее воздействует друг на друга. Рассмотрим такую модель: резонатор заполнен диэлектрической средой, комплексная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  которой под действием какого-либо возмущения изменилась согласно закону  $\tilde{\epsilon} = \epsilon + \delta\epsilon$  (такому изменению  $\epsilon$  соответствует возбуждающий ток с плотностью  $\mathbf{j} = i\omega\delta\epsilon\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}$  — соленоидальная часть электрического поля). В монографии [1] эта модель связывается с изменениями активной среды, находящейся в открытом резонаторе квантового генератора, под действием поля накачки. Тогда для коэффициентов разложения соленоидальной части возбужденного в резонаторе электрического поля получаются уравнения

$$\frac{d^2 A_s}{dt^2} + \omega_s^2 A_s = -\frac{d}{dt} \sum_r k_{sr} A_r, \quad (2.4)$$

где индекс  $s$  соответствует  $s$ -й собственной моде,  $k_{sr}$  — коэффициент связи, определяемый возмущением диэлектрической проницаемости [1].

В частности, если предположить, что резонансными будут собственные колебания с индексами  $s = 1$  и  $s = 2$ , то из (2.4) получаем систему двух уравнений

$$\ddot{A}_1 + \omega_1^2 A_1 + k_{12} \dot{A}_2 = 0, \quad \ddot{A}_2 + \omega_2^2 A_2 + k_{21} \dot{A}_1 = 0, \quad (2.5)$$

подобных (2.3).

## 2.2. Свободные колебания двух связанных осцилляторов

Изложим общую теорию малых колебаний двух связанных осцилляторов — линейной консервативной системы с двумя степенями свободы [3], для описания которой следует ввести две обобщенные координаты  $x$  и  $y$ . Уравнения движения такой системы удобно записать в лагранжевой форме [4]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = F_i, \quad (2.6)$$

где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , а  $F_i$  — обобщенные непотенциальные силы (для консервативных систем — это внешние силы, действующие на систему).

Для анализируемой системы функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (2.7)$$

где

$$T = A\dot{x}^2 + B\dot{y}^2 + 2H\dot{x}\dot{y}, \quad V = ax^2 + by^2 + 2hxy$$

суть кинетическая и потенциальная энергии системы,  $H$  и  $h$  — коэффициенты инерциальной и силовой связи.

Для автономной системы ( $F_{1,2} = 0$ ) уравнения (2.6) с учетом (2.7) можно записать следующим образом:

$$A\ddot{x} + ax + H\ddot{y} + hy = 0, \quad H\ddot{x} + hx + B\ddot{y} + by = 0. \quad (2.8)$$

Ограничимся случаем, когда  $T$  и  $V$  — положительно определенные квадратичные формы (это не выполняется, например, для системы, изображенной на рис. 2.2а). Необходимым и достаточным условием положительной определенности является выполнение неравенства  $A, B > 0$ ;  $a, b > 0$ ;  $AB - H^2 > 0$ ;  $ab - h^2 > 0$ .

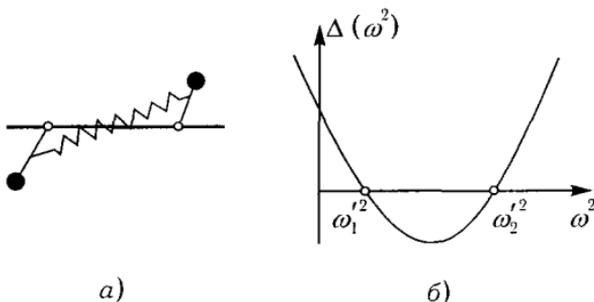


Рис. 2.2. Пример двух связанных маятников, для которых не выполняются условия положительной определенности  $T$  и  $V$  (а), и зависимость  $\Delta(\omega^2)$  при условии положительной определенности  $T$  и  $V$  (б)

Полагая, как обычно для линейных систем, что  $x, y = (X, Y)e^{i\omega t}$ , после подстановки в (2.8) находим

$$\begin{aligned} (-A\omega^2 + a)X + (-H\omega^2 + h)Y &= 0, \\ (-H\omega^2 + h)X + (-B\omega^2 + b)Y &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для того чтобы система однородных уравнений (2.9) имела нетривиальное решение, необходимо обращение в нуль ее детерминанта

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} -A\omega^2 + a & -H\omega^2 + h \\ -H\omega^2 + h & -B\omega^2 + b \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Из этого условия получаем следующее характеристическое уравнение для определения нормальных (собственных) частот системы:

$$\Delta(\omega^2) = \omega^4(AB - H^2) - \omega^2(aB + bA - 2Hh) + ab - h^2 = 0.$$

Условия положительной определенности  $T$  и  $V$  графически означают, что всегда есть две точки пересечения параболы  $\Delta(\omega^2)$  с осью абсцисс (рис. 2.2 б). Они соответствуют двум нормальным частотам системы  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ . Легко убедиться, что путем линейного преобразования от координат  $x$  и  $y$  можно перейти к новым координатам  $u_1$  и  $u_2$ , называемым нормальными, в которых система уравнений (2.8) запишется как уравнения двух независимых осцилляторов:

$$\ddot{u}_1 + \omega'_1 u_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 + \omega'_2 u_2 = 0. \quad (2.11)$$

Таким образом, любую консервативную линейную систему с  $n$  степенями свободы можно представить в виде набора  $n$  невзаимодействующих осцилляторов. Это означает, что линейная консервативная система с постоянными параметрами полностью характеризуется спектром нормальных частот (разумеется, чтобы иметь решение, надо задать начальные условия).

Нормальные частоты, характеризующие связанные осцилляторы, разумно сравнивать с парциальными частотами. Напомним, что парциальной системой, соответствующей данной координате, является система, получаемая из исходной «закреплением» всех остальных координат (на рис. 2.1 а положить равным нулю ток в катушке и напряжение на конденсаторе в одном из контуров, на рис. 2.1 в нужно закрепить один из маятников). Выбор парциальной системы определяется выбором координат (и наоборот). Уравнения для нахождения парциальных частот можно получить, например, из (2.8), убрав из них слагаемые, выражающие связь между системами, т. е. «занулив» коэффициенты связи ( $H = h = 0$ ). Тогда  $A\ddot{x} + ax = 0$ ,  $B\ddot{y} + by = 0$ , и парциальные частоты равны  $n_1 = \sqrt{a/A}$ ,  $n_2 = \sqrt{b/B}$ . Каково соотношение между парциальными и нормальными частотами? Из рис. 2.2 б ясно, что если  $\Delta(n_{1,2}^2) < 0$ , то частоты  $n_1$  и  $n_2$  лежат между  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ . Для парциальных частот

$$\Delta(n_{1,2}^2) = \begin{vmatrix} 0 & -Hn^2 + h \\ -Hn^2 + h & 0 \end{vmatrix} = -(Hn^2 + h)^2 < 0,$$

т. е. парциальные частоты всегда лежат между нормальными ( $\omega'_1 \leq n_{1,2} \leq \omega'_2$ ).

Итак, введение связи в консервативную систему может лишь увеличить интервал между собственными частотами линейной системы. Этот результат весьма важен, например, для определения констант колебаний молекул, которые характеризуются парциальными частотами. Наблюдается же спектр нормальных частот, поскольку любое исследуемое вещество представляет собой ансамбль связанных систем. Поэтому следует делать поправку на связь подсистем. Полученный нами результат об удалении собственных частот друг от друга при введении связи позволяет оценить расположение искомых парциальных частот.

В качестве примера вернемся к более подробному рассмотрению двух связанных — симпатических маятников, колебания которых описываются системой уравнений (2.3) при  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2$ . Закрепив одну из координат, определим парциальные частоты из соотношений  $n_1^2 = \omega_0^2 + k/m$ ,  $n_2^2 = \omega_0^2 + k/m$ . Таким образом, при данном выборе подсистем парциальные частоты равны. Чтобы выяснить, как маятники будут влиять друг на друга, попытаемся «угадать» нормальные колебания. Введем новые переменные  $u_1 = x_1 + x_2$  и  $u_2 = x_1 - x_2$ . В этих координатах система уравнений (2.3) при  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2$  переходит в уравнения двух независимых осцилляторов:

$$\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 + \left(\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}\right) u_2 = 0 \quad (2.12)$$

Следовательно, нормальные частоты суть  $\omega'_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}$ ,  $\omega'_1 = \omega_0$ , т.е. интервал между собственными частотами системы при введении связи действительно увеличивается (рис. 2.3), поскольку  $\omega_0 < \sqrt{\omega_0^2 + \frac{k}{m}} < \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}$ . Если  $u_2 = 0$ , то  $x_1 = x_2$  и оба маятника будут двигаться с «невозмущенной» частотой  $\omega'_1 = \omega_0$ , а пружина в этом случае не работает (синфазные колебания на рис. 2.4 а). Если  $u_1 = 0$ , то  $x_1 = -x_2$ , а маятники движутся в противофазе с частотой  $\omega'_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}$ , которая увеличилась из-за действия пружины (противофазные колебания на рис. 2.4 б). Когда связь слабая, ее естественно можно рассматривать как малое возмущение, а совместные колебания осцилляторов — как взаимодействие между ними. При условии слабой связи ( $k/(m\omega_0^2) \ll 1$ )  $\omega'_2 \approx \omega_0 + k/(m\omega_0)$ , а решения уравне-

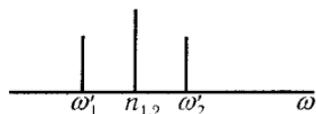


Рис. 2.3. Увеличение интервала между собственными частотами системы из двух одинаковых маятников при введении связи

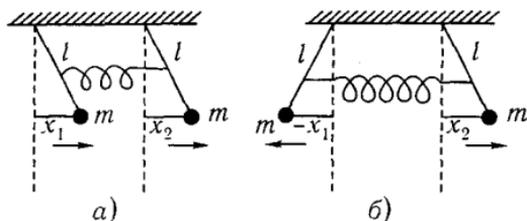


Рис. 2.4. Синфазные (а) и противофазные (б) колебания двух одинаковых маятников

ний (2.12) имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t, \\ u_2 &= a_2 \cos \left( \left[ \omega_0 + \frac{k}{m\omega_0} \right] t \right) + b_2 \sin \left( \left[ \omega_0 + \frac{k}{m\omega_0} \right] t \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пусть при  $t = 0$  выполняются равенства  $x_1 = x_2 = u_1 = u_2 = 0$ , а одному из маятников сообщена скорость  $\dot{x}_1 = C$ , так что, поскольку  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $\dot{u}_1 = \dot{u}_2 = C$ . Из соотношений (2.13) при таких начальных условиях находим, что

$$u_1 = \frac{C}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad u_2 = \frac{C}{\omega_0 + k/(m\omega_0)} \sin \left( \left[ \omega_0 + \frac{k}{m\omega_0} \right] t \right).$$

Нас интересует поведение каждого маятника, поэтому перейдем к исходным переменным:

$$x_{1,2} = \frac{C}{2\omega_0} \left( \sin \omega_0 t \pm \left[ 1 - \frac{k}{m\omega_0^2} \right] \sin \left\{ \left[ \omega_0 + \frac{k}{m\omega_0} \right] t \right\} \right).$$

Окончательно имеем

$$x_1 \approx \frac{C}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \left( \frac{k}{2m\omega_0} t \right), \quad x_2 \approx -\frac{C}{\omega_0} \cos \omega_0 t \sin \left( \frac{k}{2m\omega_0} t \right). \quad (2.14)$$

При выводе (2.14) мы пренебрегли  $k/(m\omega_0^2)$  по сравнению с единицей. В силу малости величины  $\alpha = k/(2m\omega_0)$  маятники совершают колебания с частотой  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно изменяется. Получились биения (рис. 2.5). Нетрудно видеть, что, например, при  $\alpha t = \pi/2$  первый маятник будет неподвижен ( $x_1 = \dot{x}_1 = 0$  в пренебрежении слагаемыми, содержащими  $k/(m\omega_0^2)$ ) и вся энергия перейдет ко второму маятнику.

Таким образом, связь приводит к тому, что происходит периодический обмен энергией между осцилляторами, причем период перекачки зависит от связи (полная перекачка энергии между осцилляторами имеет место через время, кратное  $T' \approx \pi/\alpha = 2\pi m\omega_0/k$ ). При малом значении  $\alpha$  мала энергия взаимодействия, т.е. энергия, вносимая одним осциллятором в другой; но даже при сколь угодно малой связи будет происходить полный обмен энергией. Правда, период перекачки будет при этом неограниченно расти ( $T' \sim 1/\alpha$ ). Казалось бы, при  $\alpha \rightarrow 0$  энергообмен должен прекращаться, а он просто замедляется. Дело здесь опять в резонансе: парциальные частоты маятников одинаковы, поэтому воздействие сколь угодно малой связи приводит к перекачке — эффективному обмену энергией. Такой резонанс называют внутренним резонансом (см. гл. 18), имея в виду, что взаимодействуют подсистемы одной системы.

При  $n_1 \neq n_2$  сколь угодно слабая связь влиять уже не будет. Поэтому для определения степени взаимодействия осцилляторов вводят параметр, учитывающий как связь, так и близость парциальных частот. Этот параметр называют связанностью и определяют формулой

$$\rho = \frac{k/m}{|n_1^2 - n_2^2|}.$$

В ряде случаев уравнения движения анализируемой системы удобно представить в специальных формах, называемых формой связанных колебаний и формой нормальных колебаний [5]. Остановимся кратко на их получении.

Умножим второе уравнение из (2.1) на  $\mp i\omega_1$  и результат сложим с первым уравнением из (2.1). Это дает

$$\frac{d}{dt}(v_1 \mp i\omega_1 x_1) = \mp i\omega_1(v_1 \mp i\omega_1 x_1) + \frac{k}{m}(x_2 - x_1),$$

или

$$\frac{da_1}{dt} = -i\omega_1 a_1 + \frac{k}{2\sqrt{m}}(x_2 - x_1), \quad \frac{da_1^*}{dt} = i\omega_1 a_1^* + \frac{k}{2\sqrt{m}}(x_2 - x_1), \quad (2.15)$$

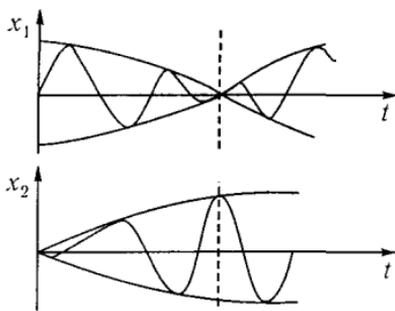


Рис. 2.5. Биения двух одинаковых связанных осцилляторов при слабой связи

где

$$a_1 = (v_1 - i\omega_1 x_1) \frac{\sqrt{m}}{2}, \quad a_1^* = (v_1 + i\omega_1 x_1) \frac{\sqrt{m}}{2}. \quad (2.16)$$

Все необходимые тождественные преобразования сделаем лишь с первым уравнением из (2.15):

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} = & -i\omega_1 a_1 + \frac{k}{2i\omega_2 m} \frac{\sqrt{m}}{2} (v_2 + i\omega_2 x_2) - \frac{k}{2i\omega_2 m} \frac{\sqrt{m}}{2} (v_2 - i\omega_2 x_2) - \\ & - \frac{k}{2i\omega_1 m} \frac{\sqrt{m}}{2} (v_1 + i\omega_1 x_1) + \frac{k}{2i\omega_1 m} \frac{\sqrt{m}}{2} (v_1 - i\omega_1 x_1). \end{aligned}$$

Вводя по аналогии с (2.16)

$$a_2 = (v_2 - i\omega_2 x_2) \frac{\sqrt{m}}{2}, \quad a_2^* = (v_2 + i\omega_2 x_2) \frac{\sqrt{m}}{2}, \quad (2.17)$$

окончательно получим

$$\frac{da_1}{dt} = c_{11} a_1 + c_{12} a_2 + c_{13} a_1^* + c_{14} a_2^*, \quad (2.18)$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11} = & -i\omega_1 \left( 1 + \frac{k}{2m\omega_1^2} \right), \quad c_{12} = i \frac{k}{2m\omega_2}, \\ c_{13} = & i \frac{k}{2m\omega_1}, \quad c_{14} = -i \frac{k}{2m\omega_2}. \end{aligned}$$

Предоставляя читателю проделать аналогичные преобразования с другими уравнениями, выпишем окончательный результат в матричной форме:

$$\frac{dA}{dt} = CA, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^* \\ a_2^* \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

причем  $c_{11} = -c_{33}$ ,  $c_{22} = -c_{44} = -i\omega_2 [1 + k/(2m\omega_2^2)]$ ,  $c_{13} = c_{21} = -c_{23} = -c_{31} = c_{41} = -c_{43}$ ,  $c_{12} = -c_{14} = c_{24} = c_{32} = -c_{34} = -c_{42} = ik/(2m\omega_2)$ .

Запись (2.19) называется формой связанных колебаний [5]. Этим названием подчеркивается, что коэффициенты связи  $c_{ij} \sim k$  связывают нормальные колебания  $a_1, a_2, a_1^*, a_2^*$  изолированных маятников. Отыскивая решение (2.19) в виде  $a_i(t) = a_i(0) \exp(i\omega t)$  и  $a_i^*(t) = a_i^*(0) \exp(i\omega t)$  ( $i = 1, 2$ ), получаем систему алгебраических уравнений для  $a_i(0)$  и  $a_i^*(0)$ , условие совместности которой приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} -i\omega + c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & -i\omega + c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & -i\omega + c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & -i\omega + c_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Корни этого уравнения суть частоты нормальных колебаний системы двух связанных маятников. При получении (2.19) и (2.20) мы не делали никаких допущений, кроме предположения о малости амплитуд и о гармоническом изменении координат во времени. В этом смысле уравнения (2.20) и (2.10) равнозначны. В гл. 1 отмечалось, что нормальные колебания  $a_i$  и  $a_i^*$  можно наглядно представить двумя векторами одинаковой длины, которые вращаются в разные стороны. Но тогда естественно предположить, что колебания, соответствующие противоположно вращающимся векторам, связаны слабо, т. е. в уравнениях (2.19) можно пренебречь всеми слагаемыми, связывающими  $a_i$  с  $a_i^*$ . Интуитивно ясно, что для реальности таких допущений нужно, чтобы осцилляторы были слабо связаны: энергия связи должна быть малой по сравнению с потенциальной энергией каждого осциллятора, т. е.  $k/(\omega^2 m_{1,2}) \ll 1$ . Кроме того, связанность осцилляторов должна быть большой. (Значительная часть энергии от одного осциллятора будет передаваться другому.) Для этого нужно, чтобы  $\omega_1 \approx \omega_2$ . Тогда из (2.19) получим

$$\frac{da_1}{dt} = c_{11}a_1 + c_{12}a_2, \quad \frac{da_2}{dt} = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 \quad (2.21)$$

и два аналогичных уравнения для  $a_1^*$  и  $a_2^*$ , а из (2.20) —

$$\begin{vmatrix} -i\omega + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -i\omega + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.22)$$

Решая (2.22) с учетом приведенных выше значений  $c_{ij}$  для связанной системы, которой соответствуют уравнения (2.21), находим следу-

ющие частоты нормальных колебаний:

$$\omega'_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{k}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2m\sqrt{\omega_1\omega_2}}\right)^2}. \quad (2.23)$$

При  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$  из (2.23) получаем  $\omega'_1 = \omega_0$  и  $\omega'_2 = \omega_0 + k/(m\omega_0)$ , что совпадает с ранее полученными выражениями. Системе уравнений для  $a_1^*$  и  $a_2^*$  соответствуют нормальные частоты  $-\omega'_1$  и  $-\omega'_2$ .

Решения (2.23) могут быть получены непосредственно из (2.20) при выполнении условий  $k/(m\omega_{1,2}^2) \ll 1$  и  $\omega_1 \approx \omega_2$ . Таким образом, пренебрежение в (2.19) слагаемыми, связывающими  $a_i$  и  $a_i^*$ , действительно эквивалентно предположениям о слабой связи и большой связанности.

Часто используется также другой общий метод нахождения иной формы уравнений для системы связанных осцилляторов — формы нормальных колебаний. Не останавливаясь на деталях, сформулируем суть метода в виде теоремы (см. [5]).

*Для системы  $n$  связанных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$\frac{dX}{dt} = MX, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

*существует линейное преобразование  $X = NY$  переменных  $X$  к переменным  $Y$  (где  $N$  — постоянная матрица), приводящее систему уравнений к виду*

$$\frac{dY}{dt} = \Omega'Y,$$

*где  $\Omega'$  — матрица, элементы которой, лежащие на главной диагонали, — нормальные частоты колебаний, а элементы матрицы  $Y$  — амплитуды нормальных колебаний.*

Заметим, что, как и в случае одиночного осциллятора, имеется аналогия с квантовой механикой, форма связанных колебаний аналогична рассмотрению двух связанных осцилляторов с помощью операторов рождения и уничтожения [6].

Если говорить о математическом подходе, наиболее удобном для анализа колебаний связанных осцилляторов, то в случае слабой связи предпочтение следует отдавать, по-видимому, форме связанных колебаний.

## 2.3. Возбуждение двух связанных осцилляторов внешней силой. Теорема взаимности

Пусть на систему двух связанных осцилляторов действуют внешние периодические силы. Тогда уравнения движения (2.6) с учетом (2.7) принимают вид

$$A\ddot{x} + ax + H\ddot{y} + hy = F_1, \quad H\ddot{x} + hx + B\ddot{y} + by = F_2. \quad (2.24)$$

Вначале пусть  $F_2 = 0$ ,  $F_1 = F \cos \Omega t$ . Нас интересует вынужденное решение системы уравнений (2.24), т. е.  $x, y = (X, Y) \cos \Omega t$ . Подставляя его в (2.24), получаем  $X(-A\Omega^2 + a) + Y(-H\Omega^2 + h) = F$ ,  $X(-H\Omega^2 + h) + Y(-B\Omega^2 + b) = 0$ , откуда уравнения резонансных кривых  $X = X(\Omega)$  и  $Y = Y(\Omega)$  можно представить в виде

$$X = \frac{F}{\Delta(\Omega^2)}(-B\Omega^2 + b), \quad Y = \frac{F}{\Delta(\Omega^2)}(-H\Omega^2 + h) \quad (2.25)$$

( $\Delta$  — детерминант, см. (2.10)). Резонансные кривые свидетельствуют о следующих интересных эффектах (рис. 2.6): 1) если частота внешней силы совпадает с одной из собственных нормальных частот системы, наступает резонанс, и амплитуды колебаний в обоих осцилляторах неограниченно растут; 2) если частота внешней силы, действующей на первый осциллятор, совпадает с парциальной частотой второго осциллятора  $\Omega = n_2$ , то первый осциллятор не колеблется ( $X = 0$ ); это явление называется динамическим демпфированием; 3) при частоте внешней силы  $\Omega_1 = \sqrt{h/H}$  второй осциллятор не колеблется ( $Y = 0$ ); это явление имеет место только в том случае, если связь носит смешанный характер, т. е. есть как силовая (емкостная), так и инерциальная (индуктивная) связь; при  $\Omega = \Omega_1$  происходит компенсация связи и колебания одного осциллятора не передаются другому.

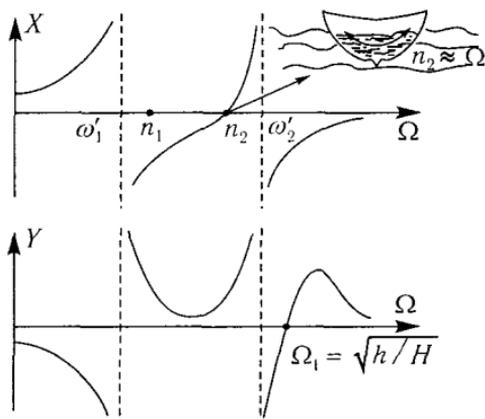


Рис. 2.6. Зависимость амплитуд вынужденных колебаний  $X$  и  $Y$  от частоты внешней силы (резонансные кривые)

Заметим, что динамическое демпфирование часто используется на практике для гашения вредных колебаний [8]. Например, для уменьшения качки танкера при волнении на море в его танки закачивают воду, уровень которой подбирается таким образом, чтобы парциальная частота колебаний массы воды в танках приближалась к частоте ударов волны о борт (рис. 2.6). Тогда сам танкер качается существенно меньше.

Пусть теперь внешняя сила действует не на первый, а на второй осциллятор, т. е.  $F_1 = 0$ , а  $F_2 = F \cos \Omega t$ . В этом случае, отыскивая, как и ранее, вынужденное решение (2.24), получаем

$$X = \frac{F}{\Delta(\Omega^2)}(-H\Omega^2 + h), \quad Y = \frac{F}{\Delta(\Omega^2)}(-A\Omega^2 + a). \quad (2.26)$$

Из сравнения (2.25) и (2.26) следует важный вывод: при воздействии на один осциллятор внешней силы второй будет колебаться так же, как первый при воздействии внешней силы на второй. Это — известная теорема взаимности. Она справедлива для линейных систем с любым числом степеней свободы, в том числе и для распределенных систем, а с соответствующими изменениями в формулировке — и для сплошных сред. В электродинамике, например, теорема взаимности широко используется в теории антенн. В применении к идеализированным антеннам — элементарным колеблющимся диполям — ее можно сформулировать следующим образом [7].

Пусть диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}_1$ , расположенный в точке 1, возбуждает электромагнитное поле  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$ , а диполь  $\mathbf{p}_2$ , находящийся в точке 2, — поле  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{H}_2$ . Тогда теорема взаимности выражается равенством

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{E}_2(1) = \mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2), \quad (2.27)$$

где  $\mathbf{E}_2(1)$  — значение поля  $\mathbf{E}_2$  в точке нахождения диполя с электрическим моментом  $\mathbf{p}_1$ ;  $\mathbf{E}_1(2)$  — значение поля  $\mathbf{E}_1$  в точке 2, где расположен диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}_2$ . При равенстве абсолютных значений дипольных моментов диполь 2 воздействует на диполь 1 так же, как диполь 1 на диполь 2.

Если, например,  $\mathbf{p}_1$  соответствует передающей антенне, расположенной вблизи земли, а нужно найти поле, создаваемое этим диполем высоко над землей, в точке 2, где находится летательный аппарат с приемной антенной на борту, то можно решить вспомогательную задачу, в которой передающая антенна — диполь  $\mathbf{p}_2$  — расположена в точке 2, а приемная антенна — в точке 1, и воспользоваться теоремой взаимности [7].

# ГЛАВА 3

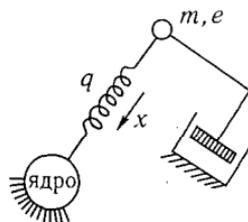
## Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов

### 3.1. Классическая теория дисперсии

Наиболее важны с точки зрения приложений два случая: почти тривиальный, когда осцилляторы тождественны, и существенно более интересный, когда осцилляторы имеют разброс по частотам или коэффициентам затухания. Рассмотрение поведения ансамбля идентичных невзаимодействующих осцилляторов составляет основное содержание классической теории дисперсии света. Нетождественность же осцилляторов необходимо учитывать, например, при анализе рассеяния электромагнитных волн в нагретых газах, где разброс молекул по скоростям приводит к доплеровскому сдвигу их частот относительно частоты поля.

Механическая теория дисперсии света фактически была построена Максвеллом в 1869 г. как решение экзаменационной задачи, а затем уже в 1871 г. Зельмейер вновь получил формулу, связывающую показатель преломления  $n$  и частоту  $\omega$ , в механической теории эфира [1].

Рис. 3.1. Механическая модель атома:  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона;  $x$  — его координата;  $q$  — жесткость пружины; справа — устройство, создающее силу, пропорциональную скорости [2]



Рассмотрим среду, состоящую из идентичных осцилляторов, не взаимодействующих друг с другом, например, среду, представляющую собой ансамбль независимых атомов, в каждом из которых всего один электрон. Механическая модель атома изображена на рис. 3.1.

В рамках этой модели электрон представляется линейным осциллятором с затуханием, колебания которого под действием внешнего поля

описываются уравнением

$$m\ddot{x} + g_1\dot{x} + qx = eE \exp^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

где  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона,  $-g_1\dot{x}$  — сила «трения», которая введена для учета поглощения излучения,  $-qx$  — квазиупругая возвращающая сила,  $E$  — амплитуда напряженности внешнего электрического поля, действующего на электрон<sup>1</sup>. Вообще говоря, электроны и ионы колеблются в неоднородном поле электромагнитной волны  $E \sim E_0 \exp(-ikx)$  ( $k$  — волновое число). Однако здесь мы пренебрежем зависимостью поля от координаты, считая, что амплитуда колебаний электрона много меньше длины даже оптической волны. Тогда, если ввести обозначения  $2\gamma = g_1/m$  (потери в атомном осцилляторе),  $q/m = \omega_0^2$  ( $\omega_0$  — собственная частота осциллятора) и  $F_0 = (e/m)E$ , то приходим к уравнению, аналогичному (1.26). Для вынужденных колебаний осциллятора из (3.1) с учетом введенных обозначений находим

$$x = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma)}. \quad (3.2)$$

Нас интересует зависимость от частоты диэлектрической проницаемости или поляризуемости среды, представляющей набор осцилляторов. Поляризуемость элементарного осциллятора равна  $\alpha = p/E$ , где  $p = ex$  — дипольный момент одного атома, приобретенный в электрическом поле. Вектор поляризации среды, содержащей в единице объема  $N$  атомов,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}N = \alpha\mathbf{E}N$ . Отсюда, имея в виду, что электрическое смещение  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\alpha N)\mathbf{E}$ , находим диэлектрическую проницаемость среды  $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha N$  (единица означает диэлектрическую проницаемость вакуума), зависимость которой от частоты находится из (3.2).

Для действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega)$  получается

$$\operatorname{Re}\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 N (\omega_0^2 - \omega^2)}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2]}, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{Im}\epsilon(\omega) = -\frac{4\pi e^2 N \cdot 2\gamma\omega}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2]}. \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Следует заметить, что напряженность  $E$  действующего на электрон электрического поля отличается от фигурирующего в уравнениях Максвелла среднего макроскопического поля. Однако, например, в случае не очень плотных газов можно считать эти поля совпадающими [1].

Если ввести комплексный показатель преломления формулой  $\sqrt{\varepsilon} = n - i\kappa$  ( $n$  — вещественный показатель преломления,  $\kappa$  — показатель затухания среды), то

$$n^2 - \kappa^2 = \operatorname{Re} \varepsilon(\omega), \quad 2n\kappa = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega).$$

При  $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$  можно считать, что  $n^2 = \varepsilon = [\operatorname{Re} \varepsilon(\omega)]_{\gamma=0}$ . Тогда приходим к известной формуле Зельмейера

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Из соотношений (3.3) и (3.4) следует (рис. 3.2), что в той области частот, где поглощение мало, показатель преломления растет с частотой (нормальная дисперсия). В области частот, где поглощение велико, имеет место аномальная дисперсия,  $n(\omega)$  падает с частотой.

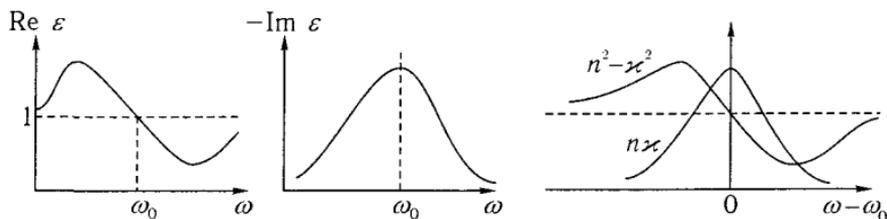


Рис. 3.2. Зависимость диэлектрической проницаемости от частоты

В рассматриваемой модели атом представляет собой колеблющийся диполь, который всегда испускает (рассеивает) электромагнитное излучение с амплитудой  $A_p$ , пропорциональной  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , т. е.

$$A_p \sim -\frac{e\omega^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

при  $\gamma = 0$ . Поскольку интенсивность рассеянного излучения  $I_p$  пропорциональна квадрату его амплитуды, получаем, что

$$I_p \sim \text{const} \cdot \left[ \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 - 1 \right]^{-2}. \quad (3.5)$$

Проанализируем (3.5) в предельных случаях, когда внешнее излучение имеет частоту  $\omega$ , либо много большую, либо много меньшую  $\omega_0$ . В вл-

димой области спектра, когда  $\omega \ll \omega_0$ ,

$$I_p \sim \text{const} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4, \quad (3.6)$$

что соответствует так называемому рэлеевскому рассеянию. Эта формула позволяет, в частности, дать вариант ответа на вопрос: почему небо голубое? Действительно, ведь частота голубого света больше частоты красного и, хотя в собственном излучении Солнца синий участок спектра достаточно слабый, рассеивается голубой свет значительно сильнее, чем красный<sup>1</sup>. Молекулярное рассеяние света широко используется для диагностики прозрачных сред, например, его можно использовать для определения размера, формы и средней скорости макромолекул или достаточно крупных бактерий в растворе [6].

В другом предельном случае, когда  $\omega \gg \omega_0$  и интенсивность  $I_p \sim \text{const}$ , что соответствует, например, столкновению быстрых электронов или взаимодействию рентгеновского излучения с веществом, получаем

$$I_p = I_0. \quad (3.7)$$

Интенсивность излучения не зависит от частоты (рассеяние Томсона). Как известно, в электронном микроскопе изображение получается после столкновения быстрых электронов с исследуемыми образцами (электрону ставится в соответствие волна де Бройля). При этом формула (3.7) сразу объясняет «неумение» электронного микроскопа «различать» цвета.

Рассмотрим, наконец, соотношения (3.3) и (3.4) в так называемом пределе Лоренца, когда частота  $\omega$  внешнего воздействия близка к собственной частоте  $\omega_0$  атома (частота возбуждения близка к линии поглощения в спектре). Будем считать, что  $|\omega - \omega_0| \ll \omega + \omega_0$ , т. е.  $\omega \approx \omega_0$  и  $(\omega_0 - \omega)^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ . Тогда

$$\text{Re} \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m\omega_0} \left[ \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \right], \quad (3.8)$$

$$\text{Im} \varepsilon(\omega) = -\frac{2\pi e^2 N}{m\omega_0} \left[ \frac{\beta}{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2} \right], \quad (3.9)$$

<sup>1</sup>Напомним, что, несмотря на правильность формулы (3.6), теория рассеяния света Рэля не учитывает того, что свет в действительности рассеивается на неоднородностях среды — флуктуациях плотности молекул в малых объемах, а не на самих молекулах, как считал Рэлей [1].

где  $\beta = 1/\tau$ , а  $\tau = 1/\gamma$  — характерное время релаксации. Выражения, стоящие в квадратных скобках в формулах (3.8) и (3.9), часто встречаются в различных задачах спектроскопии и носят название лоренцева контура спектральной линии. Выражение в квадратных скобках (3.9) называют контуром поглощения, причем ширина лоренцевой линии позволяет измерять время релаксации исследуемого вещества. Заметим, что модель среды из идентичных невзаимодействующих осцилляторов является весьма универсальной. Действительно, рассматривая вместо «электрона на пружине» «ядро на пружине», можно вычислить прочность химических связей между атомами в молекуле. Для этого нужно определить частоты  $\omega_0$ , которые лежат в инфракрасной области спектра [3].

В реальной ситуации атомы-осцилляторы не тождественны друг другу. Приведет ли это к качественно новым эффектам? Поскольку диэлектрическая проницаемость среды — это сумма проницаемости вакуума и откликов каждого из невзаимодействующих осцилляторов на действующее поле, найдем суммарный отклик:

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi e_k^2 N_k}{m_k [(\omega_k^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma_k]}. \quad (3.10)$$

В классических (не квантовых) моделях вещества предполагается, что среда состоит из электронов и ионов — частиц, имеющих различные заряды  $e_k$ , массы  $m_k$  и концентрации  $N_k$ , которые и составляют ансамбль невзаимодействующих затухающих линейных осцилляторов с разными собственными частотами  $\omega_k$  и коэффициентами затухания  $\gamma_k$ .

Изложенная классическая теория дисперсии и поглощения является, очевидно, модельной, причем в модель привнесены квазиупругие силы  $-qx$  и силы трения  $-g\dot{x}$ , которых нет в атомах и молекулах: все силы, действующие внутри них, имеют электрическую природу.

Что же дает квантовомеханическая теория дисперсии и поглощения? Пусть электромагнитная волна действует на совокупность невзаимодействующих нейтральных атомов, фиксированных в пространстве и содержащих только по одному электрону (простейшая модель твердого тела). Используя нестационарную теорию возмущений [4], для вещественной части диэлектрической проницаемости можно получить

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2}, \quad (3.11)$$

где  $f_k$  — сила осциллятора для перехода в  $k$ -е состояние, причем

$$f_k = \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right) \hbar \omega_k |x_{0k}|^2,$$

$ex_{0k} = \int \Psi_0^* ex \Psi_k d\mathbf{r}$  — матричный элемент компоненты дипольного момента электрона в направлении вектора напряженности электрического поля;  $\Psi_0(\mathbf{r})$  — волновая функция основного состояния атома,  $\Psi_k(\mathbf{r})$  — волновая функция возбужденного состояния атома.

При выводе (3.11) не учитывались эффекты естественного радиационного затухания уровней, уширения спектральных линий из-за примесей и т. д. Феноменологический учет подобных факторов приводит к формуле (3.10), если в ней заменить  $N_k$  на  $Nf_k$  и считать  $e_k = e$ ,  $m_k = m$ .

### 3.2. Колебания в ансамбле нетождественных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения

Рассмотрим поведение среды из невзаимодействующих осцилляторов, имеющих заданную функцию распределения по частотам. Это, например, молекулы газа, имеющие разные скорости. Если свойства осцилляторов меняются непрерывно, то проницаемость среды может быть получена из рассуждений, аналогичных использованным при выводе (3.10), но с помощью интегрирования. В том случае, когда мы различаем осцилляторы лишь по собственной частоте  $\omega'$ , поляризуемость среды, содержащей в единице объема  $N$  атомов, запишется так:

$$\chi = \frac{\alpha_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(\omega') d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2) + 2i\omega g(\omega')}, \quad (3.12)$$

где  $\alpha_0 = \pi e^2/m$ , а  $N(\omega')$  — функция распределения числа осцилляторов по собственным частотам  $\omega'$ , которая и определяет свойства «газа» из различающихся элементарных осцилляторов.

Для вычисления  $\chi$  нужно задать распределение  $N(\omega')$ . Пусть  $N(\omega')$  — часто встречающееся распределение Лоренца (3.9):

$$N(\omega') = \beta [(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2]^{-1}, \quad (3.13)$$

где  $\beta$  — ширина лоренцевой линии (рис. 3.3). Проинтегрировав (3.12) с учетом (3.13), обнаружим, что среда ведет себя как усредненный осциллятор, свойства которого определяются функцией распределения.

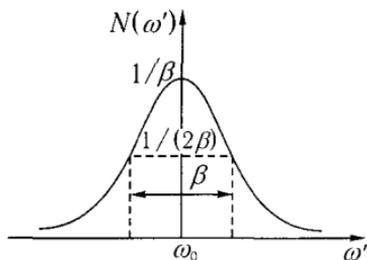


Рис. 3.3. Лоренцев контур линии:  $\omega_0$  — частота, на которой  $N(\omega')$  достигает максимального значения  $1/\beta$ ; ширина лоренцевой линии ( $\Delta\omega' = \beta$ ) определяется на уровне  $1/2\beta$

С помощью теоремы о вычетах возьмем интеграл [5, 7]

$$\chi = \frac{\alpha_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta d\omega'}{[(\omega'^2 - \omega^2) + 2i\omega g][(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2]}, \quad (3.14)$$

переходя к интегрированию по контуру и полагая для простоты  $g$  не зависящим от  $\omega'$ . Выберем в качестве контура интегрирования контур, охватывающий верхнюю полуплоскость. Найдем полюсы подынтегральной функции в (3.14), которые совпадают с нулями знаменателя и лежат в верхней полуплоскости. Имеем: 1)  $\omega' = \omega_0 + i\beta$  (так как выбранный контур охватывает верхнюю полуплоскость, значение  $\omega' = \omega_0 - i\beta$  нас не интересует); 2)  $\omega' = -(\omega^2 - 2i\omega g)^{1/2}$  (значение  $\omega' = (\omega^2 - 2i\omega g)^{1/2}$  лежит в нижней полуплоскости).

Найдем вычеты для интеграла (3.14). Поскольку

$$p(\omega') = [(\omega'^2 - \omega^2) + 2i\omega g][(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2],$$

$$p'(\omega')|_{\omega'=\omega_0+i\beta} = \left\{ 2\omega'[(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2] + 2(\omega' - \omega_0) \times \right.$$

$$\left. \times [(\omega'^2 - \omega^2) + 2i\omega g] \right\}_{\omega'=\omega_0+i\beta} = 2i\beta[(\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2) + 2i\omega(\beta + g)],$$

то

$$\text{Выч}_{\omega'=\omega_0+i\beta} f(\omega') = \frac{\alpha_0}{2\pi i} [(\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2) + 2i\omega(\beta + g)]^{-1}.$$

Аналогично

$$\text{Выч}_{\omega'=-\sqrt{\omega^2-2i\omega g}} f(\omega') =$$

$$= -\frac{\beta\alpha_0}{2\pi\sqrt{\omega^2-2i\omega g}} [\omega^2 + \omega_0^2 + \beta^2 + 2\omega_0\sqrt{\omega^2-2i\omega g} - 2i\omega g]^{-1}.$$

Если  $\beta$  — малая величина ( $\beta \ll \omega_0$ ) и  $\omega \rightarrow \omega_0$ , то

$$\text{Выч}_{\omega'=\omega_0+i\beta} f(\omega') = \frac{\alpha_0}{2\pi i} [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega(\beta + g)]^{-1},$$

а

$$\begin{aligned} \text{Выч}_{\omega'=-\sqrt{\omega^2-2i\omega g}} f(\omega') &= \\ &= -\frac{\beta\alpha_0}{2\pi\sqrt{\omega^2-2i\omega g}} [\omega^2 + \omega_0^2 + 2\omega_0\sqrt{\omega^2-2i\omega g} - 2i\omega g]^{-1} \sim \beta \ll \omega_0. \end{aligned}$$

В частности, при  $\omega = \omega_0$  и  $g = 0$

$$\text{Выч}_{\omega'=\omega_0+i\beta} f(\omega') = -\frac{\alpha_0}{2\pi} \frac{1}{2\omega_0\beta},$$

$$\text{Выч}_{\omega'=-\sqrt{\omega^2-2i\omega g}} f(\omega') = -\beta \frac{\alpha_0}{2\pi} \frac{1}{4\omega_0^3};$$

вторым вычетом можно пренебречь по сравнению с первым.

Окончательно будем иметь [7]

$$\chi = 2\pi i \sum \text{Выч} = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega(g + \beta)}. \quad (3.15)$$

Из этой формулы следуют замечательные выводы: 1) поляризуемость среды, состоящей из осцилляторов с лоренцевым распределением по частотам, получается такой, как будто это ансамбль тождественных осцилляторов с собственной частотой  $\omega_0$  и коэффициентом затухания  $g + \beta$ ; 2) даже если среда чисто консервативная ( $g = 0$ ), «усредненный по ансамблю» осциллятор все равно обладает затуханием  $\beta$ . Как объяснить эти эффекты? Вспомним, что осциллятор можно представить в виде вектора, вращающегося на плоскости с частотой  $\omega'$  подобно стрелке часов, движущейся по циферблату. Если все осцилляторы одинаковы, и мы запустим их в одной фазе, то суммарный отклик такой системы на действующее поле равен произведению числа осцилляторов на отклик одного осциллятора. Но если осцилляторы немного отличаются друг от друга по частоте, то, даже запущенные в одной фазе, они через достаточно большое время равномерно распределятся по циферблату и каждому отклику найдется противофазный отклик, так что общий отклик системы на внешнее воздействие будет равен нулю. Характерное время, за которое векторы разойдутся на  $\pi$  и суммарные колебания в системе затухнут, равно  $\tau \sim 1/\beta$ .

Если осцилляторы тождественны, но связаны между собой, а связь произвольна, то, переходя к нормальным частотам, мы вновь получим «газ» невзаимодействующих осцилляторов, но с различными частотами. Таким образом, задача сведется к предыдущей.

## ГЛАВА 4

# Колебания в упорядоченных структурах. Предельный переход к сплошной среде. Волны. Дисперсия

### 4.1. Общие замечания

«Простейшее твердое тело — это, по-видимому, твердый аргон. Он состоит из правильно расположенных нейтральных атомов с крепко связанными электронными оболочками. Эти атомы удерживаются вблизи друг друга силами Ван-дер-Ваальса, которые действуют в основном между ближайшими соседями в решетке. Физические процессы в таком кристалле связаны с тепловым движением атомов вблизи своих идеализированных положений равновесия. Для простейшего описания такого движения используется модель Эйнштейна, согласно которой каждый атом колеблется подобно простому гармоническому осциллятору в потенциальной яме, образованной силами его взаимодействия с соседями». Так начинается в книге Дж. Займана [1] глава «Колебания решетки».

Решетка представляет собой самый наглядный объект, который естественно назвать упорядоченной структурой из осцилляторов. Простыми примерами модели упорядоченной структуры, в которой тождественные осцилляторы связаны между собой не любым, а определенным образом, являются: линейная цепочка из одинаковых частиц, расположенных вдоль прямой на равных расстояниях друг от друга (одномерная решетка из одинаковых частиц); механическая система, состоящая из набора маятников; цепочка из  $LC$ -элементов; бесконечный ряд одинаковых акустических резонаторов; цепочка, образованная из магнитов, и др.

В предыдущей главе мы пришли к выводу, что совокупность независимых нейтральных атомов, фиксированных в пространстве (простейшая модель твердого тела), ведет себя в отношении дисперсии и поглощения как ансамбль классических невзаимодействующих неодинаковых осцилляторов. Теперь модель будет заведомо иной. Наиболее

грубую модель, соответствующую описанному Займаном твердому аргону, можно представить как систему правильно расположенных в пространстве шариков, связанных друг с другом пружинами. Если один шарик сместить из положения равновесия, то будут смещаться и соседние — по всей упорядоченной структуре побежит волна. Волны, бегущие в твердом теле или другой упорядоченной структуре, характеризуются длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\omega$ , которые удовлетворяют закону дисперсии

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad (4.1)$$

$k = 2\pi/\lambda$ . Из (4.1) следует, что волна с определенным волновым вектором  $\mathbf{k}$  имеет и определенную частоту; это позволяет рассматривать волну как осциллятор, совершающий колебания с частотой  $\omega(\mathbf{k})$ . Тогда мы вновь приходим к аналогии между поведением твердого тела и «газа» осцилляторов, движущихся независимо друг от друга. Правда, в движении нового элементарного осциллятора участвуют все атомы твердого тела. Волне (осциллятору) можно поставить в соответствие квазичастицу с энергией  $\mathcal{E} = \hbar\omega(\mathbf{k})$  и импульсом  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Таким образом, анализ поведения колебаний в упорядоченных структурах приводит нас к одному из самых интересных понятий современной физики — понятию квазичастиц [16].

## 4.2. Колебания в упорядоченных структурах (цепочки из связанных частиц и из тождественных связанных осцилляторов)

Начнем с вывода уравнения движения безграничной одномерной решетки из одинаковых равноудаленных частиц (рис. 4.1). Рассмотрим продольные колебания цепочки.

Как видно из рис. 4.1, координата  $n$ -й частицы в данный момент времени после возмущения равна

$$x_n = na + x'_n, \quad (4.2)$$

где  $x'_n$  — отклонение от положения равновесия (будем далее предполагать, что  $x'_n \ll a$ ). Расстояние между двумя произвольными частицами ( $n$ -й и  $(n+l)$ -й) составит

$$X_{n,n+l} = x_{n+l} - x_n = la + x'_{n+l} - x'_n. \quad (4.3)$$

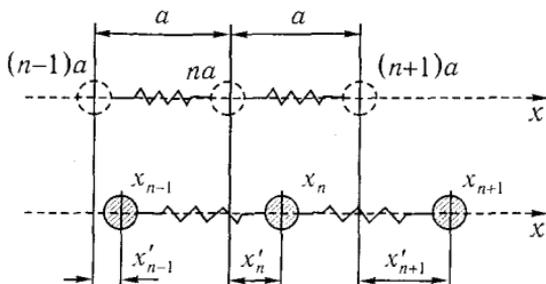


Рис. 4.1. Одномерная «решетка» состоящая из одинаковых равноудаленных частиц; сверху — решетка до возмущения; внизу — после возмущения (продольные колебания)

Если считать, что потенциальная энергия, на основании которой можно найти силу взаимодействия двух произвольных частиц, зависит только от расстояния между ними  $|x_{n+l} - x_n|$  (будем обозначать ее через  $W(X) = W(|x_{n+l} - x_n|)$ ), то для потенциальной энергии решетки можно записать следующее выражение:

$$W = \sum_n \sum_{l>0} W(|x_{n+l} - x_n|). \quad (4.4)$$

Рассмотрим линейные колебания, т.е. учтем малость  $x'_n$ . Тогда, разлагая  $W(|x_{n+l} - x_n|)$  в ряд Тейлора и ограничиваясь членами второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} W(x_{n+l} - x_n) &= \\ &= W(la) + (x'_{n+l} - x'_n)W'(la) + \frac{1}{2}(x'_{n+l} - x'_n)^2W''(la), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $W'(la) = \left. \frac{dW}{dX} \right|_{X=la}$ ,  $W''(la) = \left. \frac{d^2W}{dX^2} \right|_{X=la}$ .

Подставляя (4.5) в (4.4), запишем выражение для потенциальной энергии цепочки в виде

$$W = \sum_n \sum_{l>0} [(x'_{n+l} - x'_n)W'(la) + \frac{1}{2}(x'_{n+l} - x'_n)^2W''(la)] + W_0, \quad (4.6)$$

где  $W_0 = \sum_n \sum_{l>0} W(la)$ . Зная  $W$ , легко вычислить силу, действующую на  $p$ -ю частицу, поскольку  $F_p = -\partial W / \partial x'_p$ . Дифференцирование ведется по смещению  $x'_p$  рассматриваемой частицы, поэтому вклад в  $F_p$  при

суммировании по  $n$  дадут лишь слагаемые, зависящие от  $x'_p$ , т. е. слагаемые, для которых справедливы равенства  $n = p$  и  $n + l = p$ . Тогда из (4.6) следует, что

$$F_p = -\frac{\partial W}{\partial x'_p} = \sum_{l>0} W''(la)(x'_{p+l} + x'_{p-l} - 2x'_p). \quad (4.7)$$

Можно показать, что для модели рис. 4.1 величина  $W''(la)$  аналогична жесткости пружинок, соединяющих шарики. Если частицы в решетке имеют массу  $m$ , то согласно второму закону Ньютона  $md^2x'_p/dt^2 = F_p$  уравнение движения  $p$ -й частицы в решетке с учетом (4.7) можно записать так:

$$m \frac{d^2 x'_p}{dt^2} = \sum_{l>0} W_l''(x'_{p+l} + x'_{p-l} - 2x'_p), \quad W''(l) = W''(la). \quad (4.8)$$

Решение уравнения (4.8) будем искать в виде

$$x'_p = C \exp(i\omega t - ikpa). \quad (4.9)$$

Если такое решение существует, то можно говорить о распространяющейся волне с волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$  и с постоянной амплитудой  $C$ . Причем величина  $ka$  характеризует изменение фазы при переходе от  $p$ -й частицы к  $(p+1)$ -й, т. е.  $x'_{p+1} = x'_p \exp(-ika)$ . После подстановки (4.9) в (4.8) убеждаемся, что решения вида (4.9) существуют, если  $\omega$  и  $k$  удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\omega^2 = 4 \sum_{l>0} \frac{W_l''}{m} \sin^2 \frac{kla}{2}, \quad (4.10)$$

которое обычно называют дисперсионным.

Из дисперсионного уравнения видно, что частота  $\omega$  является периодической функцией волнового числа  $k$  с периодом  $2\pi/a$ , поэтому все возможные колебания можно найти, рассмотрев изменение  $k$ : в интервале  $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ . Предположим теперь, что в решетке каждая частица взаимодействует только с ближайшими соседними. Тогда вместо (4.8) и (4.10) имеем

$$m \frac{d^2 x'_p}{dt^2} = W''(x'_{p+1} + x'_{p-1} - 2x'_p), \quad (4.11)$$

$$\omega^2 = \frac{4W''}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad (4.12)$$

где  $l = 1$ , а  $W_1'' = W''$ . Частоты колебаний, соответствующие (4.12), приведены на рис. 4.2. Заметим, что при малых  $ka$  ( $ka \ll 1$ , т. е.  $a \ll \lambda$ ) из (4.12) следует равенство

$$\omega = \sqrt{\frac{W''}{m}} ka, \quad (4.13)$$

представляющее собой линейный закон дисперсии.

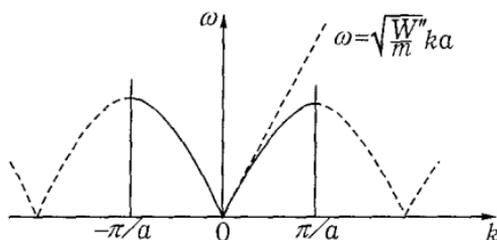


Рис. 4.2. Закон дисперсии одномерной цепочки из одинаковых равноудаленных частиц: сплошные кривые — основной интервал изменения волнового числа  $k$ ; штриховые — их периодическое продолжение

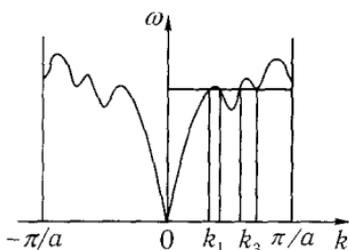


Рис. 4.3. Дисперсионная характеристика одномерной решетки при учете далеких взаимодействий с частицами

Вернемся к более общему случаю уравнения (4.10), когда на каждую частицу действуют силы со стороны всех других частиц, удаленных от рассматриваемой на расстояние, не большее произведения числа этих частиц на  $a$ . Заметим, что такая ситуация характерна для цепочки карбида и для недавно открытых спиральных полимеров. Соответствующая дисперсионная характеристика приведена на рис. 4.3 [2]. Из нее следует, что в этом случае волновое число является многозначной функцией частоты.

Представляют интерес одномерные решетки, состоящие из двух сортов чередующихся частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 4.4). Пусть частицы расположены на равных расстояниях друг от друга и находятся в таком же силовом поле, как в предыдущей задаче. Эта модель соответствует, например, решетке хлористого натрия, в которой чередуются атомы хлора и натрия. Полагая, что взаимодействуют только соседние частицы, запишем уравнения для каждого сорта частиц (четные номера соответствуют частицам с массой  $m_2$ ,

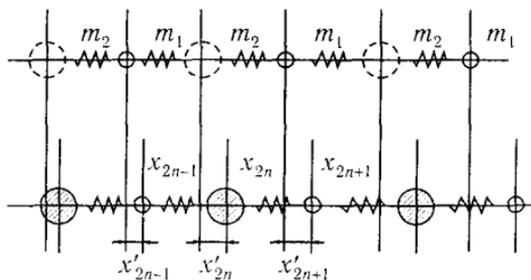


Рис. 4.4. Одномерная «решетка», состоящая из равноудаленных чередующихся частиц разной массы (продольные колебания)

нечетные — с массой  $m_1$ ) в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2 x'_{2n}}{dt^2} &= W''(x'_{2n-1} + x'_{2n+1} - 2x'_{2n}), \\ m_1 \frac{d^2 x'_{2n+1}}{dt^2} &= W''(x'_{2n} + x'_{2n+2} - 2x'_{2n+1}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Полагая, что

$$\begin{aligned} x'_{2n} &= A_2 \exp(i\omega t - i \cdot 2nka), \\ x'_{2n\pm 1} &= A_1 \exp[i\omega t - i \cdot (2n \pm 1)ka], \end{aligned}$$

из (4.14) находим систему алгебраических уравнений, условие совместности которой приводит к дисперсионному уравнению четвертой степени относительно частоты:

$$\omega^4 - 2\omega^2 W'' \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \frac{4(W'')^2}{m_1 m_2} \sin^2 ka = 0. \quad (4.15)$$

Из (4.15) следует, что

$$\omega_{\pm}^2 = W'' \left\{ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \pm \left[ \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 ka}{m_1 m_2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.16)$$

При малых  $ka$  из (4.16) получаем

$$\bar{\omega}_- \approx \sqrt{\frac{2W''}{m_1 + m_2}} ka, \quad (4.17)$$

$$\bar{\omega}_+ \approx \sqrt{2W'' \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}. \quad (4.18)$$

Из (4.16)–(4.18) видно, что в такой «среде» возможно распространение двух видов волн. Их дисперсионные кривые представлены на рис. 4.5.

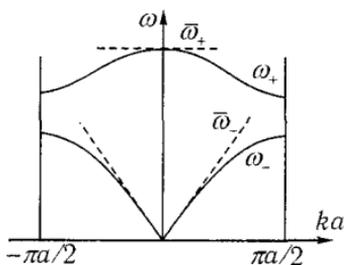


Рис. 4.5. Дисперсионные кривые для цепочки из двух сортов частиц: верхняя ветвь — оптическая; нижняя — акустическая

Верхнюю ветвь, соответствующую высокочастотным колебаниям цепочки, называют оптической (при малых  $ka$  она описывается формулой (4.18)). От нее отделена низкочастотная ветвь — акустическая (при малых  $ka$  ей соответствует формула (4.17)). С ростом  $ka$  обе ветви сближаются. Предоставляем читателю самому изучить переход от двухатомной цепочки к одноатомной. Заметим, что при увеличении числа разнородных частиц соответственно увеличивается и число оптических ветвей.

Электрическим аналогом одномерной «решетки» из одинаковых равноудаленных частиц является цепочка, составленная из последовательно соединенных индуктивностей  $L$  и емкостей  $C$  (рис. 4.6). Такая  $LC$ -цепочка ведет себя как фильтр нижних частот и описывается уравнением для тока

$$\frac{d^2 i_n}{dt^2} = (LC)^{-1}(i_{n-1} + i_{n+1} - 2i_n), \quad (4.19)$$

которое совпадает с уравнением (4.11), если сделать замены  $W''/m \leftrightarrow \leftrightarrow (LC)^{-1}$ ,  $x'_n \leftrightarrow i_n$ .

Рассмотрим еще одну реализацию одномерной цепочки — бесконечный ряд одинаковых акустических резонаторов объемом  $V_p$ , которые соединены трубками с поперечным сечением  $S$  и объемом  $V_{тр}$  (рис. 4.7). Пусть через эту систему протекает газ с объемной плотностью  $\rho$ . Предположим, что в любой момент времени газ в резонаторах находится в состоянии равновесия и объем резонатора много больше объема соединительной трубки. Используя второй закон Ньютона, можно убедиться, что имеет место уравнение

$$\frac{d^2 p_n}{dt^2} = \frac{S^2}{\chi V_p V_{тр} \rho} (p_{n+1} + p_{n-1} - 2p_n), \quad (4.20)$$

где  $dp_n$  — изменение давления в  $n$ -м резонаторе, а  $\chi = -\frac{1}{V} \frac{(v_n - v_{n-1})S}{dp_n/dt}$  — сжимаемость газа. Уравнение (4.20) аналогично (4.11), т. е. действи-

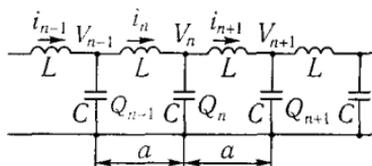


Рис. 4.6. Электрический аналог одномерной цепочки из одинаковых частиц:  $i_n$  — ток, протекающий через индуктивность между  $(n-1)$ - и  $n$ -й емкостями;  $Q_n$  и  $V_n = Q_n/C$  — заряд на емкости и приложенная к ней разность потенциалов

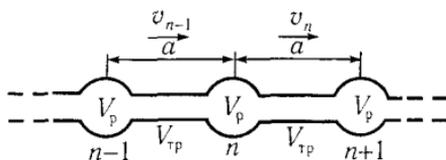


Рис. 4.7. Акустический аналог одномерной цепочки из одинаковых частиц:  $v_{n-1}$  и  $v_n$  — скорости массы газа, находящегося между  $(n-1)$ -,  $n$ -й и  $n$ -,  $(n+1)$ -й трубками соответственно

тельно, рассмотренная цепочка представляет собой акустический аналог одномерной решетки из одинаковых частиц, в которой каждая частица взаимодействует только с ближайшими соседями<sup>1</sup>.

Перейдем теперь к более сложному и более общему случаю, когда цепочка состоит не из частиц, а из тождественных связанных между собой осцилляторов, например, маятников массы  $m$ , имеющих собственную частоту  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ . Связь маятников осуществляется пружинами с жесткостью  $\gamma_1$  (рис. 4.8). Уравнение для смещения  $\varphi_n(t)$   $n$ -го маятника в случае малых колебаний и в предположении, что взаимодействие каждого осциллятора имеет место лишь с ближайшими соседями, может быть записано в виде

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_0^2 \varphi_n = \left( \frac{\gamma_1}{m} \right) (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n). \quad (4.21)$$

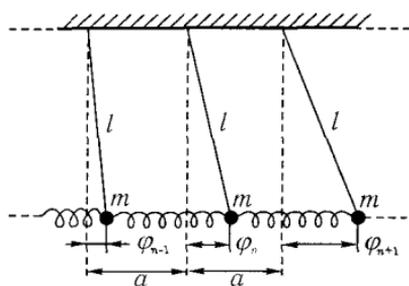


Рис. 4.8. Цепочка одинаковых маятников, связанных между собой пружинами

Читатель легко выведет это уравнение сам, используя подход, описанный при выводе уравнения (4.8). Решение дифференциально-

<sup>1</sup> Последние два примера соответствуют задачам 4.1 и 4.44 из [3], которые мы рекомендуем читателю решить.

разностного уравнения (4.21) с разностью второго порядка будем искать в виде одночастотных колебаний (аналогично решению (4.9)), т. е.

$$\begin{aligned}\varphi_n &= A \exp(i\omega t - inka), \\ \varphi_{n-1} &= A \exp[i\omega t - i(n-1)ka], \\ \varphi_{n+1} &= A \exp[i\omega t - i(n+1)ka].\end{aligned}\quad (4.22)$$

Подставляя (4.22) в (4.21), получаем для действительных  $k$  закон дисперсии:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2\gamma_1}{m}(1 - \cos ka) = \omega_0^2 + \frac{4\gamma_1}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}, \quad (4.23)$$

и для  $k = -i\kappa$  ( $\kappa$  — действительная величина)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2\gamma_1}{m}(1 - \operatorname{ch} \kappa a) = \omega_0^2 - \frac{4\gamma_1}{m} \operatorname{sh}^2 \frac{\kappa a}{2}. \quad (4.24)$$

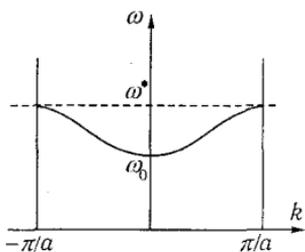


Рис. 4.9. Дисперсионная кривая в области прозрачности для цепочки, изображенной на рис. 4.8

Задавая в уравнении (4.23) частоту  $\omega$  (оказывая на цепочку внешнее воздействие), можно найти  $k$ . Если  $k$  получится действительным, то это значит, что вдоль цепочки будет распространяться волна частоты  $\omega$ , если  $k$  мнимое, то волна экспоненциально затухает.

Действительно, поскольку  $\varphi_n = A \exp(i\omega t - inka)$ , при  $k = -i\kappa$   $\varphi_n = A \exp(i\omega t - n\kappa a)$  и  $\varphi_n \rightarrow 0$  с ростом номера  $n$  ячейки. Дисперсионное уравнение (4.23) определяет частоты от  $\omega = \omega_0$  до  $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 + 4\gamma_1/m}$ , что соответствует значениям  $ka$  от  $ka = 0$  до  $ka = \pi$ . Область частот  $\omega_0 < \omega < \omega^*$  соответствующими волновыми числами — область прозрачности, в которой волны в цепочке распространяются без затухания (рис. 4.9). Из (4.23) следует, что условие  $\omega < \omega_0$  возможно лишь, когда  $\sin^2(ka/2) < 0$ , т. е. при мнимых  $k$ . Неравенство  $\omega > \omega^*$  может выполняться также лишь при мнимых  $k$ . Этой области соответствует уравнение  $\omega^2 = \omega_0^2 + (4\gamma_1/m) \operatorname{ch}^2(\kappa a/2)$ , а интервалу  $\omega < \omega_0$  — уравнение (4.24). Указанным значениям  $\omega$  и  $k$  соответствует область непрозрачности, в которой амплитуда колебаний возбуждаемой на границе цепочки экспоненциально спадает с увеличением  $n$  (рис. 4.10).

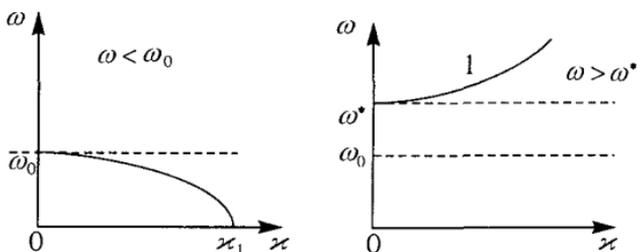


Рис. 4.10. Дисперсионные кривые в области непрозрачности для цепочки, изображенной на рис. 4.8:  $1 - \omega^2 = (\omega^*)^2 + (4\gamma_1/m) \text{sh}^2(\kappa a/2)$

Обсудим в заключение еще один пример — цепочку, состоящую из маленьких магнитных стрелок — осцилляторов с неупругой связью (рис. 4.11). Цепочка находится во внешнем магнитном поле, каждая стрелка может свободно вращаться в плоскости чертежа вокруг своего неподвижно закрепленного центра; основные обозначения вынесены на рисунок. Будем предполагать, как мы и делали в большинстве случаев, что магнитное взаимодействие имеет место лишь между полюсами ближайших стрелок. Распространение волн в такой цепочке рассматривалось М. Пароди при изучении ферромагнитных кристаллов [2], а недавно вновь анализировалось в [4] в связи с исследованием магнитостатических волн в магнитоупорядоченных средах.

Опуская выкладки [4], выпишем уравнение движения для  $n$ -й стрелки, которое имеет вид

$$\begin{aligned}
 I\ddot{\alpha}_n = & -\frac{2m^2l^2}{a^3}(\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} - 2\alpha_n) - \\
 & -m^2l^2\left[\frac{1}{(a-2l)^3} + \frac{1}{(a+2l)^3}\right](\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n) - \\
 & -2m^2l\left[\frac{1}{(a-2l)^2} + \frac{1}{(a+2l)^2}\right]\alpha_n - 2mlH_0\alpha_n, \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

где  $I$  — момент инерции магнитной стрелки относительно ее оси вращения.

Дисперсионное уравнение, соответствующее (4.25) при условии  $l \ll a$ , как показано в [4], запишется следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_H^2 + \left(\frac{4ml}{a^3}\right) \gamma \cos ka. \quad (4.26)$$

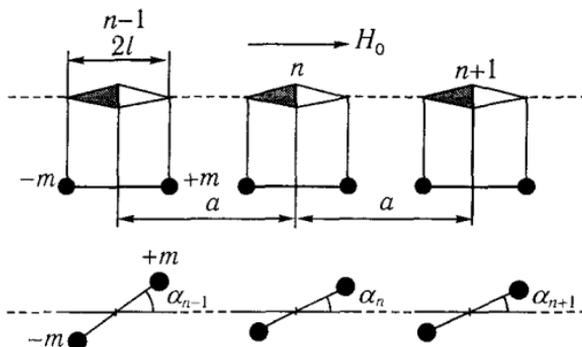


Рис. 4.11. Цепочка из магнитных стрелок: сверху — в невозмущенном состоянии; внизу — возмущенное состояние цепочки при отклонении диполя от положения равновесия на малый угол

Величина  $\omega_H^2 = \gamma H_0$  ( $\gamma = 2ml/I$ ) определяется параметрами цепочки и внешним магнитным полем; она имеет размерность квадрата частоты, поэтому  $\omega_H$  — аналог собственной частоты прецессии намагниченности. Параметр  $(4ml/a^3)\gamma$  характеризует связь между стрелками-осцилляторами. Если внешнее поле отсутствует, то для больших длин волн ( $ka \ll 1$ )  $\omega = \omega_M[1 - (ka)^2/4]$ , где  $\omega_M = \sqrt{8m^2l^2/Ia^3}$  и определяется только параметрами цепочки.

### 4.3. Предельный переход от упорядоченных структур к одномерной сплошной среде. Временная и пространственная дисперсия. Физическая природа дисперсии

Вернемся к цепочке одинаковых маятников, связанных между собой пружинами (см. рис. 4.8). Предположим, что характерный пространственный период волнового движения в дискретной цепочке много больше расстояния между маятниками, т. е. много больше размера ячеек. Тогда возможны следующие замены:

$$\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(x, t),$$

$$\varphi_{n+1}(t) \rightarrow \varphi\{(x+a), t\} = \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots,$$

$$\varphi_{n-1}(t) \rightarrow \varphi\{(x-a), t\} = \varphi(x, t) - \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots$$

Переходя от дискретной координаты к непрерывной и используя введенные выше замены в уравнении (4.21), получим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \varphi(x, t) = 0, \quad (4.27)$$

где  $v^2 = \gamma_1 a^2 / m$ . Это линейризованное уравнение Клейна–Гордона, впервые появившееся в теории поля.

Обсудим подробнее смысл допущений, сделанных при выводе (4.27). Во-первых, функция  $\varphi_n(t)$  была определена в дискретных точках оси  $x$ , мы же заменили ее непрерывной. Во-вторых, мы разложили функцию  $\varphi(x, t)$  в ряд и отбросили высшие члены разложения (в этом неточность уравнения (4.27)). Кроме того, проделывая эти операции, мы не определили точно, по сравнению с чем  $a$  мало. Когда же справедливы сделанные допущения? Получим дисперсионное уравнение для (4.27). Подставляя  $\varphi(x, t) \sim \exp(i\omega t - ikx)$  в уравнение (4.27), имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2 \quad (4.28)$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{\gamma_1}{m}\right) (ka)^2. \quad (4.29)$$

Легко видеть, что (4.29) получается из (4.23), если  $\sin^2(ka/2) \approx (ka)^2/4$ , т. е. при  $ka \ll 1$ . Итак, когда мы говорим о малости  $a$  по сравнению с характерным пространственным периодом волнового движения, мы говорим о малости  $ka$  и, следовательно, о малости  $a$  по сравнению с длиной волны, поскольку  $k = 2\pi/\lambda$  ( $ka \ll 1$  или  $a \ll \lambda$ ). Для достаточно длинных волн наши допущения справедливы, и цепочку маятников можно рассматривать как среду, описываемую уравнением Клейна–Гордона. Однако все приближения нарушаются, когда  $\lambda \approx a$ , т. е. длина волны в структуре соизмерима с ее периодом. Таким образом, преобразования дисперсионных уравнений § 4.1 для цепочек из одинаковых частиц при условии  $ka \ll 1$  означают переход от упорядоченных структур к одномерной сплошной среде.

Если в уравнении (4.27) устремить  $\omega_0$  к нулю, то мы получим обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 H\varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

дисперсионное уравнение которого имеет вид

$$\omega = \pm vk. \quad (4.30)$$

Для анализируемой модели фазовая скорость волны  $v = a\sqrt{\gamma_1/m}$ , откуда

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} ka. \quad (4.31)$$

Это уравнение совпадает с (4.13) для цепочки из одинаковых равноудаленных частиц при  $ka \ll 1$ . Физически это ясно, так как при  $\omega_0 = \sqrt{g/l} \rightarrow 0$  для маятника необходимо, чтобы  $l \rightarrow \infty$ ; это значит, что длина маятника становится такой большой, что уже не влияет на его колебание, а это и есть цепочка шариков, соединенных пружинками (но  $ka \ll 1!$ ).

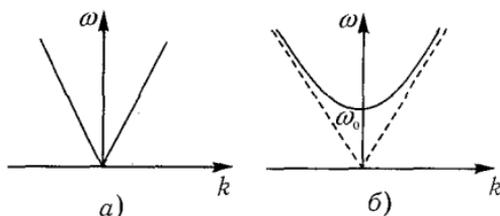


Рис. 4.12. Дисперсионные кривые для сред с линейной дисперсией (а) и с дисперсией, описываемой уравнением (4.29) (б)

Если в дисперсионном уравнении между  $\omega$  и  $k$  зависимость линейная, т. е. справедливо (4.30), то говорят, что в данном случае среда без дисперсии. В этом случае фазовая скорость, определяемая как  $\omega/k$ , будет постоянной и не зависящей от частоты (рис. 4.12 а). В частности, при  $ka \ll 1$  цепочка атомов-шариков в одномерной решетке ведет себя как упругая струна, описываемая волновым уравнением. В этом случае речь идет о распространении упругих волн в сплошной среде со скоростью  $v$ , равной скорости звука (отсюда название «акустическая» ветвь для нижней кривой рис. 4.5). Из уравнения (4.29) при  $\omega$ , немного больших  $\omega_0$ , следует, что дисперсионная кривая имеет вид параболы:

$$\omega \approx \omega_0 + Ak^2, \quad \text{если } A = \frac{\gamma_1 a^2}{2m\omega_0} \ll 1, \quad (4.32)$$

т. е. вблизи его дисперсия проявляется. В то же время интересно, что при достаточно больших  $\omega$  дисперсии не будет (линейная зависимость  $\omega(k)$ ). Попытаемся систематизировать полученные нами результаты, чтобы понять, с чем связано существование дисперсии в среде.

Вернемся к уравнению Клейна-Гордона, которое описывает распространение одномерных волн в среде с дисперсией, в частности в цепочке маятников с собственными частотами  $\omega_0$ , расположенных на расстояниях  $a \ll \lambda$  (дисперсионная кривая — сплошная кривая на рис. 4.12 б). Мы уже говорили, что при  $\omega_0 \rightarrow 0$  дисперсия исчезает: длина нитей маятников так велика, что у них нет собственного периода колебаний, цепочка превращается в данном случае в упругую струну. Дисперсия исчезла, когда исчез собственный временной масштаб, характеризующий среду. Когда каждый маятник имеет собственный период  $T = 2\pi/\omega_0$ , «среда» из маятников не будет воспринимать частоту меньше собственной. На этой критической частоте все маятники будут колебаться синфазно: волн нет, существуют только колебания. Если теперь обратиться к уравнениям (4.21) и (4.23), в которых соотношение между  $a$  и  $\lambda$  может быть любым, то нетрудно видеть, что дисперсия в системе сохраняется даже при  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Действительно, в этом случае мы приходим к цепочке из шариков, связанных пружинками. В этой среде дисперсия существенна, пока  $a$  не мало по сравнению с  $\lambda$ . Таким образом, в «решетке» из шариков дисперсия определяется собственным пространственным масштабом — периодом «решетки». С этим же связана дисперсия в «решетке» из равноудаленных частиц разной массы (см. (4.16)). Что касается цепочки из связанных маятников, когда  $\omega_0 \neq 0$  и расстояние  $a$  сравнимо с  $\lambda$ , то дисперсия определяется и временным, и пространственным масштабами. Аналогично характеризуется дисперсия и для цепочки из магнитных стрелок, где наряду с периодом  $a$  фигурирует частота  $\omega_H$ , связанная с существованием внешнего магнитного поля (см. (4.26)). Таким образом, можно сказать, что существование дисперсии в среде связано с наличием в ней собственных, независимых от параметров волны пространственных или временных масштабов.

Если в среде нет никаких характерных пространственных или временных масштабов (как, например, при распространении звука в воде или электромагнитных волн в вакууме), т. е. нет характерных частот или периодов, то распространяющаяся несинусоидальная волна искажаться не будет. Дисперсия в этом случае отсутствует.

Если, например, в воду «напустить» пузырьков, т. е. ввести некий пространственный масштаб  $a$  — расстояние между пузырьками или размер пузырьков, то для волны с  $\lambda \gg a$  искажений при распространении не будет, если же  $\lambda \sim a$ , то волна искажается, в системе есть дисперсия. В кристалле, скажем, волна низкой частоты (длина волны много больше расстояния между ионами) распространяется без иска-

жений, а для высоких частот уже имеет значение расстояние между ионами — дискретность «среды» (см. рис. 4.2, 4.3 и 4.5).

Дисперсия, связанная с наличием в среде временных масштабов, обычно называется временной, а с наличием пространственных масштабов — пространственной. Заметим, что такая классификация удобна лишь в электродинамике, где можно говорить отдельно об уравнениях среды и поля. На формальном языке уравнений дисперсия — это нелокальная зависимость между различными физическими переменными во времени или пространстве. Так, в электродинамике сплошных сред пространственная дисперсия связана с тем, что электрическая индукция  $\mathbf{D}$  в данной точке пространства определяется значением напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности, т. е.  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  связаны нелокально в пространстве:

$$\mathbf{D}_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}_j(\omega, \mathbf{k}),$$

где  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор комплексной диэлектрической проницаемости [5].

Формально можно ввести следующие определения: в электродинамике сплошных сред среда имеет пространственную дисперсию, если ее диэлектрическая проницаемость зависит от волнового вектора; если же проницаемость зависит от частоты, то мы имеем дело с частотной или временной дисперсией.

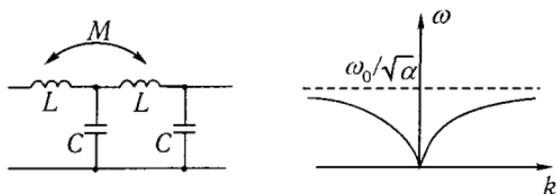
Последняя связана также с нелокальностью связи  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  во времени, причем временная дисперсия обычно велика, поскольку собственные частоты среды попадают в рассматриваемый интервал частот [5]. Пространственную дисперсию следует принимать во внимание, например, в физике изотропной плазмы, когда длина волны соизмерима с радиусом Дебая, в теории проводящих сред при учете соударений, когда длина свободного пробега порядка длины волны.

В кристаллооптике пространственная дисперсия приводит к качественно новым эффектам, таким, как естественная оптическая активность (гиротропия), оптическая анизотропия кубических кристаллов [5, 6]. Укажем еще, что в плазме, например, групповая скорость продольных волн становится отличной от нуля также из-за пространственной дисперсии (мы вернемся к этому вопросу в следующей главе).

Следует также подчеркнуть, что, хотя пространственная дисперсия — результат существования собственного пространственного масштаба в среде, т. е. результат дискретности «среды», ее учет можно провести и в рамках модели сплошной среды, если феноменологически

найти соотношения между физическими переменными, учитывающие нелокальность их связи в пространстве. Таким образом, чтобы учесть пространственную дисперсию, нужно правильно построить модель среды.

Рис. 4.13. Длинная линия с индуктивной связью  $M$  между ячейками и соответствующая дисперсионная характеристика



Рассмотрим в качестве примера распространение электромагнитной волны в длинной линии, изображенной на рис. 4.13 (см. задачу 4.23 в [3]).

Если связь между ячейками отсутствует, то справедливы телеграфные уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L \frac{\partial I}{\partial t},$$

которые легко преобразуются в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0,$$

так что в анализируемой модели цепочки дисперсии нет. Однако при наличии индуктивной связи между ячейками зависимость между магнитным потоком  $\Phi$  и током  $I$  выражается материальным уравнением  $\Phi = LI - M \partial^2 I / \partial x^2$ , из которого следует нелокальная связь между этими величинами (наличие пространственной производной от тока). Тогда

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = M \frac{\partial^4 I}{\partial t^2 \partial x^2}.$$

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 k^2}{1 + \alpha k^2}, \quad (4.33)$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $\alpha = M/L$ . (Обратите внимание, что  $k$  в формуле (4.33) — безразмерная величина, так как в цепочке мы все считаем

не на единицу длины, а на ячейку; величины  $L$  и  $C$  измеряются соответственно в генри и фарадах на ячейку; чтобы перейти к размерной величине, надо умножить  $k$  на размер ячейки  $a$  в соответствующих единицах длины). Если  $\alpha \ll 1$ , то, сохраняя члены первого порядка малости по  $\alpha$ , из (4.33) получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 k^2 (1 - \alpha k^2). \quad (4.34)$$

Обратимся теперь к уравнению (4.12) для одномерной решетки из одинаковых частиц. Положим  $ka$  малым и разложим  $\sin^2(ka/2)$  в ряд, ограничиваясь членами порядка  $(ka)^4$ ; тогда

$$\omega^2 = \left(\frac{W''}{m}\right) (ka)^2 \left[1 - \frac{ka^2}{12}\right]. \quad (4.35)$$

Так как в (4.34)  $k$  — величина безразмерная, то обозначая  $ka$  через  $k$  и полагая  $W''/m = \omega_0^2$ , а  $1/12 = \alpha$ , приходим от (4.35) к (4.34). Таким образом, оба подхода — и дискретный, и феноменологический учет не локальности связи между физическими величинами — приводят к правильному описанию пространственной дисперсии («загиб» дисперсионных кривых на рис. 4.2 и 4.13 связан с пространственной дисперсией). Пространственная дисперсия проявляется и вблизи частоты  $\omega_0$  (см. рис. 4.12 б и (4.32)). В уравнении (4.33) знак  $\alpha$  может быть любым. Тогда если  $\omega^2 = \omega_0^2 k^2 / (1 - \alpha k^2)$ , то при  $\alpha \sim k^{-2}$  фазовая скорость волны  $v_\phi = \omega/k \rightarrow \infty$  и групповая скорость (скорость переноса энергии в среде без потерь)  $v_{гр} = d\omega/dk \rightarrow \infty$ . (Позднее мы подробнее остановимся на понятиях фазовой и групповой скоростей.) Следовательно, информация от одной точки к другой передается мгновенно. Подумайте, с какими идеализациями модели связан возникший парадокс.

#### 4.4. Типичные дисперсионные характеристики сред-моделей

Рассмотрим наиболее типичные дисперсионные характеристики различных одномерных сред, воспользовавшись для наглядности эквивалентными схемами из  $LC$ -цепочек. С помощью  $LC$ -цепочек можно реализовать практически любую дисперсионную зависимость, поэтому такие цепочки могут служить моделями при исследовании распространения волн в различных средах.

Будем исходить из телеграфных уравнений

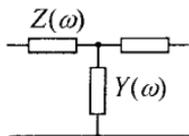
$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (4.36)$$

дополненных уравнениями связи заряда  $Q$  с напряжением  $U$  и магнитного потока  $\Phi$  с током  $I$ :

$$Q = \widehat{Q}\{U\}, \quad \Phi = \widehat{\Phi}\{I\}. \quad (4.37)$$

В общем случае  $\widehat{Q}$  и  $\widehat{\Phi}$  — дифференциальные или интегральные операторы, и только в средах без дисперсии связь между переменными мгновенна:  $Q = CU$ ,  $\Phi = LI$  (уравнения связи становятся алгебраическими). Заряд (или поток) не зависит от напряжения или тока в соседних точках или в соседние моменты времени. Если  $\widehat{Q}$  и  $\widehat{\Phi}$  — дифференциальные операторы, содержащие производные по  $t$  или по  $x$ , то связь между переменными нелокальна, и можно говорить о среде с временной или пространственной дисперсией соответственно.

Рис. 4.14. Эквивалентная схема цепочки:  $Z(\omega)$  — погонное сопротивление;  $Y(\omega)$  — шунтирующая проводимость



Описанный выше подход мы уже использовали в частном случае применительно к схеме рис. 4.13 в конце предыдущего раздела. Найдем дисперсионное уравнение, соответствующее весьма общей эквивалентной схеме цепочки, представленной на рис. 4.14, полагая, что  $I = \mathcal{I} \exp(i\omega t)$  и  $U = \mathcal{U} \exp(i\omega t)$ . Уравнения для комплексных амплитуд имеют вид

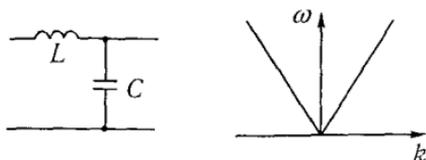
$$\frac{d\mathcal{I}}{dx} = -Y(\omega)\mathcal{U}, \quad \frac{d\mathcal{U}}{dx} = -Z(\omega)\mathcal{I}.$$

Если предположить, что  $\mathcal{I}, \mathcal{U} = (\mathcal{I}_0, \mathcal{U}_0) \exp(-ikx)$ , то из условия разрешимости системы для амплитуд  $\mathcal{I}_0$  и  $\mathcal{U}_0$  найдем дисперсионное уравнение

$$k^2 = -Y(\omega)Z(\omega). \quad (4.38)$$

Конкретный вид  $Y(\omega)$  и  $Z(\omega)$  определяется уравнениями связи.

Рис. 4.15. Эквивалентная схема среды-модели без дисперсии и ее дисперсионная характеристика



Рассмотрим различные дисперсионные характеристики моделей из  $LC$ -элементов, используя (4.38).

*Среда без дисперсии.* Для цепочки, представленной на рис. 4.15,  $Y(\omega) = i\omega C$  и  $Z(\omega) = i\omega L$ , т.е.  $\omega^2 = k^2/(LC)$ . По дисперсионному уравнению можно восстановить соответствующее дифференциальное уравнение. В данном случае это — волновое уравнение  $\partial^2 U/\partial t^2 - (LC)^{-1}\partial^2 U/\partial x^2 = 0$ . Фазовая скорость  $v_\phi = (LC)^{-1/2} = \text{const}$ ; следовательно, модель соответствует среде без дисперсии. Эта модель описывает распространение электромагнитной волны в вакууме, звуковых волн в чистой воде, низкочастотного звука в твердом теле, основной прямой пространственной гармоники в замедляющих системах для электронных усилителей бегущей волны (например, в спирали).

*Среда с дисперсией в области низких частот* (рис. 4.16). Рассмотрим модель среды, дисперсия в которой описывается уравнением

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{k}{LC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C},$$

а соответствующее уравнение в частных производных — линейное уравнение Клейна–Гордона (уравнение (4.27)). Таким образом, цепочка на рис. 4.16 — это электрический аналог модели связанных маятников, когда  $a \ll \lambda$ . Такая среда-модель описывает, в частности, распространение электромагнитных волн в плазме, при этом  $\omega_0 = \omega_p$  ( $\omega_p$  — плазменная частота), распространение волн в волноводе и т. д.

*Среда с дисперсией в области высоких частот.* Распространение волн в длинной линии, состоящей из ячеек, показанных на рис. 4.17, описывается уравнениями в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= -C \frac{\partial U}{\partial t}, & \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \left( \frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I'}{\partial t} \right), \\ \Phi &= LI - L \frac{C_1}{C} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, & I' &= I - \frac{C_1}{C} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Полагая, что все переменные величины изменяются по закону  $e^{i(\omega t - ikx)}$ , и вводя обозначения  $\omega_0^2 = 1/(LC_1)$ ,  $k_0^2 = C/C_1$ , из (4.39) получаем

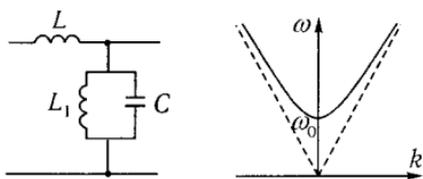


Рис. 4.16. Эквивалентная схема среды-модели с дисперсией в области низких частот и ее дисперсионная характеристика

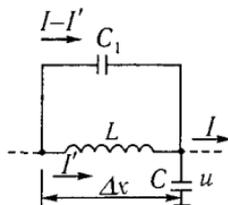


Рис. 4.17. Типичная ячейка длинной линии, использованной в экспериментах [7]:  $L = 182$  мкГн,  $C_1 = 100$  пФ,  $C = 24$  пФ,  $\Delta x = 1$  см

дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 k^2}{k_0^2 + k^2}. \quad (4.40)$$

Очевидно, что можно было бы не выписывать (4.39), а найти непосредственно из эквивалентной схемы  $Z = i\omega L / (1 - \omega^2 LC_1)$  и  $Y = i\omega C$ , что с учетом (4.38) сразу даст (4.40). Однако мы хотели лишний раз продемонстрировать, как появляется дисперсия из-за нелокальной связи переменных (см. материальное уравнение  $\Phi = \hat{\Phi}(I)$  в (4.39)). Интересно, что дисперсия в данной среде-модели такая же, как и в случае длинной линии с индуктивной связью между ячейками (см. рис. 4.13). Дисперсионная кривая, представленная на рис. 4.18, определялась в обычном для таких целей эксперименте [7], когда один конец линии нагружен на сопротивление, не равное характеристическому сопротивлению  $Z_0$  линии ( $Z_0 = \sqrt{L/C} / (1 - \omega^2 / \omega_0^2) \sim (L/C)^{1/2} \sim 1$  Ом). Из-за отражений в линии устанавливается картина стоячих волн. Длину волны находят с помощью зонда и лампового вольтметра, измеряя расстояние между минимумами стоячих волн. Самой высокой частоте соответствует длина волны приблизительно  $2\Delta x$ . Как показано в работе [7], данная среда-модель количественно «описывает» распространение ионных акустических волн (ионный звук) в плазме. Эта линия моделирует также распространение звука в твердом теле (звуковая волна распространяется без дисперсии, пока ее волновое число  $k$  много меньше обратного вектора решетки  $q = 2\pi/a$  ( $a$  — расстояние между ионами решетки), в противном случае становится уже существенной пространственная дисперсия, связанная с дискретностью «среды»), спиновые волны в ферромагнетике и т. д.

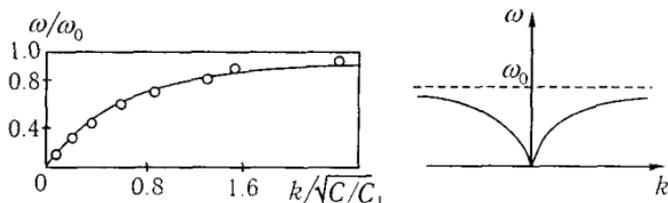


Рис. 4.18. Теоретическая (сплошная кривая) и измеренная экспериментально (точки) дисперсионная характеристика для изображенной на рис. 4.17 линии ( $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 37,3$  МГц) [7]

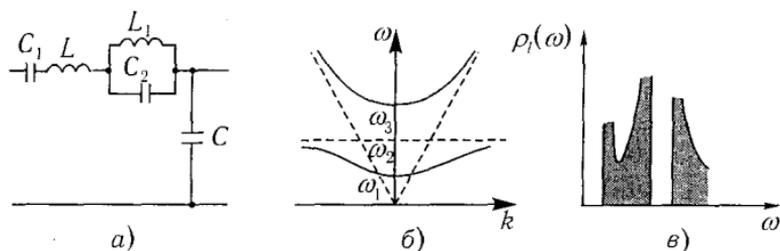


Рис. 4.19. Эквивалентная схема среды-модели, в которой есть собственные осцилляторы (а), ее дисперсионная характеристика (нижняя ветвь — акустическая, верхняя — оптическая) (б) и плотность числа осцилляторов для среды с низкочастотными и высокочастотными колебаниями (в)

Среда из осцилляторов (рис. 4.19). Дисперсионное уравнение имеет вид

$$k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2) - \omega^2 \omega_5^2}{\omega_0^2(\omega^2 - \omega_2^2)},$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_1 C_2}, \quad \omega_4^2 = \frac{1}{LC_1}, \quad \omega_5^2 = \frac{1}{LC_2};$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[ (\omega_4^2 + \omega_2^2 + \omega_5^2) - \sqrt{(\omega_4^2 + \omega_2^2 + \omega_5^2)^2 - 4\omega_2^2 \omega_5^2} \right],$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{2} \left[ (\omega_4^2 + \omega_2^2 + \omega_5^2) + \sqrt{(\omega_4^2 + \omega_2^2 + \omega_5^2)^2 - 4\omega_2^2 \omega_5^2} \right].$$

Примером является среда с упругими диполями для электромагнитных волн или неизотермическая плазма для ленгмюровских и ионно-звуковых волн. При  $\omega \gg \omega_3$  волна не замечает собственных колебаний диполей, и среда ведет себя как среда без дисперсии. При  $\omega$ , близких к  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , дисперсия уже существенна.

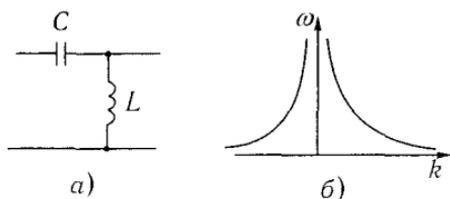


Рис. 4.20. Эквивалентная линия передачи, соответствующая распространению обратной волны (а), и ее дисперсионная характеристика (б). Групповая скорость равна и противоположно направлена фазовой скорости ( $v_{\Phi} = \omega^2 \sqrt{LC}$ )

Модель замедляющей системы, в которой распространяется обратная пространственная гармоника. Дисперсионное уравнение имеет вид  $\omega^2 = (k^2 LC)^{-1}$ . Разрыв на дисперсионной характеристике в области  $k \approx 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) соответствует пространственно однородному полю, которое, очевидно, не реализуется в такой системе (за исключением тривиального случая  $\omega = 0$ ). Заметим, что данная модель описывает и распространение поперечной волны в упругих стержнях (рис. 4.20).

#### 4.5. Формальный способ получения дисперсионного уравнения. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем

Пусть уравнение, описывающее распространение волн в среде, можно записать следующим образом:

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = 0, \quad (4.41)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — матрицы,  $u$  — вектор. Будем искать решение (4.41) в виде

$$u = \Psi \exp(i\omega t - ikx); \quad (4.42)$$

где  $\Psi \{ \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n \}$  — комплексный вектор (поляризационный вектор), компоненты которого  $\Psi_i$  есть коэффициенты распределения, характеризующие соотношение амплитуд различных физических переменных в гармонической волне.

Подставляя (4.42) в (4.41), приходим к алгебраической системе уравнений для  $\Psi_i$ . Условие существования нетривиального решения этой системы и будет искомым дисперсионным уравнением

$$\text{Det}(A\omega - Bk - iC) = D(\omega, k) = 0. \quad (4.43)$$

Пусть уравнение (4.43) имеет решения  $\omega = \omega_s(k)$  и  $k = k_s(\omega)$ , где  $s = 1, 2, \dots, n$ . Это означает, что в среде существует  $n$  типов волн, т. е.

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^n \Psi(s) \exp[i\omega_s t - ik_s(\omega)x] + \text{к. с.},$$

к. с. означает комплексно-сопряженную величину. Как и в случае сосредоточенных систем (см. гл. 2), можно перейти к нормальным волнам:

$$a_s(x, t) = \Psi(s) \exp(i\omega_s t - ik_s x).$$

Ввиду отсутствия связи между нормальными волнами они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial a_s}{\partial x} + ik_s a_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (4.44)$$

Такая запись удобна и тогда, когда между волнами появляется слабая связь: в уравнение (4.44) в этом случае необходимо добавить слагаемое  $a_j$  с соответствующим коэффициентом связи (связанным волнам мы посвятим далее отдельную главу).

Для распределенных систем дисперсионное уравнение — это уравнение, связывающее две комплексные величины  $\omega$  и  $k$ . Для сосредоточенных же систем имеется характеристическое уравнение, которое дает более полную информацию о системе — спектр ее комплексных собственных частот.

Есть ли аналог подобного уравнения для распределенной системы? До сих пор мы рассматривали безграничные среды. Обратимся теперь к системам, в которых предполагается наличие обратной связи (будем называть их резонаторами). В простейшем случае такая обратная связь осуществляется в кольцевом резонаторе. В кольцевом резонаторе может реализоваться как режим чисто бегущей волны, так и режим суперпозиции встречных волн, частным случаем которого является стоячая волна. Для установления в кольце стоячей волны необходимо подобрать начальные условия. В более общем случае обратная связь, превращающая волновод в резонатор, обязана своим происхождением различного рода неоднородностям — стенкам, зеркалам, на которых бегущая волна достаточно сильно или полностью отражается, передавая энергию встречной волне. Примером могут служить оптический резонатор Фабри–Перо и линия передачи, закороченная или разомкнутая на концах. Решение при этом представляется в виде суперпозиции встречных

волн:

$$u(x, t) = \Psi_1 \exp(i\omega t - ikx) + \Psi_2 \exp(i\omega t + ikx), \quad (4.45)$$

амплитуды которых в простейшем случае идеального отражения на концах резонатора должны равняться друг другу по модулю. Например, в случае струны, закрепленной на концах,  $u(0, t) = 0$  и  $u(l, t) = 0$  ( $l$  — длина струны). Из (4.45) получаем условие для амплитуд встречных волн  $\Psi_1 = -\Psi_2$  и ограничение на спектр волновых чисел  $\sin k_n l = 0$ , откуда

$$k_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n — \text{целое}). \quad (4.46)$$

Нетрудно проверить, что в любом одномерном резонаторе с предельным отражением на концах могут реализоваться лишь элементарные решения, удовлетворяющие (4.46), т. е. в резонаторе укладывается целое число полуволн. В кольцевом резонаторе граничными условиями служат условия периодичности для всех переменных. Например, для замкнутой в кольцо линии передачи это  $U, I(x, t) = U, I(x + l, t)$ , откуда следует условие  $\exp(ikl) = 1$ , т. е. спектр

$$k_n = \frac{2\pi n}{l}. \quad (4.47)$$

Физически это условие совершенно очевидно — в кольцевом резонаторе могут существовать лишь периодические в пространстве волны, которые укладываются в нем целое число раз.

Зная дисперсионное уравнение среды, заполняющей резонатор:  $D(\omega, k) = 0$ , и спектр волновых чисел (4.46) или (4.47), мы можем получить уравнение относительно одной переменной:  $\Delta(\omega) = D(\omega, k_n) = 0$ , определяющее спектр нормальных частот резонатора. Именно это уравнение и есть аналог характеристического уравнения для сосредоточенных систем. Например, в случае среды без дисперсии при идеальных отражениях на концах  $k_n = \pi n/l$  и  $\omega_n = \pi n/(l\sqrt{LC}) = k_n/(\sqrt{LC})$  (рис. 4.21). Каким при эквидистантном спектре  $k$  будет спектр  $\omega$ , если среда обладает дисперсией? Качественное поведение спектра, зная дисперсионные характеристики, можно получить с помощью элементарного графического построения, которое ясно из рис. 4.22 и 4.23.

В среде с дисперсией в области низких частот спектр собственных частот начинается с частоты  $\omega_0$  (рис. 4.22), сгущается вблизи этой критической частоты; далеко от  $\omega_0$  спектр почти эквидистантный. При

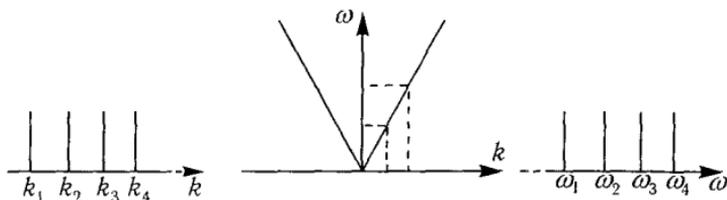
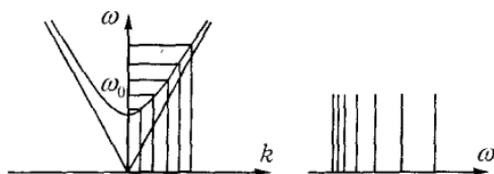


Рис. 4.21. Эквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде без дисперсии

Рис. 4.22. Неэквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде с дисперсией в области низких частот



стремлении  $\omega$  к  $\omega_0$  спектр становится непрерывным. В среде с дисперсией в области высоких частот картина такая же, но спектр становится редким при приближении к нулевой частоте (рис. 4.23 а). Если имеются две критические частоты, то имеются и две области сгущения спектра.

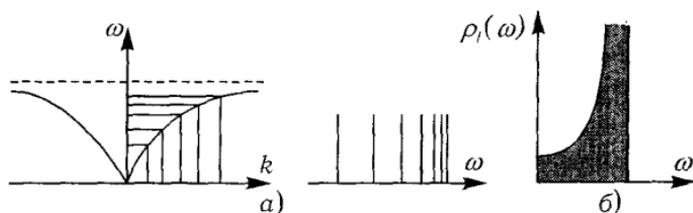


Рис. 4.23. Неэквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде с дисперсией в области высоких частот (а) и плотность числа осцилляторов для низкочастотной ветви (б)

Заметим, что когда речь идет о нахождении собственных частот длинных линий, представленных эквивалентными схемами, с произвольными граничными условиями на концах, то спектр волнового числа  $k_n$  находится из известного характеристического уравнения  $\operatorname{tg} kl = iY(Z_0 + Z_l)/(1 + Z_0 Z_l Y^2)$ , где  $Y$  — характеристическая проводимость длинной линии,  $Z_0$  и  $Z_l$  — нагрузки при  $x = 0$  и  $x = l$  соответственно [8, 3]. Кроме рассмотренных случаев отметим еще один: линия

короткозамкнута на одном и разомкнута на другом конце, т. е.  $Z_0 = 0$ ,  $Z_l = \infty$  (или  $Z_0 = \infty$ ,  $Z_l = 0$ ), тогда  $k_n = \pi(2n - 1)/(2l)$ .

Таким образом, если среда, заполняющая резонатор, обладает дисперсией, то даже при эквидистантном спектре  $k$  плотность  $\rho(\omega)$  нормальных мод в различных участках спектра будет различной. Это дает один из способов измерения дисперсионных свойств одномерных сред, особенно ценный, например, при исследовании цепочек линейных полимеров. Допустим, мы смогли равномерно возбудить все степени свободы цепочки, тогда снятый экспериментально спектр ее колебаний будет просто суперпозицией плотностей спектральных распределений, соответствующих различным дисперсионным ветвям. Для каждой ветви плотность спектрального распределения (плотность числа осцилляторов) вводится формулой

$$\rho(\omega) d\omega = \text{const} \cdot dk. \quad (4.48)$$

Здесь учтено, что число мод в интервале  $(k, k + dk)$  не зависит от  $k$ . Для продольных колебаний цепочки из тождественных молекул с точностью до нормирующего множителя из (4.48) мы имеем

$$\rho_l(\omega) = \text{const} \cdot \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} = \frac{2C}{a} (\omega_{\max}^2 - \omega^2)^{-1/2}. \quad (4.49)$$

Этот спектр представлен на рис. 4.23 б. Аналогично нетрудно построить плотность спектрального распределения  $\rho_l(\omega)$  цепочки из чередующихся легких и тяжелых молекул [15]. Если возбуждены и продольные, и поперечные колебания цепочки, то к спектру  $\rho_l(\omega)$  (см. (4.49)) следует добавить спектр поперечных колебаний, определяемый из дисперсионного уравнения  $\omega(k) = B \sin^2(ka/2)$ . Плотность спектрального распределения частот полного спектра приведена на рис. 4.19 в (см. [15]).

Упомянем о прямой пространственно-временной аналогии. Рассмотрим распространение бегущей волны  $\frac{1}{v_\phi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  в одномерной среде ( $v_\phi$  — постоянная фазовая скорость волны в среде), на которую воздействует внешняя распределенная сила  $G(x, t) = G(x) \exp(i\omega t)$ . Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{i\omega}{v_\phi} u(x) = G(x), \quad \text{если } u(x, t) = u(x) \exp(i\omega t).$$

Это уравнение удобно переписать в интегральной форме (при усло-

вии  $u(0) = 0$ ):

$$u(x) = \exp\left(\frac{-i\omega x}{v_\phi}\right) \int_0^x G(\zeta) \exp\left(\frac{i\omega\zeta}{v_\phi}\right) d\zeta, \quad (4.50)$$

где  $\zeta$  — текущая переменная интегрирования.

Полагая, что  $G(x, t) = G(0) \exp(i\omega t - i\omega x/v_{\text{вн}})$ , т. е. внешнее возмущение — волна постоянной амплитуды с частотой  $\omega$ , бегущая с фазовой скоростью  $v_{\text{вн}}$ , и интегрируя (4.50), находим

$$u(x, t) = G(0) \exp\left(i\omega t - \frac{i\omega x}{v_\phi}\right) \frac{\exp\left|\left(\frac{i\omega}{v_\phi} - \frac{i\omega}{v_{\text{вн}}}\right) x - 1\right|}{\frac{i\omega}{v_\phi} - \frac{i\omega}{v_{\text{вн}}}}.$$

При  $\omega/v_\phi \approx \omega/v_{\text{вн}}$  получаем секулярный рост  $u(x, t)$  вдоль координаты  $x$ :

$$u(x, t) = G(0)x \exp(i\omega t - i\omega x/v_\phi).$$

В этом, в частности, и проявляется пространственно-временная аналогия — для нарастания гармонической волны в пространстве под действием внешнего поля необходимо совпадение их пространственных периодов, т. е. резонанс волновых чисел. В действительности здесь есть резонанс и частот, и волновых чисел, что выражается в равенстве фазовой скорости собственной волны в среде фазовой скорости внешней волны. Если  $v_\phi$  и  $v_{\text{вн}}$  различаются сильно, то в системе возникнут пространственные биения (длину волны биений легко определить). В случае, когда в среде может распространяться много волн, т. е.  $u(x, t) = \sum_{n=1}^N u^{(n)} \exp(i\omega_n t - ik_n x)$ , и внешнее воздействие тоже многоволновое, условий синхронизма будет  $n$ , т. е. будет  $n$  равенств фазовой скорости собственной волны на частоте  $\omega_i$ ; фазовой скорости внешней волны на той же частоте. Осознание сформулированных нами условий синхронизма позволило в свое время создавать электронные СВЧ-приборы с длительным взаимодействием электронов и волны (наиболее известный из них — лампа с бегущей волной — ЛБВ [9]). Для этих приборов время пролета электронов через пространство взаимодействия много больше периода высокочастотных колебаний поля в отличие от резонансных СВЧ-приборов типа клистронов — приборов с кратковременным взаимодействием, о которых мы писали в гл. 1.

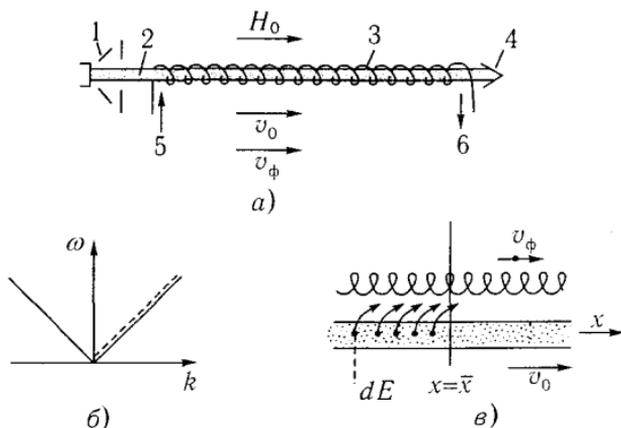


Рис. 4.24. Схема лампы бегущей волны: 1 — электронная пушка; 2 — электронный пучок; 3 — спираль; 4 — коллектор; 5 и 6 — входное и выходное устройства;  $H_0$  — фокусирующее магнитное поле (а); дисперсионные характеристики волны (сплошная линия) и пучка (штриховая линия) для модели  $v_0 \approx v_\phi$  (б) и иллюстрация пространственного резонанса (в сечении  $x = \bar{x}$  поле есть суперпозиция полей, создаваемых каждым элементом возмущенного пучка, расположенным при  $x < \bar{x}$ ; поля складываются в фазе, если  $v_0 \approx v_\phi$ ) (в)

Если считать, что  $u(x, t)$  — продольная составляющая электрического поля  $E$  волны в волноведущей системе, а  $G(x, t)$  — волна переменного тока  $I$  в электронном пучке (с точностью до размерного постоянного коэффициента), то уравнение для  $u(x, t)$  есть уравнение возбуждения волновода заданным током [10, 11]:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} E = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 K I(x),$$

где  $K$  имеет размерность сопротивления и называется сопротивлением связи. Если прямолинейный электронный пучок с малой плотностью тока представить как поток невзаимодействующих частиц, движущихся со скоростью  $v_0$ , то высокочастотные возмущения имеют вид волны тока  $I(x, t) = I(0) \exp(i\omega t - i\omega x/v_0)$  с фазовой скоростью  $v_0$  ( $v_{\text{вн}} = v_0$ ). Таким образом, простейшее условие синхронизма — это равенство конвективной скорости электронов фазовой скорости волны. Кстати, из этого условия следует необходимость при нерелятивистских скоростях электронов замедлять электромагнитную волну (в большинстве ЛБВ используются спиральные замедляющие системы; рис. 4.24). В случае, когда кулоновы силы в пучке существенны, возмущения в нем распро-

страняются в виде волн пространственного заряда, скорости которых не равны  $v_0$ . Для пространственного резонанса в этом случае необходимо, чтобы был синхронизм между одной из волн пространственного заряда и волной в замедляющей системе. Следует заметить, что в своих рассуждениях мы рассматривали лишь влияние внешней волны на собственную. В большинстве случаев это не так: при условии синхронизма есть и обратное влияние. В ЛБВ, например, поле волноведущей системы модулирует пучок по скорости и группирует электроны в сгустки. Такое взаимодействие имеет место в случае связанных волн, которые мы рассмотрим в гл. 10.

## 4.6. Квазичастицы

Основываясь на дуализме волн и частиц, можно ввести кванты энергии полей в макроскопических телах — квазичастицы. Для тех, кто знаком с квантовой механикой, поясним эту аналогию. Исходя из квантовых представлений, гамильтониан для цепочки из одинаковых связанных частиц (см. рис. 4.1) можно в обозначениях гл. 1 записать как сумму членов вида (1.34), т. е.

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar \omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (4.51)$$

где  $a_k^\dagger a_k = N_k$  — оператор числа бозонов в состоянии  $k$ , а сумма берется по всем допустимым значениям вектора  $\mathbf{k}$ . Эти значения  $k$  обычно определяются из периодических граничных условий  $q_{i+M} = q_i$  для координаты (условие замкнутости цепочки;  $M$  — число частиц в цепочке). Тогда допустимые значения волнового вектора суть  $k = 2\pi n / (Ma)$ , где  $n$  — любое целое число между  $-M/2$  и  $M/2$ . В выражении (4.51)

$$\omega_k = 2 \sqrt{\frac{W''}{m}} \sin\left(\frac{\pi n}{M}\right), \quad (4.52)$$

т. е. полученная из квантовых соображений формула для частоты в точности совпадает с соответствующей формулой классической теории.

Собственные значения энергии равны

$$\mathcal{E} = \sum_k \hbar \omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right), \quad (4.53)$$

где  $k$  пробегает все значения из  $M$  положительных чисел.

Итак, поведение одномерной цепочки из одинаковых частиц можно представить набором нормальных колебаний, каждое из которых соответствует своему гармоническому осциллятору. Таким образом,

каждому нормальному колебанию соответствуют определенное волновое число  $k$  и определенная собственная частота  $\omega_k$ , а энергетическое состояние осциллятора задается квантовым числом его нормального колебания. Уже одно то, что энергия нормального колебания с частотой  $\omega_k$  принимает значения, выражающиеся целыми числами, умноженными на  $\hbar\omega_k$  (если отсчитывать от нуля, а не от основного уровня энергии  $\hbar\omega_k/2$ ), наводит на мысль о квантовой структуре процесса. Получающиеся кванты и называют квазичастицами. Одновременно могут возбуждаться и несколько нормальных колебаний, что соответствует присутствию в системе нескольких квазичастиц.

В рассматриваемом нами случае простейшей модели твердого тела (в одномерной цепочке из одинаковых частиц) происходят упругие колебания атомов в кристаллической решетке.

В кристалле существуют различные типы упругих волн, которые в первую очередь различаются законом дисперсии. Простейший из них — акустические волны. Им соответствует при малых  $ka$  ( $a \ll \lambda$ ) дисперсионное уравнение (4.13), которое удобно переписать в виде  $\omega_k = vk$ , где  $v = \sqrt{W''a^2/m}$  имеет смысл скорости звука. С квантовой точки зрения, как мы видели, энергия и импульс, связанные с каждой нормальной волной, принимают только дискретные значения, пропорциональные  $\epsilon = \hbar\omega_k$  и  $p = \hbar k$ . Каждую такую волну можно рассматривать как квазичастицу с квазиимпульсом  $p$  (при столкновении квазичастиц в кристаллах квазиимпульс не сохраняется) и энергией  $\epsilon$ . Эти квазичастицы называют фононами — квантами звука. Из сказанного следует закон дисперсии длинноволновых фононов:  $\epsilon = vp$ . В квантовой теории поля, решая классические уравнения движения системы, находят нормальные колебания, а потом называют каждое из них квантовым осциллятором с собственными значениями энергии  $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2)$  [12, 13]. Квантованные нормальные колебания (квазичастицы) имеют разные названия.

Мы уже говорили о фононах, но, пожалуй, самая известная квазичастица — фотон: квант в теории электромагнитного поля с энергией  $\epsilon = \hbar c$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Волны в системе электронных спинов, связанных между собой обменными силами, называются спиновыми, а соответствующие им квазичастицы — магнонами. Коллективные плазменные колебания электронного газа в металлах, связанные с кулоновскими силами, часто называют плазмонами. В полупроводниках существуют нейтральные квазичастицы — экситоны. Об упомянутых квазичастицах и многих других (поляронах, флуктуонах и т. п.) можно прочитать в книге [14].

## ГЛАВА 5

# Свойства волн малой амплитуды в сплошных средах

### 5.1. Общие замечания

В этой главе мы обсудим дисперсионные характеристики волн в различных реальных средах. Ограничимся средами, в которых физические явления допускают гидродинамическое описание. Это, конечно, жидкости и газы и, кроме того, плазма и плазмоподобные среды (например, пучки заряженных частиц), при анализе волн в которых можно пренебречь кинетическими эффектами или учесть их феноменологически. Будут рассмотрены как хорошо известные из общего курса физики звуковые волны, так и более специфические — волны в атмосфере и океане, связанные с вращением Земли; внутренние волны в стратифицированном океане; ионно-звуковые волны в неизотермической плазме и т. д.

Сравнительно подробное обсуждение свойств различных типов волн, предпринятое в этой главе, облегчает нам в дальнейшем их понимание и описание с единой точки зрения.

При гидродинамическом описании жидкость рассматривается как сплошная среда (см., например, [1, 26]), т. е. при анализе смещения некоторой частицы жидкости речь идет не об отдельной молекуле, а об элементе объема жидкости, включающем много молекул. В гидродинамике такой элемент, малый по сравнению с пространственными масштабами интересующих нас процессов, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями, считается точкой. Для полного описания поведения движущейся жидкости достаточно, чтобы в такой точке были заданы следующие независимые переменные: скорость жидкости  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , термодинамические величины, например, энтропия  $S(x, y, z, t)$ , отнесенная к единице массы жидкости [6], и плотность массы  $\rho(x, y, z, t)$  ( $x, y, z$  — координаты рассматриваемого элемента объема в момент времени  $t$ ). При таком, эйлеровом, описании скорость  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  не связана с определенными частицами жидкости, которые перемещаются со временем в пространстве, а относится

к определенным точкам пространства в момент времени  $t$ . Также надо понимать и величины  $S$  и  $\rho$ .

Существование волн в жидкости, находившейся первоначально в стационарном состоянии, обусловлено возмущением жидкости и конкуренцией между силой, стремящейся возвратить жидкость в исходное состояние, и силами инерции, которые заставляют жидкость проскочить его. Например, для волн на воде возвращающими являются сила тяжести и сила поверхностного натяжения, для вращающейся жидкости — сила Кориолиса, для проводящей жидкости — сила действия магнитного поля.

## 5.2. Уравнения гидродинамики. Дисперсионное уравнение для звуковых волн

Ограничимся рассмотрением идеальной жидкости. Идеальной называется жидкость, при движении которой вектор напряжения в жидкости перпендикулярен любому элементу поверхности независимо от того, как он ориентирован в пространстве (т. е. выполняется закон Паскаля). Математически это означает, что давление в жидкости есть скаляр, а не тензор [2]. В этом случае в жидкости отсутствуют сдвиговые силы, в частности силы вязкости.

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения элемента объема  $dV$  жидкости плотности  $\rho$  можно записать в виде  $\rho(d\mathbf{v}/dt)dV = d\mathbf{F}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость рассматриваемого элемента,  $d\mathbf{F}$  — сила, действующая на каждый элемент объема  $dV$ . На любой выделенный объем  $V$  жидкости со стороны окружающей жидкости действует сила, равная интегралу от давления, который берется по поверхности выделенного объема, т. е.  $-\oint p d\mathbf{S}$ . (Предполагается, что вектор  $d\mathbf{S}$  равен площади элемента поверхности по абсолютному значению и направлен по внешней нормали к ней; отсюда знак минус перед силой.) Но по интегральной теореме о градиенте  $-\oint p d\mathbf{S} = -\int_V \nabla p dV$ . Кроме того, на выделенный элемент может действовать внешняя заданная сила с плотностью  $\rho\mathbf{a}_{\text{вн}}$ . Таким образом,  $d\mathbf{F} = -\nabla p dV + \rho\mathbf{a}_{\text{вн}} dV$ , и уравнение движения становится таким:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{a}_{\text{вн}}. \quad (5.1)$$

Учитывая в (5.1), что  $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ , приходим к основному

уравнению гидродинамики — уравнению Эйлера:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{a}_{\text{вн}} \rho. \quad (5.2)$$

Очевидно, что имеет место закон сохранения массы  $\int_V \rho dV$  рассматриваемого объема: изменение во времени массы в данном объеме  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$  равно взятому с обратным знаком потоку массы  $-\oint \rho \mathbf{v} dS$  через поверхность, ограничивающую этот объем, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint \rho \mathbf{v} dS = 0, \quad (5.3)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (5.4)$$

Это — уравнение непрерывности. Вектор  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  называют плотностью потока жидкости.

В уравнениях (5.2) и (5.4) пять неизвестных: плотность, три составляющие скорости и давление, т. е. одного уравнения не хватает. Таким уравнением является уравнение термодинамического состояния.

Будем считать, что теплообмен между отдельными элементами жидкости отсутствует (жидкость течет с такой скоростью, что отдельные ее участки не успевают обмениваться теплом друг с другом) и что она не обменивается теплом с окружающими телами, с которыми соприкасается. Такое допущение означает, что движение происходит адиабатически в каждом элементе жидкости, т. е. энтропия  $S$ , отнесенная к единице массы жидкости, остается постоянной при перемещении этого, элемента в пространстве. Таким образом,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S = 0. \quad (5.5)$$

Умножим (5.4) на  $S$ , (5.5) — на  $\rho$  и, сложив полученные соотношения, получим  $S \partial \rho / \partial t + \rho \partial S / \partial t + S \text{div } \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \nabla S = 0$ . Используя в последнем соотношении формулу  $\text{div}(af) = a \text{div } f + f \nabla a$ , приходим к уравнению непрерывности для энтропии

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \text{div}(\rho S \mathbf{v}) = 0, \quad (5.6)$$

где  $\rho S \mathbf{v}$  — плотность потока энтропии. Если в начальный момент времени распределение энтропии жидкости пространственно однородно, то

$$S = \text{const} \quad (5.7)$$

в любой момент времени. Такой адиабатический процесс, происходящий при постоянной энтропии, называется изэнтропийным. В этом случае уравнение состояния есть просто функциональная зависимость между плотностью и давлением:  $p = p(\rho)$  (или  $\rho = \rho(p)$ ), откуда

$$\frac{dp}{dt} = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_S \frac{d\rho}{dt}. \quad (5.8)$$

Линеаризуя уравнения (5.2), (5.4) относительно малых возмущений  $\rho'$ ,  $\mathbf{v}'$  и  $p'$  плотности, скорости и давления соответственно на фоне их равновесных значений  $\rho_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  и  $p_0$ , получаем (считаем  $\mathbf{a}_{\text{вн}} = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p', \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_S [\text{div}(\mathbf{v}_0 \rho') + \rho_0 \text{div} \mathbf{v}'] &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

В случае неподвижной среды ( $\mathbf{v}_0 = 0$ ), вводя потенциал скорости  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ , получаем для возмущения давления  $p' = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$ . В результате из второго уравнения (5.9) следует известное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \quad (5.10)$$

где  $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$  — скорость звука. Очевидно, что в декартовых координатах волновому уравнению удовлетворяет и каждая из трех компонент скорости (чтобы убедиться в этом, надо применить к волновому уравнению операцию grad), и давление.

Если все переменные в волне зависят лишь от одной из декартовых координат (плоская волна), то уравнение (5.10) переходит в уже обсуждавшееся в гл. 4 одномерное уравнение  $\partial^2 \varphi / \partial t^2 - c^2 \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ , которое имеет общее решение в виде суперпозиции двух встречных плоских волн:

$$\varphi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Поскольку в рассматриваемом приближении дисперсии у звуковых волн нет, то закон дисперсии выглядит так:

$$\omega = \pm ck. \quad (5.11)$$

Бегущие звуковые волны произвольной формы оказываются стационарными, т. е. их профиль в процессе распространения не меняется. Это легко пояснить на спектральном языке. Из-за отсутствия дисперсии все спектральные составляющие, образующие волну, движутся с одинаковыми скоростями, и фазовые соотношения между ними сохраняются.

В плоской акустической волне отлична от нуля только  $x$ -компонента скорости  $v_x = \partial\varphi/\partial x$ , т. е. частицы в волне движутся только по (или только против) направлению распространения волны. Именно поэтому акустические волны в жидкостях являются продольными.

Если скорость среды, в которой распространяется звуковая волна, отлична от нуля, то закон дисперсии (5.11) уже будет нарушен. Например, если плоская волна распространяется в однородном движущемся вдоль  $x$  с постоянной скоростью  $v_0$  потоке, то из (5.9) следует закон дисперсии:

$$\omega = \pm ck + v_0 k. \quad (5.12)$$

Величина  $v_0 k$  характеризует доплеровский сдвиг частоты акустической волны в движущейся среде относительно неподвижного наблюдателя. Если волна движется по потоку, ее частота возрастает на  $v_0 k$ , если против — уменьшается.

### 5.3. Стратифицированная жидкость. Звук в океане

Для описания волн в океане или атмосфере уравнения гидродинамики следует обобщить таким образом, чтобы учесть вращение Земли и стратификацию жидкости, т. е. зависимость плотности жидкости от вертикальной координаты. В частности плотность морской воды зависит от давления, температуры и относительного содержания массы растворенных солей, которые меняются с глубиной [5, 21, 22]. Соответствующее обобщение приводит к тому, что уравнение Эйлера вместо (5.2) примет вид

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - 2\rho[\Omega \mathbf{v}] - \rho g \nabla z. \quad (5.13)$$

Здесь  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\nabla z$  — единичный вектор вертикальной оси координат;  $\mathbf{a}_{\text{вн}}$  заменено на  $\mathbf{g}$ , поскольку жидкость находится в поле тяжести.

Предположим теперь, что длины интересующих нас волн много меньше радиуса Земли, и будем решать (5.13) и (5.4) на плоскости, соприкасающейся со сферической Землей в данной точке. Оси соответствующей прямоугольной системы координат направлены следующим образом: ось  $z$  — вертикально вверх, ось  $x$  — по параллели с запада на восток, ось  $y$  — по меридиану с юга на север. Линеаризуем уравнения относительно некоторого состояния покоя, в котором плотность и давление суть функции только  $z$ . Пусть  $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$ ,  $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$ , где  $p', \rho' \ll p_0, \rho_0$ . Заметим, что  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'(x, y, z, t)$ , так же как и  $p'$  и  $\rho'$ , есть величина первого порядка малости. Тогда из уравнений (5.13) и (5.4) получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -2[\Omega \mathbf{v}'] - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla z, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \nabla \rho_0. \quad (5.15)$$

Уравнение состояния (5.8) в линейном приближении имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 + \rho') = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(p_0 + p')$$

или

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} + v_z \frac{\partial p_0}{\partial z} \right),$$

где  $c(z) = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$  — адиабатическая скорость звука. Учитывая, что  $\partial p_0 / \partial z = -\rho_0 g$ , окончательно получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g v_z \right). \quad (5.16)$$

У горизонтального дна нормальная составляющая скорости должна исчезать, поэтому при  $z = -H$

$$v_z = 0, \quad (5.17)$$

где  $H$  — глубина жидкости. На поверхности жидкости давление составляет  $p_0 + p' = \text{const}$ , поэтому  $d(p_0 + p')/dt = 0$ , что с учетом правой части (5.16) дает при  $z = 0$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g v_z = 0. \quad (5.18)$$

Воспользуемся в уравнениях (5.14)–(5.16) так называемым приближением Буссинеска: всюду, где  $\rho_0(z)$  не стоит под знаком дифференциала, будем считать  $\rho_0 = \text{const}$ , причем пусть  $\rho_0(0) = \rho_{00}$ . Решение уравнений (5.14)–(5.16) будем искать в виде (см. [3])

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathcal{P}(z)}{\rho_{00}} V_x(x, y) e^{i\omega t}, & v_y &= \frac{\mathcal{P}(z)}{\rho_{00}} V_y(x, y) e^{i\omega t}, \\ v_z &= -i\omega \mathcal{V}(z) V_z(x, y) e^{i\omega t}, \\ p &= \mathcal{P}(z) V_z(x, y) e^{i\omega t}, & \rho' &= \rho'(x, y, z) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где  $\omega$  — частота интересующих нас волн.

Подставляя (5.19) в (5.14)–(5.16), после простых преобразований получаем из (5.14)

$$V_x + iqV_y - s\omega\rho_{00} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} V_z = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad (5.20)$$

$$V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \mathcal{P}(z) + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) - s\omega \mathcal{P} \frac{V_x}{V_z} = 0; \quad (5.22)$$

из (5.16) имеем

$$\frac{1}{c^2} + \frac{\rho_{00}g}{c^2} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} - \rho_{00} \frac{1}{\mathcal{P}(z)} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} = \frac{i}{\omega} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \frac{1}{V_z}. \quad (5.23)$$

При выводе (5.20)–(5.23) использовано полученное из (5.15) выражение

$$\rho' = \left[ \frac{\mathcal{P}(z)}{c^2} - \frac{\rho_{00}}{g} N^2(z) \mathcal{V}(z) \right] V_z \quad (5.24)$$

и определение частоты свободных вертикальных колебаний частиц жидкости, так называемой частоты Вайсяля:

$$N(z) = \left[ -\frac{g}{\rho_{00}} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\rho_0 g}{c^2(z)} \right) \right]^{1/2} \quad (5.25)$$

В уравнениях (5.20) и (5.21) введены следующие безразмерные величины:

$$q = \frac{2\Omega_z}{\omega} = \frac{2\Omega}{\omega} \sin \varphi, \quad s = \frac{2\Omega_y}{\omega} = \frac{2\Omega}{\omega} \cos \varphi, \quad (5.26)$$

где  $\varphi$  — географическая широта места. С учетом (5.19) граничные условия (5.17) и (5.18) переписутся так:

$$z = -H, \quad \mathcal{V}(z) = 0, \quad (5.27)$$

$$z = 0, \quad \mathcal{P}(z) + \rho_{00} g \mathcal{V}(z) = 0. \quad (5.28)$$

Как показано в [3], уравнения (5.20)–(5.23) допускают разделение переменных в двух случаях: 1)  $s$  и  $q$ , взятые при  $\varphi$ , равном широте места, являются постоянными; это приближение справедливо для волн, на длине которых  $q$  и  $s$  меняются мало, — для звуковых, поверхностных, внутренних и инерционных волн; 2) можно пренебречь слагаемыми, содержащими лишь  $\Omega_y$ , т. е.  $s$ , поскольку  $s \sim \Omega_y$ .

Итак, пусть

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{Bmatrix} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (5.29)$$

$V_{0x}$ ,  $V_{0y}$  — постоянные,  $V_{0z} = 1$ , что не ограничивает общности решения. Тогда уравнения (5.20) и (5.21) принимают вид

$$V_{0x} + iqV_{0y} = \frac{k_x}{\omega} + s\omega\rho_{00} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)}, \quad V_{0y} - iqV_{0x} = \frac{k_y}{\omega}.$$

Из этой системы уравнений находим, что

$$V_{0x} = \frac{1}{\omega(1-q^2)} \left\{ k_x + s\omega^2\rho_{00} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} - iqk_y \right\}, \quad (5.30)$$

$$V_{0y} = \frac{1}{\omega(1-q^2)} \left\{ k_y + iqk_x + iqs\omega^2\rho_{00} \frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} \right\}. \quad (5.31)$$

Наконец, из уравнений (5.22) и (5.23), используя (5.29)–(5.31), получаем два уравнения для  $\mathcal{V}(z)$  и  $\mathcal{P}(z)$ :

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \left( \frac{g}{c^2} - \frac{sk_x - iqsk_y}{1 - q^2} \right) \mathcal{P}(z) + \rho_{00} \left( \frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{1 - q^2} - N^2 \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \left( -\frac{g}{c^2} + \frac{sk_x + iqsk_y}{1 - q^2} \right) \mathcal{V}(z) + \frac{1}{\rho_{00}} \left[ -\frac{1}{c^2} + \frac{\xi^2}{\omega^2(1 - q^2)} \right] \mathcal{P}(z) = 0, \quad (5.33)$$

где  $\xi^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Учтем теперь, что частота  $\omega$  звуковых волн намного превосходит  $\Omega$  и  $N$ ; сила тяжести для этих волн в океане тоже не играет роли. Поэтому в (5.32) и (5.33) можно пренебречь слагаемыми, содержащими  $s$ ,  $q \sim \Omega$ ,  $N$  и  $g$ . Такое пренебрежение дает

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00} \omega^2 \mathcal{V}(z) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho_{00}} \mathcal{P}(z) + \frac{\xi^2}{\rho_{00} \omega^2} \mathcal{P}(z) = 0. \quad (5.34)$$

Исключая  $\mathcal{V}(z)$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}(z)}{\partial z^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right] \mathcal{P}(z) = 0, \quad (5.35)$$

которое является основным в акустике океана.

Хотя  $c(z)$  изменяется мало с глубиной, наличие, например, минимума  $c(z)$  на какой-то глубине приводит к образованию подводного акустического волновода, по которому звук низкой частоты от источников (для низких частот поглощение в воде мало) может распространяться на расстояния до нескольких десятков тысяч километров [3, 23].

## 5.4. Гравитационные волны в несжимаемой жидкости. Внутренние волны. Волны Россби

Заметим сразу, что в предположении несжимаемости  $c^2 = \frac{dp}{\rho} \rightarrow \infty$  уравнения (5.32), (5.33) могут быть упрощены и приведены к виду

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} - \frac{sk_x - iqsk_y}{1 - q^2} \mathcal{P} + \rho_{00} \left( \frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{1 - q^2} - N^2 \right) \mathcal{V} = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \frac{sk_x + iqsk_y}{1 - q^2} \mathcal{V} + \frac{\xi^2}{\omega^2 \rho_{00} (1 - q^2)} \mathcal{P} = 0. \quad (5.37)$$

Исключив  $\mathcal{P}$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2i \frac{q s k_y}{1 - q^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \left[ \frac{k_x^2 s^2 + q^2 k_y^2 + \xi^2 - (q^2 + s^2) \xi^2}{(1 - q^2)^2} - \frac{N^2 \xi^2}{\omega^2 (1 - q^2)} \right] \psi = 0. \quad (5.38)$$

Для анализа гравитационных волн на поверхности жидкости, как мы сейчас убедимся, не существенны ни стратификация жидкости, ни вращение Земли, т. е. в (5.38) можно отбросить слагаемые, содержащие  $N$ ,  $q$  и  $s$ , и мы придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial z^2} + \xi^2 \psi(z) = 0 \quad (5.39)$$

с граничными условиями (5.27), (5.28), которые при сделанных предположениях записываются в виде

$$\psi(z)|_{z=-H} = \left\{ g \psi(z) - \frac{\omega^2}{\xi^2} \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \right\}_{z=0} = 0. \quad (5.40)$$

Здесь учтено, что  $\partial \psi(z)/\partial z + (\xi^2/\omega^2 \rho_{00}) \mathcal{P}(z) = 0$  (см. (5.37)).

Справедливость используемых приближений мы покажем с помощью соображений размерности. Рассмотрим поверхностные волны, предполагая, что в состоянии равновесия поверхность жидкости горизонтальная. Если ее вывести из этого состояния, то для возникновения волн на поверхности жидкости необходимо существование возвращающей в положение равновесия силы и силы инерции, из-за которой жидкость «проскакивает» положение равновесия. Какая сила может заставить появившийся на поверхности жидкости «горб» исчезнуть, чтобы поверхность опять стала горизонтальной? Такой силой может быть, например, сила тяжести  $F_g \sim g$  или сила поверхностного натяжения  $F_\sigma \sim \sigma$  ( $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения). Обсудим действие этих сил отдельно.

Падая вниз под действием силы тяжести, «горб» по инерции провалится ниже положения равновесия; рядом с ним будет вытеснен другой «горб» и т. д. В жидкости начнет распространяться волна, которая и называется гравитационной. Анализ размерности позволяет найти характер зависимости фазовой скорости волны  $v_\phi$  от ее длины  $\lambda$ . Величина  $v_\phi$  должна зависеть от  $F_g \sim g$ , от инерции колеблющейся жидкости, мерой

которой является ее плотность  $\rho$ , и может зависеть от глубины жидкости  $H$ . Таким образом,  $v_\phi = f(\lambda, g, \rho, H)$ . Сразу видно из соображений размерности, что плотность  $\rho$  не будет входить в окончательную формулу, поскольку только в  $\rho$  входит размерность массы. Физически это связано с тем, что и вес «горба», возвращающий его к положению равновесия, и масса «горба» — его инерционность — пропорциональны  $\rho$ . Размерности  $\lambda$  и  $H$  одинаковы, размерность времени содержится только в  $g$ . Поэтому для скорости распространения волны можно написать две равноправные формулы:

$$v_\phi = \sqrt{gH} f_1\left(\frac{\lambda}{H}\right), \quad v_\phi = \sqrt{g\lambda} f_2\left(\frac{H}{\lambda}\right). \quad (5.41)$$

Пусть  $\lambda \ll H$ ; в этом случае говорят о волнах на глубокой воде или о коротких волнах, которые движутся лишь в поверхностном слое жидкости (толщина слоя порядка  $\lambda$ ). Тогда, очевидно, скорость распространения волны не должна зависеть от глубины жидкости, т. е.  $f_1(\lambda/H) = c_1(\lambda/H)^{1/2}$ , и, следовательно,

$$v_\phi = c_1 \sqrt{\lambda g}. \quad (5.42)$$

Очевидно, если считать, что скорость  $v_\phi$  равна  $f(\lambda, g, \rho)$  и не зависит от  $H$ , мы сразу приходим к формуле (5.42).

Когда же  $\lambda \gg H$  (волны в мелкой воде или длинные волны), скорость распространения волны не должна зависеть от  $\lambda$ , поскольку движение всех частиц в тонком слое жидкости практически одинаково. В этом случае в (5.41)  $f_2(H/\lambda) = c_2(H/\lambda)^{1/2}$  и

$$v_\phi = c_2 \sqrt{gH}. \quad (5.43)$$

Поскольку  $k = \omega/v_\phi$ , из (5.42) и (5.43) получаем следующие законы дисперсии для гравитационных волн в двух предельных случаях:

$$kH \gg 1, \quad \omega(k) = c_1 \sqrt{2\pi gk} \quad \text{— глубокая вода,} \quad (5.44)$$

$$kH \ll 1, \quad \omega(k) = c_2 k \sqrt{gH} \quad \text{— мелкая вода.} \quad (5.45)$$

Проведенный анализ не строг. Мы не можем найти в его рамках  $c_1$  и  $c_2$ . Для их определения воспользуемся уравнениями (5.39) и (5.40). Если решение уравнения (5.39)  $\mathcal{V}(z) = A_1 \exp(\xi z) + A_2 \exp(-\xi z)$  подставить в граничные условия (5.40), то из условия совместности получившейся алгебраической системы уравнений с неизвестными  $A_1$  и  $A_2$  находим

дисперсионное уравнение для поверхностных волн в жидкости конечной глубины:

$$\begin{vmatrix} e^{-\xi H} & e^{\xi H} \\ g - \frac{\omega^2}{\xi} & g + \frac{\omega^2}{\xi} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \omega^2 = \xi g \operatorname{th}(\xi H). \quad (5.46)$$

Легко видеть, что

$$\omega = \sqrt{\xi g} \quad \text{при} \quad \xi H \gg 1, \quad (5.47)$$

$$\omega = \xi \sqrt{gH} \left[ 1 - \frac{(\xi H)^2}{6} + \dots \right] \quad \text{при} \quad \xi H \ll 1. \quad (5.48)$$

Таким образом, в случае, когда, например,  $\xi = k_x = k$ , в (5.44) и (5.45)  $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ ,  $c_2 = 1$ . Из формул (5.42)–(5.44) при  $\xi = k_x = k$  следует, что при  $kH \rightarrow 0$  (мелкая жидкость) фазовая скорость  $v_\phi$  стремится к постоянному пределу  $\sqrt{gH}$  — дисперсия слабая. На глубокой воде дисперсия всегда есть ( $\omega \sim \sqrt{k}$ ); она связана с нелокальной зависимостью между давлением и глубиной жидкости. Гравитационные волны обладают отрицательной дисперсией, поскольку  $v_\phi = [(g/k) \operatorname{th}(kH)]^{1/2}$  уменьшается с ростом частоты. Групповая скорость  $v_{гp} = d\omega/dk$  тоже уменьшается с ростом частоты, поэтому, скажем, в море или океане к берегу из области возникновения приходят сначала длинные волны, а уже потом короткие. Этот факт можно использовать для определения расстояния до шторма (читателю, по-видимому, доставит удовольствие придумать способ обнаружения штормов и оценить максимальную дальность обнаружения; см. гл. 4).

Заметим, что при анализе гравитационных волн мы исходили из достаточно общих уравнений. Если ограничить себя с самого начала анализом гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ), то можно исходить из уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.49)$$

Полагая далее, что движение потенциальное ( $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ ), можно ввести потенциал скорости  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ . Воспользуемся формулой векторного анализа  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \nabla v^2/2 - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]$ . Тогда для несжимаемой жидкости  $\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \partial \mathbf{v} / \partial t + \nabla v^2/2$  и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \mathbf{g}.$$

Поскольку  $\mathbf{g}$  есть сила, действующая в поле тяжести на единицу массы, можно ввести  $\mathbf{g} = -\nabla U$ , где  $U$  — потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле тяжести. Тогда

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0,$$

откуда легко можно получить так называемый интеграл Коши-Лагранжа [7]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = f(t),$$

где  $f(t)$  — некоторая функция времени. В стационарном потоке жидкости ( $\partial \Phi / \partial t = 0$ ), когда движение установившееся и скорость не зависит от времени, этот интеграл переходит в уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const}, \quad (5.50)$$

причем для потенциального движения константа в (5.50) одинакова во всей жидкости. Если  $\text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \neq 0$  ( $\boldsymbol{\omega}$  характеризует завихренность и определяет угловую скорость элементарного объема жидкости), то (5.50) справедливо вдоль данной линии тока (постоянная может быть разной вдоль разных линий тока).

Очевидно, что (5.50) выражает закон сохранения энергии. В этом состоит смысл уравнения Бернулли, связывающего скорость с давлением, поскольку  $U$  известна. Мы воспользуемся (5.50) в гл. 7, чтобы объяснить известную неустойчивость Гельмгольца, не решая уравнений гидродинамики.

Обратимся теперь к очень коротким волнам, когда жидкость стремится вернуться в положение равновесия под действием силы поверхностного натяжения. Такие волны называются капиллярными. Для этих волн разумно предположить, что  $v_\phi = f(\lambda, \sigma, \rho)$ . Размерность скорости будет иметь единственная комбинация из этих величин, а именно

$$v_\phi = c_3 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}}. \quad (5.51)$$

Закон дисперсии, соответствующий (5.51), имеет вид

$$\omega = c_3 k^{3/2} \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi\rho}}. \quad (5.52)$$

Теперь решим задачу более строго, исходя из интеграла Коши–Лагранжа и уравнения

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = 0, \quad (5.53)$$

которое получено из условия несжимаемости  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  и определения  $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ . Когда поверхность раздела, скажем, между воздухом и жидкостью искривлена, то разность давлений по разные стороны от нее (но вблизи поверхности раздела) можно определить по формуле Лапласа [1, 6]:

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}.$$

Эта разность называется поверхностным давлением;  $R$  — радиус кривизны поверхности, причем  $1/R = \partial^2 \zeta / \partial x^2$ , если  $\zeta = \zeta(x, t)$  — уравнение кривой, соответствующей границе раздела, а поверхность изогнута слабо. В нашем случае формула Лапласа имеет вид

$$p - p_0 = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (5.54)$$

где  $p$  — давление вблизи поверхности жидкости,  $p_0 = \text{const}$  — внешнее давление. На рис. 5.1 кривизна поверхности отрицательна, что учтено знаком в (5.54). В линейном приближении интеграл Коши–Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \quad (5.55)$$

поскольку слагаемым  $v^2/2$  в этом приближении можно пренебречь, силу тяжести мы не учитываем, чтобы рассмотреть только капиллярные волны, а  $f(t)$  можно, не нарушая общности, считать равной нулю [1]. Используя (5.54), для  $z = 0$  из (5.55) будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (5.56)$$

Будем искать решение системы (5.53) в виде  $\Phi = \varphi(z) \exp[i(\omega t - kx)]$ . Тогда  $\partial^2 \varphi / \partial z^2 - k^2 \varphi = 0$  и  $\varphi(z) = B_1 \exp(kz) + B_2 \exp(-kz)$ . Но если жидкость достаточно глубокая, то  $\varphi(z) \approx B_1 e^{kz}$ , поскольку под поверхностью  $z < 0$  (плоскость  $xy$  совпадает с невозмущенной горизонтальной поверхностью жидкости). Продифференцируем (5.56) по  $t$  и учтем,

что  $\partial\zeta/\partial z = v_z = \partial\Phi/\partial z$ . Будем иметь

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (5.57)$$

Поскольку  $\Phi \approx B_1 \exp(kz) \cdot \exp(i\omega t - ikx)$ , из (5.57) получаем следующее уравнение для капиллярных волн:

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3. \quad (5.58)$$

Таким образом,  $c_3$  в (5.52) равно  $\sqrt{2\pi}$ . Если одновременно учесть действие на жидкость обеих возвращающих сил — и силы тяжести, и силы поверхностного натяжения, — то в предположении, что  $\Phi = \Phi(x, z, t)$ , для жидкости, глубина которой равна  $H$ , мы получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \left[ kg + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right] \text{th}(kH). \quad (5.59)$$

Это уравнение дает закон дисперсии для гравитационно-капиллярных волн (предоставляем читателям самим получить (5.59)).

Для капиллярных волн  $v_\Phi = \sqrt{\sigma k/\rho}$ , т.е. фазовая скорость растет с ростом  $\omega$ , что соответствует положительной дисперсии. На рис. 5.2 приведены зависимости  $\omega$  и  $v_\Phi$  от  $k$  для поверхностных волн; кривые соответствуют (5.59).

В свое время, после открытия деления урана, теория капиллярных волн была с успехом применена к исследованию устойчивости атомного ядра по отношению к его делению на две приблизительно одинаковые по размерам части. Созданная теория основывалась на том, что между частицами в ядре действуют близкодействующие силы, которые похожи на силы поверхностного натяжения в жидкости (между молекулами тоже действуют силы близкодействия). Такому «поверхностному натяжению» в ядре противостоят дальнедействующие силы — силы кулоновского расталкивания протонов. Для частоты колебаний сферического ядра получается формула, подобная (5.59) при  $kH \gg 1$ , только первое слагаемое в правой части имеет электрическое, а не гравитационное происхождение, и перед ним стоит знак минус (кулонова сила направлена по внешней нормали к поверхности). Из этого соотношения.

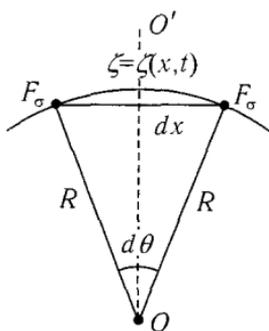


Рис. 5.1. К определению силы поверхностного натяжения для поверхности с отрицательной кривизной

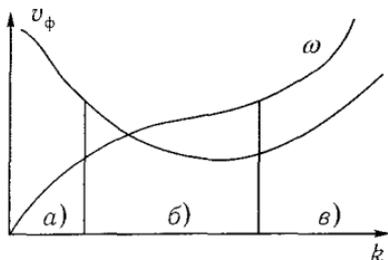


Рис. 5.2. Зависимости  $\omega$  и  $v_\phi$  от  $k$  для поверхностных волн: а — длинные гравитационные волны ( $kH \ll 1$ ,  $kg \gg \sigma k^3/\rho$ ,  $\omega \approx k\sqrt{gH}$ ,  $v_\phi \approx \sqrt{gH}$ ); б — короткие гравитационные волны ( $kH \gg 1$ ,  $kg \gg \sigma k^3/\rho$ ,  $\omega \approx \sqrt{gk}$ ,  $v_\phi \approx \sqrt{g/k}$ ); в — капиллярные волны ( $kH \gg 1$ ,  $kg \ll \sigma k^3/\rho$ ,  $\omega \approx k\sqrt{\sigma k/\rho}$ ,  $v_\phi \approx \sqrt{\sigma k/\rho}$ )

можно было найти условия неустойчивости ядра при бесконечно малых искажениях его поверхности.

Постройте сами теорию дробления заряженных дождевых капель, считая каплю сферической, а жидкость несжимаемой (колебания следует разлагать на стоячие сферические волны по полиномам Лежандра) [8].

Простейший пример внутренних волн в стратифицированной жидкости — волны, распространяющиеся вдоль поверхности раздела двух однородных жидкостей разной плотности. Распространение волн обусловлено балансом между силами плавучести и полной силой инерции жидкости. Более сложный случай — волны в жидкости с непрерывной стратификацией. В стратифицированной жидкости любое смещение произвольного участка жидкости по высоте нарушает равновесие, и возникают колебания. Как уже говорилось, плотность морской воды зависит не только от давления, но от температуры и от относительного содержания растворенных солей, которые меняются с глубиной.

Предположим сначала, что  $\omega \gg \Omega$  и вращением Земли можно пренебречь. При этом уравнение (5.38) значительно упрощается:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} - \xi^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \mathcal{V}(z) = 0. \quad (5.60)$$

Если среда безгранична и  $N = \text{const}$ , то  $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}(0) \exp(\pm ik_z z)$ ,  $k_z^2 = -\xi^2(1 - N^2/\omega^2)$  и

$$k^2 = k_z^2 + \xi^2 = \xi^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2}\right) \quad (5.61)$$

или

$$\sin \theta = \frac{\mu \omega}{N}, \quad (5.62)$$

где  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{k}$  и вертикалью,  $\mu = \pm 1$ . Из (5.62) следует, что волны могут существовать только при  $\omega < N$ . Если угол  $\theta$  задан, то частота  $\omega$  определяется однозначно, в то время как длина волны и фазовая скорость могут быть произвольными.

Заметим, что в несжимаемой жидкости условие  $N = \text{const}$  соответствует экспоненциальной зависимости плотности от глубины.

Рассмотрим распространение внутренних волн в волноводе, образованном поверхностью жидкости и горизонтальным дном. В этом случае решение уравнения (5.60) при сохранении предположения о постоянстве частоты Вайсяля имеет вид

$$\mathcal{V}(z) = c_1 \exp(-ik_z z) + c_2 \exp(ik_z z), \quad k_z = \left[ \left( \frac{N}{\omega} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (5.63)$$

Подставляя (5.63) в граничные условия (5.40), получим следующую систему уравнений:

$$c_1 \exp(ik_z H) + c_2 \exp(-ik_z H) = 0, \quad (5.64)$$

$$\left( g + \frac{ik_z \omega^2}{\xi^2} \right) c_1 + \left( g - \frac{ik_z \omega^2}{\xi^2} \right) c_2 = 0.$$

Из условия совместности системы (5.64) — равенства нулю ее определителя — находим дисперсионное уравнение

$$gk_z \operatorname{tg}(k_z H) = N^2 - \omega^2. \quad (5.65)$$

При  $k_z H \ll 1$  можно считать, что  $\operatorname{tg}(k_z H) \approx k_z H$  и, следовательно, когда  $\omega < N$ , одно из решений (5.65) запишется так:

$$k_{z0} = \left[ \frac{N^2 - \omega^2}{gH} \right]^{1/2}. \quad (5.66)$$

С учетом второго соотношения (5.63) из (5.66) имеем  $\omega = \xi_0 \sqrt{gH}$ , что совпадает с (5.49) при  $\xi H \rightarrow 0$ .

Очевидно, что найденная в этих приближениях волна — это поверхностная волна в мелкой воде, которая распространяется со скоростью  $\sqrt{gH}$ , т.е. стратификация жидкости не влияет на характер этой волны.

Мы уже говорили, что при  $N = \text{const}$  в несжимаемой жидкости плотность зависит от глубины по закону  $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-2\nu z)$ . Здесь  $\nu = N^2/(2g)$ . Поскольку  $\nu H \ll 1$  (типичные значения  $N$  для океана колеблются в пределах от 0 до  $0,01 \text{ с}^{-1}$  [5]), величина  $(k_{z0}H)^{-2} = g/[H(N^2 - \omega^2)]$  при  $\omega < N$  имеет порядок величины  $(\nu H)^{-1}$ , которая много больше единицы. Переписывая (5.65) в виде  $\text{ctg}(k_z H)/(k_z H) = g/[H(N^2 - \omega^2)] \sim (\nu H)^{-1} \gg 1$ , находим, что корни дисперсионного уравнения достаточно близки к

$$k_z H \approx \pi n \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5.67)$$

или с учетом второго соотношения из (5.63)

$$\omega = N \left[ 1 + \left( \frac{n\pi}{\xi_n H} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.68)$$

Полученный для внутренних волн закон дисперсии — это типичный закон дисперсии для многомодового волновода (рис. 5.3).

Когда  $N$  зависит от  $z$ , возможны и более сложные законы дисперсии [24]. Как отмечается в [3], решения уравнения (5.60) с граничными условиями (5.40) при  $N = N(z)$  описывают волны, одна из которых близка к поверхностной, поскольку максимум  $\mathcal{V}(z)$  достигается при  $z = 0$ , и, кроме того, набор внутренних волн, у которых максимумы расположены внутри интервалов  $0 < z < H$ .

Остановимся кратко на гироскопических (инерционных) волнах, закон дисперсии для которых можно получить из уравнений (5.32) и (5.33) для однородной ( $N = 0$ ) несжимаемой ( $c \rightarrow \infty$ ) жидкости. Эти волны характерны для океана — они связаны с вращением Земли.

Для решений вида  $\mathcal{V}(z)$ ,  $\mathcal{P}(z) \sim \exp(\pm i k_z z)$  после простых, но громоздких преобразований получаем (см. [3])

$$\omega^2 = 4\Omega \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \quad \text{или} \quad \omega = 2\mu\Omega \cos \theta \quad (\mu = \pm 1), \quad (5.69)$$

где  $\theta$  — угол между  $\Omega$  и  $\mathbf{k}$ ; значение  $\mu$  выбирается из условия  $\mu \cos \theta > 0$ . Из (5.69) следует, что, поскольку для данной частоты угол  $\theta$  вполне

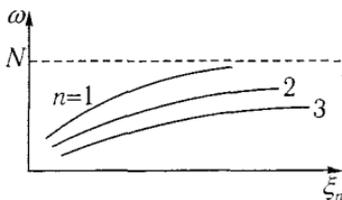


Рис. 5.3. Закон дисперсии для внутренних волн в многомодовом волноводе

определенный, длина волны может быть любой, как и для внутренних волн.

Если  $N = \text{const}$  и  $\Omega \neq 0$ , то возникают так называемые гравитационно-гироскопические волны, закон дисперсии для которых, как показано в [3], имеет вид  $\omega^2 = N^2 \sin \varkappa + 4\Omega^2 \cos^2(\mathbf{k}\Omega)$ ,  $\varkappa$  — угол между  $\mathbf{k}$  и положительным направлением оси  $z$ .

Волноводная задача для инерционных волн на мелкой воде в пренебрежении членом  $k_y \Omega_y$  (это можно сделать, если  $k_y \ll k_z$  т.е. если масштаб изменения величин в направлении  $z$  много меньше длины волны в  $y$ -направлении) приводит к дисперсионному уравнению  $\omega^2 = \xi^2 gH + 4\Omega_z^2$ . Когда  $\Omega_z \rightarrow 0$ , получаем длинные гравитационные волны ( $\omega = \xi\sqrt{gH}$ ). Таким образом, вращение Земли приводит к появлению дисперсии у длинных гравитационных волн.

Волны Россби могут быть исследованы в рамках тех же общих уравнений (5.20)–(5.23), но в приближении, когда  $d\Omega/dy = \beta = \text{const}$  (приближение  $\beta$ -плоскости; см. [22], с. 35). Прежде чем обсудить свойства этих волн, заметим, что они весьма важные при изучении синоптических океанических вихрей [3, 4]. Эти вихри подобны циклонам и антициклонам в атмосфере (отсюда термин «синоптические»). Понимание их динамики в связи с процессами взаимодействия океана и атмосферы очень важно для построения корректной математической модели циркуляции атмосферы, а следовательно, обеспечения верного, хотя и сравнительно краткосрочного, предсказания погоды.

Линейные модели распространения волн Россби оказываются полезными при описании среднего дрейфа синоптических вихрей [4].

Традиционным приближением для получения волн Россби является допущение о том, что  $k_z \gg k_y$ . Оно и позволяет отбросить в уравнениях члены, содержащие горизонтальную составляющую вектора  $\Omega$ , т.е. слагаемые, содержащие  $s$ . Главным условием существования этих волн является изменение вертикальной составляющей  $\Omega_z$  с широтой  $\varphi$ , т.е. изменение с широтой горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Для того чтобы учесть это, разложим  $q = (2/\omega)\Omega \sin \varphi$  в ряд по степеням  $y/a$  в точке  $\varphi = \varphi_0 = \varphi_{x=0, y=0}$  и ограничимся двумя членами разложения. Очевидно, что  $q = q(\varphi_0) + dq/d\varphi|_{\varphi=\varphi_0} \Delta\varphi = (2\Omega/\omega) \sin \varphi_0 + + (2\Omega/\omega) \cos \varphi_0 \Delta\varphi$ ,  $\Delta\varphi = y/a$ , где  $a$  — радиус Земли. Окончательно получаем

$$q = \left(\frac{2\Omega}{\omega}\right) \sin \varphi_0 + \beta \frac{y}{\omega}, \quad (5.70)$$

$$\beta = \left(\frac{2\Omega}{a}\right) \cos \varphi_0. \quad (5.71)$$

Учет члена  $\beta y$  в выражении (5.70) называют учетом  $\beta$ -эффекта. Предполагая еще, что  $c \rightarrow \infty$ , с учетом сделанных допущений перепишем систему уравнений (5.20)–(5.23) следующим образом:

$$\begin{aligned} V_x + iqV_y &= \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial x}, & V_y - iqV_x &= \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) &= 0, \\ -\rho_{00} \frac{1}{\mathcal{P}(z)} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} &= \frac{i}{\omega} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \frac{1}{V_z}. \end{aligned}$$

Мы уже говорили, что в такой системе уравнений возможно разделение переменных (см. § 5.2). В последнем уравнении правая часть может зависеть только от  $x$ , а левая — от  $z$ . Вводя параметр разделения  $\varepsilon$  и приравнивая ему обе части последнего уравнения системы, получим окончательно

$$V_x + iqV_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -i\omega\varepsilon V_z; \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\rho_{00}} \mathcal{P}(z) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) = 0. \quad (5.73)$$

Продифференцируем первое уравнение в (5.72) по  $y$ , второе по  $x$  и вычтем одно из другого, учитывая, что  $dq/dy = \beta/\omega$ . Используя в получившемся уравнении третье из (5.72), находим

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} + \omega\varepsilon q V_z + i\frac{\beta}{\omega} V_y = 0. \quad (5.74)$$

Дифференцируя третье уравнение из (5.72) по  $y$  и используя второе уравнение, будем иметь

$$\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \omega^2 \varepsilon V_y = -\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + iq\omega^2 \varepsilon V_x. \quad (5.75)$$

Выражение для  $\partial^2 V_x / \partial x \partial y$  легко найти, взяв производную по  $y$  от (5.74). Подставив получившееся соотношение для  $\partial^2 V_x / \partial x \partial y$  в (5.75) и используя первое уравнение из (5.72), удастся исключить из системы (5.72)  $V_x$  и  $V_z$ .

Уравнение для  $V_y$  имеет вид

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i \frac{\beta}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} + \omega^2 \varepsilon (1 - q^2) \right] V_y = 0. \quad (5.76)$$

Предположим, что  $\omega \ll \Omega$  и  $q^2 \gg 1$ , т.е.  $1 - q^2 \approx -q^2$ . Если решение уравнения (5.76) имеет вид плоских волн  $V_y = V_{y0} \exp[-i(k_x x + k_y y)]$ , то дисперсионное уравнение получается таким:

$$\left[ k_x + \frac{\beta}{2\omega} \right]^2 + k_y^2 = \left[ \frac{\beta}{2\omega} \right]^2 - 4\varepsilon \Omega^2 \sin^2 \varphi_0. \quad (5.77)$$

Параметр разделения  $\varepsilon$  находится как собственное значение системы уравнений (5.73) с граничными условиями (5.27) и (5.28); эти уравнения и условия легко переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} - \varepsilon \omega^2 \left( 1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (5.78)$$

$$\mathcal{V}(z)|_{z=-H} = \left[ g \mathcal{V}(z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (5.79)$$

Если положить  $\varepsilon = \xi^2/\omega^2$ , то (5.78) совпадает с уравнением (5.60) для внутренних волн, а (5.79) — с граничным условием (5.40). Из соответствующих соотношений для волноводных волн (из второго соотношения (5.63) и (5.66), а также (5.67)) имеем для моды  $n = 0$ , которая называется «баротропной»:

$$\varepsilon_0 = (gH)^{-1}, \quad (5.80)$$

для мод более высоких порядков  $n$ , называемых «бароклинными»,

$$\varepsilon_n = \left[ \frac{(\pi n)^2}{H^2} \right] (N^2 - \omega^2)^{-1}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.81)$$

Проанализируем подробнее дисперсионное уравнение (5.77). Для того чтобы  $k_x$  и  $k_y$  были вещественными, необходима положительность правой части (5.77), т.е. должно выполняться условие  $\beta/2\omega > 2\sqrt{\varepsilon}\Omega \sin \varphi_0$ , которое с учетом определения (5.71) удобно переписать как

$$\operatorname{tg} \varphi_0 < (2a\omega\varepsilon^{1/2})^{-1}. \quad (5.82)$$

Если задана широта места  $\varphi_0$ , то волны Россби существуют для частот  $\omega < \omega_{кр}$ , где критическая частота определяется формулой  $\omega_{кр} = (2a\varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \varphi_0)^{-1}$  (в частности, для «баротропной» моды из (5.80) следует, что  $\omega_{кр} = (gH)^{1/2} (2a \operatorname{tg} \varphi_0)^{-1}$ ). Когда  $\omega$  и  $\varphi_0$  далеки от критических значений, в дисперсионном уравнении (5.77) можно пренебречь последним слагаемым. Предполагается, что  $\omega > 0$ . В этом случае закон дисперсии волн Россби имеет вид

$$\omega = -\frac{k_x \beta}{k_x^2 + k_y^2}. \quad (5.83)$$

Из этого уравнения видно, что оно удовлетворяется лишь при  $k_x < 0$  (как и уравнение (5.77)). Это означает, что волны Россби распространяются только с востока на запад. Последнее подтверждается наблюдениями над синоптическими вихрями там, где средние течения океана слабые [4].

## 5.5. Волны в сверхтекучей жидкости

Говоря о гидродинамике сверхтекучей жидкости, будем иметь в виду гидродинамику He II без учета эффектов диссипации.

Гелий, став жидким при 4,2 К, не затвердевает при атмосферном давлении вплоть до абсолютного нуля температуры. Однако при температуре  $T \approx 2,19$  К происходит фазовый переход и гелий обнаруживает в новой жидкой фазе совсем иные, чем ранее, свойства. В частности, вблизи указанной температуры ( $\lambda$ -точки) имеет место аномальное поведение теплоемкости в зависимости от температуры. Как указано на рис. 5.4,

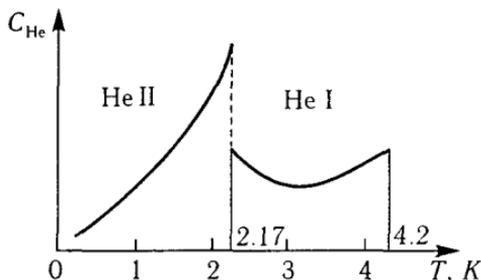


Рис. 5.4. Зависимость теплоемкости гелия от температуры при атмосферном давлении

в интервале температур от 4,2 до 2,17 К гелий находится в одной фазе, где он ведет себя как обычная жидкость (He I), а при переходе через  $\lambda$ -точку в более низкотемпературную область — в другой фазе (He II) и характеризуется рядом удивительных свойств.

В 1938 г. П. Л. Капица открыл явление сверхтекучести He II, состоящее в том, что He II протекал по узким капиллярам (диаметр которых около  $10^{-4}$  см) так, как будто для него полностью отсутствует

вязкость  $\eta$ : при переходе через  $\lambda$ -точку  $\eta_{\text{He II}} < 10^{-12}$  Па·с, в то время как  $\eta_{\text{He I}} \sim 10^{-6}$  Па·с. Основываясь на результате эксперимента Капицы, можно было ожидать, что гидродинамика He II есть гидродинамика идеальной классической жидкости, поведение которой описывается уравнениями Эйлера. Однако в ряде экспериментов было выяснено, что это не так; например, метод измерения вязкости, основанный на исследовании крутильных колебаний диска, помещенного в жидкость, давал для  $\eta_{\text{He II}}$  значение, мало отличающееся от  $\eta_{\text{He I}}$ . Налицо был парадокс вязкости: в одних экспериментах He II вел себя как сверхтекучая жидкость без вязкости, в других — как нормальная жидкость с конечной вязкостью, хотя обычно оба метода измерения вязкости давали одинаковый результат. Более того, некоторые динамические свойства He II нельзя было описать в рамках уравнений Эйлера даже тогда, когда наверняка внутренним трением можно пренебречь (эффект фонтанирования, механокалорический эффект, см. рис. 5.5).

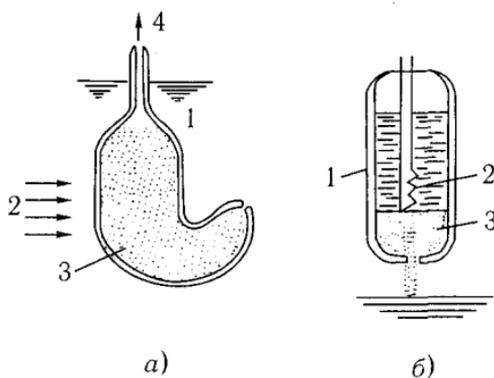


Рис. 5.5. Схемы опытов, демонстрирующих необычные динамические свойства жидкого гелия: а — эффект фонтанирования при освещении лучами 2 трубки, заполненной наждачным порошком 3 и помещенной в гелиевую ванну 1; из верхнего конца трубки бьет фонтан 4 жидкого гелия; б — механокалорический эффект при быстром вытекании жидкого гелия из сосуда 1 температура внутри сосуда повышается (при обратном процессе понижается); 2 — измеритель температуры; 3 — спрессованный порошок

В 1941 г. Капица поставил опыт (рис. 5.6), в котором в He II погружался маленький сосуд с нагревателем и термопарой, частично заполненный He II и сообщающийся с большим объемом через узкий капилляр. При включении нагревателя выделяется тепло (поток тепла вытекает из внутреннего сосуда во внешний) и из капилляра бьет фонтанчик

гелия, который фиксируется по отклонению листочка крутильных весов. Однако уровень жидкости в маленьком сосуде не меняется. Тогда остается предположить, что имеется противоположный поток внутрь маленького сосуда, не отклоняющий листочек крутильных весов.

Опыт Капицы в сочетании с имеющимися экспериментальными результатами привел к созданию двухжидкостной модели He II. Сущность модели в следующем. He II нужно рассматривать как совокупность двух компонентов — сверхтекучего с плотностью  $\rho_s$ , не испытывающего сил вязкости, и нормального с плотностью  $\rho_n$ , аналогичного He I. В такой двухжидкостной гидродинамике (см. [1], гл. XVI; [9, § 19; 10]) плотность жидкости  $\rho = \rho_s + \rho_n$ , причем при  $T \rightarrow 0$   $\rho_n \rightarrow 0$  и вся жидкость превращается в He II; при переходе через  $\lambda$ -точку в сторону больших температур, наоборот,  $\rho_s \rightarrow 0$ , а вся жидкость есть He I. Кроме того, предполагается, что сверхтекучий и нормальный компоненты свободно без трения перемещаются относительно друг друга. Существенным моментом модели является также тот факт, что движение He II характеризуется заданием двух векторов скорости:  $\mathbf{v}_n$  — скорости нормального компонента и  $\mathbf{v}_s$  — сверхтекучего компонента. Введенных представлений достаточно, чтобы объяснить результаты упоминавшихся экспериментов. Сделаем это, начав с парадокса вязкости. В опытах с крутильными колебаниями диска последний останавливался из-за трения с нормальным гелием (отсюда  $\eta_{\text{He}} \approx \eta_{\text{He I}} \approx 10^{-8}$  Па·с) — сверхтекучий и нормальный компоненты не разделялись. В эксперименте с капилляром протекал только сверхтекучий компонент.

Механокалорический эффект (рис. 5.5 б) объясняется тем, что сверхтекучее движение не связано с переносом тепла: вытекает из сосуда главным образом сверхтекучий компонент, а теплового потока нет; поэтому внутри сосуда повышается температура оставшейся там меньшей массы жидкости. В опыте, схема которого приведена на рис. 5.5а, с увеличением температуры при нагревании возрастает  $\rho_n$ , что приводит к движению сверхтекучего компонента, создающего своим притоком в месте нагрева термостатическое давление. В результате из конца трубки бьет фонтан жидкого гелия. Наконец, в последнем из описанных опытов Капицы (рис. 5.6) на листочек крутильных

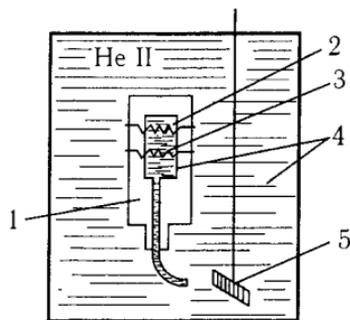


Рис. 5.6. Схема опыта Капицы: 1 — вакуум; 2 — нагреватель; 3 — термопара; 4 — жидкий гелий (He II); 5 — листочек крутильных весов

весов действует нормальный компонент, а встречным потоком является сверхтекучий компонент.

Э. Л. Андроникашвили измерил плотности  $\rho_s$  и  $\rho_n$  компонент в опытах с вращением стопки металлических дисков, находящихся в сосуде с жидким гелием и подвешенных на упругой нити. Идея этого изящного опыта состояла в том, что нормальный компонент, обладающий вязкостью, должен вовлекаться дисками во вращательное движение и система будет обладать тем большим моментом инерции, чем больше масса жидкости, в то время как сверхтекучий компонент не должен участвовать в движении (у него нет вязкости), поэтому его момент инерции должен совпадать с моментом инерции пустого сосуда [25].

Наиболее важным в теории сверхтекучей жидкости было предсказание возможности распространения в жидком гелии волн, названных вторым звуком (в 1945 г. В. П. Пешков подтвердил это экспериментально).

В линейном приближении уравнения, описывающие распространение звука в сверхтекучей жидкости, имеют вид [1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s,$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \rho S \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = \nabla \mu.$$

Здесь  $\mu$  — химический потенциал, который в линейном приближении удовлетворяет тождеству  $d\mu = -S dT + (1/\rho) dp$ . Заметим, что появление градиента в уравнении движения для сверхтекучего компонента отражает факт потенциальности движения. Путем простых преобразований исходную систему можно записать в виде двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \nabla^2 p, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \left( \frac{\rho_s S^2}{\rho_n} \right) \nabla^2 T.$$

При низкой температуре эти уравнения описывают звуковые волны [9]. Действительно, при низкой температуре можно считать, что сжимаемость определяется упругими силами между молекулами, т. е. плотность  $\rho$  зависит главным образом от давления  $p$  и  $\partial^2 \rho / \partial t^2 = (\partial p / \partial \rho)_S^{-1} \partial^2 p / \partial t^2$ . Но тогда получается уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla^2 p = 0.$$

описывающее звуковые волны в обычной жидкости; в частности, полагая, что решение имеет вид плоской волны  $p \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ , приходим к закону дисперсии (5.12).<sup>1</sup> В этом случае  $v_n \approx v_s$  [1], т. е. оба компонента в такой волне колеблются как целое, и обе массы движутся вместе со скоростью  $\bar{v} = (\rho_n/\rho)v_n + (\rho_s/\rho)v_s$ , равной скорости центра их масс. С другой стороны, учитывая, что при низкой температуре наиболее существенна зависимость энтропии  $S$  на единицу массы от температуры, положим  $S \approx S(T)$  и заменим  $\partial^2 S'/\partial t^2$  на  $(\partial S/\partial T)_p \partial^2 T'/\partial t^2$ . Это приводит нас к уравнению для волн, называемых «вторым звуком»:

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \left( \frac{S^2 \rho_s}{\rho_n} \right) \left( \frac{T}{c_V} \right) \nabla^2 T' = 0.$$

Подставляя решение в виде бегущей волны, находим закон дисперсии для «второго звука»:  $\omega^2 = S^2 \rho_s T / [(\rho_s c_V) k^2]$ , т. е. скорость «второго звука»  $v_\phi = [S^2 \rho_s T / (\rho_n c_V)]^{1/2}$ , где  $c_V$  — теплоемкость единицы массы при постоянном объеме. В такой волне  $j \approx 0$  (колебания происходят при постоянном объеме или давлении, причем  $c_V \sim c_p$ ), но тогда  $v_n \approx (\rho_s/\rho_n)v_s$ , т. е. сверхтекучий и нормальный компоненты колеблются в противофазе; таким образом, суммарного потока вещества нет, поскольку скорость  $\bar{v}$  центра масс компонентов близка к нулю (в то же время существует относительное движение сверхтекучего и нормального компонентов). Если вспомнить, что сверхтекучий компонент не переносит тепла, то становится понятным, что волны «второго звука» связаны с колебаниями температуры, а не плотности (в этом смысле показательно то, что в волновом уравнении для «второго звука» переменной является  $T'$ ). Уникальность He II в том, что в нем существуют температурные волны, т. е. обратимые температурные возмущения, в отличие от необратимого распространения таких возмущений путем теплопроводности в других веществах. Следует заметить, что по отдельности оба компонента жидкого гелия испытывают сжатия и разрежения. Такие сжатия и разрежения сверхтекучего компонента, который, как уже говорилось, не переносит энтропия, сопровождаются обратимыми увеличениями и уменьшениями температуры. Сила, противодействующая этим изменениям, т. е. возвращающая сила, связана с градиентом химического потенциала (он вызван изменением температуры без изменения давления). Из уравнения движения для сверхтекучего компонента  $\partial \mathbf{v}_s / \partial t = -\nabla \mu$  следует, что градиент химического

<sup>1</sup>Здесь и далее  $F'$  — малое возмущение равновесного значения  $F_0$  переменной величины  $F$ ; индекс 0 опущен.

потенциала вызывает ускорение этого компонента, противодействующее сжатиям и разрежениям.

В заключение отметим, что макроскопическая двухжидкостная модель, будучи классической, не в состоянии дать полного описания гелия, который является квантовой жидкостью, т. е. макроскопическим веществом с поведением, подчиняющимся квантовым законам [11]. С точки зрения классической физики при низких температурах ионы в кристалле (простейшие модели рассмотрены в гл. 4) совершают малые колебания около положения равновесия (при  $T = 0$  К они вообще неподвижны), что и определяет упорядоченность твердого тела. Но гелий остается жидким до таких низких температур (0–2 К), при которых длина волны де Бройля, которая определяет тепловое движение атомов в жидкости, имеет порядок величины расстояния между атомами, т. е. существенны только квантовые явления. Таким образом, гелий и не обязан затвердевать (вспомним, что квантовомеханический осциллятор даже в основном состоянии имеет энергию  $\mathcal{E} = \hbar\omega/2$  и совершает «нулевые» колебания; см. гл. 1). Такое поведение гелия связано с тем, что его атомы слабо взаимодействуют, а энергия «нулевых» колебаний сравнительно велика. В основе теории квантовых жидкостей лежит концепция об элементарных возбуждениях — квазичастицах (гл. 4).

В 1947 г. Л. Д. Ландау на основе анализа экспериментальных данных предложил закон дисперсии квазичастиц (зависимость энергии  $\mathcal{E}$  от импульса  $p$ ), графически представленный на рис. 5.7. Начальный линейный участок кривой соответствует звуковым квантам — фононам. Далее с ростом  $p/\hbar$  функция  $\mathcal{E}(p)$  достигает максимума, после чего убывает и при некотором  $p = p_0$  проходит через минимум, в котором  $\mathcal{E}(p) = \Delta(p_0)$ . С точностью до членов второго порядка малости область кривой вблизи  $p_0/\hbar$  можно аппроксимировать функцией  $\mathcal{E}(p) = \Delta + (p - p_0)^2/m^*$ . Квазичастицы, соответствующие этой области импульсов и энергии  $\mathcal{E} = \Delta + (p - p_0)^2/m^*$ , были названы ротонами ( $m^*$  — эффективная масса ротона,  $\Delta$  — его минимальная энергия). В тепловом равновесии возбуждение фононов и ротонов определяет термодинамическое поведение жидкого гелия, поскольку эти квазичастицы имеют энергии вблизи минимумов функций  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$  (фононы — вблизи  $\mathcal{E} = 0$ , ротон — вблизи  $\mathcal{E} = \Delta$ ). Таким образом, оба сорта квазичастиц описывают разные участки кривой  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$ , между которыми есть непрерывный переход, т. е. и фононы, и ротон относятся к одному физическому объекту — квантовой жидкости He II. Именно существование описанного энергетического спектра позволило Л. Д. Ландау объяснить явление сверхтекучести (см. [9, 11]).

В чем проявляется наличие вязкости, если жидкость течет по капилляру со скоростью  $v$  при  $T = 0\text{ К}$ ? В потере кинетической энергии жидкости и, следовательно, в уменьшении скорости потока. В системе координат, движущейся с жидкостью, гелий неподвижен, а капилляр движется со скоростью  $v$ ; при наличии вязкости гелий в этой системе координат должен двигаться, причем движение начинается с появлением элементарных возбуждений. Пусть возникла одна квазичастица с энергией  $\mathcal{E}(p)$  и импульсом  $p$ . Это приводит к тому, что в движущейся системе координат (в ней гелий покоился) энергия жидкости  $E$  станет равной  $\mathcal{E}(p)$ , а ее импульс  $p_0 = p$ . В неподвижной системе координат (в ней покоится капилляр) согласно формулам механики для преобразования энергии и импульса имеем

$$E = E_0 + p_0 v + \frac{Mv^2}{2}, \quad p = p_0 + Mv,$$

или

$$E = \mathcal{E}(p) + pv + Mv^2 + \frac{Mv^2}{2}, \quad p = p_0 + mv,$$

где  $M$  — масса жидкости,  $Mv^2/2$  — кинетическая энергия жидкости до возбуждения. Изменение энергии из-за возникновения квазичастицы  $\mathcal{E}(p) + pv$  должно быть отрицательным (энергия движущейся жидкости должна быть меньше энергии покоящейся), т. е.

$$\mathcal{E}(p) + pv < 0; \tag{5.84}$$

при  $T = 0\text{ К}$  возникающая в жидкости квазичастица — фотон, т. е.  $\mathcal{E} = v_{зв}p$  (см. рис. 5.7), и неравенство (5.84) принимает вид  $v_{зв}p + pv < 0$ . Поскольку величина  $v_{зв}p$  может быть только положительной, последнее неравенство не удовлетворяется при  $v < v_{зв}$ , т. е. появление фонона запрещают законы сохранения. Но тогда жидкость не замедляется, гелий течет по капилляру без трения, что соответствует явлению сверхтекучести. (Подумайте сами, при каком виде кривой  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$  условие (5.84) может быть выполнено, например, для антипараллельных  $v$  и  $p$ .) Если  $T \neq 0\text{ К}$ , то в жидкости уже есть возбуждения, однако проведен-

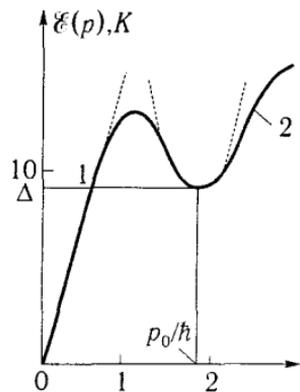


Рис. 5.7. Закон дисперсии элементарных возбуждений в жидком гелии: 1 и 2 — ветви, соответствующие возбуждению фононов и ротонов

ные выше рассуждения остаются в силе: нужно рассмотреть возбуждение еще одного фонона, помимо имеющихся. Как и в предыдущем случае, появление этого нового фонона запретят законы сохранения. Однако уже имеющиеся квазичастицы будут обмениваться энергией со стенками капилляра. Они и составляют нормальный вязкий компонент в двухжидкостной модели. Сверхтекучий компонент — другое движение в квантовой жидкости — не проявляет вязкости. Подробный анализ случая  $T \neq 0$  К изложен в § 23 книги [11]. Заметим, что сверхтекучесть в какой-то мере аналогична сверхпроводимости: заряженная электронная жидкость в сверхпроводниках течет сквозь кристаллическую решетку без «трения» (она не обменивается с решеткой энергией и, следовательно, не испытывает сопротивления).

## 5.6. Волны в плазме. Гидродинамическое описание

*Основные уравнения.* Как известно [12, 14], совокупность свободно движущихся разноименно заряженных частиц (ионизованный газ) называется плазмой, если дебаевский радиус мал по сравнению с размерами объема, занимаемого газом.

Напомним физический смысл радиуса Дебая. Плазму можно рассматривать как смесь трех компонентов — свободных электронов, положительных ионов и нейтральных атомов или молекул. Квазинейтральность плазмы, т. е. приблизительное равенство плотностей электронов и ионов, определяется электрическими силами, которые связывают отрицательные и положительные заряды в плазме. При смещении группы электронов относительно ионов, т. е. при разделении зарядов, возникают электрические поля, стремящиеся восстановить квазинейтральность.

Пусть в каком-то объеме после возмущения остались заряды одного знака, что соответствует полному разделению зарядов. Если объемная плотность заряда  $\rho = ne$  ( $n$  — концентрация частиц,  $e$  — заряд частицы), то поле в выделенной области удовлетворяет уравнению  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ . Очевидно, что для области с линейными размерами порядка  $x$  имеем  $\operatorname{div} \mathbf{E} \sim E/x \sim 4\pi ne$  и  $E \sim 4\pi nex$ , что соответствует изменению потенциала плазмы в области разделения зарядов на величину  $V \sim Ex \sim 4\pi nex^2$ . Если разность потенциалов  $V$  велика, то разделения зарядов не будет: сильное поле вытолкнет из объема, где нарушена квазинейтральность, частицы с зарядом одного знака и втянет частицы другого знака. Что будет, если выделенный в плазме объем

мал настолько, что поле, созданное избытком в нем частиц одного знака, слабо и не может существенно изменить движение частиц? В таком объеме, для которого  $x < r_D$  ( $r_D$  — характерный линейный размер), при заданных концентрации и температуре плазмы возможно нарушение квазинейтральности плазмы. Оценим  $r_D$ .

Если в области с линейным размером порядка  $r_D$  произошло полное разделение зарядов, то потенциальная энергия заряженной частицы имеет порядок тепловой энергии частиц, т. е.  $W_p = eV \sim 4\pi n e^2 r_D^2 \sim k_B T$  ( $k_B$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура плазмы, которая пока принята одинаковой для электронного и ионного компонентов). Таким образом,

$$r_D \sim \left[ \frac{k_B T}{4\pi n e^2} \right]^{1/2} \sim \left( \frac{T}{n} \right)^{1/2}. \quad (5.85)$$

Эту величину называют радиусом экранирования. Дело в том, что при введении в плазму пробного точечного заряда вокруг него образуется область сильного электрического поля, ограниченная сферой, радиус которой равен  $r_D$  (радиус Дебая, или дебаевская длина). Таким образом, радиус Дебая — это характерный пространственный масштаб областей декомпенсации плазмы, а рассматриваемому нами случаю соответствует условие  $x \gg r_D$ . Время  $t$ , в течение которого сохраняются области декомпенсации, пропорционально  $r_D/v_e$ , где скорость  $v_e$  электронов (наиболее быстрых частиц) определяется из соотношения  $m_e v_e^2/2 \sim k_B T$  ( $m_e$  — масса электрона). Тогда характерный временной масштаб декомпенсации плазмы

$$t \sim \left[ \frac{k_B T}{4\pi n e^2} \right]^{1/2} \left( \frac{2k_B T}{m_e} \right)^{-1/2} \sim \left[ \frac{m_e}{4\pi n e^2} \right]^{1/2}.$$

Замечательно, что это время от температуры уже не зависит. Соответствующая этому времени частота

$$\omega_p = \left( \frac{4\pi n e^2}{m_e} \right)^{1/2} \quad (5.86)$$

называется плазменной.

Сделаем еще два замечания о концентрации и температуре плазмы. Поскольку в плазме могут быть помимо однозарядных и многозарядные ионы, концентрации электронов и ионов не обязательно равны. Кроме того, так как массы электронов и ионов сильно различаются,

плазма в общем случае характеризуется двумя температурами — электронной  $T_e$  и ионной  $T_i$ . Лишь когда средние кинетические энергии электронов и ионов близки, можно говорить просто о температуре  $T$  плазмы.

Для описания распространения волн малой амплитуды в плазме удобно использовать модель двухжидкостной гидродинамики, в рамках которой плазма представляется смесью электронной и ионной жидкостей.

Модель работает, когда характерный пространственный масштаб много больше длины свободного пробега и характерный временной масштаб (характерная длительность процессов)  $t_p$  много больше времени  $\tau$  между двумя столкновениями. Подобно обычной гидродинамике, для полного описания плазменной жидкости достаточно задать скорость любого компонента  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ , плотность  $n(x, y, z, t)$  и температуру  $T(x, y, z, t)$ .

Движение единичного объема ионного (индекс  $i$ ) или электронного (индекс  $e$ ) компонента плазмы подчиняется второму закону Ньютона:  $n_{i,e} m_{i,e} d\mathbf{v}_{i,e}/dt = \sum \mathbf{F}_i$ , где  $\sum \mathbf{F}_i$  — сумма сил, действующих на этот объем. Что это за силы? Если сразу отказаться от учета силы тяжести, то эти силы следующие (найдем их сначала для ионного компонента). Это, прежде всего, сила, обусловленная градиентом давления и равная  $-\nabla p_i$ . Как и в обычной гидродинамике, для замыкания системы уравнений плазменной гидродинамики нужно использовать уравнение состояния, связывающее давление, плотность и температуру. Давление каждого компонента плазмы с изотропным распределением заряженных частиц выражается, как и для идеального газа, уравнением состояния  $p_{i,e} = n_{i,e} k_B T_{i,e}$ . Используя уравнение состояния, получим, что  $-\nabla p_i = -\nabla n_i k_B T_i$ . Поскольку в плазме существует электрическое поле, то вторая сила, действующая на единичный ионный объем, — сила со стороны электрического поля, которая для однозарядных ионов равна  $-n_{i,e} e_{i,e} \nabla \varphi$ . Потенциал электрического поля  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi e(n_i - n_e), \quad (5.87)$$

где  $e_i = -e_e = e$ . Существование электрического поля приводит к тому, что в общем случае  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_e$ , поэтому между компонентами возникает сила трения  $\mathbf{F}_{e,i}$ , которая определяется импульсом, передаваемым в единицу времени электронами ионам, причем  $\mathbf{F}_{e,i} = -\mathbf{F}_{i,e}$  [16]. Наконец, если плазма помещена в магнитное поле, то на единичный

объем действует еще и сила Лоренца, равная  $-(1/c)e_i n_i e[\mathbf{v}_i, e\mathbf{B}]$ . Расшифровывая слагаемое  $\sum \mathbf{F}_i$  в уравнении движения единичного объема ионной жидкости, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{\nabla n_i \cdot k_B T_i}{m_i n_i} - \frac{e_i}{m_i} \nabla \varphi + \frac{\mathbf{F}_{e,i}}{m_i n_i} - \frac{e_i}{cm_i} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}]. \quad (5.88)$$

По аналогии для электронного компонента имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{\nabla n_e \cdot k_B T_e}{m_e n_e} - \frac{e_e}{m_e} \nabla \varphi - \frac{\mathbf{F}_{e,i}}{m_e n_e} - \frac{e_e}{cm_e} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}]. \quad (5.89)$$

Уравнения (5.88) и (5.89) — уравнения Эйлера для двух заряженных взаимопроникающих жидкостей, которые взаимодействуют между собой благодаря трению и через самосогласованное электрическое поле. Если плазма сохраняет квазинейтральность и ионы однозарядные, то  $n_i \approx n_e = n$ . В этом случае можно перейти к модели одножидкостной гидродинамики, сложив уравнения (5.88) и (5.89). Тогда, если пренебречь силой Лоренца, получим

$$m_i n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla [nk_B(T_i + T_e)], \quad (5.90)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + (m_e/m_i)\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_i$ , (слагаемые, связанные с силами «электрического трения» и трения из-за столкновений, взаимно уничтожились).

Для электронной и ионной жидкостей должны также выполняться уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } n_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div } n_e \mathbf{v}_e = 0. \quad (5.92)$$

Мы предполагаем, что процессами ионизации и рекомбинации можно пренебречь.

*Плазменные ленгмюровские колебания и волны.* Предположим, что все электроны в тонком слое холодной бесстолкновительной безграничной плазмы ( $T_e = T_i = 0$ ,  $F_{ei} = F_{ie} = 0$ ) внезапно смещены вправо так, что между плоскостями 1 и 2 на рис. 5.8 а электронов нет. Ионы плазмы будем считать неподвижными. Справа от плоскости 2 будет избыток заряда, что приведет к возникновению возвращающей силы  $F_B = -eE_x$ , обусловленной декомпенсацией зарядов. Величину  $E_x$  мы уже

оценивали: если электроны сместились на  $x'$ , то  $F_{\text{в}} \approx -4\pi n e^2 x'$ . Эта сила сообщает им ускорение  $\ddot{x} = -(4\pi n e^2 / m_e) x'$ , поэтому движение группы смещенных электронов описывается уравнением гармонических колебаний с плазменной частотой  $\omega_p$ :  $\ddot{x}' + \omega_p^2 x' = 0$ . Такие колебания называются плазменными или ленгмюровскими колебаниями в «холодной» бесстолкновительной неподвижной плазме. Опишем их с помощью уравнений (5.87)–(5.92). Будем полагать, что магнитное поле равно нулю; столкновениями можно пренебречь; ионы не участвуют в колебаниях и являются однородным компенсирующим неподвижным фоном ( $m_i \gg m_e$ ); плазма представляет собой одномерный поток электронов, движущийся со скоростью  $v_0 = \text{const}$  в направлении оси  $x$ .

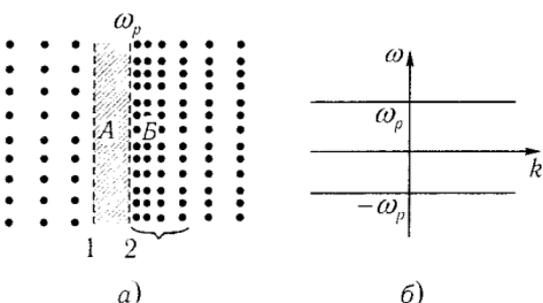


Рис. 5.8. К объяснению ленгмюровских плазменных колебаний: *a* — все электроны в тонком слое внезапно смещены вправо (*A* — область, где электронов нет; *B* — область с избытком электронов); *б* — дисперсионная кривая  $\omega^2 = \omega_p^2$

Учтем также влияние сил, связанных с перепадом давления в плазме, т. е. влияние звуковых эффектов. Допустим, что начальное возмущение имеет вид плоской волны с частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  ( $f' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ ). Для малых возмущений давление электронной жидкости  $p_e = p_0 + p'$ , концентрация  $n_e = n_0 + n'$ , скорость электронной жидкости  $v = v_0 + v'$  (все возмущенные величины, много меньшие соответствующих невозмущенных). Давление электронной жидкости представим в виде  $p_e(n_0 + n') = p_0 + m_e(\partial p_e / \partial \rho_0) n'$  ( $\rho_0 = n_0 m_e$  — плотность электронного газа) и  $\nabla p_e = m_e(\partial p_e / \partial \rho_0)(\partial n' / \partial x)$ . При сделанных допущениях из уравнений двухжидкостной плазменной гидродинамики (5.87), (5.88), (5.91), (5.92) получим следующую систему:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{n_0} \frac{\partial p_e}{\partial \rho_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} = 4\pi e n', \quad \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n'}{\partial x} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения  $v', n' \varphi' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ , из условия совместности получившейся алгебраической системы находим закон дис-

персии ленгмюровских волн:

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 + k^2 \frac{\partial p_e}{\partial \rho_0}. \quad (5.93)$$

Это уравнение при  $v_0 = 0$  соответствует дисперсионному уравнению  $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2/(LC)$  для цепочки связанных маятников (см. рис. 4.8). Подобное (5.93) уравнение было получено впервые Ленгмюром, который исходил из аналогии со звуковыми волнами в воде (5.12). Здесь осталась неизвестной величина  $\partial p_e/\partial \rho_0$ . Чтобы замкнуть уравнения гидродинамики, будем считать давление электронной жидкости изотропным и связанным с концентрацией уравнением состояния  $p_e/n^\gamma = \text{const}$ , но  $p_e = nk_B T_e$ , поэтому  $\partial p_e/\partial \rho_0 = \gamma p_e/(n m_e)$  ( $\rho_0 = m_e n$ ). Как следует из кинетической теории [14],  $\gamma = 3$ , т. е.  $\partial p_e/\partial \rho_0 = 3k_B T_e/m_e$ . Уравнение  $p \sim n^3$  является уравнением состояния газа в случае одномерного адиабатического сжатия и может быть получено из термодинамики. С учетом сказанного из (5.93) окончательно имеем

$$(\omega - v_0 k)^2 = \omega_p^2 + \left( \frac{3k_B T_e}{m_e} \right) k^2. \quad (5.94)$$

В [12] для модели, в которой газ находится в среде с двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми медленно изменяется, уравнение  $p \sim n^3$  получено из оценочных соображений, основанных на сохранении адиабатического инварианта  $v_\perp l = \text{const}$ , где  $v_\perp$  — компонента скорости частицы, перпендикулярная стенке,  $l$  — расстояние между стенками. Попробуйте рассмотреть эту модель самостоятельно. Формула  $v_\perp l = \text{const}$  легко доказывается, если рассмотреть отражение частиц от неподвижной стенки.

График закона дисперсии для среды из осцилляторов, соответствующий уравнению (5.94) при  $v_0 = 0$ , показан на рис. 5.9. Остановимся более подробно на анализе (5.93) для различных частных случаев.

*Плазменные колебания в «холодной» неподвижной плазме.* Дисперсионное уравнение получается из (5.93) при  $T_e = 0$  и  $v_0 = 0$  и имеет уже известный нам вид  $\omega^2 = \omega_p^2$  (см. рис. 5.8б). В «холодной» плазме ленгмюровские колебания не обладают дисперсией, и, если плазма покоится, они не распространяются, поскольку  $v_{\text{гр}} = \partial \omega / \partial k = 0$ . Следует, однако, заметить, что фазовая скорость отлична от нуля и равна  $v_\phi = \omega/k = \omega_p/k$  ( $k$  — волновое число плоской волны возмущений).

*Плазменные колебания в одномерном «холодном» потоке ( $v_0 \neq 0$ ,*

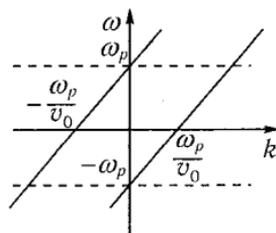
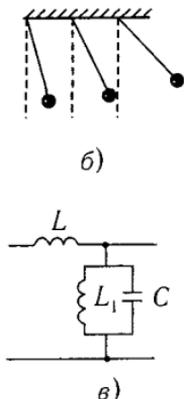
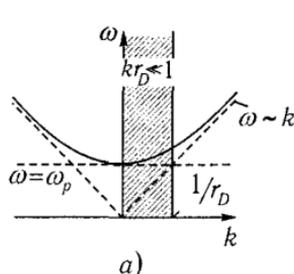


Рис. 5.9. Закон дисперсии для плазмы, представляющей собой среду с дисперсией в области низких частот; показана граница по  $k$  справедливости гидродинамической теории ( $kr_D \ll 1$ ) (а). Механический (б) и электрический (в) аналоги волн в плазме (см. (5.94))

Рис. 5.10. Дисперсионные кривые для холодного одномерного электронного потока

$T_e = 0$ ). Из (5.93) находим, что

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2. \quad (5.95)$$

Легко видеть, что решением уравнения (5.95) являются широко используемые в СВЧ-электронике [17] волны пространственного заряда: медленная с  $k = \omega/v_0 - \omega_p/v_0$  и быстрая с  $k = \omega/v_0 + \omega_p/v_0$  (рис. 5.10). Плазменные колебания в одномерном «холодном» потоке представляют собой только что рассмотренные ленгмюровские колебания, которые переносятся электронами с дрейфовой скоростью  $v_0$ , причем  $v_{гр} = \partial\omega/\partial k = v_0$ . Поэтому волны пространственного заряда часто называют электрокинематическими.

Плазменные колебания в неподвижной «горячей» плазме ( $T_e \neq 0$ ,  $v_0 = 0$ ). Перепишем (5.93) при  $v_0 = 0$  в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2(1 + 3k^2 r_D^2), \quad (5.96)$$

где  $r_D = (k_B T_e / m_e \omega_p^2)^{1/2}$  — радиус Дебая (см. (5.85)).

Дисперсионное уравнение (5.96) справедливо только для длинноволновых возмущений, когда  $kr_D \ll 1$  или  $r_D \ll \lambda$ . Электроны смещаются за период  $2\pi/\omega$  на расстояние, меньшее, чем длина волны; сжатие

должно быть адиабатическим. Напомним, что мы раскладывали правую часть уравнения состояния в ряд и ограничивались одним членом разложения, поэтому и дисперсионное уравнение (5.96) имеет вид аналогичного разложения по малому параметру  $kr_D$ . Учет конечной температуры электронов в этом приближении дает лишь поправку к теории «холодной» плазмы, Легко видеть, что  $v_{гр} = 3\omega_p kr_D^2 / (1 + 3k^2 r_D^2)^{1/2}$ , откуда при условии применимости рассмотрения ( $kr_D \ll 1$ ) имеем

$$v_{гр} \approx 3kr_D \left( \frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (5.97)$$

Величина  $(k_B T_e / m_e)^{1/2}$  имеет порядок тепловой скорости электронов, поэтому групповая скорость волн в неподвижной «горячей» плазме, как это видно из (5.97), много меньше тепловой. Таким образом, волна переносит энергию через «горячую» плазму в отличие от предыдущего случая, где групповая скорость просто равнялась дрейфовой.

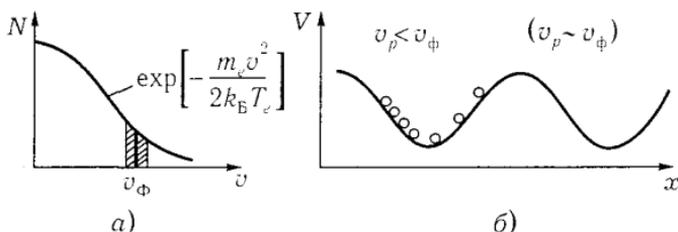


Рис. 5.11. К объяснению затухания Ландау: а — распределение электронов по скоростям (заштрихованная область соответствует резонансным электронам ( $v_p \sim v_\phi$ )); б — модель движения резонансных электронов в поле плазменной волны, если  $v_p < v_\phi$ , но одного порядка; большая часть электронов группируется на ускоряющем склоне потенциального «горба» плазменной волны

В рамках кинетической теории, справедливой для любых  $k$ , Л. Д. Ландау заметил, что даже в пренебрежении силами трения колебания электронов затухают («затухание Ландау»). При  $kr_D > 1$  затухание столь велико, что нет смысла рисовать дисперсионную характеристику в области таких значений  $k$ . Объяснение эффекта состоит в том, что, если скорость электронов меньше фазовой скорости волны, но близка к ней, электроны забирают энергию у волны и колебания затухают. Чем больше будет таких резонансных частиц, тем больше будет затухание. Если функция распределения для плазмы монотонно спадает со скоростью, то электронов, отстающих от волны (отбирающих энер-

гию), будет больше, чем обгоняющих (отдающих энергию). Сказанное иллюстрируется рис. 5.11.

*Ионно-акустические волны (ионный звук).* Будем исходить из уравнений двухжидкостной гидродинамики, считая, как и прежде, что  $T_e \gg T_i$ , магнитные поля отсутствуют, столкновениями можно пренебречь, и, кроме того, пренебрежем инерцией электронов в уравнении (5.89), т. е. пренебрегаем слагаемым  $\partial \mathbf{v}_e / \partial t + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e$ . Тогда в одномерном случае из уравнений (5.87)–(5.91) получим следующую систему:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e k_B T_e) + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i - n_e), \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0.$$

Пусть электроны имеют постоянную температуру, т. е.  $T_e = \text{const}$ . Тогда из второго уравнения в линейном приближении имеем, что  $(k_B T_e / n_0) \partial n'_e / \partial x = e \partial \varphi / \partial x$ , где  $n_e = n_0 + n'_e$ , и, следовательно, первое уравнение можно переписать в виде  $\partial v'_i / \partial t = -[k_B T_e / (m_i n_e)] \partial n'_e / \partial x$ . Из третьего уравнения имеем  $n'_i = n'_e - [1 / (4\pi e)] \partial^2 \varphi / \partial x^2$ , или, используя выражение для  $\partial \varphi / \partial x$ , находим, что  $n'_i = n'_e - [k_B T_e / (4\pi e^2 n_0)] \frac{\partial^2 n'_e}{\partial x^2}$ . Окончательно преобразованную систему уравнений можно записать так:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \frac{k_B T_e}{n_0 m_i} \frac{\partial n'_e}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n'_i}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x} = 0,$$

$$n'_i = n'_e - \frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2} \frac{\partial^2 n'_e}{\partial x^2}. \quad (5.98)$$

Сравнивая систему уравнений (4.39) для длинной линии, ячейка которой представлена на рис. 4.17, с системой уравнений (5.98), легко установить между ними прямое соответствие [15].

Для наглядности выпишем параметры и величины: для длинной линии

$$u, I, I', L, C_1, C,$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad \frac{1}{k_0^2} = c_1 / c \sim (\Delta x)^2;$$

для плазмы

$$v_i, n_e, n_i, \frac{1}{n_0}, \frac{m_i}{4\pi e^2}, \frac{m_i n_0}{k_B T_e},$$

$$\left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_i}\right)^{1/2} = \omega_{pi}, \quad \frac{1}{k_0^2} = \frac{k_B T_e}{4\pi n_0 e^2} = r_D^2.$$

Подчеркнем, что размер ячейки длинной линии ( $\Delta x$ ) соответствует радиусу Дебая для плазмы.

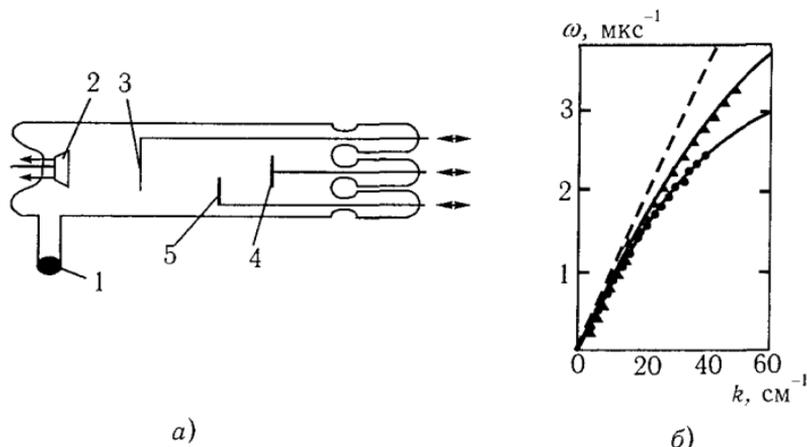


Рис. 5.12. Схема разрядной трубки (знаком  $\leftrightarrow$  отмечен подвижной электрод: 1 — ртуть; 2 — катод; 3 — сетка; 4 — анод; 5 — зонд Ленгмюра (а)) и рассчитанные теоретически (сплошные линии) и измеренные экспериментально дисперсионные кривые для двух значений тока разряда (кружки —  $I_p = 10$  мА; треугольники —  $I_p = 16$  мА; штриховая линия — расчетная прямая по уравнению  $\omega = \omega_0 k/k_0$  (б)) [15]

Полагая, что все возмущения распространяются в виде плоских волн вида  $\exp(i\omega t - ikx)$ , из (5.98) находим дисперсионное уравнение  $\omega^2 = \omega_{pi}^2 k^2 / (k_0^2 + k^2)$  (ср. с (4.33)), или

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{(1 + k^2 r_D^2)}, \quad (5.99)$$

где  $c_s = \sqrt{k_B T_e / m_i}$  — скорость ионного звука. Если  $kr_D \ll 1$ , то  $\omega = c_s k$ . С ростом  $k$  частота начинает расти медленнее, чем по линейному закону, фазовая скорость волны начинает падать;  $v_\phi \rightarrow 0$

при  $k \rightarrow \infty$ . Физически дисперсия ионного звука связана с тем, что колебания ионов происходят при неподвижных в среднем электронах: давление последних компенсирует действие электрического поля, не давая электронам смещаться. Дисперсия имеет место в области высоких частот.

Приведем в качестве иллюстрации аналогии с длинной линией (см. гл. 4) результаты эксперимента [15]. Разрядная трубка, использованная в эксперименте, схематически представлена на рис. 5.12а. Между подвижными сеткой и анодом возбуждались стоячие волны; с помощью зонда приводился анализ возникших колебаний. Были обнаружены ионные звуковые волны с частотой  $f_{\text{кол}} \sim 2\sqrt{k_B T_e / m_i} / L$  ( $L$  — характерный размер плазмы, например длина трубки или расстояние между электродами). Результаты эксперимента приведены на рис. 5.12б.

До сих пор, говоря о плазме, мы имели в виду ионизованный газ. В последние годы широко исследуется плазма твердого тела. В частности, плазма полупроводников и металлов определяется как совокупность подвижных электронов и дырок, а также ионизованных атомов, связанных с кристаллической решеткой. Коллективные колебания в твердотельной плазме имеют много общего с рассмотренными нами колебаниями газоразрядной плазмы [18–20].

---

---

## ГЛАВА 6

# Устойчивость и неустойчивость линеаризованных систем с дискретным спектром

### 6.1. Общие замечания и определения

Термины «устойчивость» и «неустойчивость» сейчас имеют столь широкое хождение, что без дополнительных пояснений не всегда можно понять, о чем идет речь. Действительно, говорят об устойчивости системы вообще, об устойчивости ее вполне определенного движения (траектории или решения), об устойчивости равновесия и т. д. Да и сама устойчивость или неустойчивость может быть разной. Может быть устойчивость «в большом» — по отношению к произвольным возмущениям, «в малом» — определяемая свойствами линеаризованной задачи. Прилагательные при слове «неустойчивость» обычно характеризуют уже не столько математические ее особенности, сколько физические механизмы возникновения колебаний (или волн) — диссипативная неустойчивость, параметрическая, излучательная и т. д.

Мы здесь будем заниматься механизмами неустойчивостей и исследованием устойчивости движения «в малом», т. е. в рамках уравнений, полученных из исходных с помощью разложения в ряд вблизи интересующего нас решения всех нелинейных зависимостей и оставления лишь линейных членов (уже обсуждавшаяся процедура линеаризации). Наиболее важным является исследование устойчивости, во-первых, статического положения системы, т. е. состояния равновесия линеаризованной системы с постоянными коэффициентами, во-вторых, периодических движений системы, малые отклонения от которых описываются линеаризованными уравнениями с периодическими коэффициентами. Относительно же устойчивости линейных систем (а не их решений) дадим пока лишь не вполне строгое определение: динамическая система, описываемая коэффициентом передачи  $\mathcal{X}(p)$  ( $p = i\omega$ ) и находящаяся под внешним воздействием  $Y$ , называется устойчивой, если малое изменение внешнего воздействия приводит к малому изме-

нению движения системы — координат  $\mathbf{X}$  (их можно считать выходными координатами) (рис. 6.1). Для того чтобы это определение стало вполне строгим, нужно еще определить, в каком смысле мы понимаем малость возмущения, т. е. нужно определить понятие расстояния между исследуемым и возмущенным решениями (как говорят математики, определить метрику). Простейший способ определения расстояния  $d(x_{\text{возм}}(t), x(t))$  — это просто разность координат по модулю:  $|x_{\text{возм}}(t) - x(t)| = d(x_{\text{возм}}(t), x(t))$ . Им чаще всего мы и будем пользоваться.

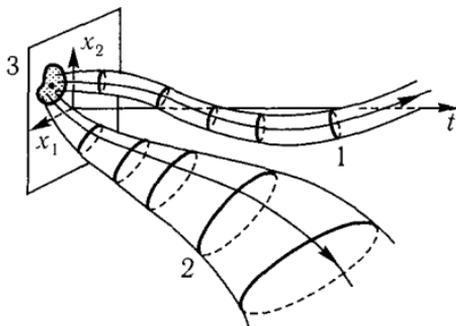


Рис. 6.1. К определению устойчивости: 1 — решение устойчиво; 2 — решение неустойчиво

Сформулируем теперь различные понятия устойчивости [1] для системы вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1)$$

В (6.1) предполагается, что существуют непрерывные производные  $\partial f_i / \partial x_k$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) и есть решение  $X_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), которое при  $t = t_0$  удовлетворяет начальным условиям

$$X_i(t_0) = X_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Решение  $X_i(t)$  называется устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для всякого решения  $x_i(t)$  системы (6.1) из неравенств

$$d_i(x_i(t_0), X_i(t_0)) = |x_i(t_0) - X_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2)$$

при всех  $t \geq t_0$  следуют неравенства

$$d_i(x_i(t), X_i(t)) = |x_i(t) - X_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

Иными словами, решения, близкие по начальным значениям, остаются близкими и при  $t \geq t_0$ . Если же при сколь угодно малом  $\delta(\varepsilon) > 0$  хотя бы для одного  $x_i(t)$  неравенство (6.3) не выполняется, то решение  $X_i(t)$  называется неустойчивым.

Часто используют понятие орбитной (или орбитальной) устойчивости. Оно отличается от устойчивости по Ляпунову тем, что из условия  $d(x(t_0), X(t_0)) < \delta$  должно следовать лишь  $d(\{x(t)\}, X(t)) < \varepsilon$ , т. е. не требуется синхронности в движении по возмущенной и (невозмущенной) траекториям. Здесь  $\{x(t)\}$  означает всю траекторию при  $t > t_0$ . Нужно лишь, чтобы возмущенное решение (пусть с отставанием или опережением) не выходило за пределы  $\varepsilon$ -окрестности невозмущенного. Если при  $t \rightarrow \infty$  расстояние  $d$  между возмущенным и невозмущенным решениями стремится к нулю, то устойчивость называется асимптотической. Если же, кроме того,  $d \sim \exp(-at)$  ( $a > 0$ ), начиная с некоторого  $t > t_0$ , то она называется экспоненциальной.

Возвращаясь сейчас к определению устойчивости системы, можно добавить: система устойчива в малом, если ее состояние равновесия устойчиво по Ляпунову; система устойчива в большом, если устойчивость состояния равновесия имеет место для всей конечной области — шара  $\|x - X\| < R$ .

Говорят, что система абсолютно устойчива, если у нее лишь одно состояние равновесия, асимптотически устойчивое во всем фазовом пространстве; система глобально асимптотически устойчива, если любая ее траектория стремится к какому-нибудь состоянию равновесия. Заметим, что понятия, связанные с устойчивостью системы, наиболее широко употребляются в теории управления и теории автоматического регулирования [2].

Рассмотрим в качестве самого простого примера систему с 1/2 степени свободы — осциллятор с малой массой  $m$ , уравнение движения которого получается из уравнения движения линейного осциллятора  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$  ( $k$  и  $b$  — коэффициенты упругости и трения), если пренебречь его массой. Тогда имеем  $b\dot{x} + kx = 0$  или

$$\dot{x} + ax = 0, \quad \text{где } a = \frac{k}{b}. \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.4), удовлетворяющее начальному условию  $x(t_0) = x_0$ , имеет вид  $x = x_0 \exp[-a(t - t_0)]$ . Исследуем на устойчивость решение  $X = x = 0$ , используя введенные выше определения. Если  $k, b > 0$ , то при  $t \geq t_0$  выполняется неравенство  $\exp[-a(t - t_0)] \leq 1$

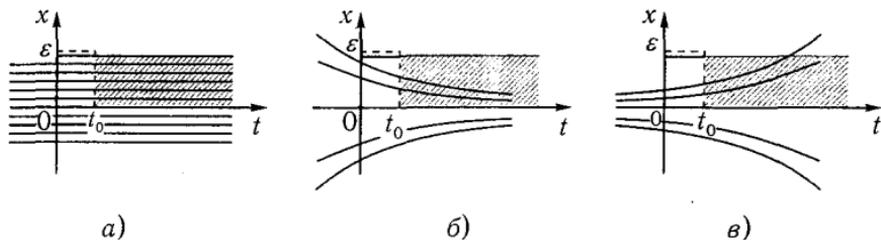


Рис. 6.2. Графическая интерпретация устойчивых и неустойчивых решений на примере осциллятора с малой массой ( $\dot{x} + ax = 0$ ): а —  $a = 0$ , заштрихованная область — область устойчивости; б —  $a > 0$ , заштрихованная область — область асимптотической устойчивости в целом; в —  $a < 0$ , решения выходят за пределы  $\varepsilon$ -окрестности, заштрихованная область — область неустойчивости

и  $|x| = |x_0| \exp[-a(t - t_0)] < \varepsilon$  ( $|x_0| < \varepsilon$  для всех  $t \geq t_0$ ). Таким образом, решение  $X = 0$  устойчиво при  $a \geq 0$ . В случае  $a > 0$   $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0 \exp[-a(t - t_0)] = 0$  для любых  $t_0$  и  $x_0$ , поэтому решение  $X = 0$  экспоненциально устойчиво.

Когда  $a < 0$ , то даже при сколь угодно малых  $|x_0|$  решение (6.4) не удовлетворяет неравенству  $|x(t)| < \varepsilon$ , если  $t$  велико: оно стремится к бесконечности для любых  $x_0 \neq 0$ . Таким образом, решение  $X = 0$  неустойчиво при  $a < 0$  (рис. 6.2).

## 6.2. Критерий Рауса–Гурвица и трехмерные системы

Для сосредоточенной системы с постоянными параметрами отклонение переменных от состояния равновесия удовлетворяет уравнению

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \quad (6.5)$$

где все  $a_n$  действительные и  $a_0 > 0$ . Нужно исследовать на устойчивость решение  $x = 0$  уравнения (6.5). Состояние равновесия исходной системы устойчиво, если  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Будем искать решение (6.5) в виде  $x = x_0 \exp(pt)$  ( $p$  — комплексный параметр). Подставляя его в (6.5), получаем характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (6.6)$$

корни которого определяют характер решения.

Уравнение (6.6) имеет  $n$  корней  $p_m = \operatorname{Re} p_m + i \operatorname{Im} p_m$ . Задача об устойчивости сводится, таким образом, к оценке расположения корней на комплексной плоскости  $p$ . Если все корни расположены в левой полуплоскости (слева от мнимой оси), то с ростом  $t$  отклонение  $x$  будет уменьшаться как  $\exp(-\operatorname{Re} p_m t)$ , и, следовательно, состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Если имеется хоть один корень в правой полуплоскости, то равновесие неустойчиво. Важно, что оценку расположения корней можно сделать, не решая уравнения (6.6). Связь месторасположения корней с коэффициентами уравнения — это чисто алгебраическая проблема, и известно довольно много способов оценки действительной части корней характеристического уравнения по коэффициентам полинома [3, 4]. Наиболее распространенными и удобными среди них являются критерий Рауса – Гурвица и метод  $D$ -разбиений.

Критерий устойчивости Рауса – Гурвица заключается в следующем. Для того чтобы все корни уравнения (6.6) имели отрицательные действительные части ( $\operatorname{Re} p_m < 0$ , т. е. все корни многочлена  $\Delta(p)$  лежали слева от мнимой оси), необходима и достаточна положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$D_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Структура матрицы Гурвица такова: по главной диагонали расположены коэффициенты (от  $a_1$  до  $a_n$ ) уравнения (6.6); столбцы содержат поочередно коэффициенты только с нечетными или только с четными индексами (включая  $a_0$ ); все недостающие элементы (коэффициенты с индексами, меньшими нуля или большими  $n$ ) заменяются нулями. Главные диагональные миноры матрицы Гурвица имеют вид

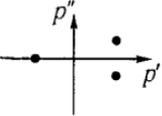
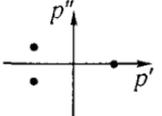
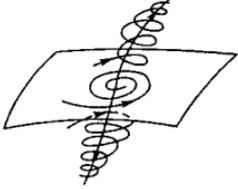
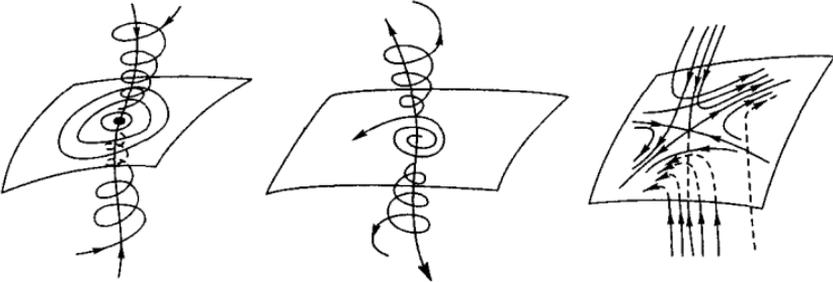
$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Таблица 6.1. Типы состояний равновесия в трехмерном фазовом пространстве

Область в пространстве параметров	Расположение корней на плоскости $p = p' + ip''$	Тип состояния равновесия	Фазовый портрет состояния равновесия	Размерность устойчивого и неустойчивого многообразий
$p^3 + ap^2 + bp + c = 0, \quad \Delta = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^3 < 0$ (в этом случае все корни действительные)				
$ab - c < 0,$ $c < 0, b > 0$		Неустойчивый узел		$\dim W^u = 3$ $\dim W^s = 0$
$ab - c > 0,$ $c > 0, b > 0$		Устойчивый узел		$\dim W^u = 0$ $\dim W^s = 3$
$ab - c < 0,$ $c < 0, b > 0$ или $c > 0, b \leq 0$		Седло		$\dim W^u = 2$ $\dim W^s = 1$
$ab - c > 0,$ $c < 0, b > 0$ или $c < 0, b \leq 0$		Седло		$\dim W^u = 1$ $\dim W^s = 2$
$p^3 + ap^2 + bp + c = 0, \quad \Delta = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^3 > 0$ (в этом случае все корни действительные)				
$ab - c < 0,$ $c < 0, b > 0$		Неустойчивый фокус		$\dim W^u = 3$ $\dim W^s = 0$
$ab - c > 0,$ $c > 0, b > 0$		Устойчивый фокус		$\dim W^u = 0$ $\dim W^s = 3$

Таблица 6.1 (продолжение)

Область в пространстве параметров	Расположение корней на плоскости $p = p' + ip''$	Тип состояния равновесия	Фазовый портрет состояния равновесия	Размерность устойчивого и неустойчивого многообразий
$ab - c < 0,$ $c < 0, b > 0$ или $c > 0, b \leq 0$		Седло-фокус		$\dim W^u = 2$ $\dim W^s = 1$
$ab - c > 0,$ $c < 0, b > 0$ или $c < 0, b \leq 0$		Седло-фокус		$\dim W^u = 2$ $\dim W^s = 2$
Устойчивый центр	Неустойчивый узел — фокус	Узел — центр		

Следовательно, критерий устойчивости Рауса - Гурвица сводится к следующему требованию:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (6.8)$$

Применим этот критерий к исследованию корней уравнения  $p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$ , которое является характеристическим уравнением для линейного осциллятора (1.1). Условия (6.8) сводятся к условию положительности коэффициентов  $\gamma > 0$  и  $\omega_0^2 > 0$ .

Для уравнения третьего порядка

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0 \quad (6.9)$$

одной положительности коэффициентов для устойчивости равновесия

уже недостаточно. Действительно, записав определитель Гурвица, найдем главные миноры:  $\Delta_1 = a$ ,  $\Delta_2 = ab - c$ ,  $\Delta_3 = c(ab - c)$ . Все миноры будут положительными, если  $ab > c$ . При невыполнении одного из указанных условий (положительность коэффициентов, или  $ab > c$ ) состояние равновесия неустойчиво. Из табл. 6.1 видно, что характер возникающей неустойчивости существенно зависит от параметров.

Число «устойчивых» («неустойчивых») корней определяет размерность так называемого устойчивого  $W^s$  (неустойчивого  $W^u$ ) многообразия, на котором вблизи состояния равновесия расположены приближающиеся к нему (уходящие от него) траектории. Когда эти многообразия двумерны, мы видим на них привычные нам устойчивые (неустойчивые) узлы или фокусы. Будут на этих многообразиях узлы или фокусы, зависит от знака дискриминанта

$$\Delta(a, b, c) = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^3.$$

При  $\Delta < 0$  будут узлы; при  $\Delta > 0$  — фокусы.

### 6.3. Метод $D$ -разбиений

Критерий Рауса–Гурвица не всегда удобен для определения устойчивости. Так, для больших значений  $n$  приходится проделывать слишком громоздкие вычисления определителей и, следовательно, трудно записать условие устойчивости в общем виде. Кроме того, если система неустойчива, то трудно сказать, сколько имеется корней с положительной действительной частью, т. е. каков порядок неустойчивости. Хорошо бы иметь критерий, свободный от этих недостатков, который мог бы быть обобщен на распределенные системы (левая часть характеристического уравнения которых не полином, а квазиполином, т. е. полином по  $\exp \delta(p)$ ). Для построения такого критерия удобен метод  $D$ -разбиений. Он заключается в следующем.

Пусть в характеристическое уравнение входит параметр  $\lambda$ , т. е.  $\Delta(\lambda, p) = 0$ . Нам надо знать, как при изменении  $\lambda$  меняется порядок неустойчивости, т. е. что происходит с корнями уравнения, как они передвигаются по плоскости  $p$ . Если при изменении  $\lambda$  корни не попадают на мнимую ось, то с точки зрения устойчивости вообще ничего не меняется; если же хотя бы один корень попал на мнимую ось, то данное значение параметра  $\lambda$  будет критическим, так как дальнейшее малое изменение  $\lambda$  может привести к изменению порядка неустойчивости на единицу. Нам надо связать изменение параметра  $\lambda$  с фактом

пересечения корнями мнимой оси. Так как корни характеристического уравнения комплексные, то удобно считать и  $\lambda$  комплексной величиной. Пусть на комплексной плоскости  $p$  корень пересекает ценимую ось, тогда на комплексной плоскости  $\lambda$  это соответствует переходу параметра через некую границу, разделяющую области с различным порядком неустойчивости. Перебирая все значения  $p$ , лежащие на мнимой оси, и сопоставляя им значения  $\lambda$ , мы построим в плоскости  $\lambda$  границу  $D$ -разбиения, т. е. границу, разделяющую плоскость параметров на области с разным порядком неустойчивости.

Для построения этой границы поставим в соответствие точкам плоскости  $p$  точки плоскости  $\lambda$ , т. е. найдем из характеристического уравнения связь  $\lambda = f(p)$ . Если  $p$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то и  $\lambda$  пробегает некую кривую на плоскости  $\lambda$ , причем в определенном направлении. Если заштриховать правую сторону мнимой оси, то и на этой кривой, лежащей на плоскости  $\lambda$ , следует заштриховать правую по направлению движения сторону. Тогда можно утверждать, что переход из незаштрихованной области в заштрихованную увеличивает порядок неустойчивости на единицу. Переход с плоскости  $p$  на плоскость  $\lambda$  соответствует конформному отображению. Для построения такого конформного отображения необходимо, чтобы можно было разрешить уравнение  $\Delta(\lambda, p) = 0$  относительно  $\lambda$ , и, кроме того, необходима непрерывность и дифференцируемость  $f(p)$ , т. е. функция должна быть голоморфной.

Рассмотрим простейший пример:  $p^2 + p + \lambda = 0$ . Разрешая это уравнение относительно  $\lambda$ , найдем  $\lambda = -p^2 - p$ , откуда при  $p = i\omega$  находим  $\lambda = \omega^2 - i\omega$ . Следовательно,  $\text{Re } \lambda = \omega^2$ , а  $\text{Im } \lambda = -\omega$ . Таким образом,  $\text{Re } \lambda = (\text{Im } \lambda)^2$ . Граница области неустойчивости — это парабола (рис. 6.3). Внутри нее — область устойчивости  $D(\lambda) = 1$ .

Метод  $D$ -разбиений можно использовать и в случае, когда число корней характеристического уравнения счетно. Именно таким, как мы видели в гл. 4, оказывается спектр резонатора без излучения на границах. Если резонатор одномерный, то спектр волновых чисел всегда эквидистантный:  $k = \pi n/l$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) для резонатора с идеальным отражением на концах и  $k = 2\pi n/l$  для кольцевого резонатора. Поскольку в диспер-

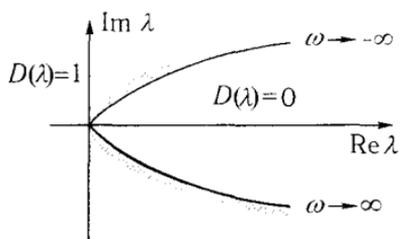


Рис. 6.3. Разбиение плоскости  $\lambda$  на области с разным порядком неустойчивости для уравнения  $p^2 + p + \lambda = 0$

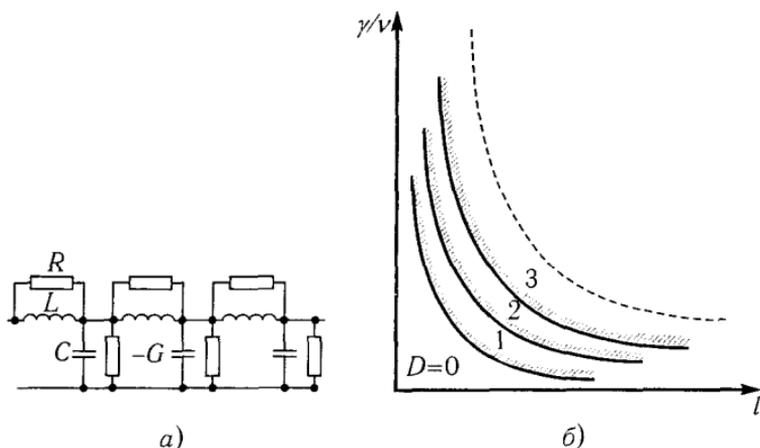


Рис. 6.4. Схема цепочки, соответствующей уравнению (6.10) (а) и разбиение плоскости параметров  $\gamma/\nu$ ,  $l$  на области с различным порядком неустойчивости (б)

сионном уравнении  $D(\omega, k) = 0$   $k$  — теперь фактически номер моды ( $k \sim n$ ), то из этого уравнения, перебирая  $n$ , нетрудно определить границу устойчивости распределенной системы с дискретным спектром. Приведем простой пример. Будем считать, что резонатор кольцевой, и рассмотрим его устойчивость только по отношению к волновым возмущениям, распространяющимся вправо. Если в среде нет дисперсии и потерь, то из волнового уравнения  $u_t + v_0 u_x = 0$  сразу получаем значения частот  $\omega_n = v_0 2\pi n/l$ . Все частоты действительны, так как все счетное множество корней характеристического уравнения  $D(p, n)$  лежит на мнимой оси плоскости  $p = i\omega$ . Таким образом, система устойчива по Ляпунову. Если в той же среде учесть высокочастотные потери, например вязкость, то уравнение бегущей волны примет вид  $u_t + v_0 u_x - \nu u_{xx} = 0$ , а характеристическое уравнение запишется в виде  $\omega_n = (2\pi/l)(v_0 + i\nu n \cdot 2\pi/l)n$ . Теперь все корни лежат в верхней полуплоскости плоскости  $\omega$  (или в левой полуплоскости плоскости  $p$ ), т. е. устойчивость лишь усилилась и стала экспоненциальной.

Введем в среду отрицательную диссипацию, проявляющуюся независимо от масштабов возмущения. Для определенности будем считать, что такая неравновесная среда моделируется цепочкой, изображенной на рис. 6.4а. Уравнение бегущей волны в такой среде запишем в виде

$$u_t + v_0 u_x - \nu u_{xx} - \gamma u = 0. \quad (6.10)$$

Отыскивая решения  $u(x, t) = v \exp(i\omega t - ikx)$  для кольцевого резонато-

ра, получаем характеристическое уравнение:

$$\omega_n = v_0 \frac{2\pi}{l} n + i\nu \left[ \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 n^2 - \frac{\gamma}{\nu} \right].$$

На рис. 6.46 приведено разбиение плоскости параметров  $\gamma/\nu$ ,  $l$  на области с различным порядком неустойчивости. В коротком резонаторе ( $l < l_{\text{кр}} = 2\pi(\gamma/\nu)^{-1/2}$ ) возможна лишь статическая неустойчивость, так как в правой полуплоскости плоскости  $p$  расположен только один корень — с  $\text{Im } p = 0$  (т. е.  $\text{Re } \omega = 0$ ), соответствующий экспоненциальному росту пространственно однородного поля. При увеличении  $l > l_{\text{кр}}$  порядок неустойчивости растет, однако при любом конечном  $l$  число корней в правой полуплоскости  $p$  всегда конечно.

## 6.4. Устойчивость неавтономных систем

Для неавтономных систем, как уже упоминалось, необходимо исследовать устойчивость движения, которое происходит под действием внешней силы. Сделаем это на примере уравнения

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = y(t). \quad (6.11)$$

Рассмотрим движение с нулевыми начальными условиями:

$$x(0) = \frac{dx(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1} x(0)}{dt^{n-1}} = 0. \quad (6.12)$$

Применим к (6.11), (6.12) преобразование Лапласа, используя определение

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (6.13)$$

где  $f(t)$  — оригинал, а  $F(p)$  — изображение. Тогда в пространстве изображений

$$X(p) = \mathcal{K}(p)Y(p), \quad (6.14)$$

где согласно (6.13)  $X(p) \leftarrow x(t)$ ,  $Y(p) \leftarrow y(t)$ ,  $\mathcal{K}(p) = 1/\Delta(p)$ ,  $\Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ ,  $\leftarrow$  — знак соответствия между изображением и оригиналом. Здесь  $Y(p)$  — вектор, компоненты которого

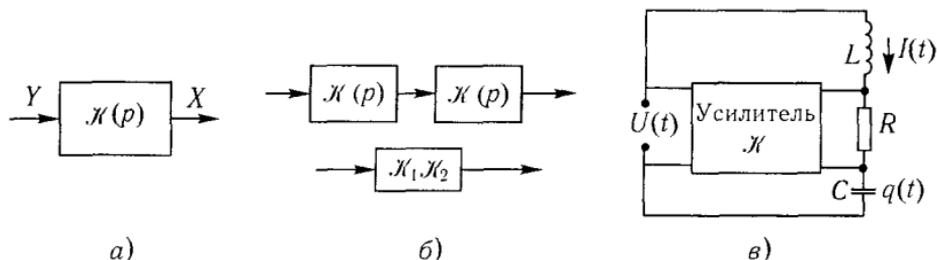


Рис. 6.5. Схема, поясняющая уравнение (6.14) (а); блочная схема в случае двух систем с передаточными функциями  $\mathcal{K}_1(p)$ ,  $\mathcal{K}_2(p)$ , соединенных между собой (б), и схема колебательной системы с обратной связью  $U(t) = \mathcal{K}RI(t)$ :  $\mathcal{K} > 0$  — положительная обратная связь;  $\mathcal{K} = 1$  — незатухающие колебания;  $\mathcal{K} > 1$  — неустойчивость;  $\mathcal{K} < 0$  — отрицательная обратная связь (в)

означают входные переменные, а  $X(p)$  — вектор, компоненты которого означают выходные переменные. Функция  $\mathcal{K}(p)$ , определяющая связь между этими векторами, называется передаточной; она зависит от коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , т. е. от внутренней структуры системы. Соотношение (6.14) полезно представить в виде схемы (рис. 6.5а). Подобное представление удобно, когда анализируется несколько соединенных между собой систем (рис. 6.5б), особенно при наличии обратных связей.

Возвращаясь в пространство оригиналов и используя правило соответствия между сверткой оригиналов и произведением изображений:

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau = f_1 * f_2 \rightarrow F_1F_2,$$

получаем из (6.13), что

$$x(t) = \int_0^t k(\tau)y(t-\tau) d\tau, \quad \text{где } k(t) \rightarrow \mathcal{K}(p). \quad (6.15)$$

Чтобы найти оригинал для изображения

$$\mathcal{K}(p) = (a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n)^{-1},$$

разложим  $\mathcal{K}(p)$  на простые дроби. С этой целью определим сначала нули многочлена  $\Delta(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$ . Пусть ими будут  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ; тогда очевидно, что

$$\Delta(p) = (p - \alpha_1)(p - \alpha_2) \dots (p - \alpha_n). \quad (6.16)$$

Допустим, что все  $\alpha_i$  различны. В этом случае функция

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{\Delta(p)} = \frac{A_1}{p - \alpha_1} + \frac{A_2}{p - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{p - \alpha_n} \quad (6.17)$$

имеет простые полюсы при  $p = \alpha_1, p = \alpha_2, \dots, p = \alpha_n$ . Умножим (6.17) на  $p - \alpha_1$  и перейдем в полученном соотношении к пределу при  $p \rightarrow \alpha_1$ :  $\lim_{p \rightarrow \alpha_1} \frac{p - \alpha_1}{\Delta(p)} = A_1$ . Но  $\Delta(\alpha_1) = 0$ , поэтому

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow \alpha_1} \frac{p - \alpha_1}{\Delta(p)} = \lim_{p \rightarrow \alpha_1} \left( \frac{\Delta(p) - \Delta(\alpha_1)}{p - \alpha_1} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} \right)^{-1} = \frac{1}{\Delta'(\alpha_1)}.$$

Находя аналогичным образом другие коэффициенты, получаем [5]:

$$\mathcal{X}(p) = \frac{1}{\Delta(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta'(\alpha_i)} \frac{1}{p - \alpha_i}. \quad (6.18)$$

Следовательно,

$$k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\alpha_i t)}{\Delta'(\alpha_i)}. \quad (6.19)$$

Подставляя (6.19) в (6.15), окончательно будем иметь

$$x(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \frac{\exp(\alpha_i \tau)}{\Delta'(\alpha_i)} y(t - \tau) d\tau. \quad (6.20)$$

Легко видеть, что решение  $x(t)$  будет ограниченным, если все показатели экспонент имеют отрицательные действительные части. Следовательно, нужно, чтобы все корни характеристического полинома соответствующей автономной системы лежали слева от мнимой оси. Таким образом, для исследования устойчивости неавтономной системы можно использовать те же критерии, что и для автономной.

## 6.5. Механизмы неустойчивостей

Наверное, каждый был свидетелем нарастающих шумов в радиофицированном зале, возникающих, когда микрофон расположен слишком близко к динамику либо когда слишком велико усиление. Нарастающий звук свидетельствует о самовозбуждении системы микрофон —

усилитель — динамик, т. е. о ее неустойчивости. Виной этому — положительная обратная связь. Именно такой механизм лежит в основе работы большинства генераторов. Рассмотрим его подробнее на примере схемы рис. 6.5в. Обратная связь в этой схеме пропорциональна току, и усиленное напряжение  $U(t) = \mathcal{K}RI(t)$ , где  $\mathcal{K}$  — коэффициент усиления по напряжению. Таким образом, схема описывается уравнением

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + C^{-1}q(t) = \mathcal{K}RI(t).$$

После элементарных преобразований получим уравнение для заряда на конденсаторе:

$$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \mathcal{K} \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} \quad \text{или} \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q^*} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (6.21)$$

где  $Q^* = Q/(1 - \mathcal{K})$ ,  $Q = \omega_0 L/R$  — добротность контура,  $\omega_0^2 = 1/LC$  — собственная частота контура.

Влияние обратной связи полностью определяется модифицированной добротностью  $Q^*$ . Если  $\mathcal{K} > 0$ , то имеет место положительная обратная связь: величина  $Q^*$  становится больше  $Q$ , что эквивалентно уменьшению потерь в контуре. При  $\mathcal{K} = 1$  потери полностью компенсируются положительной обратной связью, а при  $\mathcal{K} > 1$  в системе возникает неустойчивость — колебания экспоненциально возрастают со временем. При отрицательной обратной связи  $\mathcal{K} < 0$  имеет место увеличение потерь в контуре и колебания экспоненциально затухают.

Хотя уравнение (6.21) получено для конкретной схемы, оно описывает любой гармонический осциллятор с затуханием и обратной связью, пропорциональной скорости. При не слишком глубокой обратной связи с  $\mathcal{K} > 1$  рассматриваемой неустойчивости на фазовой плоскости уравнения (6.21) соответствует неустойчивый фокус (см. рис. 1.7, где приведено разбиение плоскости параметров  $2\gamma = \omega_0/Q$ ,  $\omega_0^2$  на области с разными типами состояний равновесия). Такого же типа неустойчивость возникает в осцилляторах, зависимость трения (сопротивления, проводимости) от скорости (тока, напряжения) которых имеет падающий участок (рис. 6.6).

Поясним образование участка  $ab$  на характеристике  $v = v(E)$  (рис. 6.6в) или  $j = j(E)$  («падающий» участок на рис. 6.7б) для диода Ганна [6]. На рис. 6.7 представлена структура энергетических зон арсенида галлия GaAs — полупроводника  $n$ -типа, который является сейчас наиболее распространенным материалом для диодов Ганна. В GaAs в

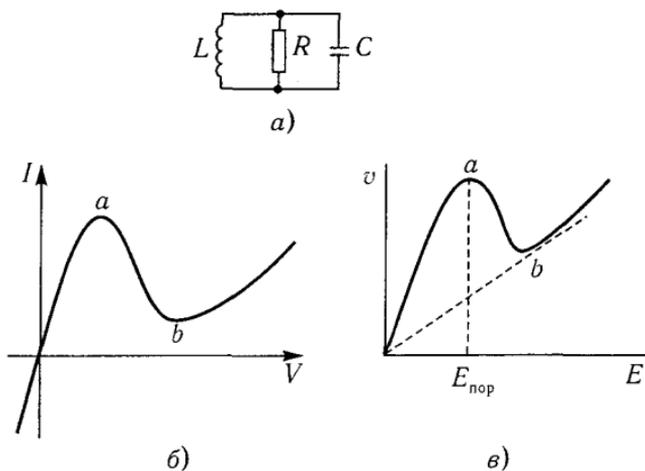


Рис. 6.6. Колебательный контур с элементом  $R$ , имеющим отрицательное сопротивление (а); вольт-амперная характеристика элемента  $R$  в случае туннельного диода (б) и зависимость средней дрейфовой скорости электронов от напряженности электрического поля в случае диода Ганна (в)

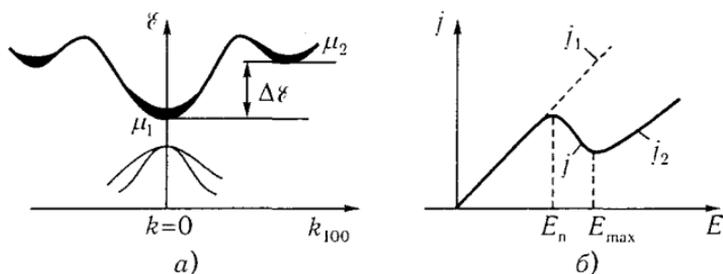


Рис. 6.7. Качественная картина структуры энергетических зон GaAs ( $\mu_1 \approx \approx 8000 \text{ см}^2/(\text{В}^2 \cdot \text{с})$ ,  $\mu_2 \approx 100\text{--}200 \text{ см}^2/(\text{В}^2 \cdot \text{с})$ ) (а) и пояснение механизма образования отрицательного дифференциального сопротивления в GaAs в рамках модели междолинного перехода электронов ( $j = e(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)E$ ;  $j_1 = e n \mu_1 E$ ;  $j_2 = e n \mu_2 E$ ) (б)

зоне проводимости имеются одна основная нижняя долина и несколько верхних одинаковых долин, лежащих вдоль направления (100). Электроны в основной долине имеют подвижность  $\mu_1$ , много большую подвижности  $\mu_2$  электронов в верхней долине.

При малой напряженности электрического поля в полупроводнике почти все электроны находятся в нижней долине, поэтому концентрация электронов в верхней долине  $n_2 = 0$ , а полная концентрация  $n$

равна концентрации  $n_1$  электронов в нижней долине. Плотность тока через полупроводник  $j_1 = en\mu_1 E$  (рис. 6.7 б). Когда напряженность поля увеличивается настолько, что часть электронов приобретает энергию, большую  $\Delta\mathcal{E}$ , они переходят в области с меньшей подвижностью — в верхние долины. Такой переход начинается со значения напряженности поля  $E = E_{\text{п}}$ , называемой пороговой. При  $E = E_{\text{max}}$  все электроны перейдут в верхние долины и плотность тока станет  $j_2 = en\mu_2 E$ . Если  $\mu_1 E_{\text{п}} > \mu_2 E_{\text{max}}$ , то  $j_1 > j_2$ , т. е. при изменении  $E$  от  $E_{\text{п}}$  до  $E_{\text{max}}$  плотность тока уменьшается с ростом поля и описывается соотношением  $j = e(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)E$ . Таким образом, в интервале изменения напряженности  $E_{\text{п}} < E < E_{\text{max}}$  на кривой  $j = j(E)$  есть участок, где  $\partial j / \partial E < 0$ , т. е. участок с отрицательной дифференциальной проводимостью (отрицательным дифференциальным сопротивлением). Поскольку  $\partial j / \partial E = \partial [e(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)E] / \partial E$ , из условия  $\partial j / \partial E < 0$  следует, что

$$\frac{\partial n_2}{\partial E} > \frac{n_1}{E}. \quad (6.22)$$

При выводе (6.22) мы использовали равенство  $\partial n_1 / \partial E = -\partial n_2 / \partial E$  и пренебрегли слагаемыми, пропорциональными  $\mu_2$ , так как  $\mu_1 \gg \mu_2$ . Неравенство (6.22) означает, что в области изменения  $E$ , где имеет место отрицательное дифференциальное сопротивление, переход электронов из нижней долины в верхние (изменение концентрации электронов) должен протекать достаточно эффективно при малых изменениях  $E$ .

Приведенная выше качественная картина образования отрицательного сопротивления справедлива, если переход электронов из нижней зоны в верхнюю происходит по всему объему полупроводника равномерно и одновременно. На самом деле эта картина усложняется тем, что появление участка вольт-амперной характеристики с отрицательным сопротивлением приводит к неустойчивости протекания тока через полупроводник и к образованию движущихся областей сильного поля — доменов. При этом существенны нелинейные эффекты, которые рассматриваются во второй части книги.

Неконсервативная неустойчивость систем с одной степенью свободы, образцами которой являются неустойчивый фокус или неустойчивый узел, не обязательно связана с трением или вязкостью. Например, в известной экологической модели Вольтерра (см. гл. 1), описывающей изменение численности видов в системе «хищник — жертва»,

$$\dot{N}_x = \gamma_x N_x (N_{\text{ж}} - \nu_x), \quad \dot{N}_{\text{ж}} = \gamma_{\text{ж}} N_{\text{ж}} (1 - N_x - \nu_{\text{ж}}), \quad (6.23)$$

где  $N_x, N_{ж}$  — число хищников и жертв соответственно,  $\gamma_x, \gamma_{ж}$  — параметры, характеризующие скорость размножения объектов; параметры  $\nu_x$  и  $\nu_{ж}$  определяют скорость выхода хищников и жертв из сферы взаимодействия (это может быть, например, смертность в случае млекопитающих или рыб либо скорость потока в культиваторе в случае, когда речь идет о микроорганизмах — бактериях и вирусах). Воспользуемся эмпирическим законом Моно [7], в соответствии с которым скорость размножения хищников пропорциональна численности жертв, если эта численность мала, и слабо зависит от нее, если численность жертв велика. Тогда вместо уравнений (6.23), считаем  $\nu_x = \nu_{ж} = \nu$  (см. [7]), мы будем иметь

$$\dot{N}_x = \frac{N_x N_{ж}}{r + N_{ж}} - \nu N_x, \quad \dot{N}_{ж} = N_{ж}(1 - \nu) - \frac{N_x N_{ж}}{r + N_{ж}}, \quad (6.24)$$

где  $r$  — константа. Эти кинетические уравнения имеют два состояния равновесия:  $N_x^0 = N_{ж}^0 = 0$  и  $N_x = r, N_{ж}^0 = r\nu/(1 - \nu)$ . Очевидно, что второе состояние равновесия имеет смысл лишь при  $0 < \nu < 1$ . Определим тип этих состояний равновесия. Линеаризованная система для возмущений  $n_x, n_{ж}$  ( $N_x = N_x^0 + n_x, N_{ж} = N_{ж}^0 + n_{ж}$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{n}_x &= \frac{N_x^0 n_{ж} + N_{ж}^0 n_x}{r + N_{ж}^0} - \frac{N_x^0 N_{ж}^0}{(r + N_{ж}^0)^2} n_{ж} - \nu n_x, \\ \dot{n}_{ж} &= n_{ж}(1 - \nu) - \frac{N_x^0 n_{ж} + N_{ж}^0 n_x}{r + N_{ж}^0} - \frac{N_x^0 N_{ж}^0}{(r + N_{ж}^0)^2} n_{ж}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Подставляя сюда координаты второго состояния равновесия (первое состояние равновесия для этой модели интереса не представляет, поскольку при  $N_x \rightarrow 0$  несправедлив закон Моно), находим

$$\ddot{n}_{ж} - \nu(1 - \nu)\dot{n}_{ж} + \nu(1 - \nu)^2 n_{ж} = 0. \quad (6.26)$$

Поскольку  $0 < \nu < 1$ , то интересующее нас состояние равновесия — всегда неустойчивый фокус (см. плоскость параметров на рис. 1.7). По существу, здесь неустойчивость также связана с действием положительной обратной связи — при увеличении численности жертв увеличивается скорость роста численности хищников, что и отражено в законе Моно.

Рассмотренные нами до сих пор механизмы неустойчивости так или иначе сводятся к одному механизму, определяемому отрицательным трением (сопротивлением, проводимостью, вязкостью и т. д.).

Действительно, и организация положительной обратной связи, и включение в  $LC$ -контур элемента с падающей вольт-амперной характеристикой приводят к появлению в уравнении осциллятора одного и того же слагаемого  $h dx/dt$ , где  $h < 0$  (отрицательные потери). При этом достаточно большие положительные потери, очевидно, подавляют такую неустойчивость. Это самые простые и привычные, особенно для радиотехников, механизмы неустойчивости. Однако они не исчерпывают всего многообразия колебательных неустойчивостей: есть и такие колебательные неустойчивости, для которых внесение в систему положительных потерь (трения, сопротивления и т. д.) не только не подавляет неустойчивость, но может даже и усиливать ее.

Мы уже встречались с примером неустойчивости, которая никак не связана с отрицательной диссипацией, — это неограниченный, секулярный рост колебаний в осцилляторе без трения, на который действует резонансное гармоническое возмущение<sup>1</sup>. При отсутствии такого возмущения осциллятор совершает колебания конечной амплитуды, введение же даже очень малого возмущения приводит к тому, что колебания нарастают до сколь угодно большой величины (до бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ ). Механизм этой неустойчивости очень прост — периодическое воздействие совпадает по фазе с колебаниями осциллятора, в результате чего и происходит раскачка. Нарастание колебаний в гамильтоновой системе (т. е. системе без диссипации) за счет резонансного отбора энергии у источника возможно и в том случае, когда этот источник неколебательный. Достаточным для этого условием является наличие у системы, например, нескольких степеней свободы (мод, взаимодействующих между собой). Подобная неустойчивость является, в частности, причиной нарастающих изгибно-продольных колебаний крыла самолета — так называемого флаттера.

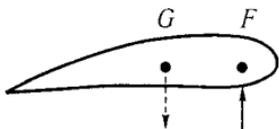


Рис. 6.8. Схема крыла, на котором указаны несовпадающие центр масс  $G$  и центр кручения  $F$

Полагая, что крыло — это колебательная система с двумя степенями свободы, одна из которых соответствует изгибным ( $x_1$ ), а другая

<sup>1</sup>Простейший пример неустойчивости в системе без трения — это неустойчивость шарика на горке. На фазовой плоскости такой неустойчивости, связанной с «отрицательной энергией» осциллятора, соответствует состояние равновесия типа «седло».

крутильным ( $x_2$ ) колебаниям, запишем его уравнения пока в отсутствие аэродинамических сил [8]:

$$I_1 \ddot{x}_1 + I_{12} \ddot{x}_2 + k_1 x_1 = 0, \quad I_{12} \ddot{x}_1 + I_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = 0; \quad (6.27)$$

здесь  $I_1$ ,  $I_2$  — обобщенные моменты инерции при изгибе и кручении соответственно,  $k_1$ ,  $k_2$  характеризуют упругость крыла,  $I_{12}$  — момент инерции, определяющий инерционную связь между колебаниями. Связь эта зависит от расстояния между центрами масс крыла и кручения (рис. 6.8). Когда эти центры совпадают,  $I_{12}$  обращается в нуль и (6.27) превращается в систему двух независимых осцилляторов с частотами  $n_1^2 = k_1/I_1$ ,  $n_2^2 = k_2/I_2$ . При наличии связи нормальные частоты изгибно-продольных колебаний крыла определяются из характеристического уравнения

$$\left[ 1 - \frac{I_{12}^2}{I_1 I_2} \right] \omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0.$$

Они, как мы знаем, будут лежать вне парциальных частот, так как связь раздвигает частоты. Для крыла в полете уравнения (6.27) дополняются интегральными аэродинамическими силами (подъемной силой и силами, закручивающими крыло):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + n_1^2 x_1 + \left( \frac{I_{12}}{I_1} \right) \ddot{x}_2 - b_1 v^2 x_2 &= 0, \\ \left( \frac{I_{12}}{I_2} \right) \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + n_2^2 x_2 - b_2 v^2 x_2 &= 0; \end{aligned} \quad (6.28)$$

здесь  $v$  — безразмерный параметр, характеризующий скорость полета, а  $b_1$  и  $b_2$  — положительные постоянные, зависящие от геометрии крыла [8]. Всеми диссипативными эффектами мы пренебрегли (эта система гамильтонова), тем не менее состояние равновесия  $x_1 = x_2 = 0$  здесь может быть неустойчивым, если скорость самолета достаточно велика. Граница неустойчивости определяется из условия равенства нулю дискриминанта:

$$\left[ \frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} + \left( b_1 \frac{I_{12}}{I_2} - b_2 \right) v^2 \right] - 4 \left( 1 - \frac{I_{12}^2}{I_1 I_2} \right) \left( 1 - b_2 \frac{n_1}{n_2} v^2 \right) = 0. \quad (6.29)$$

Читателю предоставляется самостоятельно определить критическую скорость, при которой возникает флаттер. Конкретные численные значения параметров можно найти, например, в книге [8]. Причина неустойчивости, приводящей к флаттеру, заключается в специфической

связи изгибных и крутильных колебаний в потоке воздуха. Фазовые соотношения, возникающие между этими модами, таковы, что колеблющееся крыло черпает энергию из набегающего потока воздуха. Введение диссипации может даже сделать эти фазовые соотношения более оптимальными с точки зрения отбора энергии у потока и тем самым лишь усилить неустойчивость.

## ГЛАВА 7

# Устойчивость распределенных систем со сплошным спектром

### 7.1. Общие замечания

Итак, когда речь идет об исследовании устойчивости ограниченных распределенных систем (резонаторов), задача по сравнению с соответствующей сосредоточенной усложняется лишь тем, что спектр комплексных собственных частот оказывается счетным. При этом, перебирая все возможные пространственные возмущения, т. е. все допустимые граничными условиями значения волновых чисел  $k_n$ , мы, определив корни характеристического уравнения  $D(\omega, k_n) = 0$ , полностью решаем задачу об устойчивости. Здесь, конечно, могут встретиться трудности, но трудности технические.

Если же система полуограничена или безгранична, то сама постановка задачи об устойчивости, вообще говоря, не очевидна и требует дополнительных размышлений. Действительно, теперь, рассматривая устойчивость возмущений в интересующей нас области пространства, мы должны решить задачу об эволюции пространственно-локализованного возмущения — задачу с начальными условиями

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} u_s(k, 0) \exp[i\omega_s(k)t - ikx] dk, \quad (7.1)$$

где  $u_s(k, 0)$  — пространственный спектр начального возмущения, а суммирование проводится по всем нормальным волнам. Как поведет себя возмущение в заданной точке или локализованной области? Ведь экспоненциальный рост во времени отдельных  $k$ -компонент пространственного спектра отнюдь не гарантирует временного роста возмущения в этой точке или области. Действительно, возмущение может, нарастая во времени, просто покидать рассматриваемую область, убегая из нее. Именно такая «сносовая», или конвективная, неустойчивость наблюдается, например, в некоторых сдвиговых гидродинамических те-

чениях (в частности, затопленных струях, см. рис. 7.1), а также в различных электронных системах — лампе бегущей волны (ЛБВ), плазме, пронизываемой электронным пучком, и т. д.

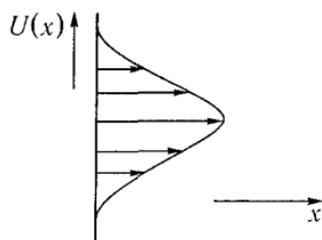


Рис. 7.1. Профиль скорости в затопленной струе

Если же среди нарастающих возмущений находятся такие, которые не покидают заданной области, т.е. в каждой точке этой области возмущение растет, то это уже истинная (в нашем старом понимании) неустойчивость. Такую неустойчивость называют абсолютной<sup>1</sup>. Формальные определения, следовательно, должны быть такими: если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \rightarrow \infty, \quad x \in (x_1, x_2), \quad (7.2)$$

где  $u(x, t)$  — возмущение ( $x_1, x_2$  — границы интересующей нас области, в которой имеется неустойчивость), то неустойчивость — абсолютная; если же

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \rightarrow 0, \quad x \in (x_1, x_2), \quad (7.3)$$

то неустойчивость конвективная.

Естественно, что вид неустойчивости зависит от выбора системы координат. Если мы движемся вместе с убегающим, растущим во времени возмущением, то в новой системе координат неустойчивость будет уже не конвективной, а абсолютной. И наоборот, если в системе с абсолютной неустойчивостью перейти к новым переменным  $t_n = t$ ,  $x_n = x - v_0 t$ , где  $v_0$  превышает максимальную скорость распространения возмущений (такой переход, конечно, возможен не всегда; например, не имеет смысла переходить в систему координат, движущуюся со скоростью, большей скорости света), то неустойчивость из абсолютной превратится в конвективную.

С проблемой разделения абсолютной и конвективной неустойчивости тесно связана другая, может быть, даже более важная для приложений проблема о распознавании усиления и непропускания в полуграниченных системах, возбуждаемых сосредоточенным источником. Поясним эту проблему подробнее.

Пусть на границу  $x = 0$  среды, описываемой дисперсионным уравнением  $D(\omega, k) = 0$ , подается сигнал. Для простоты будем считать его

<sup>1</sup> Впервые проблема разделения абсолютной и конвективной неустойчивостей была поставлена Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [19] в связи с анализом гидродинамической неустойчивости.

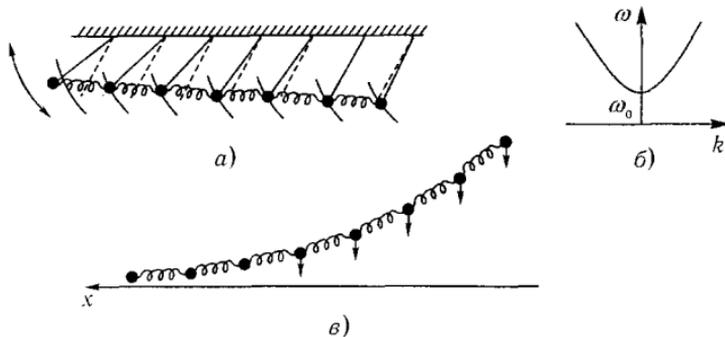


Рис. 7.2. Колебания (в плоскости, перпендикулярной и рисунку) в цепочке связанных маятников (а); дисперсионная характеристика этой колебательной системы (б) и затухание колебаний вдоль направления их распространения (в) [15]

радиоимпульсом с частотой заполнения  $\omega_0$ ). Предположим далее, что корни уравнения  $D(\omega_0, k)$  не действительные, и пусть есть корни и с  $\text{Im } k < 0$ , и с  $\text{Im } k > 0$ . Что будет происходить с сигналом по мере распространения его в среде вдоль оси  $x$ ? Казалось бы, поскольку решение имеет вид  $\exp(\text{Im } kx) \exp(i\omega_0 t) \exp(-i \text{Re } kx)$  при  $\text{Im } k > 0$ , сигнал должен нарастать вдоль  $x$ . Утверждение, вообще говоря, неверно. Например, когда мы пытаемся возбудить колебания на частоте  $\omega < \omega_0$  в цепочке связанных маятников (рис. 7.2а; дисперсионная характеристика этой системы приведена на рис. 7.2б), мы получим не усиление колебаний вдоль оси  $x$ , а экспоненциальное затухание (рис. 7.2в). Колебание не возникает; в среде на закритической частоте имеет место непропускание, хотя и в этом случае при  $\omega < \omega_0$  имеется корень уравнения  $D(\omega_0, k) = 0$  с  $\text{Im } k > 0$ . В чем же дело? Ответ заключается в следующем: существование корня уравнения  $D(\omega_0, k) = 0$ , лежащего в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $k$ , само по себе еще не означает усиления. Волна, соответствующая этому корню, может распространяться влево ( $\text{Re } k < 0$ ), и тогда она будет затухать в направлении своего распространения (рис. 7.2в). В отличие от аналогичной задачи о неустойчивости синусоидального решения во времени (в которой всегда  $t > 0$ ) здесь оба направления изменения переменной ( $x$ ) имеют смысл.

В этой главе мы обсудим различные примеры неустойчивых и усиливающих сред и сравнительно простые критерии, позволяющие отделить усиление от непропускания и определить, какая неустойчивость реализуется в системе — абсолютная или конвективная.

## 7.2. Примеры неустойчивостей

**Неустойчивость Джинса.** Рассмотрим в рамках уравнений гидродинамики устойчивость покоящегося в пространстве однородного распределения гравитирующего газа [1]. Линеаризуя на фоне такого стационарного решения уравнения гидродинамики:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho = -\rho \nabla \mathbf{v}, \\ \text{б) } \quad & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla \Phi, \\ \text{в) } \quad & \Delta \Phi = 4\pi G \rho, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $\Phi$  — потенциал гравитационного поля,  $G$  — гравитационная постоянная, для одномерных возмущений плотности получим следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0. \quad (7.5)$$

Здесь  $c^2 = dp/d\rho$  — квадрат изотермической скорости звука. Это уравнение описывает эволюцию возмущений на фоне стационарного решения системы (7.4) вида  $\rho = \rho_0$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = 0$ ,  $\Phi = \Phi_0 = \text{const}$ . В то же время при  $\rho = \rho_0$ ,  $\Phi = \Phi_0 = \text{const}$  не является решением уравнения Пуассона (7.4в). Однако при анализе устойчивости стационарного решения с  $\Phi_0 = \varphi(x)$  вблизи центра ограниченной области  $\Phi_0 = \text{const}$  считается хорошим приближением [1]. Для возмущений вида  $\rho' = \rho_0 \exp(i\omega t - ikx)$  из (7.5) следует дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (7.6)$$

Отсюда сразу видно, что при  $k^2 < (4\pi G/c^2)\rho_0$  однородное распределение плотности неустойчиво:  $\omega^2 < 0$ . На нелинейной стадии процесса это приводит к возникновению гравитационных «капель» (у нас они одномерные) с пространственным масштабом  $\lambda > \lambda_{\text{кр}} = \sqrt{\pi c^2/G\rho_0}$ . Максимальный инкремент соответствует  $\lambda \rightarrow \infty$  и равен  $\text{Im} \omega_\infty = 2\sqrt{\pi G\rho_0}$ . Вид дисперсионных кривых уравнения (7.6) приведен на рис. 7.3а. Заметим, что закон дисперсии (7.6) одновременно описывает и волновые возмущения в уже упоминавшейся системе связанных маятников (в длинноволновом приближении), только в отличие от рис. 7.2, в этом случае речь идет об устойчивости стационарного состояния, в котором все маятники «стоят вверх ногами» (рис. 7.3 б).

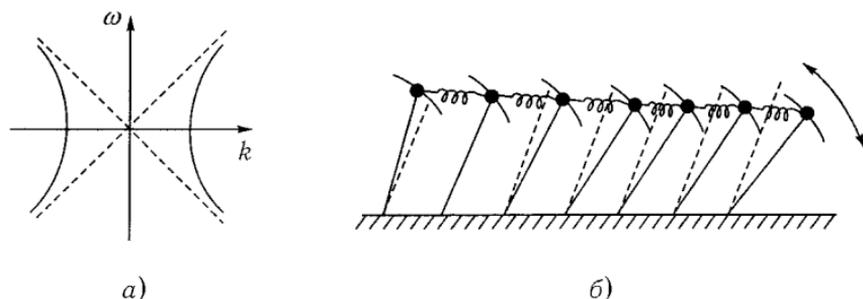


Рис. 7.3. Дисперсионные кривые уравнения (7.6) (а) и описываемые уравнением (7.6) колебания (в плоскости, перпендикулярной рисунку) в системе связанных маятников (б)

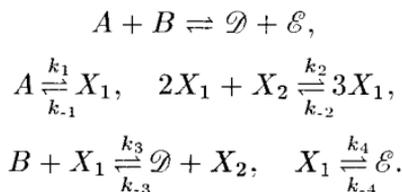
Таким образом, в рассматриваемой системе (7.5) имеется неустойчивость. Обсуждение вопроса, абсолютная эта неустойчивость или конвективная, мы отложим до следующего параграфа.

**Неустойчивость Тьюринга.** В 1952 г. Тьюринг рассмотрел модель кинетики химических реакций с учетом диффузии. В рамках этой модели обнаружилась неустойчивость, приводящая к возникновению пространственных структур. По этой причине модель Тьюринга и сходные с ней модели вызвали чрезвычайный интерес как модели возникновения структур в биологических системах [2–5]. Мы сейчас рассмотрим устойчивость стационарного состояния в рамках простейшей модели Тьюринга, описывающей взаимодействие всего лишь двух веществ с концентрациями  $X_1$  и  $X_2$  в одномерном реакторе:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = f_1(X_1, X_2) + D_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial t} = f_2(X_1, X_2) + D_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}. \quad (7.7)$$

Здесь  $D_1$  и  $D_2$  — коэффициенты одномерной диффузии, происходящей вдоль координаты  $x$ .

Свяжем систему уравнений (7.7) с конкретной системой химических уравнений:



Для простоты будем считать, что кинетические коэффициенты  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ , а  $k_{-1} = k_{-2} = k_{-3} = k_{-4} = 0$ . Тогда

система соответствующих кинетических уравнений, дополненная слагаемыми, учитывающими одномерную диффузию вдоль координаты  $x$ , имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial t} &= A + X_1^2 X_2 - B X_1 - X_1 + D_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= B X_1 - X_1^2 X_2 + D_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (7.8)$$

Модель, описываемая уравнениями (7.8), была предложена Пригожиным и Лефевром [5] и носит название тримолекулярной модели или брюсселятора. Это — основная элементарная модель, используемая для описания процессов в химической кинетике.

Однородное по пространству стационарное состояние системы уравнений (7.8) (т.е. когда  $\partial/\partial t = \partial^2/\partial x^2 = 0$ ) имеет вид

$$X_1^0 = A, \quad X_2^0 = B. \quad (7.9)$$

Для исследования данного состояния на устойчивость найдем уравнение для малых отклонений  $x'_1$  и  $x'_2$  от (7.9). Полагая  $X_1 = X_1^0 + x'_1$  и  $X_2 = X_2^0 + x'_2$  и линеаризуя (7.8), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'_1}{\partial t} - (B - 1)x'_1 - A^2 x'_2 &= D_1 \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial x'_2}{\partial t} + A^2 x'_2 + B x'_1 &= D_2 \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Решение системы уравнений (7.10) будем искать в виде концентрационных волн

$$x'_1, x'_2 \sim \exp(ipt - ikx), \quad (7.11)$$

где  $-ip = \omega$  — неизвестная круговая частота, а  $k$  — неизвестное волновое число. Подставляя (7.11) в (7.10), находим характеристическое уравнение

$$p^2 - \theta p + \Delta = 0, \quad (7.12)$$

где

$$\begin{aligned}\theta &= -[A^2 + 1 - B + k^2(D_1 + D_2)], \\ \Delta &= A^2 - (B - 1)D_2 k^2 + A^2 D_1 k^2 + D_1 D_2 k^4.\end{aligned}\quad (7.13)$$

Пусть  $D_1 = D_2 = 0$ . Если речь идет об устойчивости стационарного состояния во времени, следует определить расположение корней уравнения  $p^2 - \theta_1 p + \Delta_1 = 0$  с  $\theta_1 = -(A^2 + 1 - B)$  и  $\Delta_1 = A^2$  на комплексной плоскости  $p$ . Система без диффузии, таким образом, устойчива, когда

$$\Delta_1 = A^2 > 0, \quad \theta_1 = -(A^2 + 1 - B) < 0. \quad (7.14)$$

Может ли диффузия превратить устойчивое в рамках гомогенной модели состояние (7.9) в неустойчивое?

Как следует из (7.12), система будет неустойчивой при  $\Delta < 0$ , откуда при учете (7.13) получается условие

$$\Delta = D_1 D_2 k^4 + [A^2 - (B - 1)D_2 + AD_1]k^2 + A^2 < 0. \quad (7.15)$$

Для выполнения этого неравенства  $k^2$  должно находиться в интервале, границы которого  $k_1^2$ ,  $k_2^2$  определяются из равенства  $\Delta = 0$ , т. е. в интервале, где

$$k_{1,2}^2 = (2D_1 D_2)^{-1} \left\{ -[A^2 D_1 - (B - 1)D_2] \pm \sqrt{[A^2 D_1 - (B - 1)D_2]^2 - 4D_1 D_2} \right\}. \quad (7.16)$$

Напомним, что теперь  $D_1, D_2 \neq 0$  [3].

Мы получили, следовательно, положительный ответ на наш вопрос: появление в реакторе диффузии действительно приводит к неустойчивости. Замечательно, что эта неустойчивость весьма избирательна — нарастают периодические в пространстве возмущения с пространственным периодом, лежащим в ограниченном интервале<sup>1</sup>.

Приведем здесь еще два примера, иллюстрирующих работу распределенных СВЧ-усилителя (лампа бегущей волны — ЛБВ) и генератора (лампа обратной волны — ЛОВ). В гл. 4 мы обсудили в связи с объяснением пространственного резонанса распределенный усилитель — лампу бегущей волны (см. рис. 4.24). Там же говорилось, что для правильного описания процесса усиления к уравнению возбуждения волноведущей системы без потерь током электронного пучка

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\Phi} E = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v_\Phi} \right)^2 K I \quad (7.17)$$

(в обозначениях § 4.4) нужно добавить уравнение  $\widehat{M}I = \text{const} \cdot E$  ( $\widehat{M}$  — оператор), учитывающее обратное влияние волноведущей системы на

<sup>1</sup>Здесь следует учесть также ограниченность размеров системы [5].

пучок и описывающее группирование электронов в сгустки. Уравнение (7.17) получено в предположении, что все переменные величины изменяются во времени как  $\exp(i\omega t)$ , причем  $\omega$  — действительная величина, поскольку лампа бегущей волны — усилитель, в котором вдоль длины лампы происходит экспоненциальное нарастание сигнала вполне определенной частоты, задаваемой внешним сигналом-генератором.

Пусть электронный поток описывается гидродинамическими уравнениями. Будем считать, что этот поток заполняет все пространство, но движение его одномерно, т. е. в направлениях, перпендикулярных направлению движения, ничего не меняется (в СВЧ-электронике эта модель называется моделью бесконечно широкого пучка). Тогда для описания такой заряженной жидкости (столкновением частиц, т. е. вязкостью, пренебрегаем) достаточно уравнения Эйлера для скорости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_{\text{пз}}), \quad (7.18)$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.19)$$

и обобщенного уравнения Пуассона, связывающего градиент электрического поля объемного заряда с плотностью объемного заряда электронной жидкости:

$$\frac{\partial E_{\text{пз}}}{\partial x} = 4\pi\rho. \quad (7.20)$$

Электронный поток предполагается ионно-скомпенсированным, т. е. в целом среда из заряженных частиц электрически нейтральна.

Так как нас интересует вопрос об устойчивости, то достаточно рассмотреть линеаризованные уравнения, полагая  $v = v_0 + v'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , и плотность тока  $\rho v = j_0 + j'$  ( $j_0 = \rho_0 v_0$ ), где  $v_0$ ,  $\rho_0$ ,  $j_0$  — постоянные составляющие соответствующих величин, а  $v'$ ,  $\rho'$ ,  $j'$  — малые возмущения этих величин (любое возмущение много меньше соответствующей постоянной величины). Линеаризованные уравнения (7.18)–(7.20) имеют вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_{\text{пз}}), \quad \frac{\partial j'}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (7.21)$$

или, поскольку  $j' = v_0 \rho' + \rho_0 v'$ ,

$$\frac{\partial j'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial j'}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t}, \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial E'_{пз}}{\partial x} = 4\pi \rho'. \quad (7.23)$$

Полагая, что все переменные величины изменяются во времени по закону  $\exp(i\omega t)$ , и вводя оператор  $\hat{\mathcal{L}} = i\omega + v_0 \partial/\partial x$ , перепишем (7.21)–(7.23) следующим образом:

$$\hat{\mathcal{L}}v' = \frac{e}{m}E + \frac{e}{m}E'_{пз}, \quad \hat{\mathcal{L}}j' = i\omega \rho_0 v', \quad E'_{пз} = -\frac{4\pi}{i\omega}j'. \quad (7.24)$$

При выводе (7.24) использованы уравнения (7.23) и уравнение непрерывности в виде  $\partial j'/\partial x = -i\omega \rho$ .

Исключая в системе уравнений (7.24)  $v'$  и  $E'_{пз}$ , получаем

$$\hat{\mathcal{L}}^2 j' + \omega_p^2 j' = \left( \frac{i\omega \rho_0 e}{m} \right) E. \quad (7.25)$$

Простейший способ перехода от бесконечного широкого электронного потока к пучку с конечным поперечным геометрическим сечением  $S$  состоит во введении вместо плазменной частоты  $\omega_p = \sqrt{4\pi \rho_0 e/m}$  редуцированной плазменной частоты  $\omega_q = R\omega_p$ , где  $R$  — коэффициент редукиции ( $0 < R \leq 1$ ), который учитывает влияние на пучок окружающих стенок [6].

Тогда для тока  $i' = j'S$ , сгруппированного в пучке под действием поля волноведущей системы, из (7.25) имеем

$$\frac{\partial^2 i'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial i'}{\partial x} - \left( \frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{\omega_q^2}{v_0^2} \right) i' = i \frac{\omega}{v_0} \frac{I_0}{2V_0} E, \quad (7.26)$$

где  $I_0 = \rho_0 v_0 S$  — постоянный ток пучка,  $V_0 = \sqrt{v_0^2 m/2e}$  — ускоряющее напряжение пучка. Условие совместности самосогласованной системы уравнений (7.17) и (7.26) в предположении, что  $i'$  и  $E$  изменяются в пространстве, как  $\exp(-ikx)$ , где  $k$  — волновое число, приводит к дисперсионному уравнению

$$(\omega - kv_\Phi)(\omega - kv_0 - \omega_q)(\omega - kv_0 + \omega_q) = \omega^3 C^3, \quad (7.27)$$

$C^3 = (I_0 K/4V_0)(v_0/v_\Phi)^2$ ,  $C$  — известный в теории ЛБВ параметр усиления [7]. Нетрудно видеть из уравнения (7.27), что во взаимодействии

участвуют одна волна волноведущей системы  $k = \omega/v_\Phi$  и две волны пучка — быстрая волна пространственного заряда ( $k = (\omega - \omega_q)/v_0$ ) и медленная волна пространственного заряда ( $k = (\omega + \omega_q)/v_0$ ). Необходимым условием усиления в пространстве является комплексность

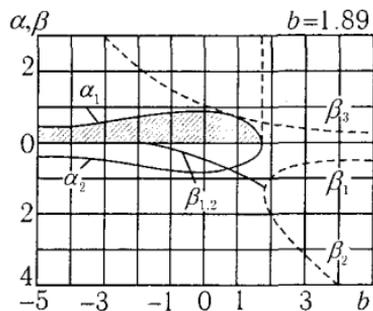


Рис. 7.4. Зависимость  $\alpha$  и  $\beta$  от параметра рассинхронизма  $b$  между пучком и «холодной» волной;  $\alpha_1$  соответствует волне, растущей с расстоянием [8]

$= (\sqrt{3}/2)k_e C$  и что область неустойчивости ограничена значением  $b = 3\sqrt{2}/2 \approx 1,89$ .

Во второй половине 50-х годов разразилась дискуссия, начатая Пиддингтоном в работе [9], в которой отвергалась существовавшая тогда теория ЛБВ и двухлучевой лампы (о ней речь в этой главе пойдет дальше). Он считал, что пространственное нарастание волны предсказано теорией неверно и что ошибка состоит в неправильном толковании дисперсионного уравнения. Пиддингтон показал, что иногда экспоненциально затухающие вдоль оси  $x$  волны можно по ошибке принять за усиливаемые, но и сам ошибся в окончательном выводе, решив, что случай комплексных  $k$  при действительных  $\omega$  всегда соответствует непропусанию.

Остановимся еще на одном примере — ЛОВ. В ЛОВ электронный пучок движется через искусственную среду, в которой могут распространяться волны с продольным электрическим полем; дисперсия этой среды такова, что фазовая скорость волны на некоторой частоте  $\Omega$  равна скорости электронов, а групповая скорость отрицательна, т. е.

$$v_\Phi(\Omega) = v_0, \quad v_{гр}(\Omega) < 0. \quad (7.28)$$

В реальных приборах искусственной средой с нужными свойствами

волнового числа при действительной частоте  $\omega$ , причем поскольку  $E \sim \exp(-ikx)$  для волн, бегущих вправо, то неустойчивость в пространстве будет лишь тогда, когда  $\text{Im } k > 0$ .

На рис. 7.4 решение уравнения (7.27) при  $\omega_q = 0$  показано в виде зависимостей  $\alpha = \text{Im } k/(k_e C)$  и  $\beta = (k_e - \text{Re } k)/(k_e C)$  ( $k_e = \omega/v_0$ ) от параметра рассинхронизма  $b = (k_0 - k_e)(k_e C)$  ( $k_0 = \omega/v_\Phi$ ) между пучком и «холодной» волной. Предполагается, что влиянием затухания и сил пространственного заряда на взаимодействие можно пренебречь. Легко видеть, что при  $b = 0$  ( $v_0 = v_\Phi$ ) достигается максимальное значение инкремента  $(\text{Im } k)_{\max} =$

служит периодическая электродинамическая структура — замедляющая система. Благодаря условиям (7.28) при взаимодействии потока электронов с волной в системе реализуется распределенная обратная связь — малые волновые возмущения, распространяющиеся со скоростью  $v_{гр}$ , бегут навстречу потоку и тем самым связывают выход системы с ее входом. При этом возможно либо усиление (регенеративное), либо самовозбуждение лампы. В электронике ЛОВ используется, главным образом, для генерации монохроматических колебаний СВЧ-диапазона (схематическое изображение ЛОВ приведено на рис. 23.6 [10, 11]).

Легко показать, что дисперсионное уравнение системы электронный пучок — обратная электромагнитная волна имеет вид

$$(\omega - kv_{\phi})(\omega - v_0k - \omega_q)(\omega - v_0k + \omega_q) = -\omega^3 C^3, \quad (7.29)$$

т. е. отличается от уравнения (7.27) только знаком в правой части. Если речь идет о самовозбуждении системы, то неизвестны ни  $\omega$ , ни  $k$ . Каково условие неустойчивости? Поскольку нас интересует генерация, то следует интересоваться неустойчивостью во времени. Тогда возникает вопрос: какой смысл в данном случае имеют комплексные значения  $k$ ? Обычно ответы на эти вопросы находятся совместным решением уравнений типа (7.17) (для ЛОВ в этом уравнении нужно изменить знак в правой части) и (7.26) при начальных или граничных условиях, соответствующих физике задачи.

Так, из уравнения (7.27) следует, что поле  $E$  и сгруппированный ток  $i'$  можно описать тремя волнами:

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i(0)e^{-ik_i x}, \quad i' = \sum_{i=1}^3 i'_i(0)e^{-ik_i x}. \quad (7.30)$$

Неизвестные амплитуды  $E_i(0)$  и  $i'_i(0)$  определяются для ЛБВ из начальных условий ( $x = 0$ )

$$\sum_{i=1}^3 E_i(0) = E(0), \quad \sum_{i=1}^3 i'_i(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial i'_i(0)}{\partial x} = 0, \quad (7.31)$$

где  $E(0)$  — амплитуда входного сигнала, второе условие означает, что пучок не сгруппирован на входе, а третье условие — что пучок на входе не модулирован по скорости. Тогда можно найти распределение поля вдоль длины пространства взаимодействия. Из решения следует, что на достаточно большой длине доминирует волна с  $\text{Im } k > 0$ , которая и определяет коэффициент усиления ЛБВ. Например, при  $b = 0$  коэффициент

усиления равен

$$G = \frac{E(l)}{E(0)} \sim \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\pi C \frac{l}{\lambda}\right) \sim \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\pi CN\right),$$

где  $\lambda = 2\pi/k_e$ ,  $N = l/\lambda$  — число длин волн, укладываемых по пространству взаимодействия.

В случае ЛОВ генератора для определения условий возникновения колебаний ( $\text{Im } \omega = 0$ ) следует решать краевую задачу, полагая  $i'(0) = \partial i'(0)/\partial x = 0$  и  $E(l) = 0$  (входной сигнал отсутствует). Тогда получаются следующие значения пусковых параметров, при которых возникают колебания:  $b_n = 1,552$ ,  $(CN)_n = 0,314$ . При значении  $v_0$ , мало отличающемся от  $v_\phi$ , и  $C \ll 1$  решения (7.29) можно искать в виде  $k = (\omega/v_0)(1 + iC\delta)$ , что приводит к уравнению  $\delta^2(\delta + ib) = -i$ . При  $b = b_n$  корни этого уравнения  $\delta_1 = 0,725 + i \cdot 0,151$ ,  $\delta_2 = -0,725 + i \cdot 0,151$ ,  $\delta_3 = -i \cdot 1,822$  [11]. Очевидно, что волна с  $\text{Im } k_1 > 0$  не играет той роли, какую она играла в ЛБВ, а поле определяется суперпозицией всех трех волн, поскольку иначе не выполнить граничного условия  $E(l) = 0$ . При подобном подходе, однако, возникают очевидные трудности, связанные с необходимостью решения краевой задачи. В то же время было бы желательно не решать задачу с начальными и тем более краевыми условиями, а ограничиться рассмотрением лишь безграничных систем, т. е. анализом дисперсионного уравнения, и с его помощью отвечать на все вопросы об устойчивости.

### 7.3. Абсолютная и конвективная неустойчивости.

#### Метод характеристик

Определить характер поведения произвольного возмущения (сносится ли возмущение в каком-то направлении по  $x$  либо расширяется, захватывая новые области в  $+x$ - и  $-x$ -направлениях), не анализируя конкретных решений типа (7.1), а используя лишь дисперсионное уравнение системы — в общем случае задача весьма трудная. Однако для широкого класса распределенных систем, а именно систем, описываемых уравнениями в частных производных гиперболического типа, это можно сделать сравнительно просто (заметим, что гиперболическими уравнениями описываются и колебания в системе связанных маятников (см. рис. 7.2 и 7.3), и невязкий гравитирующий газ, и многие другие очень важные системы). Для таких систем поставленная задача решается просто — нужно лишь определить на плоскости  $xt$  границы области

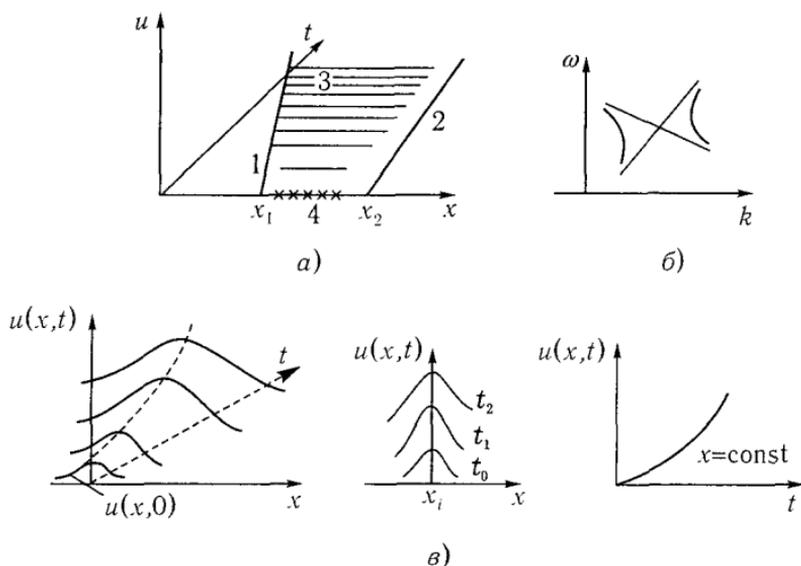


Рис. 7.5. Связь характеристик гиперболических систем (плоскость  $xt$ ) с асимптотами соответствующих дисперсионных уравнений (плоскость  $\omega k$ ) в случае абсолютной неустойчивости для двухволновых систем (1, 2 — характеристики разных семейств; 3 — область распространения возмущения; 4 — область начального возмущения) (а, б); рисунки, поясняющие развитие в системе абсолютной неустойчивости (в)

распространения возмущения (рис. 7.5), совпадающие с характеристиками системы, которые имеют максимальный и минимальный наклоны. Простейший пример гиперболического уравнения мы уже хорошо знаем — это обычное волновое уравнение  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ . Здесь два семейства характеристик:  $x - at = C_1$  и  $x + at = C_2$ . Первое семейство соответствует возмущениям, распространяющимся вправо, а второе — возмущениям,двигающимся влево. Поскольку в данном случае система линейна, произвольное возмущение (являющееся их суперпозицией) будет расширяться и в  $+x$ -, и в  $-x$ -направлениях. Таким образом, если мы «организуем» в подобной системе неустойчивость (формально это можно сделать, добавив в левую часть уравнения слагаемое  $-b^2 u_t$ ), то эта неустойчивость будет абсолютной — область распространения захватывает оба полупространства (и левее, и правее начальной области на оси  $x$  (рис. 7.5)). Таким образом, неустойчивость однородного гравитирующего газа (неустойчивость Джинса) и неустойчивость в генераторе обратной волны — это абсолютные неустойчивости.

Характеристики гиперболических систем оказываются связанны-

ми с асимптотами дисперсионных кривых соответствующей линеаризованной задачи. Характеристики и асимптоты одинаково наклонены соответственно на плоскостях  $xt$  и  $\omega k$ . Благодаря этому для гиперболических систем, для которых число асимптот с конечным наклоном совпадает с числом нормальных волн, можно уже по виду дисперсионных кривых сказать, будет ли неустойчивость абсолютной или конвективной. Если угловые коэффициенты асимптот дисперсионных кривых имеют противоположные знаки, то неустойчивость абсолютная (рис. 7.5), если они имеют одинаковые знаки, то неустойчивость конвективная (рис. 7.6).

В первом случае область распространения будет, как на рис. 7.5 а, а во втором — как на рис. 7.6 а.

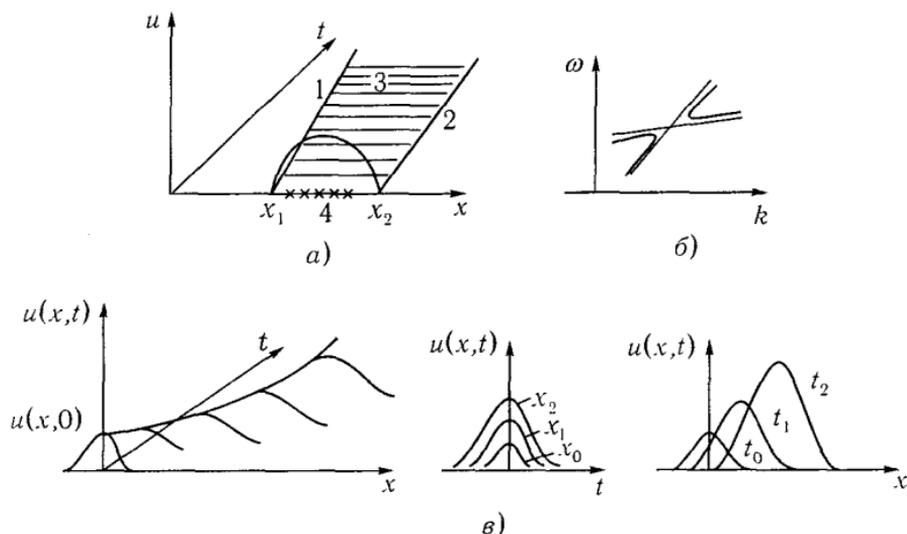


Рис. 7.6. Связь характеристик гиперболических систем (плоскость  $xt$ ) с асимптотами соответствующих дисперсионных уравнений (плоскость  $\omega k$ ) в случае конвективной неустойчивости для двухволновых систем (1–4 имеют тот же смысл, что и на рис. 7.5) (а, б); рисунки, поясняющие развитие в системе конвективной неустойчивости (в)

Приведем здесь элементарные сведения из теории характеристик [12, 13]. Запишем систему исходных уравнений в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(u) \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.32)$$

где  $u_i$  — переменные, описывающие нашу систему, а  $a_{ik}(u)$ ,  $b_i(u)$  — нелинейные функции от  $u_1, \dots, u_n$ . Уравнения типа (7.32) обычно называют квазилинейными. Они не содержат нелинейных функций относительно производных. Будем называть характеристиками линии на плоскости  $xt$ , ограничивающие так называемую область влияния. Если возмущение задано на некоторой дуге  $AB$  в плоскости  $xt$ , то оно влияет на решение  $u_i(x, t)$  системы (7.32) лишь в области, ограниченной характеристиками, проходящими через точки  $A$  и  $B$ . Поскольку характеристика отделяет возмущенную область от невозмущенной, то, задав все величины  $u_i$  вдоль характеристик (т. е. известны лишь  $\partial u_i / \partial s$ ), невозможно с помощью уравнений (7.32) однозначно определить нормальные к характеристикам производные  $\partial u_i / \partial n$ . Исходя из этого будем искать уравнение характеристик. Обозначая тангенс угла наклона характеристик к оси  $t$  через  $V$ , выразим  $\partial u_i / \partial t$  и  $\partial u_i / \partial x$  через  $\partial u_i / \partial s$  и  $\partial u_i / \partial n$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= (V^2 + 1)^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial s} - V(V^2 - 1)^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} &= V(V^2 + 1)^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial s} + (V^2 + 1)^{-1} \frac{\partial u_i}{\partial n}.\end{aligned}$$

После подстановки этих производных в (7.32) имеем

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} - V\delta_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial n} = - \sum_{k=1}^n (Va_{ik} + \delta_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial s} - b_i(u). \quad (7.33)$$

Это линейная неоднородная система относительно  $\partial u_k / \partial n$  с известной правой частью. Чтобы из этих уравнений нельзя было определить  $\partial u_k / \partial n$ , необходимо, чтобы определитель ее равнялся нулю:

$$\text{Det}(a_{ik} - V\delta_{ik}) = 0 \quad (7.34)$$

( $\delta_{ik}$  — символ Кронекера). Это и есть искомое уравнение для характеристик. Поскольку это многочлен  $n$ -го порядка относительно  $V$ , мы найдем наклон  $n$  семейств характеристик. Если система линейна и  $a_{ik}$  не зависят от  $u$ , то характеристики — это прямые линии на плоскости  $xt$ , наклон которых равен  $V_l$ , где  $V_l$  — корни уравнения (7.34) ( $l = 1, 2, \dots, n$ ).

Линеаризованная система (7.32) описывается дисперсионным уравнением

$$\text{Det}\left(a_{ik} - \frac{\omega}{k}\delta_{ik} - \frac{1}{k}b_{ik}\right) = 0, \quad b_{ik} = \left. \frac{\partial b_i}{\partial u_k} \right|_{u=u_0}. \quad (7.35)$$

Легко заметить, сравнивая (7.35) с (7.34), что в асимптотике при  $k \rightarrow \infty$  наклон дисперсионных кривых совпадает с наклоном характеристик.

Определим с помощью критерия, основанного на оценке расположения асимптот, вид неустойчивости в системе из двух взаимопроникающих, двигающихся вдоль  $x$  электронных потоков. Их дисперсионные характеристики представлены на рис. 7.8 для встречных потоков и на рис. 7.10в для попутных. В первом случае угловые коэффициенты асимптот имеют противоположные знаки и, следовательно, имеющаяся в этой системе неустойчивость — абсолютная, во втором — конвективная.

## 7.4. Волны в потоках. Электронные потоки. Неустойчивость Гельмгольца

Пусть есть две взаимопроникающие заряженные жидкости (в частности, это могут быть два электронных или ионных потока), взаимодействие которых определяется общим продольным электрическим полем пространственного заряда  $E_{\text{пз}}$ . Подобно тому, как мы поступили при анализе ЛБВ, будет считать среды консервативными, пренебрегая силами трения (вязкостью). Потоки, бесконечно широкие, движутся либо в одном по  $x$  направлении (попутные пучки), либо навстречу друг другу (встречные пучки) с разными по модулю постоянными скоростями  $|v_{01}|$  и  $|v_{02}|$ .

Описанная теоретическая модель соответствует довольно хорошо исследованной в СВЧ-электронике двухлучевой лампе [7, 8, 14]. В экспериментальных макетах использовались два катода, разность потенциалов между которыми обеспечивала различие в скоростях электронных потоков. Конструкция катодов выбиралась такой, чтобы обеспечить хорошее взаимопроникновение потоков (например, в одной из конструкций катод был выполнен в виде двух плоских спиралей, размещенных одна перед другой, так что электроны, эмиттируемые первым катодом, проходят между витками другого катода, чем и обеспечивается хорошее смешивание потоков).

Для введения усиливаемого сигнала в один или оба пучка обычно используется отрезок спирали, высокочастотное электрическое поле которого модулирует электроны. Скорость одного из потоков подбирается близкой к фазовой скорости волны  $v_{\text{ф}}$  в спирали для того, чтобы модуляция потока входным сигналом была эффективной. В результате экспоненциального нарастания с координатой переменного тока лучей в выходной спирали возбуждается сигнал гораздо большей амплитуды, чем поданный на вход лампы (рис. 7.7). Поначалу двухлучевая

лампа казалась весьма перспективной, особенно в диапазоне миллиметровых длин волн, поскольку сочетала длительное взаимодействие с отсутствием замедляющих систем. Однако, как оказалось, переход к высоким частотам требует уменьшения разности скоростей потоков и увеличения плотности тока в них. Сближение скоростей потоков ограничено разбросом электронов по скоростям, который характеризуется функцией распределения электронов по скоростям. Понятно, что при значении  $|v_{01}| - |v_{02}|$ , сравнимом с разбросом по скоростям, два луча практически неразличимы. Двухлучевой усилитель как прибор не используется в СВЧ-электронике. Тем не менее он стал стандартным примером в теории волновых неустойчивостей [15–18].

Рассмотрим далее для определенности два ионно-скомпенсированных электронных потока, описываемых линеаризованными гидродинамическими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= \frac{e}{m} E'_{\text{пр.з.}}, & \frac{\partial v'_2}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial v'_2}{\partial x} &= \frac{e}{m} E'_{\text{пр.з.}}, \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} + \rho_{01} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial \rho'_2}{\partial x} + \rho_{02} \frac{\partial v'_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E'_{\text{пз}}}{\partial x} &= 4\pi(\rho'_1 + \rho'_2). \end{aligned} \quad (7.36)$$

В предположении, что все переменные величины изменяются во времени по закону  $\exp(i\omega t)$ , преобразуем систему (7.36) к следующему виду:

$$\begin{aligned} E'_{\text{пз}} &= -\frac{4\pi}{i\omega}(j'_1 + j'_2), \\ \frac{\partial^2 j'_1}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{01}} \frac{\partial j'_1}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_{01}}\right)^2 j'_1 &= i\omega \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p1}^2}{v_{01}^2} E'_{\text{пз}}, \\ \frac{\partial^2 j'_2}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{02}} \frac{\partial j'_2}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_{02}}\right)^2 j'_2 &= i\omega \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p2}^2}{v_{02}^2} E'_{\text{пз}}, \\ \omega_{p1}^2 &= 4\pi \frac{e}{m} \rho_{01}, & \omega_{p2}^2 &= 4\pi \frac{e}{m} \rho_{02}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

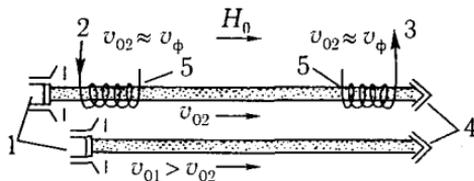


Рис. 7.7. Схема двухлучевого усилителя: 1 — электронные пушки; 2, 3 — входное и выходное устройства; 4 — коллекторы; 5 — согласованные нагрузки;  $H_0$  — фокусирующее магнитное поле. Пучки показаны разнесенными друг от друга

Система уравнений (7.37) соответствует самосогласованной модели возбуждения электронного волновода электронными потоками. Первое уравнение системы описывает возбуждение электронного волновода заданными потоками, два других описывают группирование электронных потоков под действием суммарного поля пространственного заряда двух электронных потоков.

Такой подход позволяет объяснить физический механизм двухлучевого усилителя с попутными потоками, основываясь на аналогии с уже известной нам ЛБВ.

Входное устройство модулирует медленный электронный поток по скорости и по плотности, что приводит к образованию в пространстве дрейфа электронной периодической структуры чередующихся уплотнений и разрежений электронов. Такая ситуация, как показано в гл. 5, соответствует распространению в пучке двух волн пространственного заряда — быстрой и медленной, фазовые скорости которых  $v_{\phi 6, м} = v_{02}/(1 \mp \omega_q/\omega)$ . Таким образом, роль модулированного потока в двухлучевой системе аналогична роли замедляющей системы в ЛБВ. Второй быстрый поток ( $v_{02} < v_{01}$ ) взаимодействует с продольной составляющей замедленной волны в первом потоке. Тогда, как в ЛБВ, при соответствующем выборе скорости  $v_{01}$  второго потока последний будет отдавать энергию высокочастотному полю; в результате возможно усиление входного сигнала. Исключая в (7.37)  $E_{пз}$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 j'_1}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{01}} \frac{\partial j'_1}{\partial x} - \left[ \left( \frac{\omega}{v_{01}} \right)^2 - \left( \frac{\omega_{p1}}{v_{01}} \right)^2 \right] j'_1 &= - \left( \frac{\omega_{p1}}{v_{01}} \right)^2 j'_2, \\ \frac{\partial^2 j'_2}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{02}} \frac{\partial j'_2}{\partial x} - \left[ \left( \frac{\omega}{v_{02}} \right)^2 - \left( \frac{\omega_{p2}}{v_{02}} \right)^2 \right] j'_2 &= - \left( \frac{\omega_{p2}}{v_{02}} \right)^2 j'_1. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Система уравнений (7.38) допускает решение  $j'_1 = j'_2 = 0$ , когда потоки движутся, не взаимодействуя друг с другом. Будет ли такое движение устойчивым? Будем искать решение (7.38) в виде  $j'_{1,2} = \Psi_{1,2} \exp(-ikx)$ .

Подставляя его в (7.38), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов распределения  $\Psi_{1,2}$  (вектор  $\Psi$  ( $\Psi_1, \Psi_2$ ) называют также поляризационным вектором). Равенство нулю определителя этой системы дает дисперсионное уравнение задачи

$$\begin{aligned} D(\omega, k) = \omega_{p1}^2 (\omega - kv_{02})^2 + \omega_{p2}^2 (\omega - kv_{01})^2 - \\ - (\omega - kv_{01})^2 (\omega - kv_{02})^2 = 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Заметим, что коэффициенты уравнений — действительные величины, в то время как корни его ( $\omega$  или  $k$ ) могут быть комплексными. Рассмотрим теперь детально различные частные случаи. Пусть пучки совершенно одинаковые, но встречные, т. е.

$$\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0, \quad (\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p), \quad v_{01} = -v_{02} = v_0. \quad (7.40)$$

С учетом (7.40) дисперсионное уравнение (7.39) принимает вид

$$D(\omega, k) = (\omega - kv_0)^2(\omega + kv_0)^2 - \omega_p^2(\omega - kv_0)^2 - \omega_p^2(\omega + kv_0)^2 = 0$$

или

$$\omega^2 = (k^2 v_0^2 + \omega_p^2) \pm \sqrt{4\omega_p^2 k^2 v_0^2 + \omega_p^4}. \quad (7.41)$$

Из (7.41) видно, что  $\omega$  могут быть комплексными, если  $k^2 v_0^2 + \omega_p^2 < \omega_p \sqrt{4k^2 v_0^2 + \omega_p^2}$ , т. е. при условии, когда

$$k < \frac{\sqrt{2}\omega_p}{v_0}. \quad (7.42)$$

Из (7.42) следует, что  $\lambda_p < \sqrt{2}\lambda$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega_p/v_0 = 2\pi/\lambda_p$ ), т. е. неустойчивы лишь длинноволновые возмущения. Подчеркнем, что  $k$  здесь действительные. Дисперсионные характеристики, определяемые формулой (7.41), приведены на рис. 7.8.

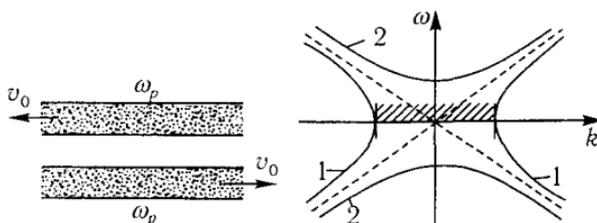


Рис. 7.8. Модель двух идентичных встречных пучков и дисперсионные характеристики, определяемые уравнением (7.41). При  $\omega = 0$  имеем  $k = \pm\sqrt{2}\omega_p/v_0$ ; если же  $k = 0$ , то  $\omega = \pm\sqrt{2}\omega_p$ ; в случае больших  $k$  и малых  $\omega_p$   $\omega \approx \pm kv_0$ ; заштрихована полоса действительных значений  $k$ , при которых имеют место комплексные значения  $\omega$

Для понимания рис. 7.8 проследим за цепочкой переходов: один пучок — два не взаимодействующих пучка — два взаимодействующих

пучка (рис. 7.9). Как следует из (7.39) (это известно нам и из гл. 5), в одном возмущенном электронном потоке существуют две волны пространственного заряда — медленная и быстрая. Если  $v_{02} = -v_0 = 0$ ,  $\omega_{p2} = 0$ ,  $\omega_{p1} = \omega_p$ , то из (7.39) имеем  $(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2$ ,  $\omega = kv_0 \pm \omega_p$ , а в случае  $v_{01} = v_0 = 0$ ,  $\omega_{p1} = 0$ ,  $\omega_{p2} = \omega_p$  имеем  $(\omega + kv_0)^2 = \omega_p^2$ ,  $\omega = -kv_0 \pm \omega_p$ . Из анализа рис. 7.9в и его сравнения с рис. 7.9а, б следует, что ветви 1 дисперсной характеристики взаимодействующих пучков соответствуют медленным волнам, а ветви 2 — быстрым волнам. Из рис. 7.8 видно, что для быстрых волн неустойчивости быть не может: любым действительным значениям волнового числа  $k$  для них соответствуют действительные значения частоты  $\omega$ .

Для медленных волн в области значений волновых чисел  $|k| < \frac{\sqrt{2}\omega_p}{v_0}$  (на рис. 7.8 эта область выделена штриховкой) частота  $\omega$  будет комплексной величиной и при  $\text{Im}\omega < 0$  возмущения будут нарастать во времени.

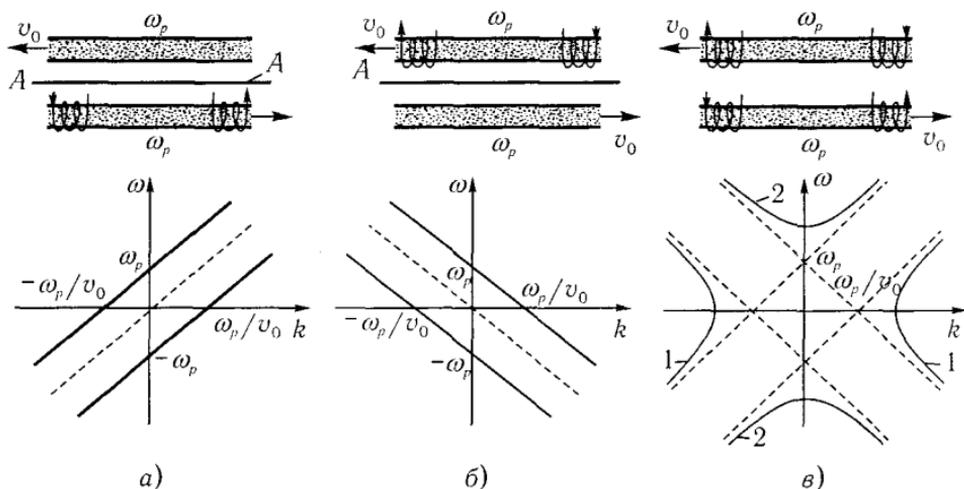


Рис. 7.9. Модели двух пучков и дисперсионные характеристики одного модулированного во входном устройстве пучка (другой отделен от него экраном  $A$  (а, б)); модель двух взаимодействующих пучков и их дисперсионные характеристики (в). Штриховыми линиями показаны дисперсионные характеристики невзаимодействующих потоков

Таким образом, в анализируемой консервативной системе существует неустойчивость. Это сам по себе замечательный факт. Энергия, необходимая для поддержания этой неустойчивости, черпается из «неволнового» движения равномерно движущихся потоков. И если в слу-

чае попутных пучков мы проводили аналогию с ЛБВ, то здесь уместна аналогия с ЛОВ. Действительно, в системе имеется обратная связь, поскольку один из пучков направлен навстречу другому. Если в схеме рис. 7.9 б удалить экран, то верхний пучок можно рассматривать как «электронную замедляющую систему» с обратной волной (энергия переносится со скоростью  $-v_0$ ). Возникшая в такой линии передачи медленная волна будет взаимодействовать с электронным потоком, движущимся со скоростью  $v_0$ . При определенных значениях тока пучков система будет самовозбуждаться и входное устройство не нужно. Причиной возникновения колебаний являются флуктуации плотности объемного заряда в пучке. Исследуем теперь одинаковые попутные пучки, т. е. случай, когда  $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$ , ( $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ ),  $v_{01}v_{02} > 0$ . При этих условиях из (7.40) получаем

$$\omega_p^2 [(\omega - kv_{01})^{-2} + (\omega - kv_{02})^{-2}] = 1. \quad (7.43)$$

Дисперсионная характеристика этой системы изображена на рис. 7.10 в. Качественный вид ее ветвей легко получить, переходя от случая невзаимодействующих пучков, один из которых неподвижен ( $v_{02} = 0$ ,  $v_{01} > 0$ ), к случаю их взаимодействия, а затем и к случаю взаимодействия попутных пучков, когда  $v_{01} > 0$ ,  $v_{02} > 0$ . Дисперсионное уравнение (7.43) по-прежнему имеет четыре корня, и каждое возмущение будет содержать четыре слагаемых, например  $v'_{1,2} = \sum_{m=1}^4 \Psi_{1,2m} \exp(i\omega_m t - ik_m x)$ . Два из них (ветви 1 дисперсионной характеристики на рис. 7.10 в) не нарастают во времени, а два других (ветви 2) могут нарастать, поскольку действительным  $k$  в заштрихованной области соответствуют комплексные значения  $\omega$ . Но неустойчивость здесь другого типа, чем в задаче о встречных пучках. Поскольку пучки движутся в одну сторону, возмущение будет сноситься вместе с пучком, т. е. в данной точке пространства возмущение может затухать.

Разрешим уравнение (7.43) относительно  $k = k(\omega)$ , полагая  $\omega$  действительной величиной. Вводя величины [7] полуразности скоростей  $\delta = (v_{01} - v_{02})/2$ , средней скорости  $v_{cp} = (v_{01} + v_{02})/2$  и волнового числа  $k = \omega/v_{cp} + i\gamma$ , можно переписать (7.43) в виде

$$\left( i \frac{\gamma v_{01}}{\omega_p} + \frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^{-2} + \left( i \frac{\gamma v_{02}}{\omega_p} - \frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^{-2} = 1. \quad (7.44)$$

Если  $\delta$  мало по сравнению с  $v_{01}$  и  $v_{02}$ , то можно считать, что

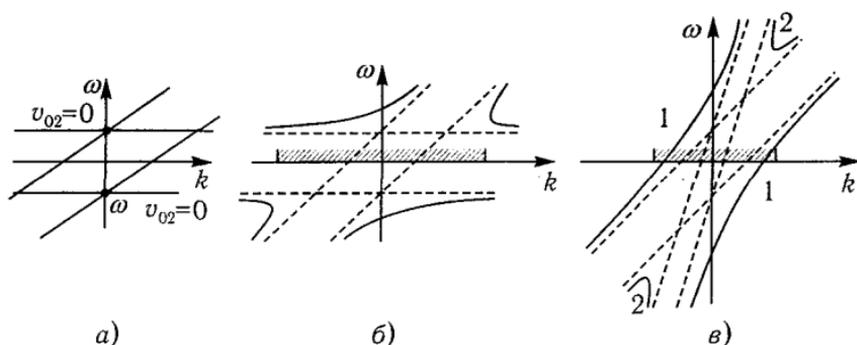


Рис. 7.10. Дисперсионные характеристики двух не взаимодействующих (а) и взаимодействующих (б) электронных пучков, один из которых неподвижен ( $v_{02} = 0$ ), и двух взаимодействующих попутных пучков (в); заштрихована область действительных значений  $k$ , при которых имеют место комплексные значения  $\omega$

$\gamma v_{01}/\omega_p \approx \gamma v_{02}/\omega_p \approx \gamma v_{cp}/\omega_p$ . Тогда из (7.44) находим

$$\left( i \frac{\gamma v_{cp}}{\omega_p} \right)_{1-4} = \pm \left\{ \left( \frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^2 + 1 \pm \left[ \left( \frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (7.45)$$

Из анализа (7.44) следует, что максимальное значение инкремента нарастания волны составляет  $\text{Im } k = \gamma_{\max} = \omega_p/(2v_{cp})$  и достигается при  $\omega \delta/\omega_p v_{cp} = \sqrt{3}/2$ ; при  $\omega \delta/\omega_p v_{cp} \geq \sqrt{2}$  значения  $\gamma v_{cp}/\omega_p$  становятся чисто мнимыми и все четыре волны имеют постоянные амплитуды. Итак, гармоническое возмущение возрастает вдоль  $x$ .

Проанализируем теперь неустойчивость Гельмгольца [19]<sup>1</sup>. При рассмотрении взаимодействия течений жидкости обычно приходится решать двумерную задачу: скорость потоков должна зависеть не только от продольной координаты  $x$ , но и от поперечной координаты  $y$  (рис. 7.11 а). Однако в частном случае, когда границу, через которую взаимодействуют потоки, можно считать неразмытой, задачу удастся свести к одномерной.

Предположим, что два слоя жидкости скользят друг относительно друга с постоянными скоростями  $v_{01}$  и  $v_{02}$ , участок поверхности разрыва скорости плоский, плотности жидкостей постоянны и равны  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$ , поскольку жидкости не смешиваются (рис. 7.11а). Пусть на границе раздела возникло слабое возмущение  $y'$  самой границы, ско-

<sup>1</sup> Неустойчивость границы раздела движущихся жидкостей при  $\rho_{01} \neq \rho_{02}$  называют неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца.

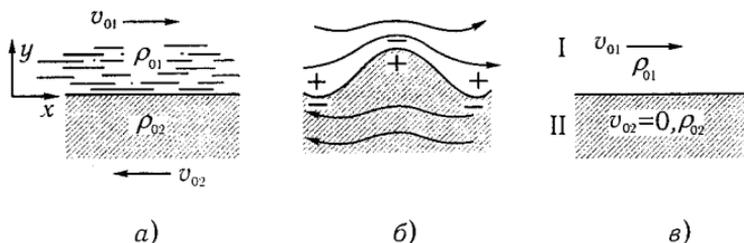


Рис. 7.11. Неустойчивость Гельмгольца [19]: *a* — возмущения границы раздела нет — два слоя жидкости скользят по границе раздела навстречу друг другу; *б* — граница раздела возмущена — схематическое изображение формы линий тока и распределение давления вблизи возмущенной поверхности тангенциального разрыва скорости; *в* — исходная модель для анализа системы: поверхностный ветер (I) — неподвижная вода (II)

рости  $\mathbf{v}'$  и давления  $p'$  жидкости. Причем  $y'$ ,  $\mathbf{v}'$  и  $p'$  пропорциональны  $\exp(i\omega t - ikx)$ . Для несжимаемой жидкости с одной стороны от поверхности разрыва из уравнений Эйлера и непрерывности (см. гл. 5) в линейном приближении имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{01}} \text{grad } p'_1, \quad \text{div } \mathbf{v}'_1 = 0 \quad (7.46)$$

(в первом уравнении учтено, что постоянная скорость направлена вдоль оси  $x$ ).

Применяя к обеим частям (7.46) операцию  $\text{div}$  и используя условие несжимаемости жидкости, получаем

$$\frac{\partial^2 p'_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p'_1}{\partial x^2} = 0. \quad (7.47)$$

Решение (7.47) естественно искать в виде

$$p'_1 = p'_1(y) \exp(i\omega t - ikx). \quad (7.48)$$

Тогда для жидкости, занимающей пространство над разрывом  $y > 0$ , из (7.47) и (7.48) находим

$$p'_1(y) = A e^{-ky} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (7.49)$$

Обозначим смещение границы через  $y' = y'(x, t)$ . Тогда для поперечной составляющей скорости  $v'_{y1}$  на самой границе справедливо соотношение

$$v'_{y1} = \frac{dy'_1}{dt} = i(\omega - kv_{01})y'_1. \quad (7.50)$$

Из уравнения Эйлера для  $v'_{y1}$ -компоненты скорости с учетом (7.50) находим связь между давлением  $p'_1$  и смещением границы  $y'_1$ :

$$p'_1 = -(\omega - kv_{01})^2 \frac{\rho_{01} y'_1}{k}. \quad (7.51)$$

Очевидно, что давление  $p'_2$  в области по другую сторону границы разрыва, для которой  $y < 0$ , выразится соотношением, аналогичным (7.51), но с противоположным знаком:

$$p_2 = (\omega + kv_{02})^2 \frac{\rho_{02} y'_2}{k}. \quad (7.52)$$

В (7.52) учтено, что  $v_{02} < 0$ . Давления на границе раздела должны быть равны; поэтому дисперсионное уравнение задачи имеет следующий вид:

$$(\omega - kv_{01})^2 = -\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} (\omega + kv_{02})^2, \quad (7.53)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{k}{\rho_{01} + \rho_{02}} [(\rho_{01} v_{01} - \rho_{02} v_{02}) \pm i(v_{01} + v_{02}) \sqrt{\rho_{01} \rho_{02}}]. \quad (7.54)$$

Из (7.54) следует, что частота оказывается комплексной величиной, причем всегда выполняется условие  $\text{Im} \omega < 0$  при действительных  $k$ . Это и есть неустойчивость Гельмгольца, т.е. абсолютная неустойчивость. Механизм неустойчивости объяснить довольно просто, исходя из закона Бернулли  $v^2 + 2p/\rho = \text{const}$ . Если на границе раздела возникло возмущение, скажем жидкость снизу границы приподнялась, то линии тока искривятся. В местах сгущения линий тока возникают поперечные градиенты давления, приводящие к усилению возмущений (см. рис. 7.11 б и формулы (7.51), (7.52)). Интересно, что Рэлей приводил этот механизм как объяснение полоскания парусов и флагов под действием ветра; однако в действительности в этом явлении проявляется механизм, связанный с возникновением и отрывом вихрей.

## 7.5. Усиление и непропускание. Критерии разделения

С физической точки зрения кажется очевидным, что систему, в которой реализуется конвективная неустойчивость, можно использовать для усиления сигналов. Таким образом, если дисперсионное уравнение  $D(\omega, k) = 0$  при действительном  $\omega$  имеет комплексные решения

для  $k$  и асимптоты дисперсионных кривых имеют наклоны одного знака (см. рис. 7.6б и 7.10в), то в системе есть усиление. На языке характеристик это означает, что область распространения лежит по ту сторону от границы  $x = 0$ , на которую подается сигнал. Обратный случай — когда асимптоты имеют наклоны разных знаков — соответствует непропусканию.

Столь простой критерий разделения усиления и непропускания применим лишь к системам гиперболического типа. Для систем более общего вида существует несколько более сложных критериев [15–18, 20–22], один из которых — критерий Бриггса [18] — мы здесь приведем. При решении дисперсионного уравнения  $D(\omega, k) = 0$  будем считать  $\omega$  комплексным с  $\text{Im } \omega < 0$ . Узнать, будет ли комплексное решение для  $k$  соответствовать усилению или непропусканию, можно следующим образом: если при  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$  знак  $\text{Im } k$  изменяется, то имеет место усиление, если же знак не меняется, то — непропускание.

Иными словами, в системе будет усиление, если она чувствительна к спаду сигнала во времени, и непропускание, если система не чувствует этого спада (волна просто не проникает в среду, как, например, в случае бесстолкновительной плазмы, когда  $kc = \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$  при  $\omega < \omega_p$ ); физически данный критерий связан с принципом причинности. Если предположить, что система возбуждается источником, сигнал которого меняется во времени по закону  $\exp(i \text{Re } \omega \cdot t) \exp(-\text{Im } \omega \cdot t)$  и  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ , то все волны должны затухать с удалением от источника из-за конечной скорости распространения возмущения. Следовательно, когда волна усиливается при действительных  $\omega$ , то знак  $\text{Im } k$  должен измениться при  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ , т.е. при нарастании во времени волна должна затухать в том направлении, в каком усиливалась при  $\text{Im } \omega = 0$ .

Заканчивая эту главу, приведем еще два примера распределенных усилителей. Один из них (см. [25]) — это акустический усилитель, созданный Ч. Беллом. В этом усилителе тонкая струя воды направлялась на маленькую резиновую диафрагму, связанную с индикатором звука — рупором. Волны, распространяющиеся в потоке воды, вызывали колебания в диафрагме, преобразуемые в звуковые на выходе из рупора. Существование растущих с координатой волн доказывалось следующим образом. Около сопла, из которого вырывалась струя воды, размещался камертон или музыкальный ящик (см. [25]), которые на современном языке следует назвать входным устройством. Тогда на выходе из рупора снимался усиленный звуковой сигнал, достаточный для того, чтобы его было слышно в лекционном зале.

В работе [25] предложена простая теория усилителя, близкая по форме построения к теории неустойчивости Гельмгольца. Суть ее в следующем. Рассматривается односкоростной цилиндрический ламинарный поток несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_0$ , который описывается гидродинамическими уравнениями Эйлера для радиальной ( $v_r$ ) и продольной ( $v_z$ ) компонент скорости. Возмущениями по азимутальной координате  $\varphi$  пренебрегают. В предположении, что под действием начального возмущения возникающие переменные величины изменяются по закону  $\exp(i\omega t - ikz)$ , где  $\omega$  — действительная величина, линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$(\omega - kv_0)v'_z = \frac{kp'}{\rho_0}, \quad (7.55)$$

$$(\omega - kv_0)v'_r = -\frac{i}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (7.56)$$

где  $v_0$  — постоянная скорость жидкости в  $z$ -направлении. Из условия несжимаемости жидкости  $\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$  и уравнений (7.55) и (7.56) получается дифференциальное уравнение для  $p'$ , которое имеет решение

$$p' = AI_0(kr) \exp(i\omega t - ikz), \quad (7.57)$$

где  $A$  — постоянная,  $I_0(kr)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Под действием возмущений граница жидкости искривляется, что, как показано в [25], приводит к следующему выражению для переменного давления на границе:

$$p' = S \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) r' = \frac{[S/(\rho_0 r^2)](k^2 r^2 - 1)}{(\omega - kv_0)^2} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (7.58)$$

где  $S$  — поверхностное натяжение,  $v'_r = i(\omega - kv_0)r'$ . Используя (7.57) и (7.58), приходим к дисперсионному уравнению

$$(\omega - kv_0)^2 = \frac{S}{\rho_0 r^2} (k^2 r^2 - 1) k \frac{I_1(kr)}{I_0(kr)}. \quad (7.59)$$

Если считать, что  $k = \omega/v_0 + \delta$  ( $|\delta| \ll \omega/v_0$ ), и в правой части (7.59) заменить  $k$  на  $\omega/v_0$ , то

$$k = \frac{\omega}{v_0} \pm i \left( \frac{S}{\rho_0 r^3 v_0^2} \right)^{1/2} \frac{1}{20 \lg e} F \left( \frac{\omega r}{v_0} \right). \quad (7.60)$$

Вид функции  $F(\omega r/v_0)$  показан на рис. 7.12. Для нарастающей волны максимальный коэффициент усиления (в децибелах на единицу длины)

$$G_{\max} = \left( \frac{S}{\rho_0 r^3 v_0^2} \right)^{1/2} F\left(\frac{\omega r}{v_0}\right). \quad (7.61)$$

Следуя [25], оценим величину  $G_{\max}$ , полагая, что диаметр потока равен 0,1 см, а частота, соответствующая условию  $\omega r/v_0 = 1$  (рис. 7.12), равна 5000 Гц. Из этих данных находим, что скорость потока должна быть равна 1570 см/с (это равносильно напору 1260 см вод. ст.). Тогда, используя график рис. 7.12, для частоты около 3500 Гц получаем  $G_{\max} \approx 1,43$  дБ/см ( $S \approx 73$  дин/см,  $\rho_0 \approx 1$  г/см<sup>3</sup>).

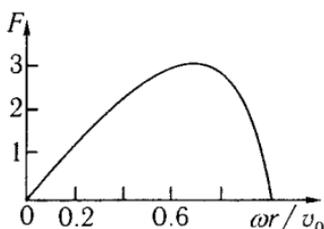
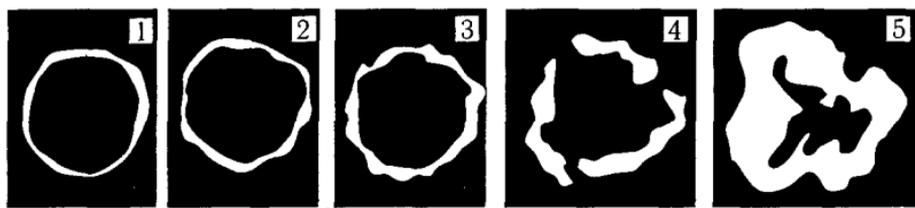


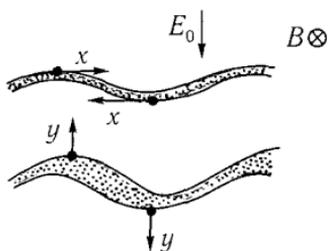
Рис. 7.12. График функции  $F(\omega r/v_0)$ . Для низких частот эта функция (а значит, и максимальный коэффициент усиления на единицу длины) пропорциональна частоте, достигает максимума при  $\omega r/v_0 = 0,7$  и обращается в нуль на частоте  $f_{\max} = v_0/2\pi r$  [25].

В электронике подобная неустойчивость характерна для трубчатых пучков в продольном магнитном поле; последнее компенсирует кулоновы силы расталкивания в объемном заряде [26].

На рис. 7.13 приведены фотографии из работы [26], иллюстрирующие эволюцию этой неустойчивости в пространстве дрейфа. Неустойчивость полых пучков близка к неустойчивости тонких заряженных слоев в скрещенных электро- и магнитостатических полях, для которых возможно простое качественное объяснение неустойчивости [7]. Действительно, если в задаче с трубчатым пучком перейти в систему координат, движущуюся вдоль магнитного поля со статической скоростью электронного потока, то движение электронов будет таким же, как и в пучке в скрещенных полях — перпендикулярным и электрическому, и магнитному полям. Интересно, что для электронных потоков в скрещенных полях с произвольным распределением плотности по сечению справедлив ряд известных гидродинамических теорем об устойчивости



а)



б)

Рис. 7.13. Эволюция неустойчивости дрейфующего цилиндрического электронного потока в продольном магнитном поле; на фотографиях из работы [26] показано сечение пучка при перемещении экрана вдоль пространства дрейфа; увеличение номера кадра соответствует увеличению длины дрейфа (а); иллюстрация фотографий на примере тонкого ленточного слоя в скрещенных полях; локальное увеличение плотности заряда приводит к изгибу слоя, он становится неустойчивым, и начальное возмущение растет (б) [7, гл. 5]

различных плоскопараллельных течений (в частности, существует аналог теоремы Рэля о необходимости для неустойчивости электронного потока точки перегиба в профиле скорости).

## ГЛАВА 8

# Скорость распространения волн

### 8.1. О различных способах введения понятия групповой скорости

Мы уже пользовались хорошо известными из курса общей физики понятиями фазовой и групповой скоростей волн. В простых ситуациях каких-либо дополнительных разъяснений здесь не требуется. Однако в тех случаях, когда среда активна и содержит переменные параметры, вопрос о скоростях распространения волны требует дополнительного обсуждения [1-4].

Если изменение некоторой функции, характеризующей волновой процесс, можно представить в виде  $u(x, t) = u_0 \operatorname{Re}\{\exp[i(\omega t - kx)]\}$ , где  $u_0 = \text{const}$ , то такая монохроматическая волна распространяется со скоростью

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}. \quad (8.1)$$

Это — фазовая скорость волны, которая определяет скорость отдельного гребня, впадины или узла волны  $u(x, t)$ . Если ввести фазу  $\varphi = \omega t - kx$ , линейную по независимым переменным, то  $\varphi = \text{const}$  для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v_{\text{ф}}$ . Действительно,  $d\varphi/dt = \partial\varphi/\partial t + (dx/dt) \partial\varphi/\partial x = 0$ , когда  $dx/dt = v_{\text{ф}}$ , поскольку по определению  $\partial\varphi/\partial t = \omega$ , а  $\partial\varphi/\partial x = -k$ . Однако передать сигнал с помощью монохроматической волны, очевидно, нельзя из-за ее однородности в пространстве и во времени (она должна существовать во все времена  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  и на всей оси  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Таких волн в природе, конечно, нет: у всякого волнового процесса есть начало и конец, т. е. реальный сигнал всегда имеет конечную ширину спектра частот и распространяется в общем случае со скоростью, не равной  $v_{\text{ф}}$ . Пусть теперь мы каким-то образом изменяем амплитуду или фазу волны, чтобы можно было передать информацию. Рассмотрим для определенности задачу с такими начальными условиями: в начальный момент времени  $t = 0$  волна задана пространственным распределением

$u = \operatorname{Re} \{ f(x) * \exp(-ik_0x) \}$ , причем  $f(x)$  изменяется медленно по сравнению с  $\exp(-ik_0x)$ . Можно ожидать, что волна будет распространяться как волна с постоянной амплитудой  $u = \operatorname{Re} \{ f(x) \exp(i\omega_0t - ik_0x) \}$ , т. е. со скоростью  $v = \omega_0/k_0$  (ср. (8.1)). Однако в средах с дисперсией это не так. Действительно, представим  $f(x)$  в виде интеграла Фурье

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx} dk, \quad \text{где} \quad g(k) \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx.$$

Тогда

$$u(x, 0) \sim e^{-ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx} dk \sim \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-i(k+k_0)x} dk.$$

Заметим, что наш интеграл — это непрерывный набор волн постоянной амплитуды, существующих на всей оси  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда для группы волн (волнового пакета)

$$u(x, t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i\omega t - i(k_0+k)x} dk. \quad (8.2)$$

В диспергирующей среде  $\omega = \omega(k)$ . Медленность изменения  $f(x)$  по сравнению с  $\exp(-ik_0x)$  означает, что  $g(k)$  отлично от нуля только для  $k \ll k_0$ , поэтому функцию  $\omega(k)$  можно разложить в ряд и ограничиться двумя членами разложения:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k} k_0. \quad (8.3)$$

Подставляя (8.3) в (8.2), получаем

$$u(x, t) \sim e^{i\omega_0 t - ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ik[x - (\partial \omega / \partial k)_0 t]} dk$$

или

$$u(x, t) = f \left[ x - \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 t \right] e^{i\omega_0 t - ik_0 t}.$$

Если рассматривать  $f[x - (\partial \omega / \partial k)_0 t]$  как изменяющуюся амплитуду волны, фазовая скорость которой  $v_\phi = \omega_0/k_0$ , то изменение амплитуды

распространяется с групповой скоростью<sup>1</sup>

$$v_{\text{гр}} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{k=k_0}. \quad (8.4)$$

Учтем в разложении функции  $\omega(k)$  в ряд еще одно слагаемое по сравнению с (8.3):

$$\omega = \omega_0 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_0 k + \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_0 \frac{k^2}{2}.$$

Чтобы можно было пренебречь в показателе экспоненты в (8.2) дополнительной фазой  $(\partial^2 \omega / \partial k^2)_0 (k^2 t / 2)$ , должно выполняться неравенство  $[(\partial^2 \omega / \partial k^2)(k^2 t / 2)] \ll 1$ , которое можно переписать в виде

$$\left| \frac{\pi}{v_{\text{гр}}} \left( \frac{\partial v_{\text{гр}}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_0} \Delta \right| \ll 1.$$

Здесь введено расстояние  $\Delta = v_{\text{гр}} t$ , на которое сместилась «амплитуда» за время  $t$ , и использовано равенство  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны. Расстояние  $\Delta$  — это тот характерный масштаб, на котором справедливо наше рассмотрение; он тем больше, чем меньше  $\left( \frac{\partial v_{\text{гр}}}{\partial \lambda} \right)_{\lambda_0}$ . Итак, групповая скорость есть характеристика движения волнового пакета в диспергирующей среде, если пакет еще сохраняет свою форму и размеры, т. е. на расстояниях порядка  $\Delta$ . В некотором смысле пакет в этом случае подобен частице в классической механике, а групповая скорость всего пакета подобна скорости частицы.

Рассмотрим еще один способ введения понятия групповой скорости, для чего проанализируем распространение сигнала с дискретным спектром частот (рис. 8.1 а)

$$u = \text{Re} \left\{ u_0 e^{i\omega_0 t - ik_0 x} + u_1 e^{i\omega_1 t - ik_1 x} + u_2 e^{i\omega_2 t - ik_2 x} + \dots \right\}.$$

Представим такую суперпозицию монохроматических волн с частотами  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  в виде

$$u = \text{Re} \left\{ F e^{i\omega_0 t - ik_0 x} \right\}, \quad (8.5)$$

где

$$F = u_0 + u_1 e^{i(\omega_1 - \omega_0)t - i(k_1 - k_0)x} + u_2 e^{i(\omega_2 - \omega_0)t - i(k_2 - k_0)x} + \dots \quad (8.6)$$

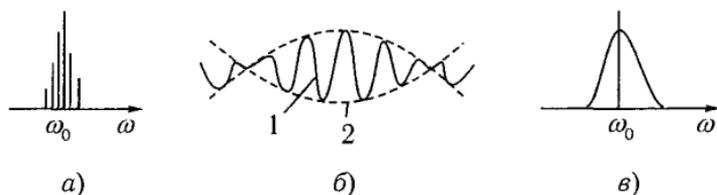


Рис. 8.1. Узкий дискретный спектр — все составляющие близки к  $\omega_0$  (а); пакеты волн, ограниченные огибающей модуляции (2), которая переносит в отличие от высокочастотного заполнения (1) всю информацию о сигнале (б) и пример непрерывного спектра сигнала (в)

Функция  $F(x, t)$  называется комплексной огибающей высокочастотного сигнала в пространстве и во времени [2]. Смысл этого названия легко понять, если ввести  $F = A \exp(i\varphi)$ . Тогда из (8.5) имеем квазигармоническую волну  $u = A \cos(\omega_0 t - k_0 x + \varphi)$  ( $A$  — огибающая,  $\omega_0 t - k_0 x$  — высокочастотная фаза,  $\varphi$  — медленно изменяющаяся фаза). Если спектр сигнала узкий (все спектральные составляющие сосредоточены около  $\omega_0$ ), то все разности типа  $\omega_n - \omega_0$  и  $k_n - k_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) малы. Следовательно, в (8.5) функция  $F$  изменяется медленно по сравнению с  $\exp(i\omega_0 t - ik_0 x)$ . Экспоненциальный множитель соответствует распространению монохроматической волны с частотой  $\omega_0$ , которая называется несущей. Перепишем формулу (8.6) в виде

$$F = u_0 + u_1 \exp \left\{ -i(k_1 - k_0) \left[ x - \frac{(\omega_1 - \omega_0)t}{k_1 - k_0} \right] \right\} + \quad (8.7)$$

$$+ u_2 \exp \left\{ -i(k_2 - k_0) \left[ x - \frac{(\omega_2 - \omega_0)t}{k_2 - k_0} \right] \right\} + \dots$$

Для узкого спектра можно положить  $\frac{\omega_1 - \omega_0}{k_1 - k_0} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{k_2 - k_0} = \dots = \frac{d\omega}{dk} = v_{гр}$  (равенства выполняются тем точнее, чем уже спектр), и, следовательно,

$$F = u_0 + u_1 \exp[-i(k_1 - k_0)(x - v_{гр}t)] + \quad (8.8)$$

$$+ u_2 \exp[-i(k_2 - k_0)(x - v_{гр}t)] + \dots = F(x - v_{гр}t).$$

Сказанное выше позволяет определить групповую скорость как скорость распространения огибающей сигнала (рис. 8.16). Если в дисперси-

<sup>1</sup>Первый понятие скорости распространения группы волн ввел в физику Гамильтон (см. [9]).

онном уравнении связь между  $\omega$  и  $k$  линейная и однородная, то  $d\omega/dk = \omega/k = v_{\text{гр}} = v_{\text{ф}}$  и волновой пакет распространяется так же, как отдельная монохроматическая волна, — это отличительный признак среды без дисперсии.

Для сигнала с непрерывным спектром, занимающим узкий интервал около некоторой фиксированной частоты  $\omega = \omega_0$  (рис. 8.1в), соотношение (8.8) остается в силе [2]. Конечно, и при таком подходе понятие групповой скорости по-прежнему справедливо, пока пакет не исказился, т. е. для сравнительно малых промежутков времени и для сигналов с узким спектральным диапазоном.

Введем понятие групповой скорости теперь из более общих соображений для волны, которая квазигармонически плавно модулирована и по амплитуде, и по частоте, т. е. имеет вид  $u(x, t) \exp[i\Psi(x, t)]$ , где  $\Psi$  — быстро осциллирующая фаза (помимо узкого пакета можно рассмотреть широкий  $k$ -пакет, для которого изменения  $k$  имеют порядок самого  $k$ ). Мгновенные частоты и волновое число определяются производными фазы по формулам

$$\omega(x, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad k(x, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (8.9)$$

и, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (8.10)$$

Если разложить  $\Psi$  в ряд около какой-либо точки  $(x_0, t_0)$ , то  $\omega$  и  $k$  совпадут с локальными частотой и волновым числом в традиционном определении, когда характерный масштаб изменений  $\omega$  и  $k$  велик по сравнению с  $1/\omega$  и  $1/k$ . Предположим, что на пространственных интервалах, много больших периода модуляции, но меньших характерного масштаба ее изменений, локальная частота близка к частоте синусоидальной волны с данным «локальным» значением  $k$ . Тогда  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным уравнением  $\omega = \omega(k)$ . Используя его в (8.10), получаем

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + v_{\text{гр}} \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (8.11)$$

где  $v_{\text{гр}}(k) = \partial\omega/\partial k$ . Таким образом, можно дать еще одно важное для понимания кинематики волнового движения определение: групповая скорость  $v_{\text{гр}}(k)$  есть скорость распространения возмущений волнового числа  $k$ . Уравнение (8.1) для  $k$  является гиперболическим нелинейным уравнением даже тогда, когда исходная задача линейная. Из этого

уравнения следует постоянство  $k$  вдоль кривых — характеристик на плоскости  $xt$ , для которых  $dx/dt = v_{гp}$ ; откуда, в свою очередь, вытекает, что и  $v_{гp} = \text{const}$ , т. е. характеристики — это прямые (рис. 8.2), определяемые уравнением

$$x - v_{гp}t = \text{const}. \quad (8.12)$$

Ясно, что вместо (8.11) можно пользоваться уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_{гp}(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (8.13)$$

которое также нелинейно; о дисперсии, следовательно, можно говорить как о «частотной нелинейности». Левая часть (8.13) есть  $d\omega/dt$ , взятая вдоль линии  $dx/dt = v_{гp}(\omega)$  на плоскости  $xt$ , т. е. уравнение (8.13) означает, что вдоль указанной линии  $\omega = \text{const}$ . Но тогда и  $v_{гp}(\omega) = \text{const}$  вдоль характеристик  $t - x/v_{гp}(\omega) = \zeta(\omega)$ , где  $\zeta = \text{const}$  для данного  $\omega$ . Зависимость  $\zeta(\omega)$  определяется модуляцией частоты при  $x = 0$ ; таким образом, общее решение уравнения (8.13) имеет вид

$$\omega = \Omega[t - x/v_{гp}(\omega)], \quad (8.14)$$

где  $\Omega$  — произвольная функция, обратная  $\zeta(\omega)$ . Решение (8.14) будет подробно обсуждаться во второй части книги в связи с теорией простых волн, поведение которых определяется тем, что

каждая точка профиля простой волны движется со скоростью  $v(\omega)$  — постоянной, но разной для разных  $\omega$ . Поэтому можно представить волну как совокупность независимых групп, движущихся каждая со своей скоростью. Очевидно, что в зависимости от модуляции частоты эти группы могут и расходиться, и сближаться, обгоняя друг друга и вновь расходясь. Если построить характеристики на плоскости  $xt$ , то можно получить, например, фокус — точку, в которой сходятся две или три группы, потом эти группы опять разбегаются (рис. 8.3). При этом проявляется неоднозначность в решении (в потоке невзаимодействующих частиц). Здесь очевидна аналогия и с поведением лучей в обычной геометрической оптике. В [4], например, показано, что эта аналогия не случайна, и для диспергирующей среды естественно говорить о приближении пространственно-временной геометрической оптики.

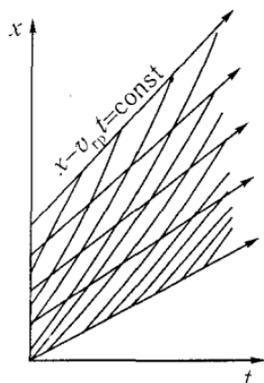


Рис. 8.2. Поведение группы волн на плоскости  $xt$ ; вдоль жирных прямых  $x - v_{гp}t = \text{const}$  ( $\lambda = 2\pi/k = \text{const}$ ) траектория гребней волн, возникающих из «ничего» и исчезающих на фронте, показаны тонкими линиями [3]

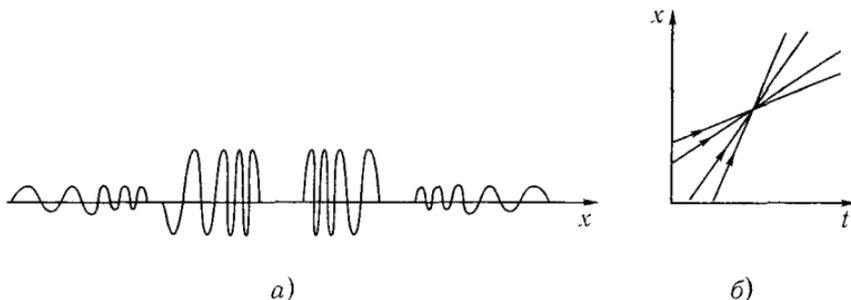


Рис. 8.3. Схема сжатия и последующего расплывания частотно-модулированной волны (а) и соответствующая пространственно-временная диаграмма (б)

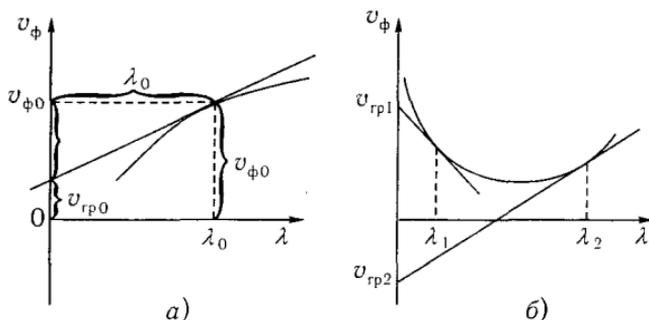


Рис. 8.4. К графическому определению  $v_{гр}$ : а —  $v_{гр} > 0$ ; б —  $v_{гр} > 0$  для  $\lambda = \lambda_1$  и  $v_{гр} < 0$  для  $\lambda = \lambda_2$ . Отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной к кривой  $v_\phi(\lambda)$ , проведенной, например, в точке  $\lambda = \lambda_0$  этой кривой, равен  $|v_{\phi 0} - \lambda_0(\partial v_\phi / \partial \lambda)_0|$

Если заменить  $\omega$  через  $v_\phi k$  и использовать  $k = 2\pi/\lambda$ , то из определения  $v_{гр} = \partial\omega/\partial k$  приходим к формуле Рэлея

$$v_{гр} = v_\phi - \lambda \frac{\partial v_\phi}{\partial \lambda}. \quad (8.15)$$

Из (8.15) видно, что групповая скорость может быть как положительной, так и отрицательной; как больше фазовой, так и меньше. Простой способ определения  $v_{гр}$  по кривой  $v_\phi = v_\phi(\lambda)$  был предложен еще Эренфестом. Этот способ легко понять из рис. 8.4. Примерами реальных волн, у которых  $v_{гр}$  и  $v_\phi$  противоположны по направлению, служат обратные электромагнитные волны или обратные пространственные гармоники электромагнитной волны, которые распространяются

в замедляющих системах, используемых в усилителях и генераторах типа ЛОВ.

Мы не касались вопроса о скорости распространения короткого импульса в диспергирующей среде. Современное изложение состояния этого вопроса дано в [5]. Подчеркнем лишь, что для короткого импульса и импульса с широким частотным спектром понятие групповой скорости становится неопределенным: форма импульса сильно искажается по мере его распространения.

Наконец, введем понятие скорости распространения энергии в среде:

$$V = \frac{\text{Средняя плотность потока энергии}}{\text{Средняя плотность энергии}}.$$

Как показано М. А. Леонтовичем, в том случае, когда в среде отсутствует поглощение и нет вращения плоскости поляризации,  $V$  совпадает с  $v_{гр}$ . Разумеется, по-прежнему нужно, чтобы спектр пакета был достаточно узким.

## 8.2. Групповая скорость волн в некоторых сплошных средах

1. Для гравитационных волн на глубокой воде  $\omega = \sqrt{gk}$  (см. гл. 5), т. е.  $\partial\omega/\partial k = (1/2)(g/k)^{1/2}$ , но  $v_{ф} = \omega/k = (g/k)^{1/2}$ , и, следовательно,

$$v_{гр} = \frac{1}{2}v_{ф}. \quad (8.16)$$

Тогда из (8.16) видно, что для длинных волн и фазовая, и групповая скорости могут быть больше скорости света  $c$  в вакууме. Но ведь ни один сигнал не может распространяться со скоростью, большей  $c$ . (Мандельштам в работе [1] доказывает это утверждение, анализируя распространение сигнала в двух инерционных системах, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью  $V_0$ .<sup>1</sup>) В нашем примере парадокс объясняется просто: закон дисперсии и, следовательно, формула для  $v_{ф}$  выведены для несжимаемой жидкости. Предположение же о несжимаемости противоречит теории относительности.

<sup>1</sup>Исходя из формулы  $t' = [t - (V_0x)/c^2]/\sqrt{1 - (V/c)^2}$  связывающей отсчеты времени  $t$  и  $t'$  в этих системах, нетрудно показать, что если скорость сигнала в нештрихованной системе больше  $c$ , то в штрихованной системе нарушается принцип причинности — сигнал придет раньше, чем он вышел.

2. Для капиллярных волн из (5.58) следует, что  $\omega = k^{3/2}(\sigma/\rho)^{1/2}$  и  $v_{гр} = d\omega/dk = (3/2)(\omega/k) = (3/2)v_{ф}$ , т. е. скорость распространения энергии  $v_{гр}$  капиллярных волн больше скорости  $v_{гр}$  гребней (для данной длины волны).

3. В гл. 5 мы уже отмечали, что в одномерном «холодном» потоке электронов ленгмюровские колебания переносятся электронами с дрейфовой скоростью  $v_0$ , т. е.  $v_{гр} = v_0$ . Кроме того, было установлено, что в неподвижной «горячей» плазме волна переносит энергию со скоростью  $v_{гр} \approx 3kr_D \sqrt{kT_e/m_e}$ , много меньшей тепловой. Рассмотрим теперь распространение поперечной плоской волны через ионосферу, состоящую из неподвижных свободных электронов.

При этом в отличие от гл. 5 проанализируем колебания в плазме с электродинамической точки зрения. Исходя из уравнений Максвелла и уравнения непрерывности в предположении, что все переменные изменяются по закону  $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , находим (см. [6])

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0. \quad (8.17)$$

Используя теперь уравнения движения заряженных частиц, вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  можно выразить через вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ , где  $\hat{\epsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости среды. Подставив это выражение для  $\mathbf{D}$  в (8.17), получим систему линейных однородных уравнений, поскольку  $D_\alpha = \sum_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — матрица. Условие совместности этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению (см. [6])

$$\text{Det} \left\| k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta} \right\| = 0, \quad (8.18)$$

$\delta$  — символ Кронекера.

В случае изотропной плазмы без магнитного поля  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  и для продольной волны из (8.17) находим, что

$$\epsilon_{\parallel} = 0, \quad (8.19)$$

а для поперечной волны

$$\epsilon_{\perp} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (8.20)$$

Выразим  $\varepsilon_{\perp}$  из уравнения движения электронов  $\partial \mathbf{v}_{\perp} / \partial t = (e/m_e) \mathbf{E}_{\perp}$ . Тогда  $\mathbf{v}_{\perp} = [e/(im_e \omega)] \mathbf{E}_{\perp}$ . Поэтому для плотности тока имеем  $\mathbf{j}_{\perp} = e \rho_0 \mathbf{v}_{\perp} = -i \omega_{pe}^2 \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{4\pi \omega}$ . По определению  $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + 4\pi \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{i\omega}$ . Таким образом,

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (8.21)$$

Приравнивая правые части соотношений (8.20) и (8.21), получаем

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (8.22)$$

Итак, в ионосфере  $v_{\phi} = c/\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}$ , и  $v_{гр} = c\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}$ , т. е.  $v_{\phi}$  всегда больше  $c$ ,  $v_{гр} < c$ , а  $v_{\phi} v_{гр} = c^2$ .

Последнее соотношение не является столь общим, как часто считают. В частности, для различных линий передачи, используемых в технике и электронике СВЧ, связь между  $v_{\phi}$  и  $v_{гр}$  имеет вид (см. [10]):

$$v_{\phi} v_{гр} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \left( 1 \mp \frac{\tau}{k} \frac{d\tau}{dk} \right)^{-1}, \quad (8.23)$$

где  $\tau^2 = k^2 - \beta^2$ ;  $k$  — волновое число в среде;  $\beta$  — фазовая постоянная в линии передачи;  $\varepsilon, \mu$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; верхний знак соответствует  $k > \beta$  (быстрые волны при  $\varepsilon = \mu = 1$ ), нижний соответствует  $k < \beta$  (медленные волны;  $\tau^2 = \beta^2 - k^2$ ). Из (8.23) следует, что  $v_{\phi} v_{гр} = c^2$ , только если  $\varepsilon = \mu = 1$  и  $d\tau/dk = 0$ . В частности,  $d\tau/dk = 0$  для металлического волновода без потерь с однородным диэлектрическим заполнением, т. е.  $v_{\phi} v_{гр} = c^2/(\varepsilon \mu)$ . Для замедляющих систем типичны значения  $v_{гр}$  и  $v_{\phi}$ , меньшие скорости света в среде.

4. Обратимся к внутренним волнам в стратифицированной жидкости (см. гл. 5). Пусть среда безгранична и частота Вайсяля  $N = \text{const}$ . Тогда справедливо уравнение (5.62):  $\sin \theta = \mu(\omega/N)$ . Предположим для определенности, что волна распространяется в сторону положительных  $z$ , т. е.  $\mu = +1$ . Воспользуемся для определения групповой скорости уравнением (5.62) или, что тоже самое, (5.61):  $\omega = N\xi/k = = N(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$ , считая, что скорость  $\mathbf{v}_{гр} = \mathbf{x}_0 \partial \omega / \partial k_x + + \mathbf{y}_0 \partial \omega / \partial k_y + \mathbf{z}_0 \partial \omega / \partial k_z$ , где  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$  — соответствующие единичные

векторы [3]. После выполнения дифференцирования и простых преобразований, получаем (см. [7])

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{Nk_z}{k^3} \left( \frac{k_z \xi}{\xi} - \xi \nabla_z \right). \quad (8.24)$$

Нетрудно видеть из (8.24), что  $\mathbf{v}_{\text{гр}} \mathbf{k} = 0$ , т. е.  $\mathbf{v}_{\text{гр}}$  направлен перпендикулярно  $\mathbf{k}$  (рис. 8.5). При  $q \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$  и  $\omega \gg \Omega$  из (5.37) имеем  $\partial \mathcal{V}(z)/\partial z + [\xi^2/(\omega^2 \rho_{00})] \mathcal{P} = 0$ , так что при  $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}_0 \exp[i(\omega t - k_z z)]$  для давления находим  $p = (tk_z \omega^2 \rho_{00}/\xi^2) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})]$ . Следовательно, вектор  $\nabla p = -i \mathbf{k} p$  направлен по  $\mathbf{k}$ . Для внутренних волн из (5.30) и (5.31) следует, что  $V_{0x} = k_x/\omega$  и  $V_{0y} = k_y/\omega$ . С учетом (5.19) и этих соотношений для скорости частиц получим

$$\mathbf{v} = \left( -\frac{k_z \xi}{\xi^2} + \nabla_z \right) v_z, \quad v_z = -i v_0 \exp(i\omega t - i \mathbf{k} \mathbf{r}). \quad (8.25)$$

Но из (8.25) сразу имеем, что  $\mathbf{v} \mathbf{k} = 0$ , т. е. частицы движутся по траекториям, перпендикулярным  $\mathbf{k}$  в плоскости, где лежат вектор  $\mathbf{k}$  и ось  $z$ .

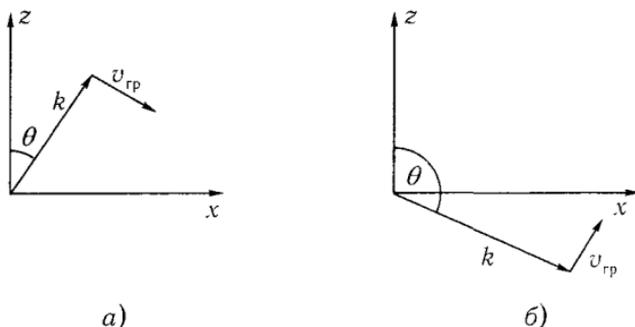


Рис. 8.5. К определению групповой скорости внутренних волн в стратифицированной жидкости [7]: *a* — волна бежит вверх, поток энергии направлен вниз ( $k_y = 0$ ,  $\mu = 1$ ); *б* — волна бежит вниз, поток энергии направлен вверх ( $k_y = 0$ ,  $\mu = -1$ )

Используя выражения для давления  $p$  и скорости частиц  $\mathbf{v}$  из (8.25), для средней по времени плотности потока энергии  $\mathbf{P} = 1/4 (p \mathbf{v}^* + \text{с. с.})$  легко получаем соотношение

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \rho_{00} v_0^2 N^2 \mathbf{v}_{\text{гр}}. \quad (8.26)$$

Аналогично для средней плотности энергии  $W = \frac{1}{2}\rho_{00}\mathbf{v}\mathbf{v}^*$  находим

$$W = \frac{1}{2}\rho_{00}v_0^2 N^2. \quad (8.27)$$

Из (8.26) следует, что поток энергии направлен по вектору групповой скорости (рис. 8.5), а скорость распространения энергии в среде  $\mathbf{V} = \mathbf{P}/W$  в точности равна групповой скорости.

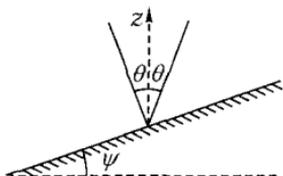


Рис. 8.6. К отражению волны от наклонного дна [7]

Докажите сами, что если дно наклонное, то выполняется следующий закон отражения волн: угол падения равен углу отражения, но по отношению не к нормали, а к вертикали поверхности дна (рис. 8.6). Для того чтобы отраженная волна компенсировала перпендикулярную границе составляющую скорости частиц в падающей волне, необходимо выполнение равенства

$$k_{\text{пад}} \sin(\theta - \Psi) = k_{\text{отр}} \sin(\theta + \Psi),$$

когда  $\mathbf{k}_{\text{пад}}$  и нормаль к границе лежат в плоскости рис. 8.6 (докажите это!). Отсюда следует любопытный вывод: при отражении меняется длина волны. Противоречия здесь нет: при данной частоте длина волны может быть любой (см. гл. 5).

Для волн Россби из уравнения (5.83) легко показать, что при  $k_y = 0$  фазовая и групповая скорости волны направлены в разные стороны. В общем случае, когда  $k_y \neq 0$ ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{\beta}{\xi^2} \frac{k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{\beta}{\xi^2} \frac{2k_x k_y}{k_x^2 + k_y^2},$$

и для групповой скорости получаем

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{\beta}{\xi^2} (\mathbf{x}_0 \cos 2\gamma - \mathbf{y}_0 \sin 2\gamma),$$

т. е.  $\mathbf{v}_{\text{гр}}$  направлено от конца вектора  $\xi$  к центру круга (5.83),  $\gamma$  — угол между  $\xi$  и осью  $k_x$ .

Приведенные примеры показывают, что для сред с анизотропной дисперсией, т. е. для сред с дисперсионным соотношением

$\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$ , вектор групповой скорости ведет себя довольно нестандартно. Кажется ясным, что с точки зрения кинематики волн понятие групповой скорости можно обобщить на многомерные системы. Не вдаваясь в детали работ [3], [8], выпишем основные соотношения. Пусть в модулированной волне  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp[i\Psi(\mathbf{x}, t)]$  вектор  $\mathbf{x}$  имеет координаты  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . Определим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = -k_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.28)$$

где  $k_1, k_2$  и  $k_3$  — компоненты волнового вектора. Дисперсионное соотношение имеет вид  $\omega = \omega(k_1, k_2, k_3)$  или

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right). \quad (8.29)$$

Дифференцируя (8.29) по  $x_i$  с учетом определений (8.28), получаем трехмерный аналог (8.11) в следующей форме:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0, \quad (8.30)$$

где  $U_j = \partial \omega / \partial k_j$  — компоненты вектора групповой скорости. Если  $dx_j/dt = U_j$ , то компоненты  $k_j$  волнового вектора постоянны, а движение с постоянной скоростью  $U_j$ , имеет место вдоль прямой  $x_j - U_j t = \text{const}$ . В работе [3] доказано, что для синусоидальных волн групповая скорость  $U_j = \partial \omega / \partial k_j$  совпадает в любых однородных анизотропных системах со скоростью распространения энергии (для внутренних волн мы это видели).

Более сложным является случай распространения волн в неоднородной нестационарной диспергирующей среде, когда  $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ . В этих случаях групповая скорость выступает как так называемая лучевая скорость. Мы не касаемся этого и более сложных вопросов, отсылая читателя к работам [3, 8, 11].

## ГЛАВА 9

# Энергия и импульс волн

### 9.1. Уравнение переноса усредненной плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде

Волны, как и всякий движущийся объект, переносят энергию в процессе своего распространения. Энергия эта самая разная в зависимости от природы волн: весьма значительная — у морских волн, перемещающих при шторме огромные каменные глыбы, сравнительно небольшая — у электромагнитных световых волн, доходящих до Земли от Солнца (мощность на  $1 \text{ м}^2$  поверхности около  $1 \text{ кВт}$ ) и т. п. Подобно движущимся частицам, волны обладают импульсом. Хотя существование импульса у волны не может вызвать сомнений, проявляется он менее заметно, чем энергия волны; например, световое давление потока излучения Солнца на орбите Земли составляет очень малую величину — всего  $p = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$  [1, 2].

Мы в этой главе получим уравнения, описывающие перенос энергии и импульса волн в диспергирующих средах [3–6].

При выводе уравнения переноса энергии поступим, как и при выводе уравнения эволюции волнового вектора (см. гл. 8): откажемся от использования интеграла Фурье. Будем исходить из уравнения Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами [3]:

$$u_{tt} - V^2 u_{xx} + \beta^2 u = 0. \quad (9.1)$$

Умножая обе части (9.1) на  $u_t$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \right) - V^2 u_t u_{xx} = 0. \quad (9.2)$$

Прибавим к левой части получившегося уравнения (9.2) слагаемое  $V^2 u_x u_{xt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_x^2 \right)$  и отнимем в точности такое же. Легко видеть, что

$$-V^2 u_t u_{xx} - V^2 u_x u_{xt} = -V^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x).$$

С учетом сделанных преобразований получаем уравнение, выражающее закон сохранения энергии, в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-V^2 u_x u_t) = 0, \quad (9.3)$$

где сумма  $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2$  имеет смысл плотности энергии, а  $-V^2 u_x u_t$  — потока энергии.

Рассмотрим теперь группу волн (или, как часто говорят, волновой пакет), медленно изменяющуюся в пространстве и во времени. Для такой группы волн

$$u \sim \operatorname{Re}(Ae^{i\Psi}) = a \cos(\Psi + \varphi), \quad (9.4)$$

где  $a = |A|$ ,  $\varphi = \arg A$ . Используя (9.4), вычисляем плотность энергии и плотность потока энергии. Очевидно, что

$$u_i \sim -i\omega a \sin(\Psi + \varphi) + a_t \cos(\Psi + \varphi) - \varphi_t a \sin(\Psi + \varphi),$$

тогда  $u_i^2/2 \sim \omega^2 a^2 \sin^2(\Psi + \varphi)$ , поскольку из-за медленности изменения  $a$  и  $\varphi$  слагаемыми, содержащими  $a_t$  и  $\varphi_t$ , можно пренебречь. В тех же приближениях легко вычислить остальные слагаемые, входящие в плотность энергии, что окончательно дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \sim \frac{1}{2} (\omega^2 + V^2 k^2) a^2 \sin^2(\Psi + \varphi) + \\ + \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \cos^2(\Psi + \varphi), \end{aligned} \quad (9.5)$$

где учтено, что  $\partial\Psi/\partial t = \omega$ , а  $\partial\Psi/\partial x = -k$ . Аналогично для плотности потока энергии

$$V^2 u_x u_t \sim V^2 \omega k a^2 \sin^2(\Psi + \varphi). \quad (9.6)$$

Если вместо (9.1) взять уравнение, которое содержит производные более высокого порядка, то очевидно, что при их вычислении с учетом (9.4) появятся дополнительные слагаемые, содержащие производные  $\omega$  и  $k$ . Однако, поскольку мы рассматриваем медленно изменяющийся волновой пакет,  $\omega$  и  $k$  тоже медленно изменяются, и этими слагаемыми можно пренебречь. Рассмотрим средние за период значения выражений (9.5) и (9.6). Это оправданно: интересны заметные (средние) изменения  $\omega$ ,  $k$  и  $a$ , а не мелкие осцилляции и их детали. Итак,

для средних значений плотности энергии и плотности потока энергии в рамках сделанных допущений получаем

$$\mathcal{E} = \frac{a^2}{4}(\omega^2 + V^2 k^2) + \frac{\beta^2 a^2}{4}, \quad (9.7)$$

$$S = \frac{1}{2}V^2 \omega k a^2. \quad (9.8)$$

Из (9.1) следует дисперсионное уравнение задачи

$$\omega^2 = \beta^2 + V^2 k^2. \quad (9.9)$$

С учетом (9.9) соотношения (9.7) и (9.8) принимают следующий окончательный вид:

$$\mathcal{E} = \frac{a^2}{2}(\beta^2 + V^2 k^2), \quad (9.10)$$

$$S = \frac{1}{2}V^2 \omega k a^2. \quad (9.11)$$

По определению  $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ , поэтому из (9.9) получаем

$$v_{\text{гр}} = \frac{V^2 k}{\sqrt{V^2 k^2 + \beta^2}}. \quad (9.12)$$

Из соотношений (9.10)–(9.12), используя (9.9), находим, что

$$v_{\text{гр}} = \mathcal{E}/S. \quad (9.13)$$

Общность этого выражения уже отмечалась в гл. 8.

Возвращаясь к (9.3) и основываясь на (9.13), можно предположить, что закон сохранения средней плотности энергии выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{\text{гр}} \mathcal{E}) = 0. \quad (9.14)$$

В [3] показано, что это уравнение соответствует ситуации, когда полная энергия между двумя прямыми  $x - v_{\text{гр}1,2} t = \text{const}$  на плоскости  $xt$  остается постоянной. Для доказательства рассмотрим выражение для энергии

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \mathcal{E} dx, \quad (9.15)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — точки, которые движутся со скоростями  $v_{гp}(k_1)$  и  $v_{гp}(k_2)$ . Очевидно, что

$$\frac{d\tilde{\mathcal{E}}(t)}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx + v_{гp}(k_2)\mathcal{E}_2 - v_{гp}(k_1)\mathcal{E}_1, \quad (9.16)$$

причем эта величина, как следует из (9.14), равна нулю. Не менее очевидно, что (9.16) в пределе при  $x_2 - x_1 \rightarrow 0$  превращается в (9.14).

Выражение для усредненной плотности энергии можно представить в виде  $\mathcal{E} = F(k)a^2$ . Подставим это выражение в (9.14); тогда

$$F(k) \left[ \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{гp}a^2) \right] + \frac{\partial F}{\partial k} a^2 \left( \frac{\partial k}{\partial t} + v_{гp} \frac{\partial k}{\partial x} \right) = 0.$$

Но, как показано в гл. 8,  $\partial k/\partial t + v_{гp}\partial k/\partial x = 0$ , поэтому

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_{гp}a^2) = 0. \quad (9.17)$$

Полученные соотношения типа (9.14) и (9.17) легко распространить на многомерные задачи. Такое обобщение для уравнения Клейна–Гордона и уравнения  $u_{tt} - V^2 \nabla^2 u = \beta^2 \nabla^2 u_{tt}$  приведено в [3]. Уравнение, характеризующее перенос усредненной плотности энергии волновым пакетом в средах с заданной дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(v_{гp})_j \mathcal{E}] = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(v_{гp})_j a^2] = 0. \quad (9.18)$$

Изложенные результаты оставляют чувство неудовлетворенности оттого, что они получены для конкретного уравнения. Дж. Уизем показал [3] справедливость «усредненного вариационного принципа» непосредственно для функций  $a(\mathbf{x}, t)$  и  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , результатом применения которого является уравнение (9.18).

## 9.2. Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией

Известное выражение  $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  для плотности потока электромагнитной энергии справедливо и в среде с дисперсией [5, 6]. Из

уравнений Максвелла следует не менее известное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right], \quad (9.19)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  — напряженность и смещение электрического поля,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  — напряженность и индукция магнитного поля.

Если дисперсий нет, т. е. проницаемости  $\varepsilon$  и  $\mu$  — действительные постоянные величины, то уравнение (9.19) выражает изменение плотности электромагнитной энергии  $\mathcal{E} = (1/8\pi)(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)$  в единице объема, т. е.  $d\mathcal{E}/dt + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ . При наличии диссипации плотность энергии тепловых потерь определяется мнимыми частями  $\varepsilon$  и  $\mu$ :

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\operatorname{Im} \varepsilon \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \operatorname{Im} \mu \langle \mathbf{H}^2 \rangle), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + Q = 0,$$

где угловые скобки означают усреднение по времени.

Найдем  $\mathcal{E}$ , следуя [5]. Рассмотрим узкий волновой пакет, состоящий из монохроматических компонент с частотами вблизи некоторой  $\omega_0$ , т. е. узкий пакет с шириной спектра  $\Delta\omega \ll \omega_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(t) e^{i\omega_0 t}, & \operatorname{Re} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \mathbf{E}_0^*(t) e^{-i\omega_0 t}], \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(t) e^{i\omega_0 t}, & \operatorname{Re} \mathbf{H} &= \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \mathbf{H}_0^*(t) e^{-i\omega_0 t}] \end{aligned}$$

(для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  имеют место аналогичные выражения), где  $\mathbf{E}_0(t)$  и  $\mathbf{H}_0(t)$  — медленно изменяющиеся по сравнению с  $\exp(i\omega_0 t)$  функции времени. Подставим выражение для действительных частей напряженностей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , а также для  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  в (9.19), после чего усредним получившееся по периоду  $2\pi/\omega_0$ . Очевидно, что быстро меняющиеся слагаемые типа  $\mathbf{E}_0(\partial \mathbf{D}_0/\partial t) \exp(2i\omega_0 t)$  и  $\mathbf{E}_0^*(\partial \mathbf{D}_0^*/\partial t) \exp(-2i\omega_0 t)$  при усреднении исчезнут, а останутся лишь слагаемые типа

$$M = \frac{1}{16\pi} \left[ \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

(мы делаем все преобразования только с первым слагаемым в правой части (9.19)). Представим производную  $\partial \mathbf{D}/\partial t$  в виде  $\hat{f} \mathbf{E}$ , где оператор  $\hat{f} = (\partial/\partial t) \hat{\varepsilon}$ . Что получится, если подействовать этим оператором на  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega_0 t)$ ? Очевидно, что если  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  (поле чисто гармоническое), то  $\hat{f} \mathbf{E} = i\omega_0 \varepsilon(\omega_0) \mathbf{E}$  или  $\hat{f} \mathbf{E} = f(\omega_0) \mathbf{E}$ , где  $f(\omega) = i\omega \varepsilon(\omega)$ . Разложим функцию  $\mathbf{E}_0(t)$  в интеграл Фурье, что соответствует представлению ее группой монохроматических составляющих  $\mathbf{E}_{0\omega} \exp[i(\omega - \omega_0)t]$

с  $\mathbf{E}_{0\omega} = \text{const}$ :

$$\mathbf{E}_0(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0).$$

Поскольку  $\mathbf{E}_0(t)$  — медленно изменяющаяся функция времени, то в интеграл войдут лишь те составляющие, для которых  $\Delta\omega = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ . Это позволяет написать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \widehat{f} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega + \Delta\omega)t} &= f(\omega_0 + \Delta\omega) \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t} \approx \\ &\approx f(\omega_0) \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t} + \Delta\omega \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \sim \int_{-\infty}^{\infty} i \Delta\omega \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega). \quad (9.21)$$

Проинтегрируем (9.20) по  $\Delta\omega$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что соответствует обратному преобразованию Фурье. Используя (9.21), находим

$$\begin{aligned} \widehat{f} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) &= \\ &= f(\omega_0) e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) - i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} i \Delta\omega \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) = \\ &= f(\omega_0) \mathbf{E}_0 e^{i\omega_0 t} - i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Опуская далее индекс 0 у  $\omega$ , получаем

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \frac{d(\omega \varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{i\omega_0 t}. \quad (9.22)$$

Напомним, что  $\varepsilon(\omega) = \text{Re} \varepsilon(\omega) + i \text{Im} \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i \varepsilon''(\omega)$ . Те области частот, в которых  $\varepsilon''(\omega)$  малы по сравнению с  $\varepsilon'(\omega)$ , называются областями «прозрачности» среды (аналогично для магнитной проницаемости). В этих областях можно положить  $\varepsilon''(\omega) = 0$ , так что  $Q = 0$ .

Учитывая, что теперь  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = \varepsilon^*(\omega)$ , имеем следующее соотношение для  $M$ :

$$M = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \left( \mathbf{E}_0^* \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) = \\ = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}_0) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E} \mathbf{E}^*).$$

Поскольку для магнитного поля все выкладки аналогичны, можем написать выражение для усредненной плотности энергии

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_{эл} \rangle + \langle \mathcal{E}_м \rangle = \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle |E|^2 \rangle + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle |H|^2 \rangle \right]. \quad (9.23)$$

Укажем еще на один простой способ получения энергетических соотношений в средах с временной и пространственной дисперсией, который основан на использовании дисперсионного уравнения системы [7, 8]. Рассмотрим одномерную волну  $v' = \text{Re}[v e^{i(\omega t - kx)}]$ , где  $v'$ , например, — скорость возмущения в потоке электронов. Пусть волна скорости возбуждается внешней волной  $F' = \text{Re}\{F \exp[i(\omega t - kx)]\}$  (например, продольной электрической компонентой бегущей электромагнитной волны), которая и определяет значения  $\omega$  и  $k$ . Амплитуды  $v$  и  $F$  определены так, чтобы средняя за период мощность взаимодействия возбужденной и внешней волн была пропорциональна  $(F'v'^*)$ . Если  $v$  и  $F$  связаны линейным соотношением  $D(\omega, k)v = -iF$ , где  $D(\omega, k)$  — аналитическая функция  $\omega$  и  $k$ , то имеют место формулы: для усредненной по периоду энергии на единицу длины

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{v v^*}{4} \quad (9.24)$$

и для усредненного по периоду потока энергии на единицу длины

$$\langle S \rangle = \frac{\partial D}{\partial k} \frac{v v^*}{4}. \quad (9.25)$$

В отсутствие внешнего воздействия  $D(\omega, k) = 0$  и  $v_{гp} = d\omega/dk = (\partial D/\partial k)(\partial D/\partial \omega)^{-1} = \langle S \rangle/\langle \mathcal{E} \rangle$ , где полная производная берется вдоль всей дисперсионной характеристики.

Предоставляем читателю самому доказать весьма полезные формулы (9.24) и (9.25). В качестве примера их применения рассмотрим

волны пространственного заряда в электронном потоке, исходя из уравнения для плотности сгруппированного тока  $j'$  при воздействии на поток внешней бегущей электромагнитной волны с продольной компонентой электрического поля  $E'$  (см. гл. 7). В предположении, что все переменные величины изменяются во времени по закону  $\exp(i\omega t)$ , это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 j'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial j'}{\partial x} - \left[ \left( \frac{\omega}{v_0} \right)^2 - \left( \frac{\omega_q}{v_0} \right)^2 \right] j' = \frac{i\omega\omega_p^2}{4\pi v_0^2} E', \quad (9.26)$$

$v_0$  — постоянная скорость пучка,  $\omega_q = R(\omega, k)\omega_p$ . Если  $E' \sim \sim \exp(i\omega t - ikx)$ , то из (9.26) имеем

$$\frac{4\pi}{\omega S} \left[ \frac{(\omega - kv_0)^2}{\omega_p^2} - R^2(\omega, k) \right] j' S = -iE', \quad (9.27)$$

т. е.

$$D(\omega, k) = \left[ \frac{(\omega - kv_0)^2}{\omega_p^2} - R^2(\omega, k) \right] \frac{4\pi}{\omega S}, \quad (9.28)$$

где  $S$  — поперечное сечение пучка. Вид  $D(\omega, k)$  определяется тем, что средняя за период мощность взаимодействия электронного пучка с внешней бегущей волной равна  $(1/2) \operatorname{Re}(E' j'^* S)$ . При «снятии» внешнего воздействия  $D(\omega, k) = 0$  и  $(\omega - kv_0)^2 = R^2(\omega, k)\omega_p^2$ , т. е. имеем две волны пространственного заряда в дрейфующем пучке — быструю ( $\omega - v_0 k = R\omega_p$ ) и медленную ( $\omega - v_0 k = -R\omega_p$ ). Из формул (9.24), (9.25) и (9.28) находим

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2\pi j' j'^* S}{\omega \omega_p} \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} - R\omega_p \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \quad (9.29)$$

$$\langle S \rangle = \frac{2\pi j' j'^* S v_0}{\omega \omega_p} \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} + R \frac{\omega_p}{v_0} \frac{\partial R}{\partial k} \right). \quad (9.30)$$

Если пучок бесконечно широкий и  $R = 1$ , то  $v_{\text{ГР}} = \langle S \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle = v_0$ , и перенос энергии связан лишь с кинематическим движением пучка. Однако для пучка конечной толщины

$$v_{\text{ГР}} = v_0 \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} + R \frac{\omega_p}{v_0} \frac{\partial R}{\partial k} \right) \left( \frac{\omega - kv_0}{\omega_p} - R\omega_p \frac{\partial R}{\partial \omega} \right)^{-1},$$

т. е. распространение энергии определяется не только кинематикой пучка, но и вторыми членами в круглых скобках, имеющими электромагнитное происхождение. Полученные выражения (9.29) и (9.30) верны и в релятивистском случае, если в определении  $\omega_p$  использовать продольную релятивистскую массу; они представляются полезными в теории шумов в электронных потоках. Интересно, что при  $\partial R/\partial\omega = \partial R/\partial k = 0$  для быстрой (индекс «б») и медленной (индекс «м») волн пространственного заряда из (9.29) и (9.30) имеем

$$\langle \mathcal{E}_{б,м} \rangle = \pm \frac{2\pi S}{\omega\omega_p} j' j'^*, \quad \langle S_{б,м} \rangle = \pm v_0 \langle \mathcal{E}_{б,м} \rangle, \quad (9.31)$$

т. е. быстрая волна потока имеет положительную энергию, а медленная — отрицательную. Волнам с отрицательной энергией мы посвятим следующую главу.

### 9.3. Импульс волнового пакета

Пусть в среде, которая движется относительно наблюдателя со скоростью  $|V| \ll c$  ( $c$  — скорость света), распространяется волновой пакет. Его энергия в системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , равна  $\mathcal{E}_V$ , в то время как в неподвижной системе координат энергия равна  $\mathcal{E}_V^0 \neq \mathcal{E}_V$ . Для дальнейших рассуждений [4] воспользуемся тем, что при  $|V| \ll c$  имеет место галилеева инвариантность физических процессов: законы изменения состояний физических систем не зависят от того, в какой из инерциальных систем отсчета они происходят (для механики это означает, что уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея). Ответим сначала на вопрос: как связаны  $\mathcal{E}_V^0$  и  $\mathcal{E}_V$ ? Для этого кроме волнового пакета рассмотрим частицу массы  $m$ , которая движется относительно наблюдателя со скоростью  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{v}$ . Величина  $\mathbf{v}$  — относительная скорость движения. Кинетическая энергия дополнительно введенной частицы

$$\mathcal{E}^0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} = \frac{m\mathbf{V}^2}{2} + m\mathbf{v}\mathbf{V} + \frac{m\mathbf{v}^2}{2}. \quad (9.32)$$

Поскольку импульс частиц  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , а  $\mathcal{E} = m\mathbf{v}^2/2$  — энергия в системе координат, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , то  $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E} + \mathbf{p}\mathbf{V}$  с точностью до постоянной величины  $m\mathbf{V}^2/2$ . Предположим далее, что частица и волновой пакет обмениваются энергией и импульсом. Следствием галилеевой инвариантности является следующее соотношение, связывающее

энергию и импульс в движущейся среде:

$$\mathcal{E}_V^0 = \mathcal{E}_V + \mathbf{P}\mathbf{V}. \quad (9.33)$$

Структура соотношения (9.33) определяется тем, что оно должно быть в точности совпадающим с написанным выше для частицы. Когда волна и свободная частица взаимодействуют эффективно? При выполнении условий пространственного резонанса, т. е. когда скорость частицы  $\mathbf{v}$  равна фазовой скорости волны  $\mathbf{v}_\phi$ , это условие удобно записать в виде условия черенковского излучения  $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ . Из-за взаимодействия с волной имеет место изменение (уменьшение) энергии частицы  $\Delta\mathcal{E} = \Delta(m\mathbf{v}^2/2) = m\mathbf{v}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}$ , связанное с изменением ее импульса. Такое же соотношение вследствие галилеевой инвариантности мы обязаны написать для волнового пакета. Если учесть, что получающиеся изменения энергии  $\Delta\mathcal{E}_V$  и импульса  $\Delta\mathbf{P}$  волнового пакета пропорциональны квадрату амплитуды, то  $\Delta\mathcal{E}_V$  и  $\Delta\mathbf{P}$  пропорциональны друг другу, т. е. при пространственном резонансе  $\mathcal{E}_V = \mathbf{v}\mathbf{P}$ . Импульс  $\mathbf{P}$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{k}$ , поскольку составляющая скорости частицы, поперечная по отношению к  $\mathbf{k}$ , может быть произвольной. Поэтому из условия  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$  следует, что  $\mathbf{P} = (\mathbf{k}/\omega)\mathcal{E}_V$ , откуда, в свою очередь, видно, что  $(\mathbf{v}_\phi\mathbf{P}) = \mathcal{E}_V$  (фазовая скорость волны есть отношение энергии волны к ее импульсу). Если ввести амплитуду волны соотношением  $\mathcal{E}_V = \omega|a^2| = \omega N$ , где  $N$  — число волн в пакете с данным волновым числом  $\mathbf{k}$  [4], то  $\mathbf{P} = \mathbf{k}N$ . Используя два последних выражения для  $\mathcal{E}_V$  и  $\mathbf{P}$  в (9.33), находим  $\mathcal{E}_V^0 = \omega N + \mathbf{k}\mathbf{V}N = \omega_0 N$ , где  $\omega_0 = \omega + \mathbf{k}\mathbf{V}$  — доплеровская частота.

## ГЛАВА 10

# Волны с отрицательной энергией. Связанные волны

### 10.1. Общие замечания

В предыдущей главе мы столкнулись с тем, что плотность энергии и плотность потока энергии медленной волны пространственного заряда в электронном пучке отрицательны (см. (9.31), (9.32)). На первый взгляд это противоречит некоторым общим принципам. Действительно, например, на возбуждение электромагнитного волнового пакета в среде с дисперсией нужно затратить энергию; поэтому, когда «подкачка» энергии извне прекращается, существующая в диспергирующей среде диссипация (хотя бы и малая) заставит перейти всю энергию

$$\langle W(t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle |E|^2 \rangle + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle |H|^2 \rangle \right]$$

(см. гл. 9) в тепло. Поскольку согласно принципу возрастания энтропии тепло должно выделяться, а не поглощаться, получаем (см. [1])

$$\langle W(t) \rangle > 0, \quad d(\omega\varepsilon)/d\omega > 0, \quad d(\omega\mu)/d\omega > 0. \quad (10.1)$$

Однако сказанное верно лишь для равновесных сред. Для неравновесных же сред соотношения (10.1) могут и не выполняться — в таких средах действительно возможно возбуждение и распространение волн с отрицательной энергией. Физический смысл этого будет ясен из дальнейшего.

Причины неравновесности могут быть самыми разнообразными [2], в частности нескомпенсированные направленные движения, внешние поля, градиент плотности, температуры и т. д. Примеры неравновесных сред хорошо известны: электронный пучок, взаимодействующий с полями замедляющей системы (ЛБВ, ЛОВ), плазма с многогорбой функцией распределения заряженных частиц по скоростям (частным случаем является взаимодействие электронного потока с плазмой),

среды с отрицательной проводимостью или вязкостью (туннельные и ганновские полупроводники), пограничный слой и другого рода сдвиговые течения в гидродинамике. Почему в подобных средах возбуждаются волны с отрицательной энергией? Как возбудить волну с энергией определенного знака и каков результат взаимодействия связанных волн с энергиями разных знаков? Ответы на эти вопросы мы и постараемся здесь дать.

## 10.2. Волны с положительной и отрицательной энергией

Понятие о волнах с отрицательной энергией впервые появилось в СВЧ-электронике в виде известной теоремы Чу о кинетической мощности [21]. Именно Чу показал, что с медленной волной пространственного заряда в электронном пучке связан поток «отрицательной кинетической мощности». Следующий принципиально важный шаг в понимании волн с отрицательной энергией был сделан П. А. Стэрроком [3], который, не конкретизируя природы волн, показал, что в среде, движущейся со скоростью, энергия быстрой и медленной волн, измеряемая неподвижным наблюдателем, выражается соотношениями

$$W_6 = W_0(1 + u/v_\phi), \quad W_m = W_0(1 - u/v_\phi), \quad (10.2)$$

где  $v_\phi$  и  $-v_\phi$  — скорости волн в подвижной системе координат, а  $W_0$  — энергия в этой системе. Из (10.2) видно, что при  $v_\phi < u$  величина  $W_m$  отрицательна, в то время как групповая скорость обеих волн положительна. Более простой, но менее строгий, чем в [3], вывод формул (10.2) приведен в книге [4]. В дальнейшем волны с отрицательной энергией широко обсуждались как в периодической печати (см. обзор [5] и библиографию к нему), так и на страницах книг [6, 7, 18, 22].

По физическому смыслу волны с отрицательной энергией — это такие волны, с ростом амплитуды которых суммарная энергия системы «среда — волна» уменьшается. Помимо волн в неравновесных средах отрицательной энергией обладают также продольные электростатические волны, спектр которых расположен в области аномальной дисперсии среды  $d\varepsilon/d\omega < 0$ ; для них средняя плотность энергии  $\langle W_{эл} \rangle = (\omega/16\pi)(d\varepsilon/d\omega)\langle E \rangle^2 < 0$ . Поясним смысл понятия «отрицательная энергия» на уже знакомом нам примере распространения волн пространственного заряда в дрейфующем электронном потоке. Линеаризованные уравнения задачи в использованных уже ранее обозначениях

имеют вид

$$\partial v' / \partial t + v_0 \partial v' / \partial x - (e/m) E_{\text{пз}} = 0, \quad (10.3)$$

$$\partial \rho' / \partial t + \rho_0 \partial v' / \partial x + v_0 \partial \rho' / \partial t = 0, \quad (10.4)$$

$$\partial E_{\text{пз}} / \partial x = 4\pi \rho'. \quad (10.5)$$

Пусть все переменные величины изменяются по закону  $f' \sim \exp(i\omega t - ikx)$ . Тогда из условия совместности уравнений (10.3)–(10.5) следует, что  $(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 = (4\pi\rho_0 e)/m$  и  $\omega - kv_0 = \omega_p$  соответствует быстрой волне пространственного заряда, а  $\omega - kv_0 = -\omega_p$  относится к медленной волне. Из (10.3) и (10.5) находим  $v' = (e/m) E_{\text{пз}} / [i(\omega - kv_0)]$ ,  $E_{\text{пз}} = -4\pi\rho' e / (ik)$ , откуда имеем  $v' = (4\pi e^2/m)\rho' / [k(\omega - kv_0)]$  или

$$\frac{v'}{v_0} = \frac{\omega_p^2}{kv_0(\omega - kv_0)} \frac{\rho'}{\rho_0}. \quad (10.6)$$

С учетом того, что  $\omega - kv_0 = \pm\omega_p$  и  $kv_0 = \omega \mp \omega_p$  из (10.6) получаем соотношения, связывающие переменные составляющие скорости и плотности объемного заряда для медленной и быстрой волн соответственно:

$$\frac{v'_M}{v_0} = -\frac{\omega_p}{\omega + \omega_p} \frac{\rho'_M}{\rho_0}, \quad \frac{v'_6}{v_0} = \frac{\omega_p}{\omega - \omega_p} \frac{\rho'_6}{\rho_0}. \quad (10.7)$$

Из соотношений (10.7) видно, что в медленной волне возмущения скорости находятся в противофазе с возмущениями плотности (знак «−» в первой из формул (10.7)), а в быстрой — в фазе (знак «+» во второй из формул (10.7)). Соотношения (10.7) можно еще более упростить, если считать  $\omega_p \ll \omega$  (что характерно, например, для вакуумной СВЧ-электроники [8]). В этом предположении

$$\frac{v'_M}{v_0} = -\frac{\omega_p}{\omega} \frac{\rho'_M}{\rho_0}, \quad \frac{v'_6}{v_0} = \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\rho'_6}{\rho_0}. \quad (10.8)$$

Полученные выражения (10.7) (или (10.8)) сразу проясняют, почему у быстрой волны энергия положительна, а у медленной отрицательна. Действительно, например, из (10.8) следует, что для быстрой волны в области, где возмущение приводит к увеличению плотности  $\rho'_6$ , скорость движения частиц больше  $v_0$ , а на участках, где плотность уменьшилась, скорость электронов меньше  $v_0$ . Поэтому при возбуждении быстрой волны в потоке преобладают ускоренные по сравнению

с  $v_0$  электроны и результирующая кинетическая энергия, переносимая пучком, больше энергии невозмущенного пучка. Если же возбуждена медленная волна, то в тех областях, где образуется сгущение (увеличение  $\rho'_M$ ), скорость электронов, наоборот, меньше  $v_0$  и больше  $v_0$  там, где возникает разрежение (уменьшение  $\rho'_M$ ). В результате при возбуждении в электронном потоке медленной волны в нем преобладают замедленные по сравнению с  $v_0$  электроны, и энергия, переносимая таким пучком, меньше, чем энергия пучка без волны.

Поскольку для анализируемой системы дисперсионное уравнение имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_p^2/(\omega - kv_0)^2 = 0, \quad (10.9)$$

то видно, что на ветви  $\omega - kv_0 = -\omega_p$ , соответствующей медленной волне,

$$\partial\varepsilon/\partial\omega = 2\omega_p^2/(\omega - kv_0)^3 = -2/\omega_p < 0, \quad (10.10)$$

т. е. энергия этой волны отрицательна. В то же время для быстрой волны  $\partial\varepsilon/\partial\omega = -2/\omega_p < 0$  и энергия этой волны положительна.

Очевидно, что в противоположность медленной волне волнам с положительной энергией соответствуют те, с ростом амплитуды которых полная энергия системы «среда — волна» увеличивается.

Попытаемся получить выражения для плотности потока энергии в электронном пучке, исходя непосредственно из одномерного уравнения движения пучка в продольном электрическом поле  $\partial v/\partial t + v \partial v/\partial x = (e/m)E_x$ , выражения  $j = \rho v$  для плотности тока и одномерного уравнения непрерывности  $\partial j/\partial x + \partial \rho/\partial t = 0$ . Рассмотрим, следуя [9], произведение  $E_x j$ ; используя уравнение движения и формулу для  $j$ , находим

$$E_x j = (m/e)(\partial v/\partial t + v \partial v/\partial x)\rho v. \quad (10.11)$$

Уравнение (10.11) с учетом уравнения непрерывности принимает вид

$$\partial W_n/\partial t + \partial S_n/\partial x - E_x j = 0, \quad (10.12)$$

где плотность кинетической энергии электронного пучка

$$W_n = (m/2e)\rho v^2 \quad (10.13)$$

и плотность потока кинетической энергии

$$S_n = (m/2e)\rho v^3, \quad (10.14)$$

причем отношение  $S_n/W_n = v$ , т. е. полной скорости пучка.

При выводе (10.12)–(10.14) мы не делали допущения о малости возмущений. Если же предположить, что  $v = v_0 + v'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $j = j_0 + j' = j_0 + v_0\rho' + \rho_0v'$  (возмущения много меньше соответствующих постоянных величин), то, сохраняя в (10.13) члены второго порядка малости, получаем

$$W_{\text{п}} = (m/2e)[\rho_0(v_0^2 + 2v_0v' + v'^2) + (v_0^2 + 2v_0v')\rho']. \quad (10.15)$$

Рассчитаем среднюю за период плотность кинетической энергии для дрейфующего пучка, положив, что  $E_x = E_{\text{пз}}$  и пучок локально возмущен на входе высокочастотным сигналом частоты  $\omega$ , а далее предоставлен самому себе, т. е. в нем распространяются волны пространственного заряда, в частности волны вида

$$E_{\text{пз}} = E_{\text{пз}}^0 \exp[i\omega t - i(k + \omega_p/v_0)x] + E_{\text{пз}}^0 \exp[i\omega t - i(k - \omega_p/v_0)x],$$

где  $E_{\text{пз}}^0$  определяется начальным возмущением. С учетом (10.15) имеем

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{п}} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho_0 v_0^2 d(\omega t) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{e} \rho_0 v_0 v' d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho_0 v'^2 d(\omega t) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho' v_0^2 d(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{e} \rho' v_0 v' d(\omega t). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Первый интеграл — плотность энергии невозмущенного пучка, которую мы обозначим  $\langle W_{\text{п}}^0 \rangle$ . Поскольку  $v'$  и  $\rho'$  представляют собой суперпозицию гармонических слагаемых (волн пространственного заряда), то второй и четвертый интегралы равны нулю. Таким образом, нас интересует

$$\delta \langle W_{\text{п}} \rangle = \langle W_{\text{п}} \rangle - \langle W_{\text{п}}^0 \rangle = \frac{m\rho_0}{4\pi e} \int_0^{2\pi} v'^2 d(\omega t) + \frac{mv_0}{2\pi e} \int_0^{2\pi} v' \rho' d(\omega t). \quad (10.17)$$

Так как  $v' = (e/m)E_{\text{пз}}/i(\omega - kv_0)$ , а  $v'$  и  $\rho'$  для  $\omega_p \ll \omega$  связаны соотношениями (10.8), то, вычисляя интегралы в (10.16), имеем для быстрой

и медленной волн пространственного заряда

$$\delta\langle W \rangle_{\text{пр.б}} \approx \frac{(E_{\text{пз}}^0)^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} > 0, \quad \delta\langle W \rangle_{\text{пр.м}} \approx -\frac{(E_{\text{пз}}^0)^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} < 0. \quad (10.18)$$

Знак приближенного равенства появился потому, что в (10.18) мы пренебрегли слагаемым, получившимся от вычисления первого интеграла, что вполне оправдано при  $\omega_p \ll \omega$ : это слагаемое в  $\omega/\omega_p$  раз меньше второго.

Заметим, что если в (9.31) учесть, что  $E_{\text{пз}} = -4\pi j'/(i\omega)$  и, следовательно,  $j'j'^* = \omega^2 E_{\text{пз}}^2/16\pi^2$ , то приходим к (10.18).

Разумеется, и формула  $\langle W \rangle_{\text{эл}} = (\omega/16\pi)(\partial\varepsilon/\partial\omega)|E_{\text{пз}}|^2$  с учетом того, что  $\partial\varepsilon/\partial\omega = \pm 2/\omega_p$ , приводит к тому же результату. При  $\omega_p \ll \omega$  из общих формул (10.2) имеем

$$W_{\text{б,м}}/W_0 = \pm\omega/\omega_p, \quad (10.19)$$

так как  $u = v_0$ ,  $v_{\text{ф}} = \pm v_0\omega_p/\omega$ .

Итак, отрицательной энергией обладают волны, в которых возмущения скорости и плотности противофазны. По-видимому, такое объяснение возникновения волн с отрицательной энергией является достаточно общим; оно относится не только к электронике, но и ко многим гидродинамическим задачам, в которых принципиальна сжимаемость. Для несжимаемой жидкости столь просто интерпретировать физический смысл волн с отрицательной энергией можно уже не всегда. В частности, если течение стратифицировано по плотности [20], то такое объяснение справедливо, при этом под возмущениями плотности следует понимать возмущения градиента плотности. В случаях течений без стратификации, например в пограничном слое, следует вести речь о волнах скорости и волнах давления [2, 19].

Какие условия должны быть выполнены, чтобы в среде возникла волна отрицательной энергии? Очевидно, для этого нужно, чтобы медленная волна имела возможность отдавать некоторую часть своей энергии среде или другим волнам. Проиллюстрируем это на примере резистивного усилителя [8] (рис. 10.1). Предварительно модулированный во входном устройстве электронный пучок проходит через диэлектрическую трубку, внутренняя поверхность которой покрыта поглощающим слоем, и наводит в нем переменный заряд. Поля, создаваемые наведенными зарядами, в свою очередь, воздействуют на электронный пучок и изменяют переменную составляющую тока пучка. После прохождения трубки поток попадает в выходное устройство.

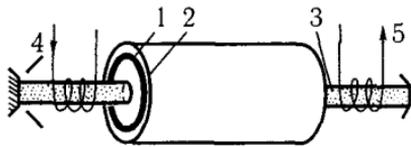


Рис. 10.1. Схема резистивного усилителя: 1 — резистивный слой; 2 — диэлектрическая трубка; 3 — электронный поток; 4 и 5 — входное и выходное устройства

Входное воздействие возбуждает в пучке две волны пространственного заряда, поля которых вызывают в резистивных стенках движущиеся заряды; это в свою очередь приводит к джоулевым потерям энергии волн. Но такие потери действуют по-разному на быструю и медленную волны. Быстрая волна затухает (волна с положительной энергией), а медленная нарастает; отдавая энергию среде, последняя увеличивает свою амплитуду. Эксперименталь-

ное доказательство нарастания медленной волны пространственного заряда в резистивном усилителе иллюстрирует рис. 10.2. Сказанное легко подтвердить простой теорией, в основе которой лежат линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial^2 j'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial j'}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2 j' = \frac{i\omega\rho_0}{4V_0} E, \quad (10.20)$$

$$E = -\frac{4\pi(j' + j_{ст})}{i\omega} = -\frac{4\pi j'}{i\omega} - \frac{4\pi\sigma E}{i\omega}, \quad (10.21)$$

где  $j_{ст}$  — плотность стороннего тока в поглощающем покрытии,  $\sigma$  — проводимость покрытия. Предполагая волновой характер процессов ( $j', E \sim \exp(i\omega t - ikx)$ ), из условия совместности уравнений (10.20) и (10.21) приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega_p^2/(\omega - kv_0)^2 + i \cdot 4\pi\sigma/\omega = 1. \quad (10.22)$$

Перепишем (10.22) в виде

$$(\omega - kv_0 - \omega_p)(\omega - kv_0 + \omega_p) = i(4\pi\sigma/\omega)(\omega - kv_0)^2. \quad (10.23)$$

Предположим далее, что  $\omega - kv_0 \approx -\omega_p$ . Это соответствует возбуждению медленной волны пространственного заряда. Тогда  $\omega - kv_0 - \omega_p \approx -2\omega_p$  и (10.23) становится таким:  $\omega - kv_0 \approx -\omega_p - i \cdot 2\pi\sigma\omega_p/\omega$ . Поэтому

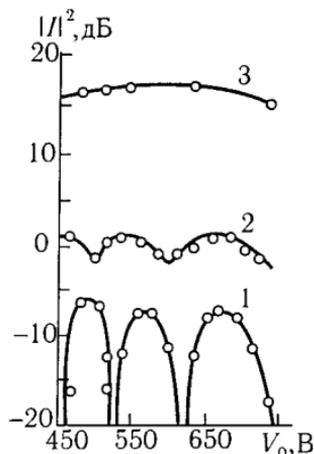
$$k \approx (\omega/v_0 + \omega_p/v_0) + i \cdot 2\pi\sigma\omega/(\omega_p v_0), \quad (10.24)$$

т. е.  $\text{Re} k$  равняется фазовой постоянной распространения медленной волны, а  $\text{Im} k = 2\pi\sigma\omega/(\omega_p v_0) > 0$ , и поэтому волна нарастает по мере распространения:

$$j', E \sim \exp[-i(\omega/v_0 + \omega_p/v_0)x + 2\pi\sigma\omega x/(\omega_p v_0)].$$

Аналогичные выкладки показывают, что быстрая волна пространственного заряда будет затухать (проделайте эти расчеты самостоятельно).

Рис. 10.2. Зависимость квадрата относительного сгруппированного тока от ускоряющего напряжения [10]: 1 — диэлектрическая среда заменена металлической поверхностью (возбуждены две волны пространственного заряда с постоянными амплитудами); 2 — пучок движется в резистивной среде, но ток пучка мал (возбуждены нарастающая и затухающая волны); 3 — ток большой (преобладает нарастающая медленная волна)



Для поперечных электромагнитных волн энергия может быть отрицательна, например, в среде из двухуровневых частиц. Действительно, в этом случае

$$\epsilon = 1 - \omega_0^2 N_{12} / (\omega^2 - \omega_{12}^2 + 2i\gamma\omega_{12}), \quad (10.25)$$

где  $\omega_{12}$  — частота перехода,  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N_{12} d / m$  ( $d$  характеризует связь частицы с полем,  $N$  — концентрация частиц),  $N_{12} = (n_1 - n_2) / n_2$  ( $n_1$  и  $n_2$  — заселенности нижнего и верхнего уровней) [11]. Энергия волны на частоте  $\omega$ , где  $\omega - \omega_{12} \gg \gamma$ , приближенно равна

$$\partial(\omega^2 \epsilon) / \partial \omega = 2\omega \left[ 1 + \omega_{12}^2 N_{12} \omega_0^2 / (\omega^2 - \omega_0^2) \right] \quad (10.26)$$

и может быть отрицательной, если среда инвертирована — верхний уровень заселен больше, чем нижний. Согласно (10.26) отрицательной будет энергия волн при  $\omega - \omega_{12} < \omega_0 \sqrt{n_2 - n_1} / 2$ . Ясно, что взаимодействие волн с отрицательной энергией и волн с положительной энергией должно сопровождаться неустойчивостью — обе волны будут расти по амплитуде.

### 10.3. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера

Линейные уравнения для связанных волн можно формально получить из уравнений для связанных колебаний (в случае двух связанных

волн — из уравнений (2.21)), если время заменить на координату, частоту — на постоянную распространения: аналогом энергии осциллятора будет мощность, распространяющаяся вдоль волноведущей среды. Ограничимся случаем слабой связи, когда феноменологический вывод уравнений связанных волн элементарен. В отсутствие связи

$$da_1/dx = -ik_1 a_1, \quad da_2/dx = -ik_2 a_2, \quad (10.27)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  нормированы так, что  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$  — потоки мощности, переносимые волнами,  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные распространения волн. Если теперь связать волны, но считать связь слабой ( $k_1$  и  $k_2$  остаются такими же, как и в отсутствие связи), то

$$da_1/dx = -ik_1 a_1 + c_{12} a_2, \quad da_2/dx = -ik_2 a_2 + c_{21} a_1, \quad (10.28)$$

где  $c_{12}$  и  $c_{21}$  — коэффициенты связи волн ( $c_{12}$  и  $c_{21}$  малы по сравнению с  $k_1$  и  $k_2$ ; полезно сравнить (10.28) с (2.21)). Предположим далее, что затуханием волн можно пренебречь, т. е. в отсутствие связи  $k_1$  и  $k_2$  — действительные величины,  $k_{1,2} = \omega/v_{1,2}$ ,  $v_{1,2}$  — фазовые скорости несвязанных волн. В случае слабой связи общая средняя мощность приближенно равна сумме мощностей в несвязанных системах:

$$P = 2\{\pm|a_1|^2 \pm |a_2|^2\} \approx \text{const}, \quad dP/dx = 0. \quad (10.29)$$

Знаки «+» и «-» соответствуют волнам с положительной и отрицательной энергией.

В том случае, когда одна из волн — волна пространственного заряда в электронном потоке, а другая — электромагнитная волна в замедляющей системе, (10.29) как раз и есть математическое выражение теоремы Чу в теории электронных СВЧ-приборов с длительным взаимодействием в так называемом двухволновом приближении [12, 13]. В частности, для дрейфующего электронного пучка теорема Чу о кинетической мощности имеет вид  $P = 2\{|a_6|^2 - |a_m|^2\} = \text{const}$ .

Поскольку  $|a|^2 = aa^*$ , из второй формулы в (10.29) следует, что

$$\frac{dP}{dx} = \pm \left( a_1 \frac{da_1^*}{dx} + a_1^* \frac{da_1}{dx} \right) \pm \left( a_2 \frac{da_2^*}{dx} + a_2^* \frac{da_2}{dx} \right). \quad (10.30)$$

Подставляя (10.28) и комплексно-сопряженные им уравнения в (10.30), находим

$$(\pm c_{12}^* \pm c_{21}) a_1 a_2^* + (\pm c_{12} \pm c_{21}^*) a_1^* a_2 = 0. \quad (10.31)$$

Соотношение (10.31) справедливо для любых  $a_1$  и  $a_2$ . Поэтому

$$c_{12} = \pm c_{12}^* \quad \text{при} \quad P = \pm |a_1|^2 - |a_2|^2. \quad (10.32)$$

$$c_{21} = \mp c_{12}^* \quad \text{при} \quad P = \pm |a_1|^2 + |a_2|^2. \quad (10.33)$$

Считая, что  $a_1, a_2 \sim \exp(i\omega t - ikx)$ , и принимая во внимание формулы (10.32) и (10.33), из условия совместности уравнения (10.28) получаем следующие дисперсионные уравнения:

для одинаково направленных потоков мощности (одинаковые знаки перед  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$  в первой из формул (10.29))

$$(k - \omega/v_1)(k - \omega/v_2) = |c_{12}|^2, \quad (10.34)$$

для противоположно направленных потоков мощности (разные знаки перед  $|a_1|^2$  и  $|a_2|^2$ )

$$(k - \omega/v_1)(k - \omega/v_2) = -|c_{12}|^2. \quad (10.35)$$

В системе без потерь возможны четыре варианта связи взаимодействующих волн (табл. 10.1, взятая из [23]). Дисперсионные характеристики несвязанных волн представлены штриховыми линиями, а сплошные линии соответствуют возможным вариантам связи.

Проиллюстрируем таблицу конкретными примерами из высокочастотной электроники, основываясь на теории взаимодействия прямолинейного электронного потока с бегущей электромагнитной волной (см. гл. 7). Обратимся к уравнению возбуждения волноведущей системы током электронного пучка:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\Phi} E = -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v_\Phi} \right)^2 KI \quad (10.36)$$

и к уравнению для тока, сгруппированного в пучке под действием поля волноведущей системы:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial I}{\partial x} - \left( \frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{\omega_q^2}{v_0^2} \right) I = i \frac{\omega}{v_0} \frac{I_0}{2V_0} E. \quad (10.37)$$

Если  $I(0) = 0$  и  $(\partial I / \partial x)_{x=0} = 0$ , то (10.37) можно переписать в виде

$$I(x) = \frac{I_0 k_e}{4V_0 k_q} \int_0^x E(\zeta) \exp[-i(k_e - k_q)(x - \zeta)] d\zeta - \frac{I_0 k_e}{4V_0 k_q} \int_0^x E(\zeta) \exp[-i(k_e + k_q)(x - \zeta)] d\zeta = I_M(x) + I_6(x), \quad (10.37)$$

где  $k_e = \omega/v_0$ ,  $k_q = \omega_q/v_0$ , индексы «м» и «б» соответствуют интегралам, связанным с возбуждением медленной и быстрой волн пространственного заряда. Тогда вместо (10.37) или (10.38) можно написать два уравнения первого порядка:

$$\partial I_M / \partial x + i(k_e + k_q)I_M = -[k_e I_0 / (4v_0 k_q)]E(x), \quad (10.39)$$

$$\partial I_6 / \partial x + i(k_e - k_q)I_6 = [k_e I_0 / (4v_0 k_q)]E(x). \quad (10.40)$$

Условия для резонансного взаимодействия

$$k_e + k_q = k_0 = \omega/v_\Phi \quad \text{или} \quad v_\Phi = v_0 / (1 + \omega_q/\omega) \quad (10.41)$$

соответствуют условиям синхронизма электромагнитной волны в замедляющей системе и быстрой волны пространственного заряда в пучке, а условия

$$k_e - k_q = k_0 = \omega/v_\Phi \quad \text{или} \quad v_\Phi = v_0 / (1 - \omega_q/\omega) \quad (10.42)$$

соответствуют условиям синхронизма волны в замедляющей системе и медленной волны пространственного заряда. При выполнении условий (10.41) или (10.42) в системе уравнений (10.36), (10.39) и (10.40) можно вместо трех уравнений оставить только два. В этом случае возможны следующие взаимодействия (см. табл. 10.1) и соответствующие им приборы.

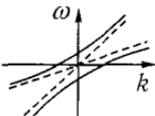
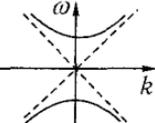
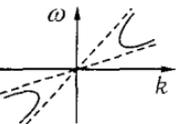
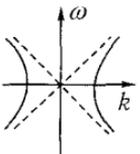
1. Взаимодействие быстрой волны пространственного заряда с прямой волной в волноведущей структуре (обе волны с положительной энергией); групповые скорости направлены в одну сторону; ЛБВ — подавитель; при определенных значениях постоянного тока пучка и ускоряющего напряжения для данной частоты имеет место полное подавление входного сигнала.

2. Взаимодействие быстрой волны пространственного заряда с обратной волной в волноведущей системе (обе волны с положительной энергией, но с противоположно направленными групповыми скоростями); ЛОВ — подавитель; полное подавление возможно лишь на бесконечной длине пространства взаимодействия.

3. Взаимодействие медленной волны пространственного заряда (волна с отрицательной энергией) с прямой волной в системе (волна с положительной энергией); групповые скорости направлены в одну сторону; ЛБВ — усилитель.

4. Взаимодействие медленной волны пространственного заряда с обратной волной в системе; групповые скорости противоположны; ЛОВ — генератор.

Таблица 10.1. Дисперсионные характеристики слабо связанных волн

$\omega - k$ -диаграмма	Свойства системы связанных волн	Примеры систем связанных волн
	$k$ — действительная величина для всех $\omega$ , и наоборот; неустойчивостей нет	Связь двух волн с положительной энергией или двух волн с отрицательной энергией
	$\omega$ — действительная величина для всех $k$ ; $k$ — комплексная величина для действительных значений $\omega$ ; волны, затухающие в пространстве; нет неустойчивостей	То же
	$k$ — комплексная величина для действительных значений $\omega$ , и наоборот; $k$ имеет значение, соответствующее усилению, для действительных $\omega$ ; конвективная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией; групповые скорости волн имеют одно направление
	$k$ — действительная величина для всех действительных $\omega$ ; $\omega$ — комплексная величина для действительных $k$ ; абсолютная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией; групповые скорости волн противоположны по направлению

Рассмотрим в качестве примера случай 1, которому соответствует система уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x} + ik_0 E = -\frac{1}{2}k_0^2 K I_6, \quad \frac{\partial I_6}{\partial x} + i(k_e - k_q) I_6 = \frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E$$

с дисперсионным уравнением

$$(k - k_0)(k - k_e + k_q) = (k_e C)^3 / (2k_q).$$

Из условия точного синхронизма волн ( $k_0 = k_e - k_q$ ) находим

$$k_{1,2} = k_0 \pm k_e C / [2(QC)^{1/4}], \quad \text{где } 2(QC)^{1/2} = k_q / (k_e C). \quad (10.43)$$

Начальные условия  $E(0) = E_{\text{вх}}$ ,  $I_6(0) = 0$  с учетом того, что  $I_6 \sim E/(k - k_e + k_q)$  (см. (10.41)) и  $E(x) = \sum_{m=1}^2 E_m(0)e^{-ik_m x}$  можно записать так:

$$E_1(0) + E_2(0) = E_{\text{вх}}, \quad E_1(0)/(k_1 - k_0) + E_2(0)/(k_2 - k_0) = 0. \quad (10.44)$$

Из (10.44) с учетом (10.43) получаем

$$E(x) = E_{\text{вх}} e^{-i(k_e - k_q)x} \cos \frac{k_e C x}{2(QC)^{1/4}},$$

т. е. имеет место периодический обмен энергией между взаимодействующими волнами, и условие полного подавления входного сигнала есть  $CN_{\text{под}} = (2n + 1)(QC)^{1/4}/2$ . Если ввести  $a_1 = E/(k_0 \sqrt{2K})$  и  $a_2 = I_6/\sqrt{2Y_n}$ , где  $Y_n = I_0 k_e / 2V_0 k_q$  — волновая проводимость пучка, то в (10.34)  $|c_{12}|^2 = k_e^2 C^2 / [4(QC)^{1/2}]$ , и поскольку  $\omega/v_1 = \omega/v_2 = k_0 = k_e - k_q$ , то уравнения (10.42) и (10.34) совпадают [13]. Заметим, что рассмотренные выше двухволновые взаимодействия соответствуют в СВЧ-электронике так называемому случаю больших пространственных зарядов ( $4QC \approx 1$ ), когда волна в линии передачи не может одновременно быть близка по скорости к обоим волнам пространственного заряда.

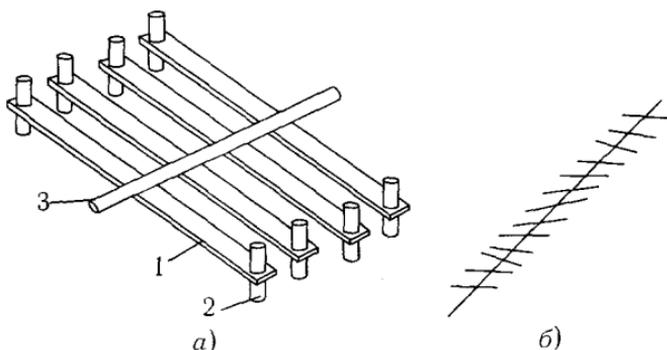


Рис. 10.3. Линия передачи, состоящая из набора тяжелых поперечных пластин 1 с небольшими стержневыми магнитами 2, прикрепленными к проволоке 3 [14] (а) и схема распространения крутильной волны вдоль линии передачи [4] (б)

Красивый эксперимент, демонстрирующий нарастающие колебания в двух связанных волновых системах, был поставлен К. Катлером [14], который сконструировал механический генератор с бегущей

волной. Передающая линия была сделана из набора поперечных тяжелых пластин, расположенных вдоль стальной проволоки (рис. 10.3). Когда одна из пластин повернута на небольшой угол, а потом отпущена, из-за скручивания проволоки вдоль линии распространяется медленная крутильная волна (ее скорость определяется сопротивлением проволоки к скручиванию и вращательной инерцией тяжелых поперечных пластин). Для того чтобы волновые системы могли двигаться друг относительно друга (их было две), каждая передающая линия была натянута на обод велосипедного колеса и замкнута в кольцо (колеса могли вращаться на общей оси независимо одно от другого). На концах поперечных пластин были укреплены маленькие цилиндрические магниты (рис. 10.3 а). Они намагничивались так, чтобы вызвать притяжение между поперечными пластинами линий. Взаимодействие волн в системе лучше всего видно, когда колеса вращаются в разные стороны. Сначала они вращаются независимо, но при определенном значении скорости небольшое случайное возмущение приводит к возникновению колебаний и их нарастанию. Сначала по ободу укладывается две волны; при замедлении вращения эти колебания исчезают, но одновременно возникают колебания, имеющие на длине окружности обода три волны; характер колебаний меняется непрерывно с частотой (рис. 10.4). В эксперименте Катлера взаимодействие прекращалось, когда по окружности колеса укладывалось семь волн.

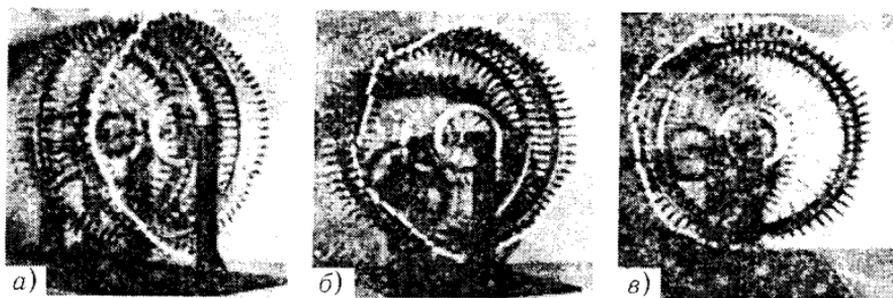


Рис. 10.4. Фотографии, демонстрирующие работу механического генератора бегущей волны [14]: скорости колес таковы, что на ободу укладывается четыре длины волн (а), пять длин волн (б) и шесть, семь длин волн (в)

До сих пор при рассмотрении примеров мы касались главным образом волн пространственного заряда и их резонансного взаимодействия с электромагнитными волнами в волноведущих структурах. Имеется и другой класс собственных волн в электронных потоках, движущихся

в продольном фокусирующем магнитном поле и скрещенных электро- и магнитостатических полях — циклотронные волны [12, 13]. Эти волны распространяются в электронном потоке в виде высокочастотных возмущений поперечной скорости потока с фазовыми скоростями

$$v_{\phi, м, б} = v_0 / (1 \pm \omega_c / \omega), \quad (10.45)$$

где  $\omega_c = (e/m)B$  — циклотронная частота ( $B$  — индукция магнитного поля),  $v_0$  — постоянная составляющая скорости продольного движения электронов, индексы «м» и «б» (знаки «+» и «-» в (10.45)) соответствуют медленной и быстрой циклотронным волнам электронного потока. Циклотронные волны поляризованы в плоскости, перпендикулярной направлению постоянного магнитного поля; быстрая циклотронная волна — волна с положительной энергией, медленная циклотронная волна — с отрицательной энергией [12, 13]. При синхронном взаимодействии волны в линии передачи с одной из циклотронных волн в пучке в СВЧ-приборах реализуется так называемый режим циклотронного резонанса [13].

Как мы видели на примере волн в линиях передачи и электронных потоках, энергообмен определяется свойствами взаимодействующих волн. Можно ли предугадать результат взаимодействия и выяснить характер энергообмена, скажем, не определяя знака энергии волн? Оказывается, что можно, если привлечь представления теории излучения при сверхсветовом движении в среде [15–17]<sup>1</sup>.

Если излучатель (заряженная частица, электрический диполь и т. п.) движется в среде с показателем преломления  $n$ , то вследствие эффекта Доплера в системе координат, связанной с неподвижной средой, излучение имеет частоту (см. [15, 16])

$$\omega(\vartheta) = \omega_0 / |1 - \beta n \cos \vartheta|, \quad (10.46)$$

где  $\omega_0$  — частота излучения в системе координат, в которой излучатель покоится:  $\beta = v_0/c$  ( $v_0$  — скорость излучателя,  $c$  — скорость света);  $\vartheta$  — угол между  $v_0$  и направлением наблюдения. При  $\beta n < 1$  эффект Доплера называют нормальным, а при  $\beta n > 1$  — аномальным [17] (эффект Доплера в преломляющей среде детально обсуждается в статье [24]). Особенно важным является то обстоятельство, что

<sup>1</sup>Применительно к режимам циклотронного резонанса в СВЧ-приборах со скрещенными полями эти вопросы обсуждены в [13, с. 486–489]. Более широкий круг вопросов этого плана рассмотрен в [5, с. 489–494; 22].

характер аномального эффекта Доплера не меняется и тогда, когда поле заключено в узких каналах или щелях в среде или сосредоточено вблизи границ [15–17]. Излучение, связанное с нормальным эффектом Доплера, приводит к затуханию поля, а с аномальным — к его усилению. В случае взаимодействия замедленной электромагнитной волны ( $v_\phi = c/n$ ) с прямолинейно движущимся со скоростью  $v_0$  потоком электронов-осцилляторов, которые колеблются с редуцированной плазменной частотой  $\omega_q$ , формула (10.46) принимает вид

$$\omega(\vartheta)|_{\vartheta=0} = \omega(0) = \omega = \omega_q / |1 - v_0/v_\phi|. \quad (10.47)$$

При  $\beta n < 1$  (нормальный эффект Доплера,  $v_0 < v_\phi$ ) из (10.47) имеем  $\omega = \omega_q / (1 - v_0/v_\phi)$  или  $v_\phi = v_0 / (1 - \omega_q/\omega)$ , что совпадает с условием (10.42) синхронизма волны в волноведущей системе с быстрой волной пространственного заряда. Имеет место затухание колебаний, что на языке электроники означает: электроны при выполнении условия синхронизма (10.42) группируются в ускоряющей фазе высокочастотного поля и забирают энергию у волны.

При  $\beta n > 1$  ( $v_0 > v_\phi$ ) имеем  $v_\phi = v_0 / (1 + \omega_q/\omega)$ , что совпадает с (10.41) и соответствует синхронизму волны в линии передачи с медленной волной пространственного заряда. В этом случае электроны группируются в тормозящей фазе поля (излучение, связанное с аномальным эффектом Доплера, раскачивает колебания), и при выполнении (10.41) можно ожидать усиления или генерирования колебаний. Таким образом, существует физическая аналогия между индуцированным нормальным эффектом Доплера и синхронным взаимодействием электромагнитной волны и «электронной» волны с положительной энергией (быстрая волна), а также между индуцированным аномальным эффектом Доплера к синхронным взаимодействием электромагнитной волны и волны с отрицательной энергией (медленная волна). Следует подчеркнуть, что применительно к СВЧ-приборам аналогия справедлива лишь в двухволновом приближении (условия (10.41) или (10.42) — приближение больших пространственных зарядов; условие (10.45) — режимы циклотронного резонанса), когда электромагнитная волна взаимодействует с электронами-осцилляторами собственная частота которых равна  $\omega_q$  или  $\omega_c$  (причем осцилляторные свойства проявляются при наличии высокочастотного поля). В синхронных режимах, типичных для электронных СВЧ-приборов с длительным взаимодействием, когда  $v_0 \approx v_\phi$ , «работают» обе «электронные» волны и имеет место так называемое индуцированное черенковское излучение.

---

---

## ГЛАВА 11

# Параметрические системы и параметрическая неустойчивость

### 11.1. Общие замечания

Параметрическими обычно называют системы, параметры которых изменяются во времени и (или) в пространстве.

Простейшая механическая параметрическая система — математический маятник с изменяющейся со временем длиной нити  $l = l(t)$  или с перемещающейся точкой подвеса. Электрический аналог такой системы — колебательный контур с изменяющейся со временем емкостью  $C = C(t)$ . Математический анализ этих параметрических систем приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых зависят от времени.

Очень часто встречаются в физике и технике задачи о распространении волн в средах с периодически изменяющимися параметрами. Они возникают при исследовании распространения волн в слоистых средах, движения электрона в поле ионной решетки кристалла, прохождения света через среду, в которой возбуждена звуковая волна и т. п. Параметры среды могут изменяться как во времени, так и в пространстве. Если они изменяются синхронно во времени во всех точках пространства или только в пространстве, то математический анализ сводится к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени или координаты.

Будем различать два класса задач, соответствующих двум классам параметрических систем.

**1. Резонансные параметрические системы.** К ним относятся системы, для которых характерное время изменения параметров того же порядка, что и характерное время изменения переменных в системе. Например, если частота гармонического осциллятора, описываемого уравнением  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , зависит от времени ( $\omega_0 = \omega_0(t)$ ) и время  $\tau_{\omega_0}$  изменения параметра  $\omega_0$  того же порядка, что и  $t_{\text{хар}} \approx 2\pi/\omega_0$ , то такой осциллятор относится к классу резонансных параметрических систем.

**2. Нерезонансные параметрические системы.** Им соответствует случай, когда параметры изменяются очень быстро или очень медленно по сравнению с характерным временем изменения переменных:  $\tau_{\omega_0} \ll t_{\text{хар}}$  либо  $\tau_{\omega_0} \gg t_{\text{хар}}$  (к этому классу мы относим и системы, в которых параметр изменяется периодически и даже выполнены формальные условия резонанса  $n\omega_{\text{пар}} = m\omega_{\text{соб}}$ , но числа  $n$  или  $m$  большие; случаю же, который мы называем резонансным, соответствуют небольшие значения целых чисел  $n, m$ ). Примером может служить движение электрона в атоме при наложении внешнего высокочастотного поля.

В этой главе обсуждаются явления в резонансных параметрических системах и системах с быстро изменяющимися параметрами. Эффектам, связанным с медленным изменением параметров, посвящена следующая глава.

## 11.2. Параметрический резонанс. Теорема Флоке (Блоха). Уравнение Матье

Классический пример параметрического резонанса — раскачивание качелей. Каждый знает, что легче всего раскачать качели, если присесть в момент максимального их подъема и таким образом, смещая их центр масс два раза за период, увеличивать эффективную длину подвеса. В качестве модели качелей естественно использовать математический маятник, длина которого изменяется по закону  $l = l_0[1 + \mu(a/l_0) \cos \omega_p t]$  (рис. 11.1а), уравнение движения имеет вид  $\ddot{x} + (g/l_0)[1 + \mu(a/l_0) \cos \omega_p t]^{-1}x = 0$ . Если  $\mu a \ll l_0$ , то, обозначая  $g/l_0$  через  $\omega_0^2$ , получаем известное уравнение Матье (см. [1, 2]):

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 - \mu(a/l_0) \cos \omega_p t]x = 0. \quad (11.1)$$

Электрический аналог такого маятника, как уже говорилось, — колебательный контур с изменяющейся емкостью  $C(t) = C_0[1 + \mu \frac{C_1}{C_0} \cos \omega_p t]$  (рис. 11.1б) или  $C(x) = C_0[1 - \mu(C_1/C_0) \cos q_1 x]$  (рис. 11.1в). Емкость можно изменять механически, скажем, с помощью мотора, сдвигая и раздвигая пластины конденсатора. Чтобы амплитуда колебаний при этом нарастала, нужно вводить в контур энергию, совершая работу против сил электростатического поля конденсатора. Это означает, что раздвигать пластины нужно, когда заряд на конденсаторе максимален, а сдвигать — когда заряд на конденсаторе обращается в нуль. Соответствующее уравнение колебаний имеет вид  $L\ddot{q} + [1/C(t)]q = 0$ ,

где  $C(t) = S\varepsilon/[4\pi d(t)]$  ( $S$  — площадь пластин конденсатора,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего конденсатор,  $d(t)$  — переменное во времени расстояние между пластинами). Если  $d(t) = d_0[1 + \mu(\delta/d_0) \cos \omega_p t]$ , то уравнение для колебаний заряда принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \left(1 + \mu \frac{\delta}{d_0} \cos \omega_p t\right) q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}, \quad C_0 = \frac{S\varepsilon}{4\pi d_0}. \quad (11.2)$$

К тому же уравнению с точностью до замены  $t$  на  $x$  приводит анализ распространения волн в среде с параметрами, периодически зависящими от координаты. Одна из возможных реализации такой среды изображена на рис. 11.1в мы выбрали длинную линию с периодически изменяющейся вдоль ее длины емкостью. Подобная «среда» описывается телеграфными уравнениями  $\partial I/\partial x = -C(x) \partial U/\partial t$ ,  $\partial U/\partial x = -L_0 \partial I/\partial t$ , которые приводят к волновому уравнению  $\partial^2 U/\partial x^2 - L_0 C(x) \partial^2 U/\partial t^2 = 0$ .

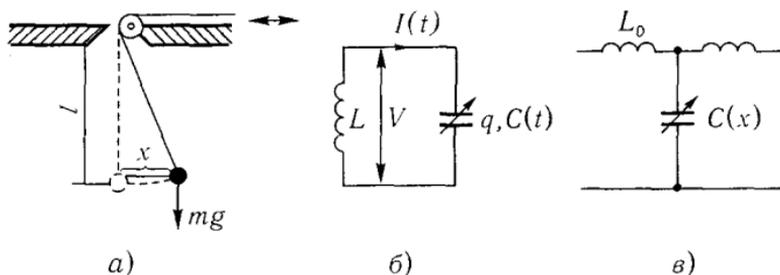


Рис. 11.1. Примеры простейших параметрических систем: а — маятник с изменяющейся во времени длиной; б — колебательный контур с изменяющейся во времени емкостью; в — длинная линия, емкость которой периодически изменяется с координатой

Будем искать решение волнового уравнения в виде  $U(x, t) = V(x) \exp(i\omega t)$ , и пусть, кроме того,  $C(x) = C_0[1 - \mu(C_1/C_0) \cos q_1 x]$ ,  $v_0^2 = 1/(L_0 C_0)$ . Тогда для  $V(x)$  получается уравнение

$$d^2 V(x)/dx^2 + (\omega/v_0)^2 [1 - \mu(C_1/C_0) \cos q_1 x] V(x) = 0. \quad (11.3)$$

Ограничившись рассмотрением параметрических систем с одной степенью свободы, описываемых уравнением общего вида — уравнением Хилла

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (11.4)$$

где  $\omega^2(t)$  — периодическая функция времени, попытаемся ответить на следующие вопросы.

Возможна ли неустойчивость в параметрических системах? Если возможна, то при каких условиях она возникает? Каковы границы областей неустойчивости?

Приведем простейшие сведения из теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и, в частности, теорему Флоке, которая определяет структуру решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В общем случае теорема формулируется так: система с  $n$  степенями свободы, описываемая дифференциальным уравнением порядка  $2n$  с периодическими коэффициентами периода  $T$ , имеет  $2n$  линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему, причем каждое из этих решений имеет вид  $x_i(t) = \Phi_i(t) \exp(\lambda_i t)$ , где  $\Phi_i(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ . Экспоненты  $\exp(\lambda_i t)$  называют ляпуновскими экспонентами, числа  $\lambda_i$  — ляпуновскими характеристическими показателями, а  $\Phi_i(t)$  — функциями Флоке.

Поясним теорему Флоке для системы второго порядка, т. е. для уравнения (11.4).

Выберем произвольно два частных, линейно независимых решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  уравнения (11.4). В силу периодичности коэффициента в уравнении (11.4)  $\omega^2(t+T) = \omega^2(t)$ , а функции  $x_1(t+T)$  и  $x_2(t+T)$  тоже будут решениями уравнения (11.4). Как и всякое решение, они могут быть выражены через фундаментальную систему следующим образом:

$$x_1(t+T) = \alpha_1 x_1(t) + \beta_1 x_2(t), \quad x_2(t+T) = \alpha_2 x_1(t) + \beta_2 x_2(t).$$

Решения  $x_1$  и  $x_2$  всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие  $\beta_1 = \alpha_2 = 0$  (предлагаем читателям доказать это положение самостоятельно). Это значит, что

$$x_1(t+T) = s_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = s_2 x_2(t), \quad (11.5)$$

т. е. решение воспроизводит себя через период с точностью до постоянного множителя  $s_1(s_2)$ . Очевидно, что  $\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0$  и  $\ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$ . Умножая первое из этих тождеств на  $x_2$ , а второе на  $x_1$  и вычитая полученные соотношения друг из друга, получаем

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = 0,$$

т. е.  $\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = \text{const}$ . Следовательно,

$$\dot{x}_1(t)x_2(t) - \dot{x}_2(t)x_1(t) = \dot{x}_1(t+T)x_2(t+T) - \dot{x}_2(t+T)x_1(t+T),$$

что с учетом (11.5) дает уравнение связи между  $s_1$  и  $s_2$  в виде

$$s_1 s_2 = 1. \quad (11.6)$$

Введем новые постоянные  $\lambda_i$  (они, вообще говоря, комплексны) посредством соотношения  $s_i = \exp(\lambda_i T)$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда из (11.6) следует, что  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$ . Введем также новую функцию  $\Phi_i(t) = x_i(t) \exp(-\lambda_i t)$ . Легко убедиться, что если выполняются условия (11.5), то функция  $\Phi_i(t)$  периодическая с периодом  $T$ . Следовательно, решения  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  имеют вид

$$x_1(t) = \Phi_1(t) \exp(\lambda_1 t), \quad x_2(t) = \Phi_2(t) \exp(\lambda_2 t),$$

а общее решение (11.4) можно записать как

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \Phi_1(t) + c_2 e^{-\lambda t} \Phi_2(t). \quad (11.7)$$

Если  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ , то одно из слагаемых правой части в (11.7) будет расти со временем и  $x(t)$  будет нарастать — в системе возможна неустойчивость.

Явление, заключающееся в нарастании колебаний в параметрических системах, называют параметрическим резонансом [2]. Для ответа на вопрос о том, при каких условиях возникает параметрический резонанс, конкретизируем вид функции  $\omega^2(t)$  в уравнении (11.4).

Пусть  $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 - \mu b \cos \omega_p t)$ , что превращает уравнение (11.4) в уравнение Матье:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu b \cos \omega_p t)x = 0. \quad (11.8)$$

К уравнению Матье, как мы видели, приводят и одномерные задачи распространения волн. Применительно к задачам распространения волн в трехмерных периодических структурах существует обобщение теоремы Флоке (на трехмерный случай); оно носит название теоремы Блоха [1, 3].

При произвольных  $\mu$  решение уравнения (11.8) выражается через специальные функции — функции Матье, которые протабулированы и свойства которых хорошо известны. Попытаемся здесь решить задачу в простых функциях, считая, что  $\mu b \ll 1$ . При  $\mu = 0$  решение уравнения (11.8) известно. Есть надежда, что и при значении  $\mu$ , не равном нулю, по малом, решение будет мало отличаться от известного. а поправки можно будет вычислить рекуррентным способом, т. е. каждое последующее приближение будет определяться предыдущим. Итак.

воспользуемся для решения уравнения (11.8) теорией возмущения [21], в основе которой лежит значение решения при  $\mu = 0$ :  $x(t) = x_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . При  $0 < \mu \ll 1$  решение уравнения (11.8) будем искать в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu W^{(1)}(t) + \mu^2 W^{(2)}(t) + \dots + \mu^n W^{(n)}(t). \quad (11.9)$$

Решение в виде (11.9) имеет смысл лишь в случае, когда поправки  $W^{(i)}$  к нулевому приближению  $x_0(t)$  не нарастают со временем. Подставим (11.9) в (11.8) и сгруппируем члены при одинаковых степенях  $\mu$ , что дает нам для  $W^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x + \mu[\ddot{W}^{(1)}(t) + \omega_0^2 W^{(1)}(t) - x_0 \omega_0^2 b \cos \omega_p t] + \\ + \mu^2[\ddot{W}^{(2)}(t) + \omega_0^2 W^{(2)}(t) - W^{(1)}(t) \omega_0^2 b \cos \omega_p t] + \dots \\ \dots + \mu^n[\ddot{W}^{(n)}(t) + \omega_0^2 W^{(n)}(t) - W^{(n-1)}(t) \omega_0^2 b \cos \omega_p t] \equiv 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Все слагаемые в (11.10) имеют разный порядок величины и скомпенсировать друг друга не могут, поэтому для выполнения тождества каждая из скобок должна равняться нулю. Таким образом, мы получили рекуррентную систему уравнений для нахождения  $i$ -го приближения. Как видно из (11.10), каждое из уравнений представляет собой уравнение гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила в виде набора гармоник. Например, для поправки первого приближения

$$\ddot{W}^{(1)}(t) + \omega_0^2 W^{(1)}(t) = \omega_0^2 A b \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos \omega_p t$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{W}^{(1)}(t) + \omega_0^2 W^{(1)}(t) = \\ = (\omega_0^2 A b / 2) \{ \cos[(\omega_0 - \omega_p)t + \varphi] + \cos[(\omega_0 + \omega_p)t + \varphi] \}. \end{aligned}$$

Вынуждающая сила в правой части этого выражения содержит всего две гармонические составляющие — на частотах  $\omega_0 - \omega_p$  и  $\omega_0 + \omega_p$ . Чтобы поправка  $W^{(1)}$  не нарастала во времени, необходимо, чтобы эти гармоники были нерезонансными с колебаниями на частоте  $\omega_0$ , т. е. необходимо выполнение неравенств  $\omega_0 - \omega_p \neq \omega_0$  и  $\omega_p \neq 2\omega_0$ . Но ведь нас интересует именно случай резонанса (вспомните качели!). При резонансе же  $W^{(1)}$  растет линейно во времени, и поэтому решение вида  $x(t) = x_0(t) + \mu W^{(1)}(t)$  имеет смысл лишь на временах порядка нескольких

периодов. Как исправить решение, чтобы им можно было пользоваться и при резонансе?

Обратим внимание на следующее обстоятельство: нарастающими оказываются именно те слагаемые в поправке  $W^{(1)}(t)$ , которые имеют вид главной части решения  $x_0(t) \sim A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Действительно, в резонансном случае  $\omega_{\text{вын}} \approx \omega_0$  и  $W^{(1)}(t) \sim t \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Но в решении  $x(t)$  при  $W^{(1)}(t)$  стоит малый параметр  $\mu$ , т. е., несмотря на секулярный рост  $W^{(1)}$ , локально во времени  $x(t)$  по-прежнему имеет вид синусоиды с частотой  $\omega_0$ , но на больших временах амплитуда и фаза этого решения могут сколь угодно отличаться от их начальных значений. Это подсказывает нам выход из положения, если амплитуду и фазу главной части решения считать уже не постоянными величинами, а медленно изменяющимися функциями времени, т. е.  $A = A(\mu t)$ ,  $\varphi = \varphi(\mu t)$ , такими, что их изменение учитывают резонансные слагаемые в  $W^{(1)}(t)$  (т. е. секулярная часть  $W_c^{(1)}(t)$  суммируется на каждом периоде с  $x_0(t)$ , то поправка будет иметь порядок с  $\mu$  и на очень больших временах, поскольку в разности  $W^{(1)} - W_c^{(1)}$  резонансных составляющих уже нет [20].

В подобном суммировании резонансных составляющих в разных порядках теории возмущений с главной частью решения заключается основная идея большинства методов малого параметра, в том числе и для нелинейных систем.

Вернемся теперь к нашей задаче и рассмотрим резонансный случай  $\omega_p = 2\omega_0 + \mu\delta$ , где  $\mu\delta = \delta'$  — малая расстройка. Решение уравнения (11.8), которое с учетом выражения для  $\omega_p$  имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu \omega_0^2 b \cos[(2\omega_0 + \delta')t]x, \quad (11.11)$$

будет таким:

$$x(t) = A(\mu t) \cos[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \\ + B(\mu t) \sin[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \mu W^{(1)}, \quad (11.12)$$

где  $A(\mu t)$  и  $B(\mu t)$  — медленно изменяющиеся по сравнению с  $\cos[\dots]$  и  $\sin[\dots]$  функции времени. В (11.12) не учтены слагаемые с частотами, отличающимися от  $\omega_0 + \delta'/2$  на  $n(2\omega_0 + \delta')$ , где  $n$  — целое число, поскольку они имеют более высокий порядок малости по  $\mu$ , чем нужно для первого приближения. Вновь введенные функции  $A(\mu t)$  и  $B(\mu t)$  определим как раз из условия ненаращения добавки  $W^{(1)}$ . Подставляя (11.12)

в уравнение (11.11) и приравнивая коэффициенты при  $\mu$  в первой степени (считаем  $\dot{A} \sim \mu A$  и  $\dot{B} \sim \mu B$ , получаем для  $W^{(1)}$  уравнение

$$\ddot{W}^{(1)} + \omega_0^2 W^{(1)} = \omega_0 [2\dot{A} + \delta' B - (\mu b \omega_0 / 2) B] \sin[(\omega_0 + \delta' / 2)t] + \\ + \omega_0 [-2\dot{B} + \delta' A + (\mu b \omega_0 / 2) A] \cos[(\omega_0 + \delta' / 2)t].$$

Пользуясь теперь свободой в выборе  $A(\mu t)$  и  $B(\mu t)$ , потребуем, чтобы в правой части этого уравнения резонансные слагаемые отсутствовали, т. е.  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$  определим равенствами

$$\dot{A} = -(\mu/2)(\delta - \omega_0 b/2)B, \quad \dot{B} = -(\mu/2)(\delta + \omega_0 b/2)A.$$

Это и есть искомые уравнения для медленно изменяющихся амплитуд.

Решение такой линейной системы уравнений, как и обычно, ищем в виде  $A, B \sim \exp(\lambda t)$ . Из условия нетривиальности решения получаем характеристическое уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\lambda^2 = -(\mu^2/4)(\delta^2 - \omega_0^2 b^2/4). \quad (11.13)$$

При достаточно малой расстройке ( $-\omega_0 b/2 < \delta < \omega_0 b/2$ ) амплитуды  $A$  и  $B$  будут нарастать — в системе реализуется параметрическая неустойчивость. Приведенные неравенства определяют зону основного резонанса, границы которой изображены на рис. 11.2.

Если в системе есть потери порядка  $\mu\nu$ , то основная зона неустойчивости будет определяться неравенствами

$$-\sqrt{\omega_0^2 b^2/4 - 4\nu^2} < \delta < \sqrt{\omega_0^2 b^2/4 - 4\nu^2},$$

где  $\nu$  — декремент затухания. Откуда следует, что при наличии диссипации даже при точном резонансе ( $\delta = 0$ ) для возникновения неустойчивости необходима конечная глубина модуляции параметра, пороговое значение которой  $b = 4\nu/\omega_0$  (рис. 11.3а).

Нетрудно определить границы основной зоны неустойчивости и с более высокой точностью — до величин порядка  $\mu$ . Главную часть решения (11.1) в этом случае естественно искать в виде

$$x(t) = A \cos[(\omega_0 + \delta'/2)t] + B \sin[(\omega_0 + \delta'/2)t] + \\ + \mu A_1 \cos[3(\omega_0 + \delta'/2)t] + \mu B_1 \sin[3(\omega_0 + \delta'/2)t].$$

Поскольку на границе зоны неустойчивости  $\dot{A} = \dot{B} = \dot{A}_1 = \dot{B}_1 = 0$ , после подстановки  $x(t)$  в таком виде в (11.1) с точностью до слагаемых порядка  $\mu$  находим границы области неустойчивости:

$$\delta = \pm \omega_0 b/2 - \mu \omega_0 b^2/32.$$

Предоставляем читателю самому вывести (11.13), обращаясь при затруднениях к [4, задача 1, с. 107].

Нетрудно сообразить, что параметрический резонанс должен иметь место при любом  $\omega_p \approx 2\omega_0/n$ , где  $n$  — целое число; в том числе и при  $n = 2$ . Качественно это ясно: чтобы раскачать качели, можно толкать их и один раз за период, но для получения прежнего результата толкать надо сильнее.

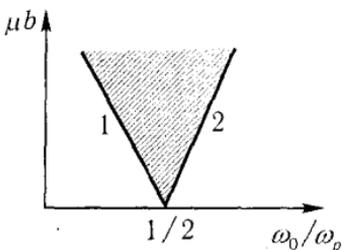


Рис. 11.2. Границы зоны параметрической неустойчивости, соответствующей основному резонансу (заштрихована): 1 —  $\mu b/4 = 1 - 2\omega_0/\omega_p$ , 2 —  $\mu b/4 = 2\omega/\omega_0 - 1$ . При построении использовано соотношение  $\omega_0/\omega_p = \omega_0/(2\omega_0 + \delta) \approx 1/2 - \delta/(4\omega_0)$  при  $\delta \sim \mu$ .

Поясним, как найти решение уравнения (11.11) в случае, когда  $\omega_p = \omega_0 + \mu\delta$ , т. е. во второй зоне параметрического резонанса. Решение представим в виде

$$x(t) = A(\mu t) \cos[(\omega_0 + \delta')t] + B(\mu t) \sin[(\omega_0 + \delta')t] + \mu W^{(1)}(t) + \mu^2 W^{(2)}(t).$$

Чтобы была возможность изымать резонансные слагаемые из правых частей уравнений разных приближений (т. е. из уравнения для  $W^{(1)}$  и из уравнения для  $W^{(2)}$ ), производные  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$  разобьем на два слагаемых:

$$\dot{A} = \mu F_1(A, B) + \mu^2 F_2(A, B), \quad \dot{B} = \mu \varphi_1(A, B) + \mu^2 \varphi_2(A, B),$$

где  $F_1$  и  $\varphi_1$  определим из условия ненаращения  $W^{(1)}(t)$ , а  $F_2$  и  $\varphi_2$  — из условия ненаращения  $W^{(2)}(t)$  [20]. Повторяя операции, сделанные выше (с точностью до замены  $A$  и  $B$  на  $F_1$  и  $\varphi_1$ ), нетрудно убедиться, что в первом приближении по  $\mu$  параметрической неустойчивости нет. Вычисляя далее вынужденное решение  $W^{(1)}$  на частоте  $2\omega_0$  и подставляя его вместе с  $F_2$  и  $\varphi_2$  в правую часть уравнения для  $W^{(2)}$ , которое получается из (11.10), имеем

$$\ddot{W}^{(2)} + \omega_0^2 W^{(2)} = (2\omega_0 F_2 + \delta^2 B) \sin \omega_p t + (-2\omega_0 \varphi_2 + \delta^2 A) \cos \omega_p t + W^{(1)}(2\omega_p t) \omega_0^2 b \cos \omega_p t. \quad (11.14)$$

Здесь  $W^{(1)}(2\omega_p t)$  — вынужденное решение уравнения для  $W^{(1)}$  на частоте второй гармоники. Вычислив эту величину и определив (из условия отсутствия в правой части (11.14) слагаемых с частотой  $\omega_0$ )  $F_2$  и  $\varphi_2$ , получим искомые уравнения для  $A(t)$  и  $B(t)$ . Предоставляем читателю проделать этот путь самостоятельно. Ниже приведены только уравнения границ второй зоны неустойчивости в частном случае  $\dot{A} = \dot{B} = 0$ :

$$-5\mu b^2 \omega_0 / 24 < \delta < \mu b^2 \omega_0 / 24$$

[4, задача 2, с. 108]. Видно, что спектральная ширина второй зоны параметрической неустойчивости на порядок уже первой ( $\delta \sim \mu$ ). С ростом  $n$  зоны параметрических резонансов сужаются как  $\mu^n$  (рис. 11.3б). Соответственно уменьшаются и инкременты неустойчивостей в этих зонах.

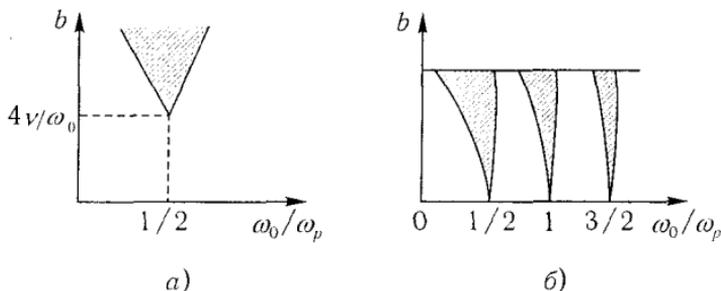


Рис. 11.3. Поведение областей неустойчивости, описываемое асимптотическими решениями уравнения Матье: а — появление порога возбуждения параметрических колебаний, возникших в результате затухания; б — сужение областей неустойчивости с ростом номера зоны

При большой глубине модуляции параметра правая часть уравнения  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = x \omega_0^2 b \cos \omega_p t$ ; уже не является малой и асимптотический метод решения неприменим. В этом случае приходится пользоваться таблицами или решать уравнение Матье численно.

В этом разделе мы обобщим теорию связанных колебаний, кратко изложенную в гл. 2, на случай, когда параметр связи изменяется во времени (параметрическая связь). Подобно тому как два разночастотных колебания смешиваются на нелинейном элементе, смешение частот происходит и при изменении какого-либо параметра системы во времени.

Проведем это обобщение [5] на примере параметрической колебательной системы с постоянной емкостью, включенной параллельно

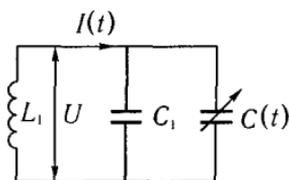


Рис. 11.4. Схема вырожденной двухчастотной системы

емкости  $C(t)$ . Такая система называется вырожденной двухчастотной; она изображена на рис. 11.4. Заряд на параллельно включенных конденсаторах  $C_1$  и  $C(t)$  определяется соотношением  $q = [C_1 + C(t)]V$ . Поэтому уравнение для тока, протекающего через катушку индуктивности, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \{ [C_1 + C(t)]V \} = I, \quad (11.15)$$

а для напряжения на катушке индуктивности имеет место уравнение  $dI/dt = V/L_1$ . Считаем, что

$$C(t) = C_0 + C_p(t) = C_0 [1 + (\Delta C/C_0) \cos(2\omega_1 + \varphi)], \quad (11.16)$$

$\omega_1 = [L_1(C_1 + C_0)]^{-1/2}$ ,  $2\omega_1 = \omega_p$  — частота накачки,  $\varphi$  — фаза накачки, определяющая сдвиг фазы накачки относительно фазы изменения заряда на конденсаторе. Перепишем (11.15) в виде

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C_{11}} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{C_p(t)}{C_{11}} V \right], \quad (11.17)$$

где  $C_{11} = C_0 + C_1$ . Умножим (11.17) на  $\pm i\omega_1 C_{11}$  и сложим получившееся уравнение с (11.15). Тогда получим

$$\frac{d}{dt} (I \pm i\omega_1 C_{11} V) = -i\omega_1 \left( \mp I + \frac{V}{i\omega_1 L_1} \right) \mp \frac{d}{dt} [i\omega_1 C_p(t) V]. \quad (11.18)$$

Кажется естественным, не обращая внимания на то, что  $C_p$  есть функция времени, ввести в (11.18) нормальные колебания, как это сделано в гл. 2. Амплитуды таких колебаний, как видно из структуры уравнения (11.18), удобно определить соотношениями

$$a = (\sqrt{L_1}/2)(I + i\omega_1 C_{11} V), \quad a^* = (\sqrt{L_1}/2)(I - i\omega_1 C_{11} V); \quad (11.19)$$

при этом очевидно, что  $a - a^* = i\omega_1 C_{11} \sqrt{L_1} V$ . Кроме того, определим  $\omega_1$ :  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ . Преобразуем, используя определение  $\omega_1$ , первое слагаемое в правой части уравнения (11.18) к виду  $i\omega [\mp I - i\omega_1 C_{11} V]$ . С учетом этого и (11.19) уравнения (11.18) можно записать следующим

образом:

$$\frac{da}{dt} = i\omega_1 a - \frac{d}{dt} \left[ \frac{C_p(t)}{2C_{11}} (a - a^*) \right], \quad (11.21)$$

$$\frac{da^*}{dt} = -i\omega_1 a^* + \frac{d}{dt} \left[ \frac{C_p(t)}{2C_{11}} (a - a^*) \right]. \quad (11.22)$$

Легко видеть, что при  $\Delta C \rightarrow 0$  ( $C_p \rightarrow 0$ ) уравнения (11.20) и (11.21) соответствуют уравнениям нормальных колебаний осциллятора, которые, как мы уже отмечали, можно представить двумя противоположно вращающимися векторами. Когда  $\Delta C \neq 0$ , колебания становятся параметрически связанными (накачка связывает нормальные колебания). Как и в гл. 2, остановимся на случае слабой связи, положив  $\Delta C/(2C_{11}) \ll 1$ . При таком условии колебания можно считать близкими к нормальным; кроме того, можно положить  $a(t) = A(t) \exp(i\omega_1 t)$ , где  $A(t)$  — медленно изменяющаяся по сравнению с  $\exp(i\omega_1 t)$  функция, т. е.  $\frac{dA}{dt} \ll i\omega_1 A$ . На каких частотах появятся составляющие в правых частях уравнений (11.20) и (11.21) из-за того, что

$$C_p(t) = (\Delta C/2) \{ \exp[i(2\omega_1 t + \varphi)] + \exp[-i(2\omega_1 t + \varphi)] \}?$$

Посмотрим это на примере; очевидно, что в правой части (11.20) появятся слагаемые

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta C}{2C_{11}} \{ A(t) \exp[i(3\omega_1 t + \varphi)] - A^*(t) \exp[i(\omega_1 t + \varphi)] + \\ & + A(t) \exp[-i(\omega_1 t + \varphi)] - A^*(t) \exp[-i(3\omega_1 t + \varphi)] \}. \end{aligned}$$

Допуская, что добротность контура велика, можно пренебречь составляющими ( $\pm 3\omega_1$ ); кроме того, можно отбросить и слагаемое  $A(t) \exp[-i(\omega_1 t + \varphi)]$  (подумайте сами, почему). Аналогичные слагаемые можно не учитывать и в правой части уравнения (11.21). В результате получаем

$$\begin{aligned} da/at &= i\omega_1 a + c_{12} \exp(2i\omega_1 t) a^*, \\ da^*/dt &= -i\omega_1 a^* + c_{21} \exp(-2i\omega_1 t) a, \end{aligned} \quad (11.22)$$

где  $c_{12} = c_{21}^* = i\omega_1 (\Delta C/4C_{11}) \exp(i\varphi)$ .

При выводе уравнения (11.22) учтено, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{A^*(t) \exp[i(\omega_1 t + \varphi)]\} &= \\ &= \frac{dA^*}{dt} \exp[i(\omega_1 t + \varphi)] + i\omega_1 A^*(t) \exp[i(\omega_1 t + \varphi)] \approx \\ &\approx i\omega_1 A^*(t) \exp[i(\omega_1 t + \varphi)] = i\omega_1 \exp(2i\omega_1 t) a^*, \end{aligned}$$

поскольку  $dA^*/dt \ll i\omega_1 A^*$  (аналогично  $\frac{d}{dt}(e^{-2i\omega_1 t} a) \approx -i\omega_1 e^{-2i\omega_1 t} a$ ).

Перейдем в уравнениях (11.22) к переменной  $A(t)$ . Легко видеть, что  $da/dt = (dA/dt + i\omega_1 A) \exp(i\omega_1 t)$ ; поэтому  $dA/dt = c_{12}A^*$ ,  $dA/dt = c_{21}A$ , и мы получим ценой допущения  $\Delta C \ll C_{11}$  и пренебрежения гармониками систему уравнений с постоянными коэффициентами. Если  $A(t) \sim \exp(\lambda t)$ , то

$$\lambda^2 = \omega_1^2 (\Delta C / 4C_{11})^2 \quad \text{или} \quad \lambda = \pm \omega_1 (\Delta C / 4C_{11}). \quad (11.23)$$

Из (11.23) следует, что существуют нарастающие и затухающие колебания. Легко видеть, что выражение (11.23) совпадает с полученным выше для первого приближения при решении задачи методом возмущения, если в последнем положить  $\delta = 0$ .

Если задать начальные значения  $a(0)$  и  $a^*(0)$ , то легко найти полное решение задачи, что сделано в [5]. Главная особенность найденного решения — сильная зависимость от сдвига фазы накачки  $\varphi$  относительно фазы изменения заряда на конденсаторе. Пусть, например, в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются условия  $V(0) = V_{\max}$ ,  $I(0) = 0$ . В этом случае  $C_p(0) = \Delta C \cos \varphi$  ( $\varphi$  — сдвиг фазы накачки относительно начального напряжения на конденсаторе), причем если  $\varphi = \pi/2$ , то  $C_p(t) = -\Delta C \sin(2\omega_1 t)$ , и, как показано в [5],

$$\begin{aligned} a(t) &= (i/2) \sqrt{C_{11}} V_{\max} \exp[i\omega_1 t + \omega_1 (\Delta C / 4C_{11}) t], \\ a^*(t) &= -(i/2) \sqrt{C_{11}} V_{\max} \exp[-i\omega_1 t + \omega_1 (\Delta C / 4C_{11}) t], \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\varphi = \pi/2$  имеет место параметрическая неустойчивость — решение экспоненциально нарастает по времени. В то же время при  $\varphi = -\pi/2$  решение экспоненциально затухает. Найдите сами, как нужно выбрать сдвиг фазы накачки относительно фазы напряжения при произвольных начальных условиях для получения нарастающего решения (заметим, что удобно искать величину  $\varphi - 2\vartheta$ , где  $\vartheta = \arctg[\sqrt{C_{11}} V(0) / \sqrt{L_1} I(0)]$  — фаза колебания  $a$ ).

Мощность, связанная с колебаниями  $a$  и  $a^*$ , и мощность накачки удовлетворяют соотношениям Мэнли–Роу (закон сохранения энергии для колебательной системы вместе с источником накачки):

$$\frac{P_n}{2\omega_1} = \frac{P_{\omega_1}}{\omega_1} = \frac{P_{-\omega_1}}{\omega_1}, \quad P_{\omega_1}(t) = \frac{d}{dt}|a(t)|^2, \quad P_{-\omega_1}(t) = \frac{d}{dt}|a^*(t)|^2.$$

Это соотношение легко интерпретировать: мощность от источника накачки распределяется между нормальными колебаниями  $a$  и  $a^*$  поровну (нельзя запасти мощность в одном колебании). Разумеется все сказанное справедливо лишь при частоте накачки  $\omega_n = 2\omega_1$ .

Для модели нелинейной емкости, которая связана с эквивалентной внешней цепью, содержащей генераторы с частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2, \dots, m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m$  и  $n$  — целые числа,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — несоизмеримые частоты), активные проводимости и идеальные фильтры (фильтры имеют нулевое сопротивление на частоте генератора и бесконечное — на всех других), соотношения Мэнли–Роу [6] имеют вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{mP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nP_{m,n}}{m\omega_1 + n\omega_2} = 0,$$

где  $P_{m,n} = P_{-m,-n}$  — средняя мощность, поступающая в нелинейную емкость на частотах  $\pm|m\omega_1 + n\omega_2|$ . Хотя общее рассмотрение проведено для нелинейной, а не для изменяющейся во времени емкости, можно показать [5], что эти представления эквивалентны.

### 11.3. Волны в периодических структурах. Зоны Матъе и диаграммы Бриллюэна

При анализе волн в средах с периодически изменяющимися параметрами воспользуемся уравнением (11.3). Мы уже говорили, что формальное отличие (11.3) от уравнений (11.1) или (11.2) только в том, что переменная  $V$  есть функция координат, а не времени. Однако физический смысл решения уравнения (11.3) совсем иной, чем, скажем, уравнения (11.1). Действительно, можно ли надеяться на усиление волн только из-за того, что она распространяется в периодически неоднородной среде? Очевидно, нет — неоткуда для такого усиления черпать энергию. Но, как следует из формальной аналогии уравнений, решения тем не менее экспоненциально нарастают с координатой:

$$V(x) = A_1 e^{\lambda x} \sin k_0 x + A_2 e^{-\lambda x} \cos k_0 x.$$

Что это значит? Дело в том, что наша среда допускает распространение волн в двух противоположных направлениях — прямой и встречной волн.

Когда мы искали неустойчивость по времени, нам было интересно лишь решение, соответствующее положительному характеристическому показателю  $\lambda$  (т. е. пропорциональное  $\exp(\lambda t)$ ) (речь идет о значениях параметров, лежащих внутри зон Матье). Теперь же необходимо выбрать нужное из двух слагаемых решения. Здесь-то нам и поможет физическое соображение о том, что в равновесной (хотя бы и неоднородной) среде и прямая, и встречная волны одновременно нарастать не могут. Поэтому правильным будет только если  $A_1 \equiv 0$ . При этом и прямая, и встречная волны экспоненциально спадают вдоль направления  $x$ .

Таким образом, если волновое число волны оказывается внутри зоны уравнения Матье, то волна оказывается нераспространяющейся т. е. это зоны непрозрачности. Вне зон непрозрачности характеристический показатель  $\lambda$  — число мнимое, т. е. волна с соответствующим  $k_0$  оказывается распространяющейся (правда, пространственно модулированной).

Таким образом, волны в периодически неоднородных средах могут распространяться только при определенных условиях. При  $k_0 = q_1/2$ , например, т. е. когда длина падающей волны  $\Lambda_0$  в два раза больше характерного масштаба неоднородности среды  $\Lambda_n$  — «длины волны решетки», волна распространяться не будет (условие  $\lambda_0 = 2\lambda_n$  называют брэгговским условием отражения от периодической структуры). Физическое объяснение довольно просто: из-за резонансного ( $\Lambda_0 = 2\Lambda_n$ ) отражения даже от малых неоднородностей появляется встречная волна. Она, правда, слабая, но благодаря резонансу эффект вдоль координаты  $x$  накапливается и возникает стоячая волна, т. е. на определенной длине вся энергия падающей волны будет уходить в отраженную. При условии  $\Lambda_0 = 2\Lambda_n$  (или вблизи области этого резонанса) прямая и встречная волны сильно связаны. Следующие зоны непрозрачности соответствуют волнам, рассеивающимся на пространственных гармониках неоднородности. Внутри этих зон  $k_0 \approx nq_1/2$ .

Если глубина модуляции параметра, характеризующего периодическую среду, не мала, то в общем случае волны в среде описываются уравнениями (см. [8])

$$d^2\Psi/dx^2 + f(x)\Psi = 0, \quad (11.24)$$

$$f(x) = f(x + 2\pi/K) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nKx), \quad (11.25)$$

где  $a_n$  — коэффициенты Фурье разложения в ряд периодической функции  $f(x)$  с периодом  $2\pi/K$  ( $\Lambda = 2\pi/K$  — период структуры). Решениями уравнения (11.24) являются функции Хилла, частным случаем которых будут функции Матье (когда отличны от нуля только  $a_0$  и  $a_1$ ); заметим, что в (11.25) функция  $f(x)$  может быть и нечетной. Решение уравнения (11.24) можно искать в виде

$$\Psi(x) = A(x) \exp(-ikx) + B(x) \exp(ikx),$$

где  $A(x)$  и  $B(x)$  — периодические функции с периодом  $2\pi/K$ , а  $k$  (аналог  $\lambda$ ) — характеристический показатель, зависящий от коэффициентов  $a_n$ . Разлагая  $A(x)$  и  $B(x)$  в ряды Фурье получаем

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{A_n \exp[-i(k + nK)x] + B_n \exp[i(k + nK)x]\}.$$

Каждое  $n$  соответствует пространственным гармоникам волны, а величины  $k_n = k + nK$  имеют смысл волновых чисел этих гармоник. Заметим, что пространственные гармоники нельзя возбудить независимо. Подставляя это решение в (11.24), можно получить дисперсионное уравнение для определения  $k$  зависимости от коэффициентов  $a_n$  [1, 8]. Если в соотношении (11.25)  $a_0 \neq 0$ ,  $a_1 \neq 0$ , а все остальные  $a_n = 0$ , то из (11.25) будем иметь

$$d^2\Psi/dx^2 = (a_0 + a_1 \cos Kx)\Psi = 0, \quad (11.26)$$

т.е. приходим к уравнению типа уравнения Матье, диаграмма устойчивости которого приведена на рис. 11.5 *a*. На диаграмме выделены точками области непропускания (области неустойчивости), в которых  $k = mK/2 + i\alpha$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\alpha$  — действительная величина,  $mK/2$  — значение  $|k|$  на границах областей. Постоянной глубине модуляции ( $a_1/K^2 = \text{const}$ ) и постоянной частоте сигнала  $K = \text{const}$  при изменении  $a_0/K^2$  на рис. 11.5 *a* соответствует прямая, двигаясь вдоль которой будем последовательно проходить зоны пропускания и непропускания. В том случае, когда все  $a_n \neq 0$ , диаграмма устойчивости несколько видоизменится (рис. 11.5 *б*): имеет место пересечение границ областей, т.е. зоны непропускания изменяются. Заметим, что часто, говоря о полосах непропускания, их появление интерпретируют как результат существования распределенной обратной связи, которая возникает при распространении волны из-за следующих одно за другим отражений от элементов периодической структуры. Чаше, чем диаграмма зон Матье, в теории периодических структур используется связанная с ней диаграмма Бриллюэна, которая является гра-

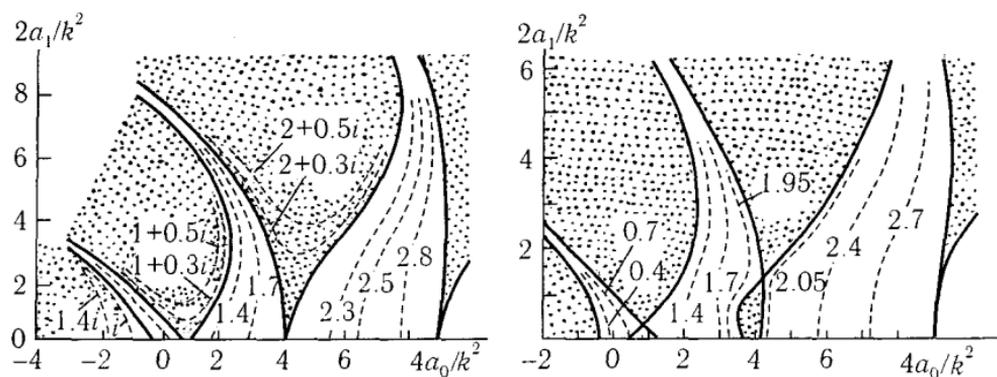


Рис. 11.5. Диаграммы устойчивости для уравнений (11.26) (а) и (11.25) (б), взятые из [8]. Области неустойчивости выделены точками

фическим изображением дисперсионного уравнения. Поясним эту диаграмму на примере безграничной среды со слабой периодической неоднородностью. Если волна распространяется в однородной линейной среде, то  $\omega = \pm v_0 k$  (рис. 11.6 а). Когда в среду вносится слабая (бесконечно малая) периодическая неоднородность, то возникают пространственные гармоники — волны с законом дисперсии  $k_n = \pm v_0 k + nK$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При бесконечно малом возмущении гармоники не взаимодействуют между собой (рис. 11.6 б). С ростом возмущения в точках пересечения дисперсионных характеристик рис. 11.6 б возникает сильная связь между гармониками (рис. 11.6 в), и в результате появляется полоса непропускания — на границах этой полосы взаимодействующие гармоники имеют разные по знаку групповые скорости (см. гл. 8). На рис. 11.6 г показана зависимость  $\omega = v_0 k_0 + (\mu c_1 / 4c_0) v_0 k_0$  для дисперсионного уравнения (11.24), которая иллюстрирует детали образования области непропускания. Области на  $\omega k$ -плоскости соответствующие действительным  $\omega$  и  $k$ , т. е. области пропускания, называются зонами Бриллюэна. Читателю предлагается самому разобраться в том, как конкретно связаны диаграммы устойчивости (зоны Матье) и диаграммы Бриллюэна [1, 7].

Среди проблем, сводящихся к уравнению типа (11.25), упомянем еще движение электрона в поле ионной решетки в кристалле. Волны электронной плотности описываются уравнением Шредингера с периодическим потенциалом:

$$(\hbar/2m)\nabla^2\Psi + [E - V(\mathbf{r})]\Psi = 0, \quad (11.27)$$

где  $E$  — полная энергия,  $V(\mathbf{r})$  — потенциальная энергия, являющаяся

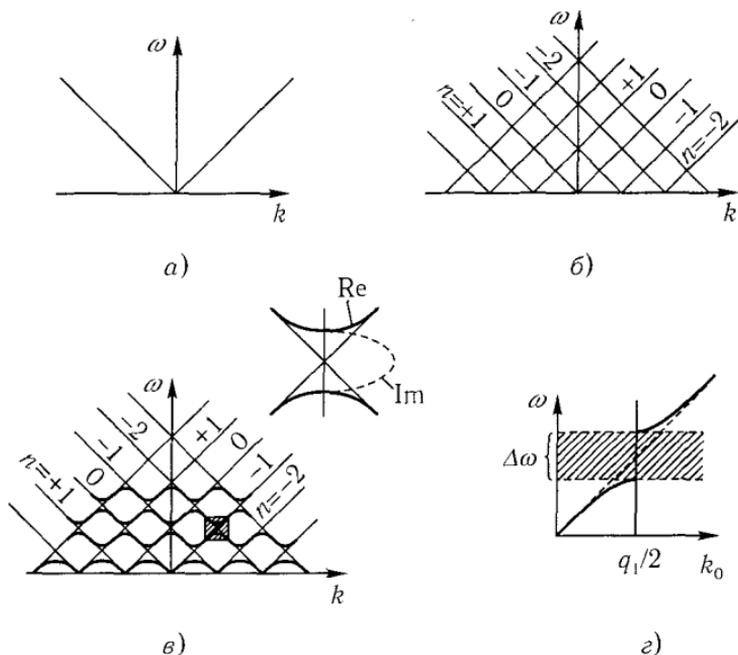


Рис. 11.6. К объяснению построения диаграммы Бриллюэна для периодически возмущенной безграничной среды: *a* — для однородной среды; *б* — для среды с бесконечно малой периодической неоднородностью, приводящей к появлению невзаимодействующих пространственных гармоник; *в* — случай конечного возмущения (жирные линии) — гармоники сильно связаны; *г* — появление полосы непропускания для системы, описываемой уравнением  $\omega = v_0 k_0 \pm (\mu c_1 / 4 c_0) v_0 k_0$

ся периодической функцией координат (периоды  $d_1, d_2, d_3$  изменения вдоль каждой координаты определяются структурой кристалла [1 § 40]). Для уравнений типа (11.27), как уже говорилось, существует аналог теоремы Флоке — теорема Блоха, в соответствии с которой искать решение (11.27) следует в виде  $\Psi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(i\lambda \mathbf{r}) + B(\mathbf{r}) \exp(-i\lambda \mathbf{r})$ , где  $A(\mathbf{r})$  и  $B(\mathbf{r})$  — периодические с периодами  $d_1, d_2$  и  $d_3$  функции координат. Методы исследования уравнения (11.27), по существу, совпадают с рассмотренными выше.

Заметим, что круг задач, приводящих к анализу волн в периодических структурах, необычайно широк; в частности, интерес к таким исследованиям во многом связан с технологическими достижениями. В качестве примера укажем на создание новых типов замедляющих систем для электронных СВЧ-приборов [9], периодически нагруженных

антенн бегущей волны [10], преобразователей и фильтров объемных и поверхностных акустических волн [11, 12]. Анализ периодических структур интересен и для биологии, главным образом в связи с процессами в сложных глазах насекомых (многослойная роговая оболочка слепня; зрительная палочка глаза бабочки «ореховки», которая состоит из периодических дисков в волноводе; часть зрительной палочки глаза толстоголовки — круглый волновод с гофрированной поверхностью) [8]. Много интересных примеров волн в пассивных и активных периодических структурах можно найти в [8].

#### 11.4. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы. Лазеры на свободных электронах

До сих пор, изучая поведение систем с изменяющимися параметрами, мы ограничивались так называемой «резонансной параметрикой», т. е. специфическим случаем, когда частота изменения параметра системы того же порядка, что и ее собственная частота ( $\omega_p \approx 2\omega_0/n$ ,  $n$  — малые числа). Мы видели, что при этом возможна экспоненциальная неустойчивость. Что будет, если параметр изменяется очень быстро по сравнению с собственной частотой системы  $\omega_p \gg \omega_0$ ?

Рассмотрим нелинейный осциллятор, на который действует зависящая от  $x$  периодическая сила:

$$\ddot{x} + f(x) = F(x) \cos \Omega t. \quad (11.28)$$

Здесь  $\Omega \gg 1/T$ , где  $T = 2\pi/\omega_0$  — характерный период движения по траектории автономной системы. Будем искать решение уравнения (11.28) в виде суммы медленной и быстро осциллирующей частей  $X(t) + \mu\chi(t)$ , где  $X(t)$  и  $\chi(t)$  изменяются с характерными временами  $T \sim 2\pi/\omega_0$  и  $\tau \sim 2\pi/\Omega$  соответственно, а  $\mu \sim \omega_0/\Omega \ll 1$ .

Такой вид искомого решения физически оправдан, поскольку благодаря инерционности, осциллятор должен слабо откликаться на быстрые внешние пульсации. Подставляя это решение в (11.28) и учитывая, что

$$f(X + \mu\chi) \approx f(X) + \mu\chi(\partial f/\partial x)_X, \quad F(X + \mu\chi) \approx F(X) + \mu\chi(\partial F/\partial x)_X,$$

получаем уравнение

$$\ddot{X} + \mu\ddot{\chi} = -f(X) - \mu\chi(\partial f/\partial x)_X + [F(X) + \mu\chi(\partial F/\partial x)_X] \cos \Omega t. \quad (11.29)$$

Это уравнение содержит пульсационные и медленно изменяющиеся слагаемые. Отделить одни от других очень просто, усреднив (11.29) за период  $\tau = 2\pi/\Omega$ . В результате получаем два связанных уравнения:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &\approx -f(X) + \langle \mu\chi(\partial F/\partial x)_X \cos \Omega t \rangle, \\ \mu\ddot{\chi} &= -\mu\chi(\partial f/\partial x)_X + F(X) \cos \Omega t.\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что в последнем уравнении член  $\mu\ddot{\chi}$  имеет порядок  $\mu\Omega^2\chi \sim \omega_0\Omega\chi$  и, следовательно, не мал, а слагаемое  $\mu\chi(\partial f/\partial x)_X$  мало, второе уравнение можно сразу проинтегрировать. В результате найдем

$$\chi = -[F(X)/\mu\Omega^2] \cos \Omega t, \quad (11.30)$$

т. е. при интегрировании по быстрому времени функцию  $F(X)$  можно считать константой. Подставляя далее (11.30) в уравнение для  $X$ , получим  $\ddot{X} + f(X) = -\langle [F(X)/\Omega^2](\partial F/\partial x)_X \cos \Omega t \rangle$ , откуда окончательно имеем

$$\ddot{X} + f(X) + \frac{1}{2} \frac{F(X)}{\Omega^2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_X = 0.$$

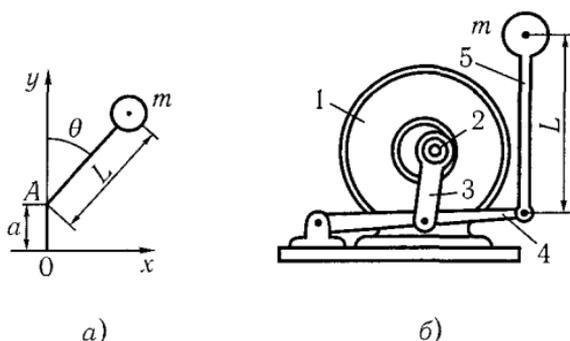
Мы получили очень важный результат, совершенно неожиданный с точки зрения интуитивных представлений: вместо того, чтобы, «мелко вибрируя» под действием быстрых внешних пульсаций, сохранить среднее движение по траекториям, совпадающим с траекториями автономного аналога, наш новый эффективный осциллятор ведет себя совершенно иначе — в возвращающей силе появилось дополнительное, не малое слагаемое, пропорциональное квадрату амплитуды внешних пульсаций.

Впервые этот результат был получен в 1951 г. П. Л. Капицей и применен к расчету маятника с быстро вибрирующим подвесом [13, 14]. Теоретическая модель маятника Капицы и схема прибора для опытов с вибрирующим маятником представлены на рис. 11.7. Уравнение движения маятника Капицы имеет вид

$$mL^2\ddot{\vartheta} = M_{\vartheta} - mL\omega^2 \sin \omega t \sin \vartheta, \quad (11.31)$$

где  $M_{\vartheta}$  — момент внешних сил (когда момент внешних сил создается силой тяжести,  $M_{\vartheta} = mgL \sin \vartheta$ ) [13]. В предположении, что  $\vartheta(t) = \varphi(t) + \beta(t)$  ( $\varphi(t)$  и  $\beta(t)$  имеют тот же смысл, что и  $X(t)$  и  $\mu\chi(t)$  соответственно), для усредненных за время  $\tau = 2\pi/\omega$  величин будем иметь

$$\langle \vartheta(t) \rangle \approx \varphi, \quad \langle \beta(t) \rangle = 0,$$



а)

б)

Рис. 11.7. Маятник с вибрирующим подвесом [13]: а — теоретическая модель; математический маятник длиной  $L$  и массой  $m$  свободно вращается в точке подвеса  $A$ , которая колеблется вдоль оси (около точки  $O$ ) с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ ; б — схема прибора для опытов с маятником Капицы; на оси электромотора 1 от швейной машинки (частота вращения  $4000\text{--}6000\text{ мин}^{-1}$ ) эксцентрично насажен шариковый подшипник 2, к обойме которого присоединен шатун 3; он приводит в колебание рычаг 4, один конец которого вращается в неподвижной опоре; на другой конец рычага подвешивается стержень маятника 5 ( $L \approx 150\text{ мм}$ ) так, чтобы он свободно качался ( $a \approx 3 \div 4\text{ мм}$ )

т. е., как и в предыдущем случае, мы исключаем из уравнения движения путем усреднения угол  $\beta$ , а угол  $\vartheta$  заменяем углом  $\varphi$ , характеризующим то положение маятника, около которого происходят мелкие вибрации. Результат влияния вибрации точки подвеса на колебания маятника в этом приближении оказывается простым: появляется «вибрационный» момент, который ведет себя как пара сил, стремящихся расположить маятник так, чтобы его стержень всегда был ориентирован по направлению вибраций подвеса, т. е. вдоль оси  $y$ . Этот момент выражается следующей формулой:

$$\langle M \rangle = -(ma^2\omega^2/4) \sin 2\varphi. \quad (11.32)$$

Он не зависит от длины маятника и пропорционален квадрату амплитуды колебаний подвеса. Уравнение движения (11.31) с учетом (11.32) теперь можно представить в виде  $mL^2\ddot{\varphi} = M_{\text{эф}}$ , где  $M_{\text{эф}} = M_{\varphi} - (ma^2\omega^2/4) \sin 2\varphi$  ( $M_{\varphi}$  получается из  $M_{\vartheta}$  заменой угла  $\vartheta$  на  $\varphi$ ). В поле силы тяжести  $M_{\varphi} = mgL \sin \varphi$ , т. е. среди состояний равновесия маятника, определяемых из равенства  $M_{\text{эф}} = 0$ , имеется тривиальное состояние равновесия  $\varphi = 0$ , соответствующее положению маятника «вверх ногами». Чтобы это состояние равновесия было устойчивым, необходимо выполнение условия  $(dM_{\text{эф}}/d\varphi)_{\varphi=0} < 0$ , откуда условие устойчивос-

ти имеет вид  $a^2\omega^2 > 2gL$ . При выполнении этого условия вертикальное положение маятника Капицы (рис. 11.7а) устойчиво. На опыте это выглядит так: «Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто для него существует особая сила, направленная по оси колебания подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размытым, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться, как обычный маятник ... Эти колебания затухают, и маятник приходит в вертикальное положение» [13].

«Если повернуть прибор так, что маятник колеблется в горизонтальной плоскости, то на движение исключается влияние момента силы тяжести. Если осторожно прикоснуться пальцем к стержню маятника и отводить его в сторону, то палец чувствует давление, производимое вибрационным моментом, и легко убедиться, что его наибольшая величина соответствует углу поворота в  $45^\circ$ » [14]. Когда маятник находится в обычном устойчивом положении, колебания подвеса приводят к уменьшению периода колебаний маятника. Это значит, что любые вертикальные колебания, влияющие на часы, с периодом, меньшим периода маятника часов, всегда будут ускорять их ход (это П. Л. Капица демонстрировал на двойном маятнике [14]).

Изложенная выше теория была в дальнейшем обобщена на случай трехмерного движения в электромагнитных полях [15]; было, в частности, предложено использовать движение электронов в слабо неоднородных переменных полях для создания СВЧ-генераторов [16]. Недавно подобный подход был успешно применен в теории определенного типа лазеров на свободных электронах, действие которых основано на излучении электронов в периодических статических полях (убитрон) и рассеянии волн потоками релятивистских электронов (скаттрон) [17, 18]. Схема таких лазеров дана на рис. 11.8. Простейшая теория применительно к схеме рис. 11.8г изложена в [19]. В инерциальной системе отсчета  $K'$ , которая движется поступательно в положительном направлении оси  $x$  (направление движения электронного потока) со скоростью, равной фазовой скорости комбинационной волны  $v_\phi = \Omega/k_x = (\omega_s - \omega_i)/(k_s \cos \varphi_s + k_i \cos \varphi_i)$ , поле двух волн, воздействующих на пучок:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\{\mathbf{E}_i \exp[i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r})] + \mathbf{E}_s \exp[i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})]\},$$

является одночастотным:  $\mathbf{E}' = \text{Re}\{\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)\}$ . Тогда в выбранной

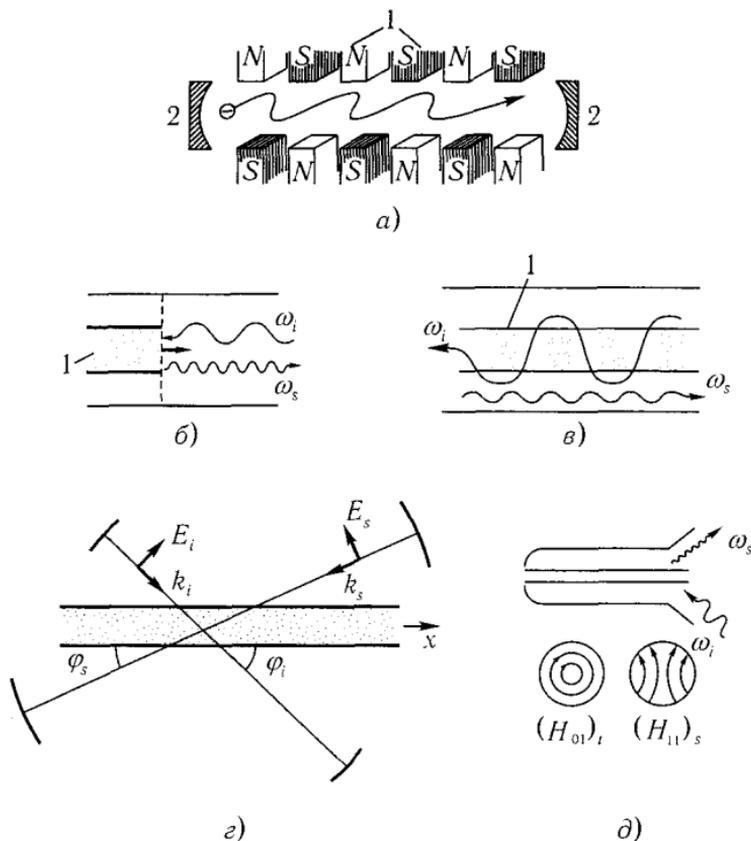


Рис. 11.8. Схема лазеров на свободных электронах: *a* — убитрон (генератор, роль системы накачки в котором выполняет периодическая магнитная система 1); в спектре тока пучка возникают гармоники, скорость которых больше скорости света; они и взаимодействуют с полем резонатора сигнала 2; *б* — скаттрон (генератор с зеркальным отражением от быстро движущегося переднего фронта пучка электронов 1); *в* — скаттрон (генератор с рассеянием волны накачки на возмущениях плотности 1, вызванных комбинационной волной на частоте  $\omega_i - \omega_s$  приводящим к появлению сигнала; накачка (индекс *i*) и сигнал (индекс *s*) могут соответствовать различным типам колебаний электродинамической структуры); *г*, *д* — схема модели скаттрона, используемой в теории

системе координат усредненное движение электрона, скорость которого  $v' \ll c$ , определяется силой (сила Миллера [15])

$$\mathbf{F}' = -[e^2/(4m\omega^2)]\nabla'|\hat{\mathbf{E}}|^2.$$

Эта сила при постоянных  $\mathbf{E}_i$  и  $\mathbf{E}_s$ , определяется только комбинацион-

ной волной; выражение для  $\mathbf{F}'$  приведено для случая отсутствия фокусирующих электроны полей. При таком подходе физические процессы в скаттроне можно интерпретировать как излучение частиц при условии их пространственного резонанса с волновыми биениями:  $v \approx v_{\phi} \approx (\omega_s - \omega_i)/\kappa_x$ ,  $\kappa = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  ( $v$  — скорость электронов). Поскольку воздействие комбинационной волны аналогично воздействию обычной волны, механизм индуцированного рассеяния качественно выглядит следующим образом. При воздействии двух волн с частотами  $\omega_i$  и  $\omega_s$  и амплитудами  $E_i$  и  $E_s$ , на электронный поток на электроны начинает действовать периодическая сила с разностной частотой  $\omega_s - \omega_i$  и амплитудой  $E_i E_s$ . При условии  $v \approx v_{\phi}$  комбинационная волна, воздействуя на пучок, приводит к его группированию; при этом плотность электронов изменяется по амплитуде пропорционально  $E_i E_s / (\omega_i - \omega_s)^2$  с частотой  $\omega_s - \omega_i$ . Поскольку диэлектрическая проницаемость электронного потока и его показатель преломления определяются плотностью электронов, изменение плотности означает и изменение этих величин. При этом волна накачки  $(E_i, \omega_i)$  рассеивается на возмущениях показателя преломления. Но тогда разностная частота  $\omega_s - \omega_i$  и частота накачки  $\omega_i$  складываются, что приводит к появлению волны сигнала с частотой  $\omega_s$ . Благодаря условию синхронизма ( $v \approx v_{\phi}$ ) сгруппированный электронный поток усиливает поле комбинационной волны так же, как в лампе бегущей волны, поэтому теория скаттрона аналогична теории ЛБВ (см. гл. 7) с заменой высокочастотного электрического поля в ЛБВ на эффективное поле комбинационной волны.

## ГЛАВА 12

### Адиабатические инварианты.

### Распределение волн в неоднородных средах

#### 12.1. Приближение Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна и адиабатические инварианты

Уже из рис. 11.3 б видно, что, если частота  $\omega_p$  изменения параметра системы много меньше собственной частоты  $\omega_0$  ( $\omega_p \ll \omega_0$ ), неустойчивости практически нет: зоны неустойчивости становятся все более узкими по мере увеличения отношения  $\omega_0/\omega_p$ . Этот случай очень медленного, так называемого адиабатического изменения параметра (примером могут служить колебания маятника, длина которого медленно изменяется) очень интересен с колебательно-волновой точки зрения и в то же время часто встречается в приложениях.

В качестве основной модели возьмем осциллятор с медленно изменяющейся частотой. Его уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0. \quad (12.1)$$

Здесь характерное время  $T$  изменения параметра (частоты  $\omega_0$ ) велико:  $T \gg 2\pi/\omega_0$ . Введем медленное время  $\tau = t/T$ . Тогда уравнение (12.1) можно переписать следующим образом:

$$x'' + T^2\omega_0^2(\tau)x = 0$$

(штрихами здесь и далее обозначено дифференцирование по медленному времени). Сделаем замену переменных:

$$x(\tau) = \exp \int_0^\tau y \, d\tau. \quad (12.2)$$

Очевидно, что  $x'(\tau) = xy$ ,  $x''(\tau) = xy^2 + xy'$ ; поэтому вместо (12.1) получим уравнение  $x[y^2 + y' + T^2\omega_0^2(\tau)] = 0$ , которое при  $x \neq 0$  совпадает с известным уравнением Рикатти

$$y^2 + y' + T^2\omega_0^2(\tau) = 0. \quad (12.3)$$

Таким образом, вместо линейного уравнения второго порядка (уравнение (12.1)) мы получили уравнение первого порядка, но нелинейное. Однако в данном случае оно оказывается проще для исследования.

Учитывая медленность изменения параметра, будем искать приближенное решение уравнения (12.3) в виде асимптотического разложения

$$y = Ty_0 + y_1 + T^{-1}y_2 + \dots + T^{-(n-1)}y_n + \dots, \quad (12.4)$$

где малым параметром служит  $(1/T)$ .<sup>1</sup> Подставляя (12.4) в (12.3), получаем

$$T^2 y_0'' + 2Ty_0 y_1' + y_1^2 + Ty_0' + y_1' + T^2 \omega_0^2(\tau) + \dots = 0.$$

Разделение слагаемых по порядку малости дает

$$y_0 = \pm i\omega_0(\tau), \quad y_1 = -y_0'/2y_0 = -(1/2)(\ln \omega_0)'. \quad (12.5)$$

Мы ограничиваемся двумя первыми членами разложения в (12.4). В этом приближении, используя (12.5), из соотношения (12.2) находим, что

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \exp \int_0^\tau (Ty_0 + y_1) d\tau = \\ &= A \exp \left[ -(1/2) \ln \omega_0(\tau) + iT \int_0^\tau \omega_0(\tau) d\tau \right] + \text{к. с.}, \end{aligned}$$

где  $A$  — постоянная, к. с. — комплексно-сопряженное слагаемое, соответствующее второму знаку (минусу) в  $y_0$ .

Окончательно приближенное решение запишется в виде

$$x(\tau) = (A/\sqrt{\omega_0(\tau)})e^{i\vartheta} + \text{к. с.}, \quad (12.6)$$

где  $\vartheta = T \int_0^\tau \omega_0(\tau) d\tau$  — полная фаза. Таким образом, решение соответствует осцилляциям с изменяющимися амплитудой и частотой. Самый существенный результат состоит в том, что амплитуда этих колебаний убывает или возрастает медленно — адиабатически, поскольку медленно изменяется  $\omega_0$ . Решение (12.6) называется приближением Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [2, 12]. Впервые оно было получено при решении уравнения Шредингера для волн, распространяющихся в слабо неоднородной среде.

<sup>1</sup>Различные асимптотические методы решения уравнений с переменными коэффициентами, содержащими большой или малый параметр, изложены в [1].

Всегда ли полученное решение справедливо? Очевидно, оно становится неверным при очень малых  $\omega_0$  ( $\omega_0 \approx 0$ ), но не потому, что амплитуда в (12.6) стремится к бесконечности, а потому, что вся теория справедлива при  $T \gg 2\pi/\omega_0$ , и при  $\omega_0 \approx 0$  неизвестно, какие  $T$  выбирать. Второй вопрос: насколько близко найденное решение к точному? Если бы ряд (12.4) сходил равномерно, то вопроса о точности не возникало бы. Но равномерной сходимости обычно не бывает — с увеличением числа слагаемых в разложении точность не обязательно повышается. Впрочем, для нас это желательно, но не необходимо. Чтобы иметь право пользоваться приближенным решением, необходима лишь его асимптотическая сходимость, т. е. приближенное решение должно переходить в точное при стремлении к нулю малого параметра  $1/T$  ( $T \rightarrow \infty$ ).

Попробуем разобраться в физическом смысле полученного решения. Для этого вычислим энергию нашего осциллятора с медленно изменяющейся частотой. Как известно,  $\mathcal{H} = (\dot{x}^2 + \omega_0 x^2)/2$ . У нас  $x(t) = [A/\sqrt{\omega_0(t)}] \cos \vartheta$ , где  $d\vartheta/dt = \omega_0(t)$ , и  $\dot{x}(t) \approx A\sqrt{\omega_0(t)} \sin \vartheta$  (член, содержащий  $\omega_0(t)$ , очень мал, и мы им пренебрегаем). Таким образом,  $\mathcal{H} = A^2\omega_0(t)/2$ , где  $A = \text{const}$ , или

$$\mathcal{H}/\omega_0(t) = \text{const}, \quad (12.7)$$

т. е. отношение энергии, запасенной осциллятором, к его частоте при медленном изменении параметров сохраняется во времени. Величины, сохраняющиеся при медленном изменении параметров динамической системы, называют адиабатическими инвариантами [3, 4].

Из (12.7) следует очень важный вывод: в медленно изменяющемся поле можно существенно изменить, в том числе и увеличить, энергию осциллятора, т. е. можно использовать такой осциллятор для усиления. Понять, почему сохраняется именно величина  $\mathcal{H}/\omega_0(t)$ , нам поможет квантовая аналогия, т. е. описание осциллятора на языке квазичастиц. Энергия осциллятора — это  $\mathcal{H} = \hbar\omega_0 N$ , где  $\hbar\omega_0$  — энергия элементарного колебания кванта или квазичастицы, а  $N$  — число квазичастиц или число квантов. При медленном изменении параметра число квантов, очевидно, измениться не может — они не сливаются, т. е. число квантов является адиабатическим инвариантом. Полная же энергия осциллятора изменяется за счет изменения энергии самих квантов — квазичастиц. Таким образом, смысл адиабатического инварианта (12.7) довольно прозрачен.

При резонансном параметрическом усилении картина иная: энергия колебательной системы растет именно за счет увеличения числа

квантов, энергия же каждого кванта не изменяется. Вспомним, например, что для основного резонанса энергия одного кванта накачки приблизительно равна  $2\hbar\omega_0$ , а «сигнальное» колебание имеет собственную частоту осциллятора  $\omega_0$ , т. е. энергия одного кванта накачки равна энергии двух квантов сигнала осциллятора ( $2\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0 + \hbar\omega_0$ ). Иными словами, происходит распад одного кванта накачки на два кванта сигнала, за счет чего и растет полная энергия колебаний на частоте  $\omega_0$ .

Легко убедиться, что если система разбивается на  $n$  нормальных осцилляторов, то она должна иметь  $n$  независимых адиабатических инвариантов.

Рассмотрим еще один общий способ получения адиабатического инварианта, основанный на применении приближенного прямого вариационного метода [5], близкого к известному методу Уизема [6]. Будем считать, что (12.1) является уравнением Эйлера вариационной задачи, т. е. является условием стационарности некоторого функционала  $I$ . По-

скольку, как известно, для  $I = \int_a^b F(x, y, y') dx$  уравнение Эйлера имеет вид  $F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = 0$  [7], соответствующий (12.1) функционал запишется следующим образом:

$$I = \int_0^t \frac{1}{2} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2) dt. \quad (12.8)$$

Читателю предоставляется возможность самому проверить справедливость (12.8). Предположим далее, что

$$x(t) = X(t)T[\Omega(t)], \quad (12.9)$$

где  $X(t)$  и  $\Omega(t)$  — медленно изменяющиеся функции времени, а  $T[\Omega(t)]$  — периодическая функция такая, что

$$T(\Omega + 2\pi) = T(\Omega), \quad (12.10)$$

$$\langle T \rangle_\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\Omega) d\Omega = 0, \quad (12.11)$$

$$\langle T^2 \rangle_\Omega = 1. \quad (12.12)$$

Условия (12.10) и (12.12) не снижают общности решения, как может показаться, поскольку  $X$  и  $\Omega$  еще не определены; в то же время усло-

вие (12.11) определяет характер решения. Используя (12.9) для нахождения  $\dot{x}$ , можно написать выражение для усредненного функционала (12.8):

$$\bar{I}_\Omega = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \langle \dot{X}^2 T^2 \rangle_\Omega + \left\langle 2X \dot{X} \dot{\Omega} \left( T \frac{dT}{d\Omega} \right) \right\rangle_\Omega + \left\langle X^2 \left( \frac{dT}{d\Omega} \right)^2 \dot{\Omega}^2 \right\rangle_\Omega - \langle \omega^2 X_0^2 T^2 \rangle_\Omega \right] dt.$$

Учитывая медленность изменения  $X$ ,  $T$  и  $\omega_0$  во времени, можно показать, что  $\langle X^2 T^2 \rangle_\Omega \approx X^2$  (с учетом (12.12)),  $\left\langle 2X \dot{X} \dot{\Omega} \left( T \frac{dT}{d\Omega} \right) \right\rangle_\Omega \approx 0$  (согласно (12.11)),  $\left\langle X^2 \left( \frac{dT}{d\Omega} \right)^2 \dot{\Omega}^2 \right\rangle_\Omega \approx \alpha X^2 \dot{\Omega}^2$ , где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{dT}{d\Omega} \right)^2 d\Omega, \quad -\omega_0^2 \langle X^2 T^2 \rangle_\Omega \approx -\omega_0^2 X^2$$

(в соответствии с (12.12)). Тогда получим новый функционал:

$$I \approx \langle I \rangle_\Omega \approx \frac{1}{2} \int_0^t [\dot{X}^2 + (\alpha \dot{\Omega}^2 - \omega_0^2) X^2] dt,$$

в котором появилась еще одна зависимая переменная  $\dot{\Omega}$ . Вспомним, что если  $I = \int_a^b F(x, y, y', z, z') dx$ , то условия стационарности [7] следующие:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial z'} = 0.$$

Варьируя  $I$ , получим два уравнения Эйлера:

$$\delta X \rightarrow X \left( \alpha \dot{\Omega}^2 - \omega_0^2 \right) - \ddot{X} = 0, \quad (12.13)$$

$$\delta \Omega \rightarrow \frac{d}{dt} \alpha X^2 \dot{\Omega} = 0. \quad (12.14)$$

Пробную функцию для  $T$  разумно (см. (12.1)) выбрать в виде  $T = T_1 \sin[\Omega(t)]$ , где  $T_1 = \text{const}$ . Тогда  $\alpha = T_1^2/2$ , и, полагая  $T_1 = \sqrt{2}$ , имеем

$$T = \sqrt{2} \sin \Omega, \quad \alpha = 1. \quad (12.15)$$

В силу того что  $X$  — медленно изменяющаяся функция времени, из уравнения (12.13) следует  $X(\alpha\Omega^2 - \omega_0^2) \approx 0$ , и с учетом (12.15) имеем

$$\Omega = \int_0^t \omega_0(t) dt. \quad (12.16)$$

Из уравнения (12.14) находим

$$X^2 \dot{\Omega} = X^2 \omega_0(t) = \text{const.}$$

Итак, мы вновь получили известный адиабатический инвариант, а решение (12.9) имеет вид

$$x(t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{\omega_0(t)}} \sin \int_0^t \omega_0(t) dt. \quad (12.17)$$

Данный прямой вариационный метод интересен тем, что он может использоваться и для решения задач линейной и нелинейной теории волн [5].

## 12.2. Эквивалентность ротатора осциллятору

В качестве примера ротатора рассмотрим электрон, который движется в однородном постоянном магнитном поле. При произвольных начальных условиях электрон будет двигаться по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля. Нам сейчас интересен частный случай, когда начальная скорость электрона не имеет составляющей по полю и он вращается по окружности в плоскости, перпендикулярной полю, с циклотронной частотой  $\omega = (e/m)B$ . Пусть теперь магнитное поле  $B(t)$ , направленное вдоль оси  $z$ , медленно изменяется за циклотронный период  $T = 2\pi/\omega$ . Переменное магнитное поле индуцирует электрическое поле  $\mathbf{E} = -[\mathbf{z}_0 \mathbf{r}](dB/dt)/2$  (формула написана в системе единиц, где скорость света  $c = 1$ ,  $\mathbf{z}_0$  — единичный вектор в направлении  $z$ ). Уравнение движения  $\ddot{\mathbf{r}} = (e/m)([\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}] + \mathbf{E})$  с учетом выражений для  $\omega$  и  $\mathbf{E}$  имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \left[ \mathbf{z}_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \omega(t) + \frac{1}{2} [\mathbf{z}_0 \mathbf{r}] \frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (12.18)$$

В проекциях на оси  $x$  и  $y$  вместо (12.18) получаем систему уравнений четвертого порядка:

$$\ddot{x} - \omega(t)\dot{y} - \dot{\omega}(t)y/2 = 0, \quad (12.19)$$

$$\ddot{y} + \omega(t)\dot{x} + \dot{\omega}(t)x/2 = 0. \quad (12.20)$$

В этой системе, казалось бы, должно быть два независимых адиабатических инварианта. Покажем, что в действительности эта система-ротатор эквивалентна осциллятору и имеет только один инвариант. Умножим уравнение (12.20) на  $i$  и сложим его с (12.19); вводя новую комплексную переменную  $\xi = x + iy$ , вместо (12.19) и (12.20) получаем одно комплексное уравнение

$$\ddot{\xi} + i\omega(t)\dot{\xi} + (i/2)\dot{\omega}(t)\xi = 0. \quad (12.21)$$

Сделаем теперь в (12.21) замену:

$$\xi = u \exp \left[ -\frac{i}{2} \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] = u \exp \vartheta,$$

что дает  $\dot{\xi} = (\dot{u} - i\omega u/2) \exp \vartheta$  и  $\ddot{\xi} = [\ddot{u} - i\omega\dot{u} - (1/4)\omega^2 u - (1/2)i\dot{\omega}u] \exp \vartheta$ . Используя эти выражения в (12.21), приходим к уравнению гармонического осциллятора, собственная частота которого равна ларморовой частоте

$$\ddot{u} + \omega_\pi^2(t)u = 0. \quad (12.22)$$

Уравнение (12.22) отличается от (12.1), решение которого мы нашли, только тем, что теперь  $u$  — комплексная величина, но, поскольку для  $\text{Re } u$  и  $\text{Im } u$  получаются одинаковые независимые уравнения, ни к чему новому это не приведет. Итак,  $u(t) = \frac{A}{\sqrt{\omega_\pi(t)}} \exp \left[ i \int_0^t \omega(t) dt \right]$ . Что теперь является адиабатическим инвариантом? Запишем  $i\dot{u}^* = \omega_\pi(t)|A|^2$ ; видно, что инвариантом является величина  $i\dot{u}^*/\omega_\pi(t) = \text{const}$ . В чем физический смысл этого инварианта? Легко показать, что  $i\dot{u}^* = \dot{\xi}\dot{\xi}^*$ , если  $\dot{u}/u = \dot{u}^*/u^*$ . Последнее выполняется, т. е.  $u$  и  $u^*$  изменяются во времени одинаково, поскольку уравнение (12.22) — уравнение с действительными коэффициентами. Но  $\dot{\xi}\dot{\xi}^* = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_\perp^2$ , где  $v_\perp$  — скорость поперечного вращения электрона. Таким образом,  $v_\perp^2/\omega_\pi(t) = \text{const}$ , или  $\mathcal{E}_{\text{кин}}/B(t) = \text{const}$ , т. е. кинетическая энергия электрона меняется пропорционально амплитуде магнитного поля. Величина  $uu^*\omega(t)_\pi = |A|^2$  — также адиабатический инвариант, откуда  $(x^2 + y^2)\omega_\pi = \text{const}$ ,

но  $v_{\perp}^2 = (x^2 + y^2)\omega_p^2$ , т. е. это уже известный нам инвариант. Мы пришли к интересному выводу: энергия электрона-осциллятора в медленно изменяющемся магнитном поле может сильно изменяться. Например, электрон-осциллятор может непрерывно отдавать высокочастотную энергию полю. Такое произойдет, если квазистатическая составляющая поля будет медленно уменьшаться во времени.

### 12.3. Распространение волн в неоднородных средах. Приближение геометрической оптики

Распространение волн в неоднородных средах — средах, свойства которых изменяются в пространстве, — отличается разнообразием возможностей. Однако математически задачу о распространении гармонической волны в неоднородной среде можно в большинстве случаев свести к отысканию решения уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 f + k^2(x, y, z)f = 0 \quad (12.23)$$

для скалярной функции  $f$ . Понятно, что решение уравнения (12.23) в первую очередь определяется различным выбором функции  $k^2(x, y, z)$ .

Наиболее простой задачей является случай, когда  $k^2$  зависит только от одной координаты, например от координаты  $x$  декартовой системы, что соответствует слоисто-неоднородной среде. В некотором приближении такими средами являются атмосфера и ионосфера Земли, морская вода, земная кора, оптические волокна и др.

В общем случае распространение плоской волны в среде, свойства которой зависят от  $x$ , описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon(x)}{v_{\phi}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (12.24)$$

где  $\varepsilon(x)$  — функция, характеризующая свойства среды (для электромагнитных волн это диэлектрическая проницаемость) и плавно изменяющаяся вдоль  $x$ , а  $v_{\phi}$  — фазовая скорость волны (физическая природа волны нам пока не важна) в однородной среде.

Будем интересоваться стационарным распространением монохроматической волны, т. е. будем считать, что

$$u(x, t) = u(x)e^{i\omega t} + \text{к. с.} \quad (12.25)$$

и амплитуда волны не зависит от времени. Это значит, например, что в случае падения волны вида  $\exp(i\omega t - ikx)$  на границу среды мы должны подождать достаточно долго, чтобы в среде установился стационарный процесс. Для решения типа (12.25) уравнение (12.24) преобразуется следующим образом:

$$u_{xx} + k_0^2 \varepsilon(x) u = 0, \quad (12.26)$$

где  $k_0^2 = \omega^2/v_\phi^2$ . Плавность неоднородностей среды предполагает, что на длине волны  $\lambda = 2\pi/k_0\varepsilon(x)$  величина  $\varepsilon(x)$  практически не меняется ( $\lambda d\varepsilon(x)/dx \ll \varepsilon(x)$ ). Уравнение (12.26) аналогично уже исследованным уравнениям (12.1) или (12.22) с той лишь разницей, что здесь происходит изменение амплитуды вдоль координаты, а не во времени, как в (12.1) и (12.22). Делая замену  $u(x) = \exp \int_0^x y dx$ , снова получаем уравнение Рикатти  $y^2 + y' + k_0^2 \varepsilon(x) = 0$ , где  $k_0$  — большой параметр. Отыскивая решение в виде  $y(x) = k_0 y_0(x) + y_1(x) + (1/k_0) y_2(x) + \dots$ , для нулевого и первого приближений будем иметь соответственно  $y_0 = \pm i\sqrt{\varepsilon(x)}$ ,  $y_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln \sqrt{\varepsilon(x)})$ . Теперь оба знака в  $y_0$  имеют ясный физический смысл: они соответствуют прямой и встречной волнам. Решение уравнения (12.26) также имеет вид ВКБ-решения:

$$u(x) = \frac{A}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \exp\left(-ik_0 \int_0^x \sqrt{\varepsilon} dx\right) + \frac{B}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \exp\left(ik_0 \int_0^x \sqrt{\varepsilon} dx\right), \quad (12.27)$$

которое соответствует так называемому приближению геометрической оптики. Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные, т. е. в рассматриваемом приближении, несмотря на неоднородность среды, рассеяния и преобразования волн друг в друга не происходит. Если, например, встречной волны не было, то она и не появится, а если была, то ее амплитуда не изменится, поскольку встречные волны независимы — волна, распространяясь, деформируется, но не взаимодействует со встречной. Это происходит из-за того, что  $\varepsilon(x)$  изменяется плавно, и отраженная волна экспоненциально мала.

Следует заметить, что к уравнению типа (12.26) приводят многие физические задачи. Перечислим несколько из них, относящихся к СВЧ-электронике.

При анализе неустойчивости электронного потока, дрейфующего в скрещенных электростатическом и магнитостатическом полях, обычно используется модель, в которой электроны без высокочастотных возмущений при любой плотности потока движутся прямолинейно с

поперечным градиентом скорости  $dv_e/dy = \omega_p^2/\omega_c = \omega_c r^2$ ,  $\omega_p$  и  $\omega_c$  — плазменная и циклотронная частоты.

Для анализа высокочастотных волновых процессов в такой модели предполагается, что все переменные изменяются во времени и в направлении распространения волны (вдоль координаты  $x$ ) по закону  $\exp(i\omega t - ikx)$ . Тогда для зависимой переменной  $F$ , связанной с  $y$ -компонентой скорости формулой  $F(y) = (v_y/v_e(y))\sqrt{1 - s^2(y)}$ , уравнение имеет вид

$$d^2 F/ds^2 - r^4 Q(s)F = 0,$$

где  $Q(s) = 1 + 2r^2/(s^2 - 1) + 3r^4/(s^2 - 1)^2$ ,  $s = -\omega_c^{-1}(\omega - kv_e(y))$  (вместо безразмерной координаты). Решение этой задачи и нахождение поправок к ВКБ-приближению обсуждаются, например, в [9].

В СВЧ-электронике решение (12.26) используется также в теории распространения волн пространственного заряда в ускоренном электронном потоке [10].

Ввиду важности приближения геометрической оптики для решения многих физических задач остановимся на основных вопросах теории распространения волн в среде, свойства которой достаточно медленно изменяются вдоль направления распространения, следуя традиционной форме изложения<sup>1</sup>. Это позволит и более глубоко понять физический смысл приближения.

Предположим, что амплитуда и направление распространения волны изменяются сильно лишь на расстояниях  $L$ , много больших длины волны  $\lambda$ . В этом случае можно разбить все пространство на участки  $l \ll L$  ( $\lambda \ll l$ ), на которых волну можно считать плоской<sup>2</sup>, а среду — однородной. В результате такого разбисения выделяем поверхности (волновые поверхности), на которых фаза волны в данный момент времени постоянна, и определяем направление распространения волны в каждой точке как направление нормали к волновой поверхности в этой точке. Обычно вводят также понятие луча — линии, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны в этой точке (определение справедливо для изотропных сред, рассмотрением которых ограничимся). Последнее позволяет свести задачу о распространении волн к задаче о распространении лучей и перейти к

<sup>1</sup>Систематическому изложению метода геометрической оптики применительно к анализу волновых процессов в неоднородных средах посвящена книга [8], а также гл. VII в учебном пособии [17]. Для изучения метода полезны монографии [13–16, 18].

<sup>2</sup>Напомним, что направление плоской волны постоянно и совпадает с нормалью к плоскости равных фаз; в случае однородной волны плоскости равных фаз и плоскости равных амплитуд параллельны.

приближению геометрической оптики. Таким образом, геометрическая оптика отвлекается от волновой природы лучей, что накладывает следующее ограничение на размеры выделенных выше участков однородности:

$$L \gg l \gg \lambda. \quad (12.28)$$

Выведем основное уравнение геометрической оптики, которое называется уравнением эйконала.

Пусть поле монохроматической волны описывается функцией

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}) \exp\{i[\omega t - k_0 \Psi(\mathbf{r})]\}, \quad (12.29)$$

где  $f_0(\mathbf{r})$  и  $\Psi(\mathbf{r})$  — действительные функции,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки. В случае плоской волны функция  $f_0(\mathbf{r})$  постоянна на поверхности фронта, который определяется уравнением  $\Psi(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Будем считать, что  $f_0(\mathbf{r})$  и  $\text{grad } \Psi(\mathbf{r})$  изменяются заметным образом на расстоянии  $L \gg \lambda$ , т. е.

$$|\text{grad } f_0(\mathbf{r})| \ll k_0 f_0(\mathbf{r}), \quad (12.30)$$

$$|\text{grad } \Psi(\mathbf{r})| \ll k_0 \Psi(\mathbf{r}). \quad (12.31)$$

Иными словами, будем предполагать, что свойства среды мало изменяются на расстояниях порядка длины волны.

Подставим функцию (12.29) в уравнение (12.23), полагая далее  $k^2(\mathbf{r}) = k_0^2 n^2(\mathbf{r})$ , где  $n(\mathbf{r})$  — показатель преломления неоднородной среды. После простых преобразований получим

$$\nabla^2 f_0 / (k_0^2 f_0) - 2i \nabla \Psi \nabla f_0 / (k_0 f_0) - i \nabla^2 \Psi / k_0 - [(\nabla \Psi)^2 - k^2 / k_0^2] = 0. \quad (12.32)$$

Слагаемые, входящие в уравнение (12.32), имеют разный порядок малости. Если исходить из того, что  $f_0$  и  $\nabla \Psi$  изменяются на расстоянии порядка  $L$ , то

$$\nabla^2 f_0 / (k_0^2 f_0) \sim \lambda^2 / L^2, \quad 2i \nabla \Psi \nabla f_0 / (k_0 f_0), \quad i \nabla^2 \Psi / k_0 \sim \lambda / L,$$

а последнее слагаемое от  $\lambda / L$  не зависит. Пренебрежем первым слагаемым в уравнении (12.32) и приравняем нулю действительную и мнимую части получившегося уравнения. Получим

$$(\nabla \Psi)^2 = k^2 / k_0^2 = n^2(\mathbf{r}), \quad (12.33)$$

$$f_0 \nabla^2 \Psi + 2 \nabla \Psi \nabla f_0 = 0. \quad (12.34)$$

Уравнение (12.33) называется эйконалом, поскольку оно определяет фазу (эйконал). Уравнение (12.34) связывает амплитуду и фазу волны и называется уравнением переноса. Процесс распространения волны приближенно описывается уравнениями (12.33) и (12.34) в том случае, когда

$$|\nabla^2 f_0| \ll k_0 |f_0 \nabla^2 \Psi|, \quad (12.35)$$

$$|\nabla^2 f_0| \ll 2k_0 |\nabla f_0 \nabla \Psi|, \quad (12.36)$$

т. е. когда отброшенное слагаемое меньше каждого из двух слагаемых следующего порядка малости, оставшихся в уравнении. Неравенства (12.35) и (12.36) являются количественным критерием применимости приближения геометрической оптики.

Более корректный способ получения уравнений типа (12.33) и (12.34) состоит в пренебрежении малыми слагаемыми не в уравнении, а в решении, т. е. это способ, близкий к использованному при получении уравнений (12.5). Будем искать решение  $f(\mathbf{r})$  в виде ряда по степеням  $1/k_0$ :

$$f(\mathbf{r}) = [f_0(\mathbf{r}) + f_1(\mathbf{r})/k_0 + f_2(\mathbf{r})/k_0^2 + \dots] \exp[-ik_0 \Psi(\mathbf{r})]. \quad (12.37)$$

Подставляя разложение (12.37) в уравнение (12.23) и приравнявая члены одного порядка малости, получаем следующие уравнения<sup>1</sup>:

$$[(\nabla \Psi)^2 - k^2/k_0^2] f_0 = 0, \quad (12.38)$$

$$f_0 \nabla^2 \Psi + 2\nabla f_0 \nabla \Psi = 0, \quad (12.39)$$

$$f_1 \nabla^2 \Psi + 2\nabla f_1 \nabla \Psi = i\nabla^2 f_0. \quad (12.40)$$

.....

Уравнения (12.38) и (12.39) совпадают с уравнениями эйконала и переноса. Определив  $\Psi$  и  $f_0$ , найдем  $f_1$  и т. д.

Основным уравнением геометрической оптики считают уравнение эйконала — нелинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$(\partial \Psi / \partial x)^2 + (\partial \Psi / \partial y)^2 + (\partial \Psi / \partial z)^2 = n^2(x, y, z). \quad (12.41)$$

<sup>1</sup>Уравнение (12.38) соответствует приравнению членов  $\sim k_0^2$ , (12.39) — членов  $k_0^1$ , а (12.40) — членов  $\sim k_0^0$ .

Введем обозначения  $\partial\Psi/\partial x = p_x$ ,  $\partial\Psi/\partial y = p_y$ ,  $\partial\Psi/\partial z = p_z$ ; тогда  $d\Psi = p_x dx + p_y dy + p_z dz$  и уравнение (12.41) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dx/p_x &= dy/p_y = dz/p_z = d\Psi/[2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)] = \\ &= dp_x/(\partial n^2/\partial x) = dp_y/(\partial n^2/\partial y) = dp_z/(\partial n^2/\partial z) = ds/(2n), \end{aligned} \quad (12.42)$$

где  $ds$  — элемент траектории луча, а величина  $s$  введена как независимая переменная, смысл которой будет ясен из дальнейшего. Приравнивая каждый член в системе (12.42) последнему, получаем

$$\begin{aligned} dx/ds &= p_x/n, & dy/ds &= p_y/n, & dz/ds &= p_z/n, \\ dp_x/ds &= (\partial n^2/\partial x)/(2n), & dp_y/ds &= (\partial n^2/\partial y)/(2n), \\ dp_z/ds &= (\partial n^2/\partial z)/(2n), & d\Psi/ds &= n. \end{aligned} \quad (12.43)$$

Введем новые переменные:  $l_x = p_x/n$ ,  $l_y = p_y/n$ ,  $l_z = p_z/n$ ,  $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1$ , которые являются направляющими косинусами луча ( $dx/ds = l_x$ ,  $dy/ds = l_y$ ,  $dz/ds = l_z$ ). Используя их, легко показать, что из уравнений (12.43) следует уравнение

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n. \quad (12.44)$$

Поскольку  $|l| = 1$ , из соотношения  $d\mathbf{r}/ds = l$  находим, что  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ . Из последнего соотношения видно, что  $s$  есть длина кривой  $\mathbf{r}(s)$ , а  $l$  — единичный вектор, касательный к кривой  $\mathbf{r}(s)$ .

При  $n = \text{const}$ , т. е. в однородной среде, уравнение (12.44) превращается в уравнение  $d^2\mathbf{r}/ds^2 = 0$ . В результате интегрирования последнего получаем для  $\mathbf{r}$  уравнение прямой линии  $\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$ , что очевидно, так как в однородной среде лучи прямолинейны. В общем случае, когда  $n = n(\mathbf{r})$ , уравнение (12.44) вместе с граничными условиями, задающими направление луча при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , позволяет найти траекторию луча  $\mathbf{r}(s)$ . Когда траектория луча найдена, эйконал (или фаза) может быть определен из уравнения  $d\Psi/ds = n$  в виде криволинейного интеграла вдоль траектории луча в следующем виде:

$$\Psi = \int_A^B n[\mathbf{r}(s)] ds. \quad (12.45)$$

Лучи  $\mathbf{r}(s)$  ортогональны к поверхностям  $\Psi = \text{const}$ . Поскольку волна в геометрической оптике рассматривается как пучок лучей, изменение

интенсивности вдоль луча можно найти, используя уравнение переноса (12.34), которое удобно записать в другой форме, умножая (12.34) на  $f_0$  и учитывая, что  $2f_0 \nabla f_0 = \nabla f_0^2$ . Тогда получим уравнение, эквивалентное уравнению переноса, в такой форме:

$$\nabla(f_0^2 \nabla \Psi) = 0. \quad (12.46)$$

Но  $\text{grad } \Psi = n\mathbf{l}$ , и поэтому из уравнения (12.46) следует, что

$$\text{div}(f_0^2 n\mathbf{l}) = 0. \quad (12.47)$$

Рассмотрим некоторую поверхность  $\Psi' = \text{const}$  и выделим на ней маленькую площадку  $d\sigma_1$ , ограниченную пучком лучей, на которой  $f = f'$ . Проведем эти лучи до пересечения с другой поверхностью  $\Psi'' = \text{const}$ , на которой пучок ограничит площадку  $d\sigma_2$ , а  $f = f''$ . Проинтегрируем уравнение (12.47) по объему, заключенному внутри выделенной лучевой трубки. Тогда согласно теореме Гаусса

$$\int_V \text{div}(f_0^2 n\mathbf{l}) = \oint_{\Sigma} n f_0^2 \mathbf{l} \mathbf{m} d\sigma = 0, \quad (12.48)$$

где  $\mathbf{m}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности, так что на боковой поверхности трубки скалярное произведение  $\mathbf{l} \mathbf{m} = 0$ , на поверхности  $d\sigma_1$   $\mathbf{l} \mathbf{m} = -1$ , а на поверхности  $d\sigma_2$   $\mathbf{l} \mathbf{m} = 1$ . Таким образом, внутри лучевой трубки

$$n_1(f')^2 d\sigma_1 = n_2(f'')^2 d\sigma_2 = n f_0^2 d\sigma = \text{const} = f_{00}^2, \quad (12.49)$$

где  $d\sigma$  — текущее сечение трубки,  $n f_0^2$  пропорционально плотности потока энергии,  $n f_0^2 d\sigma$  пропорционально энергии, переносимой волной вдоль лучевой трубки. Из уравнения (12.49) для интенсивности имеем

$$f_0^2 = f_{00}^2 / (n d\sigma) = (f')^2 n_1 d\sigma / (n d\sigma). \quad (12.50)$$

Выше было показано, что в однородной среде лучи распространяются прямолинейно. Какова интенсивность волны в этом случае? Выделим на какой-либо волновой поверхности анализируемого пучка элемент  $d\sigma$ , как это показано на рис. 12.1. В точке  $O$  пересечения луча  $MN$  с данной волновой поверхностью последняя имеет в общем случае два различных радиуса кривизны, центры  $O_1$  и  $O_2$  которых лежат на луче  $MN$ . Пусть  $ab$  и  $cd$  — элементы двух главных кругов кривизны, проходящих через точку  $O$ ; тогда центры этих кругов лежат в точках  $O_1$ ,

и  $O_2$ . Длины отрезков  $ab$  и  $cd$  пропорциональны соответственно радиусам  $R_1 = O_1O$  и  $R_2 = O_2O$ , а площадь элемента волновой поверхности  $d\sigma \sim R_1R_2$ . Тогда из уравнения (12.50) находим, что

$$f_0^2 \approx \text{const}/(R_1R_2). \quad (12.51)$$

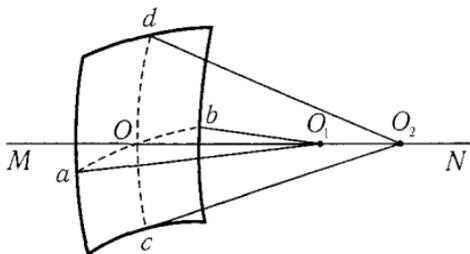


Рис. 12.1. Элемент волновой поверхности, используемый для расчета интенсивности волны в однородной среде

Из формулы (12.50) можно сделать вывод, что интенсивность вдоль луча есть функция расстояния от определенных центров кривизны волновых поверхностей (определенных точек на луче). Если оба радиуса кривизны совпадают, то

$$f_0^2 \approx \text{const}/R^2, \quad (12.52)$$

а поле волны

$$f = \frac{1}{R} \text{const} \cdot \exp(-ikR). \quad (12.53)$$

Как следует из формул (12.52) и (12.53), пучок лучей испускается точечным источником или сходится в точку, а волновые поверхности — концентрические сферы. При  $R_1 \rightarrow 0$  или  $R_2 \rightarrow 0$  (в центре кривизны волновых поверхностей) интенсивность обращается в бесконечность. Рассмотрим, учитывая это свойство, всевозможные лучи пучка. Такое рассмотрение приводит к выводу, что интенсивность волны обращается в бесконечность на двух поверхностях, являющихся геометрическим местом всех центров кривизны волновых поверхностей. Эти поверхности являются каустиками. Они являются геометрическими огибающими системы лучей<sup>1</sup>, т. е. в рамках геометрической оптики поле за каустикой равно нулю — лучи за нее не проникают. В рассмотренном случае лучей со сферическим волновым фронтом обе каустические поверхности сливаются в одну точку — фокус.

## 12.4. Распространение волн в плосколоистой среде в приближении геометрической оптики

При изучении распространения электромагнитных волн в изотропной плазме и радиоволн через атмосферу Земли, а также акустических

<sup>1</sup>Последнее утверждение следует из свойств геометрического места центров кривизны семейства поверхностей: лучи, являющиеся нормальными к волновым поверхностям, касаются каустики.

волн в жидкости, в волноводах с нерегулярным заполнением, в земной коре и т. п. широко и успешно используется модель неоднородной среды, свойства которой изменяются только в одном направлении, т. е.  $n = n(x)$  при  $x > 0$  и  $n = n_0 = \text{const}$  при  $x \leq 0$ . Здесь и далее не будем учитывать случайных флуктуаций свойств среды. Рассмотрим волну, у которой плоскость падения совпадает с плоскостью  $xz$ , а волновой вектор составляет угол  $\vartheta$  с осью  $x$ . Для плоскослоистой среды уравнение эйконала имеет вид

$$(\partial\Psi/\partial x)^2 + (\partial\Psi/\partial z)^2 = n^2(x). \quad (12.54)$$

Из уравнений (12.42) с учетом того, что  $n = n(x)$ , находим

$$p_z = a = \text{const}, \quad (12.55)$$

$$d\Psi/dx = p_x = \sqrt{n^2(x) - a^2}. \quad (12.56)$$

Так как  $l_z = p_z/n$ , то при  $x \leq 0$ , когда  $n = n_0$ , имеют место соотношения:  $p_z = n l_z = n_0 \sin \vartheta_0$  и  $p_x^2 = n^2 - n_0^2 \sin^2 \vartheta$ . Интегрируя уравнение (12.56) получаем

$$\Psi = n_0 z \sin \vartheta_0 \pm \int_0^x \sqrt{n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0} dx. \quad (12.57)$$

Знак перед корнем определяется направлением распространения луча: минус соответствует распространению в положительном направлении  $x$ , плюс — в отрицательном. Из уравнений (12.42) с учетом соотношения (12.57) легко получить уравнение траектории луча:

$$z = \int_0^x n_0 \sin \vartheta_0 [n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0]^{-1/2} dx. \quad (12.58)$$

Уравнение (12.44) приводит к равенству

$$n(x) \sin \vartheta(x) = \text{const} = n_0 \sin \vartheta_0, \quad (12.59)$$

которое является обобщением закона Снеллиуса на случай плоскослоистой среды. Из равенства (12.59) видно, что при  $dn/dx > 0$  угол  $\vartheta$  уменьшается с высотой, а при  $dn/dx < 0$  он растет, т. е. в плоскослоистой среде луч искривляется — имеет место рефракция. Легко понять,

что на высоте  $x_0$ , определяемой из условия  $n(x_0) = n_0 \sin \vartheta_0$ , происходит поворот луча, что аналогично явлению полного внутреннего отражения.

Определим амплитуду волны из уравнения переноса (12.34), выписав для удобства  $\nabla\Psi$  и  $\nabla^2\Psi$ . С учетом закона (12.59) будем иметь

$$\nabla\Psi = \mathbf{z}_0 n_0 \sin \vartheta_0 + \mathbf{x}_0 n(x) \cos \vartheta, \quad (12.60)$$

$$\nabla^2\Psi = (d/dx)(n \cos \vartheta), \quad (12.61)$$

и, наконец,

$$f_0(d/dx)(n \cos \vartheta) + 2n_0 \sin \vartheta_0(\partial f_0/\partial z) + 2n \cos \vartheta(\partial f_0/\partial z) = 0. \quad (12.62)$$

Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (12.62), имеет вид

$$dz/(2n_0 \sin \vartheta_0) = dx/(2n \cos \vartheta) = df_0/[f_0(d/dx)(n \cos \vartheta)].$$

Откуда

$$f_0 = f_{00}/\sqrt{n \cos \vartheta} = f_{00}/\sqrt[4]{n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0}. \quad (12.63)$$

Общее решение (12.29) волнового уравнения может быть записано с учетом (12.63) следующим образом:

$$f = f_{00}[n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0]^{-1/4} \exp\left\{i\omega t - k_0 z n_0 \sin \vartheta_0 \mp k_0 \int_0^x [n^2(x) - n_0^2 \sin^2 \vartheta_0] dx\right\}. \quad (12.64)$$

Два знака в формуле (12.64) соответствуют двум волнам, распространяющимся в сторону возрастающих и в сторону убывающих значений  $x$ . Обе волны распространяются независимо, т. е. в приближении геометрической оптики частичного отражения волн от неоднородной среды не происходит<sup>1</sup>.

При  $n^2 = n_0^2 \sin^2 \vartheta_0$ , т. е. в той области, в которой происходит поворот луча, амплитуда волны стремится к бесконечности, и, следовательно, решение (12.64) в данном случае несправедливо. Как указывалось выше, при распространении волн в неоднородной среде возможно образование фокусов и каустик. В случае, если уравнение семейства лучей,

<sup>1</sup>Таким образом, полученное решение, как и следовало ожидать, имеет вид, аналогичный ВКБ-решению (12.27).

выходящих под углом  $\vartheta_0$  из некоторой точки с координатами  $(0, x)$ , имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\vartheta_0, x), \quad (12.65)$$

где  $\vartheta_0$  является параметром, то уравнение каустики — огибающей семейства лучей — находится [17] исключением  $\vartheta_0$  из уравнения (12.65) и уравнения

$$\partial \mathbf{r}(\vartheta_0, x) / \partial \vartheta_0 = 0. \quad (12.66)$$

Понятно, что приближение геометрической оптики неприменимо в областях, близких к каустикам.

Как выглядят в случае плоскослоистой среды условия применимости геометрической оптики — неравенства (12.35) и (12.36)? Для ответа на этот вопрос определим с помощью формул (12.57) и (12.63) значения  $\nabla^2 \Psi$  и  $\nabla^2 f_0$ . После простых преобразований находим

$$|(d/dx)(n \cos \vartheta)| / (n \cos \vartheta)^2 \ll k_0, \quad (12.67)$$

$$|(d^2/dx^2)(n \cos \vartheta)| / (n \cos \vartheta) \ll k_0 |(d/dx)(n \cos \vartheta)|. \quad (12.68)$$

Неравенство (12.68) выражает ограничение, накладываемое на  $\text{grad}(n \cos \theta)$ , и менее существенно, чем неравенство (12.67). В чем же смысл последнего? Пусть  $\cos \vartheta = 1$ , тогда

$$(\lambda/2\pi) |dn/dx| / n \ll 1, \quad (12.69)$$

где  $\lambda = \lambda_0/n$  — длина волны в среде. Из неравенства (12.69) следует, что приближение геометрической оптики справедливо, когда свойства среды изменяются медленно на расстояниях порядка длины волны. Если  $n \rightarrow 0$ , длина волны в среде  $\lambda \rightarrow \infty$  и изменения свойств среды даже при малой производной  $|dn/dx|$  на расстояниях порядка длины волны будут велики, так что неравенство (12.69) нарушается. Очевидно, что оно нарушается и в случае, когда производная  $|dn/dx|$  велика.

При вертикальном падении волны на неоднородную среду обращение показателя преломления среды в нуль есть условие отражения волны от среды. Такое условие реализуется, например, для плазмы в радиодиапазоне [18]. В то же время, как указано в [18], в разреженной плазме резкие градиенты  $n$  (производная  $|dn/dx|$  велика) могут возникнуть лишь как спорадическое явление. В отсутствие поглощения для плазмы с концентрацией  $N(x)$  на частоте  $\omega$

$$n^2(x) = 1 - 4\pi e^2 N(x) / (m\omega^2). \quad (12.70)$$

При достаточно больших  $N(x)$  или малых со квадрат показателя преломления обращается в нуль. В случае вертикального падения  $n = 0$ , и согласно соотношению (12.70) в точке отражения

$$N(x) = m\omega^2/(4e^2) = 1,24 \cdot 10^{-8} \bar{f}^2 \quad [\Gamma\text{ц}] \quad (12.71)$$

(здесь  $\bar{f}$  — частота). Эта формула является одним из основных соотношений, на основе которых интерпретируются ионосферные данные, результаты радиоастрономических исследований солнечной атмосферы и др. [18].

Там, где условия применимости приближения геометрической оптики нарушаются, нужно найти либо способы выхода за границы приближения, либо точное решение уравнения, описывающего волновое распространение в неоднородной среде. Для уравнения такого типа, как, например,

$$\nabla^2 f + k_0^2 \varepsilon(x) f = 0, \quad (12.72)$$

точное решение может быть получено в нескольких частных случаях зависимости  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  — линейной, параболической, экспоненциальной и т. д. Будем искать решение уравнения (12.72) вблизи точки поворота, так как вдали от нее хорошо «работает» решение (12.64). Предположим, что среда плоскостойкая (ее свойства в направлении  $z$  не меняются и, следовательно,  $f \sim \exp(-iaz)$ , где  $a = \text{const} = k_0 \sin \vartheta_0$  при  $n_0 = 1$ ), и будем рассматривать волну, плоскость распространения которой лежит в плоскости  $xz$ . С учетом сказанного уравнение (12.70) примет вид

$$d^2 f/dx^2 + k_0^2 [\varepsilon(x) - \sin^2 \vartheta_0] f = 0. \quad (12.73)$$

Его нужно решать при условии  $[k_0^2 [\varepsilon(x) - \sin^2 \vartheta_0]] \rightarrow 0$ . При плавном изменении свойств среды в окрестности точки поворота луча можно считать, что  $\varepsilon(x)$  изменяется по линейному закону, т. е.  $\varepsilon(x) = 1 + (d\varepsilon/dx)x = 1 - x/x_1$ , где  $x_1$  — расстояние от начала неоднородного слоя до области отражения. В этом случае уравнение (12.73) можно записать так:

$$d^2 f/dx^2 + k_0^2 [\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1] f = 0. \quad (12.74)$$

Сделаем в уравнении (12.74) замену переменных  $\xi = (k_0 x_1)^2 \times (\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1)$ , что превращает его в уравнение

$$d^2 f/d\xi^2 + \xi f = 0, \quad (12.75)$$

решение которого известно и имеет вид

$$f = f_0 \Phi(\xi), \quad (12.76)$$

где  $\Phi(\xi) = (1/\sqrt{\pi}) \int_0^{\infty} \cos(t^3/3 + t\xi) dt$  — функция Эйри. Решение уравнения (12.75) может быть представлено также через функции Ханкеля порядка  $1/3$  (см., например, [17]). При  $\xi > 0$

$$f(\xi) = f_0 \sqrt{\pi/3} \xi^{1/2} \{ H_{1/3}^{(1)}[(2/3)\xi^{3/2}] \exp[(i2\pi)/3] + H_{1/3}^{(2)}[(3/2)\xi^{2/3}] \exp[(-i2\pi)/3] \}, \quad (12.77)$$

а при  $\xi < 0$

$$f(\xi) = f_0 \sqrt{\pi/3} \xi^{1/2} \exp(-i2\pi/3) H_{1/3}^{(2)}[-i(2/3)|\xi|^{3/2}]. \quad (12.78)$$

Если  $\xi \gg 1$ , то естественно воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Ханкеля при больших значениях аргумента, что дает

$$H_{1/3}^{(1)}[(2/3)\xi^{3/2}] = \sqrt{3/(\pi\xi^{3/2})} \exp\{i[(2/3)\xi^{3/2} - (5/12)\pi]\}, \quad (12.79)$$

$$H_{1/3}^{(2)}[(2/3)\xi^{3/2}] = \sqrt{3/(\pi\xi^{3/2})} \exp\{i[-(2/3)\xi^{3/2} + (5/12)\pi]\}. \quad (12.80)$$

Подставляя выражения (12.79) и (12.80) в формулы (12.77) и (12.78), находим при  $\xi > 0$

$$f(\xi) = 2f_0 \xi^{-1/4} \cos[(2/3)\xi^{3/2} + \pi/4], \quad (12.81)$$

и при  $\xi < 0$

$$f(\xi) = f_0 \xi^{-1/4} \exp[-(2/3)|\xi|^{3/2}]. \quad (12.82)$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , из соотношений (12.81) и (12.82) окончательно получаем при  $\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1 > 0$

$$f(x) = f_0 \cdot (k_0 x_1)^{-1/6} (\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1)^{-1/4} \times \\ \times \left\{ \exp \left[ -ik_0 \int_0^x \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1} dx + i(\pi/4) \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[ ik_0 \int_0^x \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1} dx - i(\pi/4) \right] \right\}. \quad (12.83)$$

а при  $\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1 < 0$

$$f(x) = f_0(k_0 x_1)^{-1/6} |\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1|^{1/4} \times \\ \times \exp \left\{ -k_0 \int_0^x |\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1|^{1/4} dx \right\}. \quad (12.84)$$

Легко видеть, что выражение (12.83) отличается от решения (12.64), полученного в приближении геометрической оптики, лишь постоянными добавками, входящими в фазу падающей и отраженной волн. Кроме того, в отличие от формулы (12.64) в соотношения (12.83) и (12.84) не включена очевидная зависимость от  $z$  и  $t$ .

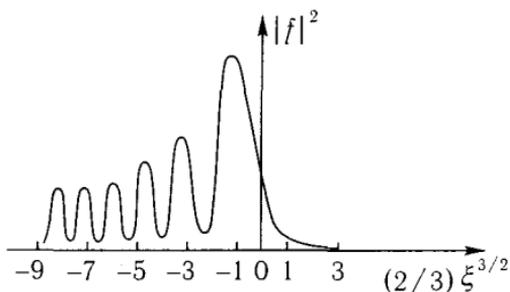


Рис. 12.2. Зависимость функции  $|f|^2$  от  $(2/3)\xi^{3/2}$ , иллюстрирующая характер изменения амплитуды поля вблизи области отражения в неоднородной среде

Поле  $f(x, z)e^{i\omega t}$  при  $\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1 > 0$  есть стоячая волна. Ее амплитуда увеличивается с приближением к области отражения, сохраняя везде конечное значение. Волнового процесса нет, когда  $\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1 < 0$ , — в эту область проникает лишь экспоненциально затухающее поле. Когда  $\cos^2 \vartheta_0 - x/x_1 = 0$ , происходит полное отражение волны (при отражении падающая и отраженная волны сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ ). Описанные процессы иллюстрируются рис. 12.2, взятом из [17].

## 12.5. Линейное взаимодействие волн в неоднородной среде

Выше неоднократно отмечалось, что в приближении геометрической оптики частичного отражения волн от неоднородной среды не происходит, т. е. волны распространяются независимо. Как решать задачу, чтобы такое отражение присутствовало в решении? Один из способов — найти поправки следующего приближения к ВКБ-решению, из-за

которых встречные волны оказываются связанными. Однако можно поступить иначе, применив другой метод, например метод Ван-дер-Поля. Сделаем это на примере конкретной задачи — задачи о переходном слое. Поставим задачу так: пусть есть слой ширины  $l$ , в котором свойства среды плавно изменяются. На границу  $x = 0$  слоя падает волна с амплитудой  $A(0) = A_0$ ; амплитуда встречной (отраженной) волны на границе  $x = l$  равна нулю. Надо найти амплитуду  $B(x)$  волны, возникающей из-за отражения от плавных неоднородностей, т. е. найти амплитуду волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси  $x$ . Введем новую переменную  $V = du/dx$  и запишем для удобства (12.24) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$du/dx = V, \quad dV/dx = -k_0^2 \varepsilon(x) u. \quad (12.85)$$

Решение системы (12.85) будем искать в виде (12.27), считая  $A$  и  $B$  функциями координаты:

$$u = A(x)\varepsilon(x)^{-1/4} \exp(-i\varphi) + \\ + B(x)\varepsilon(x)^{-1/4} \exp(i\varphi), \quad \text{где} \quad \varphi = k_0 \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx.$$

Так как вместо одной переменной  $u$  мы ввели две новые ( $A$  и  $B$ ), то одно соотношение, связывающее эти новые переменные, можно выбирать произвольно. Потребуем из соображений удобства, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{A'(x)}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} e^{-i\varphi} - \frac{A(x)\varepsilon'(x)}{4\sqrt[4]{\varepsilon^5(x)}} e^{-i\varphi} + \frac{B'(x)}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} e^{i\varphi} - \frac{B(x)\varepsilon'(x)}{4\sqrt[4]{\varepsilon^5(x)}} e^{i\varphi} = 0. \quad (12.86)$$

Тогда  $V = -ik_0\varepsilon^{1/4}A \exp(-i\varphi) + ik_0\varepsilon^{1/4}B \exp(i\varphi)$ . Подставляя это выражение во второе уравнение системы (12.85), находим

$$-ik_0\varepsilon^{1/4}A'e^{-i\varphi} - ik_0 \frac{\varepsilon' A e^{-i\varphi}}{4\varepsilon^{3/4}} + ik_0\varepsilon^{1/4}B'e^{i\varphi} + ik_0 \frac{\varepsilon' B e^{i\varphi}}{4\varepsilon^{3/4}} = 0.$$

Объединение этого уравнения с условием (12.86) дает следующую систему уравнений:

$$(4\varepsilon A' - \varepsilon' A) e^{-i\varphi} + (4\varepsilon B' - \varepsilon' B) e^{i\varphi} = 0, \\ (4\varepsilon A' + \varepsilon' A) e^{-i\varphi} - (4\varepsilon B' + \varepsilon' B) e^{i\varphi} = 0.$$

Разрешая эту систему относительно производных  $A'$  и  $B'$ , получаем

$$A' = \frac{\varepsilon' B}{4\varepsilon} e^{2i\varphi}, \quad B' = \frac{\varepsilon' A}{4\varepsilon} e^{-2i\varphi}. \quad (12.87)$$

Уравнения (12.87) — точные уравнения: пока сделана всего лишь замена переменных — от  $u$  и  $V$  мы перешли к  $A$  и  $B$ . Но, поскольку неоднородность слабая,  $\varepsilon'$  мала по сравнению с  $\varepsilon$  и, следовательно,  $A$  и  $B$  изменяются медленно. Поэтому для решения (12.87) можно применить метод последовательных приближений, полагая в нулевом приближении  $\varepsilon' = 0$  и  $A = A_0$ .

Подставляя  $A = A_0$  во второе уравнение из (12.87), получаем

$$B(x) = A_0 \int_0^x \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} \exp\left(-2ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon} dx\right) dx.$$

Учет поправки первого приближения дает

$$A(x) = A_0 + \int_0^x \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} B(x) \exp\left(2ik_0 \int_0^x \sqrt{\varepsilon} dx\right) dx.$$

Это уже выход за рамки геометрической оптики: волны взаимодействуют друг с другом — амплитуды их связаны.

Рассмотрим еще один пример линейного взаимодействия волн, имеющий важное значение в СВЧ-электронике. В гл. 7 мы обсуждали распределенный ЛБВ-усилитель и распределенный ЛОВ-генератор. Одно из главных достоинств ЛБВ, ставшей основным прибором спутниковой связи, в том, что она обеспечивает большой коэффициент усиления в широком диапазоне усиливаемых частот (октава и более). Серьезной помехой работе усилителя является возбуждение паразитных автоколебаний на обратной волне (физика автоколебаний такая же, как в ЛОВ-генераторе). Популярный способ борьбы с паразитным самовозбуждением — увеличение пускового тока, необходимого для начала колебаний. Последнего можно добиться плавным изменением геометрических параметров замедляющей системы вдоль длины пространства взаимодействия, т. е. плавным изменением фазовой скорости обратной волны. В простейшей постановке возникает задача о линейном взаимодействии медленной волны пространственного заряда (МВПЗ) в электронном потоке (см. гл. 10) с обратной электромагнитной волной, фазовая скорость которой плавно изменяется вдоль направления движения

электронов [11]<sup>1</sup>. Уравнение возбуждения продольной компоненты напряженности электрического поля  $E$  такой обратной волны сгруппированным током  $I_M$ , обусловленным возбуждением в электронном потоке МВПЗ, имеет вид

$$dE/dx + [ik_0(x) - (1/k_0(x))dk_0(x)/dx]E = (1/2)k_0^2(x)KI_M(x), \quad (12.89)$$

где  $k_0 = \omega/v_\Phi = k_{00}\xi(x)$ ,  $k_{00} = 2\pi/\lambda_0$ . В качестве второго уравнения используем уравнение (10.39):

$$dI_M/dx + i(k_e + k_q)I_M = -[k_e I_0/(4V_0 k_q)]E(x). \quad (12.89)$$

Будем в дальнейшем использовать обозначения гл. 10.

Граничные условия к системе уравнений (12.88) и (12.89) формулируем следующим образом:

$$I_M(0) = 0, \quad E(0) = E_0, \quad (12.90)$$

где  $E_0$  — неизвестная амплитуда напряженности электрического ВЧ-поля обратной волны. Исключая из уравнений (12.88) и (12.89)  $E(x)$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I_M}{dx^2} + \left\{ i[k_e + k_q + k_0(x)] - \frac{1}{k_0} \frac{dk_0(x)}{dx} \right\} \frac{dI_M}{dx} + \\ + \{i(k_e + k_q)[k_0(x) - (1/k_0)dk_0(x)/dx] + \\ + (1/4)C^2 k_0^2(x)(QC)^{-1/2}\} I_M = 0. \end{aligned} \quad (12.91)$$

Будем искать решение уравнения (12.91) в виде

$$\begin{aligned} I_M(x) = v(x) \exp\left((1/2) \int [(k_e + k_q + k_0(x))^2 + \right. \\ \left. + (2i/k_0(x))(k_e + k_q + k_0(x))dk_0(x)/dx - \right. \\ \left. - (dk_0(x)/dx)^2/k_0^2(x)]^{1/2} dx\right). \end{aligned} \quad (12.92)$$

Тогда после подстановки выражения (12.92) в уравнение (12.91) для  $v(x)$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} + \left\{ \frac{C^2 k_0^2(x)}{4\sqrt{QC}} + \frac{1}{4}[k_0(x) - k_e - k_q]^2 - \frac{i}{2} \frac{k_e + k_q}{k_0(x)} \frac{dk_0(x)}{dx} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{3}{4k_0^2(x)} \right] \left[ \left( \frac{dk_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{k_0^2(x)} \frac{d^2 k_0(x)}{dx^2} \right] \right\} v = 0. \end{aligned} \quad (12.93)$$

<sup>1</sup>Излагаемый далее способ решения предложен А. Ю. Дмитриевым.

Пусть  $k_0(x)$  изменяется таким образом, что двумя слагаемыми —  $(dk_0(x)/dx)^2$  и  $d^2k_0(x)/dx^2$  — можно пренебречь и считать, что  $(k_e + k_q)k_0^{-1}(x)dk_0(x)/dx \approx dk_0(x)/dx$ . Тогда вместо уравнения (12.93) имеем

$$d^2v/dx^2 + F(x)v = 0,$$

где

$$F(x) = \frac{C^2 k_0^2(x)}{4\sqrt{QC}} + (1/4)[k_0(x) - k_e - k_q]^2 - \frac{i}{2} \frac{dk_0(x)}{dx}. \quad (12.94)$$

Если теперь для  $F(x)$  выполняется условие  $(\lambda_0/2\pi)|dF(x)/dx| \ll F(x)$  применимости приближения геометрической оптики, то с учетом первого из граничных условий (12.90) получаем

$$I_M = 2iA[F(x)]^{1/4} \times \\ \times \exp\left\{-i \int_0^x (1/2)[k_0(\zeta) + k_e + k_q] d\zeta\right\} \sin \int_0^x \sqrt{F(\zeta)} d\zeta, \quad (12.95)$$

где  $A$  — произвольная постоянная. Подставляя выражение (12.95) в уравнение (12.89), находим для распределения ВЧ-поля вдоль длины пространства взаимодействия следующее выражение:

$$E(x) = -2KC^{-2}A\sqrt{QC} \exp\left\{-i \int_0^x (1/2)[k_0(\zeta) + k_e + k_q] d\zeta\right\} \times \\ \times \left\{2iF^{1/4}(x) \cos \int_0^x \sqrt{F(\zeta)} d\zeta + [(k_0(x) - k_e - k_q)F^{1/4}(x) - \right. \\ \left. - (i/2)F^{-5/4}(x)dF(x)/dx] \sin \int_0^x \sqrt{F(\zeta)} d\zeta\right\}. \quad (12.96)$$

Произвольная постоянная  $A$  может быть определена из второго граничного условия (12.90), но в этом нет необходимости, поскольку условие самовозбуждения колебаний на обратной волне

$$E(l) = 0 \quad (12.97)$$

такое, что все постоянные выпадают ( $l$  — длина пространства взаимодействия). Чтобы получить простое аналитическое решение, будем

считать, что

$$F(x) \approx (1/4)C^2 k_0^2(x)(QC)^{-1/2}. \quad (12.98)$$

С учетом выражений (12.98) и (12.96) из условия самовозбуждения (12.97) имеем

$$(1/2)Ck_{00}l(QC)^{-1/4} \int_0^l \xi(x) dx = \pi/2, \quad (12.99)$$

$$k_{00}\xi(x) = k_e + k_q. \quad (12.100)$$

В наиболее просто реализуемом практически случае  $\xi(x) = 1 + \alpha x$  (как в плоскостой среде) из пусковых условий (12.99) и (12.100) находим

$$(1/2)Ck_{00}l(QC)^{-1/4}(1 + \alpha l/2) = \pi/2, \quad (12.101)$$

$$k_e + k_q - k_{00} = \alpha k_{00}l. \quad (12.102)$$

Если параметры исследуемой ЛОВ и соответствующей ей лампы с неизменной вдоль пространства взаимодействия фазовой скоростью обратной волны одинаковы, то из условий (12.101) и (12.102) следует такое отношение пусковых токов:

$$I_{v\Phi}(x)/I_{v\Phi} = [1 + \alpha l/2]^{-2}. \quad (12.103)$$

В общем случае (см. условия (12.99) и (12.100))

$$I_{v\Phi}(x)/I_{v\Phi} = l^2 / \int_0^l \xi(x) dx. \quad (12.104)$$

Из выражений (12.103) и (12.104) можно сделать вывод, что при отрицательных градиентах  $k_0(x)$  (или  $\alpha l < 0$ ) пусковой ток увеличивается, что позволяет указать способ повышения устойчивости ЛБВ-усилителя к самовозбуждению на обратной волне. Рассмотрены два очень простых примера линейного взаимодействия волн. Число подобных примеров можно продолжить, их тысячи, — и касаются они самых разных областей физики — гидродинамики, физики плазмы, электродинамики, акустики, а в последние годы — физики жидких кристаллов, ферродиеlectricов, световодов, планарных волноводов и др. Как считают авторы обзора [19], проблему линейного взаимодействия волн можно сейчас назвать важнейшей проблемой линейной теории колебаний

и волн<sup>1</sup>. Исследования в этой области начались в 50-х годах нашего столетия при изучении распространения волн в ионосферной плазме (см., например, [18, 20, 21]), а также при исследовании нерегулярных волноводов в диапазоне СВЧ и акустических волн в слоистых средах (см., например, [22, 13]). В чем же в общем случае проявляется линейное взаимодействие волн? Можно дать следующее определение. Явление линейного взаимодействия волн (линейной трансформации мод) состоит в том, что при прохождении волн через неоднородный участок среды их геометрические амплитуды могут изменяться неадиабатическим образом. Иными словами, линейное взаимодействие проявляется в отличии решений задачи о распространении волн в неоднородной среде от решений в приближении геометрической оптики: при прохождении излучения через неоднородную область среды отношение амплитуд и разность фаз волн, составляющих это излучение, изменяются иначе, чем следует из ВКБ-приближения, так что распространяющиеся волны перестают быть независимыми. Характер и масштаб неоднородности среды в области взаимодействия определяют трансформацию волн, исследуя которую можно получить сведения о структуре самой неоднородности. Более того, изменяя неоднородность, можно управлять эффективностью трансформации волн, а следовательно, интенсивностью и поляризацией проходящих и отраженных волн.

Изложим, следуя [19], постановку задачи о линейном взаимодействии волн в более-менее общей физической ситуации — для волн любой природы в произвольной анизотропной неоднородной среде.

Пусть в стационарной среде без источников распространяется монохроматическая волна. Ограничимся рассмотрением одномерного случая и будем опускать фактор  $\exp(i\omega t)$ . Тогда волновые уравнения для  $N$  компонент  $X_\alpha$  поля можно записать (см., например, [20]) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$de/d\zeta = -iTe. \quad (12.105)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $e$  —  $N$ -компонентный вектор-столбец комплексных полевых переменных  $X_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ );  $T = T(x)$  — квадратная матрица, определяемая локальными свойствами среды ( $T(x)$  не содержит дифференциальных операторов и имеет одинаковый вид как для однородной, так и для неоднородной

<sup>1</sup>При дальнейшем изложении будем следовать обзору [19], в котором изложено современное состояние проблемы взаимодействия электромагнитных волн в слабо-анизотропных, плавно неоднородных средах.

среды);  $\zeta = k_0 x$  — безразмерная пространственная координата вдоль направления  $x$  распространения волн;  $k_0 = \omega/c$ ;  $c = \text{const}$  — характерная скорость волн (в электродинамике — скорость света в вакууме). Частотная дисперсия учитывается зависимостью  $T(\omega)$ .

Представим вектор-столбец комплексных полевых переменных в виде

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^N f_i \mathcal{E}_i, \quad \mathcal{E}_i = \Phi_i \mathbf{e}_i, \quad (12.106)$$

где  $\mathbf{e}_i$  — нормальные волны, являющиеся полной системой собственных функций для матрицы  $T$  в каждой точке среды;  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^* = 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Соответствующие им собственные значения — показатели преломления  $n_i$  — определим с помощью уравнения  $T \mathbf{e}_i = n_i \mathbf{e}_i$ .

Подставим (12.106) в систему (12.105) и перейдем к уравнениям для комплексных амплитуд взаимодействующих волн, считая  $n_i = n_i(\zeta)$ ,  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(\zeta)$ ,  $f_i = f_i(\zeta)$ . Тогда

$$df_i/d\zeta + in_i f_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} f_j, \quad a_{ij} = (d\mathcal{E}_j/d\zeta) \mathcal{E}_i^*. \quad (12.107)$$

При получении (12.107) использована взаимная с  $\mathcal{E}_j$  система векторов  $\mathcal{E}_j^*$  таких, что  $\mathcal{E}_j \mathcal{E}_j^* = \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Эта система определяет так называемые «переносные» волны — собственные векторы транспонированной матрицы  $T^T \mathcal{E}_i^* = n_i \mathcal{E}_i^*$ , так что матрица  $T_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N n_i \mathcal{E}_{i\alpha} \mathcal{E}_i^*$ . Из системы (12.107) видна линейная связь (зависимость  $f_i$  от  $f_j$  при  $i \neq j$ ) между волнами в неоднородной среде, где  $a_{ij} \neq 0$ . Из условия  $a_{ii} = -(d\mathcal{E}_i/d\zeta) \mathcal{E}_i^* = 0$  следует уравнение

$$(1/\Phi_i) d\Phi_i/d\zeta + d\mathbf{e}_i/d\zeta \mathbf{e}_i^* = 0 \quad (12.108)$$

для определения множителей  $\Phi_i(\zeta)$ . Условие  $a_{ii} = 0$  означает, что локальные значения показателей преломления взаимодействующих волн не зависят от неоднородности среды (см. (12.107)). Можно показать, что в приближении геометрической оптики уравнение (12.105) имеет независимые решения  $\Phi_i \mathbf{e}_i \exp(-i \int n_i d\zeta)$ . В них  $\Phi_i$  находятся из уравнения (12.108). Следовательно, в соответствии с (12.106) взаимодействие геометрических волн описывается изменением амплитуд  $f_i$ . Когда  $a_{ij} \rightarrow 0$ , то из системы уравнений (12.107) получаем решение

в приближении геометрической оптики (решение метода ВКБ):

$$f_i = f_i(\zeta_{\text{вх}}) \exp \left[ -i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta} n_i(\zeta) d\zeta \right]. \quad (12.109)$$

В неоднородной среде, когда  $a_{ij} \neq 0$ , решения уравнений (12.107) отличаются от ВКБ-решения (12.109). В этом отличии, как уже упоминалось, и проявляется линейное взаимодействие волн, которое состоит в том, что поляризация волны в приближении геометрической оптики (она задается компонентами волнового поля  $X_\alpha/X_\beta$ ) не сохраняется адиабатически такой, какой она локально должна быть для данной геометрооптической волны. Таким образом, с точки зрения геометрической оптики при взаимодействии волн различные компоненты поля меняются несогласованно и тем самым нарушают локальную структуру данной нормальной волны  $e_i$ , что приводит к появлению других волн.

В большинстве случаев рассматривают взаимодействие двух волн (попутных или встречных), которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} df_1/d\zeta + in_1 f_1 &= a_{12} f_2, \\ df_2/d\zeta + in_2 f_2 &= a_{21} f_1. \end{aligned} \quad (12.110)$$

Приближение двух взаимодействующих волн справедливо, во-первых, для попутных волн, когда взаимодействуют только те две волны, дисперсионные ветви  $n_1(\zeta)$  и  $n_2(\zeta)$  которых сближаются, и, во-вторых, для встречных волн, когда ветви близки друг к другу. Особо подчеркнем, что явление линейного взаимодействия не только связано с характером поведения дисперсионных ветвей волн, но в меньшей степени определяется характером их поляризации.

В обзоре [19] изложен качественный анализ линейного взаимодействия волн, описываемого системой (12.110). Этот анализ позволяет выяснить возможность появления и степень эффективности взаимодействия волн. Кроме того, он позволяет выявить характерные зависимости эффекта трансформации волн от свойств неоднородной среды.

Не будем далее останавливаться на математической стороне вопроса (см. [19]). Опишем лишь кратко особенности взаимодействия мод в волноводных системах, когда трансформация волн происходит из-за неоднородности границ. В качестве примеров здесь можно упомянуть

неоднородные длинные линии, нерегулярные волноводы, планарные и волоконные световоды и др. Уравнения, описывающие взаимодействие волн в указанных системах, такие же, как уравнения (12.110), но коэффициенты связи волн  $a_{ij}$  определяются локальными свойствами границ. Явление взаимодействия волн обусловлено в обсуждаемых случаях нерегулярностью связи мод вдоль волновода, а не просто их связью (в этом отличие от случаев взаимодействия волн с неизменными постоянными распространения и неизменными коэффициентами связи вдоль всей области взаимодействия (см., например, гл. 10).

В качестве конкретного примера рассмотрим моды в скрученном световоде. Благодаря тому что освоена технология изготовления волокон, сохраняющих поляризацию излучения на длинах в сотни метров и более, а также в связи с перспективой применения таких волокон в технике оптической связи и т. п. заметно активизировались исследования поляризационных свойств одномодовых волоконных световодов (см., например, [23]). В регулярном двулучепреломляющем одномодовом световоде, который аналогичен анизотропной среде, распространяются две основные моды с разными фазовыми скоростями, поляризованные практически линейно и ортогонально друг к другу (так называемые  $LP$ -моды) [19]. Вырождение мод в реальном волокне с круглым сечением снимается из-за изгибов, неизбежной эллиптичности сечения сердцевинки и т. п. Уравнения распространения связанных  $LP$ -мод в слабонаправляющем и слабоанизотропном световоде, приведенные в [19], имеют следующий вид:

$$dE_z/d\zeta + in_z E_z = \alpha E_y,$$

$$dE_y/d\zeta + in_y E_y = -\alpha E_z, \quad (12.111)$$

где  $E_z$  и  $E_y$  — амплитуды основных мод,  $z$  и  $y$  — локальные основные оси волокна (в поперечном сечении),  $\alpha$  — коэффициент связи, являющийся действительной величиной. Этот коэффициент определяется деформацией сердцевинки волокна, воздействием внешних полей, анизотропией и гиротропией стекла, а в скрученном волноводе — азимутальным вращением оптических осей. В последнем случае коэффициент связи  $\alpha$  приблизительно равен локальной пространственной скорости  $v$  вращения оптических осей и может достигать значений порядка  $|n_z - n_y|$  (заметим, что пространственный период биений основных мод равен  $(2\pi/k_0)|n_z - n_y|$ ). При этом свойства нормальных волн световода сильно изменяются. Особенно важно, что их поляризация становится эллиптической, что видно из выражений для показате-

лей преломления  $\tilde{n}_1$ ,  $\tilde{n}_2$  и коэффициентов поляризации  $\tilde{K}_1$ ,  $\tilde{K}_2$  ( $\tilde{K}_i = = -iE_{iy}/E_{iz}$ , где  $i = 1, 2$ ) нормальных мод равномерно скрученного волокна. Соответствующие соотношения, которые легко находятся из системы (12.111) при  $n_z = \text{const}$ ,  $n_y = \text{const}$ , и  $\alpha = v = \text{const}$ , имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{1,2} &= (1/2)(n_z + n_y) \pm v\sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \\ \tilde{K}_{1,2} &= \tilde{q} \mp \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \quad \tilde{q} = (1/v)(n_z - n_y).\end{aligned}\quad (12.112)$$

Эти моды принято называть винтовыми. В неравномерно скрученном световоде, где  $n_z$ ,  $n_y$  и  $v$  не являются постоянными, возникает взаимодействие винтовых мод, которое описывается системой (12.110). В данном конкретном случае качественный анализ [19] этой системы приводит к выводу, что эффективное взаимодействие винтовых мод имеет место только на тех участках световода, где есть переход от сильно скрученного (в масштабе периода биений мод) к слабо скрученному волокну или наоборот<sup>1</sup>. В ряде применений (например, оптическая связь) трансформация волн нежелательна и нужно ликвидировать нерегулярные участки взаимодействия. В других случаях, например для измерения локальных оптических характеристик волокна, нужна, наоборот, эффективная трансформация мод. Отметим в заключение, что область приложения эффектов линейной трансформации волн непрерывно расширяется.

<sup>1</sup>Интересно, что и в неоднородных жидких кристаллах холестерического типа эффективная трансформация винтовых волн происходит при переходе от сильно закрученной к слабо закрученной спирали или наоборот [19] (имеется в виду так называемая холестерическая спираль—винтовая линия; ее описывает директор — единичный вектор, характеризующий направление, в котором преимущественно выстроены длинные оси молекул жидкого кристалла).

## Глава 13

## Нелинейный осциллятор

## 13.1. Вводные замечания

Как и в первой части книги, анализ колебательных и волновых явлений в нелинейных системах и средах (т. е. нелинейных колебаний и нелинейных волн) и соответствующих им моделей будем проводить параллельно. В связи с этим сделаем несколько кратких замечаний, в основном, исторического плана.

Несмотря на то, что первые нелинейные задачи теории волн появились очень давно (например, уравнение Кортевега–де Вриза, описывающее уединенные волны на поверхности жидкости, было получено в 1895 г.), когда нелинейная теория колебаний еще только зарождалась<sup>1</sup>, развитие теории нелинейных колебаний и теории нелинейных волн в течение многих десятилетий шло практически независимо. Теория волн, несмотря на отдельные исключения, вплоть до 40-х годов оставалась в основном «линейной наукой». Существенное повышение интереса к нелинейным процессам произошло несколько позднее, когда теория ударных волн в газах нашла широкое применение. По настоящему же «нелинейной» теория волн стала лишь сравнительно недавно (в 60-е годы), прежде всего в связи с задачами радиофизики, физики плазмы, нелинейной оптики и акустики<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Источником задач тогда почти исключительно служила нелинейная механика, модели которой обычно были чисто консервативными. Однако тогда же А. Пуанкаре создал теорию предельных циклов и даже появились отдельные экзотические примеры, в которых обнаружилось незатухающие колебания в системах с трением [1].

<sup>2</sup>Замечательно, что сейчас в определенном смысле круг замыкается — центр тяжести интересов нелинейной теории волн вновь смещается в сторону задач газовой гидродинамики, что определяется быстро расширяющимися исследованиями процессов в атмосфере и океане Земли.

Становление же нелинейной теории колебаний было гораздо более быстрым. На базе задач интенсивно развивавшихся в начале века радиотехники, теории регулирования и, конечно, классической механики уже к середине 30-х годов сформировались основы классической теории нелинейных колебаний. Определяющий вклад в создание этой теории был внесен Л. И. Мандельштамом [2] и его учениками. Полностью был исследован нелинейный осциллятор, были обнаружены эффекты обмена энергией в системе связанных осцилляторов, уже была, в основном, построена Андроновым и Ван-дер-Полем теория периодических автоколебаний, открыты явления синхронизации и конкуренции и даже предпринята Виттом попытка построения теории автоколебаний распределенных систем.

Однако классическая теория колебаний — это, за редким исключением, теория систем с небольшим числом степеней свободы — систем, демонстрирующих простое периодическое или квазипериодическое поведение. Для современной теории характерен существенный интерес к сильнонелинейным системам, к исследованию сложного поведения (в том числе и стохастического) простых динамических систем, к поведению ансамблей.

Возвращаясь к вопросу о параллельном изложении теории колебаний и теории волн, еще раз подчеркнем, что в теории волн существуют явления, имеющие буквальный аналог в теории колебаний. Такова, например, аналогия между пространственными биениями волн при их стационарном взаимодействии в нелинейной среде и временными биениями в связанных нелинейных осцилляторах. Здесь будет уместно ответить на вопрос: почему и до каких пор волновому (распределенному) эффекту можно непосредственно сопоставлять эффект конечномерный (а точнее, маломерный), т. е. для описания волновой системы использовать модель, фазовое пространство которой имеет небольшую размерность? Ответ на этот вопрос следует из сопоставления нелинейных волновых процессов в двух предельных случаях — в средах с сильной дисперсией и малой нелинейностью и в нелинейных средах без дисперсии [18, 19]. При распространении волны, например, в сжимаемом газе или на поверхности мелкой воды (дисперсии нет) вершина волны движется быстрее ее основания, волна непрерывно искажается и в некоторый момент происходит ее опрокидывание — профиль должен стать неоднозначным. Такой процесс, очевидно, уже не описывается конечномерной моделью. Причину этого удобно пояснить с помощью очень наглядного спектрального подхода. В среде без дисперсии фазовая скорость малых возмущений любой частоты одинакова. И поэтому все

(даже слабые), появляющиеся из-за нелинейности гармоника резонансны с основной волной и эффективно возбуждаются ею. Таким образом, если бы мы захотели описать процесс с помощью набора гармоник, нам бы пришлось учесть их бесконечно много.

Если же при слабой нелинейности дисперсия велика (как, например, для сред, в которых распространяются нелинейные световые волны), то в синхронизме могут оказаться лишь несколько волн, и поэтому можно воспользоваться прямыми аналогиями с процессами в колебательных системах с небольшим числом степеней свободы. Таким образом, эти прямые аналогии возможны, когда фиксирована структура взаимодействующих волн и их немного. Подчеркнем здесь, что эти волны вовсе не обязательно должны быть, как в приведенном примере, синусоидальными в пространстве. Эти волны могут быть сами по себе уже установившимся результатом взаимодействия большого числа гармонических волн (например, нелинейные стационарные волны в средах со слабой дисперсией). Важно лишь, чтобы при взаимодействии друг с другом во времени они вели себя как хорошо детерминированные объекты с известными характеристиками.

После этих кратких замечаний перейдем непосредственно к обсуждению явлений, эффектов и моделей нелинейной теории.

## 13.2. Качественное и аналитическое описание.

### Примеры нелинейных систем

Подобно тому как «линейную» часть книги мы начали с обсуждения линейного осциллятора, эту часть начнем с исследования нелинейного осциллятора, уравнение которого имеет вид

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (13.1)$$

Если  $f(x)$  — линейная функция, то это — линейный осциллятор (см. гл. 1). Какие физические задачи приводят к уравнению (13.1), если  $f(x)$  — нелинейная функция?

Уравнение (13.1) описывает, например, колебательный контур, катушка индуктивности которого содержит ферритовый сердечник, что приводит к нелинейной зависимости магнитного потока  $\Phi$  от тока  $I$  (рис. 13.1 а). Нелинейность в контуре может быть связана и с емкостью, если заряд  $Q$  нелинейно зависит от напряжения  $U$ . На рис. 13.1 б  $C(U)$  — емкость  $p$  —  $n$ -перехода или конденсатор с сегнетоэлектриком. В механике — это, в частности, шарик, катающийся по

желобу (рис. 13.1 в). То, что такой шарик — осциллятор, сомнений нет. Вопрос только в том, в каком случае это линейный осциллятор, а в каком нелинейный?

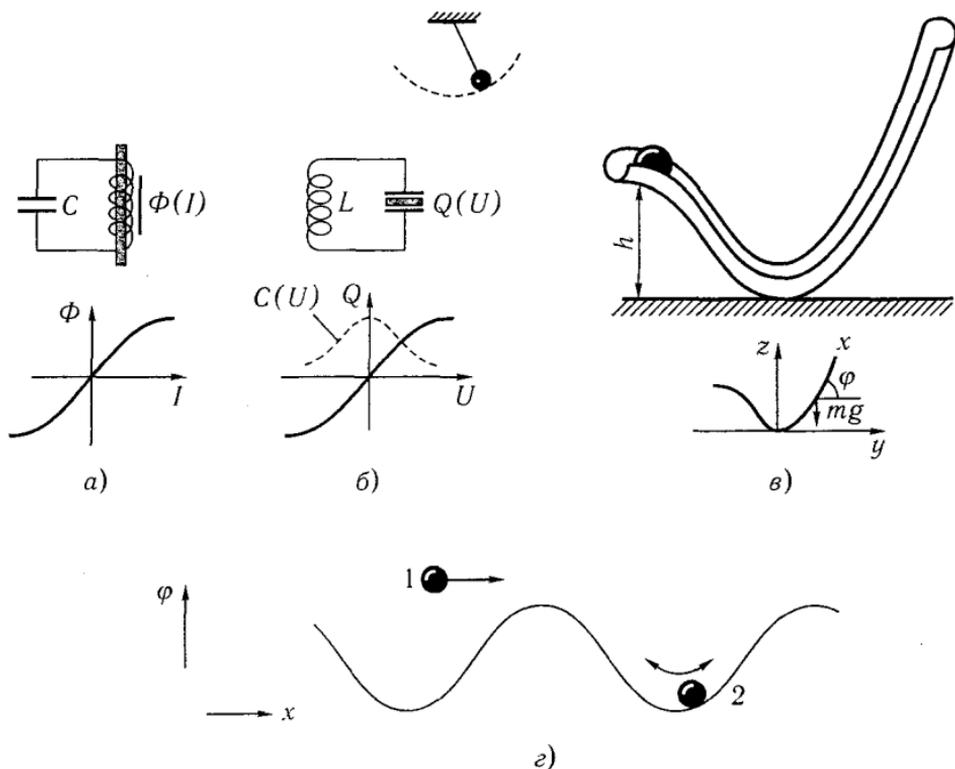


Рис. 13.1. Примеры нелинейных осцилляторов: *a* — колебательный контур, катушка индуктивности которого содержит ферритовый сердечник ( $\dot{\Phi} + \Phi = 0$ ,  $\Phi = L(I)I$ ); *б* — колебательный контур, емкость которого содержит сегнетоэлектрик ( $\dot{Q} + f(Q) = 0$ ,  $Q = C(Q)U_C$ ); *в* — шарик в желобе ( $\ddot{x} + dW(x)/dx = 0$ ,  $W(x) = gz(x)$ ); *г* — заряженная частица в периодическом электрическом поле продольной волны (1 — пролетная частица, 2 — «захваченная» частица,  $\varphi$  — потенциал поля,  $x$  — продольная координата)

Уравнение движения шарика с массой  $m$  имеет вид

$$m\ddot{x} = -F, \quad F = mg \sin \varphi = mg dz/dx,$$

или

$$\ddot{x} + g dz/dx = 0. \quad (13.2)$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения. В общем виде уравнение (13.2) можно переписать следующим образом:

$$\ddot{x} + dW(x)/dx = 0, \quad W(x) = gz(x). \quad (13.3)$$

Когда  $W(x) \sim x^2$  (потенциальная яма имеет параболический профиль), наш осциллятор линейный. Обратим внимание на важное обстоятельство: форма потенциальной кривой не совпадает с профилем желоба на плоскости  $zy$ . Если, например, уравнение желоба  $z = y^2$ , то  $dy = dz/(2\sqrt{z})$ , а из соотношения  $(dx)^2 = (dz)^2 + (dy)^2$  следует, что

$$x = \int \sqrt{1 + 1/4z} dz.$$

Это уже не параболическая зависимость для потенциальной энергии, как в случае линейного осциллятора.

Уравнение (13.3) легко интегрируется. Если ввести  $\dot{x} = v$ , то

$$\frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dW(x)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad v \frac{dv}{dx} + \frac{dW(x)}{dx} = 0.$$

Тогда получаем  $v^2/2 + W(x) = \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  — полная энергия нелинейного осциллятора, а  $W(x)$  — его потенциальная энергия.

Представить полную качественную картину движений нелинейного осциллятора (консервативной нелинейной системы с одной степенью свободы) можно, по существу, не решая конкретной задачи, просто по виду его фазового портрета. Из записанного выше выражения для закона сохранения энергии скорость выражается так:

$$v = \dot{x} = \pm \{2[\mathcal{E} - W(x)]\}^{1/2}. \quad (13.4)$$

Это фактически уравнение траекторий на фазовой плоскости для нашей модели: поскольку энергия сохраняется, мы можем задать  $\mathcal{E}$  при  $t = 0$  и, если известна  $W(x)$ , легко найти  $\dot{x}$  и нарисовать фазовые траектории (рис. 13.2). Движений с малой начальной энергией  $\mathcal{E}_0 < W(x)$  попросту не существует, величина  $\dot{x}$  получается мнимой.

Начальному уровню энергии  $\mathcal{E}_2$  соответствует движение на участках  $0 < x < x_{02}$  и  $x_{12} < x < x_{22}$ , где  $x_{02}$ ,  $x_{12}$  и  $x_{22}$  определяются из условия  $\dot{x} = 0$ , т. е.  $W(x) = \mathcal{E}_2$ . Фазовые траектории, соответствующие такому движению, обозначены на рис. 13.2 цифрой 2. Точкам, в которых  $dW(x)/dx = 0$ , соответствуют состояния равновесия. Меняя начальные значения энергии, можно построить все траектории на фазовой плоскости.

Таким образом, движение нелинейного осциллятора полностью определяется начальной энергией. Колебания малой амплитуды будут гармоническими. С ростом энергии колебания становятся все более отличными от гармонических — в периодическом движении большую часть периода занимают медленные участки, соответствующие взбегающему шарика на вершину горки и началу спуска с нее (рис. 13.2). Наконец, при начальной энергии  $\mathcal{E}_3 = mgh$  движение шарика перестает быть периодическим (на фазовой плоскости рис. 13.2 оно изображается сепаратрисой). Проведенный анализ позволяет сделать очень важное заключение: движение нелинейного осциллятора неизохронно — частота его колебаний зависит от энергии. Для финитного движения можно из (13.4) определить период колебаний в виде

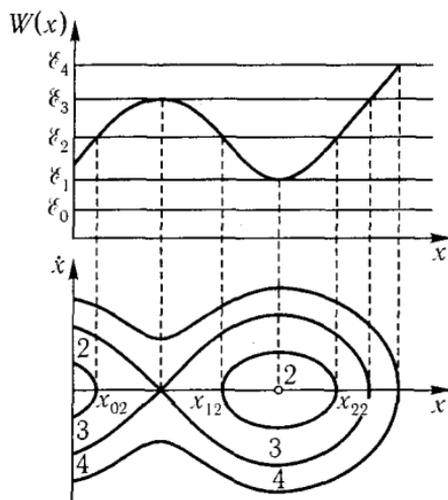


Рис. 13.2. Зависимость потенциальной энергии  $W(x)$  и соответствующий этой зависимости фазовый портрет нелинейного осциллятора

осциллятора неизохронно — частота его колебаний зависит от энергии. Для финитного движения можно из (13.4) определить период колебаний в виде

$$T = \oint \{2[\mathcal{E}_2 - W(x)]\}^{-1/2} dx = 2 \int_{x_{12}}^{x_{22}} \{2[\mathcal{E}_2 - W(x)]\}^{-1/2} dx. \quad (13.5)$$

Для движений, которым соответствует замкнутая траектория, не слишком близкая к сепаратрисе, можно сказать, что  $\omega = \omega(A^2)$ , где  $A$  — амплитуда периодических колебаний. Рассмотрим подробнее ту часть фазовой плоскости, где расположены два состояния равновесия — седло и центр. Сепаратриса, выходящая из седла, возвращается в него же (в линейном приближении легко определить и наклон сепаратрис вблизи состояния равновесия). Сепаратрисную петлю, изображенную на рис. 13.3 а, называют двоякоасимптотической траекторией — она приходит к одному и тому же состоянию равновесия как при  $t \rightarrow \infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ . Фазовый портрет на рис. 13.3 а построен для уравнения  $\ddot{x} - x(1-x/2) = 0$ , имеющего интеграл энергии  $\dot{x}^2 - x^2 + x^3/3 = \text{const}$ . Зависимость переменной от времени, соответствующая сепаратрисной петле (рис. 13.3 б), представляет собой одиночный импульс или, если уравнение (13.1) получено для описания стационарных волн (см. гл. 19),

солитон. Этот импульс имеет бесконечные «хвосты» — время движения вблизи состояния равновесия  $x = 0$  бесконечно возрастает. Действительно, в окрестности седла уравнение движения имеет вид  $\ddot{x} - x = 0$  или  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = x$ , т. е. при  $x \rightarrow 0$ ,  $\dot{y} \rightarrow 0$  система приближается к состоянию равновесия и удаляется от него с бесконечно малой скоростью и, следовательно, бесконечно долго.

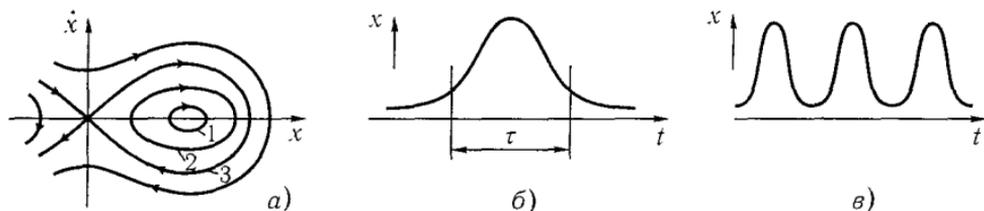


Рис. 13.3. Фазовая плоскость (1 — овал соответствует периодическим колебаниям, близким к гармоническим; 3 — сепаратрисная петля соответствует солитону) (а), солитон с бесконечными «хвостами» (осциллограмма переменной  $x$ ) длительностью  $\tau$  (б) и осциллограмма кноидального движения, соответствующего траектории 2 (в)

Как мы увидим дальше, особое решение, которому на фазовой плоскости соответствует петля сепаратрисы (рис. 13.3 а), вызывает большой интерес в теории нелинейных волн. Например, волны на поверхности «мелкой воды» приближенно можно описать уравнением Кортевега – де Вриза

$$u_t + v_0 u_x + u u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (13.6)$$

Если интересоваться только волнами, бегущими с постоянной скоростью и не меняющими своего профиля:  $u = u(x - Vt)$  (стационарными волнами), то после подстановки можно получить из (13.6) уравнение нелинейного осциллятора, фазовая плоскость которого приведена на рис. 13.3 а.

Каково время движения по другим траекториям, например по траекториям типа 1 на рис. 13.3 а? Это — движение на дне потенциальной ямы, следовательно, это — почти линейные колебания, и их частота определяется из линеаризованной задачи. Для траекторий типа 2 на рис. 13.3 а, близких к сепаратрисе, зависимость  $x(t)$  приведена на рис. 13.3 в. В том случае, если в (13.3)  $dW(x)/dx = \sin x$ , т. е. наш осциллятор — это просто маятник, получается известное точное решение, выражающееся через эллиптический интеграл [3].

Рассмотрим еще один пример — поведение электрона в периодическом электрическом поле продольной волны (рис. 13.1 з). Пусть потенциал поля изменяется по закону  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t - kx)$ . Проще всего описать движение электрона, написав уравнение движения в системе координат, связанных с волной. Тогда потенциал  $\varphi = \varphi_0 \cos kx$ , и искомое уравнение имеет вид

$$m_e \ddot{x} + e\varphi_0 k \sin kx = 0. \quad (13.7)$$

Фазовый портрет, соответствующий (13.7), приведен на рис. 13.4. Если пустить электрон в такое поле с достаточно большой скоростью, то он

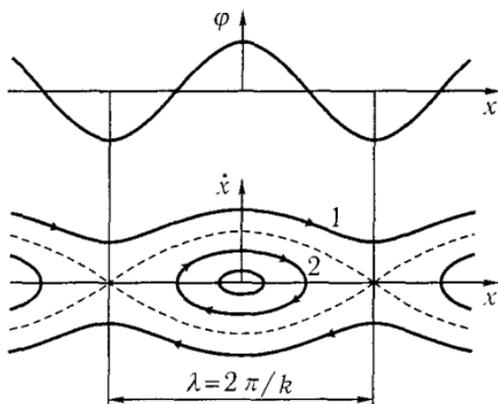


Рис. 13.4. Фазовый портрет нелинейного осциллятора, описывающего движения захваченных частиц (траектории типа 2) и пролетных частиц (траектории типа 1) в поле волны (см. рис. 13.1 з)

не «захватывается» волной и бежит вдоль нее, испытывая лишь колебания скорости. Таким «пролетным» частицам соответствуют траектории типа 1 на рис. 13.4. Если же начальная скорость меньше некоторой критической, определяемой из соотношения  $m_e v_{кр}^2 / 2 < e\varphi_0$ , то электрон попадет в потенциальную яму и будет там колебаться. Таким колебательным движениям на рис. 13.4 соответствуют траектории типа 2. Интересно, что уравнение (13.7) является асимптотическим уравнением движения электрона в элементарной теории лазера на свободных электронах с высокодобротным резонатором типа Фабри–Перо в условиях, когда амплитуду волны можно считать постоянной [4] (см. гл. 11).

Как мы видели, одно из основных свойств нелинейного осциллятора — это его неизохронность. Влияет ли неизохронность на устойчивость движения? Очевидно, да — две соседние точки на близких

траекториях со временем разойдутся по фазам, т. е. устойчивости по Ляпунову уже нет, однако орбитальная устойчивость для траекторий типа 1 и 2 сохраняется (это видно из фазового портрета). Вблизи сепаратрисы, как легко видеть, нет и орбитальной устойчивости.

Система, которую мы рассматриваем, консервативна. В общем случае установить факт принадлежности той или иной динамической системы, фазовое пространство которой представляет собой плоскость, к классу консервативных совсем не всегда так просто, как в предыдущих случаях. Консервативность — это сохранение энергии. Однако в системах, описывающих, например, химическую реакцию или сосуществование двух биологических видов, зачастую невозможно даже ввести энергию. Действительно, в обозначениях гл. 1 система уравнений (1.11)

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \quad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1),$$

описывающая «взаимоотношения» вегетарианцев и хищников, на первый взгляд кажется неконсервативной. В то же время фазовый портрет этого нелинейного осциллятора, представленный на рис. 13.5 а, 11 выглядит так же, как и у механических консервативных систем, — дело в том, что у системы есть интеграл движения

$$\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \varepsilon_2 \ln N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 = \text{const.}$$

Таким образом, с точки зрения теории колебаний необходимым признаком консервативности двумерной системы мы должны считать существование однозначного интеграла движения вида  $\mathcal{F}(x, \dot{x}) = C$ .

Можно построить поверхность  $z = \mathcal{F}(x, \dot{x})$  и, пересекая ее плоскостями  $z = C = \text{const}$ , получить при проецировании сечений на плоскость  $x\dot{x}$  фазовый портрет (рис. 13.5 б). Легко убедиться, что в двумерной консервативной системе могут существовать лишь состояния равновесия типа «седло» и «центр».

Рассмотрим теперь поведение ансамбля из большого числа невзаимодействующих нелинейных осцилляторов. Это могут быть, например, электроны, движущиеся в поле продольной электрической волны (поведение ансамбля линейных осцилляторов мы рассматривали в гл. 3). Первые задачи подобного рода появились в конце 60-х годов в высокочастотной электронике при исследовании системы возбужденных нелинейных осцилляторов как классической активной среды для мазеров на циклотронном резонансе [5] и в физике плазмы, в частности, в связи с проблемами ускорения и нагрева заряженных частиц. Будем считать,

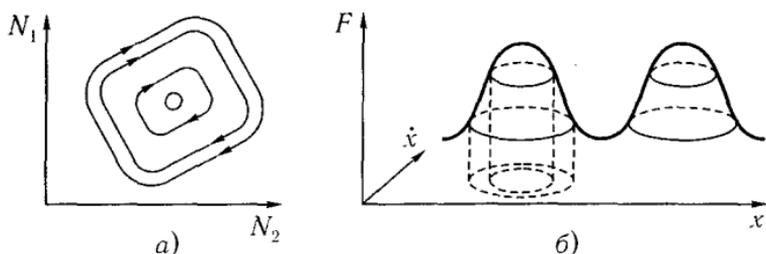


Рис. 13.5. Фазовый портрет нелинейного осциллятора, соответствующего экологической задаче о взаимодействии двух биологических видов — вегетарианцев и хищников (а) и к объяснению построения фазового портрета, если известен интеграл движения  $\mathcal{F}(x, \dot{x}) = C$  (б)

что функция распределения электронов по скоростям в потоке известна и изображается кривой, приведенной на рис. 13.6. В системе координат, связанной с волной  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t - kx)$ , все частицы разделятся на захваченные и пролетные. Тем электронам, у которых скорости лежат в интервале с границами  $\omega/k \pm (2e\varphi_0/m)^{1/2}$ , не хватает энергии, чтобы преодолеть потенциальный барьер  $e\varphi_0$ , и они колеблются в потенциальной яме волны; те же, у которых скорости лежат вне этого интервала, волну почти не замечают (см. рис. 13.4).

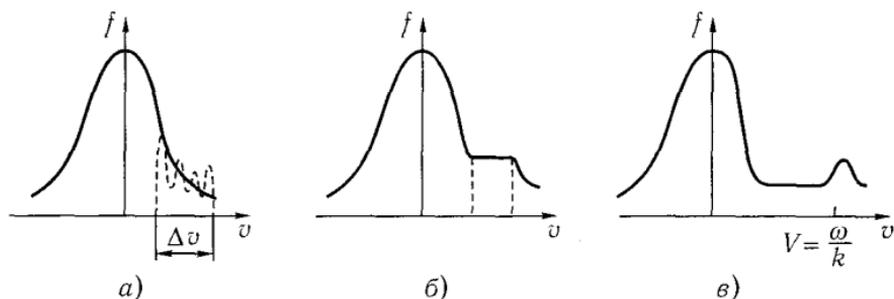


Рис. 13.6. Функция распределения электронов по скоростям: а — появление осцилляций в поле периодической продольной волны; б — образование плато; в — распределение электронов по скоростям в системе плазма-пучок

Каждый  $i$ -й электрон в поле синусоидальной волны ведет себя как маятник:

$$\ddot{x}_i + \omega_0^2 \sin x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad \omega_0^2 = k^2 e\varphi_0/m. \quad (13.8)$$

Захваченным электронам соответствуют колебания маятника, а пролетным — вращения (см. рис. 13.4). Таким образом, частицы в поле

волны представляют собой ансамбль тождественных нелинейных осцилляторов, различающихся лишь начальными значениями энергий. Как будет вести себя ансамбль во времени? Все зависит от функции распределения электронов по энергиям или по скоростям — функции  $f(v)$ .

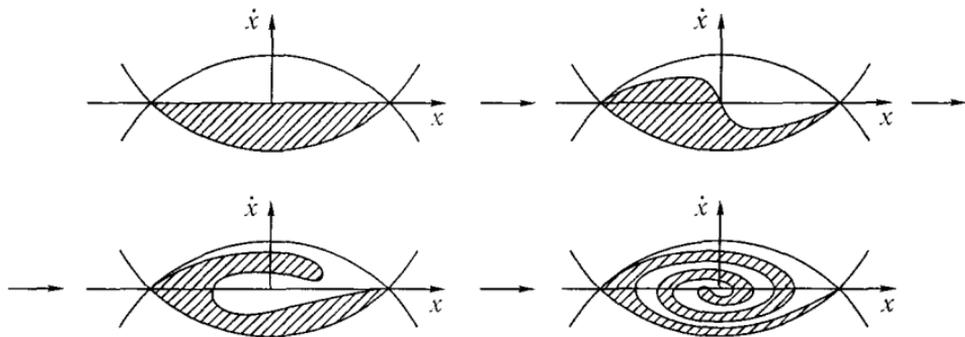


Рис. 13.7. Эволюция фазового объема в ансамбле невзаимодействующих электронов-осцилляторов

Поскольку взаимодействие осцилляторов пока не учитывается, ответ на поставленный вопрос получить довольно просто, рассматривая движение осцилляторов на фазовой плоскости. Выберем начальный фазовый объем в виде области, ограниченной сепаратрисами на плоскости  $x\dot{x}$  (рис. 13.7). Если  $(\partial f/\partial v)_{v=\omega/k} < 0$ , то при  $t = 0$  большая часть захваченных частиц располагается в нижней половине области. Со временем из-за неизохронности осцилляторов эта область превратится в закрученную спираль, число витков которой непрерывно увеличивается. Следовательно, число частиц с разными скоростями будет непрерывно меняться, и функция распределения  $f(v)$  в интервале  $\Delta v$  начнет пульсировать, становясь все более и более изрезанной (см. рис. 13.6 а). Через достаточно большое время все осцилляторы должны снова собраться в начальный фазовый объем, поскольку движение консервативной системы (13.8) из  $N$  осцилляторов обратимо. Физически, однако, очевидно, что, как бы долго мы не ждали, чуда не произойдет: из-за сколь угодно слабого взаимодействия частиц друг с другом и с волной частицы перемешаются, т. е. равномерно заполняют всю область внутри сепаратрис (эту область называют иногда «кошачьим глазом»). При этом число частиц,двигающихся быстрее волны ( $\dot{x} > 0$ ), станет равным числу частиц,двигающихся медленнее волны ( $\dot{x} < 0$ ), и на функции распределения образуется плато (см. рис. 13.6 б). Поскольку средняя кинетическая энергия частиц при таком перемешивании возрастает, синусоидальная

волна, в которой колеблются частицы, теряет часть своей энергии на ускорение частиц. Такую потерю энергии монохроматической волной называют нелинейным затуханием Ландау (см. [6]).

Если функция распределения частиц по скоростям неравновесна, как, например, в системе электронный пучок — плазма, то возможен и обратный процесс — усиление волны конечной амплитуды. Когда фазовая скорость волны попадает в интервал скоростей, соответствующих левому склону неравновесной функции распределения (см. рис. 13.6 в), то нарастающая в результате линейного усиления Ландау (медленных частиц, отбирающих у волны энергию, меньше, чем быстрых — отдающих) волна увеличивает свою амплитуду и захватывает пролетные частицы. Этот процесс усиления длится, очевидно, только до тех пор, пока числа быстрых и медленных частиц, соответствующих левому склону функции  $f(v)$ , не выровняются и волна не превратится в нелинейную стационарную волну (квазилинейная релаксация). Таким образом, с течением времени происходит фазовое перемешивание осцилляторов и вместо осцилляции на функции распределения устанавливается плато. Время установления плато имеет порядок характерного времени движения частиц по замкнутым траекториям.

Более аккуратно время релаксации функции распределения осцилляторов по энергиям можно определить только из решения самосогласованной задачи, учитывая изменение амплитуды волны во времени. Соответствующие уравнения записываются в виде (см. [14])

$$\begin{aligned} \partial f / \partial t + v \partial f / \partial \xi - (e/m) E k \sin k \xi \partial f / \partial v &= 0, \\ \partial E / \partial \xi &= -4\pi e \left( \int f(v) dv - n_0 \right), \end{aligned}$$

где  $E$  — амплитуда продольной волны;  $\sin(\omega t - kx) = \sin k\xi$ .

К задаче о взаимодействии ансамбля осцилляторов с волной сводятся многие проблемы нелинейной теории гидродинамической устойчивости, в частности при нелинейном анализе возбуждения волн на поверхности воды ветром [14], в теории пограничного слоя [16] и др. Роль неравновесных частиц здесь играют частицы среды, движущиеся с различными скоростями. В отличие от приведенного выше примера с электронным пучком в плазме гидродинамическая задача об эволюции распределения частиц жидкости по скоростям в принципе не может быть одномерной — скорость в данной точке в классической гидродинамике определяется однозначно. Следовательно, если в поле одномерной волны (распространяющейся вдоль оси  $x$ ) частицы среды

движутся с различными скоростями, то они должны быть разнесены по поперечной координате  $y$ . Поэтому простейшие задачи об эволюции функции распределения частиц жидкости по скоростям в поле гидродинамической волны — это задачи об эволюции профиля двумерных течений с поперечным сдвигом скорости [15].

Следует заметить, что процесс усиления волны конечной амплитуды в системе плазма-пучок был детально исследован сравнительно недавно [17]. В то же время в высокочастотной электронике такое усиление конечных сигналов в лампах бегущей волны было известно и всесторонне исследовано теоретически и экспериментально еще в 50-е годы [7–9]. На рис. 13.8 и 13.9 приведены фазовые диаграммы для работающей ЛБВ, рассчитанные теоретически и измеренные экспериментально. Теоретические диаграммы интересны тем, что можно определить не только фазовое положение «машинных» электронов относительно волны, но и их кинетическую энергию, что важно, скажем, при выборе способов повышения КПД ЛБВ. Номерами отмечены некоторые «машинные электроны». Разные безразмерные длины  $\zeta$  ( $\xi \sim x$ ) соответствуют разным значениям напряженности электрического высокочастотного поля: при  $\zeta_1 < \zeta_2$  скоростная модуляция ближе к синусоидальной, чем при  $\zeta_2$ , где образуется «завихрение».

Уравнения, по которым проводился расчет на ЭВМ, соответствуют «невозмущающим» электронам ( $\dot{x}/v_0$  — относительная скорость «машинных» электронов;  $\Phi(\zeta, \Phi_{0i})$  — фаза «машинного» электрона, означающая его фазовое положение относительно волны при данном значении координаты  $\zeta$ ;  $\Phi_{0i}$  — начальная фаза  $i$ -го «машинного» электрона; I, II — области ускоряющего и тормозящего полей волны соответственно). Особенно интересен рис. 13.9. Исследованная К. Катлером (1956 г.) модель ЛБВ содержала анализатор скорости: на выходе из спирали электронный пучок проходил через скрещенные электрическое и магнитное поля и попадал на флуоресцирующий экран, на котором скорость электро-

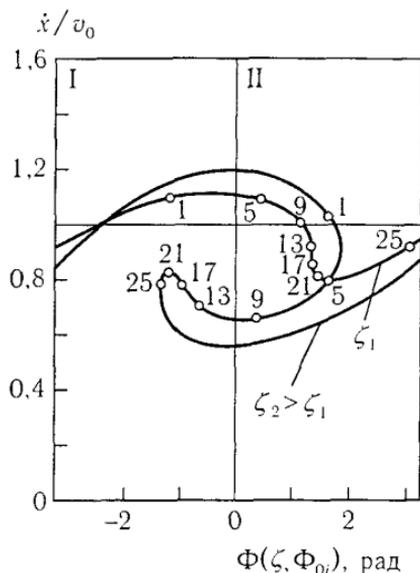


Рис. 13.8. Теоретическая фазовая диаграмма лампы бегущей волны в режиме усиления конечных сигналов

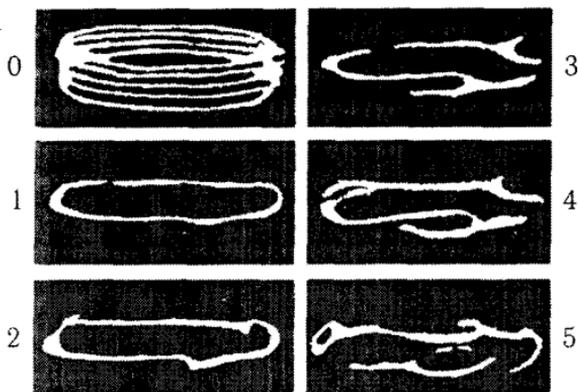


Рис. 13.9. Вид экрана анализатора скоростей в работающей лампе бегущей волны. Нулевой кадр соответствует отсутствию высокочастотного сигнала. Амплитуда высокочастотного поля увеличивается с ростом номера кадра [9]

нов, пропорциональная вертикальному отклонению, и плотность заряда, пропорциональная интенсивности свечения, измерялись в зависимости от фазы сигнала. Соответствующая обработка фотографий, снятых для работающей лампы, позволила построить диаграммы, подобные приведенным на рис. 13.8 [9]. Эксперимент проводился на уникальной в своем роде лампе длиной 3 м с диаметром пучка 2,54 см, при потенциале луча 400 В, на частоте 100 МГц.

### 13.3. Нелинейный резонанс

Если осциллятор линейный, т. е. в разложении  $\omega^2(x) = \omega_0^2 + \alpha x + \beta x^2 + \dots$  мы ограничиваемся только первым членом, то при действии на осциллятор внешней периодической силы наблюдается, по существу, единственный основной эффект — линейный резонанс (см. гл. 1). Чем меньше потери в осцилляторе, тем острее и выше резонансная кривая (см. рис. 1.9). Что изменится в случае, когда частота зависит от амплитуды? Пусть частота внешнего воздействия равна частоте вращения по одной из фазовых траекторий вблизи центра (см. рис. 13.4). Тогда система черпает энергию от внешнего источника и малые вначале колебания нарастают. Это означает, что изображающая точка как бы перемещается последовательно на те фазовые траектории, которым соответствует большая энергия, но, так как осциллятор неизохронный, большим энергиям соответствует уже другая частота. В результате система выходит из резонанса и, начиная с некоторой амплитуды, осцилля-

тор перестает замечать внешнюю силу. Выход из резонанса происходит, таким образом, за счет нелинейного сдвига частоты  $\omega = \omega(A)$ .

Что может быть качественно нового в нелинейном осцилляторе при резонансе? В линейном осцилляторе резонанс есть только на частоте, близкой к собственной, т. е. при  $\Omega = \omega_0 + \varepsilon$ . Для нелинейного же есть резонанс и на гармониках; например, квадратичная нелинейность ( $\omega^2 \sim \alpha x$ ) приводит к появлению в нелинейной системе спектральных компонент  $2\Omega, 4\Omega$  и т. д. Следовательно, если, например,  $2\Omega \approx \omega_0$ , то в системе будет резонанс на гармонике внешней силы.

В общем случае в нелинейном осцилляторе даже при синусоидальном внешнем воздействии возможны совершенно нетривиальные эффекты — динамика системы может оказаться чрезвычайно сложной, в том числе и стохастической. Эти эффекты обнаруживаются лишь при наличии нелинейности. Чтобы их исследовать, нужно решать задачу численно либо с помощью анализа фазового пространства. Надо учесть, что фазовое пространство неавтономной системы с одной степенью свободы уже трехмерное:  $x, \dot{x}, t$  (третьей координатой является время).

Ограничимся пока рассмотрением системы, близкой к линейному автономному осциллятору, т. е. будем считать малыми нелинейность, диссипацию и амплитуду внешней силы. Тогда становится очевидным и выбор метода решения — это один из асимптотических методов. Исходную модель можно описать следующим уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu(A_{\text{ВН}} \cos \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda \dot{x}), \quad \mu \ll 1. \quad (13.9)$$

Так как мы хотим исследовать резонанс, будем искать решение на частоте внешней силы, т. е. в виде  $x = A(t) \sin[\Omega t + \varphi(t)]$ . Считая  $\omega_0 = \Omega - \varepsilon$ , преобразуем уравнение (13.9) к виду

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \mu(A_{\text{ВН}} \cos \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\lambda \dot{x} + 2\varepsilon \Omega x).$$

Используя метод Ван-дер-Поля, получаем укороченные уравнения для амплитуды и фазы:

$$\dot{A} = \frac{A_{\text{ВН}}}{2\Omega} \cos \varphi - \lambda A, \quad A\dot{\varphi} = -\frac{A_{\text{ВН}}}{2\Omega} \sin \varphi + \frac{3\beta}{8\Omega} A^3 - \varepsilon A. \quad (13.10)$$

Здесь  $\varepsilon$  — линейная расстройка. Резонансная кривая — это зависимость амплитуды установившихся колебаний от расстройки, т. е. зависимость  $A(\varepsilon)$ , которая получается из (13.10) при условиях  $\dot{A} = \dot{\varphi} = 0$ .

Эти условия определяют состояние равновесия системы (13.10):

$$\lambda A_0 = \frac{A_{\text{ВН}}}{2\Omega} \cos \varphi_0, \quad -\varepsilon + \frac{3\beta A_0^2}{8\Omega} = \frac{A_{\text{ВН}}}{2\Omega A_0} \sin \varphi_0.$$

Отсюда  $\lambda^2 + (\gamma A_0^2 - \varepsilon)^2 = A_{\text{ВН}}^2 / (4\Omega^2 A_0^2)$ , где  $\gamma = 3\beta / (8\Omega)$ , и, следовательно, искомая связь имеет вид

$$\varepsilon = \gamma A_0^2 \pm [(A_{\text{ВН}} / 2A_0\Omega)^2 - \lambda^2]^{1/2}. \quad (13.11)$$

При построении резонансных характеристик на плоскости  $A_0^2 \varepsilon$  (рис. 13.10а) амплитуда внешней силы  $A_{\text{ВН}}$  является параметром. Когда  $A < A_{\text{ВН}}^*$ , резонансные кривые представляют собой графики однозначных функций и напоминают резонансные кривые линейного осциллятора с затуханием. Максимум у них смещен в сторону больших частот, если собственная частота осциллятора с ростом амплитуды растет, и в сторону меньших, если собственная частота убывает. При  $A_{\text{ВН}} > A_{\text{ВН}}^*$  резонансная кривая представляет собой график неоднозначной функции.

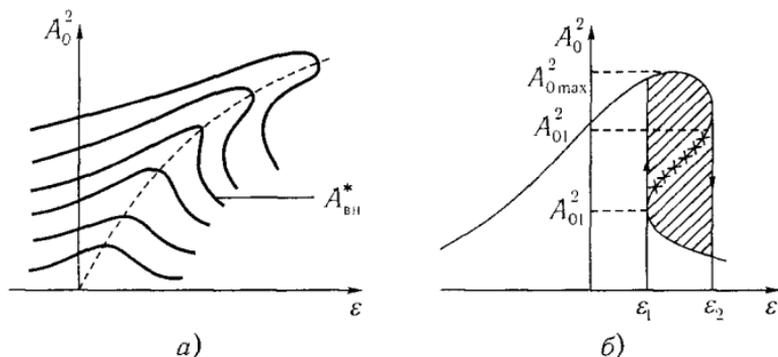


Рис. 13.10. Резонансные кривые нелинейного осциллятора: а — при амплитудах  $A_{\text{ВН}} < A_{\text{ВН}}^*$  ( $A_{\text{ВН}}$  — параметр) резонансные кривые соответствуют графикам однозначных функций и представляют собой несколько деформированные кривые линейного осциллятора с затуханием (см. рис. 1.9); б — резонансная кривая при  $A_{\text{ВН}} > A_{\text{ВН}}^*$  (крестиками обозначена неустойчивая ветвь; заштрихована область гистерезиса)

Исследование устойчивости состояний равновесия системы (13.10), соответствующих различным ветвям резонансной кривой (это предоставляется читателю проделать самостоятельно), показывает, что

ветвь, отмеченная на рис. 13.10 б крестиками, неустойчива. При изменении расстройки будем иметь следующее: при  $\varepsilon = 0$  — точный резонанс по линейному приближению — амплитуда далеко не максимальна; при увеличении  $\varepsilon$  амплитуда растет до  $A_{0\max}$ ; при  $\varepsilon = \varepsilon_2$  скачком происходит срыв колебаний до существенно меньшей величины. При обратном ходе скачок происходит при  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ; амплитуда при этом возрастает (рис. 13.10 б). Значение  $A_{01}$  соответствует точке касания прямой  $A_0^2 = \varepsilon_1$  с резонансной кривой  $A_0^2 = A_0^2(\varepsilon)$ , а  $A_{02}$  — точке касания прямой  $A_0^2 = \varepsilon$  с  $A_0^2 = A_0^2(\varepsilon)$ . Дифференцируя уравнение для резонансной кривой

$$(\lambda^2 + \gamma^2 A_0^4 - 2\gamma\varepsilon A_0 + \varepsilon^2)A_0^2 = [(A_{\text{ВН}})^2/4\Omega^2],$$

для вертикальной касательной находим

$$dA_0/d\varepsilon = [-\varepsilon A_0 + \gamma A_0^3 \varepsilon^2][\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\gamma\varepsilon A_0^2 + 3\gamma^2 A_0^4]^{-1} = \infty. \quad (13.12)$$

Значения  $A_{01}$  и  $A_{02}$  получаются из совместного решения уравнения

$$\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\gamma\varepsilon A_0^2 + 3\gamma^2 A_0^4 = 0 \quad (13.13)$$

и уравнения (13.12). Приравнивая выражение для производной  $dA_0/d\varepsilon$  нулю, легко найти  $A_{0\max}^2 = \varepsilon/\gamma$ . Из (13.12) следует, что  $A_{0\max}^2 = A_{\text{ВН}}/(2\Omega\lambda)$ . Значение  $A_{\text{ВН}}^*$ , при котором на резонансной кривой появляется гистерезис, определяется из условия равенства корней уравнения (13.13), т. е. обращения в нуль его дискриминанта:  $4\gamma^2 A_0^4 - 3\gamma^2 A_0^4 - \lambda^2 = 0$ , откуда  $A_0^4 = \lambda^2/\gamma^2$ . При этом  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\lambda$  и из (13.12) следует, что  $A_{\text{ВН}}^* = 8\Omega^2 \lambda^3/\gamma$ .

Обсудим теперь, к чему приводит нелинейность при параметрическом возбуждении. В гл. 11 были изложены результаты исследования параметрического резонанса в осцилляторе, описываемом, например, уравнением Матье (11.8). В результате развития параметрической неустойчивости в системе нарастают колебания; линейное затухание здесь, очевидно, не существенно: оно лишь сужает полосу возбуждения, не приводя к ограничению амплитуды. При больших амплитудах колебаний в осцилляторе может уже оказаться существенной его нелинейность, проявляющаяся, в частности, в зависимости частоты от амплитуды:  $\omega^2(x) = \omega_0^2 + \beta x^2$ . Тогда колебания параметрически возбуждаемого осциллятора уже не могут расти безгранично, несмотря на параметрический инкремент. Появляется добавка к частоте, и из-за сдвига частоты, о котором речь уже шла, условия параметрического

резонанса нарушаются. Происходит ограничение амплитуды (так называемый расстройный механизм ограничения).

Перепишем уравнение такого осциллятора в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu b \cos \omega_p t)x + \mu \beta x^3 + 2\mu \lambda \dot{x} = 0. \quad (13.14)$$

где  $\lambda$  характеризует линейные потери. При основном параметрическом резонансе должно выполняться условие  $\omega_p = 2\omega_0 + \mu\varepsilon$ . Применяя к (13.14) метод Ван-дер-Поля и отыскивая решение в виде  $x = 2A(t) \cos[\omega_p t/2 + \varphi(t)]$ , получаем после усреднения следующие уравнения для амплитуды и фазы:

$$\dot{A} = -\mu\lambda A - \frac{\mu b \Omega}{8} A \sin 2\varphi, \quad \dot{\varphi} = -\mu\varepsilon + \frac{3\mu\beta}{\Omega} A^2 - \frac{\mu b \Omega}{8} \cos 2\varphi. \quad (13.15)$$

Из системы уравнений (13.15) видно, что даже при отсутствии линейной расстройки ( $\varepsilon = 0$ ) есть расстройка, пропорциональная квадрату амплитуды. Она приводит к такому сдвигу фазы, что параметрический инкремент обращается в нуль, и амплитуда таким образом ограничивается.

### 13.4. Перекрывание нелинейных резонансов

Результаты исследования свойств нелинейного резонанса, которые мы методом Ван-дер-Поля получили в предыдущем параграфе, справедливы в случае, когда в нелинейном осцилляторе реализуется лишь один единственный (изолированный) резонанс. При этом все события, если их рассматривать в трехмерном фазовом пространстве  $(\dot{x}, x, t)$ , развиваются в узком кольцевом слое. Проекция такого слоя на плоскость  $\dot{x}x$  представляет собой замкнутую полосу, локализованную вокруг той траектории автономного осциллятора, период  $2\pi/\omega$  движения по которой точно равен или кратен периоду  $2\pi/\Omega$  внешнего возмущения. В отличие от случая линейного осциллятора резонанс в нелинейном осцилляторе возможен практически при произвольной частоте периодического воздействия, если, конечно, нелинейность достаточно велика. Это объясняется неизохронностью и ангармоничностью колебаний нелинейного осциллятора (неизохронность, как мы знаем, это зависимость частоты колебаний от энергии, ангармоничность — присутствие в спектре периодических колебаний высших гармоник).

Если на осциллятор, например все тот же маятник, действует малое гармоническое возмущение, то с точностью до эффектов второго порядка реализуется именно изолированный резонанс — резонанс только

при определенном уровне амплитуды  $A$ , а частота  $\omega(A)$  невозмущенного движения будет примерно равна частоте  $\Omega$  возмущения. Вблизи резонанса частота и амплитуда колебаний могут меняться в некоторых пределах  $\Delta A$ ,  $\Delta\omega$ , которые определяют ширину резонанса. Резонансы более высокого порядка типа

$$n\omega(A) \approx m\Omega, \quad (13.16)$$

где  $n$  и  $m$  — целые, имеют и более высокий  $(m+n)$ -й порядок малости по амплитуде возмущения и величине нелинейности, и их можно не учитывать.

Ситуация качественно меняется, когда малое периодическое возмущение не гармоническое, т. е.

$$F_{\text{ВН}}(t) = \sum_n A_n \cos(n\Omega t). \quad (13.17)$$

При этом, как легко догадаться, уже в одном и том же приближении условие резонанса (13.16) может быть выполнено сразу для нескольких различных значений  $A$  (им, естественно, будут соответствовать различные значения  $n, m$ ), т. е. в системе одновременно будут существовать несколько нелинейных резонансов, причем каждая гармоника определяет свой резонанс в соответствующей области фазового пространства. Эти резонансы могут быть изолированными — не влияющими друг на друга, но могут и перекрываться. К чему приведет такое перекрывание резонансов? Вопрос нетривиален [12, 13, 20, 21], и здесь мы попытаемся ответить на него лишь качественно, отложив более детальное обсуждение до гл. 22. Однако прежде поясним, как в нелинейном осцилляторе появляются резонансы на гармониках.

Сделаем это на примере модели

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \alpha x + \beta x^2)x = A \cos \Omega t,$$

воспользовавшись для ее анализа теорией возмущений. Искомое решение представим в виде

$$x(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t) + \dots, \quad x^{(1)} = A \cos \omega t,$$

частота  $\omega$  сама представляется в виде разложения  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$ . Переносим малую расстройку  $\xi = 1 - \omega_0^2/\omega^2$  вместе с нелинейными возмущениями в правую часть, в качестве исходного будем иметь уравнение

$$(\omega_0/\omega)^2 \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha \omega_0^2 x^2 - \beta \omega_0^2 x^3 - \xi \ddot{x} + A \cos \Omega t. \quad (13.18)$$

Пусть для примера  $\Omega = \omega_0/3 + \Delta\omega$ . Тогда в первом приближении резонанса не будет. Вынужденное решение  $x^{(1)}(t) \sim \cos[(\omega_0/3 + \Delta\omega)t]$  имеет частоту, далекую от собственной частоты осциллятора. Однако уже во втором приближении из-за нелинейности появятся слагаемые типа  $\{x^{(1)}\}^3 \sim \cos[3(\omega_0/3 + \Delta\omega)t]$ , т. е. в правой части уравнения для  $x^{(3)}$  уже будет резонансная сила на частоте  $\omega_0 + 3\Delta\omega$  (ее амплитуда пропорциональна  $A^3$ ), и, следовательно, возникнет резонанс параметрического типа: соответствующая гармоника появляется благодаря произведению  $x^{(1)}x^{(2)}$ .

Для исследования явления перекрытия резонансов удобно описывать нелинейный осциллятор в переменных «действие – угол». Поясним подробнее введение этих новых переменных.

В гл. 1 мы вводили динамические переменные  $p$  и  $q$ , которые позволили записать уравнения движения гармонического осциллятора в канонической форме:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\omega^2 q, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (13.19)$$

Пусть теперь гамильтониан имеет вид  $\mathcal{H}(q, p, t) = \mathcal{H}_0(q, p) + \mathcal{H}_1(q, p, t)$ . Перейдем к новым переменным  $\theta$  (вместо  $q$ ) и  $I$  (вместо  $p$ ) таким, чтобы уравнения движения оставались каноническими с новым гамильтонианом  $\mathcal{H}'(I, t)$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial I}, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \theta}. \quad (13.20)$$

Определим переменные  $I$  и  $\theta$ , следуя [10]. Для уравнений Гамильтона справедлив принцип наименьшего действия:

$$\delta \int (p dq - \mathcal{H} dt) = 0 \quad (13.21)$$

(координаты и импульсы варьируются независимо). Для новых переменных

$$\delta \int (I d\theta - \mathcal{H}' dt) = 0. \quad (13.22)$$

Соотношения (13.21) и (13.22) эквивалентны друг другу, когда подынтегральные выражения различаются на полный дифференциал некоторой функции  $F$  координат, импульсов, времени. Тогда после элементарных преобразований получим  $d(F + I\theta) = p dq + \theta dI + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}) dt$ .

Функция  $\Phi(q, I, t) = F + I\theta$  называется производящей [11]. Используя ее, находим

$$p = \partial\Phi/\partial q, \quad \theta = \partial\Phi/\partial I, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \partial\Phi/\partial t. \quad (13.23)$$

Пусть сначала  $\mathcal{H}'$  не зависит от  $t$  и  $\theta$ . Из (13.20) следует, что  $\dot{I} = 0$ , а  $\theta = \omega t + \varphi$ , где  $\omega(I) = \partial\mathcal{H}'/\partial I$ ,  $\varphi$  — постоянная. Таким образом, новая переменная  $I$  сохраняется в процессе движения. Величина  $\theta = \partial\Phi/\partial I$  называется угловой переменной (или просто углом). Ее приращение  $\Delta\theta$  за период движения равно  $2\pi$ , т. е.  $\oint (\partial\theta/\partial q)_{I=\text{const}} dq = 2\pi$ . Но из определения  $\theta$  видно, что  $\partial\theta/\partial q = \partial^2\Phi/(\partial I\partial q)$ . Тогда с учетом первого уравнения из (13.23) получим

$$\oint \left( \frac{\partial\theta}{\partial q} \right)_{I=\text{const}} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint p dq = 2\pi.$$

Из последнего соотношения следует определение переменной

$$I = (2\pi)^{-1} \oint p dq, \quad (13.24)$$

которая называется переменной действия (или просто действием). На фазовой плоскости  $pq$  для замкнутой траектории условие  $I = \text{const}$  означает, что сохраняется площадь  $2\pi I$ , ограниченная этой траекторией. В частности, для гармонического осциллятора, описываемого уравнениями (13.19), фазовая траектория есть эллипс  $p^2/2 + \omega^2 q^2/2 = \mathcal{H}$  с полуосями  $a = (2\mathcal{H}_0)^{1/2}$  и  $b = (2\mathcal{H}_0/\omega^2)^{1/2}$ , а его площадь  $S = \pi ab = 2\pi(\mathcal{H}_0/\omega)$ , т. е.  $I = \mathcal{H}_0/\omega$  — адиабатический инвариант, обсуждавшийся в предыдущей главе.

Рассмотрим теперь возмущенную систему с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(I, \theta, \lambda) = \mathcal{H}_0(I) + \mu V(I, \theta, \lambda), \quad \mu \ll 1. \quad (13.25)$$

Пусть возмущение гамильтониана является периодическим и по  $\theta$ , и по  $\lambda$  с периодом  $2\pi$ ;  $\lambda$  характеризует внешнее воздействие с частотой  $\Omega = \dot{\lambda}$ .

С учетом (13.20) и (13.25) уравнения движения осциллятора в «невозмущенных» переменных запишутся следующим образом:

$$\dot{I} = -\partial\mathcal{H}'/\partial\theta = -\mu\partial V(I, \theta, \lambda)/\partial\theta, \quad (13.26)$$

$$\dot{\theta} = \partial\mathcal{H}'/\partial I = \partial(\mathcal{H}_0 + \mu V)/\partial I = \omega(I) + \mu\partial V(I, \theta, \lambda)/\partial I, \quad (13.27)$$

где  $\omega(I) = \partial \mathcal{H}_0 / \partial I$  — частота нелинейных колебаний (покажите это сами, используя определение (13.24)). Будем характеризовать неизохронность осциллятора параметром (см. [10])

$$\alpha = \left| \frac{I}{\omega} \frac{d\omega}{dI} \right| = \left| I \left( \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} \right)^{-1} \frac{d}{dI} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial (I^2)} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I^2} \right)^{-1} \right|. \quad (13.28)$$

Учитывая периодичность возмущения по  $\theta$  и  $\lambda$ , разложим  $\mu V$  в двойной ряд Фурье:

$$\mu V(I, \theta, \lambda) = \sum_{m, n} [V_{m, n}(I)/2] \exp[i(m\lambda + n\theta)] + \text{к. с.} \quad (13.29)$$

Условием резонанса  $m$ -й гармоники осциллятора с  $n$ -й гармоникой внешней силы является равенство, аналогичное (13.16):

$$m\Omega + n\omega \approx 0, \quad (\omega, \Omega > 0). \quad (13.30)$$

Когда резонанс один ( $m, n = \pm 1$  и  $\omega \approx \Omega$ ), в сумме (13.29) останутся два слагаемых: одно — резонансное с аргументом  $\lambda - \theta$ , второе — высокочастотное возмущение с аргументом  $\lambda + \theta$ . Оставим в (13.20) только резонансное слагаемое и перепишем уравнения (13.26) и (13.27) в виде

$$\dot{I} = -\mu V_{mn} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos(m\lambda + n\theta) = \mu n V_{mn} \sin \psi_{mn}, \quad (13.31)$$

$$\dot{\psi}_{mn} = m\dot{\lambda} + n\dot{\theta} = m\Omega + n\omega(I) + \mu n (\partial V_{mn} / \partial I) \cos \psi_{mn},$$

где  $\psi_{mn} = m\lambda + n\theta$  — резонансная фаза. Пусть точному резонансу ( $\psi_{mn} = 0$ ) соответствует значение  $I = I_p$ , причем  $|I - I_p| = |\Delta I| \ll I_p$ . При таком допущении независимо от конкретного вида функций  $\omega(I)$  и  $V_{mn}(I)$  существует сохраняющийся универсальный гамильтониан ( $\omega(I_p) \neq 0$ )

$$\mathcal{H}_y = n(d\omega/dI)_{I_p} (\Delta I)^2 / 2 + \mu n V_{mn}(I_p) \cos \psi_{mn}. \quad (13.32)$$

Покажем это. При  $I = I_p$

$$\dot{I}_p = 0, \quad m\Omega + n\omega(I_p) + \mu n \partial V_{mn} / \partial I = 0. \quad (13.33)$$

Вычтем (13.33) из соответствующих уравнений (13.31):

$$\Delta \dot{I} = \mu n V_{mn} \sin \psi_{mn},$$

$$\dot{\psi}_{mn} = n[\omega(I) - \omega(I_p)] + \mu n \left[ \frac{\partial V_{mn}}{\partial I} \cos \psi_{mn} - \frac{\partial V_{mn}(I_p)}{\partial I} \right]. \quad (13.34)$$

Если  $|\Delta I| \ll I_p$ ,  $\omega(I) - \omega(I_p) \approx (\partial\omega/\partial I)_{I=I_p} \Delta I = \alpha\omega(I_p)\Delta I/I_p$  и нелинейность умеренная, т. е.  $\mu \ll \alpha \ll 1/\mu$ , то слагаемым, пропорциональным  $\mu$ , во втором из уравнений (13.34) можно пренебречь. Поэтому окончательно имеем

$$\dot{I} = \mu n V_{mn} \sin \psi_{mn} = -\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial \psi_{mn}}, \quad (13.35)$$

$$\dot{\psi}_{mn} = n \left( \frac{\partial \omega}{\partial I} \right)_{I=I_p} \Delta I = \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial (\Delta I)}.$$

Из (13.35) следует, что гамильтониан (13.32) не зависит от времени.

Гамильтониан (13.32), как нетрудно заметить, похож на гамильтониан маятника с массой  $\{n(d\omega/dI)_{I=I_p}\}^{-1}$  в поле тяжести с ускорением  $g = \mu n^2 (d\omega/dI)_{I=I_p} V_{mn}$ . Фазовый портрет, соответствующий (12.32), может быть построен на плоскости  $(\Delta I, \psi_{mn})$  или с учетом того, что  $\omega(I) = \omega(I_p) + (d\omega/dI)_{I=I_p} \Delta I$ , на плоскости  $(\omega(I), \psi_{mn})$ . В дальнейшем будем иногда опускать индексы у  $\psi_{mn}$  и писать просто  $\psi$ . На рис. 13.11 приведены фазовые траектории для двух нелинейных резонансов, которые не взаимодействуют между собой. Область нелинейного резонанса ограничивается сепаратрисами; внутри этой области изменение фазы  $\psi_{mn}$  ограничено (фазовые колебания). Из (13.32) для сепаратрисы находим, что  $\mathcal{H}_y = \mu n V_{mn} (I_p)$ , когда она проходит через точку  $\omega = \omega(I_p)$  (это значит, что  $\Delta I = 0$ ) и  $\psi_{mn} = 2k\pi$  ( $k$  — целое число). Тогда максимальный размер по  $I$  области, ограниченной сепаратрисами, можно найти опять-таки из (13.32) при  $\psi_{nm} = \pi$ :

$$\mu n V_{mn} = [(\Delta I)_\varphi^2 / 2] n (d\omega/dI)_{I=I_p} - \mu n V_{mn}$$

и, следовательно,

$$(\Delta I)_\varphi = 4 \left[ \frac{\mu V_{mn}}{(d\omega/dI)_{I=I_p}} \right]^{1/2}. \quad (13.36)$$

Используя (13.36), определим максимальную ширину нелинейного резонанса:

$$(\Delta \omega)_\varphi = \left( \frac{d\omega}{dI} \right)_{I=I_p} (\Delta I)_\varphi = 4 \left[ \frac{\mu V_{mn}}{(d\omega/dI)_{I=I_p}} \right]^{1/2} = \frac{4\Omega_{mn}}{n}, \quad (13.37)$$

где  $\Omega_{mn}$  — частота малых фазовых колебаний. Из условия  $(\Delta I)_\varphi / I_p \ll 1$  следует, что

$$\frac{(\Delta I)_\varphi}{I_p} = 4 \left[ \frac{\mu V_{mn}}{(d\omega/dI)_{I=I_p}} I_p^{-2} \right]^{1/2} = 4 \left( \frac{\mu V_{mn}}{\alpha \omega I_p} \right)^{1/2} \ll 1;$$

последнее верно лишь при  $\mu \ll \alpha$ . При умеренной неизохронности ( $\alpha \ll \mu^{-1}$ ) величина  $(\Delta\omega)_\varphi / \omega = 4(\mu\alpha V_{mn} / I_p \omega)^{1/2} \ll 1$ . Таким образом, при  $\mu \ll \alpha \ll \mu^{-1}$  использование универсального гамильтониана (13.32) для исследования нелинейного резонанса разумно, так как и  $I$ , и  $\omega$  изменяются мало.

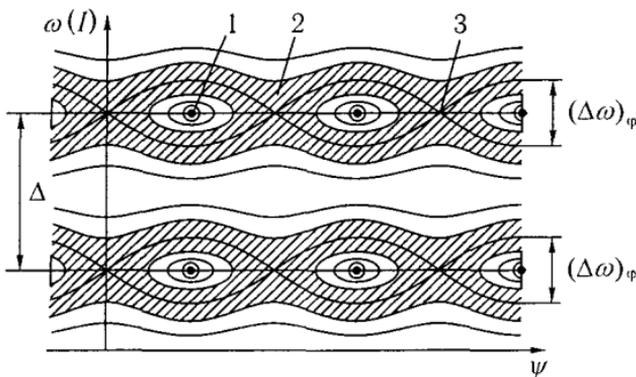


Рис. 13.11. Фазовые траектории вблизи двух резонансов при  $\mu \ll \alpha \ll 1/\mu$  (умеренная нелинейность): 1 — нейтрально-устойчивое положение равновесия; 2 — эргодический слой; 3 — неустойчивое положение равновесия; нижние кривые —  $i$ -й резонанс, верхние —  $(i+1)$ -й резонанс [10]; штриховые линии — сепаратрисы первого приближения, которые разрушаются в следующих приближениях, что приводит к образованию стохастических слоев (заштрихованные области);  $\Delta$  — частотное расстояние между двумя резонансами;  $(\Delta\omega)_\varphi$  — ширина нелинейного резонанса

Какова физика фазовых колебаний? Как мы знаем, при нелинейном резонансе изменение амплитуды влечет за собой отклонение частоты от резонансного значения, что стабилизирует амплитуду колебаний. Но расстройка по частоте естественно приводит к изменению резонансной фазы, из-за чего амплитуда колебаний опять изменяется, возвращая частоту к резонансному значению, поскольку амплитуда изменяется в противоположном первоначальному направлении. Все это относится к изолированному резонансу. От чего зависит взаимодействие резонан-

сов? Оно определяется отношением ширины резонанса  $(\Delta\omega)_\varphi$  к расстоянию до ближайшего резонанса-соседа  $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$  (рис. 13.11); это отношение называется константой связи резонансов [10] и вводится как<sup>1</sup>

$$s = (\Delta\omega)_\varphi / \Delta. \quad (13.38)$$

Тогда понятно, что изолированному резонансу соответствует  $s \ll 1$ , а перекрытие резонансов будет при  $s \gtrsim 1$ . Что произойдет в этом случае? Из (13.32) следует, что усредненное движение системы в изолированном нелинейном резонансе на фазовой плоскости  $\omega(I)$ ,  $\psi$  подобно поведению электрона в потенциальной «яме». Нескольким резонансам соответствует несколько потенциальных «ям» (см. рис. 13.11). Перекрытие резонансов означает, что происходит такое сближение соседних «ям», когда система может переходить из «ямы» в «яму». При таких переходах проявляется новый вид неустойчивости динамических систем — стохастическая неустойчивость (см. гл. 22 и 23).

Рассмотренная задача тесно связана с существованием минимального хаоса и своеобразной формой его проявления — стохастической паутиной [21, гл. 13, § 4; 22]. В чем проблема минимального хаоса? Она состоит в отыскании условий, при которых малые области со стохастическим поведением возникают при сколь угодно малом возмущении. Самый простой пример системы, в которой существует минимальный хаос, — два связанных нелинейных осциллятора с гамильтонианом  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1(I_1) + \mathcal{H}_2(I_2) + \mu V(I_1, \theta_1; I_2, \theta_2)$  (минимальный хаос возникает при сколь угодно малых  $\mu$ ). Фазовое пространство покрывается некоторой мозаичной структурой — стохастической паутиной, — представляющей собой ячейки, отделенные друг от друга стохастическими слоями. Удивительно красивые картинки стохастических паутин с симметрией пятого и седьмого порядков приведены на цветных вкладках книги [21] (см. в [21], например, рис. XVII и XIX).

<sup>1</sup>В переменных  $I, \psi$  выражение для константы связи между резонансами имеет вид  $\bar{s} = (\Delta I)_\varphi / (I_P^m - I_P^n)$ , где  $I_P^m, I_P^n$  — резонансные значения действия. Строго говоря, именно это выражение следует использовать для нахождения условия перекрытия резонансов.

## ГЛАВА 14

# Периодические автоколебания

### 14.1. Определение

Большинство окружающих нас в природе и технике нелинейных динамических систем в общем случае неконсервативно. Практически в любой системе имеются потери (трение, излучение, нагрев и т. д.), и обычно система не является энергетически изолированной: на нее действуют различные внешние силы и поля, как статические, так и переменные. Какие принципиально новые (по сравнению с консервативными системами) явления возникают в диссипативных системах, в которых колебательная энергия может не только диссипировать из-за потерь, но и пополняться из-за неустойчивостей, связанных с неравновесностью системы? Самое важное и замечательное среди таких явлений — генерация незатухающих колебаний, свойства которых не зависят от того, когда и из какого начального состояния была запущена система, т. е. незатухающих колебаний, устойчивых как по отношению к внешним возмущениям, так и к изменению начальных условий. Системы, обладающие свойством генерировать такие колебания, А. А. Андронов [2] полвека назад назвал автоколебательными, впервые придав им четкое математическое содержание, связав автоколебания с предельными циклами Пуанкаре (см. также [1]).

Предельный цикл — замкнутая фазовая траектория, к которой стремятся все соседние траектории, — является образом периодических автоколебаний, о которых мы и будем говорить в этой главе. Автоколебания в динамической системе могут быть не только периодическими, но и квазипериодическим и даже стохастическими (см. гл. 22). Поэтому сначала мы дадим достаточно общее определение.

Автоколебания — это незатухающие колебания, поддерживаемые внешними источниками энергии в нелинейной диссипативной системе, вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий (по крайней мере в конечных пределах).

Автоколебания принципиально отличаются от других колебательных процессов в диссипативных системах тем, что для их поддержания, вообще говоря, не требуется периодических воздействий извне.

Колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, колебания тока в радиотехническом генераторе, колебания воздуха в органной трубе, маятника в «ходиках» — хорошо известные примеры автоколебаний. В простейших автоколебательных системах, или «автогенераторах», обычно можно выделить колебательную систему с затуханием, усилитель, нелинейный ограничитель — звено «обратной связи». Это можно сделать, например, в классическом генераторе Ван-дер-Поля (рис. 14.1 *a, б*). Автоколебания в таком генераторе устанавливаются следующим образом: случайно возникшие в  $LC$ -контуре малые колебания через катушку  $L'$  управляют анодным током лампы, который (при соответствующем взаимном расположении  $L$  и  $L'$ ) усиливает колебания в контуре. При условии, что потери в контуре меньше, чем вносимая в контур таким образом энергия, амплитуда колебаний в контуре нарастает.

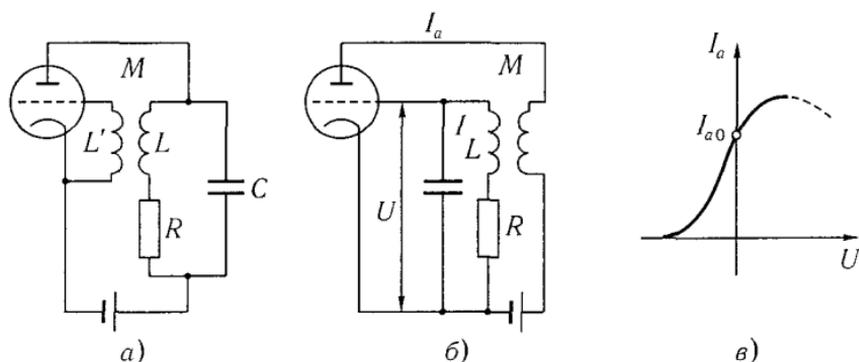


Рис. 14.1. Схемы генераторов Ван-дер-Поля: *a* — с контуром в цепи анода; *б* — с контуром в цепи сетки; *в* — характеристика лампы, аппроксимированная кубическим полиномом

С увеличением амплитуды колебаний вследствие нелинейной зависимости анодного тока от напряжения на сетке лампы поступающая в контур энергия уменьшается и при некоторой амплитуде колебаний сравнивается с потерями. В результате устанавливается режим стационарных периодических колебаний, в котором все потери энергии компенсирует анодная батарея.

Таким образом, для установления автоколебаний принципиальна нелинейность, которая управляет поступлением и потерями энергии источника. Частотные же характеристики источника принципиальной роли не играют.

Автоколебания тем и отличаются от собственных колебаний, частота которых определяется параметрами системы, а амплитуда и фаза — начальными условиями, и от вынужденных колебаний, амплитуда, фаза и частота которых определяются внешней силой, что их амплитуда и частота определяются только параметрами системы и не зависят от начальных условий, а фаза не существенна. (Характеристики источника, естественно, влияют на параметры системы.)

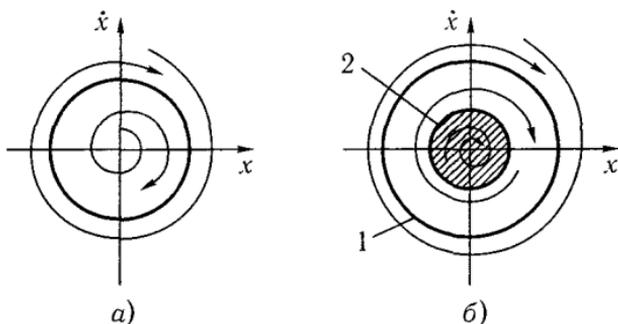


Рис. 14.2. Фазовые портреты автоколебательных систем: *а* — «мягкое» возбуждение; *б* — «жесткое» возбуждение (начальная точка на фазовой плоскости должна лежать вне заштрихованной области; 1 и 2 — устойчивый и неустойчивый предельные циклы)

Рассмотренный нами применительно к генератору Ван-дер-Поля режим возникновения автоколебаний, не требующий начального толчка, называется режимом «мягкого» возбуждения. Для генераторов с одной степенью свободы такому режиму соответствует фазовый портрет, представленный на рис. 14.2 *а*. Встречаются также системы с «жестким» возбуждением автоколебаний. Это такие системы, в которых колебания самопроизвольно нарастают с некоторой начальной амплитуды. Для перехода систем с жестким возбуждением в режим стационарной генерации необходимо начальное возбуждение с амплитудой, большей некоторого критического значения. Фазовый портрет такого генератора приведен на рис. 14.2 *б*. Видно, что для выхода траектории на устойчивый предельный цикл начальная точка на фазовой плоскости должна лежать вне области притяжения устойчивого состояния равновесия. Отсюда ясен и физический смысл неустойчивых предельных циклов: они служат границей между областями начальных условий, из которых система стремится к различным устойчивым режимам движения (на фазовой плоскости таким движениям соответствуют притягивающие

множества — аттракторы, например устойчивые состояния равновесия или предельные циклы<sup>1</sup>.

Размеры предельного цикла определяют амплитуду автоколебаний генератора, время движения изображающей точки по циклу — их период, а форма предельного цикла — форму колебаний. Таким образом, задача об исследовании периодических автоколебаний в системе сводится к задаче нахождения предельных циклов в фазовом пространстве и определения их параметров. Общий метод для нахождения предельных циклов (как, например, для определения координат и типов состояний равновесия) не известен даже для систем второго порядка. Правда, на основании теории индексов Пуанкаре (см. гл. 15) мы можем сформулировать некоторые критерии отсутствия предельных циклов на фазовой плоскости; например, если в системе нет состояний равновесия, то в ней не может быть и предельных циклов, или если единственное состояние равновесия является седлом, то предельных циклов тоже нет и т. д.

## 14.2. Генератор Ван-дер-Поля. Зависимость формы автоколебаний от параметров системы

Схема генератора Ван-дер-Поля (рис. 14.1 б) и описывающее ее уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \alpha(1 - \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (14.1)$$

и сейчас, спустя полвека после появления, служат основной моделью автоколебаний с одной степенью свободы. Для уравнения (14.1) и для уравнения Рэлея

$$\ddot{y} - \sigma(1 - \gamma \dot{y}^2)\dot{y} + y = 0, \quad (14.2)$$

которое после дифференцирования и замены переменной  $\dot{y} = x$  принимает вид (14.1) с  $\alpha = \sigma$ ,  $\beta = 3\gamma$ ,  $\omega_0 = 1$ , существование предельных циклов доказать сравнительно просто.

Уравнение Ван-дер-Поля легко получить для лампового генератора, например, с колебательным контуром в цепи сетки. принципиальная схема которого изображена на рис. 14.1 б. Будем пренебрегать сеточными токами. На основании законов Кирхгофа для колебательного контура  $I = -CdU/dt$ ,  $RI = U - LdI/dt - MdI_a/dt$ . Величина  $-MdI_a/dt$  есть

<sup>1</sup>Других аттракторов в грубых двумерных системах быть не может. В трехмерных системах могут быть более сложные аттракторы, о чем будет рассказано в гл. 22 — о стохастических колебаниях в простых системах.

ЭДС, которая наводится в контуре под воздействием на него анодного тока  $I_a$ , протекающего по катушке в цепи анода (слагаемое  $-MdI_a/dt$  можно назвать ЭДС обратной связи). Из написанных уравнений следует, что

$$LCd^2U/dt^2 - [MS(U) - RC]dU/dt + U = 0, \quad (14.3)$$

где  $S(U) = dI_a/dU$  — крутизна характеристики лампы в пренебрежении анодной реакцией (предполагается, что анодный ток  $I_a$  зависит лишь от  $U$ , поэтому  $dI_a/dt = (dI_a/dU)dU/dt = s(U)dU/dt$ ). Уравнение (14.3) есть нелинейное уравнение лампового генератора. Предположим далее, что анодно-сеточную характеристику лампы можно аппроксимировать полиномом  $I_a = I_{a0} + S_0U - S_2U^3$  (рис. 14.1в). Это означает,  $S(U) = S_0 - S_2U^2$ , и уравнение (14.3) принимает вид (14.1), где

$$\alpha = (MS_0 - RC)/(LC), \quad \beta = 2MS_2/(RC - MS_0), \quad \omega_0^2 = 1/(LC). \quad (14.4)$$

Величина параметра  $\alpha$  показывает, насколько сильно возбужден генератор (при  $\alpha < 0$  условия возбуждения не выполнены). Величина  $\beta$  характеризует амплитуду автоколебаний: чем меньше  $\beta$ , тем больше амплитуда. Вводя безразмерные переменные и параметры  $\tau = \omega_0 t$ ,  $x = \beta^{1/2}U$ ,  $\mu = \alpha\omega_0$ , получим окончательно

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (14.5)$$

Как будет зависеть форма предельного цикла от параметра  $\mu$ ? При  $\mu = 0$  система становится линейной консервативной. Естественно ожидать, что при малом  $\mu$  ( $\mu \ll 1$ ) автоколебания будут мало отличаться от гармонических колебаний, а нелинейное трение лишь «выбирает» амплитуду устойчивого предельного цикла. При больших  $\mu$  форма колебаний может существенно отличаться от синусоидальной.

Одним из методов нахождения предельных циклов является метод графического построения интегральных кривых на фазовой плоскости — метод изоклин. Изоклиной называется геометрическое место точек, в которых касательные к интегральным кривым имеют одинаковый наклон. Запишем уравнение (14.5) в виде  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x$ . Уравнение интегральных кривых будет таким:

$$dy/dx = [\mu(1 - x^2)y - x]/y. \quad (14.6)$$

Пусть наклон интегральной кривой в некоторой точке  $M_0(x_0, y_0)$  равен  $k$ , т. е.  $(dy/dx)_{M_0} = k$ . Тогда из (14.6) получим

$$k = [\mu(1 - x^2)y - x]/y. \quad (14.7)$$

Если  $x = 0$ , то  $k = \mu$ , т. е. ось  $y$  пересекается интегральными кривыми под тем бóльшим углом, чем больше  $\mu$ . При  $y = 0$  касательные к интегральным кривым вертикальны. Давая  $k$  различные значения, из (14.7) будем получать уравнения разных изоклин  $y = x/[\mu(1 - x^2) - k]$ . Строя затем семейства изоклин, можно построить интегральные кривые, а следовательно, и фазовые траектории. Фазовые портреты, полученные таким методом для уравнения (14.5) при различных значениях  $\mu$ , изображены на рис. 14.3. На рис. 14.4 приведены осциллограммы, иллюстрирующие характер установления и форму автоколебаний в системе.

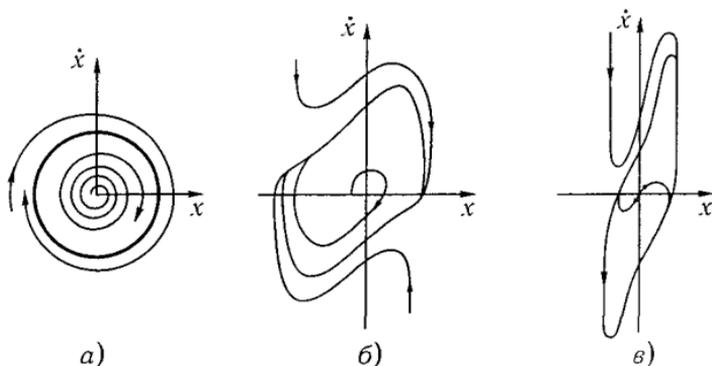
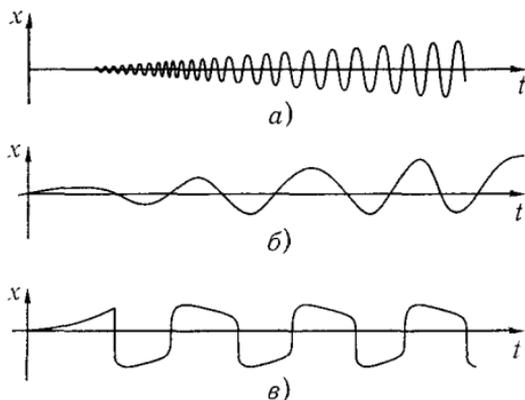


Рис. 14.3. Фазовые портреты, соответствующие уравнению (14.5) при различных значениях параметра нелинейности  $\mu$ :  $a$  — квазигармонические колебания ( $\mu = 0, 1$ );  $b$  — сильно несинусоидальные ( $\mu = 1$ );  $c$  — релаксационные ( $\mu = 10$ )

Предельные циклы на рис. 14.3 содержат внутри особую точку, причем для  $\mu = 0, 1$  и  $\mu = 1$  эта точка является неустойчивым фокусом, а для  $\mu = 10$  — неустойчивым узлом. Форма автоколебаний при этом меняется от квазисинусоидальной до релаксационной. Величина  $\mu$  характеризует нелинейность в системе таким образом: чем больше нелинейность в системе, тем больше форма колебаний в ней отличается от синусоидальной. В физической литературе величину  $\mu$  иногда называют прочностью предельного цикла — при малом  $\mu$  траектории слабо притягиваются к циклу, при  $\mu \gg 1$  такое притяжение очень сильно,

Рис. 14.4. Осциллограммы, иллюстрирующие характер установления и форму автоколебаний в системе, описываемой уравнением (14.5). Они соответствуют фазовым портретам на рис. 14.3:  $\mu = 0,1$  (а),  $\mu = 1$  (б),  $\mu = 10$  (в)



т. е. цикл «прочный». В случаях  $\mu \ll 1$  и  $\mu \gg 1$  удается достаточно просто решить задачу об автоколебаниях в системе приближенными аналитическими методами [3–5].

### 14.3. Релаксационные автоколебания.

#### «Быстрые» и «медленные» движения

При сильной нелинейности ( $\mu \gg 1$ ) колебания становятся релаксационными, состоящими из участков быстрых и медленных движений. Для нахождения таких разрывных колебаний Мандельштам и Папалекси предложили использовать «гипотезу скачка», учитывающую, что при перескоках энергия меняется непрерывно. В качестве примера рассмотрим уравнение Рэля

$$d^2y/dt^2 - \varepsilon[1 - (dy/dt)^2]dy/dt + y = 0,$$

где  $\varepsilon$  — велико. Введением нового времени  $\tau = t/\varepsilon$  и переменной  $x = y/\varepsilon$  можно перевести параметр  $\varepsilon$  в коэффициент при старшей производной:

$$\varepsilon^{-2}\ddot{x} - (1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0. \quad (14.8)$$

Теперь при старшей производной стоит малый параметр  $\mu = 1/\varepsilon^2$ . Попробуем найти асимптотическую форму решения уравнения (14.8) при  $\mu \rightarrow 0$ . Запишем уравнение (14.8) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad \mu\dot{y} = (1 - y^2)y - x. \quad (14.9)$$

Заметим, что при  $\mu = 0$  фазовым пространством системы будет прямая  $x$ , закон движения по которой определяется видом функции

$y = f(x)$ , приведенной на рис. 14.5 а. В силу однозначности этой функции направление движения в интервале  $-x' < x < x'$  однозначно не определено (рис. 14.5 б). Другими словами, система получилась динамически противоречивой: единственное состояние равновесия при  $x = 0$  неустойчиво, а куда переходит система из точек  $x = \pm x'$  — неизвестно.

Попробуем снять это противоречие, учитывая, что параметр  $\mu$  имеет хотя и малое, но конечное значение. Уравнение интегральных кривых системы (14.9) имеет вид

$$dy/dx = [(1 - y^2)y - x]/(\mu y).$$

При  $\mu \rightarrow 0$  вне кривой  $x = (1 - y^2)y' dy/dx \rightarrow \infty$  или  $dx/dy \rightarrow 0$ . Интегральными кривыми будут прямые  $x \rightarrow \text{const}$ , а направления движения по ним определяются вторым уравнением системы (14.9). Из последнего следует, что скорость движения при  $\mu \rightarrow 0$  очень велика. Это так называемые «быстрые» движения. «Медленные» движения происходят на самой кривой  $y(1 - y^2) = x$ ; закон движения определяется первым уравнением системы (14.9). Фазовый портрет изображен на рис. 14.6 а. Верхняя и нижняя ветви кривой медленных движений устойчивы по отношению к быстрым движениям, средняя неустойчива. В точках  $x \pm x'$  происходит «скачок» с одной ветви кривой  $y(x)$  на другую. При любых начальных условиях система выходит на предельный цикл  $abcd$ , состоящий из участков «быстрых» и «медленных» движений. При этом система совершает релаксационные колебания, форма которых изображена на рис. 14.6 б. Период колебаний  $T$  можно найти, подсчитав время движения по предельному циклу [5]. Временем быстрых движений можно пренебречь. Из уравнений медленных движений  $\dot{x} = y$ ,  $(1 - y^2)y = x$  найдем

$$dt = \frac{dx}{y} = \frac{d[(1 - y^2)y]}{y}, \quad T = 2 \int_{y_a}^{y_b} \frac{d(y - y^3)}{y} = 2 \left( \ln y - \frac{3}{2} y^2 \right) \Big|_{y_a}^{y_b}.$$

Таким образом, учет малого параметра оказался существенным для выяснения динамики системы. Всегда ли это так? Ясно, что если

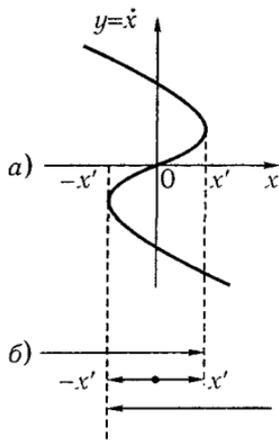


Рис. 14.5. Фазовое пространство для системы, описываемой уравнением (14.9) при  $\mu = 0$ : а — функция  $y = y(x)$ , определяющая закон движения вдоль  $x$ ; б — направления движения в интервале  $-x' < x < x'$

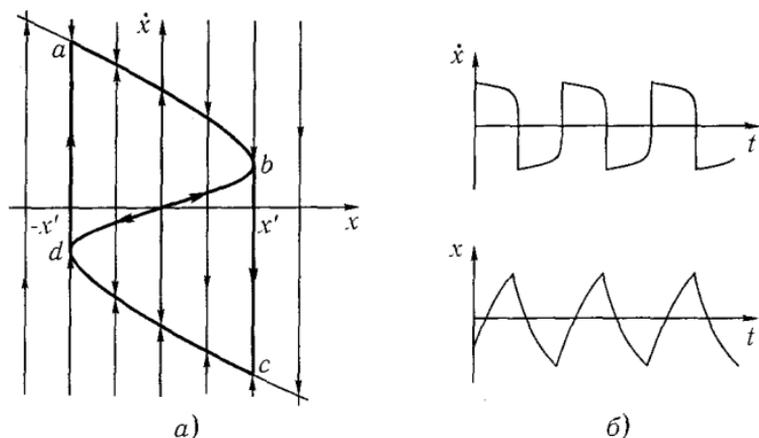


Рис. 14.6. Фазовый портрет (а) и форма (б) релаксационных колебаний

введение малого параметра не повышает порядка уравнений, то учет его, если система в определенном смысле устойчива (см. гл. 15), не играет роли. Но даже если порядок уравнения повышается, то это оказывается несущественным в том случае, когда вся кривая медленных движений устойчива по отношению к быстрым движениям — при этом изображающая точка на фазовой плоскости очень быстро придет в малую (порядка  $\mu$ ) окрестность кривой медленных движений, и динамика системы будет определяться только медленными движениями [4]. Аналитическое условие этого легко получить. Действительно, в общем виде система двух уравнений первого порядка с малым параметром  $\mu$  при производной имеет вид  $\mu \dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$ . Уравнения быстрых движений имеют вид  $y = \text{const}, \mu \dot{x} = P(x, y)$ ; уравнения медленных движений имеют вид  $P(x, y) = 0, \dot{y} = Q(x, y)$ . Кривая медленных движений  $P(x, y) = 0$  является геометрическим местом состояний равновесия для быстрых движений. Очевидно, что все участки этой кривой будут устойчивы по отношению к быстрым движениям, если  $dP(x, y) < 0$  для всех точек кривой.

В заключение заметим, что, поскольку практически весь опыт классической теории (по крайней мере для систем с немалой нелинейностью) был связан с анализом автоколебаний на фазовой плоскости, возможность установления периодических движений, отвечающих предельному циклу, ассоциировалась исключительно с такими диссипативными системами, в которых незатухающие колебания совершались лишь за счет неперiodических источников энергии. Еще несколько лет назад никто бы не решился назвать автогенератором нелинейный ос-

циллятор с трением, находящийся под действием периодической силы:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \alpha x(1 - x^2) = f \sin \omega t. \quad (14.10)$$

Однако это — автогенератор: такой нелинейный осциллятор демонстрирует незатухающие колебания, параметры которых (интенсивность, частота, а в более общем случае спектр и т. д.) не зависят от конечного изменения начальных условий и слабо зависят от изменения внешней силы. В частности, в фазовом пространстве  $\dot{x}x$  неавтономной системы, описываемой уравнением (14.10), имеются устойчивые периодические движения, которым, если смотреть стробоскопически через период внешней силы, соответствуют (в отображении Пуанкаре) устойчивые неподвижные точки.

Интенсивные исследования нелинейных диссипативных систем с трехмерным фазовым пространством позволили в последние годы обнаружить совершенно новый класс автоколебательных систем. Это автогенераторы шума — диссипативные системы, совершающие незатухающие хаотические колебания, колебания со сплошным спектром за счет энергии нешумовых источников. Замечательно, что даже столь привычный нам осциллятор (14.10) в широкой области параметров является автогенератором шума. Открытие стохастических автоколебаний — это, пожалуй, наиболее яркое достижение современной теории. Почему же оно появилось только сейчас? Дело в том, что со времен Пуанкаре до недавнего времени предельный цикл был единственным примером нетривиального притягивающего множества в фазовом пространстве нелинейных диссипативных систем. Правда, уже довольно давно были обнаружены сложные многопетлевые предельные циклы. Устойчивые многопериодические движения были обнаружены при исследовании синхронизации автогенераторов.

По-видимому, обнаружение сложных предельных циклов, а затем и бифуркаций, показывающих дорогу к их дальнейшему усложнению, уже могло бы послужить причиной расширения представлений об автоколебаниях. Однако фактически это произошло несколько позже, когда появились результаты численных экспериментов, доказывающих существование «непериодических разовых потоков» в диссипативных неравновесных системах [6]. Практически в то же время в абстрактной теории динамических систем появились новые математические объекты — сложные аттракторы, названные Рюэлем и Такенсом «странными».

Примером странного аттрактора — притягивающего множества, на котором нет устойчивых траекторий и где все они ведут себя сложно

и запутанно, — служит притягивающая структура из седловых циклов (когда все траектории, сматывающиеся с них, стремятся к циклам той же структуры).

Замечательно, что сейчас, когда сформировалась новая точка зрения на стохастические автоколебания, они обнаруживаются в очень простых, по существу, классических системах, например таких, как связанные автогенераторы или релаксационный генератор с полутора степенями свободы. Их находят, потому что теперь знают, что именно искать.

## Нелинейные динамические системы (общие свойства и методы исследования)

### 15.1. Основные типы траекторий. Грубость (структурная устойчивость) динамической системы

Начнем с систем с одной степенью свободы. Такие системы, описываемые уравнением второго порядка, качественно могут быть полностью исследованы с помощью анализа поведения траекторий на фазовой плоскости [1–6].

Мы уже привыкли к фазовым портретам линейного осциллятора без трения (состояния равновесия типа «центр» или «седло»), с малым затуханием (состояние равновесия типа «фокус»), с большим затуханием (состояние равновесия типа «узел»). Линейный осциллятор подробно обсуждался в гл. 1, но для дальнейшего изложения полезно еще раз взглянуть на все возможные фазовые портреты линейных автономных систем — они представлены на рис. 15.1 *a–г*. Исследование нелинейных систем мы начали в двух предыдущих главах с рассмотрения динамики нелинейного осциллятора и простейших моделей автоколебаний. Их уже достаточно сложные фазовые портреты также приведены на рис. 15.1, который собрал в себе все, что мы пока знаем.

Уравнение нелинейного осциллятора  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , как уже говорилось в гл. 13, можно проинтегрировать и найти аналитическое выражение для  $x(t)$ .

Если в системе учесть еще и затухание, т. е. если уравнение будет иметь вид  $\ddot{x} + h\dot{x} + f(x) = 0$ , то аналитически найти решение достаточно сложно. Однако из физических соображений ясно, что при малом затухании состояние равновесия «центр» должно перейти в «фокус»: соответствующий фазовый портрет изображен на рис. 15.2.

Теперь посмотрим, что будет, если контур линейный, а затухание нелинейное. Пусть, например, в контуре имеется нелинейная проводимость (рис. 15.3 *a*). Если затухание знакопостоянно, то характер

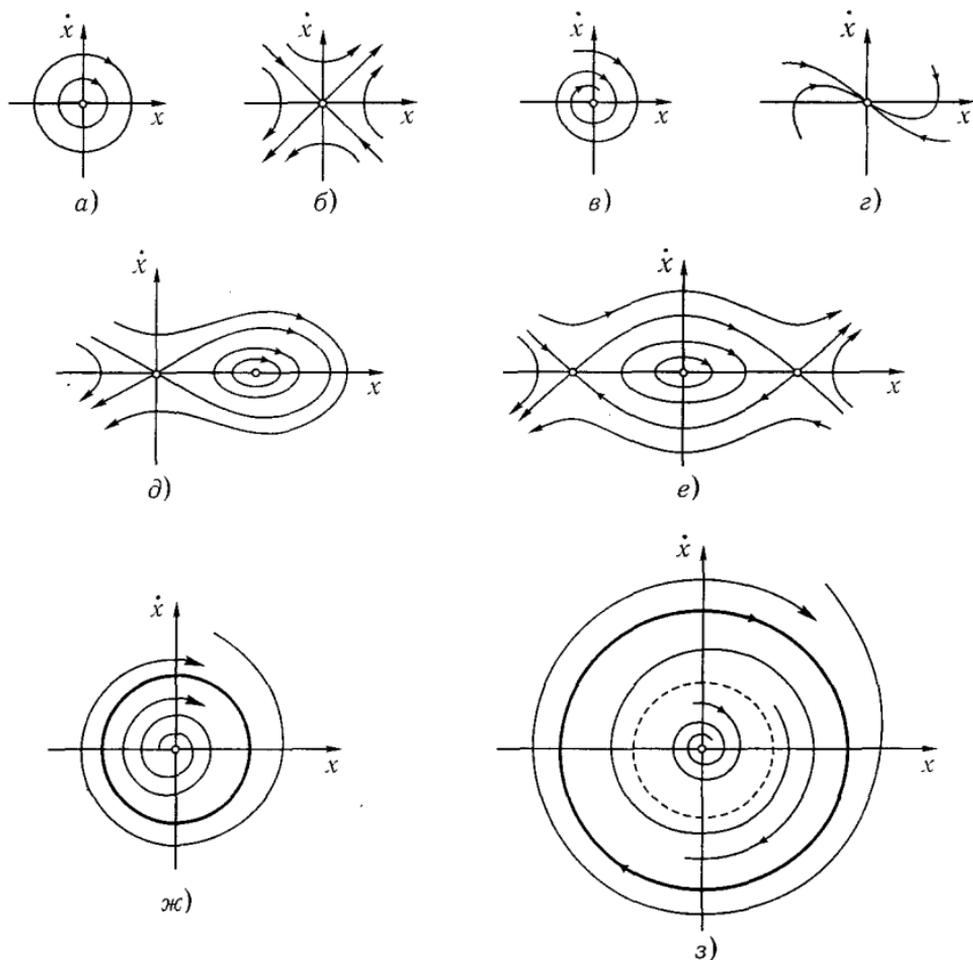


Рис. 15.1. Фазовые портреты линейного и нелинейного осцилляторов. Линейные осцилляторы: а —  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , состояние равновесия типа «центр»; б —  $\ddot{x} - a^2 x = 0$  — «седло»; в —  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,  $\gamma^2 < \omega_0^2$  — «фокус»; г —  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,  $\gamma^2 > \omega_0^2$  — «узел» (все состояния равновесия — начало координат). Нелинейные осцилляторы: д —  $\ddot{x} - x(1 - x/2) = 0$  — «седло», «центр»; е —  $\ddot{x} + \sin x = 0$  — «седло», «центр», «седло»; ж, з — автоколебательные системы

движений в таком нелинейном контуре будет мало отличаться от характера движения линейного осциллятора с трением; будет меняться только скорость приближения изображающей точки к состоянию равновесия. А что будет нового, когда затухание знакопеременно? Рассмотрим, к примеру, уже знакомую нам схему с туннельным диодом, характеристика которого представлена на рис. 15.3б. Если рабочая точ-

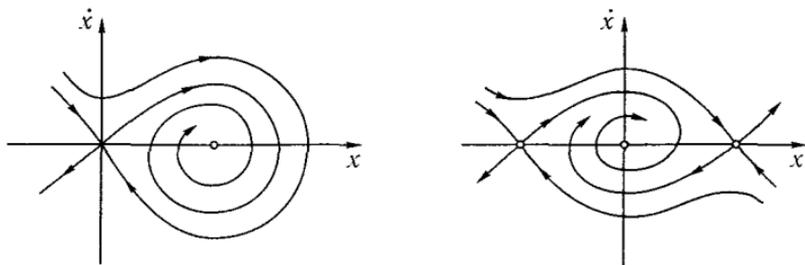


Рис. 15.2. Фазовые портреты для неконсервативного нелинейного осциллятора с малой диссипацией ( $\ddot{x} + h\dot{x} + f(x) = 0$  — «седло», «фокус»)

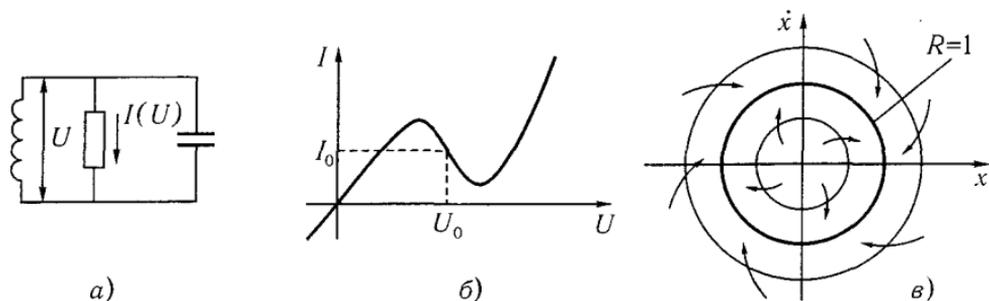


Рис. 15.3. Схема линейного контура с нелинейной проводимостью (а); вольт-амперная характеристика туннельного диода (б), окружности  $x^2 + y^2 = R^2$  и траектории, проходящие через них ( $R = 1$  — траектория — предельный цикл;  $R < 1$  — траектории выходят из окружности радиуса  $R$ ;  $R > 1$  — траектории входят в окружность радиуса  $R$ ) (в)

ка выбрана на падающем участке, то характеристика может быть аппроксимирована полиномом

$$I(U) = I_0 - g(U - U_0) + \alpha(U - U_0)^3.$$

Движение в контуре с такой проводимостью описывается уравнением

$$\ddot{x} - \varepsilon\dot{x}(1 - x^2) + x = 0 \quad (15.1)$$

или

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y.$$

При больших  $x$  — это уравнение осциллятора с нелинейным затуханием, однако состояние равновесия в этой системе неустойчиво. Аналитически в общем случае не удается найти решение уравнения (15.1), но

качественно его можно исследовать полностью. Как мы увидим, в такой системе есть изолированная замкнутая траектория — предельный цикл, соответствующий периодическим автоколебаниям, о которых говорили в предыдущей главе.

Попытаемся сконструировать модель типа (15.1), но более удобную для анализа. Для этого в линейную систему уравнений  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$  «введем неустойчивость», добавляя в правые части слагаемые  $x$  и  $y$  (неустойчивость будет очевидно проявляться при малых значениях  $x$  и  $y$ ), и «введем затухание», прибавляя слагаемые  $-x(x^2 + y^2)$  и  $-y(x^2 + y^2)$  (затухание будет проявляться при больших значениях  $x$  и  $y$ ). Сконструированная таким образом система уравнений будет иметь вид

$$\dot{x} = y + x - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + y - y(x^2 + y^2). \quad (15.2)$$

Рассмотрим на плоскости  $xy$  окружность радиуса  $R$ , описываемую уравнением  $x^2 + y^2 = R^2$ , и для траекторий, проходящих через эту окружность (рис. 15.3 в), перепишем (15.2) следующим образом:

$$\dot{x} = y - x(R^2 - 1), \quad \dot{y} = -x - y(R^2 - 1). \quad (15.3)$$

Найдем интегралы движения для этой системы. Умножим первое уравнение на  $x$ , второе на  $-y$  и сложим их:

$$dR^2/dt = -2R^2(R^2 - 1). \quad (15.4)$$

Из уравнения (15.4) сразу следует, что есть периодическое решение, соответствующее  $R = 1$ , а именно

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x = \text{const}(t - t_0), \quad y = \sin(t - t_0). \quad (15.5)$$

Величина  $R^2 = x^2 + y^2$  характеризует амплитуду колебаний. Если  $R < 1$ , тогда  $dR/dt > 0$ , и значение  $R$  на траектории нарастает; если же  $R > 1$ , то  $dR/dt < 0$  — все траектории снаружи входят в окружность радиуса  $R$ . Если  $R = 1$ , то  $dR/dt = 0$ , и (15.5) есть точное решение уравнения (15.4). Таким образом, окружность  $x^2 + y^2 = 1$  на фазовой плоскости является замкнутой фазовой траекторией, к которой стремятся все соседние траектории, т. е. предельным циклом (рис. 15.3 в). Поясним, почему этот предельный цикл устойчив: при  $R > 1$  все траектории идут внутрь области, ограниченной окружностью радиуса  $R$ , но внутри этой области состояние равновесия (в начале координат) неустойчиво, следовательно, траекториям, входящим в эту область, некуда двигаться, кроме как наматываться на предельный цикл (рис. 15.3 в).

Если в автоколебательной системе кроме нелинейной проводимости есть еще нелинейные элементы типа нелинейных емкости или индуктивности, то фазовые портреты могут выглядеть, например, как на рис. 15.4 а.

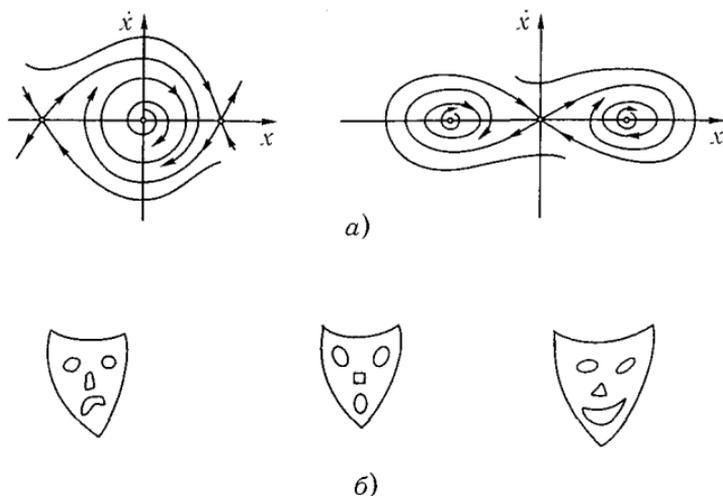


Рис. 15.4. Фазовые портреты систем, в которых кроме нелинейной проводимости есть другие нелинейные элементы (а) и пример топологически одинаковых картинок на плоскости (б)

Чтобы полностью охарактеризовать качественное поведение системы с одной степенью свободы, не обязательно знать все фазовые траектории. Достаточно знать только особые: а) состояния равновесия, б) сепаратрис, седла, в) предельные циклы. Зная их взаимное расположение, мы можем нарисовать на плоскости фазовый портрет любой динамической системы, если она грубая.

Что значит «грубая динамическая система»? Понятие грубости было впервые введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным.

Фазовый портрет грубой системы топологически не меняется при малом изменении параметров системы. Не слишком строго топологическая тождественность означает, что картина на фазовой плоскости не меняется качественно, т. е. сохраняются все основные элементы и их взаимосвязи. Если на фазовой плоскости, например, был предельный цикл, а состояние равновесия было неустойчиво, то в грубой системе при изменении параметра остается один цикл и одно неустойчивое состояние равновесия. На рис. 15.4 б приведены примеры топологически одинаковых фазовых картинок. Математически понятие грубости для

систем двух уравнений первого порядка типа  $\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$  можно определить таким образом (см., например, [16]): динамическая система является грубой, если существует такое малое число  $\delta$ , что все динамические системы, описываемые уравнениями

$$\dot{x} = P(x, y) + p(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) + q(x, y),$$

в которых аналитические функции  $p(x, y), q(x, y)$  удовлетворяют неравенству

$$|p(x, y)| + |q(x, y)| + |\partial p / \partial x| + |\partial p / \partial y| + |\partial q / \partial x| + |\partial q / \partial y| < \delta,$$

имеют одинаковую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории. Таким образом, понятие грубости вводится как математический образ свойства качественной неизменности характера движения системы при малом изменении ее параметров. При некоторых значениях параметров система перестает быть грубой. Их называют бифуркационными. Бифуркация — приобретение нового качества движениями динамической системы при малом изменении ее параметров [17].

## 15.2. Основные бифуркации на плоскости.

### Индексы Пуанкаре

Бифуркация — математический образ, отвечающий перестройке характера движения физической системы, химической системы и т. д. Математическое определение бифуркации опирается на понятие топологической эквивалентности динамических систем. Согласно, например, [17] две системы топологически эквивалентны, если движения одной из них могут быть сведены к движениям другой непрерывной заменой координат и времени. Рассмотрим в качестве примера фазовые портреты на рис. 1.3 и 1.4, которые на первый взгляд кажутся совершенно различными. Введением новой системы координат их можно свести один к другому (предоставляем это читателю), т. е. переход от фазового портрета на рис. 1.3 к фазовому портрету на рис. 1.4 не есть бифуркация, поскольку бифуркация — это переход от одной системы к топологически неэквивалентной.

У грубых динамических систем на фазовой плоскости могут быть только простые состояния равновесия типа «фокус», «узел» и «седло» и притягивающие замкнутые фазовые траектории — устойчивые или неустойчивые предельные циклы.

Рассмотрим простейшие бифуркации автономных систем на фазовой плоскости, происходящие при изменении параметров системы. Простейшим бифуркациям соответствуют переходы через так называемые негрубые системы первой степени негрубости, когда появляется только одна траектория из запрещенных в грубых системах: а) состояние равновесия седло-узел; б) сложный фокус; в) сепаратриса, идущая из седла в то же самое седло (сепаратрисная петля) или в другое седло; г) двойной предельный цикл.

Обсудим эти бифуркации подробнее. Пусть изменение состояния системы происходит в результате изменения некоторого параметра  $\alpha$ . Бифуркационное значение параметра обозначим через  $\alpha_0$ . Бифуркация первого типа изображена на рис. 15.5 а. При значении параметра  $\alpha < \alpha_0$  в системе существовало два состояния равновесия-седло и узел. При  $\alpha = \alpha_0$  они слились, образовав сложную особую точку седло — узел. При последующем увеличении параметра  $\alpha$  состояние равновесия исчезает.

Бифуркация второго типа представлена на рис. 15.5 б. Состояние равновесия (фокус) теряет свою устойчивость. При этом рождается устойчивый предельный цикл.

Третий тип бифуркаций иллюстрируется рис. 15.5 в, г. На рис. 15.5 в из сепаратрисной петли ( $\alpha = \alpha_0$ ) рождается предельный цикл ( $\alpha > \alpha_0$ ). На рис. 15.5 г показано рождение двойного цикла из так называемого сгущения фазовых траекторий. Этот цикл ( $\alpha = \alpha_0$ ) «полуустойчив»: внутри цикла все фазовые траектории удаляются от него, снаружи приближаются.

Итак, чтобы построить портрет динамической системы на фазовой плоскости, надо знать состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы. Если варьировать параметры, то всегда можно понять, как будет меняться картинка на фазовой плоскости. Зная, какие бифуркации возможны, мы определим и качественные изменения фазового портрета. А нарисовав фазовую плоскость, увидим, какие возможны движения — финитные, уходящие в бесконечность, приводящие к устойчивому равновесию и т. д.

Рассмотрим в заключение этого параграфа законы совместного существования различных типов состояний равновесия и замкнутых траекторий. Пусть есть векторное поле на плоскости. Нарисуем замкнутый контур, не проходящий через состояние равновесия (рис. 15.6 а). Если взять на этом контуре точку  $S$  и двигать ее вдоль контура, то вектор поля, проходящий через эту точку, будет непрерывно вращаться. Когда точка сделает полный оборот, то вектор повернется на угол  $2\pi j$ ,

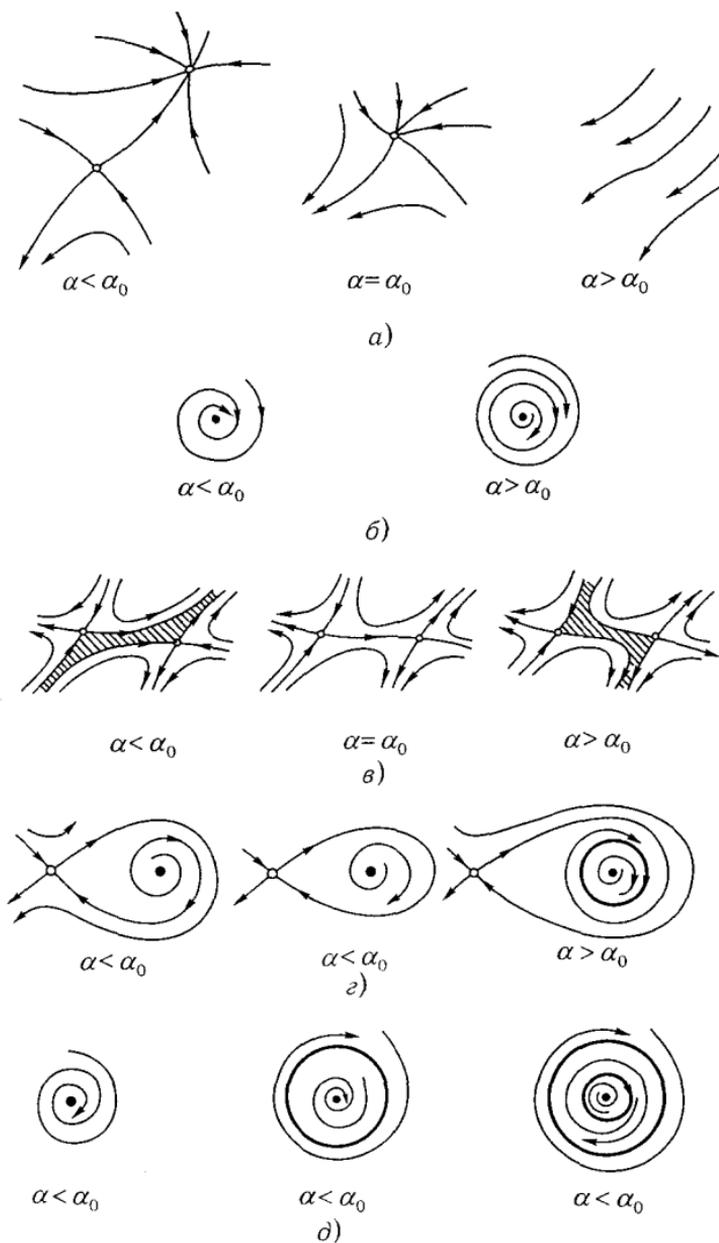


Рис. 15.5. Простейшие бифуркации автономных систем на фазовой плоскости (а-г) и рождение устойчивого и неустойчивого циклов из сгущения фазовых траекторий (д)

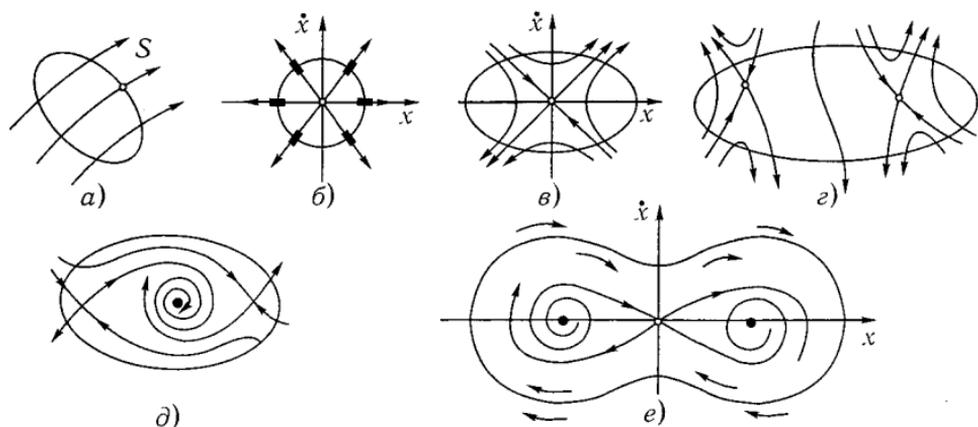


Рис. 15.6. К объяснению индексов Пуанкаре замкнутой кривой, окружающей одну или несколько точек равновесия:  $a$  —  $j = 0$  (внутри контура состояний равновесия нет);  $b$  —  $j = +1$ , центр (то же самое для узла и фокуса);  $c$  —  $j = -1$ , седло;  $d$  —  $j = -2$  ( $j = -1 - 1 = -2$ );  $e$  —  $j = +1$  ( $j = -1 + 1 + 1 = +1$ );  $A$  — предельный цикл

где  $j$  — целое число. Направление вращения вектора будем считать положительным, если оно совпадает с направлением движения точки  $S$ . Целое число  $j$  называется индексом Пуанкаре данного контура. Для контура, изображенного на рис. 15.6  $a$ ,  $j = 0$ . Если состояние равновесия окружить замкнутым контуром, то нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла, фокуса равны  $+1$ , а для седла они равны  $-1$  (рис. 15.6  $b, c$ ). Для предельного цикла  $j = +1$ . Индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек (рис. 15.6  $d$ ). Отсюда сразу ясно, например, что предельного цикла, внутри которого находятся два седла или два седла и фокус, существовать не может, так как для него  $j = +1$ , а для трех таких состояний равновесия сумма индексов  $j$  равна  $-1 + 1 - 1 = -1$  (рис. 15.6  $d$ ). А вот в случае седла и двух фокусов предельный цикл может существовать (рис. 15.6  $e$ ), так как в этом случае сумма индексов  $j$  равна  $-1 + 1 + 1 = +1$ . Два состояния равновесия (седло и узел), представленные на рис. 15.5  $a$ , могут слиться и исчезнуть, так как их совместный индекс  $j = 0$ , а вот три состояния равновесия на рис. 15.6  $d$  исчезнуть не могут. Итак, опираясь на теорию индексов Пуанкаре, можно утверждать следующее:

1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится по крайней мере одна особая точка, так как индекс такой траектории равен  $+1$ ,

а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен нулю.

2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седлом, а обязательно будет точкой с индексом  $+1$ .

3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся несколько простых особых точек, то число их всегда нечетно, а число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.

### 15.3. Точечные отображения

Одним из наиболее удобных методов анализа нелинейных динамических систем является метод точечных отображений [6] или метод отображений Пуанкаре.

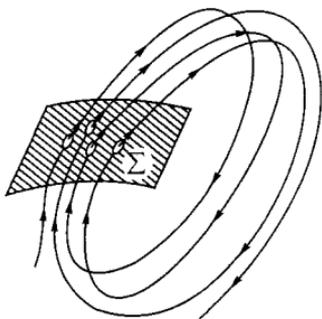


Рис. 15.7. Сечение фазового потока в трехмерном пространстве:  $\Sigma$  — секущая поверхность, которой фазовые траектории не касаются

С помощью этого метода удается эффективно понизить размерность исследуемого фазового пространства. Особенно продуктивен метод точечных отображений в численных экспериментах.

Будем интересоваться поведением траекторий в какой-либо области фазового пространства. Выберем затем некоторую поверхность  $\Sigma$ , которую все или почти все траектории в интересующей нас области пересекают. Такая поверхность называется секущей. Если траектории не покидают исследуемую область, то они будут проходить сквозь секущую поверхность счетное число раз (рис. 15.7). Функция  $S$ , определяющая связь координат  $\mathbf{x}_{k-1}$  ( $k-1$ -го пересечения траектории с поверхностью  $\Sigma$  с координатами  $\mathbf{x}_k$  следующего пересечения, называется функцией последования:

$$\mathbf{x}_k = S(\mathbf{x}_{k-1}). \quad (15.6)$$

Поскольку переменная  $\mathbf{x}$  здесь фиксируется лишь в дискретные моменты времени, это уже не дифференциальное уравнение, а разностное. Каждому фазовому потоку (т. е. динамической системе, описываемой дифференциальным уравнением) соответствует вполне определенное отображение (15.6). Если поток трехмерный, то отображение

двумерное — векторы  $x_k$  и  $x_{k+1}$  имеют только две координаты; если поток двумерный, то секущая — просто линия и отображение одномерное. Для трехмерных систем то обстоятельство, что отображение на единицу понижает размерность пространства, качественно упрощает исследование — мы приходим к фазовой плоскости, где все нам привычно. Вот, например, как выглядят седловой предельный цикл и близкая к нему траектория в фазовом пространстве (рис. 15.8 б). При этом на плоскости  $\Sigma$  это соответствует неустойчивой неподвижной точке.

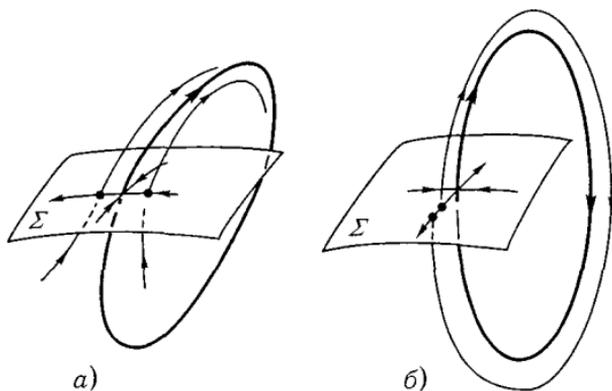


Рис. 15.8. Устойчивая (а) и седловая (б) неподвижные точки на секущей, соответствующие устойчивому и седловому циклам

Устойчивому предельному циклу на секущей плоскости соответствует устойчивая неподвижная точка (рис. 15.8 а).

Для одномерного отображения устойчивость неподвижной точки удобно иллюстрировать с помощью диаграммы (диаграмма Ламерея), изображающей последовательность (15.6). Для этого построим на плоскости  $x_k x_{k-1}$  кривую зависимости  $x_k = S(x_{k-1})$ ; тогда неподвижная точка определяется пересечением этой кривой с прямой  $x_k = x_{k-1}$  (рис. 15.9). «Лесенка» Ламерея позволяет определить устойчивость неподвижной точки: рис. 15.9 а — «лесенка» ведет к устойчивой неподвижной точке, при этом  $|dx_k/dx_{k-1}| < 1$ ; рис. 15.9 б — «лесенка» уходит от неподвижной точки,  $|dx_k/dx_{k-1}| > 1$  — неустойчивость.

Рассмотрим теперь общий  $n$ -мерный случай. Введем на  $\Sigma$  систему координат  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ . Тогда определяемая траекториями системы связь координат  $k$ -й точки пересечения траектории с  $\Sigma$  с координатами  $(k+1)$ -й точки пересечения и есть отображение Пуанкаре

$$\xi_{k+1} = F(\xi_k, \mu), \quad (15.7)$$

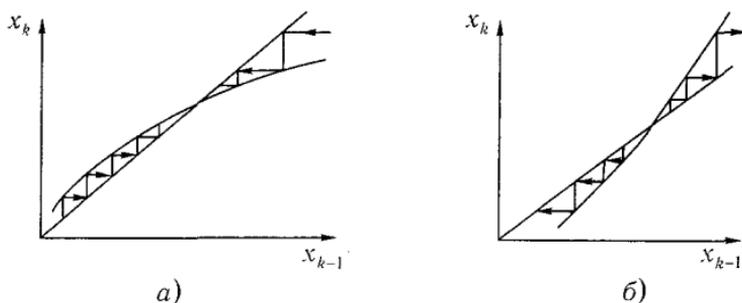


Рис. 15.9. Диаграммы Ламерея для устойчивого (а) и неустойчивого (б) периодического движения

где  $\mu$  — параметр динамической системы. Периодическому движению соответствует неподвижная точка  $\xi^* = F(\xi^*, \mu)$  этого отображения, а движению по незамыкающейся обмотке тора — тор на единицу меньшей размерности. Устойчивость периодического движения, т. е. неподвижной точки, по линейному приближению определяется собственными значениями матрицы  $B(\mu) = \partial F(\xi^*, \mu)/\partial \xi$ , т. е. корнями характеристического уравнения  $\det(B(\mu) - \lambda E) = 0$ , где  $E$  — единичная матрица. Эти собственные значения  $\rho_i$  называются мультипликаторами (название проясняет и смысл: мультипликатор — это коэффициент передачи для малого возмущения, выбранного на  $\Sigma$ , за один проход). В автономных системах один из мультипликаторов, соответствующий эволюции возмущения вдоль периодической траектории, всегда равен единице, т. е. число мультипликаторов, значимых с точки зрения анализа бифуркаций в системе с  $n$ -мерным фазовым пространством, будет равно  $n - 1$ .

Если все  $n - 1$  мультипликаторов по модулю меньше единицы, т. е. лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга, то все возмущения на каждом шаге (обороте возмущенной траектории) уменьшаются и периодическое движение устойчиво. Если же хоть один из мультипликаторов находится вне единичного круга — то неустойчиво. Таким образом, бифуркации периодических движений происходят при переходе мультипликаторов через единичную окружность.

Подчеркнем, что поскольку здесь речь идет о малых возмущениях на фоне периодического движения, то они описываются линейным уравнением с периодическими коэффициентами. Для фундаментальной матрицы решений  $u(t)$  этого уравнения справедлива теорема Флоке (см. гл. 11):  $u(t) = \Phi(t) \exp(\Lambda t)$ , где  $\Phi(t)$  — периодическая с периодом  $T$  матрица. Собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $\Lambda$  называются ха-

характеристическими показателями. Мультипликаторы — это собственные значения матрицы  $\exp(\Lambda T)$ , т. е. они связаны с характеристическими показателями формулой  $\lambda_i = (\ln \rho_i)/T$ .

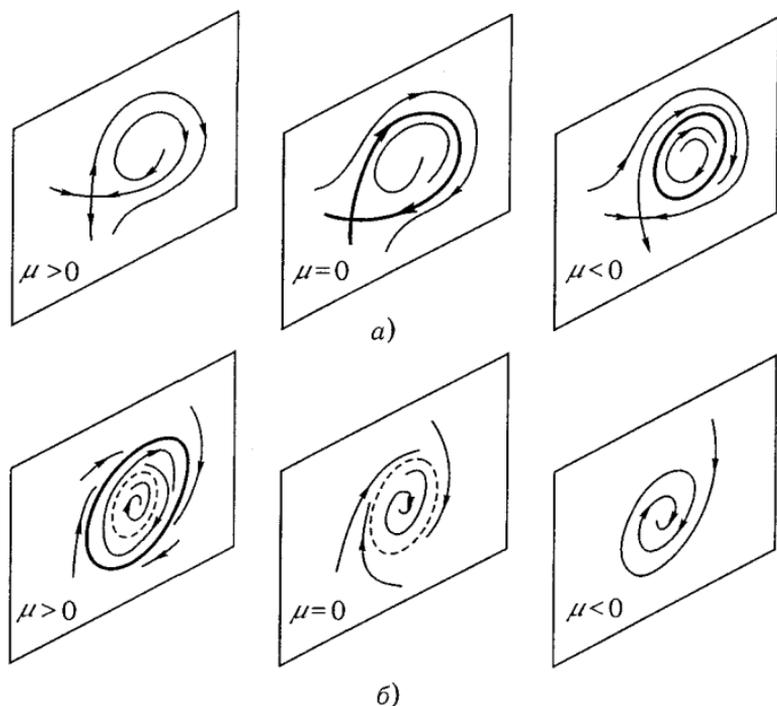


Рис. 15.10. Рождение и исчезновение предельного цикла: *а* — из сепаратрисы седла; *б* — из сгущения фазовых траекторий

## 15.4. Бифуркации периодических движений

Мы пока познакомились лишь с одной бифуркацией периодического движения — ему соответствует рождение (при изменении параметра) предельного цикла из состояния равновесия (при обратном изменении параметра предельный цикл «влипает» в состояние равновесия и таким образом исчезает). Именно так возникает или исчезает периодический режим в генераторе Ван-дер-Поля при увеличении коэффициента обратной связи. Помимо такой бифуркации периодического режима в системах с одной степенью свободы часто встречаются две более сложные: а) рождение предельного цикла из сепаратрис седла [7] (рис. 15.10 *а*); эта бифуркация наиболее характерна для систем типа «нелинейный осциллятор» при их малом возмущении неконсервативными добавками [12];

б) рождение (или взаимная смерть) пары циклов — устойчивого и неустойчивого — из сгущения фазовых траекторий. Подобная бифуркация характерна, например, для автогенераторов с жестким режимом колебаний (рис. 15.10 б): в простейшем случае такие генераторы описываются уравнением вида

$$\ddot{x} + \alpha(1 - \mu x^2 + \beta x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Перечисленные бифуркации возможны не только на фазовой плоскости, но и в фазовом пространстве более высокой размерности. Помимо этих бифуркаций в системах с размерностью пространства  $n \geq 3$  возможны и совершенно специфические, новые бифуркации. Основные

из них — это рождение инвариантного тора из предельного цикла (рис. 15.11) и бифуркация удвоения периода. Остановимся на них подробнее. Для этого воспользуемся отображением Пуанкаре.

Как мы видели, бифуркации периодических движений связаны с переходом мультипликаторов через единичную окружность. Рассмотрим следующие бифуркации: а) один из мультипликаторов становится равным  $+1$ ; б) один из мультипликаторов становится равным  $-1$ ; в) пара мультипликаторов принимает значение  $\exp(\pm i\alpha)$ , где  $\alpha \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$ .

Рис. 15.11. Рождение устойчивого инвариантного тора

Рис. 15.11. Рождение устойчивого инвариантного тора

Бифуркации периодических движений первого типа очень похожи на бифуркации состояний равновесия (см. рис. 15.5 а) — исчезновение двух состояний равновесия подобно слиянию и исчезновению двух циклов; на секущей  $\Sigma$  они даже выглядят одинаково — роль состояний равновесия играют неподвижные точки отображения Пуанкаре (рис. 15.12).

Если один из мультипликаторов устойчивого периодического движения при изменении параметра проходит через  $-1$  (малое возмущение за один оборот по траектории просто меняет знак), то через следующий оборот возмущенная траектория, очевидно, уже замыкается (рис. 15.13) — из периодического движения рождается устойчивое периодическое движение удвоенного периода, а исходное становится неустойчивым. Родившееся периодическое движение при изменении параметра (и снова может потерять устойчивость через бифуркацию

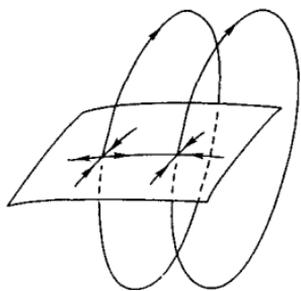


Рис. 15.12. К слиянию седловой и устойчивой точек на плоскости  $\Sigma$

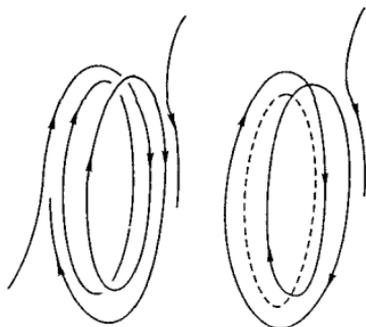


Рис. 15.13. Бифуркация удвоения периода

удвоения периода и т. д. О таких последовательных бифуркациях мы будем говорить в гл. 22 в связи с возникновением в динамических системах хаотического поведения.

При выходе мультипликаторов периодического движения за границы единичной окружности в точках  $\exp(\pm i\alpha)$  при  $\alpha \neq 0\pi, \pi/2, 2\pi/3$  из периодического решения появляется (или в нем исчезает) двумерный инвариантный тор — по образному выражению А. А. Андропова «с цикла слезает шкура» (см. рис. 15.11). При этом движение из периодического становится квазипериодическим. Подобная бифуркация наблюдается в системе двух связанных автогенераторов при переходе из режима взаимной синхронизации в режим биений (см. гл. 16).

Значениям  $\alpha = 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$  соответствуют резонансы при потере устойчивости. Такие резонансы являются двукратным вырождением (по модулю и по аргументу), и они должны исследоваться уже в пространстве двух параметров [10]: затухания вблизи периодического движения и расстройки частоты от резонанса (в данном случае расстройка — разность между аргументом мультипликатора и резонансным значением аргумента).

Бифуркации, в результате которых исчезают статические или периодические режимы, могут приводить к тому, что система выходит на так называемый «хаотический», или «стохастический», режим. Его математический образ в фазовом пространстве, называемый странным аттрактором, топологически может быть устроен по-разному, чем, в частности, определяется многообразие путей его возникновения. Соответствующие бифуркации мы обсудим в гл. 22.

## 15.5. Гомоклинические структуры

Рассмотрим, как ведет себя система из двух нелинейных связанных осцилляторов:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2\mu x_1 x_2, \quad \ddot{x}_2 + x_2(1 - \mu x_2) = -\mu x_1^2, \quad (15.8)$$

которая была исследована сравнительно недавно [13] с помощью метода детального численного моделирования. Эта система интересна, в частности, для астрофизики — она моделирует поведение звезды в поле галактики с потенциалом

$$U(x_1, x_2) = x_1^2/2 + x_1^2 x_2 - x_2^3/3 + x_2^2/2.$$

При  $\mu \ll 1$  осцилляторы демонстрируют простое квазипериодическое поведение. Так же будет и при не малых  $\mu$  ( $\mu \sim 1$ ), но малых начальных энергиях возбуждения (рис. 15.14). На рис. 15.14 изображено сечение плоскостью  $x_1 = 0$  траекторий в фазовом пространстве  $x_1 x_2 \dot{x}_2$  системы (15.8); фазовое пространство этой системы можно считать трехмерным, если учесть интеграл энергии (при  $\mu = 1$ )

$$\mathcal{E} = (1/2 + x_2)x_1^2 + (1/2 - x_2/3)x_2^2 + (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2.$$

Все траектории как бы лежат на гладких поверхностях — торах, т. е. движение системы при любых начальных условиях условно-периодическое. Что произойдет, если мы будем увеличивать энергию колебаний осцилляторов? Прежде всего движение второго осциллятора станет сильно нелинейным — появятся движения, близкие к сепаратрисе одиночного нелинейного осциллятора (ср. рис. 15.1д). Благодаря наличию вынуждающей силы, пропорциональной  $x_1^2(t)$ , уже нельзя сказать, останутся ли они квазипериодическими или тип движения будет меняться — точка будет переходить попеременно из области внутри сепаратрисы в область вне ее.

Результаты численных экспериментов с двумя связанными нелинейными осцилляторами (15.8) при начальных энергиях  $\mathcal{E}_0 > 1/12$  приведены на рис. 15.14. На рисунке видно, что при превышении начальной энергии  $\mathcal{E}_0 = 1/12$ , еще соответствующей простым движениям, всего лишь на 0,04 фазовая траектория уже не наматывается ни на какую поверхность, а, похоже, случайным образом блуждает в ограниченной области фазового пространства! При дальнейшем увеличении  $\mathcal{E}_0$  область, занятая случайными движениями, расширяется, а занятая периодическими или квазипериодическими движениями — сужается (рис. 15.14б).

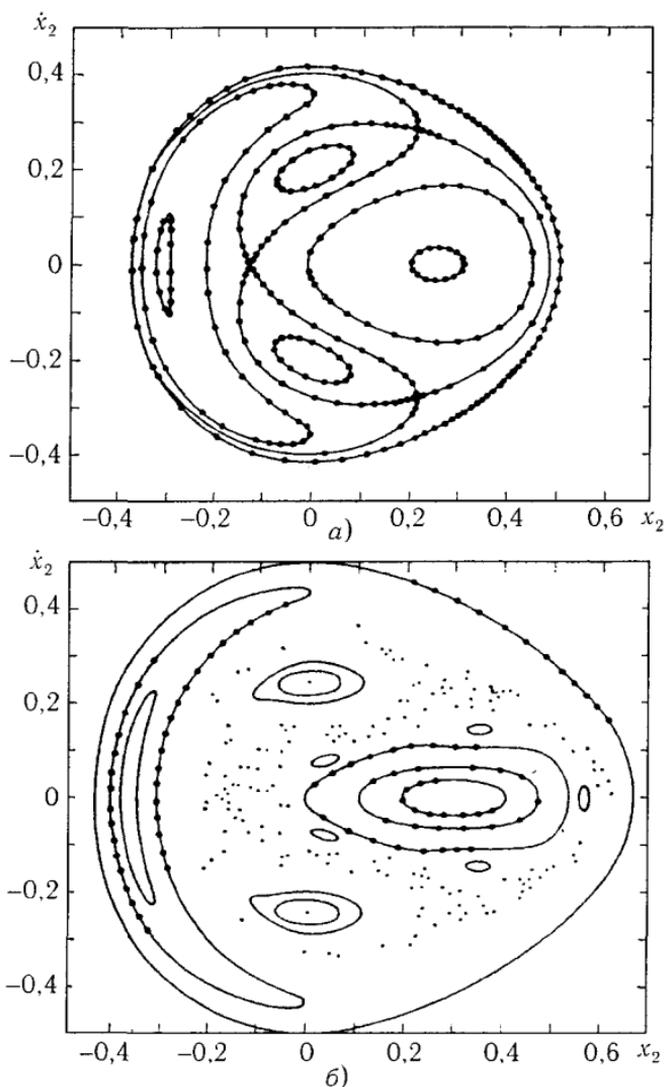


Рис. 15.14. Следы траекторий на секущей плоскости  $x_1 = 0$  фазового пространства системы (15.8) при  $\mu = 1$  и  $\mathcal{E}_0 > 1/12$  (а) и сложные движения системы двух нелинейных осцилляторов (15.8) при  $\mathcal{E}_0 = 0,125$  (б)

Итак, движение в трехмерном фазовом пространстве связанных нелинейных осцилляторов может быть очень сложным.

Откуда появляется эта сложность? Попробуем ответить на этот вопрос, вернувшись к модели нелинейного осциллятора в периодическом поле.

Будем в модели связанных нелинейных осцилляторов считать движение одного из осцилляторов заданным и гармоническим:

$$\ddot{x}_1 - x_1 + x_1^3 = \mu \sin t. \quad (15.9)$$

При  $\mu = 0$  мы про этот осциллятор все знаем (см. рис. 15.1). Рассмотрим его поведение при  $\mu \ll 1$  в трехмерном фазовом пространстве, где третьей координатой является время  $t$ . Физически кажется очевидным, что качественное отличие неавтономных движений от автономных появится в том случае, когда под действием внешней силы осциллятор в разные моменты времени попадает в области с качественно различным характером поведения (на фазовой плоскости этим разным движениям соответствуют области внутри или вне сепаратрисы). Проще всего это увидеть, если синусоиду в (15.9) заменить периодической последовательностью прямоугольных импульсов. Два раза за период фазовый портрет (см. рис. 15.1д) сдвигается то влево, то вправо на величину порядка  $\mu$ . Для колебаний малой амплитуды эти пульсации пройдут почти незамеченными — движения останутся простыми. Движения же, близкие к сепаратрисе, могут оказаться сложными (см. гл. 13). Эта сложность связана с существованием в пространстве системы (15.8)

гомоклинической структуры [5, 6], открытой Пуанкаре в связи с исследованием задачи трех тел еще в 1889 г. Такая структура возникает лишь в пространстве с  $n \geq 3$  в окрестности гомоклинической траектории. Для трехмерного случая соответствующая ситуация показана на рис. 15.15. Полное описание траекторий внутри этой структуры было дано сравнительно недавно [8, 14]. Было, в частности, выяснено, что такая структура содержит счетное множество неустойчивых (седловых) периодических траекторий, между которыми (при широком выборе начальных условий) и блуждает осциллятор.

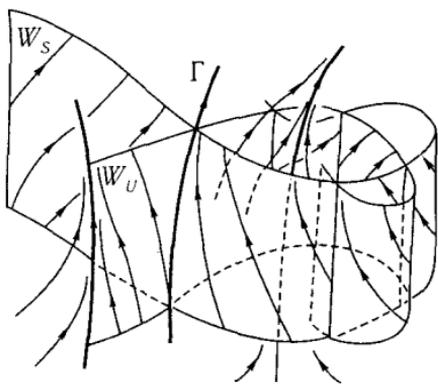


Рис. 15.15. Грубое пересечение устойчивого ( $W_s$ ) и неустойчивого ( $W_u$ ) многообразий седлового периодического движения  $\Gamma$  в  $x\dot{x}t$ -пространстве

Приведенный описательный пример иллюстрирует тот факт, что трехмерные динамические системы могут качественно отличаться от двумерных. Эти отличия связаны прежде всего с возможностью су-

существования в фазовом пространстве трехмерных систем, как конечного, так и бесконечного числа неблуждающих траекторий (что и характерно для гомоклинической структуры). Если в многомерной системе число состояний равновесия и периодических движений конечно (системы типа Морса–Смейла), то их динамика во многом похожа на динамику двумерных систем — в таких системах могут быть только простые движения. Если же в фазовом пространстве системы существует бесконечное множество различных периодических движений (сюда относится и только что обсуждавшийся пример), то поведение такой системы уже очень сильно отличается от поведения двумерных систем.

Обсудим механизмы возникновения и некоторые свойства гомоклинических структур. Вернемся к неавтономному осциллятору (15.9). При  $\mu \neq 0$  возникает седловое периодическое движение (рис. 15.15). В фазовом пространстве  $x\dot{x}t$ , ему соответствует траектория, проходящая в моменты  $t = 2\pi n$  ( $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ ) через начало координат. Устойчивая и неустойчивая сепаратрисы теперь становятся поверхностями. Та поверхность, по которой траектории стремятся к периодическому движению, называется устойчивым многообразием ( $W_s$ ); та, по которой уходят от него (или стремятся к нему при  $t = -\infty$ ), — неустойчивым ( $W_u$ ).

Будем описывать поведение траекторий с помощью отображения Пуанкаре. Для этого рассмотрим зависимость координат точек  $(x, \dot{x})$  на секущей плоскости  $t = 2\pi(n+1)$  как функцию координат  $(x, \dot{x})$  на плоскости  $t = 2\pi n$ . Отождествим плоскость  $t = 2\pi n$  и  $t = 2\pi(n+1)$  и будем говорить о точечном отображении плоскости  $t = \text{const}$  в себя. Оно задается формулой  $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$ , где вектор  $\xi_n = (x_n, \dot{x}_n)$ . Если движение периодическое, то  $\xi_{n+1}^* = \xi_n^*$ ,  $\xi^* = F(\xi^*)$ , и ему на секущей плоскости соответствует неподвижная точка отображения  $\xi^*$ . Седловому периодическому движению на секущей соответствует седловая неподвижная точка, а устойчивому и неустойчивому многообразиям — устойчивая и неустойчивая сепаратрисы. (Эти сепаратрисы состоят из точек пересечения траекторий с секущей  $t = \text{const}$ .) По устойчивой сепаратрисе точка стремится к  $\xi^*$  в результате бесконечной последовательности пересечений с секущей плоскостью при  $n \rightarrow +\infty$ , по неустойчивой сепаратрисе точка стремится к  $\xi^*$  при  $n \rightarrow -\infty$ . Поведение сепаратрис на секущей может быть совершенно иным, чем на фазовой плоскости. Самое важное заключается в том, что на секущей поверхности сепаратрисы могут пересекаться (это поясняет рис. 15.15), причем пересечение сепаратрис в одной точке влечет за собой их пересечение в бесконечном числе точек.

Поясним последнее обстоятельство подробнее. Сепаратрисы на секущей состоят из точек, которые получаются в результате последовательного применения отображения. Если точка принадлежит сразу двум сепаратрисам (устойчивой и неустойчивой), то и все ее образы (при  $n \rightarrow \infty$ ) и прообразы (при  $n \rightarrow -\infty$ ) также должны принадлежать двум сепаратрисам сразу. Следовательно, устойчивая и неустойчивая сепаратрисы должны иметь счетное множество общих точек, т. е. точек пересечения. Ясно, что вблизи неподвижной точки, где движение экспоненциально замедляется, точки пересечения инвариантных многообразий должны сгущаться. В результате на секущей поверхности получается картина, подобная той, что на рис. 15.16. Точки пересечения сепаратрис на секущей принадлежат двоякоасимптотической траектории, которую Пуанкаре назвал гомоклинической. При  $t \rightarrow \pm\infty$  эта траектория сматывается и наматывается на исходное периодическое движение. Окрестность гомоклинической траектории в фазовом пространстве называют гомоклинической структурой. В такой структуре имеется бесконечное разнообразие траекторий, среди которых наряду с периодическими есть и случайные. Полное описание траекторий, принадлежащих гомоклинической структуре, было дано сравнительно недавно на языке символической динамики [14].

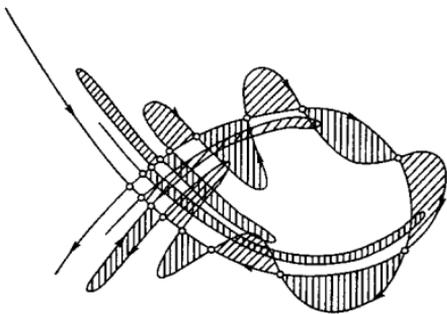


Рис. 15.16. Гомоклиническая траектория на секущей плоскости  $t = \text{const}$ . Заштрихованы участки гомоклинической структуры, отображающиеся друг в друга

Подчеркнем еще раз, что в  $x\dot{x}t$ -пространстве сепаратрисы представляют собой поверхности, пересекающиеся по кривой. Такое пересечение не исчезает при малом изменении параметров физической системы, т. е. является грубым. Грубой является и гомоклиническая структура.

Если проследить за эволюцией маленького фазового объема в окрестности гомоклинической кривой, мы заметим, что со временем он сложным образом деформируется и при  $t \rightarrow \infty$  расплывется по всей структуре (рис. 15.16). Отсюда следует локальная неустойчивость почти

всех траекторий внутри структуры — точки, бывшие в момент  $t = 0$  сколь угодно близко друг к другу, с ростом  $t$  расходятся. Такая локальная неустойчивость траекторий, заключенных в ограниченный фазовый объем, и влечет за собой сложность, запутанность движения

внутри гомоклинической структуры. Подробно эти движения в динамических системах мы будем обсуждать в гл. 22 и 23.

Хотя связанное с существованием гомоклинической структуры сложное поведение динамической системы открыл еще А. Пуанкаре [15] соответствующее изображение структуры (рис. 15.16) появилось много позже [9].

Если в фазовом пространстве системы существует гомоклиническая структура, то это фактически гарантия того, что динамика системы будет сложной (см. гл. 22). Приведем здесь удобный критерий существования гомоклинической структуры для близких к консервативным систем типа (15.9), принадлежащий В. К. Мельникову [9]. В качестве исходных рассмотрим уравнения неавтономного осциллятора в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_0(x, y) + \mu p_1(x, y, \omega t, \mu), \\ \dot{y} &= q_0(x, y) + \mu q_1(x, y, \omega t, \mu).\end{aligned}\tag{15.10}$$

Пусть при  $\mu = 0$  в этой системе на фазовой плоскости существует замкнутая сепаратрисная петля (см. рис. 15.10а). Критерий возникновения при  $\mu > 0$  в фазовом пространстве системы (15.10) гомоклинической структуры заключается в определении знакопеременности функции, характеризующей расстояние между сепаратрисами. В случае  $\mu \ll 1$  эта функция, которую называют функцией Мельникова или функцией «щели», может быть приближенно записана в виде

$$\begin{aligned}\Delta_\mu(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{p_1[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)]q_0[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)] - \\ &\quad - q_1[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)]p_0[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)]\} \times \\ &\times \exp\left\{-\int_0^{t-t_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_0[x_0(\zeta), y_0(\zeta)] + \frac{\partial}{\partial y} q_0[x_0(\zeta), y_0(\zeta)]\right) d\zeta\right\} dt.\end{aligned}\tag{15.11}$$

Здесь  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  — решение невозмущенной системы, соответствующее петле сепаратрисы,  $t_0$  — параметр, характеризующий положение точки на этой сепаратрисе. С конкретным применением данного критерия мы встретимся в гл. 23 [11].

# Автоколебания в многочастотных системах

## 16.1. Вынужденная синхронизация

На рис. 16.1 показана схема двухконтурного генератора, исследовавшегося Ван-дер-Полем, Андроновым и Виттом (см., например, [5, 11]). Уже тогда были обнаружены наиболее важные эффекты,

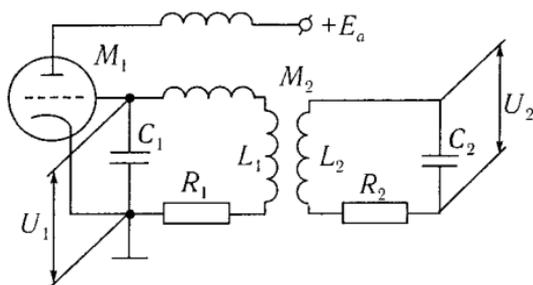


Рис. 16.1. Схема двухконтурного автогенератора

характерные для взаимодействия «элементарных генераторов», например таких, как рассмотренный в предыдущей главе генератор Ван-дер-Поля [6], — эффекты конкуренции мод, синхронизации и затягивания колебаний [3, 4]. Любопытно, что из-за особенностей нелинейности в вандерполевском генераторе незамеченным в работах Андронова и Ван-дер-Поля остался лишь тривиальный, по существу, эффект одновременной генерации двух мод, возможный при их слабой связи (случай, типичный, например, для газового лазера с неоднородно уширенной линией спектра активного вещества).

Появление конкуренции, наблюдаемое при сильной связи нескольких автоколебательных мод, объясняется зависимостью нелинейного затухания одной из мод от энергии другой. Если моды равноправны и связь взаимна, то устанавливается режим генерации той моды, которая преобладала вначале. Зависимость от начальных условий приводит к тому, что для перехода системы из одного режима в другой необходимо заметно изменить частоту одной из мод, т. е. изменить расстройку,

причем значения расстройки при движении в разных направлениях не совпадают (гистерезис). Интервал расстроек, в котором частота генерации зависит от предыстории, называют интервалом затягивания.

В последние два десятилетия вновь возрос интерес к этим классическим и ставшим почти азбучными эффектам. В первую очередь этот интерес связан с появлением активных распределенных систем (молекулярные и оптические квантовые генераторы, (лазеры на циклотронном резонансе и т. д.), а также с созданием систем с большим числом активных элементов. В тех случаях, когда активные приборы в целях увеличения мощности или повышения КПД объединяются в упорядоченные пространственные структуры, получившиеся системы становятся аналогичными распределенным.

От способа объединения активных элементов (диоды Ганна, лавиннопролетные диоды и др.) зависит лишь характер дисперсии получившейся «среды».

Начнем рассмотрение многочастотных систем с анализа классического эффекта теории нелинейных колебаний — синхронизации («захватывания») частоты генератора внешним синусоидальным сигналом, частота которого близка (но не совпадает) к собственной частоте генератора. Будем считать, что если при взаимодействии объектов любой природы, рассматриваемых как равноправные, устанавливаются вполне определенные частотные соотношения («единый ритм совместного существования» [1]), то имеет место взаимная или внутренняя синхронизация объектов.

Если же один из объектов столь мощный, что навязывает свою частоту (заданную и неменяющуюся) другим автоколебательным системам, то возникает внешняя (вынужденная) синхронизация или захватывание частоты<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Более 300 лет назад Христиан Гюйгенс в своих знаменитых «Трех мемуарах по механике» [2] дал прекрасную «инструкцию» недобросовестным часовщикам по поводу того, как обмануть доверчивого бюргера: «Маятник этих часов имел длину 9 дюймов и груз полфунта. Механизм приводился в движение гирями, заключенными в ящик вместе с механизмом. Длина ящика была 4 фута. Внизу он был отягчен по крайней мере 100 фунтами свинца, чтобы весь механизм возможно лучше сохранял на судне вертикальное положение. С этими часами было сделано следующее интересное наблюдение. Двое таких часов висели на одной и той же балке, покоящейся на двух опорах. Оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если искусственно нарушалось это совпадение, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но наконец после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маят-

Здесь мы дадим количественную теорию явления синхронизации автоколебательных систем на примере лампового генератора, принципиальная схема которого проведена на рис. 16.2. Как довести исследование подобной конкретной нелинейной динамической системы до чисел? Один пример мы уже рассматривали — это автоколебания в системе, где удалось разделить быстрые и медленные движения. Формально такое разделение можно сделать, если в уравнениях при старшей производной имеется малый параметр. Его присутствие позволяет во многих случаях (не только, конечно, при анализе автоколебаний) понизить порядок исходной системы — проинтегрировать ее по участкам быстрых и медленных движений. Следует заметить, что большинство методов, позволяющих довести решение конкретной нелинейной задачи до конца без применения численного счета на ЭВМ, связано с наличием в системе малого параметра, т. е. фактически с близостью исследуемой системы к другой, более простой, а точнее, интегрируемой (хотя бы и приближенно). Другой случай, когда удастся решить задачу аналитически, — он наиболее часто встречается в физике и различных приложениях — это, когда исходная нелинейная система близка к линейному осциллятору или нескольким осцилляторам. При этом решение близко к набору синусоид, однако их параметрами, очевидно, будут уже не числа, а медленно изменяющиеся функции времени.

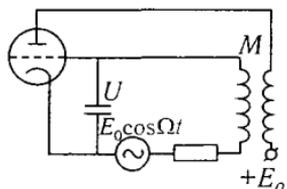


Рис. 16.2. Схема лампового генератора, синхронизированного внешним сигналом  $E_0 \cos \Omega t$ , частота которого близка к собственной частоте

Рассмотрим один из вариантов метода усреднения — метод Ван-дер-Поля — применительно к схеме рис. 16.2, которая описывается уравнением

$$\ddot{U} - \alpha(1 - \beta U^2)\dot{U} + \omega_0^2 U = \varepsilon \cos \Omega t, \quad (16.1)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\omega_0^2$  определяются выражениями (14.4),  $\varepsilon = E_0/(LC)$ .

ника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был бы с самого начала однороден и согласован между собой». Качественная сторона противозаконоустойчивого движения часов описана на редкость точно. Разумеется, количественного описания у Гюйгенса не было: в то время не были еще точно сформулированы законы механики.

Далее будем считать, что  $\alpha$  и  $\varepsilon$  в (16.1) малы, т. е. генератор слабо возбужден, и амплитуда внешнего сигнала (или величина связи с внешним генератором) также мала. Введем новое время  $t_n = \Omega t$ , безразмерную координату  $x = \beta^{1/2} U$  и параметры  $\mu = \alpha/\Omega$ ,  $\mu\xi = 2(\omega_0 - \Omega)/\Omega$ ,  $\mu E = \beta^{1/2} E_0/\Omega^2$ . Тогда уравнение (16.1) перейдет в уравнение

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \mu\xi x + x = \mu E \cos t, \quad (16.2)$$

где  $\xi$  характеризует относительную расстройку между собственной частотой генератора и частотой внешнего сигнала, индекс «н» опущен. Запишем уравнение (16.2) в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu[(1 - x^2)y - \xi x + E \cos t],$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{y} &= -x + \mu f(x, y, t), \\ f(x, y, t) &= (1 - x^2)y - \xi x + E \cos t. \end{aligned} \quad (16.3)$$

В своем методе Ван-дер-Поля шел от метода вариации произвольных постоянных. Решение системы уравнений (16.3) при  $\mu = 0$  известно:

$$x = A \sin t + B \cos t, \quad y = A \cos t - B \sin t.$$

Будем искать решение при  $\mu$ , отличном от нуля, в том же виде, но считать амплитуды  $A$  и  $B$  функциями времени:  $A(t)$ ,  $B(t)$ . Пока это просто замена переменных: от  $x$  и  $y$  хотим перейти к  $A$  и  $B$ . Дифференцированием  $x(A, B)$  и  $y(A, B)$  по  $t$  найдем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \sin t - A \cos t + \dot{B} \cos t - B \sin t, \\ \dot{y} &= \dot{A} \cos t - A \sin t - \dot{B} \sin t - B \cos t \end{aligned}$$

и подставим в (16.3). Разрешая относительно производных  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$ , получаем

$$\dot{A} = \mu f(A, B, t) \cos t, \quad \dot{B} = -\mu f(A, B, t) \sin t.$$

Эти уравнения называют уравнениями в переменных Ван-дер-Поля. Это точные уравнения, так как никаких приближений пока не делалось. Теперь воспользуемся тем, что  $\mu$  мало. Если  $\mu \ll 1$ , а  $|f|$  в среднем порядка единицы, то  $A$  и  $B$  в первом приближении будут медленно изменяющимися функциями времени — на периоде  $T = 2\pi$  изменения функций, стоящих в правых частях системы уравнений для  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$ ,

почти не меняются. Далее периодические функции  $f(A, B, t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  разложим в ряд Фурье и оставим лишь нулевую гармонику, поскольку она соответствует медленному изменению производных  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$ . Быстроосциллирующие слагаемые можно отбросить, опираясь именно на эту медленность  $A$  и  $B$  (они дадут вклад в следующее приближение). Таким образом, получим приближенные, усредненные или, как их еще называют, «укороченные» уравнения

$$dA/d\tau = \langle f(A, B, t) \cos t \rangle, \quad dB/d\tau = -\langle f(A, B, t) \sin t \rangle, \quad (16.4)$$

где  $\tau = \mu t$ , а

$$\left\langle f(A, B, t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right\rangle = T^{-1} \int_t^{t+T} f(A, B, t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} dt.$$

Теперь применим эти общие результаты к нашей конкретной системе (16.3). Для нее

$$f(A, B, t) = (1 - A^2 \sin^2 t - 2AB \sin t \cos t - B^2 \cos^2 t) \times \\ \times (A \cos t - B \sin t) - \xi(A \sin t + B \cos t) + E \cos t.$$

Отсюда получаем

$$\langle f \cos t \rangle = \frac{1}{2}A - \frac{1}{8}A^3 - \frac{3}{8}AB^2 - \frac{1}{2}\xi B + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{2}E,$$

$$\langle f \sin t \rangle = -\frac{1}{2}B - \frac{1}{4}AB^2 + \frac{3}{8}A^2B + \frac{1}{8}B^3 - \frac{1}{2}\xi A.$$

Окончательно укороченные уравнения примут вид

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{A}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4}(A^2 + B^2) \right] - \frac{B}{2}\xi + \frac{E}{2}, \\ \frac{dB}{d\tau} = \frac{B}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4}(A^2 + B^2) \right] + \frac{A}{2}\xi. \quad (16.5)$$

Рассмотрим теперь различные случаи.

*Автономный генератор* ( $E = 0$ ). а) Если искать решение на собственной частоте  $\omega_0$ , то  $\xi = 0$ . Параметры автоколебаний определяются стационарными решениями системы (16.5). Последняя имеет неустойчивое состояние равновесия в начале координат  $A = B = 0$  и непрерывное множество состояний равновесия, лежащих на окружности  $\rho^2 = A^2 + B^2 = 4$ . Фазовый портрет представлен на рис. 16.3а. Как его

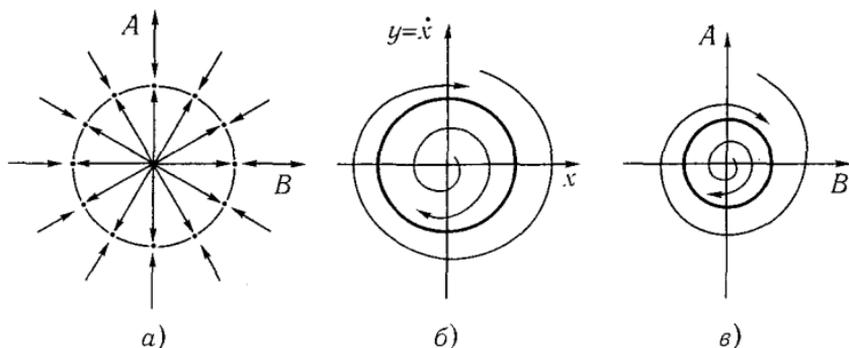


Рис. 16.3. Фазовые портреты автономного генератора ( $E = 0$ ): *a* — на плоскости  $AB$  решение ищется на собственной частоте  $\omega_0$  (начало координат — неустойчивое состояние равновесия; окружность  $\rho^2 = A^2 + B^2 = 4$  — множество состояний равновесия); *б* — на плоскости  $xy$ , соответствующей *a*; *в* — на плоскости  $AB$  решение ищется на частоте  $\Sigma$

трактовать? Не значит ли это, что из грубой системы мы получили негрубую? С какими значениями амплитуд  $A$  и  $B$  будут происходить автоколебания? Чтобы ответить на эти вопросы, удобно перейти к фазовой плоскости исходных переменных  $x$  и  $y$ . Для этого надо перейти в систему координат  $(x, y)$ , вращающуюся по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_0$ . Окружность радиуса  $\rho = 2$  перейдет в предельный цикл, а фазовые траектории, являющиеся прямыми на плоскости  $AB$ , — в спирали, накручивающиеся на предельный цикл (рис. 16.3 б). Чтобы пояснить последнее, вспомним, что движение по фазовым траекториям на плоскости  $AB$  происходит со скоростью порядка  $\mu$ , и, следовательно, за один оборот точка мало успеет продвинуться по радиусу. Таким образом, в генераторе будут существовать автоколебания с амплитудой  $\rho = 2$  и произвольной фазой  $\varphi = \arctg(A/B)$ .

б) Если же искать решение на частоте  $\Omega$ , близкой к собственной частоте  $\omega_0$ , то  $\xi \neq 0$ . При этом легко показать, что для системы (16.5), где  $E = 0$ , существует единственный устойчивый предельный цикл, симметричный относительно начала координат (рис. 16.3 в). По-прежнему  $A^2 + B^2 = \text{const}$ , но теперь  $A$  и  $B$  меняются с частотой  $\xi$ , чему соответствует изменение фазы с той же частотой, т. е.  $d\varphi/d\tau = \xi$  — получается сдвиг частоты точно на  $\xi$ . Если бы предельный цикл был несимметричен относительно начала координат, то  $\rho^2 = A^2 + B^2$  уже не было бы постоянным и периодическую модуляцию испытывала бы и амплитуда колебаний, т. е. в системе возникли бы биения. Именно так получается в неавтономном случае.

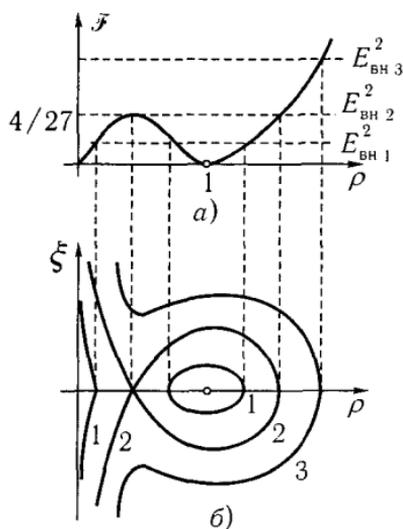


Рис. 16.4. К объяснению синхронизации внешним сигналом: *a* — зависимость амплитуды внешнего сигнала от амплитуды колебаний на частоте внешнего сигнала; *b* — резонансные кривые неавтономного генератора; при  $E_{\text{вн}}^2 < 4/27$  реализуется случай слабых внешних сигналов (кривые 1, 2); при  $E_{\text{вн}}^2 > 8/27$  сильных (кривая 3)

откуда легко получить для  $\rho = a_0^2 + b_0^2$  так называемое уравнение резонансной кривой

$$\rho(1 - \rho)^2 + \xi^2 \rho = E_{\text{вн}}^2. \quad (16.7)$$

Оно дает зависимость амплитуды колебаний на частоте внешнего сигнала от амплитуды последнего и расстройки. Разрешая (16.7) относительно расстройки, получаем

$$\xi = \pm \{ [E_{\text{вн}}^2 - \rho(1 - \rho)^2] / \rho \}^{1/2},$$

откуда следует, что действительные значения  $\xi$  существуют только при  $E_{\text{вн}}^2 \geq \mathcal{F}(\rho) = \rho(1 - \rho)^2$  (рис. 16.4). Резонансные кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям амплитуды внешней силы  $E_{\text{вн1}}^2$ ,  $E_{\text{вн2}}^2$ ,  $E_{\text{вн3}}^2$ .

**Неавтономный генератор.** Попробуем найти режим синхронизации, т. е. режим, в котором генератор выдает колебания не на собственной частоте, а на частоте внешнего поля. Наличие такого режима, например, создает возможность для управления частотой мощного генератора слабым сигналом. Определим параметры режима синхронизации, его границы, и выясним, что будет вне полосы синхронизации. В режиме захватывания амплитуды  $A$  и  $B$  должны оставаться постоянными. Введем для удобства амплитуды  $a = A/2$ ,  $b = B/2$  и  $E_{\text{вн}} = E/2$ . При этом система будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a[1 - (a^2 + b^2)] - b\xi + E_{\text{вн}}, \\ \dot{b} &= b[1 - (a^2 + b^2)] + a\xi. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Состояния равновесия определяются из уравнений

$$\begin{aligned} a_0[1 - (a_0^2 + b_0^2)] - b_0\xi &= -E_{\text{вн}}, \\ b_0[1 - (a_0^2 + b_0^2)] + a_0\xi &= 0, \end{aligned}$$

При  $E_{\text{вн}}^2 < 4/27$  резонансные кривые состоят из двух ветвей — это слабые внешние сигналы;  $E_{\text{вн}}^2 > 8/27$  соответствует сильным сигналам, и резонансная кривая имеет вид кривой 3 на рис. 16.4.

Остается выяснить, какие ветви резонансных кривых устойчивы, так как только они будут соответствовать реальному режиму синхронизации. Для этого надо линеаризовать систему (16.6) вблизи равновесных состояний, найти границы устойчивости и нанести их на плоскость  $\rho\xi$ . Записывая (16.6) в виде

$$\dot{a} = \varphi(a, b), \quad \dot{b} = \psi(a, b),$$

получим линеаризованные уравнения для  $a_1 = a - a_0$  и  $b_1 = b - b_0$ :

$$\dot{a}_1 = \varphi'_a(a_0, b_0)a_1 + \varphi'_b(a_0, b_0)b_1,$$

$$\dot{b}_1 = \psi'_a(a_0, b_0)a_1 + \psi'_b(a_0, b_0)b_1.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

где

$$p = -(\varphi'_a + \varphi'_b) = 4\rho - 2, \quad q = \begin{vmatrix} \varphi'_a & \varphi'_b \\ \psi'_a & \psi'_b \end{vmatrix} = (1 - 3\rho)(1 - \rho) + \xi^2.$$

Области устойчивости определяются, следовательно, неравенствами

$$\rho > 1/2, \quad (1 - 3\rho)(1 - \rho) + \xi^2 > 0.$$

Определим заодно и типы состояний равновесия: при  $q > 0$  имеем область седел; приравнявая нулю дискриминант характеристического уравнения  $D = p^2/4 - q > \rho^2 - \xi^2$ , получим границу между узлами и фокусами. Разбиение плоскости  $\rho\xi$  на области с различными типами состояний равновесия приведено на рис. 16.5 а. Там же штриховкой выделена граница устойчивости. Совместим рис. 16.4 б и 16.5 а, оставляя только те ветви резонансных кривых, которые попадают в устойчивую область (рис. 16.5 б). Граница области синхронизации для сильных сигналов определяется пересечением резонансной кривой с прямой  $\rho = 1/2$ . Подставляя это значение  $\rho$  в (16.7), получаем

$$\xi_1^2 = 2E_{\text{вн}}^2 - 1/4. \quad (16.8)$$

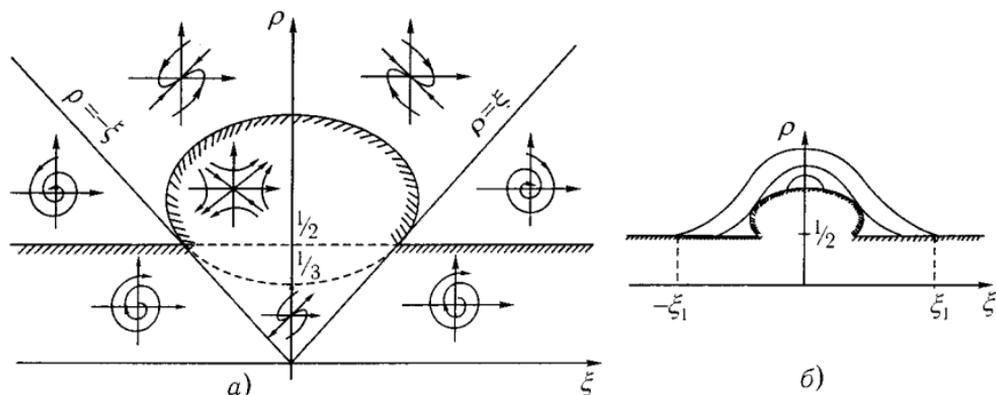


Рис. 16.5. К определению устойчивости ветвей резонансных кривых и типов состояний равновесия: *a* — разбиение плоскости  $\rho\xi$  на области с различными состояниями равновесия (штриховкой выделена граница устойчивости); *b* — результат совмещения рис. 16.4 *b* и 16.5 *a* (оставлены ветви резонансных кривых, которые попадают в устойчивую область)

Для очень слабых сигналов можно считать, что граница области синхронизации определяется пересечением резонансных кривых с прямой  $\rho = 1$  (координаты точек эллипса мало отличаются от этого значения), и, следовательно,  $\xi_1^2 = E_{\text{вн}}^2$ . При выходе из режима синхронизации генератор ведет себя по-разному при сильных и слабых сигналах.

Слабый сигнал, как уже указывалось выше, соответствует амплитудам внешнего сигнала  $E_{\text{вн}}^2 < 4/27$ . При  $E_{\text{вн}}^2 = 8/27$  резонансная кривая касается эллипса, ограничивающего область седла. Если  $E_{\text{вн}}^2 > 8/27$ , то при любых  $\xi$  в системе имеется единственное состояние равновесия, и такой 1 внешний сигнал будем считать сильным.

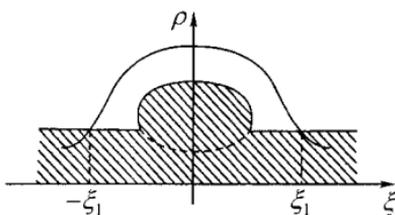


Рис. 16.6. Амплитудно-частотная характеристика неавтономного генератора при синхронизации сильным сигналом ( $E_{\text{вн}}^2 > 8/27$ )

Рассмотрим каждый из этих случаев.

**Сильный сигнал ( $E_{\text{вн}}^2 > 8/27$ ).** Амплитудно-частотная характеристика для этого случая изображена на рис. 16.6. В системе существует единственное состояние равновесия, устойчивое в области расстройок  $|\xi| < \xi_1$ . Значение параметра  $\xi = \xi_1$  является бифуркационным. На фазовой плоскости системы (16.6) при  $\xi = \xi_1$  имеется сложный фокус. При  $\xi > \xi_1$  рождается предельный цикл, а сам фокус

становится неустойчивым. Для доказательства устойчивости предельного цикла остается выяснить, как ведут себя фазовые траектории при достаточно больших амплитудах  $a$  и  $b$ . Согласно (16.6) амплитуда колебаний при больших  $a$  и  $b$  уменьшается, следовательно, «бесконечность» неустойчива, и все фазовые траектории сходятся в некоторую область, т. е. стремятся к предельному циклу.

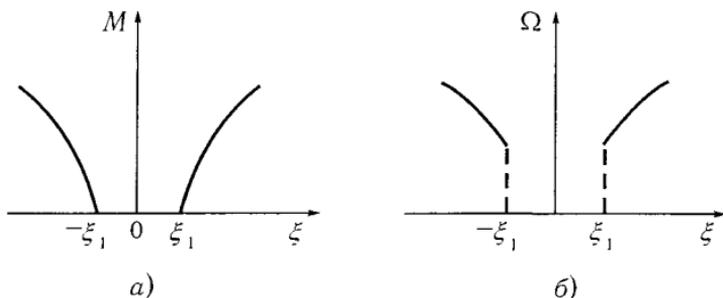


Рис. 16.7. Особенности режима биений в неавтономном генераторе (бигармонический режим при сильном внешнем сигнале): а — зависимость глубины модуляции  $M$  выходного сигнала от расстройки, показывающая, что биения возбуждаются мягко по амплитуде; б — «жесткое» возбуждение частоты биений  $\Sigma$  и ее зависимость от расстройки

Движение по предельному циклу соответствует периодическому изменению амплитуд  $a$  и  $b$ , что означает наличие бигармонического режима в исходной системе (режим биений). Биения возникают мягко по амплитуде (рис. 16.7а), так как предельный цикл рождается с нулевым радиусом. Частота биений при этом конечна, так как предельный цикл возникает из фокуса и в момент возникновения имеет частоту, отвечающую исчезнувшему состоянию равновесия. Для ее определения следует найти корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  при  $\xi \rightarrow \xi_1$ . Значение мнимой части корней и даст искомую частоту. Нетрудно показать, что с увеличением расстройки частота биений растет (рис. 16.7б). Для больших значений  $\xi$  можно считать, что амплитуды  $a$  и  $b$  изменяются с некоторой частотой  $\omega^*$ , а кроме того, претерпевают еще очень медленные (малые на периоде  $1/\omega^*$ ) изменения. Тогда, применив повторно метод усреднения, удается найти амплитуду цикла на плоскости переменных Ван-дер-Поля и частоту вращения по нему.

*Слабый сигнал* ( $E_{\text{вн}}^2 < 4/27$ ). Амплитудно-частотная характеристика для этого случая изображена на рис. 16.8. Синхронизация имеет место в интервале расстроек  $|\xi| < \xi_1$ , т. е. там, где имеется устой-

Рис. 16.8. Амплитудно-частотная характеристика неавтономного генератора при синхронизации слабым сигналом ( $E_{\text{вн}}^4/27$ ). Синхронизация имеет место в интервале  $|\xi| < \xi_1$  (двойная штриховка)

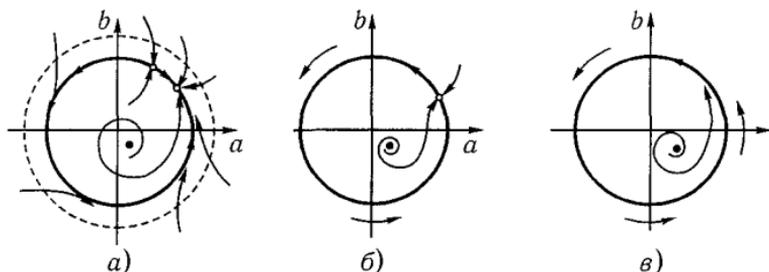
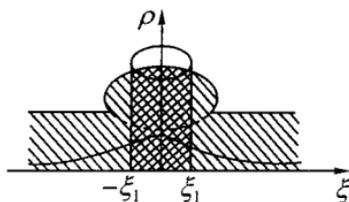


Рис. 16.9. Фазовый портрет неавтономного генератора в переменных Ван-дер-Поля при слабом внешнем сигнале, иллюстрирующий эволюцию состояния равновесия при изменении расстройки: а —  $|\xi| < \xi_1$ , б —  $|\xi| = |\xi_1|$ , в —  $|\xi| > \xi_1$

чивая ветвь резонансной кривой. Наличие в этой же области неустойчивых ветвей не влияет на режим захватывания, но меняет характер выхода системы из этого режима. В случае  $|\xi| < \xi_1$  фазовый портрет для переменных Ван-дер-Поля представлен на рис. 16.9а. Существует три состояния равновесия — неустойчивый фокус, седло, устойчивый узел — с суммарным индексом Пуанкаре  $j = +1$ . «Бесконечность», как уже отмечалось, траектории сходятся к узлу. При  $\xi = \xi_1$  два состояния равновесия — седло и узел — сливаются, образуя сложную особую точку типа седло-узел (рис. 16.9б) с  $j = 0$ , которая при дальнейшем увеличении расстройки исчезает. Из сепаратрисы седла при этом рождается предельный цикл, к которому асимптотически сходятся все фазовые траектории. Так как радиус предельного цикла в момент рождения конечен, а частота обращения по небу изображающей точки в момент рождения равна нулю (время движения по петле сепаратрисы бесконечно), то характер изменения глубины модуляции и частоты биений при увеличении расстройки (рис. 16.10) будет иным, чем в случае сильного сигнала.

Следует заметить, что явление синхронизации не имеет нижнего предела по амплитуде, сколь угодно малый сигнал может синхронизовать генератор, при этом полоса синхронизации становится все уже.

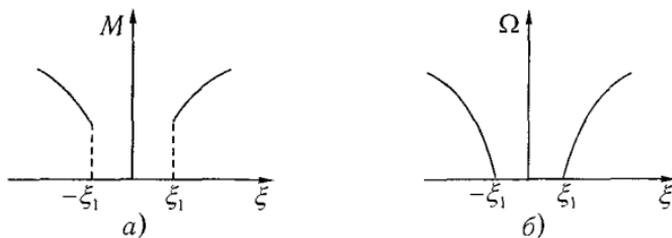


Рис. 16.10. Иллюстрация различий режимов биений при слабом и сильном внешних сигналах (рис. 16.7): а — биения возбуждаются жестко по амплитуде (размеры предельного цикла сразу конечны); б — мягкое возбуждение частоты биений (частота обращения по предельному циклу изображающей точки в момент его рождения равна нулю)

Подчеркнем, что если нелинейность генератора не мала, то воздействие периодической силы может привести не только к синхронизации генератора или к работе системы в режиме биений (вне полосы захватывания или синхронизации), но и к установлению очень сложных режимов колебаний и даже колебаний со сплошным спектром. Такие колебания наблюдались недавно авторами работы [13] в неавтономном генераторе, который описывается уравнением вида  $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x^3 = B \cos \Omega t$ . В частности, при  $\mu = 0, 2$ ,  $\Omega = 4, 0$  и  $B = 17, 0$  наблюдались колебания со сплошным спектром в интервале  $\omega \in [0; 4, 5]$ . Возникновение стохастических колебаний в подобных сравнительно простых динамических системах мы будем подробно обсуждать в гл. 22.

Явление синхронизации широко распространено в механике (например, синхронизация вращения роторов механических вибровозбудителей — эффект, аналогичный обнаруженному Гюйгенсом для часов), в электротехнике, электронике и радиофизике (синхронизация различных автогенераторов на вакуумных или твердотельных активных элементах, синхронизация квантовых генераторов и т. п.), в химии, биологии и медицине [1]. Существуют даже идеи, приписывающие явлению синхронизации характер глобального в масштабах Солнечной системы. К ним относится гипотеза А. М. Молчанова [14] о синхронизованности орбитальных движений больших планет Солнечной системы. В небесной механике синхронизацией, или резонансом, называют существование связи между средними угловыми скоростями  $\omega_i$ , вращательных движений объектов, которая математически выражается «резонансными» соотношениями  $\sum_i n_i \omega_i = 0$ , где  $n_i$  — положительные и отрицательные целые числа; число  $i$  — число рассматриваемых вра-

щательных движений. Откуда берется такая синхронизация? В упомянутой гипотезе предполагается, что в процессе эволюции действующие в Солнечной системе в течение миллиарда лет диссипативные силы (приливные силы, тормозящие силы межпланетной пыли и другие), несмотря на их малость, могут вывести планеты на почти стационарные (практически неизменные в грядущие миллионы лет) резонансные орбиты. Молчанов составил таблицы резонансных соотношений в Солнечной системе для девяти больших планет (табл. 16.1), а также для спутников больших планет [15]. Соответствие теоретических значений частот, удовлетворяющих соотношению  $\sum_{i=1}^9 \omega_i n_i = 0$ , и наблюдаемых действительно впечатляет. Однако это все-таки еще только гипотеза, и в связи с ней возникает множество вопросов. Как мы знаем, для

Таблица 16.1. Резонансные соотношения в Солнечной системе и в системах спутников планет [15]

Планета или спутник	Меркурий	Венера	Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
$\omega_i^H$ наблюдаемая	49,22	19,29	11,862	6,306	1,000	0,4027	0,14119	0,07197	0,04750
$\omega_i^T$ теоретическая	49,20	16,26	11,828	6,287	1,000	0,400	0,14286	0,07143	0,04762
$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_i^H - \omega_i^T}{\omega_i^H}$	0,0004	0,0015	0,0031	0,0031	0,0000	0,0068	0,0118	0,0075	-0,0025
$n_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n_2$	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
$n_3$	-2	0	1	0	0	0	0	0	0
$n_4$	-1	-3	-2	1	0	0	0	0	0
$n_5$	0	0	1	-6	2	1	0	0	0
$n_6$	0	-1	-1	0	-5	0	0	0	0
$n_7$	0	0	1	-2	0	-7	1	1	0
$n_8$	0	0	0	0	0	0	-2	0	-5
$n_8$	0	0	0	0	0	0	0	-3	1

того чтобы в системе осцилляторов наблюдалась синхронизация, необходимы три фактора: нелинейность, связь и диссипация. Нелинейность в небесных осцилляторах известна уже несколько веков: согласно третьему закону Кеплера частота колебания (вращения) небесного тела (в знаменитой задаче двух тел) зависит от энергии осциллятора:  $\omega \sim |\mathcal{E}|^{2/3}$ . Связь определяется гравитационным взаимодействием

вращающихся тел, а диссипация, как отмечает Молчанов, вызвана приливными силами. Однако диссипация очень мала, возмущения (взаимодействия) слабы п, следовательно, полоса синхронизации должна быть очень узкой. Таким образом, еще не синхронизованные вращающиеся тела (система не является эволюционно зрелой) все равно должны иметь частоты, близкие к резонансным. Почему они такие? На этот вопрос гипотеза Молчанова не отвечает. Возможно, такое соотношение частот определялось геометрией Солнечной системы при ее рождении [12].

## 16.2. Конкуренция

В простейшей постановке конкуренция — это чисто энергетический эффект. Он не связан со значениями фаз колебаний и имеет место, даже когда колебаний вообще нет, — вспомним конкуренцию биологических видов. Мы начнем с обсуждавшегося в начале главы двухконтурного автогенератора (см. рис. 16.1). способного в зависимости от параметров работать в режиме генерации одной или двух мод [11–13]. Его уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned} L_1 C_1 \ddot{U}_1 + [R_1 C_1 - MS(U_1)] \dot{U}_1 + U_1 + NC_2 \ddot{U}_2 &= 0, \\ L_2 C_2 \ddot{U}_2 + R_2 C_2 \dot{U}_2 + U_2 + NC_1 \ddot{U}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (16.9)$$

где  $S(U_1) = S_0 - S_2 U_1^2$  — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы (зависимость  $i_a = i_a(U_1)$  — аппроксимируем, как и прежде, кубической параболой).

Введем безразмерные переменные

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} t, \quad x_1 = \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - R_1 C_1}} U_1, \quad x_2 = \frac{L_2 C_2}{NC} \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - R_1 C_1}}$$

и параметры  $n_i^2 = 1/L_i C_i$  ( $i = 1, 2$ ) — парциальные частоты контуров,  $\xi = n_2^2/n_1^2$ ,  $\alpha = N^2/(L_1 L_2) < 1$  — коэффициент связи между контурами,  $\mu = n_1(MS_0 - R_1 C_1)$  — параметр, характеризующий степень возбуждения генератора,  $\delta = R_2 L_1 C_1/[L_2(MS_0 - R_1 C_1)]$  — отношение декремента затухания во втором контуре к инкременту нарастания в первом контуре. Тогда система (16.9) примет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \alpha \ddot{x}_2 = \mu(1 - x_1^2) \dot{x}_1, \quad \ddot{x}_2 + \xi x_2 + \ddot{x}_1 = \mu \delta \dot{x}_2. \quad (16.10)$$

При  $\mu = 0$  (линейная консервативная система) в любом из контуров мы бы наблюдали колебания с нормальными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$x_1 = a_1 e^{i\omega_1 t_n} + a_2 e^{i\omega_2 t_n} + \text{к.с.}, \quad (16.11)$$

$$x_2 = a_1 \Psi_1 e^{i\omega_1 t_n} + a_2 \Psi_2 e^{i\omega_2 t_n} + \text{к.с.}$$

Значения комплексных амплитуд  $a_1, a_2$  определяются начальными условиями, а коэффициенты распределения даются выражениями  $\Psi = = (1 - \omega'^2)/(\alpha\omega'^2) = \omega'^2/(\xi - \omega'^2)$ ,  $\omega' = \omega/n_1$  (читателю предоставляется убедиться в этом самостоятельно). Нормальные частоты  $\omega_1, \omega_2$  удовлетворяют уравнению  $(1 - \alpha)\omega'^4 - (1 + \xi)\omega'^2 + \xi = 0$  (его легко получить, подставив решение  $x_1, x_2 \sim \exp(i\omega t_n)$  в систему (16.10)  $\mu = 0$ ).

Зависимость нормальных частот от расстройки, определяемая этим уравнением, задается графиком Вина (рис. 16.11). При  $0 < \mu \ll 1$  (это означает, что генератор возбужден слабо) и  $\delta \approx 1$  (добротность второго контура велика) для решения системы (16.10) можно, как и в предыдущем параграфе, воспользоваться методом Ван-дер-Поля.

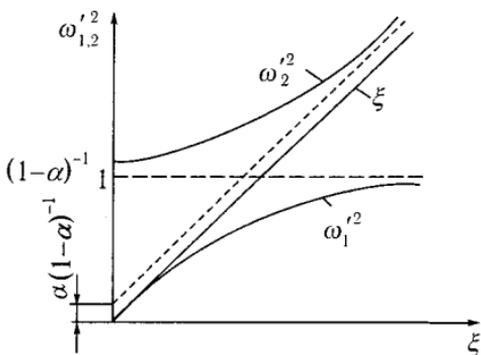


Рис. 16.11. График Вина. Асимптота при  $\xi \rightarrow \infty$  —  $\omega_1'^2 = 1$ ; асимптота  $\omega_2'^2 = (\xi + \alpha)(1 - \alpha)^{-1}$

Имея в виду малость  $\mu$ , решение (16.10) будем искать в виде (16.11), но амплитуды  $a_i$  и  $a_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) будем уже считать функциями времени. Подставив это решение в систему (16.10), разрешим ее относительно производных  $da_i/dt_n$  ( $i = 1, 2$ ) и, усреднив правые части полученных уравнений по времени, получим укороченные уравнения типа (16.4), но для двух комплексных амплитуд  $a_1$  и  $a_2$ . Используя представление  $a_j = A_j \exp(i\varphi_j)$  ( $j = 1, 2$ ), перейдем затем к уравнениям для действительных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} 2\dot{A}_1 &= \mu h_1 [1 - (A_1^2 + \rho_{12} A_2^2)] A_1, \\ 2\dot{A}_2 &= \mu h_2 [1 - (A_2^2 + \rho_{21} A_1^2)] A_2, \\ \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (16.12)$$

где

$$h_i = \sigma_i \lambda_i \quad (i = 1, 2), \quad \sigma_1 = \omega_1^4 \frac{\omega_2^2 - 1}{4(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \quad \sigma_2 = \omega_2^4 \frac{1 - \omega_1^2}{4(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$\lambda_1 = 4(1 - \delta\Psi_1/\xi\Psi_2), \quad \lambda_2 = 4(1 - \delta\Psi_2/\xi\Psi_1),$$

$$\rho_{12} = 2\lambda_2/\lambda_1, \quad \rho_{21} = 2\lambda_1/\lambda_2.$$

Из системы (16.12) следует, что колебания в генераторе будут происходить с теми же частотами, что и в линейной системе (правые части уравнений для фаз — нули, т. е. поправка на частоту отсутствует).

Поскольку в уравнение для амплитуд фазы не входят, можно провести исследование амплитудных уравнений независимо. Перейдем к переменным  $\tau = \mu t_n$  и  $m_1 = A_1^2$ ,  $m_2 = A_2^2$ . Тогда уравнения для квадратов запишутся в виде

$$\dot{m}_1 = h_1[1 - (m_1 + \rho_{12}m_2)]m_1, \quad \dot{m}_2 = h_2[1 - (m_2 + \rho_{21}m_1)]m_2. \quad (16.13)$$

Они описывают взаимодействие двух мод (нормальных колебаний), черпающих энергию из одного источника. Коэффициенты  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$  характеризуют влияние мод друг на друга и называются коэффициентами нелинейной связи мод. Их физический смысл весьма очевиден: при малых  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$  моды почти не замечают друг друга и автоколебания на каждой из мод ведут себя независимо, при больших  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$ , наоборот, уровень, на котором стабилизируются амплитуды  $|a_1|$  и  $|a_2|$ , определяется амплитудами «чужих» мод  $|a_2|$  и  $|a_1|$  соответственно (это сильная связь). Наконец, связь может быть невзаимной, когда  $\rho_{12} \neq \rho_{21}$ ; при этом влияние одной из мод на другую может быть сильным, а обратное — слабым.

Исследуем зависимость стационарных решений системы (16.13) от коэффициентов связи с помощью анализа фазовой плоскости. Фазовые портреты для различных  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$  (рис. 16.12а) приведены на рис. 16.12б–д. Легко убедиться, что система имеет четыре состояния равновесия:

- 1)  $m_1 = m_2 = 0$ ;    2)  $m_1 = 1, m_2 = 0$ ;    3)  $m_1 = 0, m_2 = 1$ ;
- 4)  $m_1 = (1 - \rho_{12})/(1 - \rho_{12}\rho_{21}), m_2 = (1 - \rho_{21})/(1 - \rho_{12}\rho_{21})$ .

Последнее существует лишь в том случае, если параметры на плоскости  $\rho_{12}\rho_{21}$  находятся в области I или IV, причем устойчивым оно оказывается только при малых коэффициентах связи (область IV). Можно

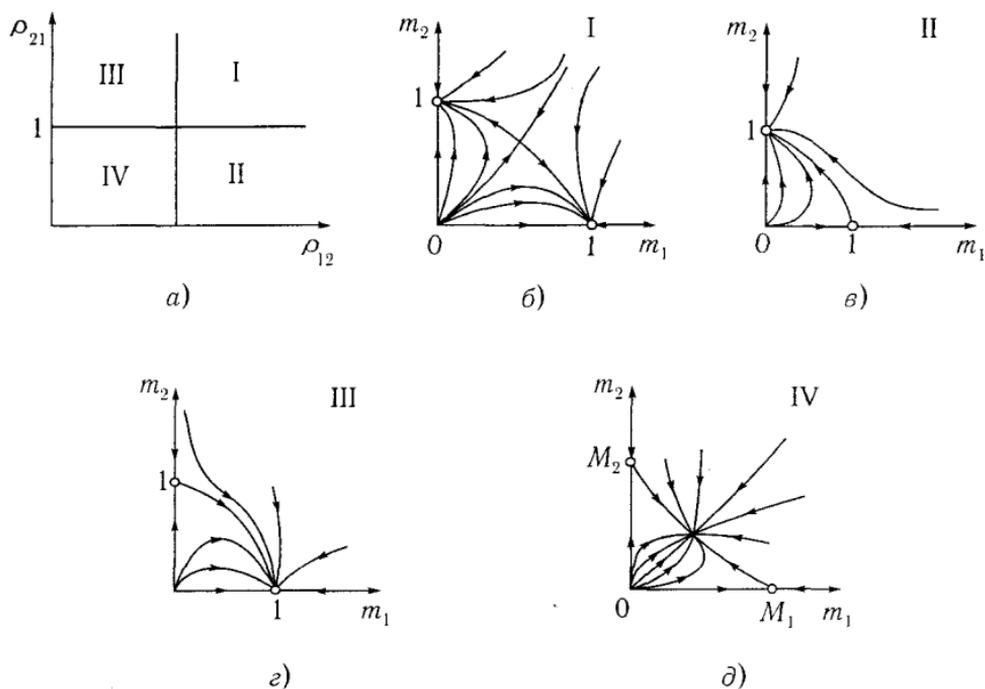


Рис. 16.12. Фазовые портреты системы (16.13), иллюстрирующие процесс взаимодействия двух мод

убедиться, что для рассматриваемого нами генератора коэффициенты связи не могут быть одновременно меньше единицы. Таким образом, двухчастотный режим (характерный для эквивалентной линейной системы) в нелинейном автогенераторе реализоваться не может. В области II (III) при любых начальных условиях устанавливаются колебания на второй (первой) нормальной частоте. В области I «выживание» той или иной моды определяется начальными условиями, а размер областей притяжения мод зависит от коэффициентов связи. Такой характер взаимодействия мод обычно называют конкуренцией мод. Выясним зависимость режимов работы системы от расстройки между контурами. Из характера изменения коэффициентов связи для  $\delta < 1$  (рис. 16.13а) следует, что при  $\xi < \xi_1$  могут существовать колебания только на частоте  $\omega_2$ , а при  $\xi > \xi_2$  — только на частоте  $\omega_1$  (рис. 16.13б). В области  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  в зависимости от начальных условий может устанавливаться любой из режимов (на рисунке эта область заштрихована). Таким образом, если плавно менять расстройку, начиная с малых значений  $\xi$ , то сначала в генераторе будут колебания на большей нормаль-

ной частоте; при  $\xi = \xi_2$  скачком произойдет изменение частоты до значения  $\omega_1$  (при этом имеет место и скачок амплитуды), и при дальнейшем росте расстройки колебания будут на меньшей нормальной частоте. При обратном ходе по  $\xi$  наблюдается гистерезис (рис. 16.13б). Это явление называется затягиванием; оно хорошо известно экспериментаторам. Во многих случаях оно является вредным, так как в процессе настройки генератора при изменении какого-нибудь параметра может происходить изменение частоты. Детальное исследование зависимости ширины интервала затягивания от параметров системы мы проводить не будем из-за громоздкости вычислений. Отметим только, что для того, чтобы избежать затягивания, надо использовать слабую обратную связь в генераторе или уменьшать добротность второго контура.

Вопрос о взаимодействии двух биологических видов со времен Вольтерра (см. гл. 1) является центральным в теоретической экологии [7, 8].

Экологи изучают, как правило, три типа взаимодействия:

а) взаимодействие «хищник-жертва» (см. гл. 1);

б) невзаимное воздействие одного вида на другой;

в) конкуренция видов (вид взаимодействия, при котором любой из видов подавляет рост другого при численном его превышении).

Обратимся к несколько модифицированным уравнениям Вольтерра, которые позволяют рассмотреть эти взаимодействия. Они выведены из логистического уравнения  $\dot{N} = \varepsilon N(1 - N/K)$ , в которое добавлены слагаемые  $-\gamma_1 N_1 N_2$  и  $-\gamma_2 N_2 N_1$  для описания «подавления» одним видом другого. Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_1[\varepsilon_1 - (\varepsilon_1/K_1)N_1 - \gamma_1 N_2], \\ \dot{N}_2 &= N_2[\varepsilon_2 - (\varepsilon_2/K_2)N_2 - \gamma_2 N_1], \end{aligned} \quad (16.14)$$

где  $N_1, N_2$  — численности видов.

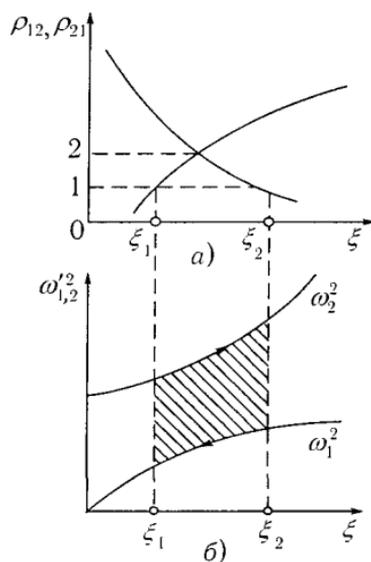


Рис. 16.13. Явление затягивания: а — зависимость коэффициентов связи для  $\delta < 1$  от расстройки; б — область гистерезиса на графике Вина

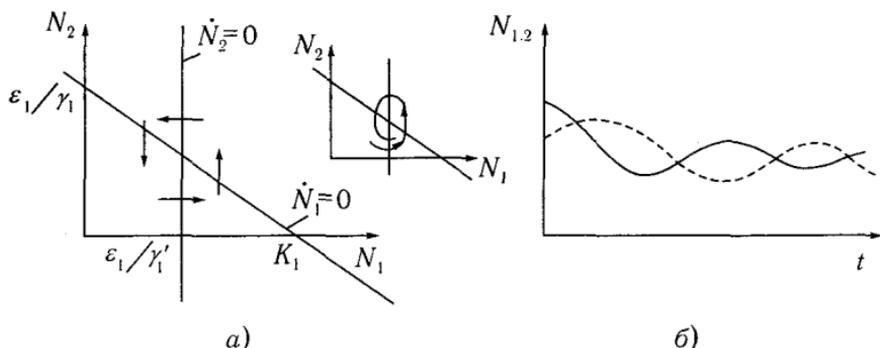


Рис. 16.14. Решение системы уравнений (16.15), учитывающей самоограничение «жертвы» — слагаемое  $(\epsilon_1/K_1)N_1^2$  в первом из уравнений (16.15) (стрелки на плоскости  $N_1N_2$  указывают направление движения системы — ее динамику) (а) и изменение численности «хищников» (штриховая линия) и «жертв» (сплошная линия) (б)

Если речь идет о взаимодействии между жертвой с численностью  $N_1$  и хищником с численностью  $N_2$ , который уничтожает жертву, то (16.14) следует переписать в виде (см. [8])

$$\dot{N}_1 = \epsilon_1 N_1 - (\epsilon_1/K_1)N_1^2 - \gamma_1 N_1 N_2, \quad \dot{N}_2 = -\epsilon_2 N_2 + \gamma_1 N_1 N_2. \quad (16.15)$$

Решение системы (16.15) известно [8]: численности жертв и хищников колеблются, затухая со временем (колебания численности жертв опережают по фазе колебания численности хищников) (рис. 16.14).

Динамику конкуренции между двумя видами иллюстрирует рис. 16.15, из которого следует возможность устойчивого и неустойчивого состояний равновесия системы (16.14) (ср. с рис. 16.12).

При  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  в случае устойчивого равновесия  $\gamma_2 > \gamma_1$ , а  $\epsilon/K_1 > \epsilon/K_2$ . Эти неравенства между коэффициентами системы (16.14) означают, что когда один из конкурентов увеличивает свою численность, то сильнее подавляется его собственный рост, чем рост его конкурента. Если оба вида имеют одинаковые потребности, то один из них скорее всего вытеснит своего конкурента.

### 16.3. Взаимная синхронизация мод

Весьма важным представляется вопрос: какие физические механизмы мешают существованию многопериодических движений в авто-

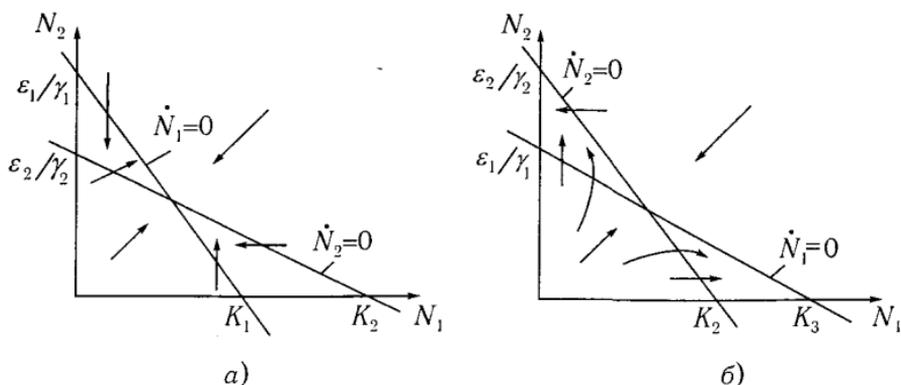


Рис. 16.15. Состояния равновесия системы (16.14) при конкуренции двух видов [8]: а — устойчивое ( $K_1 < K_2$ ;  $\epsilon_2/\gamma_2 < \epsilon_1/\gamma_1$ ); б — неустойчивое ( $K_1 > K_2$ ;  $\epsilon_2/\gamma_2 > \epsilon_1/\gamma_1$ ) (начальные условия определяют, какой вид выживает)

колебательных системах со многими степенями свободы? Для ответа на этот вопрос рассмотрим поведение ансамбля квазигармонических автогенераторов со слабой связью:

$$\dot{A}_i = \gamma_i A_i (A_{i0}^2 - A_i^2) + \alpha_i (A_{j,i}, \varphi_{j,i}), \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i + \beta_i (A_{j,i}, \varphi_{j,i}) \quad (16.16)$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Здесь добавки  $\alpha_i, \beta_i$  отражают взаимодействие мод. При  $\alpha_i = \beta_i = 0$  все колебания независимы, и фазовое пространство системы (16.16) распадается на  $N$  фазовых плоскостей, на каждой из которых имеется единственный устойчивый предельный цикл с периодом  $2\pi/\omega_i$  и амплитудой  $A_{i0}$ . В исходном  $2N$ -мерном пространстве таким независимым колебаниям соответствует притяжение изображающей точки к  $N$ -мерному тору — произведению независимых циклов. Если все  $\omega_i$  несоизмеримы, то фазовые траектории на торе представляют собой плотную, нигде не замыкающуюся обмотку — квазипериодическое движение. Когда же между автогенераторами (или автоколебательными модами) появляется связь, то такое простое квазипериодическое движение, вообще говоря, должно разрушаться. Самые простые — одномодовые — автоколебания устанавливаются в многомодовой системе в результате действия эффекта конкуренции, который связан с появлением на каждой или некоторых модах нелинейного поглощения, прогрессирующего с ростом энергии «чужих» мод. Такая ситуация обычно возникает в тех случаях, когда все моды черпают энергию из одного источника. Функция связи при этом может зависеть

только от энергии мод:

$$\alpha_i = -A \sum_{j \neq i} \rho_{ij} A_j, \quad (16.17)$$

где  $\rho_{ij}$  — коэффициент связи. При  $\rho_{ij} < \gamma_i$  связь слабая и возможна многочастотная генерация, как, например, в газовом лазере с неоднородно уширенной линией активного вещества — разные моды резонатора черпают энергию от разных активных молекул. Если же, например,  $\rho_{ij} > \gamma_i$  (сильная связь), то независимо от числа начально возбужденных мод устанавливается режим одномодовой генерации. Как правило, торжествует та мода, для которой линейный инкремент максимален. Таким образом, то замечательное обстоятельство, что в неравновесной системе (среде) из начально генерируемого шума устанавливается простой динамический режим, в первую очередь связано с эффектом конкуренции.

К разрежению и упорядочению спектра колебаний приводит и эффект синхронизации. При синхронизации моды не подавляют друг друга, но взаимно сдвигают частоты так, что с учетом нелинейных поправок они либо совпадут, либо станут соизмеримыми. На торе вместо квазипериодической обмотки появляются предельные циклы. Взаимная синхронизация мод возможна как по частотам, так и по волновым числам. В последнем случае эффект синхронизации выглядит особенно нетривиально — именно пространственной синхронизацией мод объясняется возникновение сложных упорядоченных структур в неодномодных автоколебательных системах (в частности, шестигранных призматических ячеек Бенара при термоконвекции, о которых будем говорить позднее).

Наглядный пример синхронизации в ансамбле большого числа автогенераторов приведен на рис. 16.16. Здесь представлены результаты численного эксперимента с системой (16.17) в случае линейной связи осцилляторов с близкими частотами при  $\gamma_i = A_{i0} = 1$  [9, 10]:

$$\alpha_n = N^{-1} \sum_{k=1}^N [A_k \cos(\varphi_k - \varphi_n) - A_n],$$

$$\beta_n = 0, 2N^{-1} \sum_{k=1}^N A_k \sin(\varphi_k - \varphi_n).$$

Предполагалось, что при отсутствии взаимодействия автогенераторы

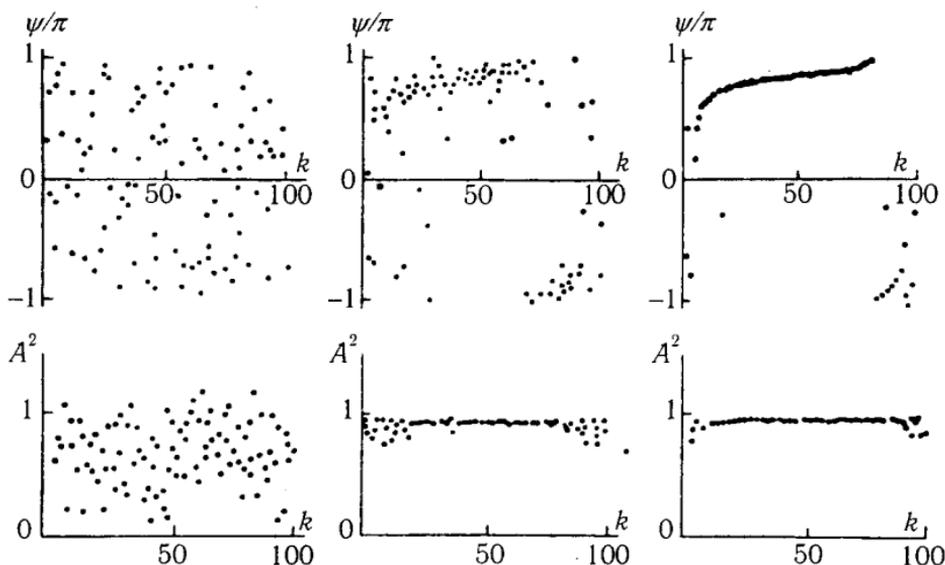


Рис. 16.16. Синхронизация ансамбля из 100 связанных автогенераторов с лоренцевым распределением по частотам ( $\psi$  — полная фаза осциллятора,  $A^2$  — квадрат амплитуды,  $T = 2\pi/\omega_0$ ) для моментов времени: 0 (а);  $40T$  (б);  $80T$  (в);  $k$  — номер генератора

распределяются по частотам согласно функции Лоренца:

$$f(\omega) = \frac{g}{\pi} \frac{1}{g^2 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

Ясно, что если вначале амплитуды  $A_i$  и фазы  $\Psi_i = \varphi_i - \omega_0 t$  мод имели случайные значения, то уже по прошествии 80 периодов в результате синхронизации практически устанавливается одночастотный режим. Достаточно сильная связь генераторов может привести к обратному синхронизации эффекту — хаотизации.

Именно такое доведение демонстрируют два связанных автогенератора — при очень сильной связи в системе возможны стохастические автоколебания (в этом случае система переходит в автогенератор со стохастическим поведением; см. гл. 22).

## ГЛАВА 17

# Резонансное взаимодействие осцилляторов

### 17.1. Взаимодействие трех связанных осцилляторов в системе с квадратичной нелинейностью

Рассмотрим одну из основных и в то же время элементарных задач теории нелинейных колебаний и волн — взаимодействие трех связанных осцилляторов с квадратичной нелинейностью. При отсутствии нелинейности, как мы знаем, в системе из трех связанных осцилляторов будут происходить движения, представляющие собой просто суперпозицию колебаний на трех нормальных частотах ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ). Уравнения системы, записанные в нормальных координатах, имеют вид  $\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Наличие слабой нелинейности приведет к появлению малых правых частей в уравнениях, т. е.

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = \mu f_j(x_1, x_2, x_3), \quad \text{где } \mu \ll 1. \quad (17.1)$$

Естественно задать два вопроса: 1) почему мы выбрали для анализа взаимодействие именно трех осцилляторов и 2) почему ограничиваемся квадратичной нелинейностью? Эти вопросы связаны друг с другом. Действительно, если имеется функциональная нелинейная зависимость какой-либо величины, например, от напряжения (нелинейность, хотя и произвольная, но слабая), то эта зависимость может быть представлена в виде ряда по степеням напряжения. В нашем случае (рис. 17.1а) заряд  $Q$  зависит от напряжения  $U$ , поэтому

$$Q(U) = C_1 U + C_2 U^2 + C_3 U^3 + \dots$$

Таким образом, если нелинейность слабая, то квадратичное слагаемое — это первое слагаемое, которое может дать нетривиальный эффект. В то же время благодаря нелинейности в системе порождаются новые комбинационные частоты, причем при квадратичной нелинейности простейший процесс такого типа — это образование суммарной ( $\omega = \omega_n + \omega_m$ ) или разностной ( $\omega = \omega_n - \omega_m$ ) частот. Появившиеся

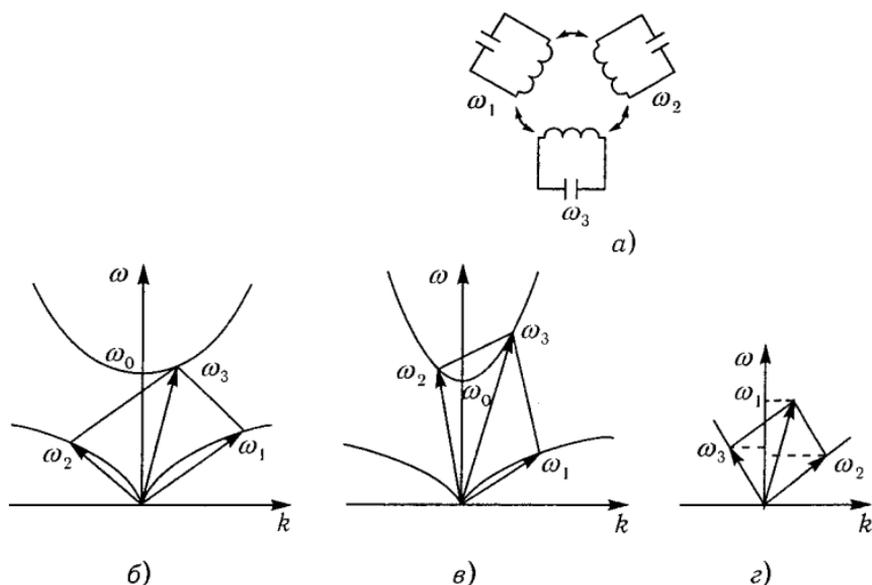


Рис. 17.1. Возможная модель взаимодействия трех связанных осцилляторов (а); дисперсионные диаграммы, иллюстрирующие резонансное взаимодействие трех связанных волн-осцилляторов (например, взаимодействие высоко- и низкочастотных электромагнитных волн в среде, состоящей из осцилляторов с собственной частотой  $\omega_0$ ) (б, в) и связь частот и волновых векторов при вынужденном рассеянии Манделъштама–Бриллюэна (г)

вновь (из-за нелинейности) комбинационные составляющие в дальнейшем, конечно, тоже могут принять участие в процессе взаимодействия, но только в том случае, если их амплитуды не слишком малы. Для того чтобы генерируемые слабой нелинейностью «новые» компоненты имели не малую амплитуду, их частоты должны быть резонансными, т. е. должны быть близки к нормальным частотам системы. Отсюда следует, что простейший акт взаимодействия на квадратичной нелинейности может происходить лишь при условии, что нормальные частоты системы удовлетворяют условию резонанса

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3. \quad (17.2)$$

Может иметь место, правда, вырождение — в случае, когда  $\omega_1 = \omega_2$  и можно рассматривать систему с двумя нормальными частотами  $\omega$  и  $2\omega$ , но это уже частный случай (мы рассмотрим и его). Без нарушения общности в условии резонанса (17.2) можно оставить только знак «+», т. е.  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ .

Таким образом, при слабой нелинейности взаимодействие трех осцилляторов в системе с сосредоточенными параметрами или трех нормальных мод резонатора может быть эффективным лишь в случае, когда выполнено условие (17.2). Причем, если мы рассматриваем среду с дисперсионной характеристикой такой, как на рис. 17.16, в, то условие резонанса в этом случае должно быть выполнено не только для частот, но и для волновых чисел:  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ ,  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$  [1]. Итак, для слабонелинейной консервативной системы с тремя степенями свободы исходные уравнения можно записать в виде (17.1). Воспользуемся для их решения асимптотическим методом (см. гл. 16), отыскивая решение в виде

$$x_j(t) = a_j(\mu t) \exp(i\omega_j t) + \text{к.с.} + \mu w_j(t). \quad (17.3)$$

После подстановки решения (17.3) в систему уравнений (17.1) и разделения членов с разными порядками малости получим уравнение для поправки  $\omega_j$ , характеризующей степень отличия приближенного решения от точного:

$$\ddot{w}_j + \omega_j^2 w_j = -2i\omega_j \dot{a}_j \exp(i\omega_j t) + 2i\omega_j \dot{a}_j^* \exp(-i\omega_j t) + f_j(a_{1,2,3} \exp(i\omega_{1,2,3} t) + \text{к.с.}). \quad (17.4)$$

Чтобы ошибка не нарастала, как мы видели, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (17.4) не была резонанса на частоте  $\omega_j$  или чтобы правая часть уравнения была ортогональна собственным функциям (17.4) при  $\mu = 0$ . Из этого условия получим уравнение для амплитуд

$$2i\omega_j \dot{a}_j = T^{-1} \int_t^{t+T} f_j(ae^{i\omega t} + \text{к.с.}) e^{-i\omega_j t} dt,$$

или

$$i\dot{a}_j = (2\omega_j)^{-1} \langle f_j(ae^{i\omega t} + \text{к.с.}) e^{-i\omega_j t} \rangle, \quad (17.5)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение за период времени  $T$ . В нашем случае квадратичной нелинейности  $f_j$  может быть представлена соотношением

$$f_j = \sum_{k,l} \alpha_{jkl} x_k x_l.$$

Так как мы искали решение для  $x(t)$  в форме (17.3), то в нелинейную функцию  $f_j$  будут входить осциллирующие сомножители  $\exp[i(\omega_k \pm \omega_l)t]$ . Очевидно, что вклад в правую часть уравнений (17.5) дадут слагаемые с  $\omega_k \pm \omega_l \approx \pm\omega_j$ , так как все другие комбинации будут содержать множители  $\exp[i(\omega_k \pm \omega_l \mp \omega_j)t]$ , которые при усреднении обращают в нуль соответствующие слагаемые в  $f_j$ . Окончательно после усреднения получим три уравнения для комплексных амплитуд:

$$i\dot{a}_1 = \sigma_1 a_3 a_2^*, \quad i\dot{a}_2 = \sigma_2 a_3 a_1^*, \quad i\dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_2.$$

Эта система точно интегрируется в эллиптических функциях Якоби, но сейчас мы попробуем разобраться в поведении системы качественно, не решая ее. Сделаем замену

$$a_{jн} = a_{jст} / \sigma_{jст}^{1/2}, \quad \sigma_{jн} = (\sigma_{1ст} \sigma_{2ст} \sigma_{3ст})^{1/2} = \sigma.$$

Тогда получим в новых переменных (индекс «н» будем опускать)

$$i\dot{a}_1 = \sigma a_2^* a_3, \quad i\dot{a}_2 = \sigma a_3 a_1^*, \quad i\dot{a}_3 = \sigma a_1 a_2. \quad (17.6)$$

Без ограничения общности величину  $\sigma$  можно считать положительной. Умножим каждое уравнение из (17.6) на  $a_j^*$  и сложим с комплексно-сопряженным ему, воспользовавшись тем, что  $a_j \dot{a}_j^* + a_j^* \dot{a}_j = d|a_j|^2/dt$ . В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= -i\sigma(a_3 a_2^* a_1^* - a_3^* a_2 a_1), \\ \dot{N}_2 &= -i\sigma(a_3 a_2^* a_1^* - a_3^* a_2 a_1), \\ \dot{N}_3 &= i\sigma(a_3 a_2^* a_1^* - a_3^* a_2 a_1), \end{aligned} \quad (17.7)$$

где  $N_j(t) = a_j a_j^* = |a_j|^2$  характеризует интенсивность колебаний в  $j$ -й моде, или на  $j$ -й нормальной частоте; по аналогии с квантовой механикой  $N$  часто называют числом квантов. Из (17.7) легко получить два независимых интеграла движения и третий, представляющий собой следствие первых двух:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(N_1 - N_2) &= 0, \quad N_1(t) - N_2(t) = \text{const} = C_1, \\ \frac{d}{dt}(N_2 + N_3) &= 0, \quad N_2(t) + N_3(t) = \text{const} = C_2, \\ N_1(t) + N_3(t) &= \text{const} = C_3. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Эти соотношения называются соотношениями Мэнли–Роу. Из них следуют важные выводы.

1. Если при  $t = 0$  энергия была запасена в основном лишь в одной первой (или второй) моде, т. е.  $N_1(0) \gg N_2(0)$ ,  $N_3(0)$  или  $N_2(0) \gg N_1(0)$ ,  $N_3(0)$ , то при любом  $t$  интенсивность колебаний на суммарной частоте  $N_3$  будет незначительной. Действительно, если  $N_3(0) = 0$ , то, казалось бы, она может вырасти за счет уменьшения  $N_1(t)$ , так как  $N_1(t) + N_3(t) = \text{const} = N(0)$ . Однако тогда должна уменьшаться и  $N_2(t)$ , потому что  $N_1(t) - N_2(t) = N_1(0) - N_2(0)$ . Но  $N_2(t) + N_3(t) = N_2(0)$  — малая величина; следовательно,  $N_3(t)$  не может вырасти больше, чем на величину  $N_2(0)$ , при этом в момент  $t = t'$  будем иметь  $N_2(t') = 0$ ,  $N_3(t') = N_2(0)$ . Таким образом, энергия высокочастотного колебания возрасти за счет одного лишь низкочастотного не может, хотя это в принципе и не противоречит закону сохранения энергии. Закон сохранения энергии можно получить, умножив уравнения (17.7) соответственно на  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Тогда, суммируя их, получаем

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 \dot{N}_1 + \omega_2 \dot{N}_2 + \omega_3 \dot{N}_3) = i\sigma(a_3 a_2^* a_1^* - a_3^* a_2 a_1)(-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3).$$

Но  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ ; следовательно,  $\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 = \text{const}$  или  $\omega_1 A_1^2 + \omega_2 A_2^2 + \omega_3 A_3^2 = \text{const}$ ,  $a_j = A_j e^{i\varphi_j}$ .

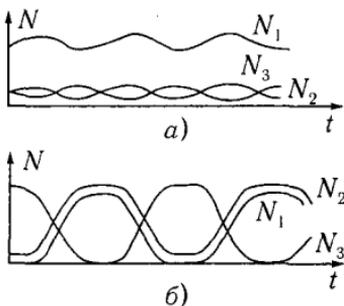


Рис. 17.2. Осциллограммы интенсивностей колебаний на  $j$ -й нормальной частоте ( $j = 1, 2, 3$ ): а —  $N_1(0) \gg N_2(0)$ ,  $N_3(0)$ ; б —  $N_3(0) \gg N_1(0)$ ,  $N_2(0)$

2. Если при  $t = 0$  энергия была запасена, в основном, в высокочастотной моде, т. е.  $N_3(0) \gg N_1(0)$ ,  $N_2(0)$ , то картина иная: из интегралов (17.8) следует, что за счет  $N_3$  могут одновременно вырасти  $N_1$  и  $N_2$ , т. е. от высокочастотной моды к низкочастотным энергия перейти может. Такой процесс называют распадом или распадной неустойчивостью. Мы получили, что низкочастотная мода не передает энергию высокочастотной, а высокочастотная мода может распадаться, т. е. ее энергия может передаваться низкочастотным модам. Это легко пояснить на языке квазичастиц. Закон сохранения энергии не противоречит распаду низкочастотных мод, однако важно еще, чтобы этот закон выполнялся и в элементарном акте

взаимодействия квазичастиц:  $\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$  ( $\hbar\omega_j$  — энергия кванта на частоте  $\omega_j$ ). При большом в начальный момент времени числе кван-

тов с частотой  $\omega_1$  и малом с частотой  $\omega_2$  число квантов с частотой  $\omega_3$  в процессе взаимодействия остается малым (квантам с частотой  $\omega_1$  не с чем сливаться). Распаду же квантов с частотой  $\omega_3$  на кванты с частотами  $\omega_2$  и  $\omega_1$  ничто не препятствует. На рис. 17.2а изображены осциллограммы интенсивностей  $N_j$  для случая, когда в начальный момент максимальна низкочастотная мода ( $N_1(0) \gg N_2(0), N_3(0)$ ). Рис. 17.2б иллюстрирует случай  $N_3(0) \gg N_1(0), N_2(0)$ .

На основании квантовой аналогии можно сделать еще один важный вывод: если параметры системы медленно изменяются, то величины (17.8) являются адиабатическими инвариантами. Итак, квантовые осцилляторы при медленном изменении параметров не меняют свой квантовый номер, т. е. число квантов при отсутствии слияний или распадов — это адиабатический инвариант. Когда же слияние или распад есть, то сохраняется при медленном изменении параметров неиспользованная в процессе слияния разница  $N_1(t) - N_2(t)$ , и, конечно, сумма уже родившихся к моменту  $t$  квантов  $N_3$  и еще не истраченных к этому времени квантов  $N_2$ , т. е.  $N_2(t) + N_3(t)$ , также будет адиабатическим инвариантом.

В частном случае постоянной разности фаз колебаний для системы (17.6), описывающей взаимодействие слабонелинейных осцилляторов, легко построить фазовый портрет. Полагая в (17.6)  $a_j = A_j \exp(i\varphi_j)$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \sigma A_2 A_3 \sin \Phi, & \dot{A}_2 &= \sigma A_1 A_3 \sin \Phi, & \dot{A}_3 &= -\sigma A_1 A_2 \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\sigma (A_1 A_2 / A_3 - A_1 A_3 / A_2 - A_2 A_3 / A_1) \cos \Phi, \end{aligned} \quad (17.9)$$

где  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$ . Будем считать, что  $\Phi = \pi/2 = \text{const}$ . Тогда систему (17.9) можно записать в виде

$$\dot{A}_1 = \sigma A_2 A_3, \quad \dot{A}_2 = \sigma A_3 A_1, \quad \dot{A}_3 = -\sigma A_1 A_2. \quad (17.10)$$

В этом частном случае мы можем выяснить ход фазовых траекторий в трехмерном фазовом пространстве  $A_1 A_2 A_3$ . Они будут располагаться на поверхности постоянной энергии — на эллипсоиде

$$\omega_1 A_1^2 + \omega_2 A_2^2 + \omega_3 A_3^2 = \text{const}$$

с полуосями  $(\omega_2 \omega_3)^{1/2}$ ,  $(\omega_1 \omega_3)^{1/2}$ ,  $(\omega_1 \omega_2)^{1/2}$ . Фазовые траектории получаются при пересечении этого эллипсоида с поверхностями  $A_1^2 + A_3^2 = \text{const}$ ,  $A_2^2 + A_3^2 = \text{const}$  и  $A_1^2 - A_2^2 = \text{const}$ . Вблизи осей  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 17.3) фазовые траектории (типа 1) представляют собой эл-

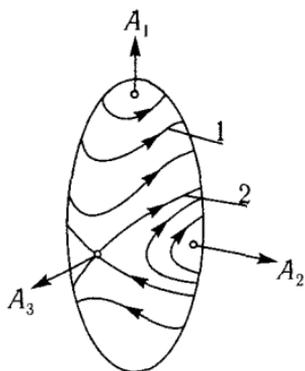


Рис. 17.3. Фазовый портрет системы, описывающей взаимодействие трех слабонелинейных осцилляторов в трехмерном фазовом пространстве  $A_1 A_2 A_3$

Вращение тела вокруг оси со средним значением момента инерции  $I_2$  неустойчиво, т. е. это — аналог распадной моды  $\omega_3$ .<sup>1</sup>

В случае  $N_1(0) \gg N_2(0), N_3(0)$ , систему (17.6) можно проинтегрировать, считая, что  $a_1(0) = a_1^0 = \text{const}$ . Это так называемое приближение заданного поля. Тогда уравнения (17.6) можно записать так:  $\dot{a}_2 = -i\sigma a_3 (a_1^0)^*$ ,  $\dot{a}_3 = -i\sigma a_1^0 a_2$ . Отсюда  $\ddot{a}_2 + \sigma^2 |a_1^0|^2 a_2 = 0$  и  $\ddot{a}_3 + \sigma^2 |a_1^0|^2 a_3 = 0$ , т. е.  $a_2$  и  $a_3$  будут изменяться периодически в соответствии с формулами

$$a_2 = a_2(0) \sin [\sigma |a_1^0| t + \varphi_2(0)],$$

$$a_3 = a_3(0) \sin [\sigma |a_2^0| t + \varphi_3(0)].$$

Если же  $N_3(0) \gg N_1(0)$  и  $N_3(0) \gg N_2(0)$ , то выяснить закон изменения амплитуд  $a_1, a_2$  можно для малых  $t$ . Действительно, при этом

$$\dot{a}_1 = -i\sigma a_3^0 a_2^*, \quad \dot{a}_2 = -i\sigma a_3^0 a_1^*.$$

Отсюда  $\ddot{a}_1 - \sigma^2 |a_3^0|^2 a_1 = 0$ , а  $\ddot{a}_2 - \sigma^2 |a_3^0|^2 a_2 = 0$ , т. е.  $a_1$  и  $a_2$  растут по экспоненте. Однако из соотношений Мэнли-Роу (17.8) следует, что этот рост будет ограничен значением  $a_3(0) = a_3^0$ .

<sup>1</sup> Много интересных задач, подобных изложенным, возникает при анализе колебаний искусственного спутника Земли около положения относительного равновесия на орбите [3].

липсы, т. е. каждая из мод  $A_1, A_2$  при малом возмущении действительно совершает небольшие колебания вблизи начального значения. Мода же максимальной частоты может распаться, т. е. полностью передавать свою энергию модам  $A_1$  и  $A_2$  (траектория типа 2). Наши уравнения (17.10) совпадают с уравнениями Эйлера, которые описывают свободные движения твердого тела с закрепленной точкой, моменты инерции которого относительно главных осей удовлетворяют соотношению  $I_3 > I_2 > I_1$ . Эти уравнения имеют вид [2]

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{I_3 - I_2}{I_2} \Omega_2 \Omega_3, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_1 \Omega_3,$$

$$\frac{d\Omega_3}{dt} = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2.$$

Приведем здесь решение системы (17.9) в общем случае произвольной начальной разности фаз  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1$  [9, 12]. Последнее из уравнений (17.9) запишем в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sigma \left( \frac{A_3 A_2}{A_1} + \frac{A_3 A_1}{A_2} - \frac{A_1 A_2}{A_3} \right) \cos \Phi = \text{ctg } \Phi \frac{d}{dt} \ln(A_1 A_2 A_3).$$

Интегрируя это уравнение, находим  $A_1 A_2 A_3 \cos \Phi = G = \text{const}$ . Используя этот интервал и соотношения Мэнли-Роу (17.8), из (17.9) получим уравнение для  $N_3(t)$ :

$$dN_3(t)/dt = 2\sigma[N_3(C_3 - N_3)(C_2 - N_3) - G^2]^{1/2}.$$

Если три корня уравнения  $N_3(C_3 - N_3)(C_2 - N_3) = G^2$  расположить в убывающем порядке, то уравнение для  $N_3(t)$  можно преобразовать к виду

$$\sigma(t - t_0) = -\frac{1}{2} \int_{N_3(t_0)}^{N_3(t)} [(N_3 - N_c)(N_3 - N_b)(N_3 - N_a)]^{-1/2} dN_3$$

( $N_c \geq N_b \geq N_a \geq 0$ ). Интеграл в правой части заменой переменных  $y(t) = [(N_3(t) - N_a)/(N_b - N_a)]^{1/2}$  сводится к эллиптическому ( $y(t_0) = 0$ ):

$$\sigma(t - t_0)(N_c - N_a)^{1/2} = - \int_0^{y(t)} [(1 - y^2)(1 - \alpha^2 y^2)]^{-1/2} dy,$$

откуда  $y(t) = \text{sn}[\sigma(N_c - N_a)^{1/2}(t_0 - t); \alpha]$ ,  $\alpha = [(N_b - N_a)/(N_c - N_a)]^{1/2}$ .

В итоге для  $N_3(t)$  получаем общее решение

$$N_3(t) = N_a + (N_b - N_a) \text{sn}^2[\sigma(N_c - N_a)^{1/2}(t_0 - t); \alpha].$$

Читателю предоставляется самостоятельно получить из этого общего решения рассмотренные нами выше частные случаи.

Завершая этот параграф, остановимся кратко на особенностях вырожденного резонансного взаимодействия осцилляторов с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ . Рассмотрим в качестве примера резонансное взаимодействие нелинейно связанных колебаний в простой модели — пружинном маятнике (рис. 17.4а), уравнения для которого в пренебрежении трением имеют вид

$$\ddot{u}_1 + \frac{k}{m} u_1 = l \left( \dot{u}_2^2 - \frac{g}{2l} \dot{u}_2^2 \right), \quad \ddot{u}_2 + \frac{g}{l} u_2 = -\frac{1}{l} \left( \frac{g}{l} u_1 u_2 + 2u_1 \ddot{u}_2 \right).$$

При решении методом усреднения было обнаружено, что при соотношении параметров  $k/m \approx 4g/l$ , т. е. когда  $\omega_{\text{верт}} \approx 2\omega_{\text{угл}}$ , происходит периодическая перекачка энергии из угловых колебаний в вертикальные и наоборот (рис. 17.4б), что и было тут же подтверждено экспериментально.

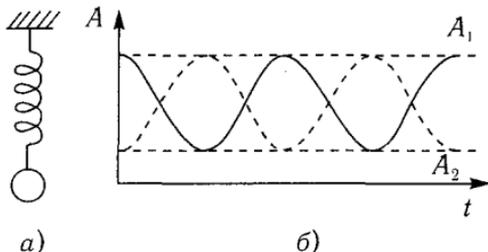


Рис. 17.4. Пружинный маятник (а) и периодический обмен энергией между угловыми и вертикальными колебаниями (б)

Р. В. Хохлов, решая задачу о стационарном нелинейном режиме работы параметрического усилителя бегущей волны, нашел, что при распространении вдоль усилителя волна накачки  $2\omega_0$  параметрически усиливает начальную волну  $\omega_0$ , передавая ей почти всю свою энергию [1, 4, 5, 8].

В процессе дальнейшего распространения происходит обратное — интенсивная волна  $\omega_0$  генерирует вторую гармонику, и затем вновь все повторяется сначала, т. е. наблюдается явление периодического обмена энергией между гармониками (рис. 17.4б).

В самом простом случае, соответствующем системе уравнений (17.6), при  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  и  $\omega_3 = 2\omega$  (условие синхронизма  $\omega + \omega = 2\omega$  выполняется всюду точно; взаимодействие называется вырожденным) имеем

$$i\dot{a}_\omega = \sigma a_{2\omega} a_\omega^*, \quad i\dot{a}_{2\omega} = \sigma a_\omega^2.$$

Характер взаимодействия, описываемого этой системой, совершенно иной, чем в рассмотренном выше невырожденном случае.

Отличия таковы. 1) Если в начальный момент в системе было возбуждено только колебание основной частоты  $\omega$ , т. е.  $a_\omega(0) = a_\omega^0$  и  $a_{2\omega}(0) = 0$ , то с течением времени появляется и колебание на гармонике  $2\omega$ , энергия первой моды будет перекачиваться в энергию ее второй гармоники, процесс слияния квазичастиц  $\omega + \omega = 2\omega$  будет происходить всегда. 2) В (17.6) скорость нарастания каждой моды зависит только от «чужих» амплитуд, а в вырожденном случае изменение  $a_\omega$

зависит и от амплитуды собственной. 3) Если  $a_\omega = 0$  при  $t = 0$ , то колебания этой частоты и не появятся.

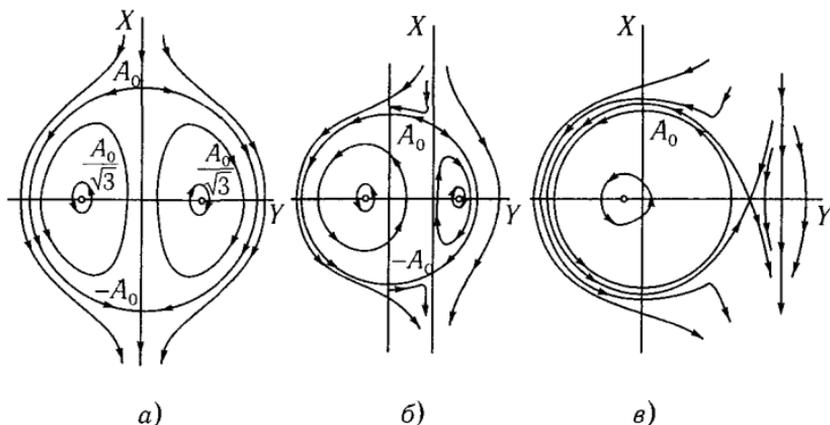


Рис. 17.5. Фазовые портреты нелинейного осциллятора, описывающие обмен энергией между гармониками в системе с квадратичной нелинейностью: а —  $\Delta\omega = 0$ ; б —  $|\Delta\omega|/(2\delta_1 A_0) < 1$ ; в —  $|\Delta\omega|/(2\delta_1 A_0) > 0$

В предположении слабой нелинейности укороченные (усредненные) уравнения для амплитуд и фаз осцилляторов  $\omega$  и  $2\omega$ , взаимодействующих во времени или в пространстве, записываются в виде

$$\dot{A}_1 = -\sigma_1 A_1 A_2 \sin \Phi, \quad \dot{A}_2 = \sigma_2 A_1^2 \sin \Phi,$$

$$\dot{\Phi} = -(2\sigma_1 A_2 - \sigma_2 A_1^2/A_2) \cos \Phi - \Delta\omega,$$

где  $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta\omega t$ . Эти уравнения нетрудно свести к уравнению нелинейного осциллятора, если воспользоваться интегралом энергии  $\sigma_2 A_1^2(t) + \sigma_1 A_2^2(t) = \text{const} = \sigma_1 A_0^2$  и ввести новые переменные  $X = A_2 \sin \Phi$ ,  $Y = A_2 \cos \Phi$ . Фазовые портреты получившегося таким образом осциллятора при различных значениях расстройки приведены на рис. 17.5. Мы видим, что при сделанных предположениях о малости нелинейности (или, что то же самое, малости начальных энергий возбуждения) система из двух нелинейно связанных осцилляторов демонстрирует лишь очень простые — квазипериодические — движения. С физической точки зрения отличие между такими движениями (рис. 17.5) заключается лишь в различной глубине энергетических биений между осцилляторами и различном периоде этих биений.

## 17.2. Резонансное взаимодействие волн в слабонелинейных средах с дисперсией

Анализируя взаимодействие в системе трех связанных осцилляторов, мы уже упоминали, что в среде с дисперсией при слабой нелинейности три волны с фиксированной пространственной структурой будут взаимодействовать так же. Правда, условие резонанса должно выполняться теперь и для частот, и для волновых чисел. Однако в методе исследования многоволновых взаимодействий в среде с дисперсией есть свои особенности, которые требуют обсуждения.

Пусть в среде с дисперсией и малой нелинейностью распространяются волны с  $\omega = \omega_j$  и  $k_j = k(\omega_j)$ , где связь  $k(\omega)$  определяется дисперсионным уравнением. В результате взаимодействия из-за нелинейности в среде возникает вынужденная комбинационная волна с частотой  $\omega_n = \sum_{j=1} n_j \omega_j$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_n = \sum_{j=1} n_j \mathbf{k}_j$ . Эта волна остается малой (порядка величины нелинейности), если  $\omega_n$  и  $\mathbf{k}_n$  не удовлетворяют дисперсионному уравнению ( $D(\omega_n, \mathbf{k}_n) \neq 0$ ), и будет нарастать, если удовлетворяют уравнению  $D(\omega_n, \mathbf{k}_n) = 0$ , или, в другой форме, когда

$$\omega_n = \omega_i, \quad \mathbf{k}_n = \mathbf{k}_i(\omega_n). \quad (17.11)$$

Эти соотношения можно рассматривать как условия резонанса частот и волновых векторов волн, необходимые для эффективности их взаимодействия. Их часто называют также условиями синхронизма, имея в виду, что фазовая скорость,  $\mathbf{v} = (\omega_n/k^2)\mathbf{k}$  комбинационной волны близка к фазовой скорости одной из собственных волн среды.

Если условия синхронизма выполняются для очень большого числа волн, то в результате взаимодействия форма волны уже будет далека от синусоидальной. Квазигармоническое приближение здесь не работает. Однако часто оказывается, что число взаимодействующих волн невелико. Такие задачи очень важны для нелинейной оптики, физики твердого тела, физики плазмы. Например, классической задачей нелинейной оптики является задача о вынужденном рассеянии Мандельштама–Бриллюэна [4, 5]: падающая на кристалл световая волна частоты  $\omega_1$  вызывает модуляцию плотности среды (электрострикционный эффект), возникает акустическая волна частоты  $\omega_2$ . Происходит отражение света от появившихся неоднородностей, результатом чего является возникновение волны частоты  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ , распространяющейся в обратную сторону (см. рис. 17.1г). Взаимодействие волн при этом в одномерном случае (световая волна с напряженностями электромагнитного

поля  $E = E_y$ ,  $H = H_z$  распространяется в направлении  $x$ ) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u), \end{aligned} \quad (17.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_{зв}^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c_{зв}^2}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \frac{\partial E^2}{\partial x}.$$

Первые два уравнения описывают изменение электромагнитного поля световой волны с учетом изменения диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon$  за счет наличия в ней возмущений плотности. Два последних определяют изменение плотности  $\rho$  и скорости частиц  $u$  в звуковой волне с учетом пондеромоторных сил (возникающих из-за электрострикционного эффекта). Первое из них — уравнение неразрывности, второе — уравнение движения. Как решить систему (17.12), учитывая, что правые части уравнений, характеризующие нелинейные связи, малы? Поскольку даже при эффективном взаимодействии квазигармонических волн изменение их амплитуд и фаз вследствие малости нелинейности должно происходить медленно, для исследования естественно применить метод, так или иначе связанный с усреднением по временной и пространственной переменным (рекомендуем читателю при ознакомлении с материалом этого параграфа вспомнить § 17.1).

Рассмотрим общую схему построения такого метода, считая волны одномерными [12]. Пусть поле в слабонелинейной среде описывается системой уравнений вида

$$AU_t + BU_x + CU = \mu f(U, U_t, U_x), \quad \mu \ll 1. \quad (17.13)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — квадратные матрицы,  $U$  и  $f$  —  $n$ -мерные вектор-функции, причем  $f$  — полиномы по  $U$ ,  $U_t$ ,  $U_x$ . Для системы (17.12) компонентами вектора  $U$  являются  $E$ ,  $H$ ,  $\rho$ ,  $u$ . При  $\mu = 0$  поле в среде является суперпозицией гармонических волн вида

$$U = a\psi \exp[i\omega t - ik(\omega)x] + \text{к. с.}, \quad (17.14)$$

где  $a$  — комплексная амплитуда, зависящая от начальных и граничных

условий,  $\psi$  — поляризационный вектор, определяемый системой

$$(i\omega A - ikB + C)\psi = 0, \quad (17.15)$$

а  $\omega$  и  $k$  связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = \text{Det} \|A\omega - Bk - iC\| = 0. \quad (17.16)$$

Одну из компонент вектора  $\psi$  всегда можно положить равной единице, тогда остальные находятся из системы (17.15). Будем рассматривать взаимодействие конечного числа волн вида (17.14), для которых выполнены условия синхронизма (17.11). (То обстоятельство, что условия синхронизма выполнены лишь для конечного числа волн, означает, что система обладает дисперсией.) При  $\mu \neq 0$  решение будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_j a_j(\mu x, \mu t)\psi(\omega_j, k_j) \exp(i\omega_j t - ik_j x) + \text{к. с.} + \mu w(x, t), \quad (17.17)$$

заранее предполагая, что амплитуда медленно изменяется в пространстве и во времени. Для того чтобы решение (17.17) было справедливым, надо, чтобы поправка  $w(x, t)$  не нарастала со временем. Подставляя решение в (17.13), получаем уравнение для  $w$  в виде

$$Aw_t + Bw_x + Cw = h(x, t), \quad (17.18)$$

где

$$h(x, t) = - \sum_j \exp(i\omega_j t - ik_j x) \left[ A\psi(\omega_j, k_j) \frac{\partial a_j}{\partial t} + B\psi(\omega_j, k_j) \frac{\partial a_j}{\partial x} \right] + \text{к. с.} + f \left[ \sum_j a_j \psi_j \exp(i\omega_j t - ik_j x) + \text{к. с.} \right].$$

Чтобы функция  $w(x, t)$  при любых  $x, t$  оставалась ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы в правой части системы (17.18) отсутствовали резонансные члены, т. е. правая часть должна быть ортогональна собственным функциям линейной задачи. Так как нелинейность полиномиальна, правые части (17.18) являются периодическими функциями

по  $x$  и  $t$ , и их можно представить в виде ряда Фурье

$$h(x, t) = \sum_{r=1}^N F_r \exp(i\omega_r t - ik_r x) + \text{к. с.},$$

$$F_r = (\lambda T)^{-1} \int_x^{x+\lambda} \int_t^{t+T} h(x, t) \exp(-i\omega_r t + ik_r x) dx dt. \quad (17.19)$$

Функции  $w$  также представляются в виде

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^N W_r \exp(i\omega_r t - k_r x) + \text{к. с.} \quad (17.20)$$

После подстановки (17.19) и (17.20) в (17.18) получим, приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, неоднородную систему алгебраических уравнений для определения  $W$ :

$$(i\omega_r A - ik_r B + C)W_r = F_r,$$

откуда  $l$ -компонента вектора  $W_r$  записывается в виде

$$W_{rl}(\omega_r, k_r) = -iD^{-1}(\omega_r, k_r) \sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r),$$

где  $D_{jl}$  — алгебраические дополнения элементов матрицы  $(A\omega - Bk - iC)$  (см. уравнение (17.16)).

Если конец вектора  $(\omega_r, k_r)$  не лежит на дисперсионной кривой, т. е. это не собственная волна системы, то  $D(\omega_r, k_r) \neq 0$  и добавок ограничен. В противном случае  $W$  будет секулярно нарастать. Чтобы этого не было, надо изъять из уравнения для добавка резонансный член. Математически это сводится к выполнению равенства

$$\sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r) = 0. \quad (17.21)$$

Так как  $D_{jl} = \gamma \zeta_j^* \psi_l$ , где  $\zeta_j^*$  — собственные функции сопряженной с (17.15) системы, условие (17.21) можно записать в виде  $\sum_{j=1}^N \zeta_j^* F_j(\omega_r, k_r) = 0$ . Это и есть условие ортогональности. Отсюда

с учетом (17.19) и (17.18) для комплексных амплитуд  $a_j$  получим уравнения

$$(\zeta, A\psi)\partial a_j/\partial t + (\zeta, B\psi)\partial a_j/\partial x = (\zeta, \langle f(\omega_j, k_j) \rangle), \quad (17.22)$$

где

$$\langle f(\omega_j, k_j) \rangle = (\lambda T)^{-1} \int_x^{x+\lambda t+T} \int_t^t f(\omega_j, k_j) \exp(-i\omega_j t + ik_j x) dx dt.$$

Используя соотношения

$$\frac{(\zeta, B\psi)}{(\zeta, A\psi)} = -\frac{D'_k}{D'_\omega} = \frac{d\omega}{dk} = v_{\text{гp}}, \quad \frac{\zeta_l}{(\zeta, A\psi)} = \frac{D_{lk}}{\psi_k D'_\omega},$$

запишем (17.22) в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_{\text{гp}}(\omega_r, k_r) \frac{\partial a_j}{\partial x} = (\psi_j D'_\omega)^{-1} \sum_l D_{lj} \langle f_l \rangle. \quad (17.23)$$

Это и есть искомые уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих квазигармонических волн.

В качестве примера рассмотрим взаимодействие высокочастотных и низкочастотных электромагнитных волн в среде, дисперсионная характеристика которой изображена на рис. 17.1в<sup>1</sup>. Это среда, состоящая из осцилляторов с собственной частотой  $\omega_0$ , элемент объема которой характеризуется поляризуемостью  $\chi$ . При квадратичной нелинейности естественно в качестве элементарного процесса рассматривать взаимодействие трех волн. Условия синхронизма имеют вид

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 - k_2 = k_3. \quad (17.24)$$

Уравнения для компонент электромагнитного поля и поляризации среды запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial x} &= -\mu j(E), & \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial B(H)}{\partial t}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} - R &= 0, & \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \chi E &= 0 \end{aligned} \quad (17.25)$$

<sup>1</sup>Применительно к волнам на воде резонансные взаимодействия хорошо изложены в [6]; таким взаимодействиям в плазме посвящена книга [7].

( $\chi = (\varepsilon - 1)/4\pi$ ). Дисперсионное уравнение системы (17.25) легко найти:

$$D(\omega, k) = \begin{vmatrix} \omega & -ck & 4\pi\omega & 0 \\ -ck & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2\chi & 0 & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} = \omega^2(\omega^2 - \varepsilon\omega_0^2) - c^2k^2(\omega^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Положим  $\psi_E = 1$ . Тогда

$$\psi_H = \frac{1}{D_{11}} \begin{vmatrix} ck & 0 & \omega \\ 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2\chi & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix},$$

где  $D_{11} = \omega(\omega^2 - \omega_0^2)$ , т. е.  $\psi_H = ck/\omega$ . Аналогично  $\psi_P = \omega_0^2\chi/(\omega_0^2 - \omega^2)$ ,  $\psi_R = i\omega\omega_0^2\chi/(\omega_0^2 - \omega^2)$ . Будем искать решение в виде суммы волн:

$$E, H, P, R = \sum_{j=1}^3 \psi_{E, H, P, R}(\omega_j, k_j) a_j(\mu x, \mu t) \exp(i\omega_j t - k_j x) + \text{к. с.} \quad (17.26)$$

Уравнения для комплексных амплитуд имеют вид

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial a_j}{\partial x} = (\psi_E D'_\omega)^{-1} \sum_{l=1}^4 D_{lj} \langle f_l \rangle = f_j, \quad (17.27)$$

где

$$f_j = -\frac{D_{11}}{D'_\omega} \Big|_{\omega_j, k_j} \left\langle j \left[ \sum_{j=1}^3 a_j \exp(i\omega_j t - ik_j x) + \text{к. с.} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp(-i\omega_j t + ik_j x) \right\rangle - \\ - \frac{D_{21}}{D'_\omega} \Big|_{\omega_j, k_j} \left\langle \frac{dB(H)}{dH} \frac{\partial H}{\partial t} \left[ \sum_{k=1}^3 \psi_H(\omega_k, k_k) a_k \exp(i\omega_k t - ik_k x) + \text{к. с.} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp(-i\omega_j t + k_j x) \right\rangle,$$

$$D_{21} = -ck(\omega^2 - \omega_0^2), \quad D'_\omega = 2\omega(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \cdot 4\pi\chi/(\omega^2 - \omega_0^2).$$

Зададим теперь конкретный вид нелинейных зависимостей, т. е.  $j(E)$  и  $B(H)$ . Пусть

$$j(E) = gE + g_H E^2, \quad B(H) = \mu_H H^2. \quad (17.28)$$

Если условия синхронизма выполнены не точно, то

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega, \quad k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k, \quad (17.29)$$

где  $\Delta\omega$  — частотная расстройка, а  $\Delta k$  — расстройка от резонанса по волновому числу. Учитывая (17.26) и (17.28), получаем из уравнений (17.27) следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} &= \mu [g_1 a_1 + \sigma_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t}], \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \mu [g_2 a_2 + \sigma_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t}], \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} &= \mu [g_3 a_3 + \sigma_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} + i\zeta_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t}], \end{aligned} \quad (17.30)$$

где

$$g_i = \frac{D_{11}}{D'_\omega} g \Big|_{\omega_j, k_j}, \quad \sigma_i = \frac{D_{11}}{D'_\omega} g_H \Big|_{\omega_j, k_j}, \quad \zeta_i = \frac{D_{21}}{D'_\omega} \mu_H \Big|_{\omega_j, k_j}.$$

Обратим внимание на то, что  $D_{11}/D'_\omega$  и  $D_{21}/D'_\omega$ , а следовательно,  $g_j$ ,  $\sigma_j$  и  $\zeta_j$  зависят только от квадратов частот и волновых чисел, т. е. имеют всегда одинаковый знак и являются действительными величинами. Зависимость  $j(E)$  определяет диссипативную нелинейность, в уравнениях (17.30) она связана с  $\sigma_j$ , нелинейная зависимость  $B(H)$  определяет консервативную нелинейность и входит в те же уравнения коэффициентом  $\zeta_j$ .

Рассмотрим несколько различных случаев.

1. Если предположить, что поля пространственно однородны, т. е.  $\partial a_j / \partial x = 0$ , то взаимодействие волн описывается теми же уравнениями, что и колебания в системе трех связанных осцилляторов. Такое описание называется приближением заданной структуры поля. Мы знаем, что при  $\Delta\omega = 0$  в консервативной системе (т. е. при  $j(E) = 0$ ) будет происходить обмен энергией между модами, если высокочастотная мода обладает большей начальной энергией. Если же синхронизм не точный, т. е.  $\Delta\omega \neq 0$ , то при малых  $\Delta\omega$  естественно предположить,

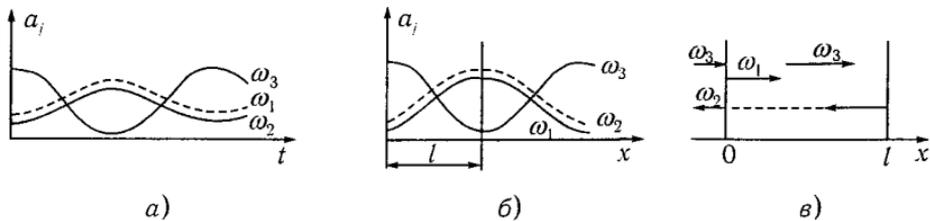


Рис. 17.6. К исследованию системы уравнений (17.30) в консервативном случае, когда  $j(E) = 0$ ;  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega$ ;  $k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k$ : а) приближение заданной структуры поля  $\partial a_j / \partial x = 0$ ,  $\Delta\omega \neq 0$ , неполный обмен энергией между модами; б) усиление волн с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  при подаче на вход нелинейной системы сигнала с частотой  $\omega_3$  ( $v_j > 0$ ); в) схема рассеяния назад при  $v_1, v_3 > 0$ , а  $v_2 < 0$

что характер взаимодействия будет аналогичен, хотя, вероятно, полного обмена энергией уже не будет (рис. 17.6а).

2. Пусть по-прежнему система консервативна, т. е.  $j(E) = 0$ . Предположим теперь, что процесс стационарный, т. е.  $\partial a_j / \partial t = 0$ . Это уже принципиально волновая задача, так как мы рассматриваем взаимодействие волн в пространстве. В этом случае, как и в предыдущем, система (17.30) сводится к уравнениям в обыкновенных производных.

а) Если все  $v_j$  в уравнениях (17.30) имеют один знак, т. е. все три волны распространяются в одну сторону, то задача сводится к предыдущей. Итак, если есть нелинейная консервативная среда (например, кристалл) и на границу такой среды мы подаем волну с частотой  $\omega_3$ , то при наличии флуктуаций возбудятся две другие волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , причем их амплитуды и пространстве будут меняться, как показано на рис. 17.6б. Таким образом, можно подобрать длину кристалла  $l$  так, чтобы на выходе получить низкочастотную волну с максимальной амплитудой.

б) Если же  $v_1, v_3 > 0$  и  $v_2 < 0$ , тогда волна с  $\omega_2$  — это волна, рассеянная назад. При рассмотрении этого случая принципиально наличие границ (рис. 17.6в).

### 17.3. Взрывная неустойчивость

Рассмотрим взаимодействие пространственно-однородных полей в неконсервативной среде, т. е.  $\partial a_j / \partial x = 0$ ,  $B(H) = 0$ ,  $j(E) \neq 0$ . Примером такой среды может служить активная линия передачи, одна из возможных реализации которой представлена на рис. 17.7а. Активным

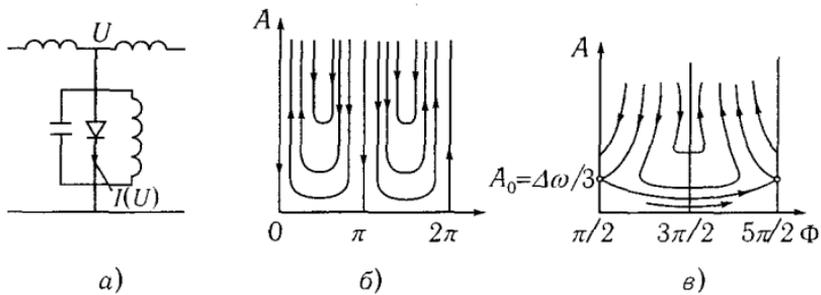


Рис. 17.7. Взаимодействие пространственно однородных полей в неконсервативной среде: а — активная линия передачи как пример такой среды; б — интегральные кривые  $A^3 \sin \Phi = \text{const}$  на фазовом цилиндре ( $\Delta\omega = 0$ ); в — интегральные кривые  $\sin \Phi = (\Delta\omega A + \text{const}) A^{-2}$  на фазовом цилиндре  $\Delta\omega \neq 0$  элементом в ней является туннельный диод. Уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн в такой системе имеют вид (нелинейность, вносимая туннельным диодом, считается квадратичной)

$$\dot{a}_1 = a_3 a_2^* \exp(i\Delta\omega t), \quad \dot{a}_2 = a_3 a_1^* \exp(i\Delta\omega t), \quad \dot{a}_3 = a_1 a_2 \exp(-i\Delta\omega t).$$

Перейдем к действительным амплитудам и фазам заменой  $a_j = A_j \exp(i\varphi_j)$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= A_2 A_3 \cos \Phi, & \dot{A}_2 &= A_3 A_1 \cos \Phi, & \dot{A}_3 &= A_1 A_2 \cos \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -(A_1 A_3 / A_2 + A_1 A_2 / A_3 + A_3 A_2 / A_1) \sin \Phi + \Delta\omega, \end{aligned} \quad (17.31)$$

где  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 - \Delta\omega t$ .

1. Пусть  $\Delta\omega = 0$ , т. е. волны находятся в синхронизме. Тогда система (17.31) имеет два независимых интеграла движения:  $A_1^2 - A_2^2 = \text{const}$ ,  $A_3^2 - A_2^2 = \text{const}$ , и еще один следует из них:  $A_3^2 - A_1^2 = \text{const}$ . Существование этих соотношений означает, что если  $A_i(0) = A(0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), и  $\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  при  $t = 0$ , то и при  $t \neq 0$  амплитуды всех волн остаются одинаковыми. На этом основании можно рассматривать только два уравнения системы (17.31):

$$\dot{A} = A^2 \cos \Phi, \quad \dot{\Phi} = -3A \sin \Phi. \quad (17.32)$$

Умножая первое уравнение на  $A\Phi$ , второе на  $A\dot{A}$  и вычитая одно из другого, находим

$$A^3 \cos \Phi \cdot \dot{\Phi} + 3A^2 \sin \Phi \cdot \dot{A} = 0 \quad \text{или} \quad d(A^3 \sin \Phi)/dt = 0.$$

Получаем, таким образом, уравнение интегральных кривых  $A^3 \sin \Phi = \text{const}$  на фазовом цилиндре (рис. 17.76). Из (17.32) следует, что в системе есть целая прямая состояний равновесия ( $A = 0$ ). Если  $\cos \Phi > 0$ , то  $A$  растет, при  $\cos \Phi < 0$   $A$  убывает. Функция  $2\pi \sin \Phi(t) \rightarrow 0$  при  $\Phi(t) \rightarrow 0$ , т. е. разность фаз взаимодействующих волн стремится к нулю и фазы синхронизируются. При этом  $\dot{A} = A^2$  и  $A(t) = 1/(1/A(0) - t)$ . При  $t' = 1/A(0)$  амплитуды взаимодействующих волн обращаются в бесконечность. Заметим, что амплитуды растут быстрее, чем по экспоненциальному закону, так как обращаются в бесконечность за конечное время, — это так называемая взрывная неустойчивость [7]. Явление взрывной неустойчивости проявляется, в частности, в средах, где диссипативная нелинейность квадратична ( $\sim E^2$ ).

2. Рассмотрим случай неточного синхронизма, т. е.  $\Delta\omega \neq 0$ . При тех же предположениях мы получим вместо (17.32)

$$\dot{A} = A^2 \cos \Phi, \quad \dot{\Phi} = -2A \sin \Phi + \Delta\omega.$$

Отсюда  $d(A^2 \sin \Phi)/dt = \Delta\omega dA/dt$  или  $\sin \Phi = (\Delta\omega A + \text{const})/A^2$  — уравнения интегральных кривых на фазовом цилиндре (рис. 17.7в). Состояние равновесия здесь уже одно:  $\Phi_0 = \pi/2$  (т. е.  $\cos \Phi_0 = 0$ ) и  $A_0 = \Delta\omega/3$ . Фазы тоже синхронизируются, и амплитуды стремятся к бесконечности, т. е. по-прежнему существует взрывная неустойчивость. Таким образом, линейная расстройка не в состоянии стабилизировать взрывную неустойчивость.

Взрывная неустойчивость, проявляющаяся в одновременном нарастании амплитуд всех резонансно связанных волн возможна и в среде без диссипации, если среда неравновесна [7, 10]. Примером может служить взаимодействие волн разных знаков энергий (см. гл. 10) в системе плазма–электронный поток. Если отрицательной энергией обладает волна, которая распадается ( $\omega_3$ ), либо пара низкочастотных волн ( $\omega_{1,2}$ ), то в правых частях уравнений для  $\dot{a}_{1,2,3}$  будут одинаковые знаки, и вместо (17.9) мы вновь приходим к уравнениям вида (17.31). Поскольку волны отрицательной энергии, отдавая энергию другим волнам (и увеличивая их амплитуды), нарастают по амплитуде и сами, становится понятным одновременный рост всех взаимодействующих волн, наблюдаемый при взрывной неустойчивости [11].

## ГЛАВА 18

# Простые волны и образование разрывов

### 18.1. Кинематические волны

Для нелинейных систем с сосредоточенными параметрами основной моделью, как мы видели, является нелинейный осциллятор, описываемый уравнением  $\ddot{x} + f(x) = 0$  (см. гл. 13). Решение этого уравнения для многих задач служит основой, на которой можно строить приближенные решения при учете возмущающих факторов — внешних воздействий, положительной или отрицательной диссипации (см. гл. 15–17), нестационарности параметров и т. д. В теории нелинейных волн таких основных моделей несколько. Прежде всего это модель так называемого одноволнового приближения — уравнение

$$\partial u / \partial t + V(u) \partial u / \partial x = 0, \quad (18.1)$$

описывающее плоскую бегущую волну в нелинейной среде без диссипации и дисперсии; уравнение Бюргера для сред с затуханием:

$$\partial u / \partial t + V(u) \partial u / \partial x - \alpha \partial^2 u / \partial x^2 = 0; \quad (18.2)$$

обобщенные уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ) для бегущей волны в среде с дисперсией в области высоких частот:

$$\partial u / \partial t + V(u) \partial u / \partial x + \beta \partial^3 u / \partial x^3 = 0. \quad (18.3)$$

Среди моделей, в которых учитывается взаимодействие встречных волн, одной из наиболее распространенных служит модель, описываемая уравнением Клейна–Гордона (для сред с дисперсией в области низких частот):

$$\partial^2 u / \partial t^2 - V^2 \partial^2 u / \partial x^2 + \mathcal{F}(u) = 0. \quad (18.4)$$

В этой и последующих главах мы обсудим задачи, приводящие к этим моделям, явления и эффекты, которые ими описываются [1–6, 14–16].

Прежде чем переходить собственно к волнам в сплошной среде, рассмотрим одну простую модель, хорошо известную в электронике. Пусть вдоль оси  $x$  движется пучок невзаимодействующих частиц так, что в эйлеровых переменных их скорость удовлетворяет уравнению

$$\partial v / \partial t = \partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = 0. \quad (18.5)$$

В электронике уравнение (18.5) описывает в рамках так называемой кинематической теории поведение электронного потока в трубе дрейфа приборов клистронного типа (простейший пролетный двухрезонаторный клистрон обсуждался нами качественно в гл. 1). Различие в скоростях электронов приводит в трубе дрейфа к образованию электронных уплотнений — группированию электронного потока. Внешнее уравнение (18.5) очень похоже на уравнение простой волны, хотя, конечно, пучок невзаимодействующих частиц не является нелинейной средой.

Рассмотрим вначале волны малой амплитуды, когда  $v = v_0 + v'$ ,  $v' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$  ( $v_0 \gg v'$ ). Из (18.5) в этом приближении находим, что  $\partial v' / \partial t + v_0 \partial v' / \partial x = 0$ , и, следовательно,  $\omega = v_0 k$  ( $v_0 = \text{const}$ ), т. е. в линейном случае в системе дисперсии нет. Пусть теперь в момент времени  $t = 0$  пучок оказывается возмущенным по скорости по закону  $a \sin kx$ . Перейдем в движущуюся со скоростью  $v_0$  систему координат и рассмотрим эволюцию начального возмущения. Введем  $x = x_{\text{ст}} - v_0 t$  и  $v = v_0 + u$ . Опуская индекс, в этой системе получим  $\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = 0$ . Решение этого нелинейного уравнения имеет вид так называемой простой волны  $u = U(t - x/u)$ , где выражение для  $U$  определяется начальным возмущением. При распространении такой волны в нелинейной среде ее профиль меняется со временем, поскольку разные точки на профиле волны бегут с различной скоростью. В случае пучка это есть следствие того, что частицы смещаются друг относительно друга из-за разных скоростей, причем одни частицы могут обогнать другие; в результате функция  $u(x, t)$  станет неоднозначной [7]. Проследим за пучком на фазовой плоскости  $ux$ , на которой каждая точка смещается со своей собственной скоростью. Верхней полуоси ( $u > 0$ ) соответствует движение вправо, а нижний ( $u < 0$ ) — влево, причем скорость каждой точки пропорциональна ее удалению от оси  $x$ . Рисунок 18.1 иллюстрирует процесс эволюции пучка на фазовой плоскости  $ux$ . Начальное состояние пучка — синусоида  $a \sin kx$  на плоскости  $ux$ ; здесь же штриховой линией показана зависимость плотности объемного заряда пучка от  $x$  (рис. 18.1а). С течением времени происходит искажение профиля волны: частицы с  $u > 0$  уходят вперед,

а с  $u < 0$  отстают от волны. Одновременно образуются сгущения частиц вблизи точек 1 и 2, где  $u = 0$ , и происходит группирование пучка (рис. 18.1б). Волна постепенно становится все круче, и в конце концов производная  $du/dx$  на ее переднем фронте обращается в бесконечность (в бесконечность обращается в этой точке и плотность  $\rho(x)$  объемного заряда пучка). В следующий момент происходит опрокидывание волны, и функция  $u(x, t)$  перестает быть однозначной (рис. 18.1в, г): у нее появляется точка поворота, т. е. образуются встречные пучки. После опрокидывания волны функция  $\rho(x)$  имеет удвоенное число особенностей (рис. 18.1в, г). С дальнейшим увеличением времени  $t$  структура потока еще более усложняется, возникает многопоточность, однако мы на этом останавливаться не будем [2, 4].

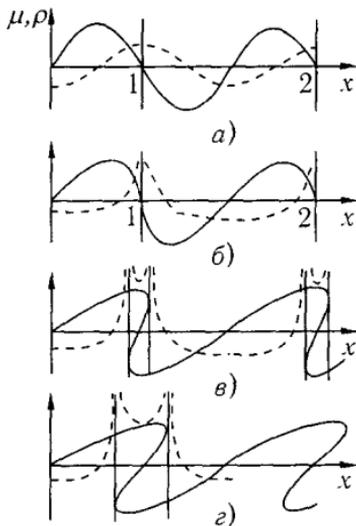


Рис. 18.1. Эволюция во времени синусоидального возмущения в пучке невзаимодействующих частиц (скорость  $u$  — сплошные кривые, плотность  $\rho$  — штриховые кривые): а — начальное состояние пучка, соответствующее начальному возмущению скорости; б — образование электронных уплотнений — группирование частиц вблизи точек 1 и 2; в, г — опрокидывание «волны» скорости и образование удвоенного числа особенностей на кривой  $\rho = \rho(x)$

текущая переменная интегрирования. Сгруппированный ток можно найти из закона сохранения заряда,  $I(0, t_0)dt_0 = I(x, t)dt$ , в котором  $dt_0$  — время прохождения группой электронов плоскости  $x = 0$ , а  $dt$  — плоскости  $x$ . Предположим, что действие устройства, создающего модуляцию по скорости перед трубой дрейфа (см. гл. 1), описывается выражением

$$mv^2/2 = mv_0^2/2 + eV_1 \sin \omega t_0,$$

В сверхвысокочастотной электронике для описания процесса группирования электронов в пространстве дрейфа отказываются от переменных Эйлера  $(x, t)$  и переходят к переменным Лагранжа  $(t, t_0)$  или  $(x, t_0)$ , где  $t_0$  — начальный момент влета электрона в трубу дрейфа. В рамках кинематического подхода время пребывания электронов в пространстве группирования (трубе дрейфа) определяется как  $t - t_0 = \int_0^l dx/v(x, t)$ , где  $l$  — длина дрейфа,  $x$  —

где  $v$  — скорость на входе в трубу дрейфа,  $v_0$  — скорость в отсутствие управляющего ВЧ-воздействия,  $V_1$  — амплитуда ВЧ-напряжения,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона,  $\omega$  — круговая частота гармонического управляющего воздействия. Тогда при  $V_1/V_0 = \xi \ll 1$

$$v = v_0[1 + (1/2)\xi \sin \omega t_0],$$

где  $V_0 = mv_0^2/(2e)$ . Очевидно, что в этом приближении

$$t = t_0 + l/v \approx t_0 + (l/v_0)[1 - (1/2)\xi \sin \omega t_0]$$

или для угла пролета в пространстве дрейфа

$$\omega t - \omega t_0 = \theta = \omega l/v_0 - (\omega l \xi / 2 v_0) \sin \omega t_0.$$

Величина  $\xi \theta_0/2$ , где  $\theta_0 = \omega l/v_0$ , характеризует разницу во времени пребывания различных электронов в трубе дрейфа; ее называют параметром группирования (детали кинематической теории группирования прекрасно изложены в [8]). Наглядное представление о группировании в трубе дрейфа дает так называемая пространственно-временная диаграмма на плоскости  $x, \omega t_0$  (рис. 18.2). Поскольку до пересечения потока с плоскостью модулирующего устройства поток был однородным по скорости и плотности, траектории электронов до этого устройства разделены одинаковыми временными (угловыми) интервалами  $\Delta \omega t_0$  (поток однороден по плотности) и имеют одинаковый наклон (поток однороден по скорости). Воздействие управляющего напряжения приводит к модуляции скорости электронов — периодическому изменению наклона траекторий. Для электронов типа 2 на рис. 18.2 наклон прямой не меняется, поскольку они пересекают плоскость модулятора в тот момент, когда управляющее напряжение равно нулю. Для электронов типа 1, попадающих в тормозящую фазу поля, наклон траекторий уменьшается, для электронов типа 3 — увеличивается (они попадают в ускоряющую фазу поля). За период высокочастотного воздействия траектории сходятся (образуется уплотнение частиц) или расходятся (образуется разрежение частиц), что и иллюстрирует процесс группирования. Иногда вместо группирования говорят о фазовой фокусировке по аналогии с фокусировкой пучка световых лучей в геометрической оптике. Если воспользоваться законом сохранения заряда и выражением для времени пролета  $t - t_0$ , то  $dt/dt_0 = 1 - (\theta_0 \xi / 2) \cos \omega t_0$  и сгруппированный ток

$$I = I(0, t_0)/[1 - (\theta_0 \xi / 2) \cos \omega t_0].$$

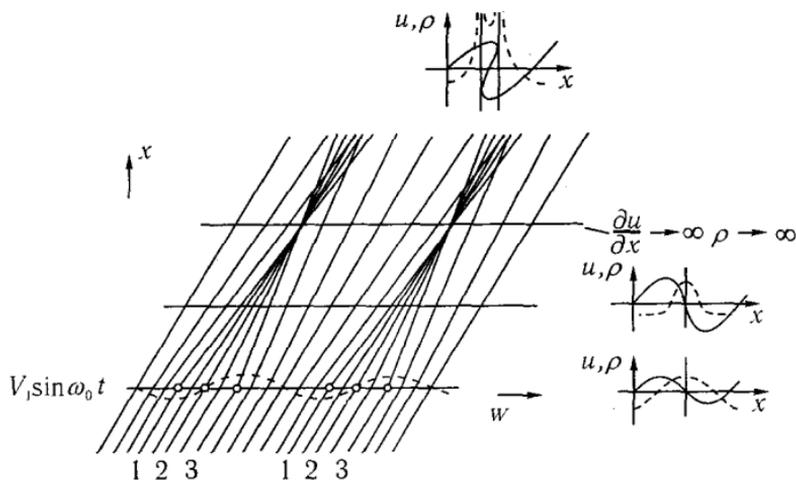


Рис. 18.2. Пространственно-временная диаграмма группирования электронов в пространстве дрейфа: 1 — электрон, который тормозится полем; 2 — электрон, не испытывающий воздействия со стороны поля; 3 — электрон, который ускоряется полем; рисунки справа показывают соответствие «волнового» (рис. 18.1) и корпускулярного подходов к описанию процесса группирования

Заметим, что, хотя мы и полагали  $\xi \ll 1$ , параметр группирования  $X = \theta_0 \xi / 2$  может быть и не малым, поскольку  $\theta_0$  принимает любые значения. Поведение сгруппированного тока в зависимости от  $\omega t_0$  и от параметра  $X$ , пропорционального длине  $l$  трубы дрейфа, иллюстрирует рис. 18.3, взятый из [8]. Из сравнения зависимостей плотности от координаты на рис. 18.1 и зависимостей на рис. 18.3 легко установить соответствие «волнового» и «корпускулярного» подходов к описанию процесса группирования. Условия  $\partial u / \partial x \rightarrow \infty$  и  $\rho \rightarrow \infty$  в «волновой» картине соответствуют  $X = 1$  и  $I \rightarrow \infty$  в «корпускулярной». Из последнего условия  $X = \omega l_0 \xi / (2v_0) = 1$  находим, что фазовый фокус — уплотнение бесконечно большой величины — образуется на расстоянии  $l_0 = 2v_0 / (\xi \omega)$ . Траектории таких фокусов представлены на рис. 18.3е.

## 18.2. Бегущие волны в нелинейной среде без дисперсии

Отсутствие дисперсии означает, что различные физические переменные при волновом движении среды мгновенно следят за изменениями друг друга, т. е. какие-либо независимые пространственно-временные масштабы (времена релаксации, периодичность структуры

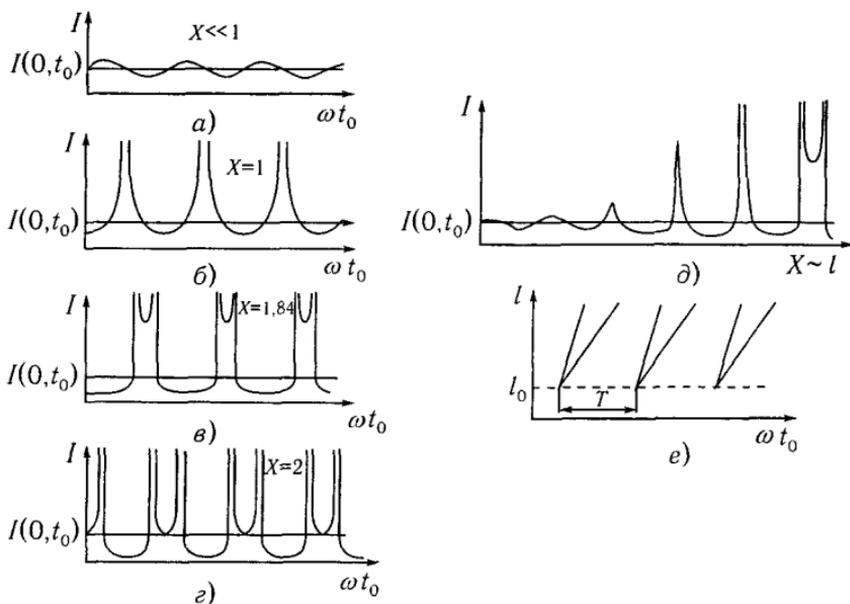


Рис. 18.3. Зависимость тока сгруппированного в пространстве дрейфа пучка от начальной фазы влета электронов и от длины дрейфа (а-г) и траектории фазового фокуса, который образуется в плоскости  $l_0 = 2v_0/(\xi\omega)$  (е)

и т. д.) в среде отсутствуют. В частности, для электромагнитных волн это возможно лишь в случае, когда материальные уравнения выражают функциональную зависимость между поляризацией и полем, т. е. связь между этими физическими величинами локальна во времени и пространстве. Такая локальность связи приводит к тому, что фазовая скорость малых синусоидальных возмущений не зависит от их частоты или волнового числа.

В линейных средах без дисперсии (см. гл. 4), как известно, возможно распространение без искажения и с постоянной скоростью волн произвольной формы, причем каждая из компонент поля в волне удовлетворяет одному и тому же уравнению  $\partial u_j / \partial t + V_s \partial u_j / \partial x = 0$ , а различные физические переменные (компоненты  $u_j$ ) изменяются пропорционально друг другу:  $u_k \sim u_j(x - V_s t)$ . Ясно, что в нелинейной среде волны такого вида, вообще говоря, существовать не могут, поскольку возникшие даже при малой нелинейности возмущения будут накапливаться и приведут к непрерывной деформации профиля волны. Однако ввиду отсутствия дисперсии одно из свойств упомянутых бегущих волн, по-видимому, должно сохраниться и в нелинейной среде, а имен-

но различные переменные в волне могут быть связаны друг с другом алгебраически (т. е. локально). Легко убедиться, что такие решения действительно существуют в нелинейных средах без дисперсии. Их и называют простыми волнами.

Поскольку все компоненты поля в простой волне выражаются алгебраически друг через друга, вместо исходной системы уравнений для ее описания можно получить одно уравнение первого порядка относительно какой-либо из компонент. Это уравнение должно описывать бегущую волну, скорость которой зависит от амплитуды поля, т. е.

$$u_j = u_j[x - V_s(u_j)t]. \quad (18.6)$$

Очевидно, что решение (18.6) удовлетворяет написанному выше уравнению (18.1), которое и есть уравнение простой волны. Из-за зависимости скорости волны от амплитуды, как мы видели на примере, малые возмущения на разных точках профиля распространяются с разными скоростями, что и приводит к изменению формы волны. Естественно, что (18.1) описывает простые волны любой физической природы, т. е. в этом смысле является универсальным.

Во многих случаях как с точки зрения математического описания, так и с точки зрения физического понимания механизма нелинейных процессов эволюцию нелинейных волн удобно рассматривать как взаимодействие отдельных квазигармонических волн. Обсудим на основании такого спектрального подхода основные феномены нелинейного процесса распространения волн в среде без дисперсии — деформацию простой волны и возникновение разрыва.

При сильной нелинейности говорить о взаимодействии отдельных гармоник не имеет смысла: их время жизни порядка времени взаимодействия и порядка периода; поэтому будем считать нелинейность малой. Тогда поле в среде можно описать системой уравнений вида

$$Au_t + Bu_x = \mu f(u, u_x, u_t), \quad (18.7)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы,  $u$  — вектор, состоящий из компонент поля, а  $f$  — вектор-функция, содержащая нелинейные (в общем случае и дисперсные, и диссипативные) члены.

Предположим, что вначале (при  $t = 0$ ) мы создали в среде периодическое возмущение  $U_0 \exp(-ikx) + \text{к. с.} = U(x, 0)$ . Тогда при  $t > 0$  и  $\mu = 0$  возмущение приняло бы вид бегущей волны:

$$U(x, t) = U_0 \exp(i\omega t - ikx) + \text{к. с.} \quad (18.8)$$

с частотой  $\omega = V_s(k)k$ , определяемой дисперсионным уравнением среды  $D(\omega, k) = \text{Det}(A\omega - Bk) = 0$ . Мы здесь для простоты рассуждений считаем, что данному действительному  $k$  соответствует лишь одно действительное решение дисперсионного уравнения относительно  $\omega$  (остальные нормальные волны сильно затухают — им соответствуют комплексные корни  $\omega(k)$ ).

При малой нелинейности естественно попытаться искать решение системы (18.7) при указанных начальных условиях в виде, близком к бегущей синусоидальной волне, т. е.

$$u(x, t) = U_0 \exp(i\omega t - ikx) + \mu w(x, t) + \text{к. с.}, \quad (18.9)$$

где  $w(x, 0) = 0$ . Пусть  $f(u, u_x, u_t)$  — полином по  $u, u_x, u_t$ . Тогда, отыскивая поправку  $w(x, t)$  по теории возмущений, получаем для амплитуд составляющих ее гармоник

$$W_j^{(m)} = \sum_{l=1}^n \frac{\Delta_{lj}(m\omega, mk)}{D(m\omega, mk)} F_l^{(m)}. \quad (18.10)$$

Здесь  $W_j^{(m)}$  —  $j$ -я компонента  $m$ -й гармоники вектор-функции  $w(x, t)$ ;  $F_l^{(m)}$  —  $l$ -я компонента  $m$ -й гармоники вектор-функции  $f(U, U_x, U_t)$ ;  $D$  — определитель матрицы  $|Am\omega - Bmk|$  — полином, стоящий в левой части дисперсионного уравнения, а  $\Delta_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  этой матрицы.

Если дисперсия в среде отсутствует, то фазовые скорости всех гармоник совпадают и  $m$ -я гармоника основной волны, которую здесь можно считать внешним полем, попадает в резонанс с собственной волной среды, т. е. удовлетворяет дисперсионному уравнению  $D(m\omega, mk) = 0$ . При этом функция  $w(x, t)$  оказывается секулярной: вблизи резонанса решение имеет вид биений:

$$w(x, t) \sim \frac{1}{D'_\omega \Omega} \sin \Omega t \cdot \sin(\omega t - kx),$$

а при стремлении разностной частоты  $\Omega = \omega(mk)$  к нулю (точный резонанс) линейно нарастает:

$$w(x, t) \sim \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} t \sin(\omega t - kx) \rightarrow t \sin(\omega t - kx).$$

Таким образом, при отсутствии дисперсии в нелинейной среде амплитуды всех гармоник основной волны непрерывно растут и решение,

близкое к синусоидальной волне (18.9), быстро становится несправедливым. Причем нарастающие гармоники принимают участие в нелинейном взаимодействии и порождают новые комбинационные волны. Из-за отсутствия дисперсии эти волны оказываются резонансными и их амплитуда увеличивается, в результате рождаются новые гармоники. Число взаимодействующих синусоид при этом лавинообразно увеличивается, и спектр волны непрерывно расширяется. Подчеркнем, что из-за бесконечного числа резонансов подобное расширение спектра приводит к непрерывному уменьшению энергии, запасенной вначале в произвольном, ограниченном сверх спектральном интервале. Процесс рассеяния этой энергии на вновь возникающих гармониках с уходящими в бесконечность частотами как раз и соответствует непрерывному увеличению крутизны профиля распространяющейся волны и образованию области бесконечно быстрого изменения полей — разрыва.

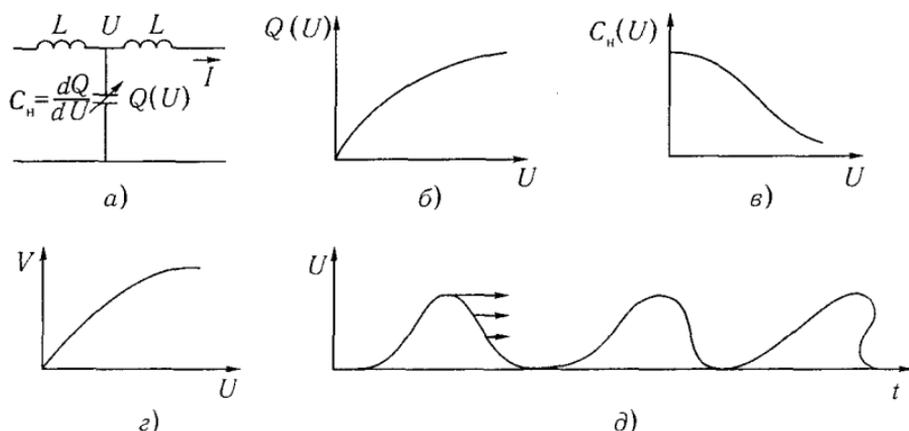


Рис. 18.4. Схема линии передачи с нелинейной емкостью (а); характеристики «среды» — модели (б-г) и изменение профиля волны при распространении в такой линии (д)

Получим уравнение простой волны для линии передач с нелинейной емкостью (рис. 18.4а). Исходные уравнения имеют вид

$$\partial I / \partial x = -\partial Q(U) / \partial t, \quad \partial U / \partial x = -L \partial I / \partial t. \quad (18.11)$$

На рис. 18.4б приведена типичная зависимость заряда на конденсаторе от напряжения. Будем искать решение в виде простой волны, т. е. считать, что  $I = I(U)$ . Тогда, вводя нелинейную емкость  $C_n = dQ/dU$ ,

имеем

$$C_n(U) \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dI}{dU} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad L \frac{dI}{dU} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Эти два уравнения для одной переменной; следовательно, коэффициенты при производных должны совпадать, т. е.  $LdI/dU = C_n(U)/(dI/dU)$  или  $(dI/dU)^2 = C_n(U)/L$  — аналог волновой проводимости. Отсюда  $I(U) = \pm \int [C_n(U)/L]^{1/2} dU$ , знаки плюс и минус относятся соответственно к волнам, бегущим вправо и влево. Итак, для волн, распространяющихся вправо, мы получим уравнение

$$\partial U / \partial t + (LC_n(U))^{-1/2} \partial U / \partial x = 0. \quad (18.12)$$

Это и есть искомое уравнение простой волны, где  $(LC_n(U))^{-1/2} = V(U)$  — ее скорость. Этому уравнению удовлетворяет решение  $U = U[x - V(U)t]$ . Если  $C_n(U)$  — монотонно убывающая функция, то  $V(U)$  — монотонно нарастает (рис. 18.4в, г). Таким образом, в простой волне точки, расположенные у вершины профиля волны, будут двигаться быстрее, чем точки у ее основания (это показано стрелками на рис. 18.4д). Задний фронт волны будет растягиваться, а передний — становиться круче, и в некоторый момент в результате набега вершины зависимость  $U$  от  $x, t$  становится неоднозначной — происходит опрокидывание (рис. 18.4д). Такая неоднозначность для электрического поля, естественно, лишена физического смысла, и далее решение в виде простой волны просто неприменимо. Заметим, что возникновение области бесконечно быстрого изменения физических величин во времени и пространстве есть результат пренебрежения дисперсией и диссипацией в исследуемой среде.

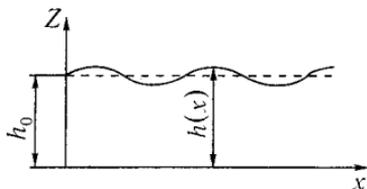


Рис. 18.5. Волновое возмущение в слое жидкости над твердым дном

Приведем несколько примеров распространения простых волн в сплошных средах, опираясь на соответствующие линейные задачи гл. 5. Начнем с анализа распространения волн в слое жидкости над твердым дном со средней высотой  $h_0$  (рис. 18.5). Рассмотрим гравитационные

волны с длиной волны  $\lambda \gg h_0$  (это — условие малой глубины), распространяющиеся в положительном направлении оси  $x$ . Поскольку волны длинные, горизонтальную скорость  $V$  для всех высот (глубин) можно считать одинаковой и не зависящей от  $z$ . Тогда для  $V$  можно записать уравнение Эйлера в виде

$$\partial V/\partial t + V\partial V/\partial x + \rho^{-1}\partial p/\partial x = 0. \quad (18.13)$$

Давление  $p$  здесь следует понимать в смысле его среднего значения по высоте. Оно больше там, где выше жидкость, на величину  $(h - h_0)\rho g$  по сравнению с давлением в невозмущенном слое. Таким образом,  $\rho^{-1}\partial p/\partial x = g\partial h/\partial x$ . В силу малой глубины канала можно не учитывать зависимость плотности  $\rho$  от глубины  $z$ , т. е. считать жидкость несжимаемой:  $\rho = \text{const}$ . Для высоты  $h$  надо записать еще уравнение непрерывности

$$\partial h/\partial t + \partial(Vh)/\partial x = 0, \quad (18.14)$$

которое выражает то обстоятельство, что скорость изменения высоты слоя  $\partial h/\partial t$  связана с разностью потоков через бесконечно близкие сечения  $x$  и  $x + \Delta x$ .

Для удобства запишем уравнения (18.13) и (18.14) в виде системы

$$\begin{aligned} \partial V/\partial t + V\partial V/\partial x + g\partial h/\partial x &= 0, \\ \partial h/\partial t + V\partial h/\partial x + h\partial V/\partial x &= 0. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Это система нелинейных уравнений. Линеаризовав ее в окрестности равновесных значений  $V_0$ ,  $h_0$  и получив дисперсионное уравнение  $\omega = k(V_0 \pm \sqrt{gh_0})$ , легко убедиться, что система не обладает дисперсией. На этом основании можно предположить, что переменные в волне будут связаны функциональной зависимостью, т. е.  $h = h(V)$ . Учитывая это, вместо (18.15) получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} + g\frac{dh}{dV}\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{dh}{dV}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x}\right) + h\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Откуда следует, что  $V + g\,dh/dV = V + h/(dh/dV)$ , или  $dh/dV = \pm\sqrt{h/g}$ . Таким образом, вместо двух уравнений системы (18.15) получили одно:

$$\partial V/\partial t + (V \pm \sqrt{gh})\partial V/\partial x = 0. \quad (18.16)$$

Из (18.16) находим, что скорость  $u = V \pm \sqrt{gh}$  зависит от высоты точки на профиле волны. Совершенно аналогично получается уравнение,

описывающее распространение звуковой волны в газе [9]. Исходными в этом случае являются уравнение Эйлера

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} + \rho^{-1} \text{ grad } p = 0$$

и уравнение неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

которые в одномерном случае и с учетом того, что  $dp/d\rho = c_{зв}^2$  ( $c_{зв}$  — скорость звука), переходят в систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_{зв}^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0. \quad (18.17)$$

Умножая первое уравнение из системы (18.17) на  $d\rho/du$  и вычитая полученное уравнение из второго уравнения системы, находим, что  $c_{зв} d\rho/du = \pm \rho$ . С учетом последнего из (18.17) имеем

$$\partial u / \partial t + (u \pm c_{зв}) \partial u / \partial x = 0. \quad (18.18)$$

Легко видеть, что (18.18) совпадает с (18.5), если перейти в систему координат, движущуюся со скоростью звука.

Уравнение, аналогичное (18.18), получается и для длинноволновых возмущений типа ионного звука в плазме с горячими электронами, если из-за большой электро- и теплопроводности считать электронную температуру плазмы постоянной. Тогда из уравнений (5.90)–(5.92) получаем следующие уравнения для распространения волн в такой плазме:

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x + c_{зв}^2 n^{-1} \partial n / \partial x = 0, \quad \partial n / \partial x + \partial(nv) / \partial x = 0,$$

где  $c_{зв} = \sqrt{k_B T_e / m_i}$ . Проводя выкладки, аналогичные сделанным выше, приходим к уравнению (18.18) с переменной  $v$  вместо  $u$ .

Уравнения (18.16) и (18.18) суть уравнения простой волны, а их решения — простые, или римановы, волны. Эти волны называют простыми именно потому, что они вместо системы уравнений описываются одним уравнением первого порядка.

Найдем уравнения простых волн в общем виде. Пусть вектор-функция  $U$ , характеризующая некоторую среду, удовлетворяет уравнению

$$A(U)U_t + B(U)U_x = 0, \quad (18.19)$$

где  $A(U)$  и  $B(U)$  — квадратные матрицы. Будем считать, что система (18.19) гиперболическая. В скалярной форме ее можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n \left[ a_{ij}(U) \frac{\partial U_j}{\partial t} + b_{ij}(U) \frac{\partial U_j}{\partial x} \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Полагая  $U_j = U_j(U_k)$ , получим

$$\sum_{j=1}^n \frac{dU_j}{dU_k} \left[ a_{ij}(U_k) \frac{\partial U_k}{\partial t} + b_{ij}(U_k) \frac{\partial U_k}{\partial x} \right] = 0.$$

Это система линейных уравнений относительно переменных  $dU_j/dU_k$ . Для существования нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \| a_{ij}V(U_k) + b_{ij} \| = 0,$$

где  $V(U_k) = (\partial U_k/\partial t)/(\partial U_k/\partial x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Из получившихся  $n$  уравнений находятся в общем случае  $n$  различных значений  $V_i(u_k)$ , соответствующих  $n$  разным простым волнам.

### 18.3. Определение координат разрыва

Определим координаты разрыва, возникающего в результате эволюции простой волны, на примере волн в автомобильном потоке [6].

Будем считать, что движение однорядное, а светофоры отсутствуют. Обозначим через  $q$  поток машин, равный числу автомобилей, проходящих через данную точку шоссе в единицу времени, а через  $\rho$  плотность (концентрацию) машин, равную числу автомобилей на единицу длины. Если общее число машин на трассе сохраняется (нет источников и стоков), то  $\partial \rho/\partial t + \partial q/\partial x = 0$ ,  $q = q(\rho)$ , или

$$\partial \rho/\partial t + u(\rho)\partial \rho/\partial x = 0, \quad u(\rho) = dq/d\rho. \quad (18.20)$$

Это уравнение простой волны, решения которого часто называют кинематическими волнами. Характер зависимости потока машин от их плотности изображен на рис. 18.6а. Вначале поток растет вместе с ростом числа машин на единицу длины, а затем, достигнув максимума, начинает падать и обращается в нуль при очень большой концентрации (машины упираются бамперами друг и друга и останавливаются). Как показывают наблюдения, для однорядного движения без светофоров  $\rho^* = 140 \text{ км}^{-1}$ ,  $\rho_m = 50 \text{ км}^{-1}$ , а максимальный поток  $q_m \sim 1500 \text{ ч}^{-1}$ ,

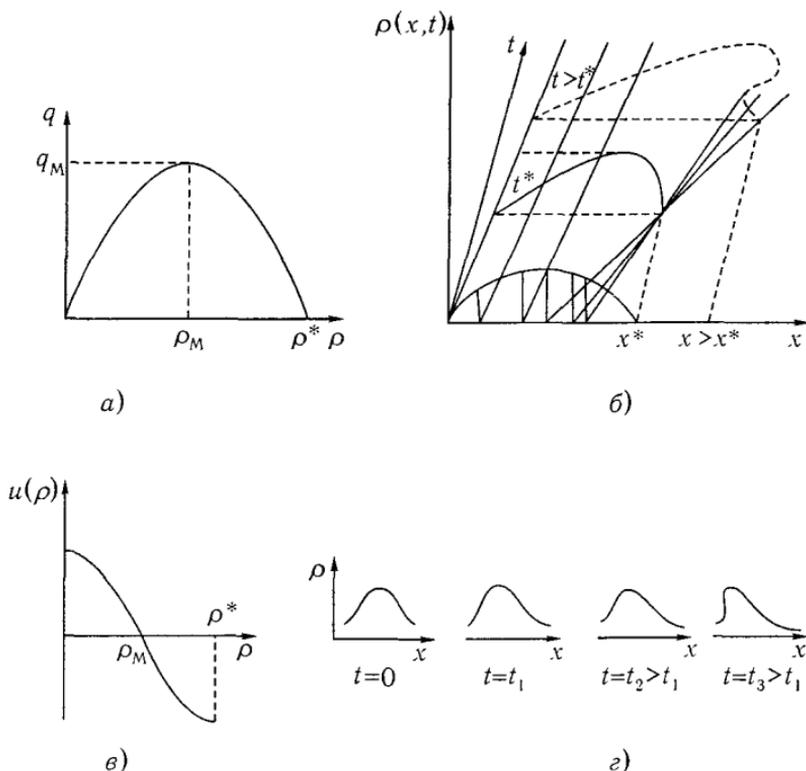


Рис. 18.6. Распространение волн в потоке: а — зависимость потока машин от их плотности; б — возникновение разрыва в профиле волны при  $du/d\rho = 0$ ; в — зависимость скорости распространения возмущений от плотности машин; г — образование разрыва на заднем фронте импульса из группы машин

причем достигается столь большой поток при довольно маленькой скорости, равной приблизительно 30 км/ч. Если в потоке машин возникнет возмущение плотности (например, кто-то затормозил), то оно будет распространяться со скоростью  $u(\rho) = dq/d\rho$  (скорость потока  $q/\rho = V$ ). Решение уравнения (18.20) отыскивается в виде

$$\rho(x, t) = \rho[x - u(\rho)t],$$

или, если записать через обратную функцию,

$$x - u(\rho)t = \Psi(\rho). \quad (18.21)$$

При такой форме записи легко найти решение: каждая точка профиля волны будет двигаться по прямой на плоскости  $xt$  (рис. 18.6б) со своей

скоростью  $u(\rho)$ . Эти прямые называются характеристиками (см. гл. 7). Точка пересечения характеристик соответствует возникновению разрыва в профиле волны, где  $\partial\rho/\partial x$ ,  $\partial\rho/\partial t$ ,  $\partial^2\rho/\partial x^2$ ,  $\partial^2\rho/\partial t^2 \rightarrow \infty$  (так как это точка перегиба). Координаты разрыва (момент времени  $t^*$ , значение  $x^*$ , при которых образуется разрыв, и величину  $\rho^*$  в точке перегиба) легко найти, воспользовавшись соотношением (18.21). Пусть нам задано  $\rho(x)$  при  $t = 0$ . Дифференцируя (18.21) по координате, имеем

$$1 - \frac{du}{d\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} t = \frac{d\Psi}{d\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x}. \quad (18.22)$$

При  $t = 0$  величина  $d\Psi/d\rho = (\partial\rho/\partial x)_{t=0}^{-1}$  характеризует начальный профиль плотности. Так как функция  $\Psi$  от  $t$  не зависит, то с течением времени она меняться не будет. С учетом последнего соотношения уравнение (18.22) примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_{t=0} \left[1 + t \frac{du}{d\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_{t=0}\right]^{-1}.$$

Таким образом, разрыв при  $t > 0$  образуется на переднем фронте волны  $(\partial\rho/\partial x)_{t=0} < 0$ , если  $du/d\rho > 0$ , и на заднем фронте  $(\partial\rho/\partial x)_{t=0} > 0$ , если  $du/d\rho < 0$ . Поскольку в случае автомобильного потока  $u(\rho)$  функция монотонно убывающая (рис. 18.6в), разрыв (резкая концентрация машин) стремится образоваться на заднем фронте импульса из группы машин (рис. 18.6г). Заметим, что там, где  $u(\rho) > 0$ , волна бежит в ту же сторону, что и поток машин, при  $u(\rho) < 0$  — в противоположную. Машины (они движутся быстрее, чем волна) догоняют скачок уплотнения и увеличивают его (чтобы не «уплотнять» затор, шофер должен резко тормозить в переходной области и затем постепенно увеличивать скорость, убегая от затора).

Возвращаясь к задаче об определении координат разрыва, запишем систему уравнений, решением которой они являются. Так как на разрыве  $\partial x/\partial\rho$  и  $\partial^2 x/\partial\rho^2$ , то, дифференцируя с учетом этого (18.21) по  $\rho$  при постоянном  $t$ , получаем

$$-(du/d\rho)|_{\rho=\rho^*} t^* = \Psi'_\rho(\rho^*), \quad -(d^2u/d\rho^2)|_{\rho=\rho^*} t^* = \Psi''_\rho(\rho^*).$$

Добавив сюда уравнение (18.21) в точке разрыва:

$$x^* - u(\rho^*)t^* = \Psi(\rho^*),$$

будем иметь систему трех уравнений, из которой можно найти неизвестные величины  $x^*$ ,  $t^*$ ,  $\rho^*$ .

В случае задачи с граничными условиями (при  $t = 0$  задана форма волны на границе) координаты разрыва находятся из условий  $\partial t / \partial \rho = 0$  и  $\partial^2 t / \partial^2 \rho = 0$  аналогично предыдущему.

Итак, в линейной среде без дисперсии любая бегущая волна является стационарной, т. е. при распространении форма ее не меняется. Причем все физические переменные в такой волне связаны алгебраически. В то же время даже в слабо нелинейной среде при отсутствии дисперсии все гармоники, порождаемые нелинейностью, находятся в резонансе с основной волной — все они распространяются с одинаковыми скоростями. Поэтому, спустя достаточно большое время, даже при очень слабой нелинейности амплитуда их будет нарастать, что приведет к существенному изменению профиля волны, т. е. в нелинейных средах без дисперсии стационарных волн быть не должно. На спектральном языке сказанное означает, что спектр исходного возмущения будет непрерывно расширяться вправо. В результате в спектре волны появляются бесконечно высокие частоты, что и соответствует возникновению бесконечно быстрых перепадов на фронте волны.

## 18.4. Слабые ударные волны. Граничные условия на разрыве

После образования разрыва или ударной волны (см. гл. 19) уравнением (18.1) или (18.20) для описания процесса распространения волны в нелинейной среде без дисперсии пользоваться же, вообще говоря, нельзя. Однако если разрыв занимает очень узкую область в пространстве, то, поскольку вне области разрыва решения гладкие, естественно попытаться сохранить для описания эволюции волны уравнение (18.1), исключив из рассмотрения область разрыва, заменяя ее подходящими граничными условиями. По идее этот подход аналогичен введению быстрых и медленных движений при анализе релаксационных колебаний (см. гл. 14).

Для получения граничных условий исходные уравнения типа (18.19) следует записать в виде законов сохранения:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_i(u_1, \dots, u_n) = 0. \quad (18.23)$$

Если теперь считать разрыв бесконечно тонким, то его распространение следует характеризовать лишь одной скоростью  $v_p(t)$ . Двигаясь

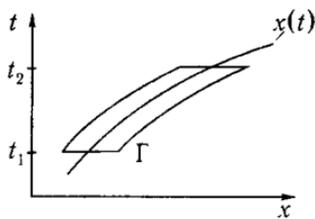


Рис. 18.7. К определению скорости разрыва ( $x(t)$  — траектория разрыва)

со скоростью разрыва, проинтегрируем (18.23) в его малой окрестности по  $x$  и  $t$ :

$$\iint_Q \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_i(u_1, \dots, u_n) \right) dx dt = 0.$$

Воспользовавшись затем формулой Грина, перейдем к интегралу по контуру

$$\int_{\Gamma} (u_i dx - F_i dt) = 0. \quad (18.24)$$

Выбирая контур, как на рис. 18.7, и имея в виду, что разрыв бесконечно тонкий, находим из (18.24)

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ [u_2(t) - u_1(t)] v_p(t) - [F_2(t) - F_1(t)] \} dt = 0. \quad (18.25)$$

Здесь учтено, что разрыв движется по траектории, задаваемой уравнением  $dx/dt = v_p(t)$ ; индексы 1 и 2 обозначают физические величины соответственно до и после разрыва. Ввиду произвольности пределов интегрирования в (18.25) необходимо потребовать равенство нулю подинтегрального выражения, т. е. потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta u_i(t) = \Delta F_i(t) / v_p(t). \quad (18.26)$$

Это и есть искомые граничные условия на разрыве.

Если известны изменения физических переменных на разрыве, то из (18.26) можно определить скорость разрыва. Приведем в качестве примера распространение волны в линии передачи с нелинейной емкостью (см. рис. 18.4а) [11]. Соответствующие уравнения (18.11) уже имеют вид законов сохранения. Нам остается их только проинтегрировать вдоль траектории разрыва:

$$I_2 - I_1 = v_p [Q(U_2) - Q(U_1)], \quad U_2 - U_1 = L v_p (I_2 - I_1).$$

Полагая, что «амплитуда» разрыва известна (например, равна амплитуде запущенной в линию начальной волны), найдем скорость распространения разрыва:

$$v_p^2 = (U_2 - U_1) L^{-1} [Q(U_2) - Q(U_1)]^{-1}. \quad (18.27)$$

Аналогично получаются, например, граничные условия на разрыве, появляющиеся при распространении плоской электромагнитной волны в полупространстве, заполненном ферритом с зависимостью магнитной индукции от поля  $B(H)$ , как на рис. 18.8а:

$$E_2 - E_1 = (v_p/c)(B_2 - B_1), \quad H_2 - H_1 = (v_p \epsilon/c)(E_2 - E_1) \quad (18.28)$$

( $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $c$  — скорость света) [10].  
Рекомендуем читателю получить эти выражения самостоятельно.

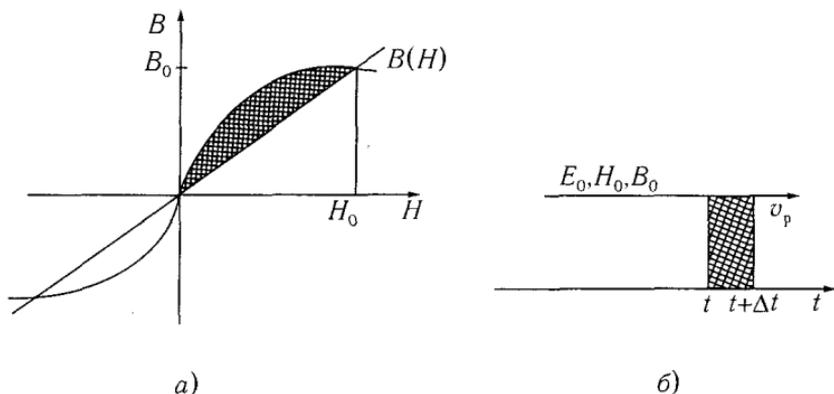


Рис. 18.8. К расчету энергии, диссипируемой на фронте ударной волны: а — нелинейная характеристика среды, соответствующая эволюционному разрыву; б — потери энергии за время  $\Delta t$

Поскольку малые возмущения перед разрывом движутся медленнее разрыва (для определенности мы говорим о ситуации, когда разрыв образуется на переднем фронте волны), т. е. разрыв догоняет и поглощает их, а двигающиеся за разрывом догоняют его (и также исчезают на нем), полная энергия волны с разрывом должна со временем уменьшаться. Другими словами, разрыв может устойчиво существовать, лишь если он диссипирует энергию. Покажем это на уже упоминавшемся примере с плоской электромагнитной волной в нелинейной среде, заполненной ферритом.

Закон сохранения энергии в диэлектрическом объеме запишем в виде  $\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0$ , где  $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ , а  $dW = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B})$ . Без ограничения общности можно считать, что поля перед разрывом равны нулю (рис. 18.8б). Рассмотрим изменение энергии в области разрыва за время  $\Delta t$ . Для этого запишем баланс энергии в заштрихованном объеме

на рис. 18.8б. Запасенная энергия

$$W_3 = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon E_0^2}{2} + \int_0^{B_0} H dB \right) v_p \Delta t,$$

поступившая энергия

$$W_n = (c/4\pi) E_0 H_0 \Delta t = (4\pi)^{-1} H_0 B_0 v_p \Delta t.$$

Мы здесь учли граничное условие на разрыве  $E_0 = (v_p/c) B_0$ . Воспользовавшись соотношениями

$$\int_0^{B_0} H dB = H_0 B_0 - \int_0^{H_0} B dH, \quad \frac{\varepsilon E_0^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{c H_0 v_p}{v_p c} B_0 = \frac{1}{2} H_0 B_0,$$

находим, что

$$W_n - W_3 = \frac{v_p \Delta t}{4\pi} \left( \int_0^{H_0} B dH - \frac{1}{2} H_0 B_0 \right). \quad (18.29)$$

Легко сообразить, что если функция  $B(H)$  (рис. 18.8а) является выпуклой, то эта разность всегда будет положительной. Диссипируемая на разрыве мощность

$$P = \frac{v_p}{4\pi} \left( \int_0^{H_0} B dH - \frac{1}{2} H_0 B_0 \right),$$

или в общем случае

$$\begin{aligned} P &= \frac{v_p}{4\pi} \left[ \int_{H_1}^{H_2} B dH - \frac{1}{2} (H_2 - H_1)(B_2 - B_1) \right] = \\ &= \frac{v_p}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} (H_2 - H_1)(B_2 - B_1) - \int_{B_1}^{B_2} H dB \right]. \end{aligned}$$

В принципе можно построить и такое разрывное решение исходных нелинейных уравнений, на котором диссипации энергии происходить не будет, но тогда, как сравнительно просто показать, разрыв будет неустойчивым [12, 13]. Все разрывы, возникшие в результате опрокидывания простой волны (математики их называют эволюционными), устойчивы, и на них диссипация энергии положительна.

## ГЛАВА 19

# Стационарные ударные волны и солитоны

### 19.1. Структура разрыва

Что будет после того, как на профиле простой волны возникнут бесконечные градиенты? В разных физических ситуациях ответ различен. Например, если это волна на поверхности жидкости, то она просто обрушится, превратившись в брызги; если это поток невзаимодействующих частиц, то в профиле волны возможна неоднозначность — после образования «разрыва» в основном потоке образуется несколько разных потоков, движущихся с существенно разными скоростями (многопотоковость). Для звукового же или электромагнитного поля, где неоднозначность недопустима, дальнейшее развитие нелинейной волны зависит от того, какие эффекты будут преобладать в области быстрого изменения поля — диссипативные или дисперсионные. Анализом бегущих волн в нелинейных средах с диссипацией и дисперсией мы сейчас и займемся.

Когда диссипативные, нелинейные и дисперсионные добавки в исходных уравнениях, описывающих распространение волн, одного порядка величины и малы по сравнению с линейными членами, нетрудно, воспользовавшись методом возмущений, получить уравнение одноволнового приближения

$$\partial u / \partial t + v(u) \partial u / \partial x + \beta \partial^3 u / \partial x^3 - \nu \partial^2 u / \partial x^2 = 0. \quad (19.1)$$

Частными случаями этого уравнения являются уравнения Кортевега-де Вриза (при  $\nu = 0$ ) и Бюргерса (при  $\beta = 0$ ) — канонические уравнения теории нелинейных волн (см. гл. 18). Многие результаты этой главы будут получены именно для уравнения (19.1).

Начнем с рассмотрения «среды»-модели линии передачи типа изображенной на рис. 18.4а, но с добавлением в нее элементов, позволяющих учесть дисперсию ( $\mu L_1$ ) и диссипацию ( $\mu R$ ). Получившаяся эквивалентная схема приведена на рис. 19.1. Исходными служат теле

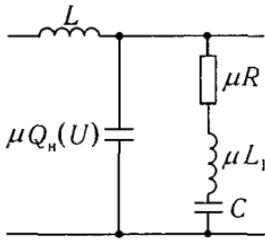


Рис. 19.1. Эквивалентная схема линии передачи — модель нелинейной среды с диссипацией и дисперсии

графные уравнения

$$\partial I / \partial x = -\partial Q / \partial t - \mu C_n \partial U / \partial t,$$

$$C_n = dQ_n / dU, \quad \partial U / \partial x = -L \partial I / \partial t,$$

$$Q / C + \mu R \partial Q / \partial t + \mu L_1 \partial^2 Q / \partial t^2 = U.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\partial Q / \partial t = C \partial U / \partial t - \mu (RC \partial^2 Q / \partial t^2 + L_1 C \partial^3 Q / \partial t^3)$$

и, предположив далее, что  $\mu \ll 1$ , воспользуемся этим. При  $\mu \rightarrow 0$   $\partial Q / \partial t = C \partial U / \partial t$ , т. е. при  $\mu \ll 1$  можно в скобках заменить  $\partial Q / \partial t$  нулевым приближением; в итоге получим

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - \mu C \left[ \frac{C_n(U)}{C} \frac{\partial U}{\partial t} - RC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L_1 C \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right], \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}.$$

При  $\mu \ll 1$  будем искать решение в виде волны, в которой  $U$  и  $I$  связаны, как и в линейной среде:  $I = \sqrt{C/LU}$ . Подставив связь  $I = \sqrt{C/LU}$ , для бегущей вправо волны найдем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial U}{\partial x} = -\mu \left[ \frac{C_n(U)}{C} \frac{\partial U}{\partial t} - RC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - L_1 C \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right].$$

Это уравнение обычно записывают в иной форме — в уравнении нулевого приближения, т. е. в уравнении простой волны,  $\partial / \partial t$  заменяют на  $-(1/\sqrt{LC})\partial / \partial x$ , что дает

$$\partial U / \partial t + V_0 \partial U / \partial x + v(U) \partial U / \partial x - \nu \partial^2 U / \partial x^2 + \beta \partial^3 U / \partial x^3 = 0.$$

Наконец, переходя в движущуюся со скоростью  $V_0 = (LC)^{-1/2}$  ( $t_n = t$ ,  $x_n = x - V_0 t$ ) систему координат, находим

$$\partial U / \partial t_n + v(U) \partial U / \partial x_n - \nu \partial^2 U / \partial x_n^2 + \beta \partial^3 U / \partial x_n^3 = 0.$$

В нашем случае  $v(U) = -\mu V_0 C_n(U) / C$ ,  $\nu = \mu V_0 RC$ ,  $\beta = \mu V_0 L_1 C$ . Полученное уравнение совпадает с эталонным уравнением (19.1) одноволнового приближения.

В предыдущей главе мы установили, что в нелинейной среде без диссипации и дисперсии происходит непрерывное увеличение крутизны профиля распространяющейся волны и образование разрыва — области бесконечно быстрого изменения физических величин во времени и пространстве [1–3]. Чтобы разрыв сохранялся в процессе распространения волны, как мы видели, необходима диссипация энергии на разрыве, обеспечивающая необратимость процесса нелинейной эволюции. На спектральном языке это означает направленность потока энергии в область высоких частот, в которой существенны потери энергии.

Таким образом, лишь благодаря высокочастотной диссипации разрыв может быть устойчивым. Выясним, пока качественно, как влияет на разрыв дисперсия.

Фазовая скорость генерируемых нелинейностью гармоник даже при слабой дисперсии несколько отличается от скорости основной волны. Для достаточно высокого номера гармоники это различие оказывается столь сильным, что она уже не будет в резонансе с собственной волной среды и ее амплитуда остается малой (пропорциональной нелинейности). Участие такой волны в процессе пренебрежимо мало, и спектр нелинейной волны в результате оказывается ограниченным. На пространственно-временном языке это означает то, что ширина области быстрого изменения поля будет конечной. Таким образом, дисперсия также ограничивает ширину разрыва.

Естественно, что при ограниченном числе гармоник, образующих нелинейную волну, в среде без дисперсии уже невозможен необратимый процесс деформации профиля волны. Энергия, запасенная вначале (при  $t = 0$  или при  $x = 0$ ) в первой гармонике, переходит в энергию конечного числа гармоник. Затем ввиду консервативности системы она собирается обратно, после чего вновь передается гармоникам и т. д. (предполагается, что хаотизации фаз гармоник и необратимого перемешивания не происходит — об этом речь впереди). Таким образом, деформируемая в результате действия нелинейности синусоидальная волна в процессе распространения должна восстанавливаться, затем ее профиль вновь искажается, после чего все повторяется.

Однако при определенных соотношениях между амплитудами и фазами взаимодействующих гармоник обмена энергией между ними может не происходить (в соответствующем фазовом пространстве это состояние равновесия). С подобными решениями мы встречались, например, при анализе взаимодействия синусоидальной волны и ее второй гармоники в слабонелинейной среде (см. гл. 17). Такому спектральному равновесию в реальном  $xt$ -пространстве соответствует волна, профиль

которой не меняется в процессе распространения. Это — стационарная волна. Скорость  $V$  распространения стационарной волны постоянна, поэтому решения в виде стационарных волн описываются уравнениями в обыкновенных производных, аргументом в которых служит бегущая координата  $\xi = x - Vt$ .

Стационарные волны — весьма частный класс решений, однако их роль в теории нелинейных волн чрезвычайно велика. Это связано, конечно, и с простотой их отыскания (интегрирование уравнений не в частных, а в обыкновенных производных), и, что более важно, с тем, что волны, близкие к стационарным, возникают в результате эволюции широкого класса нестационарных возмущений. Причем такая устойчивость стационарных волн характерна не только для систем с диссипацией, но и для консервативных систем; замечательный пример этому — устойчивость солитонов. Добавим, что, зная решения в виде стационарных волн, можно исследовать и нестационарные, но локально (во времени и пространстве) близкие к ним решения [4–6].

Вернемся теперь к основной модели (19.1) и исследуем качественно возможные решения при наличии потерь в среде  $\nu \neq 0$ . Диссипация, как уже говорилось, делает процессы необратимыми.

Ясно, что при очень малых потерях ( $\nu \ll \beta$ ) решения уравнения (19.1) изменятся мало по сравнению с консервативным случаем. Диссипация (как и дисперсия) приводит к некоторому расплыванию профиля волны и в конечном итоге может уравновесить нелинейное увеличение крутизны профиля. При этом разрыв приближенно можно считать стационарным: он распространяется с постоянной скоростью, почти не меняя формы.

Учет высокочастотных диссипации и дисперсии позволяет исследовать характер изменения поля на фронте ударной волны, т. е. структуру разрыва, в рамках приближения стационарной волны. Поскольку вне ударного фронта все переменные в среде меняются очень медленно, можно считать, что они вообще остаются постоянными, т. е. этим значениям соответствуют состояния равновесия на фазовой плоскости системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей стационарные волны. Тогда задача исследования структуры фронта ударной волны сводится к нахождению той единственной фазовой траектории, которая соединяет эти состояния равновесия.

Если в уравнении (19.1) перейти к бегущей координате  $\xi = x - Vt$ , то поскольку  $\partial u / \partial t = -V \partial u / \partial \xi$  и  $\partial u / \partial x = \partial u / \partial \xi$ , т. е.  $\partial u / \partial t = -V \partial u / \partial x = -V \partial u / \partial \xi$ , при  $v(u) = u$  получим

$$\beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} - \nu \frac{du}{d\xi} = Vu - u^2/2. \quad (19.2)$$

Модель (19.2) можно рассматривать как нелинейный осциллятор с затуханием, где  $\xi$  — аналог времени, а  $u$  — координата материальной точки. Уравнение потенциальной «ямы» имеет вид  $W(u) = -Vu^2/2 + u^3/6$ . Состояния равновесия находятся в точках  $u_{01} = 0$  и  $u_{02} = 2V$ . Для определения типа состояний равновесия составим характеристическое уравнение  $\beta p^2 - \nu p + (u_0 - V) = 0$  (предполагалось, что  $u = u_0 + u'$ ,  $u' \sim \exp(p\xi)$ ). Отсюда состояние равновесия  $u_{01}$  — седло, а  $u_{02}$  — узел при  $\nu^2 - 4\beta V > 0$  и фокус, если  $\nu^2 - 4\beta V < 0$ . Фазовые портреты для различных значений  $\nu$  и соответствующие им изменения поля на фронте ударной волны приведены на рис. 19.2. Зависимости  $u$  от  $\xi$  на всей оси  $\xi$  получаются из аналогии модели (19.2) с нелинейным осциллятором [6]. Решение начинается при  $\xi \rightarrow \infty$ , затем материальная точка, попав в потенциальную «яму», колеблется в ней с затуханием, пока не достигнет значения  $u = 2V$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ .

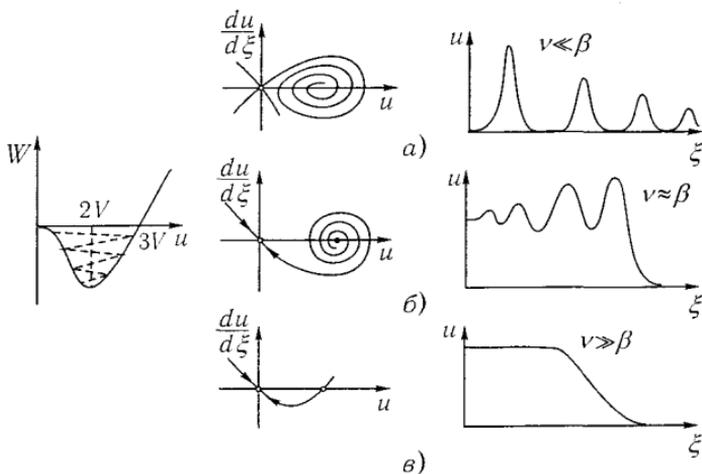


Рис. 19.2. Вид «потенциальной ямы», фазовые портреты и картины распространения ударных волн для различных значений  $\nu$ : а —  $\nu \ll \beta$  — в волне нелинейных осцилляций; б —  $\nu \approx \beta$ ; в —  $\nu \gg \beta$  — ударная волна без осцилляций

Проанализируем структуру разрыва не в рамках модели (19.1), а непосредственно для среды, эквивалентная схема которой приведена на рис. 19.3. По определению ударной волны длительность фронта мала по сравнению с характерными временными и пространственными масштабами изменения напряжения и тока (которые зависят от среды) вне резкого перепада в ее профиле. Это позволяет разделить «быстрые»

и «медленные» движения и, выделив область быстрого изменения соответствующих величин, исследовать структуру этой области (структуру фронта ударной волны), считая волну стационарной [6–8]. Исходными для нас будут телеграфные уравнения

$$\partial U / \partial x = -\partial \Phi / \partial t, \quad \partial I / \partial x = -\partial Q / \partial t, \quad (19.3)$$

где  $I$ ,  $U$ ,  $\Phi$  и  $Q$  — ток, напряжение, погонный поток индукции и погонный заряд в линии. Связь между этими величинами в общем случае выражается интегродифференциальными уравнениями типа

$$Q = \widehat{Q}(U, I), \quad \Phi = \widehat{\Phi}(I, U). \quad (19.4)$$

Будем считать, что поток  $\Phi$  связан с током квазистатически (рис. 19.3б), и, следовательно, дисперсия определяется индуктивностью  $L$  на рис. 19.3а. Для этой схемы  $U = Q/C + R \partial Q / \partial t + L \partial^2 Q / \partial t^2$ .

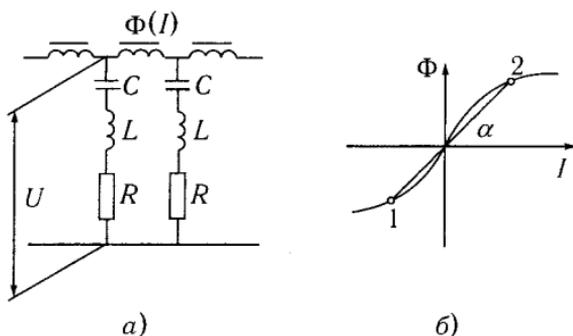


Рис. 19.3. Эквивалентная схема линии передачи с временной дисперсией (а) и зависимость  $\Phi(I)$  (б)

Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью разрыва  $v_p$ . Тогда все величины зависят лишь от одной переменной  $\xi = x - v_p t$ , а  $\partial I / \partial x = dI / d\xi$ ,  $\partial Q / \partial t = -v_p dQ / d\xi$ , т. е. из (19.3) следует, что

$$dI / d\xi = v_p dQ / d\xi, \quad (19.5)$$

$$dU / d\xi = v_p d\Phi / d\xi, \quad (19.6)$$

$$U = Q/C + Rv_p dQ / d\xi + Lv_p^2 d^2 Q / d\xi^2. \quad (19.7)$$

Дифференцируя (19.7) по  $\xi$  и используя (19.5) и (19.6), находим

$$LCv_p d^3 I / d\xi^3 + RCv_p d^2 I / d\xi^2 + dI / d\xi - Cv_p^2 d\Phi / d\xi = 0. \quad (19.8)$$

Проинтегрируем (19.8) по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\xi$  — текущей координаты внутри области разрыва. Тогда окончательно получим

$$LCv_p^2 d^2 I/d\xi^2 - RCv_p dI/d\xi + \{(I - I_1) - Cv_p^2[\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0, \quad (19.9)$$

где  $I(-\infty) = I_1$ ,  $I(\xi) = I$ . Координаты состояний равновесия и скорость перемещения разрыва  $v_p$  связаны условием

$$v_p^2 = (I_2 - I_1)/\{C[\Phi(I_2) - \Phi(I_1)]\}. \quad (19.10)$$

Это уже известное нам граничное условие на разрыве (ср. (18.27)). Оно допускает простую графическую интерпретацию (рис. 19.36):  $\operatorname{tg} \alpha = 1/(Cv_p^2)$ , где  $\alpha$  — угол наклона прямой, соединяющей точки 1 и 2 по разные стороны от перепада кривой  $\Phi = \Phi(I)$ . Соответствующее (19.9) характеристическое уравнение при условии  $I_1 = 0$  имеет вид

$$h^2 p^2 + 2\delta p + (1 - Cv_p^2 \Phi'_I) = 0, \quad (19.11)$$

где  $h^2 = LCv_p^2$ ,  $2\delta = RCv_p$ ,  $\Phi'_I = \partial\Phi/\partial I$ . Особая точка  $I = I_1 = 0$  — всегда седло ( $\Phi'_I > 1/(Cv_p^2)$ ), она соответствует «основанию» волны. Особая точка  $I = I_2$ , соответствующая «вершине» волны, — либо фокус, когда  $\Phi'_I < 1/(Cv_p^2)$ ,  $\delta^2 < h^2(1 - Cv_p^2 \Phi'_I)$ , либо узел, когда  $\Phi'_I < 1/(Cv_p^2)$ ,  $\delta^2 > h^2(1 - Cv_p^2 \Phi'_I)$ . Когда диссипации нет, т. е.  $R = 0$ , то из (19.8) имеем

$$LCv_p^2 d^3 I/d\xi^3 + dI/d\xi - Cv_p^2 d\Phi/d\xi = 0, \\ h^2 d^2 I/d\xi^2 + I - Cv_p^2 \Phi(I) = \text{const.}$$

Если представить зависимость  $\Phi(I)$  двумя параболойми, то получим, что  $\Phi(I) \rightarrow I^2$  и

$$h^2 d^2 I/d\xi^2 = -I + Cv_p^2 I^2,$$

откуда  $I = A \operatorname{sh}^2 \sqrt{A/12h}$ , где  $A = \text{const.}$  В этом случае особая точка — центр. Все описанные ситуации собраны на рис. 19.4 [6]. Полученные результаты для конкретной модели вполне соответствуют результатам качественного исследования уравнения (19.1) одноволнового приближения.

В линии с пространственной дисперсией, т. е. при нелокальной связи погонного потока  $\Phi$  и заряда  $Q$  с током и напряжением, скорость  $v_p$

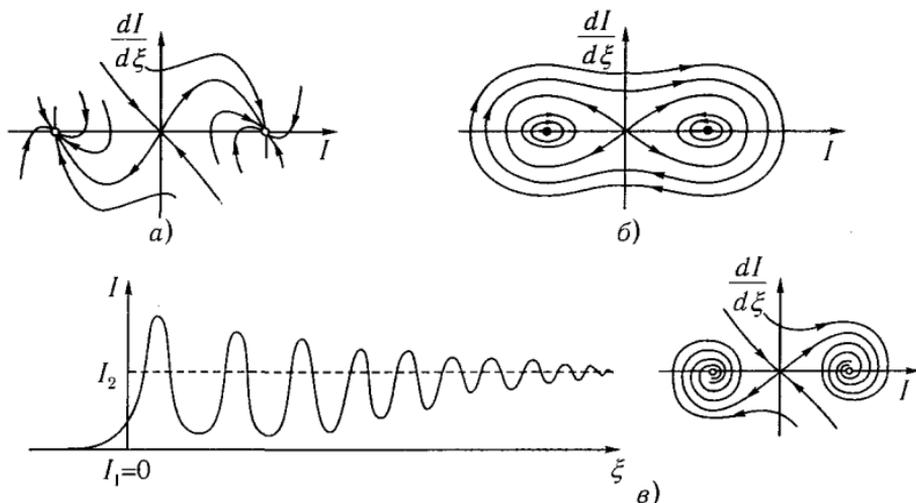


Рис. 19.4. Фазовые портреты стационарных волн в линии с временной дисперсией: а — случай сильного затухания; б — случай, когда диссипации в линии нет; в — случай слабого затухания — структура фронта волны и фазовый портрет

ударной волны может быть меньше групповой скорости возмущений, возникающих в области фронта ударной волны. В результате осцилляции обгоняют фронт и в стационарной волне наблюдаются у подножия волны — на переднем участке фронта. Если, например, в линии передачи, схематически представленной на рис. 19.3а, ввести индуктивную связь между ячейками, то приближенно для систем с малыми (по сравнению с пространственным масштабом возмущения) ячейками можно считать, что

$$\Phi = \Phi(I) - M \partial^2 I / \partial x^2, \quad Q = CU - RC \partial Q / \partial t, \quad (19.12)$$

где  $M$  — коэффициент, учитывающий индуктивную связь между последовательными ячейками (для простоты считаем, что  $L = 0$ , см. рис. 19.3а). В этом случае (19.3) с учетом (19.12) превращается в уравнение (см. [8])

$$MC d^2 I / d\xi^2 - RC dI / d\xi - \{(I - I_1) - Cv_p^2 [\Phi(I) - \Phi(I_1)]\} = 0. \quad (19.13)$$

При  $M < 0$  фазовые портреты для уравнения (19.13) подобны фазовым портретам на рис. 19.4 — влияние пространственной дисперсии на структуру ударной электромагнитной волны качественно такое же,

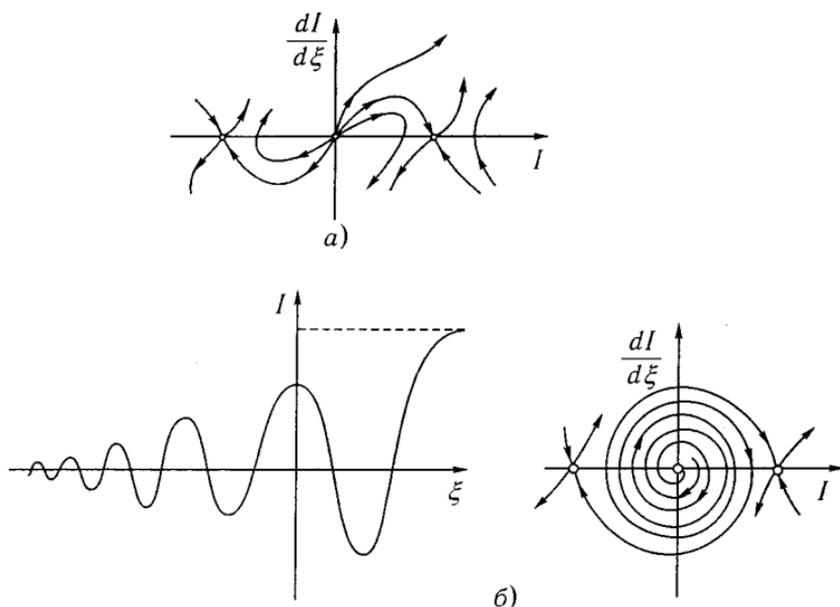


Рис. 19.5. Фазовые портреты и структура фронта ударной электромагнитной волны в линии с пространственной дисперсией: а — случай сильного затухания; б — случай слабого затухания

как и временной. Но при  $M > 0$  и достаточно малом  $R$  особая точка  $I_1 = 0$  становится неустойчивым фокусом (рис. 19.5б). Колебания возникают перед фронтом ударной волны (рис. 19.5б) — в этом случае групповая скорость осцилляций больше  $v_p$ . Стационарные ударные электромагнитные волны детально исследованы экспериментально, например, в коаксиально-спиральном волноводе, заполненном ферритом, и в многосвязных искусственных линиях [7, 8].

## 19.2. Уединенные волны — солитоны<sup>1</sup>

Рассмотрим среду без диссипации ( $\nu = 0$ ). Пусть пока нелинейность в среде квадратична, т. е.  $v(u) = u$ , тогда вместо (19.1) будем искать уравнение, полученное Кортвегом и де Вризом для волн на поверхности жидкости:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (19.14)$$

<sup>1</sup>Солитонном посвящена обширная литература. К основным источникам следует отнести [9-12, 25-29]. Хорошее популярное изложение физики солитонов дано в [13, 30].

Решения этого уравнения сейчас изучены очень подробно, в том числе и нестационарные, но мы будем обсуждать только самые простые из них, дополнив обсуждение качественными соображениями. Прежде всего поразмыслим над тем, к чему может привести добавление к уравнению простой волны слагаемого, описывающего дисперсионное расплывание. Как мы уже знаем, дисперсионное расплывание может компенсировать процесс опрокидывания волны, и тогда ее профиль стабилизируется, т. е. возможно существование стационарных бегущих волн, профиль которых не меняется во времени. Такие волны определены во всем пространстве и бегут с постоянной скоростью  $V$ , т. е. все переменные в волне являются функцией бегущей координаты  $\xi = x - Vt$ . Для них  $\partial u / \partial x = du / d\xi$ ,  $\partial u / \partial t = -V du / d\xi$  т. е. стационарные волны уравнения (19.14) описываются уравнением в обыкновенных производных  $\beta d^3 u / d\xi^3 + (u - V) du / d\xi = 0$ , или после интегрирования,

$$\beta d^2 u / d\xi^2 + (Vu - u^2 / 2) = C_1. \quad (19.15)$$

Таким образом, стационарным волнам уравнения Кортевега–де Вриза соответствует уравнение консервативного нелинейного осциллятора. Постоянную будем считать равной нулю (это всегда можно сделать, введя полую переменную), тогда уравнение (19.15) представляется в виде  $\beta d^2 u / d\xi^2 = -\partial W / \partial u$ , где  $W = -Vu^2 / 2 + u^3 / 6$ . Потенциальная энергия  $W$  стационарных волн и их фазовый портрет приведены на рис. 19.6.

Существуют различные классы решений уравнения Кортевега–де Вриза. Можно выделить два из них.

1. Квазисинусоидальные колебания с малыми амплитудами (фазовые траектории вблизи состояния центра); для них нелинейность почти не сказывается (рис. 19.7а).

2. Движение вблизи сепаратрисы и по самой сепаратрисе. Именно эти сильно нелинейные волны и представляют для нас интерес. Периодические движения вблизи сепаратрисы (рис. 19.7б) называются кноидальными волнами. Сепаратрисе соответствует локализованное в пространстве решение в виде одиночного возвышения или уединенной волны — солитона (рис. 19.7в) с амплитудой  $u_{\max} = 3V$ . Это решение аналитически записывается в виде

$$u(x, t) = u_{\max} \operatorname{ch}^{-2}[(x - Vt) / \Delta],$$

где  $\Delta$  — характерная ширина солитона. Справедливость решения легко проверить прямой подстановкой его в уравнение (19.15) при  $C_1 = 0$ . Ис-

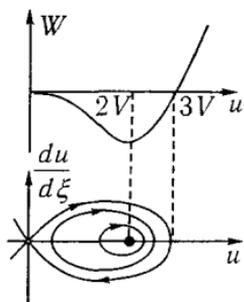


Рис. 19.6. Потенциальная энергия  $W = -Vu^2/2 + u^3/6$  и фазовый портрет стационарных волн. Состояние равновесия  $u = 2V$  — центр. Солитон соответствует сепаратрисе

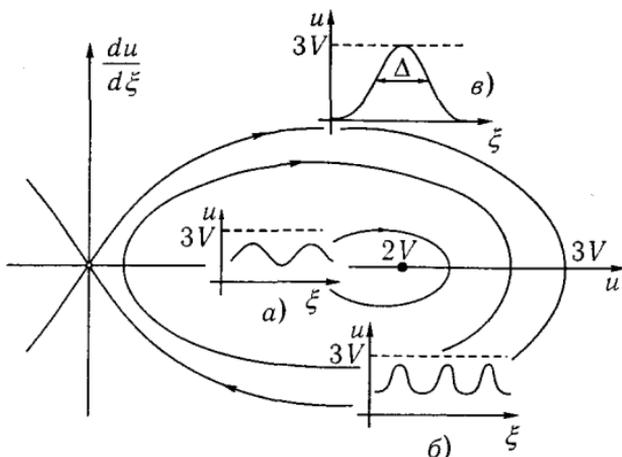


Рис. 19.7. Различные классы решений уравнения Кортевега–де Вриза и их соответствие фазовому портрету стационарных волн: а — квазисинусоидальные колебания малой амплитуды — вблизи состояния центра; б — кноидальные волны (периодические солитонные решетки) — вблизи сепаратрисы; в — солитон (уединенная волна) — сепаратриса

пользуя при подстановке тождество  $\text{ch}^2(\xi/\Delta) - \text{sh}^2(\xi/\Delta) = 1$ , получаем

$$\frac{\beta^2}{\Delta^2} \left[ \frac{4u_{\max}}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)} - \frac{6u_{\max}}{\text{ch}^4(\xi/\Delta)} \right] \equiv V \frac{u_{\max}}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)} - \frac{u_{\max}}{2 \text{ch}^4(\xi/\Delta)}. \quad (19.16)$$

Отсюда можно найти  $\Delta$  и  $u_{\max}$ . Тождество (19.16) выполняется при любых  $\xi$ , следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях  $\text{ch}(\xi/\Delta)$  должны быть равны, т. е.

$$4\beta/\Delta^2 = V, \quad 6\beta/\Delta^2 = u_{\max}/2.$$

Итак, мы получили: 1)  $u_{\max}\Delta^2 = 12\beta = \text{const}$  — чем выше солитон, тем он уже; 2)  $\Delta^2 = 4\beta/V$ ,  $u_{\max} = 3V$  — чем солитон шире, тем он медленнее бежит и тем меньше его амплитуда. Таким образом, ширина, скорость и амплитуда солитона, описываемого уравнением Кортевега–де Вриза, однозначно связаны, т. е. семейство решений в виде солитонов однопараметрическое — меняем, например,  $V$ , получаем разные солитоны.

Почему солитоны, т. е. частные виды стационарных волн, интересны? Фактически по той же причине, что и другие стационарные вол-

ны: нестационарные возмущения довольно широкого класса в процессе распространения асимптотически приближаются к солитону! Экспериментально этот факт был обнаружен давно; еще более ста лет назад Скотт-Рассел<sup>1</sup> наблюдал солитон и поэтично описал его [10].

Новая жизнь солитона — одного из самых привлекательных объектов современной физики — в значительной степени связала с построением точных решений многих уравнений нелинейной теории волн. При их построении большую роль сыграл так называемый метод обратной задачи рассеяния [11]. Этот метод берет начало от работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [21], которые в 1967 г. установили связь между уравнениями Кортевега-де Вриза и Шредингера. Поясним кратко суть этой связи. Как известно [14], уравнение Шредингера  $\partial^2 \Psi / \partial x^2 + [U(x) + \epsilon] \Psi = 0$  в случае, когда потенциал  $U(x)$  положительно определен и спадает до нуля при  $x \rightarrow \pm\infty$ , имеет финитные решения, стремящиеся вместе со своими производными к нулю на бесконечности, а спектр собственных значений  $\epsilon$  дискретен. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 + [u(t, x) / (6\beta) + \epsilon] \Psi = 0, \quad \beta > 0, \quad (19.17)$$

где  $u(t, x)$  зависит от времени как от параметра. Тогда и собственные значения, вообще говоря, будут зависеть от  $t$ . Покажем, что собственные значения  $\epsilon$  не будут зависеть от  $t$ , если функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению Кортевега-де Вриза (точнее, если  $u(x, t)$  — любое положительно определенное решение уравнения Кортевега-де Вриза, спадающее на  $\pm\infty$ , то соответствующий ему спектр собственных значений остается неизменным). Из уравнения (19.17) находим

$$u(t, x) = -6\beta(\Psi^{-1} \partial^2 \Psi / \partial x^2 + \epsilon).$$

Подставим это выражение в уравнение (19.14). После вычислений получим

$$\Psi^2 \partial \epsilon / \partial t = (\Psi' A - \Psi A')', \quad (19.18)$$

где  $A(t, x) = 6\beta[\beta^{-1} \partial \Psi / \partial t - 3\Psi' \Psi'' / \Psi + \Psi''' - \epsilon \Psi' / 6]$ ; штрихи означают соответствующие производные по  $x$ .

Проинтегрируем левую и правую части (19.18) по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом правая часть получившегося уравнения обратится в нуль, по-

<sup>1</sup>О жизни и работах Джона Скотта-Рассела — «великого инженера и кораблестроителя викторианской эпохи» — можно прочитать в книгах [12, 30].

сколько собственные функции (вместе со своими производными) дискретного спектра уравнения Шредингера исчезают на бесконечности. Таким образом,

$$(d\varepsilon/dt) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 dx = 0.$$

Поскольку в силу нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 dx \neq 0$ , то  $d\varepsilon/dt = 0$ , т. е.  $\varepsilon = \text{const.}$

Так как решение  $u(t, x)$  произвольно, спектр  $\varepsilon$  нам неизвестен. Покажем теперь, что если  $u(t, x)$  — солитон, то уравнение Шредингера имеет единственное собственное значение. Когда  $u(t, x) = u_{\max} \text{ch}^{-2}[(x - Vt)/\Delta]$  — солитон, уравнение (19.17) принимает вид

$$\Psi'' + (U_0 \text{ch}^{-2} \alpha\xi + \varepsilon)\Psi = 0.$$

Здесь  $U_0 = u_{\max}/(6\beta)$ ,  $\alpha = 1/\Delta = (u_{\max}/12\beta)^{1/2}$ . Дискретные собственные значения уравнения Шредингера даются формулой (см. [14], § 23, задача 4)

$$\varepsilon_n = -\alpha^2(s - n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $s = (1/2)(-1 + \sqrt{1 + 4U_0/\alpha^2})$ , причем должно быть  $n < s$ . Подставляя в выражение для  $s$  выписанные выше значения  $U_0$  и  $\alpha$ , получим  $s = 1$ , т. е. существует единственное собственное значение  $\varepsilon_0 = u_{\max}/(12\beta)$ . Итак, мы получили, что: а) спектр собственных значений не зависит от  $t$ , хотя  $u(t, x)$  изменяется со временем; б) каждому собственному значению соответствует солитон. Отсюда следует вывод: любое локализованное положительное возмущение представляет собой набор солитонов и, если достаточно долго подождать, эти солитоны сформируются и возмущение превратится в последовательность солитонов, выстроившихся по амплитуде (рис. 19.8в). Поскольку «солитонный состав» — набор солитонов, из которых состоит возмущение — не зависит от времени, солитоны могут лишь меняться местами в пространстве. Число солитонов зависит от формы начального возмущения; вершины их лежат на одной прямой, так как расстояние, пройденное каждым солитоном, пропорционально его скорости, а последняя, как мы уже знаем, пропорциональна амплитуде.

Такой метод решения уравнения Кортевега–де Вриза называется методом обратной задачи рассеяния, поскольку мы решаем задачу на собственные значения для уравнения Шредингера с потенциалом  $u(t, x)$ , где  $t$  играет роль параметра. В квантовомеханическом урав-

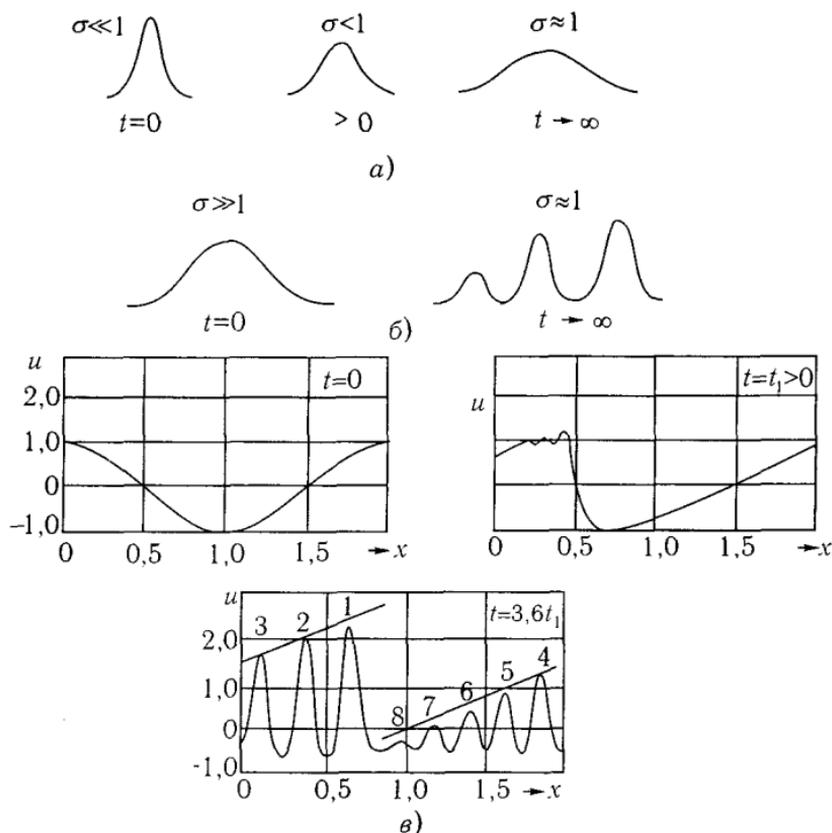


Рис. 19.8. Эволюция начального возмущения при различных значениях параметра  $\sigma = \Delta^2 u_{\max} / (12\beta)$ , характеризующего отношение нелинейности и дисперсии в системе: а — преобладает дисперсионное расплывание; б — вначале имеет место тенденция к опрокидыванию, но из-за дисперсии возмущения с разными длинами волн разбегаются и возмущение разбивается на короткие импульсы; в — результаты численного моделирования [15] (изображен один период)

нении  $\epsilon$  — уровень энергии, а  $\Psi$  — волновая функция. Прямая же квантовомеханическая задача рассеяния — это решение уравнения (19.17) с заданным потенциалом  $u$ . Оно позволяет рассчитать, например, коэффициент отражения волны (волна определяется зависящей от координаты волновой функцией  $\Psi$ ), падающей из бесконечности на потенциальный рельеф  $u(x)$ . Если падающая из бесконечности волна плоская с единичной амплитудой, то амплитуда отраженной волны называется коэффициентом отражения. Мы искали сам потенциал. Это и есть решение обратной задачи квантовой теории рассеяния: по известному ко-

эффиценту отражения восстанавливается потенциальный рельеф  $u(x)$ . Подробно метод обратной задачи рассеяния изложен в [10–12].

Поясним, почему солитон является устойчивым возмущением. Введем безразмерный параметр  $\sigma = \Delta^2 u_{\max}/(12\beta)$ . Этот параметр характеризует отношение нелинейности к дисперсии в системе, так как чем больше амплитуда  $u_{\max}$ , тем сильнее сказывается нелинейность, а  $\beta$  характеризует высокочастотную дисперсию. Для солитона  $\sigma = 1$ , т. е. эффекты нелинейной эволюции и дисперсионного расплывания как раз уравнивают друг друга. При  $\sigma \ll 1$  (рис. 19.8а) возмущение с резким фронтом ведет себя, как в линейной диспергирующей среде. Для него основной эффект — появление сравнительно длинноволновых осцилляций, что приводит к увеличению  $\Delta$  и, следовательно,  $\sigma$ , т. е. к установлению волны с  $\sigma = 1$ . При  $\sigma \gg 1$  дисперсионные эффекты несут существенны: основную роль играет нелинейность, приводящая к формированию коротких импульсов, и лишь потом сказывается дисперсия, уравнивающая процесс (рис. 19.8б). Именно так начальное возмущение большей амплитуды распадается на последовательность солитонов, вершины которых лежат на одной прямой (на рис. 19.8в приведены результаты численных расчетов, взятые из работы [15]).

### 19.3. Солитоны как частицы

Будучи довольно сложными образованиями, солитоны и солитонные периодические решения (кноидальные волны) при взаимодействии друг с другом должны были бы вести себя очень сложно. Однако, судя по многим физическим и численным экспериментам, это не всегда так. Зачастую, наоборот, солитоны при взаимодействии ведут себя на удивление просто — отталкиваются, притягиваются или колеблются друг относительно друга (рис. 19.9), совсем как классические частицы! Как недавно было установлено, эта внешняя аналогия оказывается довольно глубокой по отношению к слабо взаимодействующим солитонам (или кноидальным волнам). Если различие скоростей (или, что то же самое, энергий) солитонов мало и на протяжении всего процесса расстояние между их максимумами остается большим по сравнению с эффективной шириной, их взаимодействие в буквальном смысле аналогично взаимодействию частиц и описывается уравнениями Ньютона. Солитон в поле «хвоста» другого солитона ведет себя, как шарик в желобе. Например, для пары солитонов получается уравнение [16]

$$d^2 u/dt^2 - v(\mathcal{E})f(u) = 0, \quad (19.19)$$

где  $u$  — расстояние между максимумами солитонов,  $f(u)$  описывает силовое поле хвоста одного солитона в месте расположения другого,  $v(\mathcal{E})$  — зависимость скорости солитона от энергии. Уравнения, подобные (19.19), при малости взаимодействия выводятся из исходных уравнений для волн путем представления поля в окрестности каждого солитона (его параметры считаются медленно изменяющимися) в виде асимптотического ряда с использованием затем требования ограниченности слагаемых этого ряда.

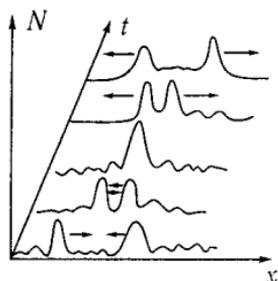


Рис. 19.9. Столкновение ионно-акустических солитонов ( $N$  — концентрация частиц)

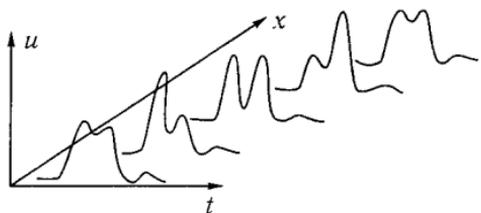


Рис. 19.10. Осциллирующая пара солитонов

После того как аналогия «солитоны–частицы» установлена (т. е. получено уравнение (19.19)), для описания взаимодействия солитонов достаточно знать лишь вид силовой функции  $f(u)$ , т. е. характер «хвостов» солитонов. Если функция  $f(u)$  монотонна, то солитоны отталкиваются либо притягиваются. Большинство найденных точных решений иллюстрирует отталкивание солитонов. Если же солитоны имеют осциллирующие «хвосты», как, например, солитоны капиллярно-гравитационных волн на мелкой воде или в нелинейной искусственной линии передачи с индуктивной связью между звеньями, то функция  $f(u)$  знакопеременна и солитоны то отталкиваются, то притягиваются, образуя осциллирующую пару (связанное состояние; рис. 19.10).

Аналогичным образом могут быть рассмотрены процессы взаимодействия и большого числа однотипных солитонов, поскольку характер «хвостов» не зависит от числа находящихся на нем солитонов.

Добавим, что эта аналогия между нелинейными волнами и колебаниями уже не столь тривиальна, как обсуждавшиеся нами ранее модовые аналоги.

## 19.4. Неодномерные солитоны

Мы рассмотрели лишь простейший пример солитонов — либо одномерные стационарные уединенные волны в одномерных распределенных системах (линиях передачи), либо плоские волны, профиль которых меняется лишь вдоль направления распространения (например, солитоны на мелкой воде, описываемые уравнением Кортевега–де Вриза). В то же время очевидно, что и на мелкой воде, и на стекающей пленке жидкости (см. гл. 24), и при распространении ионно-звуковых солитонов в плазме солитоны и солитоноподобные решения в общем случае должны зависеть еще и от поперечной координаты, т. е. должны быть, как минимум, двумерными. Простейшей из моделей, в рамках которых описываются подобные солитоны, является обобщение уравнения Кортевега–де Вриза, предложенное Кадомцевым и Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t + uu_x - \delta u_{xx}) = \alpha u_{yy}. \quad (19.20)$$

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили может быть получено, например, для потенциальных акустических волн в предположении слабой дисперсии и нелинейности из волнового уравнения<sup>1</sup>

$$\partial^2 \varphi / \partial t - c^2 \Delta \varphi = -\beta \Delta^2 \varphi - \partial(\Delta \varphi)^2 / \partial t. \quad (19.21)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал скорости,  $c$  — скорость звука в среде,  $\beta \sim D^2 c^2$  характеризует дисперсию ( $D$  имеет смысл длины расплывания волнового пакета). Знак дисперсии может быть как положительным ( $\beta > 0$ ), так и отрицательным ( $\beta < 0$ ). Будем интересоваться волнами, профиль которых становится круче под действием нелинейности. Такое изменение профиля происходит лишь в направлении распространения, поэтому зависимость от остальных координат ( $\mathbf{r}_\perp$ ) можно считать медленной, т. е. искать решение в виде

$$\varphi \approx \varphi(x - ct, \mathbf{r}_\perp, t). \quad (19.22)$$

Подставляя (19.22) в (19.21) и оставляя лишь слагаемые первого порядка малости (порядка нелинейности и дисперсии), получаем

$$2c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + c^2 \Delta_\perp \varphi = \beta \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - c \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2. \quad (19.23)$$

<sup>1</sup>Для сред с диссипацией столь же универсальным является уравнение для волновых пучков — уравнение Хохлова–Заболотской [24].

Это уравнение совпадает по виду с (19.20), если положить  $u = \partial\varphi/\partial x$ :

$$\partial x \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{2c} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = -\frac{c}{2} \Delta_{\perp} u. \quad (19.24)$$

Уравнение (19.24) имеет решение в виде одномерного солитона:

$$u = u_0 \equiv -\frac{3\beta}{2c\Delta^2} \operatorname{ch}^{-2} \left[ \frac{1}{2\Delta} \left( x + \frac{\beta t}{2c\Delta^2} \right) \right], \quad (19.25)$$

который характеризуется шириной  $\sim \Delta$  ( $|\beta|/\Delta^2 \ll c^2$  — условие применимости уравнений (19.21), (19.24)) и скоростью  $\beta/(2c\Delta^2)$ . Решение (19.25) описывает стационарную волну в системе отсчета, движущейся вдоль  $x$  со скоростью звука  $c$ . Поэтому при положительной дисперсии ( $\beta > 0$ ) солитон движется с дозвуковой скоростью и имеет отрицательную амплитуду. Если же  $\beta < 0$ , то амплитуда солитона положительна, а скорость превышает скорость звука.

Знак дисперсии в данном случае определяет и устойчивость одномерного солитона к неодномерным возмущениям [17] — при  $\beta > 0$  неодномерные возмущения нарастают, при  $\beta < 0$  одномерный солитон устойчив. Строго результат об устойчивости одномерного солитона в модели Кадомцева–Петвиашвили доказывается методом обратной задачи [22]; мы здесь лишь поясним этот результат с помощью самых простых соображений. Линеаризуя (19.24) вблизи тривиального решения, находим, что фазовая скорость квазигармонических неодномерных возмущений с волновым вектором  $\mathbf{k}(k_{\perp}, k_x)$  равна

$$v_{\Phi}(\mathbf{k}) = c(k_{\perp} k_x)^2/2 + \beta k_x^2/2c.$$

Видно, что в среде с положительной дисперсией скорость возмущений всегда больше скорости солитона, т. е. он должен отдавать энергию обгоняющим его малым двумерным возмущениям среды — это и объясняет неустойчивость солитона в среде с  $\beta > 0$ . В случае же  $\beta < 0$  колебания солитона затухают за счет излучения отстающего от него звука — в среде с отрицательной дисперсией солитон устойчив по отношению к неодномерным возмущениям.

Приведем здесь точное решение уравнения (19.24) в виде двумерного солитона, полученное вначале численно, а затем аналитически [17]. Для этого уравнение (19.24) для стационарных решений перепишем в безразмерной форме ( $\zeta \sim x$ ,  $\eta \sim y$ ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^4} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} u^2. \quad (19.26)$$

Тогда двумерный солитон дается выражением

$$u(\zeta, \eta) = 8(1 + 4\eta^2 - 4\zeta^2)/(1 + 4\eta^2 + 4\zeta^2)^2.$$

Заметим, что сейчас высказываются весьма убедительные предположения, в соответствии с которыми замечательная особенность атмосферы Юпитера — его Большое Красное пятно — это двумерный солитон Россби. В гл. 5 мы познакомились лишь с линейными волнами Россби — волнами во вращающейся атмосфере. Если при простейших идеализациях (атмосфера представляется несжимаемой жидкостью, глубина которой много меньше характерных масштабов возмущений, а угловая скорость вращения  $\omega_0$  планеты достаточно велика) учесть нелинейность, то для отклонения глубины атмосферы  $h = h(t, \varphi, \alpha)$  от равновесного значения получается двумерное нелинейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(I^2 h - r_0^2 \Delta h) - \frac{v_0}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( h + \frac{h^2}{2} \right) = 2\omega_0 \frac{r_0^4}{I} [\zeta \nabla h] \nabla \Delta h, \quad (19.27)$$

$H_0 \ll L \ll R$ , где  $L$  — характерный масштаб возмущения,  $R$  — радиус планеты,  $I = \sin \alpha$  ( $\alpha$  — широтный угол),  $\varphi$  — меридиональный угол,  $r_0$  — масштаб Россби–Обухова,  $v_0 (\sim \omega_0 \sin \alpha)$  — скорость дрейфа Россби, вызванная неоднородностью силы Кориолиса по широте,  $\zeta$  — единичный вектор вдоль вертикали. Уравнение (19.27) имеет решение в виде двумерного солитона [18]:

$$u(r, \alpha) \approx 1,6 \left( \frac{r_0}{LI_0} \right)^2 \operatorname{ch}^{-4/3} \left\{ \frac{3}{4} \frac{r_0}{L} [1 + \xi(\alpha - \alpha_0)] \right\}, \quad (19.28)$$

где  $L \sim r_0 h^{-1/2}$ . Видно, что характерный размер (радиус) солитона  $L$  превышает  $r_0$  и уменьшается с ростом его безразмерной амплитуды  $h$ . Скорость солитона примерно в  $1 + h$  раз больше скорости Россби  $\gamma_0$ . Если зависимостью  $I$  от широты пренебречь, то солитон становится одномерным — переменные меняются лишь в зависимости от  $r$  (расстояния в горизонтальной плоскости до центра солитона).

Как видно из (19.28), чем меньше  $I_0$ , тем больше скорость солитона и тем больше его амплитуда и меньше размер солитона — вихря. Можно показать [18], что вращение вихря и направление его движения противоположны направлению вращения планеты, т. е. это антициклон. Как и в антициклоне, давление в середине вихря больше, чем на краях.

Подобный солитон недавно был смоделирован в лаборатории [19]. Исследовалась «мелкая вода» во вращающемся вокруг вертикальной

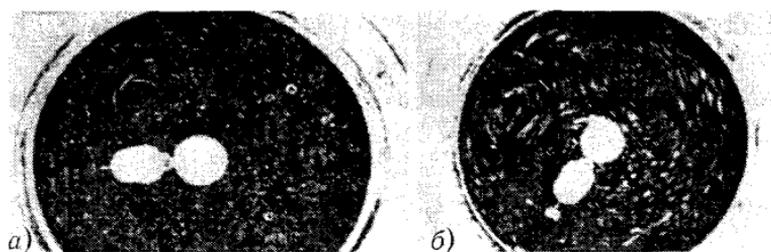


Рис. 19.11. Солитон Россби: а — установившийся солитон; б — распад начального возмущения на два солитона [19]

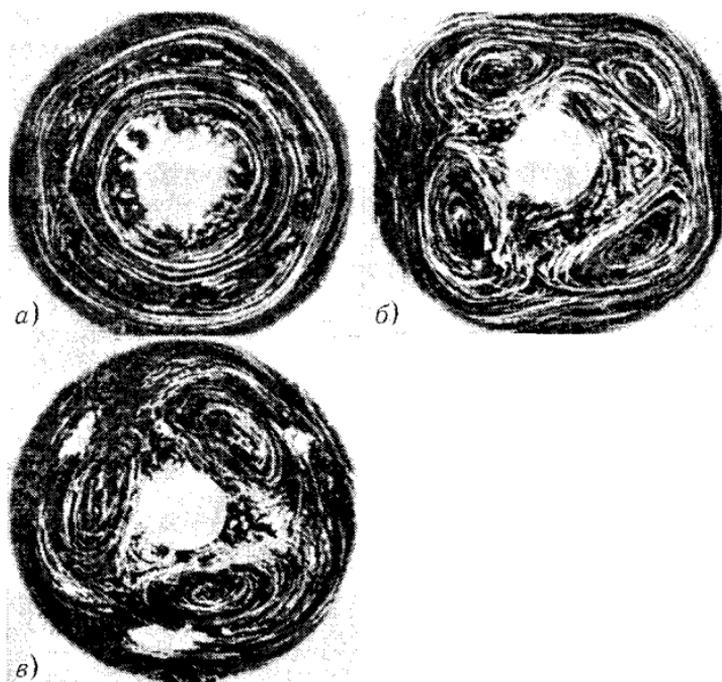


Рис. 19.12. Картина течений в тонком слое вращающейся жидкости при наличии сдвига скорости: а — при циклоническом сдвиге; б, в — при антициклоническом сдвиге. На фоне черного дна параболоида отчетливо видны солитоны Россби [23]

оси симметрии цилиндре с параболическим профилем дна. Неоднородность дна необходима для имитации эффектов, связанных с градиентом силы Кориолиса<sup>1</sup>. Параболический профиль сосуда определяется тем,

<sup>1</sup>Как известно [20], если глубина атмосферы не зависит от географических коор-

что только в параболоиде (при постоянной скорости вращения) удается реализовать вращающийся слой жидкости, глубина которого не зависит от координат, и изучать дрейф солитонов при  $H_0 = \text{const}$ . На рис. 19.11 приведены некоторые результаты очень интересной работы [19]. Ее авторами, в частности, было обнаружено, что в тонком слое равномерно вращающейся жидкости действительно могут существовать долгоживущие солитоны — вихри типа (19.28), проходящие без расплывания за время жизни, определяемое вязкостью, расстояние, на порядок большее их параметра. Замечательно, что если созданное вначале возмущение слишком велико, то оно затем распадается на несколько более мелких (зональных) течений (рис. 19.11б).

Подчеркнем, что подобные солитоны могут возникнуть самопроизвольно благодаря развитию собственной неустойчивости в системе. Так, в недавних экспериментах [23] было обнаружено, что неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, связанная с наличием перегиба скорости в профиле течения, может привести к генерации антициклонических солитонов Россби (рис. 19.12). Эти солитоны дрейфуют против направления вращения системы. По свойствам и условиям существования такой солитон подобен Большому Красному пятну Юпитера [23, 29].

---

динат, то волны Россби (в том числе и интересующие нас солитоны) возникают и существуют только благодаря широтному градиенту силы Кориолиса. Именно этот градиент вызывает вихревое движение частиц среды, дрейфующее против направления вращения планеты.

## ГЛАВА 20

# Модулированные волны в нелинейных средах

### 20.1. Общие замечания

Практически всякие колебания и волны модулированы. Модуляция по определению есть медленное изменение параметров «несущей» — амплитуды, фазы, частоты и даже формы колебаний или волн. Она может быть связана с воздействием внешних сил или полей (вынужденная модуляция), а может возникать самопроизвольно в результате развития разного рода неустойчивостей (самомодуляция или автомодуляция). Мы уже знаем примеры и вынужденной модуляции, и самомодуляции. Изменение длины волны и амплитуды квазигармонической волны в плавно неоднородной среде — вынужденная модуляция, определяемая законом «модуляции» параметров среды в пространстве. Возникновение вне полосы синхронизации биений и автогенераторе, на который подается периодический сигнал, — пример модуляции, связанной своим происхождением взаимодействием немодулированных колебаний. На плоскости медленных амплитуд такой модуляции соответствует, как мы видели, устойчивый предельный цикл. Модуляция, очевидно, возникает в результате взаимодействия осцилляторов и в консервативных системах и средах (см. гл. 17). Например, при выполнении условий резонанса  $2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  этот процесс естественно назвать взаимной модуляцией; если же  $|\omega_0 - \omega_{1,2}| \ll \omega_{0,1,2}$  и  $N_0(0) \gg N_{1,2}(0)$ , то такой процесс распада пар квазичастиц  $\omega_0$  на спутники  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — это самомодуляция.

Поскольку только модулированные колебания и волны могут переносить информацию, процесс «создания модуляции» и перенесения заданной модуляции на несущую чрезвычайно интересен для разнообразных приложений. В этой главе мы рассмотрим лишь процессы возникновения модуляции. В основном речь пойдет о модуляции волн, возникающей при их распространении и взаимодействии в нелинейных средах. Нелинейные явления и эффекты, связанные с модуляцией волн, очень разнообразны. Это самофокусировка волновых пучков [1, 25], са-

мосжатие волновых пакетов [2, 15], обращение волнового фронта [3, 4] и многое другое [4].

Поскольку дальше речь пойдет лишь о квазигармонических модулированных волнах, оговоримся здесь о существовании в общем случае гораздо более широкого класса модулированных волн — несинусоидальных (и даже не обязательно периодических) волн с медленно изменяющимися параметрами. Как мы уже знаем, поведение волны в нелинейной среде зависит от соотношения параметров дисперсии  $D$  и нелинейности  $N$ . Когда  $N \ll D$ , волна будет квазигармонической, ее гармоники будут бежать с существенно различными скоростями (нет синхронизма) и потому эффективно основной волной возбуждаться не будут т. е. не повлияют существенно на ее форму. При этом волну можно записать в виде  $A(\mathbf{r}, t) \exp(i\psi) + \text{к. с.}$ , где  $A$  — медленно изменяющаяся амплитуда, а  $\psi$  — полная фаза (эйконал). В рамках такого описания можно построить «нелинейную геометрическую оптику» (по поводу линейной геометрической оптики см. [5] и гл. 12), в которой уравнения для амплитуды волны и полной фазы в отличие от линейной задачи оказываются связанными. При этом характер модуляции волны в процессе распространения зависит от ее амплитуды (это самодействие; именно к такому классу явлений относятся упоминавшиеся самофокусировка волновых пучков и самомодуляция, приводящая к образованию волновых пакетов).

Если же дисперсия и нелинейность одного порядка, то волна уже будет существенно несинусоидальной (выросшие за счет энергии основной составляющей гармоники изменят форму волны). В средах с  $N \sim D$ , как мы видели, возможно существование стационарных нелинейных волн (см. гл. 19), распространяющихся без искажения профиля с постоянной скоростью. Такие волны принадлежат, конечно, частному, хотя и важному классу волн в нелинейных средах. Однако если эти волны рассматривать как основу для построения более широкого класса решений, полагая, что их параметры плавно модулируются во времени и пространстве, то таким образом уже можно описать довольно широкий круг нелинейных явлений — возникновение модуляции на фоне периодических солитонных решеток, деформацию профиля нелинейной волны при распространении в неоднородной среде и т. д. [6]. Подобный подход оказывается плодотворным даже и при  $N \gg D$ , когда возникают ударные волны. Если при сохранении неравенства  $N \gg D$  сама нелинейность достаточно мала, то эволюцию волны можно рассматривать как медленную модуляцию, поскольку она осуществляется на расстояниях, много больших ее характерной длины [6, 7].

А теперь вернемся к квазигармоническим волнам. Первый вопрос, который возникает в связи с обсуждением поведения модулированных волн в нелинейной среде, — как будет распространяться модуляция?

В равновесных прозрачных (без диссипации) средах эволюция одномерной модулированной волны  $A(x, t) \exp[i\psi(x, t)]$  описывается уравнениями

$$\partial k / \partial t + \partial \omega / \partial x = 0, \quad (20.1)$$

$$\partial W / \partial t + \partial S / \partial x = 0, \quad (20.2)$$

где  $k(x, t) = -\psi_x$ ,  $\omega(x, t) = \psi_t$  — соответственно волновое число и частота модулированной волны, а  $W$  и  $S$  — усредненные за период плотность и поток энергии волны [6]. Уравнение (20.1), очевидно, получается из определения  $k$  и  $\omega$ , а (20.2) выражает просто закон сохранения энергии в среднем за период. Чтобы уравнения (20.1), (20.2) образовали замкнутую систему, их следует дополнить дисперсионным уравнением среды. Если среда нелинейна, то частота (или волновое число) будет зависеть от энергии волны (вспомним неизохронный осциллятор), т. е. мы должны написать

$$\omega = \omega(k, A^2) \quad \text{или} \quad k = k(\omega, A^2). \quad (20.3)$$

Таким образом, в нелинейной среде уравнения, описывающие распространение фазы и энергии, уже не будут независимыми [5, 6]. Учтем теперь, что наша волна квазигармоническая, при этом зависимость  $\omega$  или  $k$  от  $A^2$  слабая, и (20.3) можно разложить в ряд

$$k(\omega, A^2) \approx k(\omega, 0) + \alpha A^2 + \dots \quad (20.4)$$

После подстановки этого выражения в (20.1) получим уравнение

$$\partial \omega / \partial x + v^{-1}(\omega) \partial \omega / \partial t + \alpha \partial A^2 / \partial t = 0 \quad (20.5)$$

— приближение нелинейной геометрической оптики [5, 6, 10]. Ограничимся теперь случаем, когда модуляция частоты невелика, и введем относительную расстройку  $\xi$  от основной частоты  $\omega_0$ :  $\xi = (\omega - \omega_0) / \omega_0$ . Тогда, переходя в движущуюся систему координат  $\tau = t - x/v$ ,  $\chi = x$ , из (20.5) найдем (прямой подстановкой и разложением  $v(\omega)$  в ряд)

$$\partial \delta / \partial \chi + \delta \partial \delta / \partial \tau + \kappa \alpha \partial m / \partial \tau = 0. \quad (20.6)$$

где  $\delta = \xi \omega d^2 k / d\omega^2$ ,  $\kappa = v d^2 k / d\omega^2$ ,  $m = A^2$ . В уравнении (20.6) опущено слагаемое  $\alpha \delta \partial m / \partial \tau$ , поскольку оно более высокого порядка малости по

сравнению с оставленными. Чтобы получить уравнение для  $m$ , необходимо использовать явные выражения для энергии и потока энергии волны в нелинейной среде. Поскольку мы ведем речь о волнах малой амплитуды, в общем случае справедливо разложение  $W$  в виде ряда  $W = \zeta(\omega)A^2 + \zeta_1(\omega)A^4 + \dots$  (аналогично для  $S$ ), и уравнение переноса энергии (20.2) можно представить в форме

$$v \partial m / \partial \chi - \partial(\delta m) / \partial \tau + (1/2)\zeta \partial m^2 / \partial \tau = 0, \quad (20.7)$$

где при малой модуляции частоты параметр  $\zeta$  можно считать постоянной величиной. Уравнения (20.6), (20.7) описывают распространение волн модуляции при сделанных предположениях.

Уже из уравнения (20.7) сразу видны некоторые особенности такого распространения. Пусть дисперсии в узком спектральном интервале вблизи  $\omega_0$  нет<sup>1</sup>. Тогда  $d^2k/d\omega^2 = 0$ , т. е.  $\delta \equiv 0$ , и (20.7) — это хорошо знакомое нам уравнение простой волны (см. гл. 18), решение которого  $m = m(t - x/u)$ , где  $u = \zeta m + v$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении малое возмущение огибающей эволюционирует как простая волна [15] и возможно образование области быстрого изменения модуляции (рис. 20.1) (опрокидыванию волны модуляции препятствует дисперсия  $\sim d^2k/d\omega^2$ , которой мы пренебрегли).

Из уравнения (20.6) нетрудно увидеть и то, что амплитудная модуляция в слабонелинейной среде порождает частотную.

Вообще внимательный читатель уже, наверное, заметил, что уравнения (20.6), (20.7) напоминают одномерные уравнения газодинамики ( $\delta$  играет роль скорости в звуковой волне, а  $m$  — роль плотности). Принципиальное отличие состоит в том, что в нашем случае величина  $\alpha\kappa$ , играющая роль квадрата скорости звука ( $c^2 = dp/d\rho$ ; см. гл. 5), может быть отрицательной (если бы такую «среду» удалось создать, то с ростом давления ее плотность бы уменьшилась). При  $\alpha\kappa > 0$ , как и в газодинамике, уравнения (20.6) и (20.7) имеют решения в виде двух семейств простых волн — быстрых и медленных. У быстрых волн растет крутизна переднего фронта, у медленных — заднего (опрокинуться, как уже замечалось, волна модуляции не может; просто станут неприменимы наши уравнения). Если же  $\alpha\kappa < 0$ , то скорости волн становятся комплексными (убедитесь в этом самостоятельно на примере волн модуляции малой амплитуды, которые описываются линеаризованными

<sup>1</sup>Вообще же существование дисперсии в среде, конечно, предполагается — это и дает возможность нам не учитывать гармоники (они не в синхронизме с основной волной).

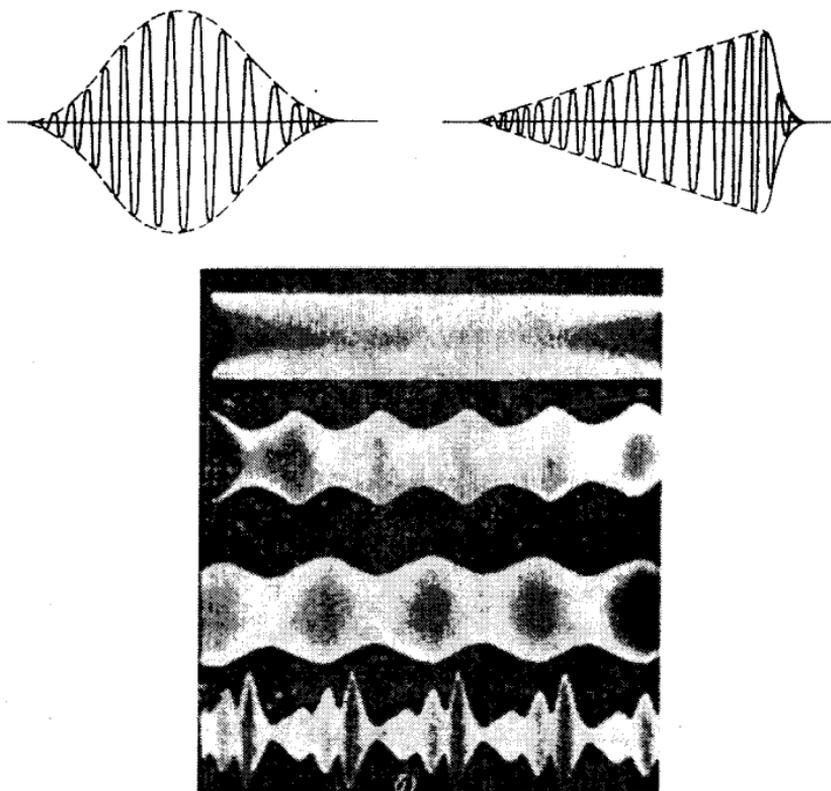


Рис. 20.1. Эволюция простой волны огибающей при распространении в нелинейной среде ( $\beta v_k' > 0$ )

ми уравнениями (20.6), (20.7)). Ответом на вопрос, что это означает и каким физическим явлениям соответствует, мы и займемся.

## 20.2. Самомодуляция. Возвращаемость

Поставим простой эксперимент — на границу  $LC$ -линии передачи (см. рис. 4.6, где следует считать  $Q(U) = C_0 + C_n U^3$ ) подадим синусоидальное колебание, частота которого лежит в области сильной дисперсии  $\omega(k)$  (см., например, пологую часть дисперсионной кривой рис. 4.8), т. е. возникающие из-за нелинейности гармоники не находятся в синхронизме с основной волной (следовательно, не нарастают). Какое колебание мы будем наблюдать на выходном конце линии? Ответ в виде осциллограмм представлен на рис. 20.2 — колебания оказываются модулированными [8]. Это и есть упоминавшееся во введении явление самомодуляции — модуляция возникает в результате разви-

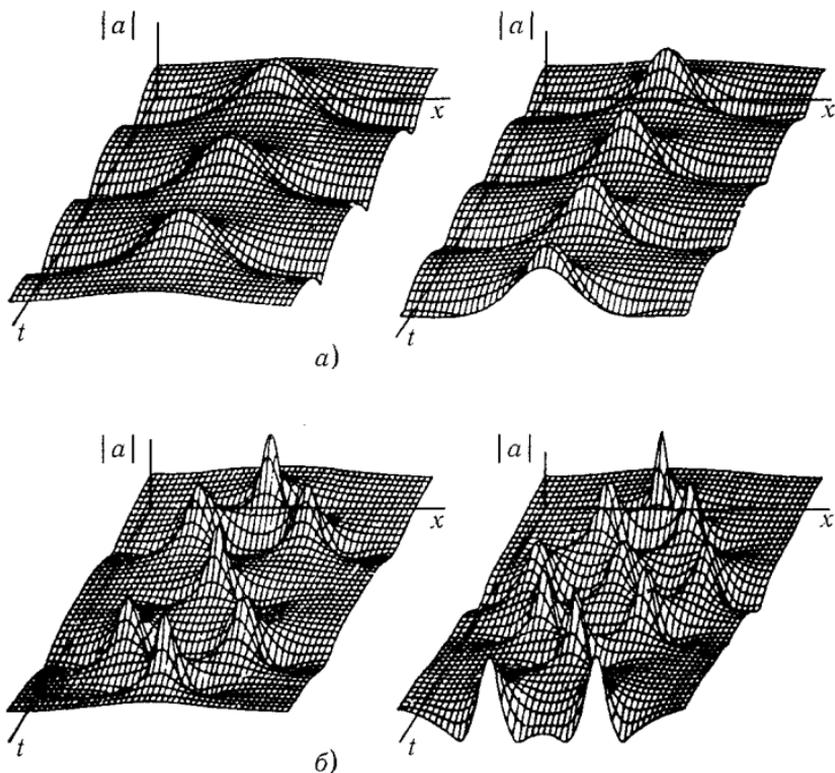


Рис. 20.2. Само модуляция волны в нелинейной линии передачи при  $\beta v_k < 0$  [15]

тия вдоль линии передачи параметрической неустойчивости, которая в данном случае приводит к появлению волн-спутников с близкими к несущей частотами. Именно этой неустойчивости и соответствует комплексность скоростей распространения волн модуляции, о которой мы только что говорили. Подобную разновидность параметрической неустойчивости (на языке гл. 11 — это вторая зона неустойчивости) в теории нелинейных волн называют модуляционной неустойчивостью.

Чтобы описать модуляционную неустойчивость и родственные ей явления, мы обратимся к основному уравнению теории модулированных волн в нелинейных средах — нелинейному параболическому уравнению, или нелинейному уравнению Шредингера; оно включает в себя уравнения (20.6), (20.7) как частный случай:

$$\left( \frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{i}{2k_0} \frac{d\omega}{dk} \Delta_{\perp} a = i \alpha \epsilon_{\text{н}} (|a|^2) a. \quad (20.8)$$

Здесь  $a$  — комплексная амплитуда  $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$  волны;  $\mathbf{k}$  — ее волновое число;  $\Delta_{\perp}$  — лапласиан по поперечным координатам  $y, z$ ;  $\epsilon_{\text{н}}(|a|^2)$  характеризует вид и величину нелинейности среды. Например, для световых волн  $\sqrt{\epsilon_{\text{н}}}$  — величина, пропорциональная нелинейной поправке к показателю преломления. Для более простого случая плоских волн вместо (20.8) мы будем использовать уравнение

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x}\right) - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + i\beta a |a|^2 = 0, \quad (20.9)$$

где  $\beta = \alpha \epsilon_{\text{н}}$ . Слагаемые в скобках описывают волны модуляции, бегающие в линейной среде без дисперсии с групповой скоростью  $v$ ; слагаемое со второй производной (параболическое слагаемое) пропорционально  $d^2 \omega / dk^2$  и ответственно за дисперсионное расплывание, а коэффициент  $\beta$  ответствен за величину и знак нелинейности ( $\beta \sim \alpha$  в (20.6), (20.7)).

Уравнения (20.8) и (20.9) — это уравнения второго приближения асимптотического метода для квазигармонических волн (см. гл. 17). Эти уравнения нетрудно получить, подобно уравнениям (17.30) (см. также [9]), если запастись некоторым терпением и аккуратно проделать все арифметические выкладки. Мы здесь, однако, воспользуемся более простым и наглядным выводом [6, 10], который основывается на уже знакомых уравнениях (20.1), (20.2). Перепишем здесь (20.2) в виде (напомним, что речь идет о квазигармонических волнах)

$$\partial A^2 / \partial t + \partial[v(\omega, A^2)A^2] / \partial x = 0 \quad (20.10)$$

и введем комплексную амплитуду (оггибающую)<sup>1</sup>

$$a(x, t) = A(x, t) \exp[i\varphi(x, t)], \quad (20.11)$$

где  $\partial \varphi / \partial t = \omega_0 - \omega$ ,  $\partial \varphi / \partial x = k - k_0 = k_1$  ( $k_0, \omega_0$  — волновое число и частота гармонической волны, на фоне которой и существуют наши волны модуляции). Если теперь правую часть дисперсионного уравнения (20.3) разложить в ряд вблизи  $k_0$  и приравнять нулю  $A^2$ , то после подстановки этого разложения и выражения (20.11) в (20.1) и (20.10) получим искомое уравнение (20.9). Проделаем это на примере слабонелинейных гравитационных волн, нелинейное дисперсионное уравнение

<sup>1</sup>Практически мы сейчас повторим вывод уравнений (20.6), (20.7) только в комплексной форме, и не будем пренебрегать никакими слагаемыми второго порядка малости.

для которых было получено еще Стоксом в середине прошлого века:

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 A^2). \quad (20.12)$$

Полагая, что  $k = k_0 + k_1$ , разложим правую часть этого выражения в ряд

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2k_0} k_1 - \frac{\omega_0}{8k_0^2} k_1^2 - \frac{1}{2} \omega_0 k_0^2 A^2 + \dots, \quad (20.13)$$

где  $\omega_0 = (gk_0)^{1/2}$  — закон дисперсии гравитационных волн в линейном приближении (см. гл. 5). После подстановки (20.13), (20.11) в (20.10), (20.1) найдем нелинейное параболическое уравнение (20.9)

$$\left( \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\omega_0}{2k_0} \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{i}{2} \frac{\omega_0}{4k_0^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + i \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |a|^2 a = 0,$$

в котором для модулированных гравитационных волн на глубокой воде  $v = \omega_0/(2k_0)$ ,  $d^2\omega/dk^2 = -\omega_0/(4k_0^2)$ ,  $\beta = \omega_0 k_0^2/2$ .

Уравнение (20.8), описывающее неоднородные волны модуляции, получается совершенно аналогично, только  $k$  следует считать вектором и при разложении в ряд вблизи  $k_0$  необходимо учитывать его поперечные составляющие (при этом  $\partial\psi/\partial x = k_{1x}$ ,  $\partial\psi/\partial y = k_{1y}$ ,  $\partial\psi/\partial z = k_{1z}$ ). Предлагаем читателю проделать это самостоятельно на уже рассмотренном примере гравитационных волн.

Уравнение (20.9) сейчас является одним из основных уравнений «нелинейной физики» — оно описывает эволюцию оптических волн в нелинейных кристаллах, ленгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твердых телах и многое другое. Это уравнение, в частности, связано с известным и теории сверхпроводимости уравнением Гинзбурга–Ландау [12].

Опишем здесь на основе этого уравнения три основных явления, наблюдаемых при распространении одномерных квазигармонических волн в слабонелинейных средах, — модуляционную неустойчивость, существование стационарных волн огибающих (в том числе солитонов) и периодически повторяющийся во времени и пространстве возврат слабомодулированной волны (в процессе эволюции приближающейся к периодической последовательности солитонов) к исходному — слабомодулированному состоянию.

Модуляционная неустойчивость, как мы сейчас увидим, возможна только при определенном соотношении знаков нелинейности и диспер-

сии групповой скорости:

$$\beta d^2\omega/dk^2 < 0. \quad (20.14)$$

Понять физический механизм этого ограничения (обычно называемого условием Лайтхилла) проще всего, если рассматривать эффект самомодуляции не на пространственно-временном языке, а на спектральном, ограничиваясь анализом взаимодействия лишь трех волн осцилляторов, образующих волну с синусоидальной модуляцией.

Для комплексных амплитуд несущей  $\omega_0$  и симметрично расположенных относительно нее спектральных спутников  $\omega_{\pm}$  из (20.9) получаются уравнения вида (амплитуды спутников предполагаются малыми)

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -i\beta|a_0|^2 a_0, \\ \dot{a}_{\pm} &= -i\beta a_0^2 a_{\mp}^* - 2i(\beta|a_0|^2 + (d^2\omega/dk^2)k_1^2/4)a_{\pm}. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Здесь учтено, что ввиду спектральной близости спутников расстройка  $\delta = 2\omega_0 - \omega(k_0 + k_1) - \omega(k_0 - k_1) \approx -(d^2\omega/dk^2)^2$ . Таким образом, мы вернулись к задаче о параметрической неустойчивости. Параметрический инкремент, с которым нарастает амплитуда спутников в заданном поле несущей,

$$\gamma = \pm k_1[-\beta|a_0|^2 d^2\omega/dk^2 - (d^2\omega/dk^2)^2 k_1^2/4]^{1/2}. \quad (20.16)$$

Поскольку пространственный масштаб модуляции может быть произволен, необходимое (а при  $k_1 \rightarrow 0$  и достаточное) условие модуляционной неустойчивости есть  $\beta d^2\omega/dk^2 < 0$ .

Теперь уже очевиден и его физический смысл: чтобы модуляционная неустойчивость появилась, нелинейная расстройка от синхронизма, пропорциональная  $\beta|a_0|^2$  должна скомпенсировать линейный рассинхронизм, пропорциональный  $(d^2\omega/dk^2)k_1^2$ . Естественно, что это возможно лишь при не слишком больших  $k_1$ :  $|k_1| < k_0$ . Согласно (20.16) параметрический инкремент почти линейно растет с ростом  $|k_1|$  от нуля, затем достигает максимума и довольно быстро падает до нуля при  $|k_1| \rightarrow k_0$ , где  $k_0 = 4|\beta(d^2\omega/dk^2)^{-1}||a_0|^2$ . Для коротковолновой модуляции ( $\Lambda < 2\pi/k_0$ ) нелинейная расстройка не в состоянии скомпенсировать дисперсионное распыление, и углубления модуляции происходить не будет (инкремент становится мнимым).

Явление самомодуляции читатель, возможно, наблюдал на море, глядя на цуги ветровых волн. Это явление имеет отношение к объяснению поверья «девятого вала» [13].

Нелинейная стадия развития модуляционной неустойчивости зависит от асимптотики начального возмущения при  $|x| \rightarrow \infty$ . Если это возмущение достаточно быстро спадает на бесконечности, то, как и для волновых импульсов самого поля (их эволюция в одноволновом приближении описывается уравнением Кортевега–де Вриза), начальный импульс волны модуляции произвольной формы при  $t \rightarrow \infty$  распадается на солитоны (это, конечно, «радиосолитоны» — они с высокочастотным заполнением) и осциллирующий «хвост». Как и для аналогичной задачи, описываемой уравнением КдВ, этот «хвост» содержит мало энергии по сравнению с энергией, запасенной в солитонах, и принципиален лишь при рассмотрении процессов взаимодействия солитонов друг с другом (см. гл. 19). Число солитонов зависит от формы начального профиля. Строго проблема эволюции локализованного в пространстве начального возмущения решается с помощью метода обратной задачи рассеяния [14]; здесь же мы приведем лишь решение уравнения (20.9) в виде уединенных стационарных волн модуляции (волн огибающей)

$$a(x, t) = A \operatorname{sch} \left\{ \left| \frac{\beta}{2d^2\omega/dk^2} \right|^{1/2} A[(x - x_0) - (v + V)t] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i \frac{\beta}{2} A^2 t - i \left( \frac{d^2\omega}{dk^2} \right)^{-1} [(x - x_0) - (v + V)t + \psi_0] \right\}, \quad (20.17)$$

где  $A$  — амплитуда солитона;  $V$  — его скорость в системе координат, движущейся с групповой скоростью  $v$ ;  $x_0$  и  $\psi_0$  — начальные координата и фаза солитона. Это решение получается следующим образом. В (20.9) нужно перейти к действительным переменным  $A$  и  $\psi$ , затем, полагая, что амплитуда и фаза движутся с постоянными скоростями  $V$  и  $V_\psi$  соответственно (для существования решения в виде солитона необходимо  $V > 2V_\psi$  [16]), получить для них дифференциальные уравнения в обыкновенных производных. Эти уравнения легко интегрируются и сводятся к одному уравнению нелинейного осциллятора [15], решение которого и записывается в виде (20.13). Эти уравнения помимо солитонного решения — импульса огибающей имеют еще решение в виде уединенного провала — волны затемнения [15]. Предлагаем провести интегрирование самостоятельно, обращаясь за справками в [16].

Подчеркнем, что в отличие от обычного солитона КдВ скорость и амплитуда солитона огибающей являются независимыми параметрами. Экспериментально появление таких солитонов и их взаимодействие друг с другом исследовалось для волн на глубокой воде в работе [11].

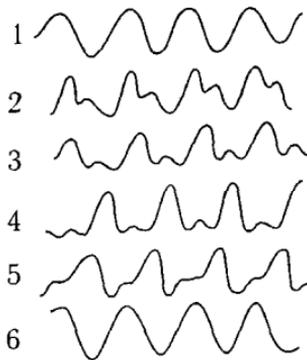


Рис. 20.3. Волны модуляции на поверхности глубокой жидкости: а — стационарные волны; б — явление возвращаемости

Если же начальное возмущение не локализовано в пространстве, а, например, периодическое, характер его эволюции будет совершенно иной — нарастающие в результате модуляционной неустойчивости синусоидальные волны модуляции будут нелинейным образом искажаться: на периоде волны образуются одни или несколько солитонов, но затем солитоны сглаживаются, и волна вновь приходит в начальное состояние, потом все повторяется и т. д. Явление возвращаемости наблюдалось экспериментально и для обсуждаемого нами примера — гравитационных волн на глубокой воде [11, 17, 45]. Соответствующие численные результаты представлены на рис. 20.3 [11, 18, 19, 45]. На рис. 20.4 показаны результаты физических экспериментов с нелинейными  $LC$ -цепочками, которые приближенно описываются уравнениями типа КдВ с кубической нелинейностью. При синусоидальном возбуждении цепочки на границе наблюдалась почти полная возвращаемость вдоль цепочки; синусоида трансформировалась в периодическую последовательность солитонов, т. е. возбуждалось большое число осцилляторов-гармоник, затем солитоны вновь превращались в синусоиду — все гармоники возвращали энергию первой гармонике. Впервые этот эффект в численном эксперименте наблюдали Ферми, Паста и Улам [20]. Они пытались подтвердить гипотезу о том, что в системах с очень большим числом степеней свободы наличия даже слабой нелинейности достаточно, чтобы энергия, запасенная в отдельных степенях свободы (модах), равномерно распределилась по всем модам (перемешивание) и таким образом установилось бы термодинамическое равновесие (термализация). Ферми, Паста и Улам экспериментировали с моделями нелинейных линейных цепочек из большого числа частиц и термализации

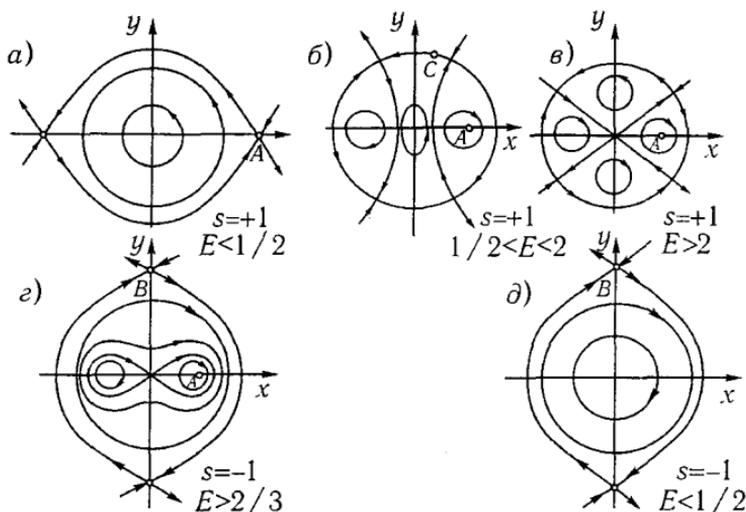


Рис. 20.4. Периодическая эволюция нелинейных волн в  $LC$ -цепочках; синусоидальная волна, запускаемая в линию, превращается в последовательность импульсов, по форме близких к солитонам (1–4), после чего сильно нелинейная волна вновь переходит в синусоиду (5, 6)

не обнаружили — система периодически возвращалась в состояние с начальным распределением энергии (парадокс Ферми–Паста–Улама).

При осмысливании этого парадокса возникают два вопроса: первый и главный — почему нет перемешивания; второй — почему система не приходит к какому-либо равновесному состоянию (например, последовательности солитонов), а периодически колеблется? Прежде чем ответить на эти вопросы, напомним, что рассматриваемые системы консервативны, т. е. в фазовом пространстве соответствующих им конечномерных моделей (из  $N$  взаимодействующих гармоник) не может быть ни асимптотических устойчивых состояний равновесия, ни каких-либо других аттракторов (предельных траекторий или множеств траекторий, возможных в системах, где есть сжатие фазового объема). Однако в фазовом пространстве таких систем, как мы увидим в гл. 22 и 23, даже при небольшом числе  $N$  возможно существование хотя и не притягивающих, но занимающих достаточно большую область в фазовом пространстве множеств, устроенных очень сложно, движение внутри которых и отвечает нашим интуитивным представлениям о перемешивании. Обсуждаемые нами сейчас системы принадлежат к классу вполне интегрируемых систем, в которых существование подобных сложных (перемешивающих) областей в фазовом пространстве невозможно

но<sup>1</sup>. Близостью модели, с которой экспериментировали Ферми, Паста и Улам, к вполне интегрируемой системе и объясняется тот феномен, что они не наблюдали термализации.

Полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с периодическими граничными условиями доказана в работе [21]. Нелинейная волна модуляции в этом случае имеет дискретный спектр, причем из-за дисперсии групповой скорости спектр можно считать ограниченным (спутники с высокими номерами нерезонансны и поэтому не нарастают). В такой ситуации естественно перейти от пространственно-временного описания к спектральному, рассмотрев взаимодействие нескольких (в простейшем случае трех ( $\omega_0$  и  $\omega_{\pm}$ ) спектральных составляющих). При этом предполагается выполнение в среде с кубической нелинейностью условий синхронизма  $2k_0 = k_- + k_+$  и  $2\omega_0 = \omega_+ + \omega_- + \Delta\omega$ , где  $\Delta\omega$  — малая расстройка от точного синхронизма.

Уравнения для амплитуд  $A_0$  и  $A_{\pm}$  получаются точно так же, как, например, и уравнения для амплитуд основной волны и ее второй гармоники, взаимодействующих в среде с квадратичной нелинейностью (см. гл. 17). Мы здесь приведем соответствующую систему в частном случае, когда спутники тождественны, т. е.  $A_+ \equiv A_- = A_1$ ,  $\varphi_+ = \varphi_- = \varphi_1$  [22]:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 &= 2A_0^2 A_1^2 \sin \Phi, & \dot{A}_1 &= -AA_0^2 A_1^2 \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -s + A_1^2 - A_0^2 + (2A_1^2 - A_0^2) \cos \Phi, \end{aligned} \quad (20.18)$$

где  $\Phi = [\Delta\omega t + 2(\varphi_0 - \varphi_1)] \text{sign} \beta$ ,  $s = \text{sign}(\beta d^2\omega/dk^2)$ , а дифференцирование осуществляется по безразмерному времени  $\tau = \Delta\omega t$  (модуляционной неустойчивости соответствует  $s = -1$ ). Воспользовавшись интегралами

$$A_0^2 + 2A_1^2 = E, \quad A_1^2(2A_0^2 \cos \Phi + 2A_0^2 + A_1^2 - 2s) = F, \quad (20.19)$$

можно свести исследование системы (20.18) к анализу движений на фазовой плоскости.

Получившиеся фазовые портреты представлены на рис. 20.5. Для удобства в качестве фазовых переменных взяты  $x = (2A_0)^{1/2} \cos(\Phi/2)$  и  $y = (2A_0)^{1/2} \sin(\Phi/2)$ . Физический смысл имеют лишь траектории, лежащие внутри окружности  $x^2 + y^2 = 2E$ : уход изображающей точки внутрь этой окружности соответствует уменьшению энергии основной

<sup>1</sup>Для конечномерных систем с  $N$  степенями свободы полная интегрируемость означает существование  $(N - 1)$ -ю независимого интеграла движения.

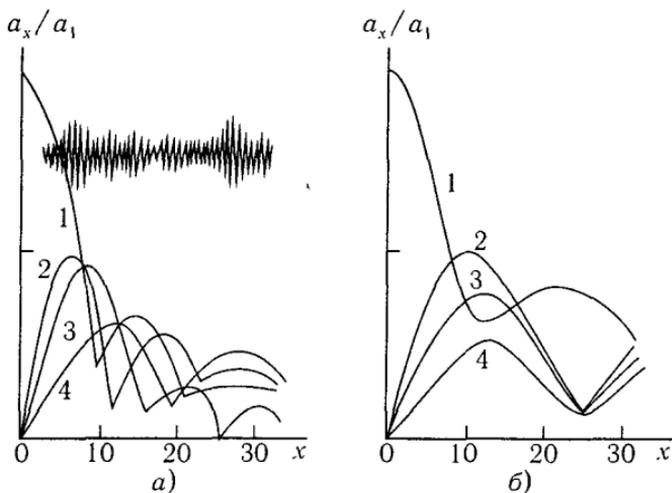


Рис. 20.5. Фазовые портреты консервативной системы, описывающей модуляционный распад основной гармоники на пару одинаковых спутников. Координаты состояний равновесия:  $A - x = [(6E + 4s)/7]^{1/2}$ ,  $y = 0$ ;  $B - x = 0$ ,  $y = (2E - 4s)^{1/2}$ ;  $C - x = s^{1/2}$ ,  $y = (2E - s)^{1/2}$

моды и генерации спутников. Видно, что это возможно лишь при выполнении условия (20.14) и, кроме того, при достаточно большой энергии, запасенной в основной моде. При  $E > 2$  возможна полная передача энергии спутникам — сепаратрисы идут с окружности и состояние равновесия  $x = y = 0$  (рис. 20.5в), при  $1/2 < E < 2$  — лишь частичная (рис. 20.5б). При малой энергии основной волны (или при  $s = +1$ ) модуляционной неустойчивости нет (рис. 20.5а-в).

Явление возвращаемости описывают траектории на рис. 20.5в, близкие к сепаратрисам: вначале энергия почти полностью передается спутникам, затем возвращается основной моде и так далее. Солитонам в данной модели соответствуют те состояния равновесия, координаты которых указаны в подписи к рис. 20.5.

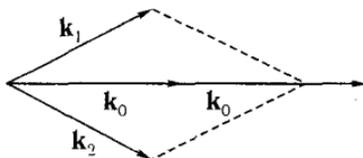


Рис. 20.6. Непериодический (а) и периодический (б) обмен энергией между основной модой (1) и спутниками (2, 3, 4).

Заметим в заключение этого параграфа, что эффект возвращаемости наблюдается и в более сложных ситуациях, например когда модулированные высокочастотные волны взаимодействуют с низкочастотными. На рис. 20.6 приведены результаты эксперимента [23] по взаимодействию таких волн в линии передачи. Описывающие эту «среду» усредненные по быстрым осцилляциям уравнения аналогичны уравнениям для ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме [24]:

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{i}{2}\alpha \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{i}{2}\omega_p n a = -\nu_1 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \quad (20.20)$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \zeta \frac{\partial^2 |a|^2}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^4 n}{\partial t^4} + \nu_2 \frac{\partial^3 n}{\partial x^2 \partial t}.$$

Здесь  $a$  — амплитуда высокочастотной (ленгмюровской) волны;  $n$  характеризует поле низкочастотной (ионно-звуковой) волны;  $\omega_p = -1[C_1 + C_2/(L_2 C_1 C_2)]^{1/2}$  — частота, вблизи которой проведено усреднение;  $\alpha = \frac{3}{2}\omega_p r_D$  (где  $r_D = \frac{2C_2 C^2}{3C_1 \omega_p^2}$ );  $c = [L_1(C_1 + C_2)]^{-1/2}$  — скорость низкочастотной волны;  $\zeta = c_2/c_1$ ;  $\delta = r_D^2/l^2$  (где  $l$  — характерный размер высокочастотных волновых пакетов);  $\nu_1 = (R/2)\sqrt{C_1/L_2}$  и  $\nu_2 = RC_1/2L_1 C_2$  характеризуют затухание волн.

В этом эксперименте на границе «полубесконечной» линии (линии из 50 ячеек, согласованной на конце) возбуждались монохроматическая «ленгмюровская» (с частотой  $\omega$ ) и «ионно-звуковая» (с частотой  $\Omega$ ) волны. В процессе распространения ленгмюровская волна становилась модулированной — возникало несколько десятков спутников, затем в зависимости от соотношений  $\omega/\omega_p$  и  $\Omega/\omega_p$  устанавливался либо режим стационарного распространения ленгмюровских солитонов (рис. 20.6а), либо режим, соответствующий возвращаемости — происходил периодический обмен энергией между спутниками и несущей (рис. 20.6б). В этой системе наблюдались и более сложные режимы неперiodического обмена энергией, к обсуждению которых мы вернемся в гл. 23.

### 20.3. Самофокусировка

Обратимся теперь к обсуждению эволюции неоднородной модулированной волны в рамках уравнения (20.1). Для волн модуляции малой амплитуды ( $a \sim \exp[i(\Omega t - kx - \mathbf{k}_\perp \mathbf{r})]$ ) получаем, линеаризуя (20.1),

где  $\varepsilon_n(|a|^2) = -\beta|a|^2$ , закон дисперсии

$$\Omega(k, k_{\perp}) = vk \pm \left[ \left( \frac{v}{2k_0} k_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} k^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 2\beta|a_0|^2 + \frac{v}{2k_0} k_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} k^2 \right) \right]^{1/2} \quad (20.21)$$

( $\Omega$ ,  $k$  и  $k_{\perp}$  — частота, продольное и поперечное волновые числа волн модуляции), из которого в частном случае плоских волн получается уже известный нам инкремент модуляционной устойчивости (20.12). Сейчас, наоборот, мы для простоты будем считать, что одномерные возмущения отсутствуют, т. е.  $k \equiv 0$ . Тогда из (20.21) при  $\beta < 0$  следует, что для всех

$$k_{\perp}^2 < 4|\beta| |a_0|^2 k_0/v \quad (20.22)$$

величина  $\Omega(k_{\perp})$  оказывается чисто мнимой — неоднородные возмущения с частотой, равной частоте заполнения, нарастают вдоль направления распространения. Физически это проявляется следующим образом: если на границу нелинейной среды, диэлектрическая проницаемость которой растет с ростом интенсивности поля (для определенности мы говорим об электромагнитных волнах), подать плоскую волну частоты  $\omega_0$ , то в процессе распространения волна превращается в периодическую в поперечном направлении систему волновых пучков. Это и есть явление самофокусировки [25, 26]. Иными словами, неустойчивость, приводящая к самофокусировке, — это стационарный пространственный вариант параметрической неустойчивости или распада пары квазичастиц, находящихся в одном состоянии, на пару квазичастиц той же энергии с различными направлениями импульсов  $2\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \Delta\mathbf{k}(|a|^2)$  (рис. 20.7).

Как видно из (20.22), самофокусировка начинается лишь при условии, что амплитуда (или мощность) входящей в нелинейную среду волны конечной апертуры превышает некоторое критическое значение. Например, для цилиндрических возмущений радиуса  $R$  самофокусировка начинается, лишь когда мощность энергии, заключенная внутри окружности радиуса  $R$ , больше величины  $P_{кр} \sim a_0^2 R^2 = \pi^2 v / (k_0 |\beta|)$ . Очевидно, что если бы мы говорили о безграничной в поперечном направлении волне, то условие (20.22) просто означало бы, что при малых  $|a_0|^2$  нарастают лишь возмущения очень больших поперечных масштабов. Но реальные пучки имеют конечную ширину, поэтому и появляется порог по амплитуде, определяемый (20.22), — размер возмущений не может быть больше размеров пучка.



Рис. 20.7. Распад пары квазичастиц с импульсом  $k_0$  на пару с той же энергией и импульсами  $k_1, k_2$  в самофокусирующей среде

Подобно тому, как для пространственно-временных пакетов, распространяющихся в одномерной слабонелинейной среде, дисперсия оказывала стабилизирующее действие и в результате могли устанавливаться стационарные волны модуляции, в случае развития неоднородных возмущений нелинейной фокусировке волны поперек направления распространения в принципе может воспрепятствовать дифракционное расплывание (описываемое в (20.8) слагаемым, пропорциональным  $\Delta_{\perp} a$ ). В результате совместного действия дифракции и нелинейности становится возможным существование стационарных сфокусированных волновых пучков [27]. Такие пучки, например цилиндрические волноводы, представляют собой чрезвычайный интерес с практической точки зрения — реализовав их, можно было бы передавать энергию, скажем, электромагнитного поля в нелинейной среде на большие расстояния, не опасаясь потерь, вызванных дифракцией. Однако такие волноводы неустойчивы.

Пояснить эту неустойчивость можно с помощью метода моментов [27]. Будем для простоты все коэффициенты в (20.8) считать равными единице:  $ia_t + \Delta a - |a|^2 a = 0$ .<sup>1</sup> Это уравнение можно записать в форме  $ia_t = \delta \mathcal{H} / \delta a^*$  [28], где гамильтониан  $\mathcal{H} = \int (|\nabla a|^2 - |a|^4/2) dr$ . Рассмотрим эволюцию во времени эффективной ширины пучка  $\langle r^2 \rangle = N^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 |a|^2 dr$  ( $N = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^2 dr$ ):

$$d^2 \langle r^2 \rangle / dt^2 = 4d \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla a|^2 dr - 2d \int_{-\infty}^{\infty} |a|^4 dr, \quad (20.23)$$

<sup>1</sup>Мы исследуем устойчивость однородного вдоль направления распространения пучка по отношению к однородным возмущениям.

где  $d$  — размерность пространства ( $d \geq 2$ ). Это выражение получается из определения  $\langle r^2 \rangle$  при использовании уравнений движения пучка в гамильтоновой форме и интегрирования по частям. Первое слагаемое в (20.23) описывает дифракционное распыление пучка, второе — его нелинейное сжатие. Таким образом, как следует из (20.23) [27, 28], при  $d > 2$  имеем  $d^2 \langle r^2 \rangle / dt^2 < 8\mathcal{H}$  (при  $d = 2$   $d^2 \langle r^2 \rangle / dt^2 = 8\mathcal{H}$ ). Стационарному волноводу (нелинейное сжатие компенсируется дифракционной расходимостью) отвечает значение  $\mathcal{H} = 0$ . Из последнего равенства видно, что двумерные (осесимметричные) волноводы неустойчивы — либо любое малое возмущение приводит к сжатию пучка (когда начальная энергия возмущений окажется отрицательной и, следовательно,  $\mathcal{H} < 0$ ), либо волновод расплывается (при  $\mathcal{H} > 0$ ).

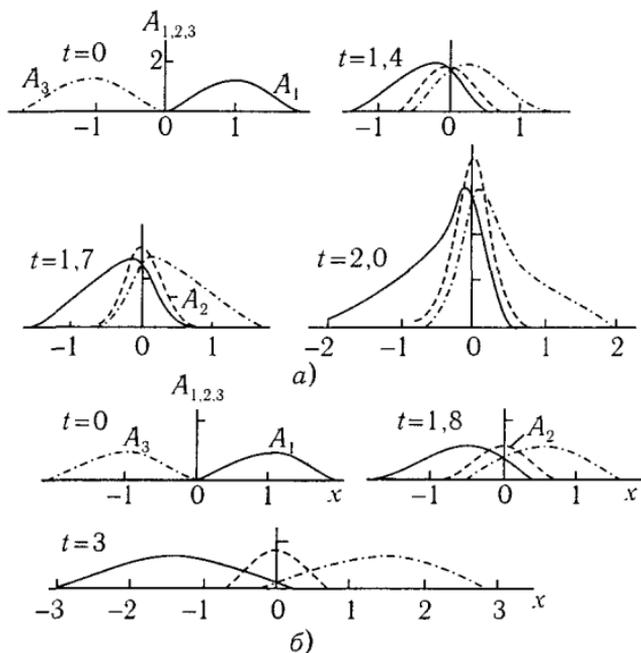


Рис. 20.8. Самофокусировка акустического пучка в воде с пузырьками газа: а — порог самофокусировки не достигнут; б — порог самофокусировки превышен

В заключение подчеркнем, что самофокусировка пучков, представляет интерес не только в оптике, но и в акустике, физике плазмы и т. д. Для примера на рис. 20.8 приведены результаты эксперимента по самофокусировке интенсивных ультразвуковых волн в дистиллированной

воде с пузырьками газа [29] (пузырьки в воде появились из-за явления кавитации).

## 20.4. Взаимодействие волновых пучков и пакетов

Явления, возникающие при нестационарном взаимодействии квазигармонических волн, очень разнообразны. Это, например, слияние импульсов и пучков резонансно взаимодействующих волн в неравновесных средах [30], существование связанных (трехволновых) солитонов модуляции [31], обращение волнового фронта [32, 33] и многие другие. Количественное описание этих и подобных эффектов весьма сложно, поскольку при этом приходится решать систему связанных нелинейных параболических уравнений. Качественно же многие из (них пояснить нетрудно, что мы и сделаем в этом параграфе.

*Обращение волнового фронта* [32, 46]. Уже в первых экспериментах по вынужденному рассеянию электромагнитных волн на создаваемой ими звуковой решетке (условие синхронизма  $\omega_0 = \omega_c + \Omega$ ,  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_c + \mathbf{q}$ , где  $\omega_0$ ,  $\mathbf{k}_0$  и  $\omega_c$ ,  $\mathbf{k}_c$  — соответственно частота и волновое число падающей и рассеянной электромагнитных волн, а  $\Omega$ ,  $\mathbf{q}$  — частота и волновое число акустической волны) было замечено, что при выходе из области нелинейного взаимодействия рассеянный назад волновой пучок примерно повторяет эволюцию пучка падающей волны-накачки. Затем выяснилось, что во многих экспериментальных ситуациях рассеянная волна точно воспроизводит комплексно-сопряженную падающую волну, сильно промодулированную в поперечном направлении [3]. Повторение рассеянной назад волной того же оптического пути, который прошла накачка по неоднородной (в общем случае случайной) среде, но в обратном направлении, означает, что область нелинейного взаимодействия работает как эффективное зеркало. Но зеркало очень необычное: отраженная назад волна повторяет оптический путь падающей волны, лишь когда ее фазовый фронт оказывается комплексно-сопряженным с фазовым фронтом накачки:  $a_c^*(\mathbf{r}) \sim a_0(\mathbf{r})$ . При этом полная фаза квазигармонической волны ( $i\omega t - ikx + i\varphi$ ) при распространении в  $x$ -направлении меняется, как у падающей при обратном ходе времени. Именно поэтому эффекты воспроизведения поперечной модуляции пучка падающей волны в излучении, идущем из области нелинейного взаимодействия, получили название «обращение волнового фронта».

То, что объем нелинейного взаимодействия работает как обращающее зеркало, связано с избирательным характером усиления рассеянной

(стоксовой) волны, которая нарастает из шумов, в поле сильно неоднородного в поперечном направлении пучка накачки. Если фазовый фронт накачки немодулирован, то в ее поле одинаково усиливаются рассеянные назад волны с произвольной поперечной структурой; если же фронт накачки сильно изрезан, то рассеянная волна, промодулированная в поперечном направлении таким образом, что максимумы ее амплитуды попадают на минимумы амплитуды накачки и наоборот, усиливается хуже, чем та, которая повторяет профиль накачки. Подобные «отражающие зеркала» могут быть весьма полезны, в частности, для реализации самокорректирующейся транспортировки мощного электромагнитного излучения на большие расстояния — для этого следует обратить волновой фронт слабого сигнала, пришедшего по трассе предполагаемой транспортировки, от будущего приемника излучения. Обращение волнового фронта такого сигнала позволяет использовать «собрannую» в его фазовом фронте информацию об этой трассе.

*Связанные солитоны* [31]. Как мы видели в гл. 17, при резонансном взаимодействии трех (или двух) пространственно однородных или стационарных волн в среде с квадратичной нелинейностью обмен энергией и, следовательно, изменение амплитуд волн осуществляется не при любых фазовых соотношениях между ними. При определенных разностях фаз возможно существование стационарного состояния (на рис. 17.5 ему соответствуют состояния равновесия), в котором амплитуды волн не меняются. Естественно предположить, что подобное состояние должно существовать и при взаимодействии модулированных волн — волновых пакетов, если изменение фаз при их нелинейном взаимодействии сбалансируют эффекты дисперсионного расплывания. На спектральном языке это, по существу, тот же самый нелинейный сдвиг частоты, компенсирующий линейный рассинхронизм, о котором мы говорили в связи с генерацией спутников и установлением солитонов огибающей при распространении волнового пакета в среде с кубической нелинейностью. В простейшей постановке, когда взаимодействуют основная волна  $\omega$  и ее вторая гармоника  $2\omega$ , а дисперсионные эффекты внутри узкого спектрального интервала существенны лишь на основной частоте, мы приходим к стандартному уравнению, описывающему солитоны и двумерные волноводы в среде с кубической нелинейностью:  $d^2 a_\omega / d\chi^2 - \alpha a_\omega + \gamma a_\omega |a_\omega|^2 = 0$ .

В [31] показано, что связанные солитоны устойчивы по отношению к возмущениям, не меняющим энергии взаимодействующих пакетов.

Слияние волновых импульсов при взрывной неустойчивости дает пример чисто энергетического взаимодействия волн. Фазы волн

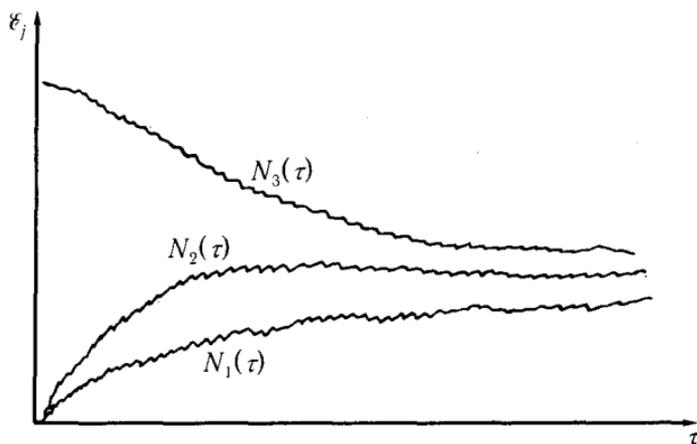


Рис. 20.9. Слияние импульсов при взрывной неустойчивости: а — амплитуды импульсов превышают критическое значение — импульсы сливаются; б — амплитуды меньше критических — импульсы разбегаются

при взрывной неустойчивости, как мы знаем (см. (17.3)), быстро синхронизируются. Поэтому можно сразу записать уравнение для амплитуд трех волн, удовлетворяющих условию  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ , дополнив уравнения (17.31) слагаемыми, пропорциональными групповым скоростям  $v_1, v_2, v_3$  волн:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = A_2 A_3, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} = A_1 A_3, \quad \frac{\partial A_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} = A_1 A_2.$$

(Здесь разность фаз волн  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = 0$ .) Допустим, что при  $t = 0$  одна из волн ( $A_3$ ) существенно преобладала над другими. Тогда для слабых волн  $A_1, A_2$  получаются линейные уравнения, из решения которых следует экспоненциальный рост  $A_1, A_2$  на начальной стадии. Когда амплитуды всех трех волн становятся одного порядка, неустойчивость переходит на более быструю нелинейную стадию и происходит «взрыв» — амплитуды волновых пакетов обращаются в бесконечность за конечное время  $t_\infty \sim \ln(A_{03}/A_{01}), t_\infty \sim \ln(A_{03}/A_{02})$ . ( $A_{01}, A_{02}, A_{03}$  — начальные амплитуды волн). Ситуация, очевидно, должна быть похожа на то, что происходит с пространственно однородными волнами при взрыве. Это и понятно, ведь разбегание волновых пакетов за счет различия групповых скоростей ( $v_1 \neq v_2 \neq v_3$ ) не успевает проявиться: перекрывающиеся в какой-то момент времени волновые пакеты перекрываются и при  $t \rightarrow t_\infty$ , так как слишком быстро они нарастают во времени. Именно об этом и говорят результаты аналитического и численного исследо-

вания [30, 34] (рис. 20.9). Естественно, что если начальные амплитуды импульсов малы, а разность групповых скоростей велика, то импульсы пройдут один сквозь другой за столь малое время, что неустойчивость не успеет вступить в нелинейную (взрывную) стадию.

## 20.5. Взаимодействие друг с другом волн, имеющих случайно модулированные фазы. Кинетика волн

В общем случае при взаимодействии квазигармонических волн в слабонелинейных средах изменения амплитуд и фаз волн могут осуществляться на существенно различных характерных временах. Например, мы уже видели, что при взрывной неустойчивости фазы волн быстро синхронизируются, после чего их разность можно считать практически постоянной и на этом фоне рассматривать нелинейную эволюцию амплитуд (см. гл. 17). Как мы не раз убеждались, разделение движения на быстрые и медленные позволяет при исследовании многих явлений продвинуться достаточно далеко без применения численных методов (вспомним метод разрывных колебаний, асимптотические методы, базирующиеся на медленности изменения параметров волн и последующем усреднении, и т. д.).

Рассмотрим сейчас с этой точки зрения элементарный процесс резонансного взаимодействия волн: распадное взаимодействие трех волн в среде с квадратичной нелинейностью, для реализации которого требуется выполнение условия синхронизма

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega(\mathbf{k}_3) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) + \Delta\omega.$$

Как мы видели в гл. 17, чтобы взаимодействие было эффективным, расстройка  $\Delta\omega$  должна быть малой; при увеличении расстройки волны обмениваются друг с другом все меньшей долей запасенной в них энергии (см. рис. 17.7). В предельном случае расстроек, больших по сравнению с нелинейностью, пропорциональной  $\sigma a$ , разность фаз  $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2$  взаимодействующих волн быстро изменяется во времени. В уравнении для  $\Phi$  появляется большая величина  $\Delta\omega$ , по сравнению с которой можно пренебречь нелинейными слагаемыми (т. е.  $\Phi \approx \Delta\omega$ ), поэтому движения разделяются на быстрые и медленные. Тогда, усредняя уравнения для амплитуд  $\dot{A}_j \sim A_j A_k \sin \Phi$  по быстровращающейся фазе  $\Phi$ , мы получаем, что  $\dot{A}_j \approx 0$ , т. е. взаимодействие отсутствует. Ответ правильный, если  $\Delta\omega = \text{const}$ . Однако если расстройка, достигая время от времени

больших значениях, в среднем остается близкой к нулю, то взаимодействие должно быть тем не менее эффективным (хотя и медленным), несмотря на быстрые пульсации фаз.

Прежде чем мы убедимся в этом, заметим, что подобная ситуация в физике нелинейных волн встречается довольно часто [35–44]. Случайные неоднородности среды, флуктуации ее параметров во времени, действие внешних нерегулярных полей — вот основные факторы, приводящие к «дрейфу» собственных частот взаимодействующих волн во времени или пространстве. Такой «дрейф» возможен и в случае, когда волны, образующие резонансный триплет, участвуют в большом числе других взаимодействий, влияние которых на исходный процесс можно грубо представить себе как действие эффективного внешнего поля. В этом случае приближение хаотических фаз допускает некоторое обоснование, опирающееся на возможность хаотизации индивидуальной ангармонической волны под действием регулярных внешних полей (см. [42] и гл. 22). Конечно, случайные пульсации параметров среды во времени или в пространстве приводят и к флуктуациям амплитуд волн (хотя бы потому, что энергия поля на избранной частоте несколько перераспределяется в пространстве), однако поскольку энергия волн в среднем не меняется, эти перераспределения энергии по волновому пакету должны быть невелики. Изменения же фазы ничем не ограничены. Например, из-за малой флуктуации групповой скорости, приведшей к сдвигу волны лишь на  $\lambda/2$ , фаза уже меняется на  $\pi/2$ .

Опираясь на эти соображения, рассмотрим характер взаимодействия трех волн (17.30), полагая их амплитуды медленно меняющимися, а фазы — быстроменяющимися функциями времени. При  $\partial a_j / \partial x = 0$ ,  $g_i = 0$ ,  $g_n = 0$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$ ,  $\Delta\omega = 0$  уравнения (17.30) принимают вид:

$$\dot{a}_1 = \sigma a_3 a_2^*, \quad \dot{a}_2 = \sigma a_3 a_1^*, \quad \dot{a}_3 = -\sigma a_1 a_2. \quad (20.24)$$

Запишем эти уравнения для квадратов амплитуд  $N_j = a_j a_j^*$  ( $a_j = A_j \exp(i\varphi_j)$ ):

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \sigma a_1^* a_2^* a_3 + \text{к. с.}, & \dot{N}_2 &= \sigma a_1^* a_2^* a_3 + \text{к. с.}, \\ \dot{N}_3 &= -\sigma a_1 a_2 a_3^* + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (20.25)$$

Если бы фазы были полностью некоррелированы, волны бы не взаимодействовали и их амплитуды сохранились бы равными начальным амплитудам  $a_j = N_j^{1/2} \exp(i\varphi_j)$ . Из-за частичной корреляции фаз воли слабое взаимодействие все-таки есть, поэтому к невозмущенным амплитудам  $a_j$  (здесь  $N_j$  — медленные функции времени по сравнению

с  $\varphi_j$ ) следует добавить малую поправку  $\mu a'_j$ , порождаемую другими волнами:

$$a_j(t, \mu t) = N_j^{1/2}(\mu t) \exp[i\varphi_j(t)] + \mu a'_j(t, \mu t). \quad (20.26)$$

Вычисляя  $\mu a'_j$  из исходных уравнений (17.30а) в приближении заданных полей двух других волн, в первом порядке по взаимодействию (т. е. по  $\mu$ ) находим

$$\mu a'_{1,2} = \sigma(N_{2,1}N_3)^{1/2} \int_{t_0}^t \exp[i(\varphi_3 - \varphi_{2,1})] dt, \quad (20.27)$$

$$\mu a'_3 = -\sigma(N_1N_2)^{1/2} \int_{t_0}^t \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)] dt,$$

где  $t_0$  — большое отрицательное время, когда включилось взаимодействие (т. е.  $\mu at = 0$  при  $t < t_0$ ). При интегрировании по быстрому времени медленные переменные  $(N_iN_j)^{1/2}$  можно вынести из-под интеграла. Подставляя теперь (20.20), (20.27) в (20.25) и ограничиваясь первым, не исчезающим при усреднении по фазам приближением, получаем

$$\begin{aligned} \dot{N}_3 = \sigma^2 & \left[ N_1N_2 \left\langle \exp[i(\varphi_1 + \varphi_2)] \int_{t_0}^t \exp[-i(\varphi_1 + \varphi_2)] dt' \right\rangle \right. \\ & - N_3N_1 \left\langle \exp[i(\varphi_3 - \varphi_1)] \int_{t_0}^t \exp[-i(\varphi_3 - \varphi_1)] dt' \right\rangle - \\ & \left. - N_2N_3 \left\langle \exp[i(\varphi_3 - \varphi_2)] \int_{t_0}^t \exp[-i(\varphi_3 - \varphi_2)] dt' \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (20.28)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по фазам. Полагая  $t_0 \rightarrow -\infty$  и интегрируя по частям, можно показать, что  $\left\langle \exp[i\theta(t)] \int_{-\infty}^t \exp[-i\theta(t')] dt' \right\rangle = 2\tau$ , где  $\tau$  — время корреляции функции  $\theta(t)$ . Таким образом, уравнения, описывающие изменения интенсивностей трех резонансно взаимодействующих волн в приближении хаотических фаз,

имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{N}_3 &= W(N_1 N_2 - N_2 N_3 - N_1 N_3), \\ \dot{N}_1 &= \dot{N}_2 = -W(N_1 N_2 - N_2 N_3 - N_1 N_3), \end{aligned} \quad (20.29)$$

где  $W = 2\sigma^2\tau$ . Из этих уравнений по-прежнему следуют соотношения Мэнли-Роу:  $N_1 - N_2 = \text{const}$ ,  $N_3 + N_1 = \text{const}$ ,  $N_3 + N_2 = \text{const}$ , однако характер взаимодействия совершенно иной, чем в случае динамических фаз. При заданном уровне суммарной энергии  $\mathcal{E}$  взаимодействующих волн (она, очевидно, сохраняется) (20.29) имеют единственное состояние равновесия  $N_j = \text{const}/\omega_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), которое устойчиво (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  в нашей системе независимо от начальных условий устанавливается состояние с равным распределением энергии по степеням свободы (рис. 20.10)

$$\mathcal{E}_j = \omega_j N_j = T_0 = \text{const}. \quad (20.30)$$

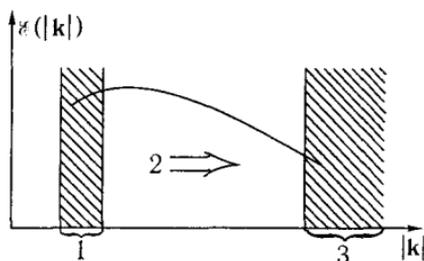


Рис. 20.10. Установление равновесного состояния при взаимодействии трех волн со случайно модулированными фазами

Такое равновесное распределение соответствует известному закону Рэля-Джинса (см. [40]). Если условия синхронизма выполнены сразу для многих троек волн, то вместо (20.29), суммируя по всем возможным резонансам типа  $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}') + \omega(\mathbf{k}'')$ , будем иметь [36, 38]

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{k}} \int & \left[ |\sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''}|^2 (N_{\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}''} - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'} - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}''}) \times \right. \\ & \left. \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \right] d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Здесь  $\sigma_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''}$  — коэффициент, определяющий нелинейное взаимодействие трех волн с волновыми числами  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$ . а  $\sigma(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$  —

дельта-функция, которая из всех троек волн, для которых выполнены условия резонанса частот, отбирает только те, для которых выполнены и условия резонанса волновых чисел. Это уравнение получено для волн, закон дисперсии которых определен в области как положительных, так и отрицательных частот, причем предполагаются выполненными условия  $\omega(-\mathbf{k}) = -\omega(\mathbf{k})$ .

Как видно, равновесный спектр и при произвольном числе троек волн будет характеризоваться равномерным распределением энергии по степеням свободы. Уравнение (20.31) имеет решение  $N_{\mathbf{k}} = T_0 \omega_{\mathbf{k}}$  (это легко проверить прямой подстановкой с последующим использованием соотношения  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}$ ).

Уравнения типа (20.31) называют кинетическими уравнениями для волн. Первое слагаемое в круглых скобках описывает процесс слияния квазичастиц с импульсами  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$ , т. е. рождение квазичастицы с импульсом  $\mathbf{k}$ , вторые два — их уничтожение, за счет распада на квазичастицы с импульсами  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$ . Впервые такие уравнения были получены Пайерлсом для описания «газа» фононов — акустических волн в твердом теле (диэлектрике) [41].

Во многих случаях, как, например, для волн на поверхности жидкости [36, 37], закон дисперсии волн таков, что условия трехчастотного взаимодействия не выполнены. В этом случае говорят, что спектр нераспадный. Тогда основным процессом, определяющим характер нелинейных волновых явлений в слабонелинейной среде, будет четырехквантовый процесс типа  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_3}$  либо  $\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} = \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_3}$ . В приближении хаотических фаз волн для его описания, повторяя операции, проделанные при выводе (20.29) (исходными здесь будут уравнения типа  $\dot{a}_j \approx a_i a_l a_k$ ), можно получить кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} \dot{N}_{\mathbf{k}} = & \int |\sigma_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 (N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}_3} + N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_2} N_{\mathbf{k}_3} - \\ & - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_2} - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_1} N_{\mathbf{k}_3}) \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}) \times \\ & \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (20.32)$$

Здесь спектр волн предполагается непрерывным ( $N_{\mathbf{k}}$  — плотность числа квантов в спектральном интервале от  $\mathbf{k}$  до  $\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}$ ). Опять прямая подстановка показывает, что равновесному состоянию соответствует спектр Рэля-Джинса, т. е. равновесное спектральное распределение в ансамбле из большого числа квазичастиц не зависит от характера взаимодействия (столкновений) между ними, в результате которого это равновесие устанавливается.

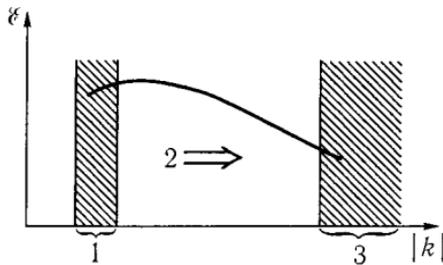


Рис. 20.11. Спектр слабой турбулентности: 1 — область источника, 2 — поток энергии в инерционном интервале, 3 — область стока

пространстве областях (рис. 20.11). Поток энергии из области источника в область стока энергии осуществляется через инерционный интервал (спектральную область, где и источники, и стоки энергии отсутствуют) за счет взаимодействия волн различных масштабов друг с другом. Если фазы волн в результате взаимодействия хаотизируются, то такой ансамбль волн со случайными фазами в диссипативной среде, поддерживаемый внешними источниками энергии, называют слабой волновой турбулентностью [36–38].

Слабая волновая турбулентность описывается с помощью кинетического уравнения для волн

$$\dot{N}_{\mathbf{k}} = I_{\text{ст}}\{N_{\mathbf{k}}\} + D(\mathbf{k}, N_{\mathbf{k}}) - \Gamma(\mathbf{k}, N_{\mathbf{k}}), \quad (20.33)$$

которое представляет собой уравнение баланса квазичастиц:  $D(\mathbf{k}, \dot{N}_{\mathbf{k}})$  описывает приток энергии в систему, а  $\Gamma(\mathbf{k}, N_{\mathbf{k}})$  — ее потерю. Если приток энергии связан с неустойчивостью, то  $D(\mathbf{k}) = \gamma(\mathbf{k})N_{\mathbf{k}}$ ; сток энергии — это обычно потери из-за трения, вязкости (например, для волн на поверхности воды  $\Gamma(\mathbf{k}, N_{\mathbf{k}}) \sim \nu k^2 N_{\mathbf{k}}$ );  $I_{\text{ст}}\{N_{\mathbf{k}}\}$  — это интеграл столкновений, учитывающий взаимодействие между волнами в приближении хаотических фаз.

Для трехволновых взаимодействий он совпадает с правой частью (20.31), а для четырехволновых — с правой частью (20.32).

В инерционном интервале, который в спектральном  $\mathbf{k}$ -пространстве расположен между областями источника и стока, стационарное решение кинетического уравнения — спектр слабой волновой турбулентности — определяется лишь интегралом столкновений, влияние же области источника и стока энергии можно учесть как граничные условия. Таким образом, задача о нахождении спектров турбулентности

Если среда диссипативна, то существование в ней незатухающих волновых движений возможно лишь при условии, что траты волновой энергии компенсируются внешним источником. Во многих случаях (например, при возбуждении гравитационных волн на поверхности воды ветром [36]) энергия вкладывается в систему взаимодействующих волн и затем отбирается от нее за счет диссипации в существенно отдаленных друг от друга в спектральном про-

сводится к нахождению распределений  $N(k)$ , обращающих в нуль интеграл столкновений. Одно из решений уравнения  $I_{\text{ст}}\{N_{\mathbf{k}}\} = 0$  мы уже знаем — это распределение Рэля–Джинса. Оно, однако, соответствует ситуации, когда нет потока энергии из области источника в область стока, т. е. система равновесна. Ненулевым значениям потока энергии через инерционный интервал отвечают универсальные степенные распределения  $N(\omega)$  типа  $\mathcal{E}(\omega) \sim \omega^\beta$  [44]. В настоящее время разработаны универсальные способы решения уравнения (20.33), с которыми читатель может ознакомиться, прочитав обзор [36].

# Автоколебания в распределенных системах

## 21.1. Общие замечания

Распределенные автоколебательные системы чрезвычайно распространены в природе и технике [13]. К ним относятся оптические квантовые генераторы (лазеры), важнейшие функциональные системы живого организма (системы кровообращения, дыхания, речи), духовые и струнные музыкальные инструменты, переменные звезды (цефеиды), автокаталитические химические реакции. Автоколебательный характер имеют некоторые процессы, связанные с сосуществованием различных биологических видов [1]. В СВЧ-электронике типичными распределенными автоколебательными системами являются генераторы обратной волны и ряд других черенковских (в том числе релятивистских) генераторов.

Как мы уже знаем (см. гл. 14), автоколебательной является всякая неконсервативная система, в которой в результате развития неустойчивостей возможно установление незатухающих волновых или колебательных движений, параметры которых определяются самой системой и не зависят от конечного изменения начальных условий.

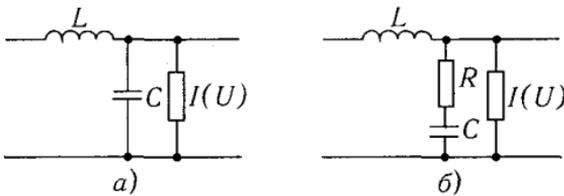


Рис. 21.1. Примеры длинных линий — моделей активных сред: а — линия без дисперсии; б — линия с высокочастотными линейными потерями и тем же током  $I(U)$

Рассмотрим на конкретном примере возникновение и ограничение неустойчивости в распределенной автоколебательной системе. Моделью среды с усилением может служить линия, представленная на рис. 21.1а. Если среда активна (т. е.  $I(U) = -gU$ , где проводимость  $g$  достаточно велика), но линейна, то любое поданное на вход возмущение будет нарастать. Однако при достаточно больших амплитудах обязательно вступит в действие один из механизмов ограничения: проявится нелиней-

ность проводимости или емкости, эффект усиления сменится эффектом искажения и ограничения. Например, активная нелинейная среда, для которой  $I(U) = -gU + \beta gU^3$ , при малых амплитудах представляет собой усилитель (проводимость отрицательна, т. е.  $I(U) \approx -gU$ ), а при больших — это среда с нелинейным поглощением ( $U \approx [I(U)/\beta g]^{1/3}$ ). Здесь механизм ограничения — нелинейное затухание.

Для одномерных задач можно надеяться на построение более или менее полной теории автоколебаний, если учесть, что характер протекающих в неравновесных средах нелинейных волновых процессов определяется конечным числом комбинаций таких характеристик среды, как дисперсия, нелинейность, диссипация. Именно это обстоятельство позволяет единообразно подойти к описанию нелинейных волн в неравновесных средах и на основе рассмотрения небольшого числа основных (модельных) задач попытаться воссоздать более или менее общую картину волновых явлений в таких средах.

Нелинейные бегущие волны в активных средах можно описывать в рамках уже знакомого нам одноволнового приближения, когда ввиду малости нелинейности удастся ограничиться рассмотрением волновых возмущений лишь одного вида.

Рассмотрим несколько типовых задач, в каждой из которых попытаемся последовать действию нелинейности, диссипации и дисперсии поочередно. Учтем сначала только нелинейность среды, эквивалентная схема которой дана на рис. 21.1а. Уравнение для волн в такой линии без дисперсии с нелинейным активным заполнением имеет вид

$$\partial U/\partial t + V_0 \partial U/\partial x = -I(U)/C. \quad (21.1)$$

Если в линии существенны высокочастотные линейные потери (рис. 21.1б), учет их приводит к уравнению следующего вида:

$$\partial U/\partial t + V_0 \partial U/\partial x - \nu \partial^2 U/\partial x^2 = -I(U)/C. \quad (21.2)$$

Если учесть еще и реактивную нелинейность (для простоты — квадратичную), то уравнение приобретет наиболее общий вид:

$$\partial U/\partial t + V_0 \partial U/\partial x + U \partial U/\partial x - \nu \partial^2 U/\partial x^2 = -I(U)/C. \quad (21.3)$$

Рассмотрим теперь каждый из этих случаев.

## 21.2. Среды без дисперсии. Разрывные волны

Пусть в уравнении (21.1)  $I(U) = -g(1 - \beta U^2)U$ . Введем  $m = \beta U^2$  и, перейдя к новой координате  $\xi = x - V_0 t$  и времени  $\mu\tau = t$ , полу-

чим  $\partial m / \partial \tau = (2g/C)m(1 - m) = \sigma m(1 - m)$ . Это уравнение можно проинтегрировать, что дает

$$\sigma \tau = \ln \frac{m(\tau, \xi)}{1 - m(\tau, \xi)} - \ln \frac{m_0(x - V_0 \tau)}{1 - m_0(x - V_0 \tau)},$$

$$m(x, \tau) = \frac{m_0(x - V_0 \tau)}{m_0(x - V_0 \tau) + [1 - m_0(x - V_0 \tau)] \exp(-\sigma \tau)}.$$

Как меняется сигнал в процессе распространения в такой среде? Если  $m_0 = 0$ , то и  $m(x, t) = 0$ , т. е. начальное значение сохраняется.

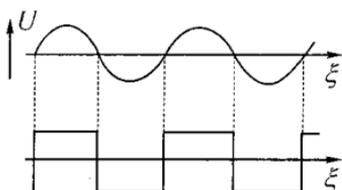


Рис. 21.2. Превращение синусоидальной волны, поступающей на вход линии (рис. 21.1а) в последовательность прямоугольных импульсов

Если же  $m_0 \neq 0$ , то с течением времени ( $t \rightarrow \infty$ ) амплитуда стремится к постоянному значению  $m = 1$ . Когда мы посылаем на вход импульс произвольной формы, в процессе распространения он превращается в прямоугольный со стандартной амплитудой. Если, например, на границе среды задана синусоидальная волна, то она превратится в последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой  $\beta^{-1/2}$  (рис. 21.2). Таким образом, мы получили, что в такой нелинейной среде произвольное

начальное возмущение превращается либо в пространственно однородное, либо в разрывное — разрыв возникает в точках, где  $m_0(x) = 0$ . Возникновение разрывов есть, очевидно, результат пренебрежения дисперсией в области быстрых изменений поля.

### 21.3. Стационарные волны

Наличие дисперсии в области высоких частот (малых масштабов) приведет к тому, что высшие гармоники начального возмущения не будут находиться в синхронизме с основной волной, а спектр нелинейной волны будет ограничен. Проследить аналитически за эволюцией волны в активной нелинейной среде с дисперсией, к сожалению, не удастся, поскольку даже простейшие из уравнений, описывающих распространение волн в таких средах, не решаются. Особый интерес поэтому представляет исследование стационарных волн — волн, распространяющихся с постоянной скоростью и без изменения формы, которые

устанавливаются в результате конкуренции между действующими нелинейностью и дисперсией.

Учтем теперь высокочастотные потери (мнимая дисперсия), т. е. обратимся к уравнению (21.2). В этом случае, очевидно, фронт сгладится. Для решения уравнения воспользуемся приближением стационарных волн. Заметим, что в автоколебательных системах (речь идет о кольцевых либо безграничных системах) стационарным волнам принадлежит, по-видимому, особая роль, подобная роли предельных циклов в сосредоточенных системах. Это удобно пояснить с помощью спектрального подхода, в рамках которого стационарную волну можно рассматривать как сумму гармонических волн, амплитуды и фазы которых связаны друг с другом алгебраически, т. е. стационарной волне можно поставить в соответствие равновесное состояние системы уравнений для комплексных амплитуд гармоник.

Период установившейся стационарной бегущей волны определяется либо граничными, либо начальными условиями. Скорость стационарных волн зависит от нелинейных и дисперсионных свойств среды и является параметром, разным значениям которого соответствуют разные типы стационарных волн. Однако в отдельных случаях периодические волны в неравновесных средах могут распространяться лишь с одной определенной скоростью.

Перейдем в уравнении (21.2) к бегущей координате  $\xi = x - \bar{V}t$ , где  $\bar{V}$  — скорость распространения стационарной волны, тогда уравнение запишется следующим образом:

$$(V_0 - \bar{V}) dU/d\xi = \nu d^2U/d\xi^2 + (g/C)U(1 - \beta U^2). \quad (21.4)$$

Это уравнение описывает стационарную бегущую волну. По форме оно совпадает с уравнением сосредоточенного нелинейного осциллятора с затуханием  $\delta = \bar{V} - V_0$ . Ясно, что интересующие нас периодические решения существуют лишь при  $\bar{V} = V_0$ . Фазовый портрет системы для этого случая приведен на рис. 21.3. Автоколебаниям в виде периодических стационарных волн соответствует непрерывный континуум замкнутых траектории. Амплитуда такой волны определяется ее периодом. Сведение задачи об автоколебаниях в распределенной системе к исследованию уравнения нелинейного осциллятора, привычного для консервативных систем, кажется парадоксальным. Этот факт, однако, имеет простое физическое объяснение. Дело в том, что энергетический баланс между процессами диссипации и отбора энергии у активной среды в данном случае выполняется сразу для непрерывного множества стационарных волн, распространяющихся со скоростью  $V_0$ . Это возможно

лишь при отсутствии в среде реактивной дисперсий, которая приводит к зависимости амплитуды периодической волны от ее скорости.

Наличие в системе (рис. 21.3) сепаратрис, идущих из седла в седло, означает, что в ней могут распространяться стационарные перепады или импульсы с конечной шириной фронта (рис. 21.4) — диссипативные солитоны.

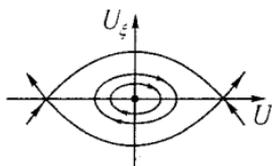


Рис. 21.3. Фазовый портрет системы, описывающей стационарные волны в нелинейной активной среде с мнимой дисперсией

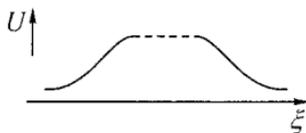


Рис. 21.4. Стационарный перепад или импульс с конечной шириной фронта, соответствующий сепаратрисам, идущим из седла в седло

Амплитуда и форма периодической волны определяются ее периодом (краевыми условиями) и видом нелинейности. Например, в линии передачи с туннельными диодами, рабочая точка которых находится на падающем участке характеристики близко к максимуму, нелинейность квадратична (в уравнении (21.4) вместо  $U^2$  будет  $U$ ) и стационарные волны могут иметь вид последовательности солитонов или кноидальных волн. Примерами солитонов в неравновесной диссипативной среде могут служить волны на тонкой пленке воды, стекающей по наклонной асфальтовой мостовой. Такие волны развиваются из-за неустойчивости и стабилизируются поверхностным натяжением; крутизна фронта волны увеличивается благодаря действию нелинейности (см. гл. 24).

Рассмотрим общий одномерный случай, когда в среде присутствуют и нелинейные потери, и нелинейная реактивность (емкость). Уравнение для волн в такой среде имеет вид (21.3):

$$\partial U / \partial t + V_0 \partial U / \partial x + U \partial U / \partial x - \nu \partial^2 U / \partial x^2 = (g/C)U(1 - \beta U^2).$$

Упростим немного задачу, предположив, что неконсервативная и диссипативная нелинейности действуют при разных значениях  $U$ . Пусть пока отсутствует диссипативная нелинейность, т. е. пренебрежем  $U^3$  ( $\beta$  мало). Тогда реактивная нелинейность проявляется при малых, а активная — при больших амплитудах. Ограничимся опять рассмотрением стационарных волн:

$$\xi = x - \bar{V}t, \quad (V_0 - \bar{V}) dU/d\xi + U dU/d\xi - \nu d^2U/d\xi^2 - (g/C)U = 0$$

(заметим, что это уравнение при некоторых упрощающих предположениях описывает периодическое изменение численности популяции при совместном проживании жертв и хищников). Если  $g = 0$ , то в такой системе все возмущения затухают; если же  $\nu = 0$ , то при  $g > 0$ , наоборот, возмущение нарастает. Чтобы движения были финитными, необходимо, чтобы действие этих двух факторов уравновесилось. Это, очевидно, возможно лишь при  $\bar{V} = V_0$ . При  $\bar{V} \neq V_0$ , как нетрудно убедиться,  $U \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . При  $\bar{V} = V_0$  получается следующее уравнение:

$$\nu d^2U/d\xi^2 - U dU/d\xi + \gamma U = 0 \quad (\gamma = g/C). \quad (21.5)$$

Это уравнение легко проинтегрировать, полагая, что  $dU/d\xi = V$ ,  $\nu dV/d\xi = U(V - \gamma)$ . Уравнение интегральных кривых имеет вид

$$\nu dV/dU = U(V - \gamma)/V. \quad (21.6)$$

Из соотношения (21.5) видно, что существует интегральная прямая, являющаяся фазовой траекторией:  $V = \gamma$ . Из (21.6) получим

$$\begin{aligned} \nu dV/dU &= U[1 + \gamma/(V - \gamma)]^{-1}, \\ (U^2 - U_0^2)/2 &= \nu[V + \gamma \ln(\gamma - V)/\gamma], \end{aligned}$$

где  $U_0$  — значение  $U$  при  $V_0 = 0$ . Фазовый портрет этой системы представлен на рис. 21.5а. Волны с большой амплитудой имеют участок медленных изменений — на фазовой плоскости ему соответствует движение вблизи прямой  $V = \gamma$  — и участок быстрых изменений — на фазовой плоскости ему соответствует движение по уходящей далеко вниз петле.

Обсудим теперь соответствующий этой ситуации эксперимент — подадим на вход среды, описываемой уравнением (21.4), синусоидальную волну. На достаточно большом расстоянии от границы эта волна станет близкой к стационарной, и ее можно описывать с помощью (21.5) на фазовой плоскости рис. 21.5а. При движении изображающей точки по траектории типа 1 вблизи  $V = \gamma$  функция  $U(\xi)$  меняется как  $\gamma\xi$ , т. е. растет линейно, а движению по замкнутой траектории, которое происходит очень быстро, соответствует крутой передний фронт волны — волна превращается в пилообразную (рис. 21.5б).

Легко сообразить, что если мы будем подавать на вход линии передачи, в которой волны описываются уравнением (21.4) высокочастотные колебания, то при  $\omega > \omega_{кр}$  они вообще будут затухать; затем

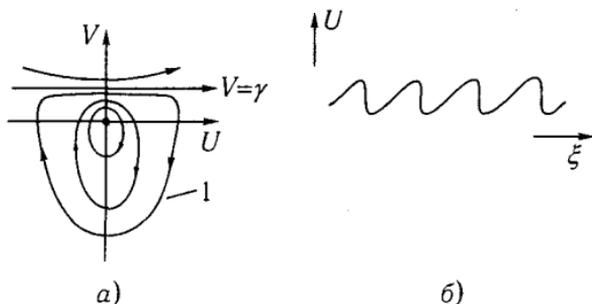


Рис. 21.5. Фазовый портрет (а) и форма стационарных волн (б), описываемых уравнением (21.5)

с уменьшением  $\omega$  превратятся в незатухающие волны синусоидальной формы, и только достаточно низкочастотные волны будут пилообразными.

#### 21.4. Существование и роль предельных циклов

Если нелинейность кубична, т. е.  $V(U) = V_0 - \alpha U^2$ , то для стационарных волн будем иметь

$$\nu \partial^2 U / \partial \xi^2 + [(V - V_0) + \alpha U^2] \partial U / \partial \xi + \gamma U = 0,$$

откуда видно, что периодические волны существуют лишь при  $V \neq V_0$  ( $V > V_0$  при  $\alpha < 0$  и  $V < V_0$  при  $\alpha > 0$ ). Фазовые портреты, соответствующие стационарным волнам, здесь уже будут традиционно автоколебательными — с предельным циклом, физическое различие свойств стационарных волн в средах с реактивной кубичной и квадратичной нелинейностью объясняется тем, что в среде с кубичной нелинейностью скорость образующих нелинейную периодическую волну гармоник зависит от их амплитуды (эффект самовоздействия), и, следовательно, скорость нелинейной волны должна отличаться от линейной  $V_0$ . Если скорости гармоник, образующих стационарную волну, различны уже в линейном приближении (из-за влияния дисперсии), то периодическим стационарным волнам также должны соответствовать предельные циклы.

Например, в активном волноводе или в линии передачи с туннельными диодами, описываемых при учете дисперсии в области высоких частот уравнением

$$\widehat{M}_2(U) - \beta \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} = \gamma \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (21.7)$$

где  $\widehat{M}_2(U) = \partial^2 U / \partial t^2 - V^2(U) \partial^2 U / \partial x^2$ , для стационарных волн имеем

$$\beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\gamma}{V} \left[ 1 - \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{V_0^2 - V^2}{V^2} U = 0. \quad (21.8)$$

Это уравнение уже учитывает существование встречных волн в среде с дисперсией. При  $V < V_0$  это уравнение Ван-дер-Поля, имеющее единственный предельный цикл, который и соответствует автоколебаниям в виде периодических стационарных волн. Видно, что при  $\beta(V_0^2 - V^2)/\gamma^2 \ll 1$  эти волны будут релаксационными (на фазовой плоскости разрывный цикл). При слабой дисперсии ( $\beta \rightarrow 0$ ) это условие выполнено при всех  $V^2 < V_0^2$ , т. е. релаксационными будут и медленные (короткие), и быстрые (длинные) волны ( $(V_0^2 - V^2)/(\beta V^2) = (2\pi/\Lambda)^2$ ,  $\Lambda$  — длина стационарной волны). Если же дисперсия сильная, то складывается чрезвычайно интересная ситуация: в одной и той же среде возможно существование и синусоидальных ( $V^2 \ll V_0^2$ ), и релаксационных ( $V^2 \gtrsim V_0^2$ ) стационарных волн. Физически такая особенность объясняется довольно просто — дисперсия в данном случае проявляется лишь в области малых масштабов (т. е. для медленных волн), в результате чего быстрые волны ведут себя, по существу, так же, как в нелинейной среде без дисперсии.

Таким образом, автоколебаниям в виде стационарных волн в фазовом пространстве системы, описывающей стационарные движения, соответствуют предельные циклы только в тех случаях, когда активная среда обладает дисперсией (линейной  $V = V(\omega)$  или нелинейной  $V = V(U^2)$ ).

В общем случае устойчивость или неустойчивость такого цикла не означает устойчивость или неустойчивость соответствующей ему периодической стационарной волны. Дело в том, что в рамках уравнений для стационарных волн не могут быть описаны реальные возмущения, эволюционирующие во времени. Непериодические стационарные волны, соответствующие уходящим или приходящим к циклу траекториям, заданы во всем пространстве от  $-\infty$  до  $+\infty$  и не могут реализоваться в ограниченной системе. Однако в отдельных случаях связь между устойчивостью предельного цикла и периодической волны все-таки можно проследить. Например, если в фазовом пространстве стационарных волн  $U(t - x/v)$  при  $v \rightarrow \infty$  продольный цикл неустойчив, то неустойчива и периодическая стационарная волна (при  $v = \infty$  — это уже не волна, а колебание).

## 21.5. Конкуренция стационарных волн в активной среде

Решение задачи о бегущих волнах дает возможность исследовать и процесс взаимодействия волн. Естественно, что о взаимодействии имеет смысл говорить лишь в случаях, когда можно следить за эволюцией отдельных волн, участвующих в процессе, т. е. в тех случаях, когда трансформация отдельных волн происходит медленно по сравнению с пространственно-временными масштабами, характеризующими волны. Это возможно лишь при малой нелинейности среды, когда локальное поле представляется в виде суперпозиции отдельных волн. Малость нелинейности, конечно, не означает, что взаимодействующие волны должны быть синусоидальны. Как мы видели, форма стационарных волн зависит еще и от дисперсии: если дисперсия и нелинейность одного порядка, то волны существенно несинусоидальны, при исчезающе малой дисперсии они релаксационны: если же дисперсия сильная (по сравнению с нелинейностью), то волны квазисинусоидальны.

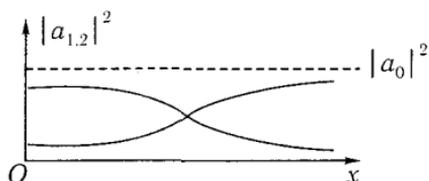


Рис. 21.6. Пространственная конкуренция волн в активной нелинейной среде с низкочастотной (или высокочастотной) вязкостью

Ввиду уже упоминавшейся пространственно-временной аналогии между взаимодействием нормальных колебаний во времени и стационарным взаимодействием волн в пространстве классические колебательные эффекты зачастую буквально переносятся на волновые процессы. Для примера на рис. 21.6 приведена иллюстрация пространственного аналога эффекта конкуренции колебаний в активной нелинейной среде с низкочастотной вязкостью (или высокочастотной). Этот процесс описывается уравнениями из гл. 16, в которых время  $t$  заменено на координату  $x$ . Основываясь на эффекте пространственной конкуренции, можно построить, в частности, любопытные волновые приборы, выделяющие из двух или нескольких неизвестных нам квазигармонических сигналов один с максимальной (или минимальной) частотой [1].

Именно эффектом конкуренции волн объясняется и кажущееся совершенно удивительным установление в пространственно-симметричном распределенном автогенераторе (например, с идеальным отражением на границах) несимметричных вдоль координаты  $x$  стационар-

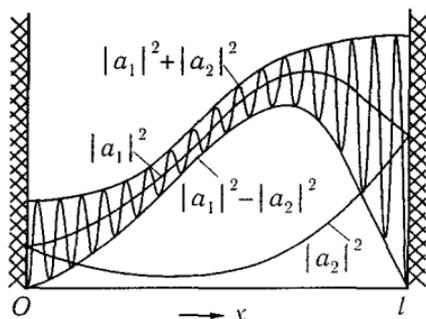


Рис. 21.7. Несимметричный пространственно-неоднородный режим в резонаторе с идеальным отражением, заполненном нелинейной средой

ных распределений поля с преобладанием одной из встречных волн (рис. 21.7). Уравнение для амплитуд  $a_1(x, t)$  и  $a_2(x, t)$  этих волн при простейших идеализациях [1] записывается в виде

$$\begin{aligned} \partial a_{1,2} / \partial t \pm v \partial a_{1,2} / \partial x - \\ - \mu h [1 - \alpha (|a_{1,2}|^2 + 2|a_{2,1}|^2)] a_{1,2} = 0 \end{aligned} \quad (21.9)$$

с граничными условиями  $|a_1(x, t)| = |a_2(x, t)|$  при  $x = 0$  и  $x = l$ , где  $l$  — длина резонатора. Распределение интенсивностей  $|a_1(x)|^2$  и  $|a_2(x)|^2$  в стационарном режиме легко восстановить по виду траектории на фазовой плоскости, построенных по уравнению (21.9) при  $\partial / \partial t \equiv 0$  (рис. 21.8). В коротком резонаторе, где эффект конкуренции проявиться не успевает, возможен только обычный режим стоячей волны — на фазовой плоскости рис. 21.8 ему соответствует состояние равновесия на

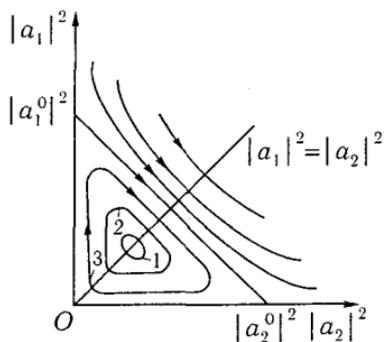


Рис. 21.8. Фазовый портрет системы, описывающей стационарные волны в пространственно-симметричном распределенном автогенераторе с идеальным отражением на границе: траекториям 1–3 соответствуют пространственно-неоднородные устойчивые режимы

прямой  $|a_1|^2 = |a_2|^2$ . В длинном же резонаторе черпающие энергию из общего источника встречные волны подавляют одна другую в боль-

шей части резонатора, выравниваясь лишь вблизи отражающих стенок. В результате режим стоячей волны оказывается неустойчивым и устанавливается один из пространственно-неоднородных режимов, которым на рис. 21.8 отвечают траектории типа 1–3<sup>1</sup>.

## 21.6. Периодические автоколебания в гидродинамических течениях

Периодические течения жидкости, развивающиеся за счет энергии потока или внешних источников тепла и стабилизируемые вязкостью, часто встречаются и природе. Некоторые из таких течений в одномерной идеализации удастся описать с помощью уравнений типа (21.1)–(21.3). Это уже упоминавшиеся волны на стекающей пленке, периодические волны на границе раздела движущихся друг относительно друга несмешивающихся жидкостей и т. д.

Здесь мы обсудим простые и наглядные примеры периодических автоколебаний в замкнутых двумерных течениях. Эти примеры связаны с динамикой небольшого числа вихрей «на плоскости» — в тонких слоях жидкости. Соответствующие эксперименты представляют интерес, в частности, с точки зрения моделирования глобальных вихревых процессов в атмосфере (ураганов), поскольку для глобальных вихрей нашу атмосферу можно считать очень тонкой.

На рис. 21.9 приведена картина четырехвихревого течения в кювете, возбуждаемого магнитогидродинамическим методом [2]. В кювету глубины 0,5 см и длины 23 см наливался электролит (водный раствор медного купороса), через который в направлении оси  $x$  пропускался постоянный электрический ток. Под кюветой (примерно в середине системы) параллельно оси  $x$  располагались два постоянных магнита. При включении тока на проводящую жидкость, расположенную над магнитами, действуют силы, заставляющие жидкость двигаться — в середине кюветы возникает течение жидкости от стенок к оси  $x$ , а вне магнитов линии тока будут замыкаться (возвратное течение). В результате устанавливается течение в виде четырех одинаковых вихрей. Картины движения жидкости в двумерных течениях напоминают нам фазовые портреты двумерных динамических систем. Это не случайно.

<sup>1</sup>Как отмечалось в работе [7], симметрия уравнений обеспечивает симметрию решений лишь в том случае, когда решение единственное. Если решений больше одного, то симметрия уравнений обеспечивает лишь наличие группы преобразований симметрии, переводящих решения друг в друга. В зависимости от начальных условий система может выбрать одно из них и тем самым стать несимметричной.

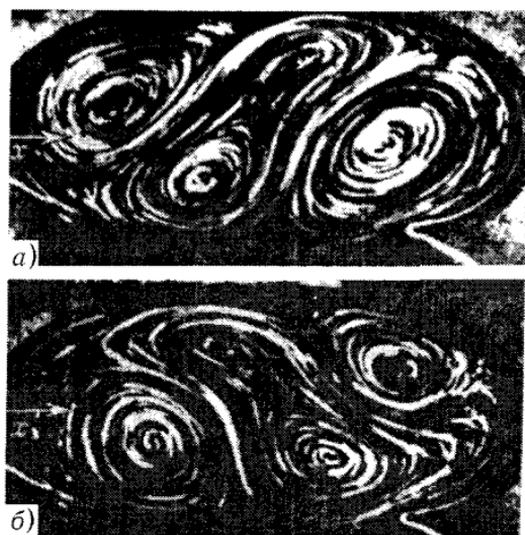


Рис. 21.9. Возбуждаемое магнитогидродинамическим методом четырехвихревое течение в кювете [2]: периодическим автоколебаниям соответствует чередование во времени картин течения *a* и *б*

При увеличении числа Рейнольдса, которое в данном случае растет пропорционально току и магнитному полю, стационарное четырехвихревое течение теряет устойчивость и возникает периодический автоколебательный режим. Этот режим характеризуется попарным перезамыканием вихрей одного знака (с одинаковым направлением вращения). Обратим внимание на то, что при увеличении числа Рейнольдса в этой системе картина течения перестает быть симметричной — ядро одного из пары взаимодействующих вихрей уменьшается и образуется вытянутый вихрь.

Совершенно аналогичная картина периодических автоколебаний наблюдается при термоконвекции в жидкости, находящейся в вертикальной ячейке (ячейке Хеле–Шоу) при подогреве снизу рис. 21.10) [3]. Для конвективных течений параметром, характеризующим степень неравновесности системы, служит число Рэлея  $Ra = g\nabla T h^4 \beta / (\nu \kappa)$  ( $g$  — ускорение свободного падения,  $\nabla T$  — вертикальный градиент температуры,  $h$  — высота слоя,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\nu$  — вязкость,  $\kappa$  — температуропроводность). В обсуждаемом эксперименте наблюдалась следующая последовательность бифуркаций при увеличении числа Рэлея  $Ra$ : при  $Ra > Ra_1$  состояние гидродинамического равновесия теряло устойчивость и сменялось стационарной одновихре-

вой конвекцией: нагретая жидкость всплывала вверх, а более холодная опускалась вниз (направление вращения жидкости при одновихревой конвекции зависит только от начальных условий); при  $Ra > Ra_2$  устанавливалась двух- или четырехвихревая конвекция. При последующем увеличении  $Ra$  стационарная ячеистая конвекция сменялась автоколебательным режимом, для которого было характерно периодическое попарное перезамыкание вихрей. При больших  $Ra$  в этом эксперименте наблюдалось и стохастическое во времени перезамыкание вихрей (см. гл. 23).

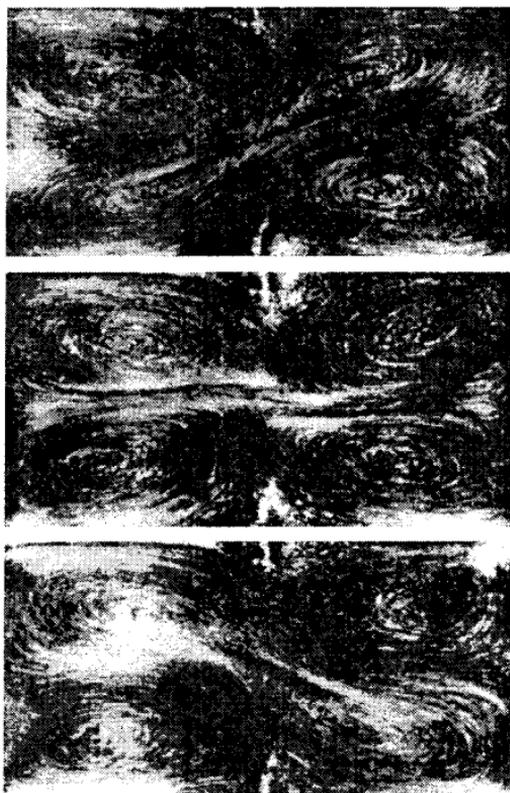


Рис. 21.10. Периодические автоколебания, наблюдаемые при термоконвекции в жидкости, находящейся в вертикальной ячейке (ячейка Хеле–Шоу) при подогреве снизу

В рамках исходных уравнений гидродинамики — уравнений Навье–Стокса — описать аналитически установление периодических автоколебательных течений не удастся (даже в двумерном приближе-

нии). Однако понять механизм их возникновения и доказать соответствующий факт можно совершенно строго, воспользовавшись теорией бифуркаций и некоторыми достаточно общими математическими теоремами, в первую очередь теоремой о центральном многообразии [8]. Мы здесь не имеем возможности углубляться в соответствующую достаточно тонкую математическую теорию [5, 6, 8, 11, 12]; заметим лишь, что применение теоремы о центральном многообразии позволяет свести исследование бифуркаций в бесконечномерной системе к анализу конечномерной системы. В частности, в интересующем нас сейчас случае рождения периодического течения (т. е. рождения цикла) эта теорема дает возможность оперировать с размерностью, равной двум, без какой-либо потери информации об устойчивости [8, гл. 2 и 8]. Аналогичное утверждение относится и к рождению квазипериодических течений из периодических (т. е. рождению инвариантного тора), только редуцированная размерность здесь будет равна уже не двум, а трем (при двух несоизмеримых частотах течения).

Остановимся подробнее на ином подходе к исследованию автоколебаний в гидродинамических течениях — подходе, связанном с приближенным описанием течения с помощью конечномерных динамических систем. Наиболее распространенным и естественным здесь является так называемое модовое описание (или метод Галеркина), в котором гидродинамические поля  $u(x, t)$  (скорости, температуры и пр.) представляются в виде линейной комбинации конечного числа координатных функций  $\varphi_n(x)$  (их обычно называют базисными):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \varphi_n(x), \quad (21.10)$$

где  $a_n(t)$  — коэффициенты разложения, для которых предстоит получить конечномерную систему уравнений в обыкновенных производных. Если исходные уравнение имеют, скажем, вид

$$(\partial/\partial t + \widehat{M})u(x, t) = f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (21.11)$$

где  $\widehat{M}$  — некоторый дифференциальный оператор (в общем случае нелинейный), а поле  $u(x, t)$  достаточно гладкое, определено в ограниченной области и удовлетворяет однородным краевым условиям на границе области, то уравнения для  $a_n(t)$  получаются из условий ортогональности невязки  $\Delta_n \equiv [(\partial/\partial t + \widehat{M})u_n(x, t) - f]$  базисным функциям  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

Естественно, что если эти функции взаимно ортогональны, то вся процедура существенно упрощается<sup>1</sup>.

Продемонстрируем вывод подобных конечномерных уравнений на уже обсуждавшемся примере термоконвекции в ячейке Хеле–Шоу [10]. Исходные уравнения в приближении Буссинеска, при котором сжимаемостью жидкости в уравнении непрерывности мы пренебрегаем, имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p / \rho + \nu \Delta \mathbf{v} - g \beta T, \\ \partial T / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) T &= \kappa \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — коэффициент объемного расширения,  $T(x, t)$  — поле температуры,  $\kappa$  — температуропроводность. Граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 0, \quad T = 0 & \quad \text{при } z = \pm 1; \\ \partial v_y / \partial x = 0, \quad v_x = 0, \quad \partial T / \partial x = 0 & \quad \text{при } x = 0, L; \\ \partial v_x / \partial y = 0, \quad v_y = 0, \quad T = 0 & \quad \text{при } y = 0, H. \end{aligned} \quad (21.13)$$

Поскольку  $L \gg 1$ ,  $H \gg 1$ , то можно считать, что скорость жидкости поперек слоя приближенно равна нулю (приближение плоских траекторий). Тогда естественно, как и для двумерных течений, ввести функцию тока  $\Psi(x, y, z, t)$ , связанную с компонентами скорости  $v_x$  и  $v_y$  соотношениями  $v_x = -\partial \Psi / \partial y$ ,  $v_y = \partial \Psi / \partial x$ . Тогда уравнения Буссинеска (21.12) можно сформулировать в терминах функции тока  $\Psi$  и завихренности  $\omega = -(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) \Psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{Pr}} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right] &= \Delta \omega + \operatorname{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) &= \Delta T + \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (21.14)$$

( $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ ). Здесь  $\operatorname{Ra}$  — по-прежнему число Рэлея,  $\operatorname{Pr} = \nu / \kappa$  — число Прандтля,  $T$  — отклонение температуры от

<sup>1</sup>Метод Галеркина напоминает асимптотический метод для уравнений частных производных, однако между ними имеется принципиальное различие. В асимптотическом методе приближенное решение в виде конечного числа членов ряда переходит в точное решение при устремлении к нулю малого параметра. Здесь же подобной сходимости нет из-за отсутствия малого параметра, и повысить точность метода можно, лишь включив в рассмотрение новые базисные функции. В связи с отсутствием малого параметра обоснование метода Галеркина представляет собой весьма сложную проблему [9].

равновесного распределения  $T_0 = -y$  (поддерживаемого внешним источником тепла). Граничные условия к (21.14) имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi = T = 0 & \quad \text{при } z = \pm 1; \\ \Psi = \partial^2 \Psi / \partial x^2 = \partial T / \partial x = 0 & \quad \text{при } x = 0, L; \\ \Psi = \partial^2 \Psi / \partial y^2 = T = 0 & \quad \text{при } y = 0, H. \end{aligned} \quad (21.15)$$

В (21.14), (21.15) в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно толщина слоя  $d$ ,  $d^2/\kappa$ ,  $\kappa/d$ ,  $\nabla T \cdot d$ ,  $\nabla p \cdot d$ . Конечномерную аппроксимацию поля скорости и температуры (типа (21.10)) для нашей краевой задачи возьмем в виде

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= \sum_{n, m=1}^{N, M} \Psi_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{H}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right), \\ T(x, y, z, t) &= \sum_{n=0, m=1}^{N, M} T_{nm}(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{H}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right). \end{aligned} \quad (21.16)$$

После подстановки этих выражений в (21.14) и ортогонализации для  $\Psi_{nm}(t)$  и  $T_{nm}(t)$  получится система уравнений типа

$$\dot{a}_k = -\nu_k a_k + \sum_{i, j} \sigma_{kij} a_i a_j, \quad (21.17)$$

где  $a$  соответствует  $\Psi$  и  $T$ .

Основной вопрос, который возникает при построении галеркинской аппроксимации уравнения гидродинамики: сколько мод учитывать в разложении? Каких-либо четких алгоритмов здесь нет; единственным критерием правильности конечномерного описания является сравнение его с точным решением (если оно известно) либо с экспериментом. Поэтому обычно строить такую конечномерную аппроксимацию имеет смысл лишь в тех случаях, когда ясно, какую картину течения мы хотим описать. Описанный способ конечномерного усечения уравнений гидродинамики является не единственным и, возможно, не всегда оптимальным. Конечномерные модели могут строиться, в частности, по принципу моделирования основных свойств этих уравнений — квадратичности, симметрий, законов сохранения и т. д. (так называемые системы гидродинамического типа [4]). Для четырехвихревой кон-

векции в ячейке Хеле–Шоу представляется естественным ограничиться учетом первых трех мод полей скорости и температуры ( $(nm) = (11), (12), (21), (31), (22)$ ) и двумя пространственно однородными по  $x$  модами  $T_{01}$  и  $T_{02}$ , учитывающими изменение равновесного распределения температуры за счет конвекции. Для того чтобы продемонстрировать возникающие здесь математические трудности, приведем систему уравнений (см. [10]) для этих мод (вместе с коэффициентами, выписанными лишь в первых семи уравнениях; другие положительные коэффициенты опущены):

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{11} &= -9 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Psi_{12} \Psi_{21} - 4 \frac{5-3\varepsilon}{1+\varepsilon} \Psi_{31} \Psi_{22} - \\ &\quad - \text{Pr} \left[ p(1+\varepsilon) + \frac{1}{4} \right] \Psi_{11} - \frac{\text{Ra Pr}}{\pi^4(1+\varepsilon)} T_{11}, \\ \dot{T}_{11} &= -3(T_{21} \Psi_{12} + T_{12} \Psi_{21}) - 4(T_{31} \Psi_{22} + T_{22} \Psi_{31}) + 2T_{01} \Psi_{12} - \\ &\quad - (1 + 4T_{02}) \Psi_{11} - \left[ p(1+\varepsilon) + \frac{1}{4} \right] T_{11}, \\ \dot{T}_{02} &= - \left( 4p\varepsilon + \frac{1}{4} \right) T_{02} + 2T_{11} \Psi_{11} + 4T_{21} \Psi_{21} + 6T_{31} \Psi_{31}, \\ \dot{\Psi}_{22} &= -\text{Pr} \left[ 4p(1+\varepsilon) + \frac{1}{4} \right] \Psi_{22} - \frac{\text{Ra Pr}}{2\pi^4(1+\varepsilon)} T_{22} + \frac{8}{1+\varepsilon} \Psi_{11} \Psi_{31}, \\ \dot{T}_{22} &= - \left[ 4p(1+\varepsilon) + \frac{1}{4} \right] T_{22} - 2\Psi_{22} + 4(T_{11} \Psi_{31} + T_{31} \Psi_{11}) + 4T_{01} \Psi_{21}, \\ \dot{\Psi}_{31} &= -\text{Pr} \left[ p(9+\varepsilon) + \frac{1}{4} \right] \Psi_{31} - \frac{3\text{Ra Pr}}{\pi^4(9+\varepsilon)} T_{31} - \\ &\quad - 12 \frac{1+\varepsilon}{9+\varepsilon} \Psi_{22} \Psi_{11} + 15 \frac{1-\varepsilon}{9+\varepsilon} \Psi_{12} \Psi_{21}, \\ \dot{T}_{31} &= - \left[ p(9+\varepsilon) + \frac{1}{4} \right] \Psi_{31} - 3(1 + 4T_{02}) \Psi_{31} + \\ &\quad + 4(T_{11} \Psi_{22} - T_{22} \Psi_{11}) + 5(T_{21} \Psi_{12} - T_{12} \Psi_{21}), \\ \dot{\Psi}_{12} &= -\Psi_{12} - T_{12} + \Psi_{11} \Psi_{21} + \Psi_{21} \Psi_{31}, \\ \dot{\Psi}_{21} &= -\Psi_{21} - T_{21} - \Psi_{12} \Psi_{11} - \Psi_{31} \Psi_{12}, \\ \dot{T}_{12} &= -T_{12} - \Psi_{12} + T_{01} \Psi_{11} + T_{21} \Psi_{31} + T_{31} \Psi_{21} + T_{11} \Psi_{21} + T_{21} \Psi_{11}, \\ \dot{T}_{21} &= -T_{21} - \Psi_{21} + T_{01} \Psi_{22} + T_{11} \Psi_{12} - T_{12} \Psi_{11} - T_{31} \Psi_{12} - T_{12} \Psi_{31}, \\ \dot{T}_{01} &= -T_{01} - T_{11} \Psi_{12} - T_{21} \Psi_{22} - T_{12} \Psi_{11} - T_{22} \Psi_{21} \end{aligned}$$

( $p = 1/L^2$ ,  $\varepsilon = L^2/H^2$ ). Здесь для удобства введены новые единицы времени, функции тока и температуры, отличающиеся от старых соответственно множителями  $1/\pi^2$ ,  $(3/2)LH\pi$ ,  $(3/2)H$ .

Подчеркнем еще раз, что рассмотрение лишь конечного числа основных базисных функций, учитывающее стабилизирующее действие вязкости (лишающей мелкомасштабные возмущения «самостоятельности» — они следят за более крупными), естественно ограничивает диапазон чисел Рэлея, в котором еще можно пользоваться системой (21.18).

Общий анализ системы (21.18) требует обращения к вычислительной технике. Однако некоторые выводы можно получить и непосредственно, анализируя структуру этих уравнений. В частности, видно, что  $\Psi_{11}$ ,  $T_{11}$ ,  $T_{02}$  (эти возмущения описывают одновихревое движение) не генерируют других возмущений, т. е. решение системы<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{11} &= -cPr\Psi_{11} - (RaPr/\pi^2 a)T_{11}, \\ \dot{T}_{11} &= -cT_{11} - (4T_{02} + 1)\Psi_{11}, \quad \dot{T}_{02} = -bT_{02} + 2T_{11}\Psi_{11} \end{aligned} \quad (21.19)$$

( $a = 1 + \varepsilon$ ,  $b = 4p\varepsilon + 1/4$ ,  $c = pa + 1/4$ ) является решением и полной системы (21.18). Это решение, естественно, будет иметь смысл, лишь если оно устойчиво по отношению к нарастанию остальных возмущений. Соответствующий анализ, хотя и несколько громоздок, но довольно прост для стационарного решения системы (21.19):

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \left[ \frac{b}{8ac\pi^4} (Ra - Ra_1) \right]^{1/2}, \\ T_{11} &= -\frac{\pi^2}{Ra} \left[ \frac{abc}{8} (Ra - Ra_1) \right]^{1/2}, \quad T_{02} = -\frac{Ra - Ra_1}{4Ra}. \end{aligned} \quad (21.20)$$

Читателю предлагается убедиться самостоятельно, что, например, при числе Прандтля  $Pr = 7$  возмущения  $\Psi_{22}$ ,  $T_{22}$ ,  $T_{31}$  начинают нарастать (на фоне (21.20)) при числах Рэлея  $Ra_{кр} \approx 1,4Ra_1$ . Численный анализ (21.18) показывает [10] возникновение устойчивых периодических автоколебаний в рассматриваемой задаче при  $Ra_2 > Ra_{кр}$ . Эти автоколебания соответствуют упоминавшемуся периодическому переключению вихрей.

<sup>1</sup>Эта система совпадает с известной системой Э. Лоренца, которую мы будем подробно обсуждать в следующей главе.

## ГЛАВА 22

# Стохастическая динамика простых систем

### 22.1. Как появляется случайность в динамической системе

Все рассмотренные в предыдущих главах явления и эффекты относятся к разряду регулярных — это колебания или волны в системах или средах без флуктуаций, не требующие для своего описания статистических методов. Накопленный нами опыт и интуиция говорят о том, что в динамической системе, описываемой регулярными уравнениями, ничего нерегулярного, случайного, стохастического быть не может. Да и откуда взяться случайности, если задан однозначный алгоритм поведения, определяющий при конкретных начальных условиях однозначное будущее системы на сколь угодно больших временах<sup>1</sup>? Конечно, если система очень сложна — обладает большим числом степеней свободы (например, газ в сосуде), мы понимаем, что детерминированное описание теряет смысл (но в принципе возможно). Оно теряет смысл хотя бы потому, что невозможно задать точно начальные координаты и скорости всех, скажем,  $10^{19}$  молекул, находящихся в  $1 \text{ см}^3$  газа. Кроме того, ни одной ЭВМ не под силу расчет траекторий такого числа частиц с учетом их столкновений друг с другом. В простой системе, когда степеней свободы немного (например,  $n \leq 10$ ), такой проблемы не возникает. Задав  $2n$  чисел, описывающих начальное состояние системы, мы, как кажется, можем вычислить (пусть с помощью ЭВМ) ее состояние в сколь угодно далеком будущем. О каком же стохастическом поведении простых систем мы собираемся вести разговор? Как может появиться случайность и, следовательно, непредсказуемость вопреки теореме существования и единственности, гарантирующей при заданных начальных условиях однозначное детерминированное поведение?

Прежде чем ответить на эти вопросы, мы должны сформулировать понятие случайного поведения детерминированных систем.

<sup>1</sup>Сейчас речь идет лишь о таких системах, для которых доказана теорема о существовании и единственности решения.

Случайность движения обычно ассоциируется с двумя обстоятельствами — с очень «чувствительной» зависимостью от начальных условий (которая фактически означает непредсказуемость) и с существованием средних по времени величин. Поясним это.

Предположим, у нас есть генератор случайных колебаний, параметры которого мы не меняем. При многократном включении генератора мы будем получать все время разные осциллограммы. Однако если повторить эксперимент большое число раз, то уже будут проявляться статистические закономерности. Эти закономерности должны быть независимы от вероятностного распределения начальных состояний генератора. Это начальное распределение не является универсальным и должно меняться от генератора к генератору, оно зависит не только от конкретных особенностей элементов схемы, но и от способа включения генератора.

Существование средних величин, не зависящих от особенностей задания начальных условий, представляется наиболее важным для определения стохастичности. Рассмотрим какую-либо функцию мгновенного состояния  $x$  нашей детерминированной системы, например,  $F(x)$ . При начальных условиях  $x(t_0) = x_0$  эта функция меняется во времени как  $F(t, t_0, x_0)$ . Пусть для большинства  $x_0$  эта функция во времени меняется нерегулярно и даже малое изменение  $x_0$  приводит к существенному изменению вида функции  $F(t, t_0, x_0)$ . Нас будут интересовать случаи, когда существует средняя величина

$$\langle F(x_0) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, t_0, x_0) dt \quad (22.1)$$

такая, что  $\langle F(x_0) \rangle$  для большинства начальных условий в заданной области фазового пространства не зависит от  $x_0$ .

Обсудим, как в детерминированной системе появляется непредсказуемость индивидуального движения, которая в то же время позволяет перейти к статистическому описанию.

Представим себе в фазовом пространстве системы ограниченную область, из которой фазовые траектории не выходят. Предположим, что все переходные процессы закончились и все траектории в этой области неустойчивы по Ляпунову. Для систем с одной степенью свободы такое предположение бессмысленно: если из какой-то области на фазовой плоскости траектории не выходят, то, поскольку пересечение их невозможно, они либо замкнуты, либо стремятся к простому аттрактору (предельному циклу или состоянию равновесия), и тогда внутри

области есть устойчивые траектории. Однако для систем хотя бы с полутора степенями свободы наше предположение уже оказывается реализуемым. Конкретным устройством области, в которой отсутствуют устойчивые траектории, мы будем подробно заниматься ниже.

Сейчас перечислим только траектории, которые могут существовать внутри такой области: неустойчивые состояния равновесия, неустойчивые циклы и незамкнутые траектории, которые бесконечно блуждают внутри нашей ограниченной области (но не выходят из нее). Из-за ограниченности фазового объема любая незамкнутая траектория через достаточно большое время подойдет к себе самой сколь угодно близко. Но траектория неустойчива, поэтому из этой близости вовсе не следует, что следующий этап движения будет похож на предыдущий. Наоборот, малое возмущение будет нарастать, и дальнейший маршрут изображающей точки невозможно предвидеть.

Из этих рассуждений следует и еще одно проявление неустойчивости — невозможно воспроизвести движение неустойчивой динамической системы, задавая начальные условия со сколь угодно высокой, но конечной точностью. Наиболее четко эту мысль выразили Н. С. Крылов, а затем Макс Борн. В частности, данное Борном определение детерминированности заключается в следующем. Каждое состояние измеряется хотя и с малой, но всегда с конечной неточностью  $\varepsilon$ , поэтому оно определяется не числом, а некоторым вероятностным распределением, и задача состоит в предсказании распределения в момент времени  $t$  на основе известного начального распределения. Если данное решение устойчиво и начальные возмущения не нарастают, то более позднее состояние предсказуемо и теория может называться детерминистической. Борн подчеркивает, что данное определение детерминированности отличается от традиционного изменением последовательности предельных переходов при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . Обычно сначала область начального рассеяния стягивается в точку, а затем смотрится поведение при  $t \rightarrow \infty$  (и, конечно, получается полная предсказуемость!). Этот путь, однако, является нефизичным, и его следует заменить другим: сначала при заданном  $\varepsilon$  определить поведение траекторий и область конечного рассеяния (т. е. поперечное сечение трубки траекторий) при любом  $t$  и определить, как ведет себя конечное рассеяние при  $t \rightarrow \infty$ , а затем уже устремить начальное рассеяние к точке. Если конечное рассеяние траекторий при  $t \rightarrow \infty$  нарастает, то поведение системы непредсказуемо.

Поясним это на примерах. Обратимся к уже известным нам фазовым портретам некоторых динамических систем второго порядка (рис. 22.1). В случае рис. 22.1а система имеет единственное асимп-

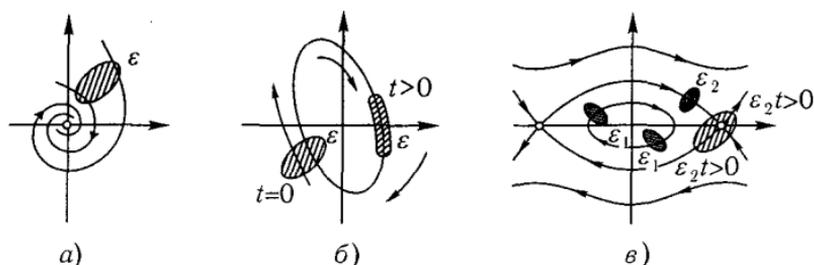


Рис. 22.1. Эволюция элементарного фазового объема на плоскости в случаях: а — устойчивого состояния равновесия; б — предельного цикла; в — сепаратрисы, идущей из седла в седло

тотически устойчивое состояние равновесия (фокус). Ясно, что здесь движение системы абсолютно предсказуемо: любая область начальных отклонений  $\varepsilon$  стягивается в точку при  $t \rightarrow \infty$ . В случае рис. 22.1б ситуация сходная: при  $t \rightarrow \infty$  движение полностью определено — это периодическое движение с известными амплитудой и периодом; на фазовой плоскости ему соответствует устойчивый предельный цикл. При наличии разброса в начальных отклонениях  $\varepsilon$  остается неопределенной только фаза конечного движения (точка, в которой траектория выходит на предельный цикл).

В случае рис. 22.1в движение при  $t \rightarrow \infty$  остается предсказуемым, если начальные отклонения принадлежат области  $\varepsilon_1$ , однако их принадлежность области  $\varepsilon_2$  может уже привести к существенно разным движениям, хотя это еще и не полная непредсказуемость.

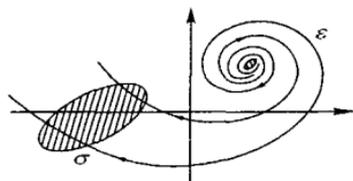


Рис. 22.2. Эволюция элементарного фазового объема на плоскости в случае неустойчивого состояния равновесия

Ситуация меняется, если траектории на фазовой плоскости перестают быть устойчивыми по Ляпунову. Например, в случае неустойчивого фокуса (рис. 22.2) малый разброс начальных отклонений ведет к тому, что при достаточно большом  $t$  уже нельзя точно определить состояние системы (она может находиться в любой точке области  $\sigma$ ).

Таким образом, наличие неустойчивости для непредсказуемости необходимо. Но для стохастичности этого еще недостаточно. Нужно еще перепутывание траекторий, а для этого необходимо, чтобы они оставались в конечной области фазового пространства, т. е. нужна возвращаемость фазовых траекторий. На фазовой плоскости с примером возвращаемости траекторий мы встречались: точка, движущаяся по замкну-

той траектории, близкой, например, к сепаратрисе, выходя из окрестности седла, возвращается в нее же. Однако никакой случайности тут нет. Для получения случайного движения надо, чтобы изображающая точка имела возможность двигаться по разные стороны от сепаратрисы — то по замкнутым траекториям, то уходя от них. На плоскости в силу того, что фазовые траектории не пересекаются, этого быть не может. Но уже в трехмерном фазовом пространстве (система с полутора степенями свободы) подобные ситуации возможны.

Итак, для возникновения стохастических движений в динамической системе необходимо, чтобы в фазовом пространстве этой системы: а) все (или почти все) соседние траектории внутри некоторой области разбегались; б) все они оставались внутри ограниченного фазового объема. Подчеркнем, что неустойчивость всех (или почти всех) траекторий, располагающихся в ограниченной области фазового пространства, обычно и служит математическим критерием стохастичности.

В трехмерном фазовом пространстве указанное поведение траекторий легко себе представить: разбегаться они могут по двумерной поверхности, а возвращаться — выйдя в пространство.

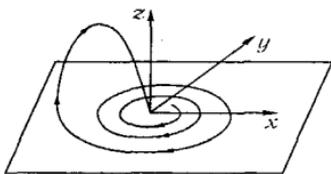


Рис. 22.3. Простой пример возвращающейся неустойчивой траектории: траектория — раскручивающаяся плоская спираль, хвост которой, загибаясь к ее началу, вновь раскручивается

Траектория при этом может выглядеть, например, как раскручивающаяся плоская спираль, хвост которой, возвращаясь к ее началу, вновь раскручивается (рис. 22.3). Располагаясь таким образом, траектория заполняет ограниченный объем, нигде не замыкаясь, и ведет себя очень сложно и запутанно. Имея в виду сложность индивидуальной установившейся траектории и совершенно различное поведение траектории, имеющих сколь угодно близкие начальные условия, мы приходим к пониманию того, что появление статистических черт в поведении динамической системы связано с двумя обстоятельствами: во-первых, в определенном смысле случайна почти каждая из незамкнутых траекторий, располагающихся внутри ограниченного объема, и, во-вторых, естественным образом появляется понятие ансамбля, к которому мы привыкли в приложениях теории вероятности. Это ансамбль разнообразных отрезков траекторий внутри нашего неустойчивого объема. Такой ансамбль обычно определяют, задавая плотность распределения вероятностей на фазовом пространстве. Физически такое задание ве-

роятностей соответствует рассмотрению эволюции ансамбля тождественных систем с различными начальными условиями. Подчеркнем, что переход к ансамблю не означает добавления к нашей динамической системе какого-либо случайного фактора; это лишь способ, позволяющий количественно определить число траекторий с теми или иными свойствами.

Для исследования конкретных статистических свойств динамической системы необходима какая-то гипотеза, позволяющая проводить усреднение. В приложениях теории вероятностей, как известно, истинные вероятности определяются на основании статистических наблюдений частот появления тех или иных событий. Существование пределов этих частот есть следствие закона больших чисел. Для динамических систем вместо рядов статистических наблюдений рассматривают средние по времени характеристики траекторий. Такой характеристикой может быть, например, доля времени, проводимая отрезком траектории длины  $T$  в определенной ячейке фазового пространства. В случае, когда для любой ячейки и большинства траекторий (за исключением, может быть, множества траекторий меры нуль) существует предел при  $T \rightarrow \infty$  доли времени, проводимого таким бесконечно длинным отрезком траектории в ячейке, и когда этот предел не зависит от траектории, ансамбль из отрезков траекторий называют эргодическим. Свойство эргодичности позволяет заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени.

В консервативных системах, в которых энергия сохраняется, существование временных средних следует из эргодической теории динамических систем, независимость же средних от траектории пока остается в общем случае гипотезой, которая восходит еще к Л. Больцману.

Эргодичность — это, конечно, еще не случайность, более того, совсем простое квазипериодическое движение  $u(t) = a_1 \sin \omega_1 t + a_2 \sin \omega_2 t$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы (т. е.  $n_1 \omega_1 \neq n_2 \omega_2$ , где  $n_1, n_2$  — целые), будет эргодичным. В фазовом пространстве такому движению соответствует нигде не замыкающаяся намотка тора. Усреднение по ансамблю траекторий здесь эквивалентно усреднению по времени, но разбегания траекторий здесь нет.

О степени стохастичности движения системы часто судят по скорости спадания автокорреляционной функции

$$K(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(x(t + \tau)) f(x(\tau)) d\tau. \quad (22.2)$$

Здесь по-прежнему предполагается эргодичность. Присутствие в  $K(t)$  периодической или квазипериодической составляющей означает, что в исследуемом движении есть периодические или квазипериодические компоненты (например, незамкнутая траектория на торе). Развитая стохастичность приводит к тому, что функции  $f(x(t + \tau))$  и  $f(x(\tau))$  очень быстро становятся независимыми, т. е.  $K(t)$  достаточно быстро стремится к нулю. Спектр реализации в этом случае сплошной.

Напомним, что корреляционная функция  $K(t)$ , характеризующая зависимость значения переменной в данный момент времени от значений в другой момент, всегда действительная четная функция с максимумом в точке  $t = 0$ . Эта функция может быть как положительной, так и отрицательной. Функция  $K(t)$ , имеющая вид острого импульса с быстрым спаданием к нулю, характерна для широкополосного случайного процесса с нулевым средним значением (если среднее  $\langle u(t) \rangle$  не равно нулю, то  $K(\infty) = \langle u(t) \rangle^2$ ). Для белого шума — случайного процесса, энергия которого равномерно распределена по всем частотам,  $K(t)$  имеет вид  $\delta$ -функции.

Если речь идет о стационарном случайном процессе, то фурье-образ автокорреляционной функции — это спектральная плотность процесса, равная среднему от квадрата значений реализации, пропущенной через частотный фильтр с полосой пропускания  $\Delta\omega$ :

$$S_u(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} (\Delta\omega)^{-1} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T u^2(t, \omega, \Delta\omega) dt \right],$$

или

$$S_u(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{i\omega t} dt = 4 \int_0^{\infty} K(t) \cos \omega t dt. \quad (22.3)$$

Спектр  $S_u(\omega)$  — всегда действительная неотрицательная функция.

Если спадание  $K(t)$  (к среднему) экспоненциально, то говорят, что в системе есть перемешивание. Перемешивание есть несомненный признак стохастичности динамической системы [1]. Достаточно наглядно процесс перемешивания в фазовом пространстве можно представить себе следующим образом. Возьмем ансамбль траекторий с начальными условиями внутри маленького фазового объема — «капли фазовой жидкости». Пусть эта «капля» отличается по цвету от остальной жидкости внутри рассматриваемой области фазового пространства. Если

в этой области есть, например, устойчивый предельный цикл, то через некоторое время наша капля растянется вдоль предельного цикла (рис. 22.4) и окрасит лишь узкий пояс в окрестности цикла. Если же все траектории внутри ограниченной области неустойчивы, то капля будет непрерывно растягиваться, приобретая все более сложную форму, и при  $t \rightarrow \infty$  она более или менее равномерно окрасит всю область, т. е. перемешивается с неокрашенной жидкостью. Таким образом, в системе с неустойчивыми траекториями начальное распределение вероятностей стремится к некоторому установившемуся — инвариантному — вероятностному распределению, которое и определяет статистические свойства стохастических движений детерминированной системы.

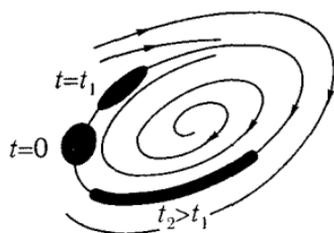


Рис. 22.4. Эволюция «капли фазовой жидкости» в окрестности предельного цикла

Итак, мы будем говорить, что динамическая система является стохастической, если: 1) существует предельное распределение вероятностей в фазовом пространстве системы, к которому стремится любое начальное неравновесное распределение (мы здесь для простоты считаем, что такое распределение единственно); 2) поведение системы эргодично-среднее по времени для произвольной функции, заданной в фазовом пространстве, равно среднему по предельному (инвариантному) распределению; 3) движение системы характеризуется сплошным спектром, т. е. спадающей автокорреляционной функцией [1].

Для каждой конкретной системы проверка этих условий представляет собой чрезвычайно трудную математическую задачу. Поэтому мы обычно будем ограничиваться проверкой более слабых условий. В частности, будем пользоваться критерием стохастичности, в основе которого лежит определение величины  $h$ , характеризующей разбегание соседних траекторий в линейном приближении: если эта величина положительна, то движение стохастично<sup>1</sup>. Математическим образом стохастического движения динамической системы является стохастическое множество траекторий в ее фазовом пространстве. Для гамильтоновых систем и диссипативных систем эти множества обладают различными свойствами.

Согласно теореме Лиувилля фазовая жидкость гамильтоновой системы несжимаема, т. е. начальный поток траекторий сохраняет свой

<sup>1</sup>Величину  $h$  называют метрической энтропией или энтропией Колмогорова-Синяя.

объем в фазовом пространстве. При этом справедлива теорема Пуанкаре о возвращении (см., например, [2]), согласно которой почти все траектории, расположенные в ограниченном фазовом объеме, будут бесконечное число раз проходить сколь угодно близко к своим начальным точкам (из-за несжимаемости фазовой жидкости им просто некуда деваться). Граница стохастического множества в этом случае может быть устроена очень сложно, а само стохастическое множество может «разрываться» произвольным числом областей, где движение регулярно — так называемые «островки» устойчивости<sup>2</sup>.

В диссипативных системах ситуация иная — по определению фазовый объем в таких системах в среднем сжимается, т. е. в среднем по фазовому пространству  $\operatorname{div} \mathbf{u} < 0$  ( $\mathbf{u}$  — векторное поле в фазовом пространстве). Хотя сжатие фазового объема — локальное свойство фазового потока (его можно проверить в любой момент времени в каждой точке), в практически встречающихся системах с трением или вязкостью оно часто влечет за собой глобальное свойство — существование в фазовом пространстве аттрактора — замкнутого множества, к которому при  $t \rightarrow \infty$  стремятся все окружающие траектории и остаются в нем. Устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл — знакомые нам примеры регулярных аттракторов. Поскольку фазовый объем в диссипативной системе сжимается, аттрактор имеет нулевой фазовый объем. Всякая траектория, не принадлежащая аттрактору, является переходной.

Таким образом, стохастическое множество в диссипативной системе — это замкнутое притягивающее множество траектории, на котором все принадлежащие ему траектории неустойчивы. Такое множество называют странным аттрактором [34, 35]. Размерность странного аттрактора всегда меньше размерности фазового пространства.

Обратим внимание на то обстоятельство, что большинство физических диссипативных систем со странными аттракторами, строго говоря, не удовлетворяют определению стохастической системы, которое мы дали выше. Дело в том, что странный аттрактор наряду с множеством неустойчивых траекторий может включать в себя и устойчивые периодические траектории, однако области их притяжений настолько малы, что они не сказываются на поведении системы ни в физическом, ни в численном эксперименте. Именно поэтому диссипативные системы с такими аттракторами мы будем называть стохастическими.

<sup>2</sup>Примером стохастического множества в гамильтоновой системе является гомоклиническая структура, возникающая в окрестности гомоклинической траектории (см. гл. 15). С другими примерами мы встретимся в конце данной главы и в гл. 23; подробнее см. [3, 4, 33-41].

## 22.2. Стохастическая динамика одномерных отображений

Как мы видели в гл. 15, исследование поведения динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями (см. § 15.3), существенно упрощается, если от системы с непрерывным временем перейти к системе с дискретным временем. Такой переход осуществляется с помощью введения отображения секущей поверхности, разрезающей фазовый поток, в себя. При этом от дифференциальных уравнений мы переходим к разностным. Использование метода точечных отображений особенно удобно при анализе стохастического поведения динамических систем. Во-первых, как уже говорилось в гл. 15, эффективно понижается размерность фазового пространства и, кроме того, из процесса рассмотрения исключаются регулярные компоненты, не дающие стохастичности, но усложняющие описание — это, в частности, движение вдоль траектории, принадлежащей стохастическому множеству. Добавим, что для анализа стохастического поведения на основе отображений в математике развиты специальные методы — методы символической динамики [5, 6]. Их основная идея заключается в кодировании траектории последовательностью символов из некоторого набора, т. е. становятся дискретными не только моменты времени, в которые определяется состояние системы, но и сами состояния.

Мы ограничимся обсуждением только одномерных отображений. Это вызвано двумя причинами: во-первых, их можно исследовать достаточно подробно без привлечения численного моделирования на ЭВМ, а во-вторых, к одномерным отображениям (а точнее к почти одномерным) сводится исследование и двумерных отображений, обладающих таким свойством: в одном направлении элемент секущей поверхности  $\Sigma$  в результате действия отображения сильно сжимается, а в другом растягивается (так называемое свойство гиперболичности отображения) (рис. 22.5). В системе с таким отображением, если достаточно долго подождать, почти все точки соберутся вблизи одной или нескольких линий, и их дальнейшее поведение можно описывать, пользуясь анализом одномерного отображения этих линий в себя.

Рассмотрим неважнооднозначное растягивающее отображение отрезка в себя. Основываясь на чисто качественных соображениях и внимательном анализе фазовых портретов, мы в начале главы пришли к тому, что для существования в ограниченной области фазового пространства сложного, запутанного поведения необходимо, чтобы, с одной стороны, все или почти все траектории были неустойчивы, а с другой —

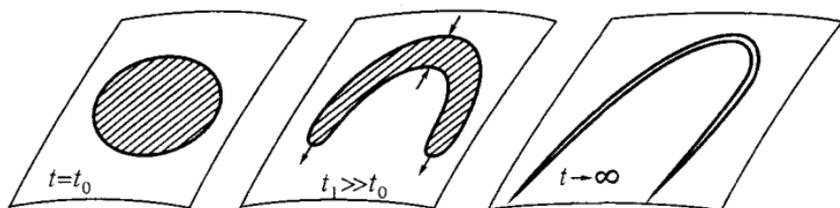


Рис. 22.5. Сжатие начального фазового объема в одном направлении и растяжение в другом

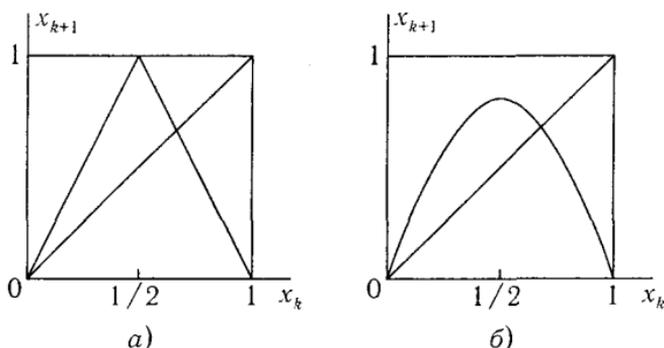


Рис. 22.6. Невзаимнооднозначное отображение отрезка в себя: а — растягивающее кусочно-линейное; б — гладкое

изображающая точка не покидала данной области, т. е. нужна еще возвращаемость траекторий. Проще всего удовлетворить этим условиям, потребовав, чтобы система описывалась невязимнооднозначным растягивающим отображением отрезка в себя, например таким, график которого показан на рис. 22.6а. Неустойчивость любой траектории здесь связана с тем, что везде  $|dx_k/dx_{k-1}| > 1$ , т. е. отображение растягивающее.

Покажем, что движение динамической системы, описываемое растягивающим отображением отрезка в себя, может быть представлено как случайная последовательность. Для простоты записи будем говорить не об отображении рис. 22.6а, а об аналогичном ему отображении рис. 22.7а.

Воспользуемся методами символической динамики [10]. Для этого разобьем фазовое пространство на конечное число областей  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  и предположим, что физический прибор показывает нам только, в какой из областей в данный момент находится изображающая точка. Тогда каждой начальной точке отвечает последо-

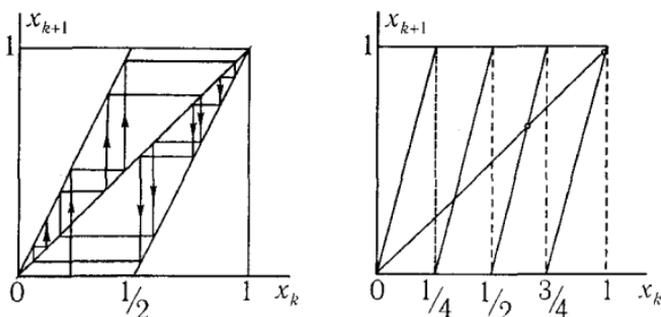


Рис. 22.7. Разрывное растягивающее отображение отрезка в себя: а — исходное отображение; б — двукратное отображение

вательность областей, через которые проходит ее траектория в последующие моменты времени. Если движение периодическое, то чередование различных  $\Delta_i$  также будет периодическим; если движение стохастическое, то последовательность  $\Delta_i$  должна быть случайной. В случае отображения, представленного на рис. 22.7а, областей можно взять всего две:  $\Delta_0$  — для интервала  $0 \leq x_k \leq 1/2$  и  $\Delta_1$  — для интервала  $1/2 < x_k \leq 1$ .

Теперь заметим, что если численную координату точки  $0 \leq x_k \leq 1$  записать, скажем, не в десятичной, а в двоичной форме, то наше отображение можно записать аналитически:

$$x_k = \{2x_{k-1}\}, \quad (22.4)$$

где  $\{\dots\}$  означает дробную часть числа (иногда вместо (22.4) используют другую форму записи:  $x_k = 2x_{k-1} \pmod{1}$ ). Например, на число  $0,1001011\dots$  это отображение действует просто как сдвиг (сдвиг Бернулли) и переводит его в число  $0,001011\dots$ . То, что число получается бесконечным только в одну сторону и сдвиг, следовательно, односторонний, связано с необратимостью преобразования<sup>1</sup>.

Если координата  $x$  — число рациональное, то, начиная с некоторого символа (например,  $n$ -го), последовательность нулей и единиц будет повторяться: это  $n$ -кратная периодическая точка отображения. Нетрудно проверить, что множество периодических точек у нашего отображения является плотным и бесконечным и что точки этого множества все

<sup>1</sup>Его аналогом является двумерное «преобразование пекаря», напоминающее процесс раскатывания теста; квадратный лист раскатывается по одной из координат и складывается, затем снова раскатывается и т. д. [7].

неустойчивы. Здесь открывается свойство, типичное для всяких странных аттракторов: внутри ограниченной области, откуда траектории не выходят, имеется счетное множество неустойчивых циклов, «перебрасывающих изображающую точку одну в другую».

Убедиться, что растягивающее отображение отрезка в себя имеет счетное множество неустойчивых периодических точек, проще всего, построив последовательные итерации этого отображения (рис. 22.76): при двукратном применении отображения неподвижных точек будет уже четыре, при трехкратном —  $2^3$  и т. д. По этому поводу имеются математические теоремы, из которых, в частности, следует, что если непрерывное (в том числе и не гладкое) растягивающее отображение отрезка в себя имеет цикл периода три, то оно имеет цикл с любым периодом [8]. Известно [9], что задаваемые (22.4) последовательности нулей и единиц будут периодическими лишь для множества рациональных чисел, а для почти всех иррациональных, т. е. большинства точек отрезка  $(0, 1)$ , эта последовательность будет случайной в том же смысле, что и последовательность выпадения «орла» или «решки» в классическом вероятностном эксперименте с подбрасыванием монеты.

Таким образом, движения динамической системы, описываемые отображением типа рис. 22.6а и 22.7а, действительно сводятся к случайной последовательности, т. е. являются стохастическими. Стохастические характеристики отображения, приведенного на рис. 22.6а (или 22.7а), находятся совсем просто. Непосредственно из формулы отображения  $x_{k+1} = F(x_k)$  следует, что после однократного отображения начальная плотность вероятности, заданная на отрезке  $\rho_j(x)$ , преобразуется в плотность

$$\rho_{j+1}(F(x)) = \sum P_j(x) |dF(x)/dx|^{-1}, \quad (22.5)$$

где суммирование проводится по всем ветвям функции  $F(x)$ . Смысл этой связи таков: начальное распределение становится в  $dF/dx$  раз менее плотным (отображение растягивающее), но в одни и те же интервалы  $dx$  отрезка попадают после преобразования точки из нескольких участков исходного отрезка (отсутствие взаимной однозначности). Отображения типа рис. 22.6а и 22.7а имеют инвариантное распределение вероятности  $P(x)$ , которое, очевидно, может быть найдено из условия  $\rho_{j+1} = \rho_j = P$ , т. е.  $P(x)$  должно удовлетворять уравнению

$$P(F(x)) = \sum p(x) |dF(x)/dx|^{-1}. \quad (22.6)$$

Для кусочно-линейных отображений вида  $x_{k+1} = \{2x_k\}$ , как можно убедиться прямой подстановкой,  $P(x) = \text{const}$ . Полагая (из условия нормировки полной вероятности на 1)  $P = 1$ , согласно (22.2), (22.3) находим для отображения (22.4) среднее  $\langle x \rangle = \int_0^1 x dx = 1/2$ , дисперсию  $D = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = 1/12$  и корреляционную функцию [3]

$$\begin{aligned} K(j) &= D^{-1} \langle [(x_i - \langle x \rangle)(x_{i+j} - \langle x \rangle)] \rangle = \\ &= 12 \int_0^1 (x - 1/2)(\{2^j\} - 1/2) dx = \exp[-(\ln 2)j]. \end{aligned}$$

Видно, что в вашем случае корреляции со временем спадают экспоненциально. Показатель экспоненты, т. е. показатель Ляпунова, характеризующий скорость спадания корреляций (одновременно и скорость разбегания траекторий), — это энтропия Колмогорова-Синяя. В данном случае энтропия  $h = \ln 2$ .

Возможна ли стохастичность в системах, сводящихся не к разрывным отображениям типа рис. 22.6а, а к гладким, как, например, на рис. 22.6б? Да, но не всегда.

Обратимся к отображению, а точнее к семейству отображений  $x_{k+1} = F(x_k)$ , зависящему от параметра  $b$ :

$$x_{k+1} = bx_k(1 - x_k). \quad (22.7)$$

При значении параметра  $b = 4$  точка максимума  $x = 1/2$  является прообразом неустойчивой неподвижной точки  $x = 0$  (точка  $x = 0$  является последующей для  $x = 1/2$ ). Если сделать замену переменной  $y = \varphi(x) = (2/\pi) \arcsin \sqrt{x}$  [6], то отображение (рис. 22.6б) при  $b = 4$  превратится в кусочно-линейное отображение (рис. 22.6а):

$$F(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1/2, \\ 2(1 - y), & 1/2 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

для которого, как мы показали, инвариантное распределение вероятностей существует. Отсюда следует, что при  $b = 4$  и для отображения (рис. 22.6б) тоже существует инвариантное распределение вероятностей. Плотность этого распределения равна  $[\pi \sqrt{x(1-x)}]^{-1}$ .

### 22.3. Генератор шума. Качественное описание и эксперимент

Исследование стохастичности<sup>1</sup> конкретных динамических систем методами теории колебаний предполагает: выяснение структуры стохастического множества, понимание механизмов возникновения хаоса, нахождение критериев его существования и, наконец, приближенное (на основании выделения тех или иных малых параметров) описание поведения системы в стохастической области. Реализация этой программы возможна лишь для сравнительно простых систем с трехмерным фазовым пространством, допускающих описание с помощью двумерных, а приближенно — и одномерных отображений Пуанкаре. Рассмотрим в качестве примера работу простого радиотехнического генератора стохастических колебаний.

Что такое периодические автоколебания, мы хорошо знаем (см. гл. 14, 16). Стохастические автоколебания — это неупорядоченные, случайные движения (неконсервативных динамических систем, совершающиеся под действием неслучайных источников энергии. Математическим образом стохастических автоколебаний в фазовом пространстве является странный аттрактор, о котором мы говорили в начале главы. Добавим здесь, что термин «странный», придуманный математиками Рюэлем и Такенсом в связи с очень сложной, канторовской [11], структурой аттрактора, сейчас ассоциируется просто со сложным неупорядоченным поведением траекторий на аттракторе.

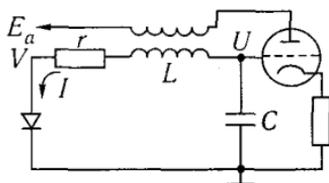


Рис. 22.8. Схема простого генератора шума. Параметры контура:  $C=1,5$  мкФ,  $L=5,7$  МГц; безразмерные параметры схемы:  $g = 2,4\epsilon \approx 4,8 \cdot 10^{-5}$ ; минимальные потери определяются сопротивлением  $r_0 \approx 8,2$  Ом

Схема генератора шума, о котором мы сейчас будем вести речь, изображена на рис. 22.8. От привычного нам генератора Ван-дер-Поля с контуром в цепи сетки (рис. 14.16) она отличается лишь туннельным диодом, включенным последовательно с индуктивностью. Работа схемы описывается следующими уравнениями [12]:

$$\begin{aligned} LC \frac{dI}{dt} &= (MS - rC)I + C(U - V), \\ C \frac{dU}{dt} &= -I, \quad C_1 \frac{dV}{dt} = I - I_{\text{тд}}(V). \end{aligned} \quad (22.8)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее термины «стохастичность» и «хаос» употребляются как синонимы.

Здесь  $C_1$  — емкость туннельного диода,  $S$  — крутизна характеристики лампы,  $M$  — взаимная индуктивность. При рассмотрении работы схемы характеристику лампы будем считать линейной. Это оправдано тем, что в интересующем нас режиме колебания ограничиваются нелинейной характеристикой туннельного диода  $I_{\text{тд}}(V)$  (рис. 22.9) на таком уровне, когда нелинейность лампы не сказывается.

Качественно работу генератора можно описать следующим образом. Пока ток  $I$  и напряжение  $V$  малы, туннельный диод не оказывает существенного влияния на колебания в контуре, и они нарастают. При этом через туннельный диод течет ток  $I$ , а напряжение на нем определяется участком  $\alpha$  характеристики  $I_{\text{тд}}(V)$ . Когда же ток  $I$  достигает значения  $I_m$ , происходит почти мгновенное переключение туннельного диода (быстрота переключения связана с малостью емкости  $C_1$ ) — скачком устанавливается напряжение  $V_m$ . Затем ток через туннельный диод уменьшается и происходит его обратное переключение — с участка  $\beta$  на  $\alpha$ . В результате двух переключений туннельный диод почти полностью поглощает поступившую в контур энергию и колебания начинают снова нарастать.

Таким образом, генерируемый сигнал  $U(t)$  представляет собой последовательность цугов нарастающих колебаний; конец каждого цуга сопровождается импульсом напряжения  $V(t)$ . Из приведенного описания, конечно, не ясно, будет ли установившийся режим периодическим или стохастическим. Разобраться в этом можно, исследуя уравнения (22.8); это мы сделаем ниже, а сейчас приведем результаты эксперимента [12].

Схема рис. 22.8 была реализована на половине триода 6Н1П и на четырех параллельно соединенных туннельных диодах ЗИ306Г. Инкремент нарастания колебаний в контуре, т. е. величину  $h$ , удобно было изменять, меняя сопротивление  $r$ . Минимально достижимые потери в контуре определялись сопротивлением самих элементов схемы  $r_0 \approx 8,2$  Ом. При  $R = r - r_0 \approx 14,5$  Ом в контуре возбуждались чисто периодические колебания, которые ограничивались нелинейностью лампы на столь низком уровне, что диоды не переключались ( $I < I_m$ ). При  $R \approx 13,5$  Ом амплитуда колебаний достигала порогового значения

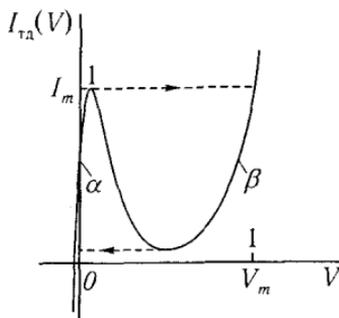


Рис. 22.9. Вольт-амперная характеристика туннельного диода, используемого в схеме простого генератора шума

и сигнал  $U(t)$  представлял собой длинные пакеты колебаний, изредка прерываемые переключениями диодов. И только при  $R < 11$  Ом нелинейность триода не сказывалась — генерировался сигнал в виде цугов, внутри каждого из них колебания экспоненциально нарастали, а переход от одного цуга к другому сопровождался импульсом напряжения на туннельном диоде  $V(t)$ . Ни при одном значении  $R < 11$  Ом не удалось обнаружить периодический режим — генерировался случайный сигнал со сплошным спектром. Из представленных на рис. 22.10 спектров и осциллограмм видно, как с уменьшением  $R$  растет инкремент колебаний  $h$  и уменьшается средняя длительность цуга — при этом в спектре сглаживаются пики на частотах повторения цугов. Большая часть энергии содержится в главном максимуме, соответствующем частоте колебаний контура.

При исследовании уравнений (22.8) перейдем к безразмерным переменным  $x = I/I_m$ ,  $z = V/V_m$ ,  $y = U\sqrt{C}/(I_m\sqrt{L})$ ,  $\tau = t\sqrt{LC}$ . В результате получим

$$\ddot{x} = 2hx + y - gz, \quad \dot{y} = -x, \quad \mu\dot{z} = \dot{x} - f(z), \quad (22.9)$$

$\mu \ll 1$ . Здесь  $h = 0,5(MS - rC)\sqrt{LC}$  — инкремент нарастания колебаний в контуре в отсутствие диода,  $g = V_m\sqrt{C}/(I_m\sqrt{L})$  — параметр, определяющий степень влияния туннельного диода на процессы в контуре;  $\mu = gC_1/C$  — малый параметр, пропорциональный емкости туннельного диода,  $f(z) = I_{\text{тд}}(V_m z)/I_m$  — нормированная характеристика диода (см. рис. 22.9).

Система (22.9) имеет малый параметр  $\mu$  при производной, поэтому все движения в фазовом пространстве (рис. 22.11) можно разделить на быстрые — переключения диода (прямые  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) — и медленные, при которых напряжение на диоде следит за током (соответствующие траектории лежат на поверхностях  $A$  ( $x = 0$ ) и  $B$  ( $x = f(z)$ ,  $f'(z) > 0$ ), соответствующих участкам  $\alpha$  и  $\beta$  характеристики диода).

Система имеет одно неустойчивое (при  $2h > g/f'(0)$ ) состояние равновесия  $x = y = z = 0$  типа «седло». Траектории, лежащие на поверхности  $A$ , раскручиваются вокруг неустойчивого фокуса и в конце концов достигают края поверхности  $B$ . Здесь происходит срыв изображающей точки по линии быстрых движений на поверхность  $B$ . Пройдя по  $B$ , изображающая точка срывается обратно на поверхность  $A$  и попадает в окрестность состояния равновесия — начинается новый цуг нарастающих колебаний. Построенная картина движения и соответствует реализациям, представленным на осциллограммах рис. 22.10.

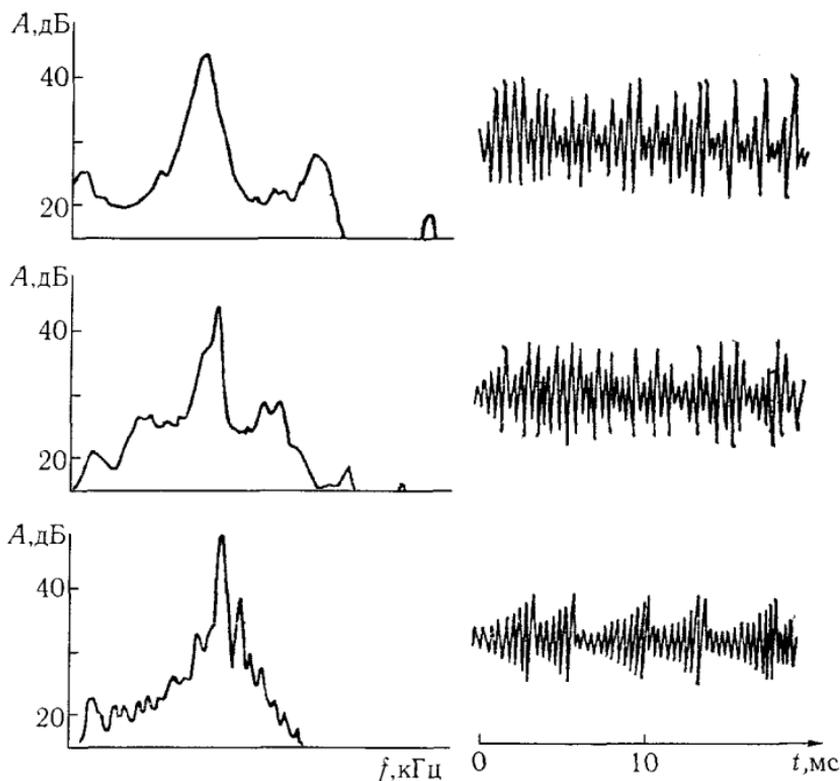


Рис. 22.10. Спектры осциллограммы выходного сигнала автогенератора шума при различных значениях  $R < 11$  Ом (верхнему рисунку соответствует наименьшее  $R$ )

## 22.4. Статистическое описание простого генератора шума

Рассматриваемый нами генератор шума при  $\mu = 0$ , как мы сейчас покажем, описывается невязимнооднозначным отображением отрезка в себя. Однако оно существенно сложнее, чем, например, отображение рис. 22.7. Поэтому аналитически найти инвариантное распределение вероятностей, решая уравнения (22.9), для него не удастся. Для доказательства стохастичности и определения статистических характеристик генератора шума при определенных значениях его параметров мы воспользуемся методом символической динамики [5].

Итак, построим точечное отображение, соответствующее уравнениям (22.9) при  $\mu \rightarrow 0$ . Рассмотрим преобразование точек полуплос-

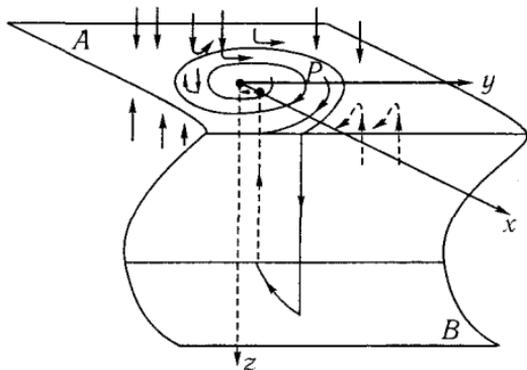


Рис. 22.11. Фазовое пространство системы, описываемой уравнениями (22.9)

кости  $x = 0$ ,  $y > 0$  в себя (рис. 22.11). При  $\mu \rightarrow 0$  эта полуплоскость пересекается только траекториями, лежащими на поверхности медленных движений, поэтому отображение получается одномерным — это отображение полупрямой  $y > 0$ ,  $x = z = 0$  в себя:  $y_{j+1} = F(y_j)$ . В случае произвольной нелинейности «переключательного» элемента (например, туннельного диода) это отображение аналитически описать не удастся. Поэтому воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией:

$$f(z) = \begin{cases} \alpha^{-1}z, & z < \alpha, \\ (1 - \alpha - z)/(1 - 2\alpha), & \alpha < z < (1 - \alpha), \\ (z - 1 + \alpha), & (1 - \alpha) < z. \end{cases} \quad (22.10)$$

В этом приближении  $A$  и  $B$  — полуплоскости, уравнения медленных движений на которых имеют вид (ср. с (22.9))

$$\begin{aligned} \text{а) } \dot{x} &= 2\nu x + y, & \dot{y} &= -x \text{ на плоскости } A, \\ \text{б) } \dot{x} &= 2\nu x + y - b, & \dot{y} &= -x \text{ на плоскости } B. \end{aligned} \quad (22.11)$$

Здесь  $\nu = h - \alpha g/2$ ,  $b = g/(1 - \alpha)$ . Эти уравнения линейны, поэтому с их помощью легко получить явный вид отображения, сшивая участки траектории, лежащие на плоскостях  $A$  и  $B$ .

Отображение будет состоять из двух частей: функция  $F_1(y_j)$  описывает ту часть отображения, которая дается траекториями, не заходящими в полуплоскость  $B$  (рис. 22.12а), а функция  $F_2(y_j)$  — часть, задаваемую траекториями, располагающимися на обеих плоскостях (рис. 22.12б). Из уравнений (22.11а) сразу получаем

$$y_{j+1} = F_1(y_j) = \exp(2\pi\nu)y_j \equiv ky_j. \quad (22.12)$$

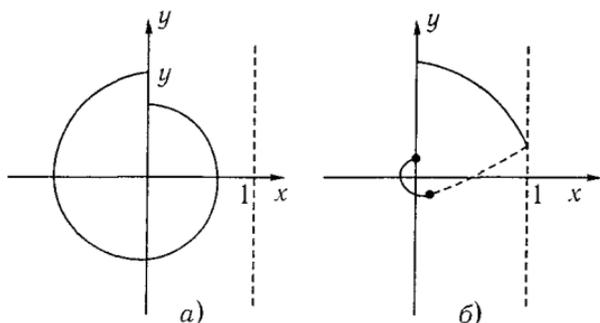


Рис. 22.12. Построение отображения Пуанкаре для системы уравнений (22.11): а — траектория располагается на одной поверхности медленных движений; б — траектория срывается на вторую поверхность медленных движений и возвращается обратно

Функция  $F_2(y)$  так просто из уравнений (22.126) не выражается. Поэтому мы аппроксимируем ее формулой, качественно правильно описывающей поведение траектории в режиме стохастических колебаний:

$$y_{j+1} = F_2(y_j) = y_0 - (y_j - y_0)^{1/2}. \quad (22.13)$$

Таким образом, при значениях  $y_i < y_0$  используется ветвь (22.12) отображения, при  $y_j > y_0$  — ветвь (22.13). Степень  $1/2$  в (22.13) отражает то обстоятельство, что траектории подходят к линии срыва  $x = 1$  почти по касательной. Константа  $y_0$  описывает сдвиг траекторий при движении на плоскости  $B$ . Объединяя (22.12) и (22.13), получим отображение  $y_{j+1} = F(y_j)$ , представленное на рис. 22.13. Это отображение имеет притягивающую область — аттрактор:  $y_0 - (ky_0 - y_0)^{1/2} < y < ky_0$ . Если  $0 < k - 1 < (4y_0)^{-1}$ , то отображение внутри аттрактора растягивающее, т. е.  $|dy_{j+1}/dy_j| > 1$ .

Таким образом, в той области параметров, в которой система (22.9) при  $\mu \rightarrow 0$  описывается отображением (22.12), (22.13) в ее фазовом пространстве имеется стохастический аттрактор, на котором существует инвариантное распределение вероятностей, а движение обладает свойством перемешивания.

Для доказательства стохастичности необходимо убедиться, что все движения внутри аттрактора неустойчивы. Это заведомо выполняется, если отображение растягивающее, т. е.  $|dy_{j+1}/dy_j| > 1$ . Однако это условие является несколько завышенным: достаточно, чтобы движения были неустойчивы не на каждой итерации, а в среднем.

Обратимся теперь к вычислению статистических свойств выходного сигнала [13]. Этот сигнал, как видно из представленных на рис. 22.10 осциллограмм, состоит из последовательности групп импульсов со случайным числом максимумов в каждой группе. С точки зрения отобра-

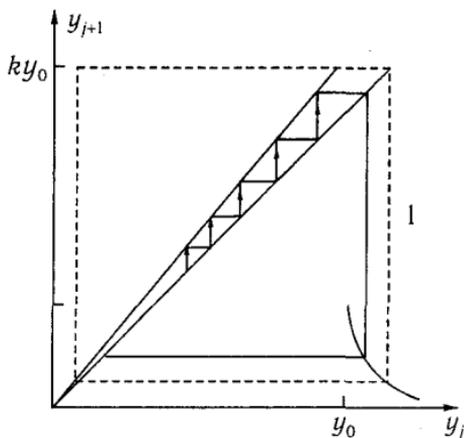


Рис. 22.13. Отображение Пуанкаре для системы, описываемой уравнениями (22.9) при  $\mu = 0$ : 1 — граница аттрактора

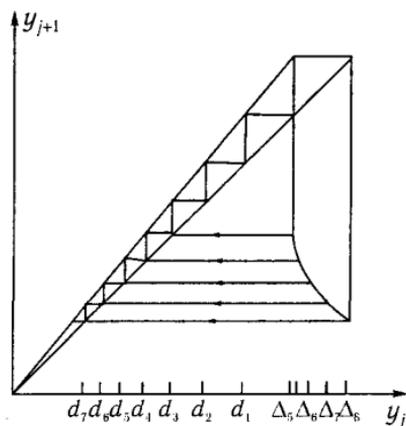


Рис. 22.14. Кусочно-линейная аппроксимация отображения, изображенного на рис. 22.13 (диаграмма Ламерея)

жения Пуанкаре (22.12), (22.13) число максимумов в пачке — это число итераций отображения с  $y < y_0$ . Аппроксимируем наше отображение кусочно-линейным отображением, как на рис. 22.14, и разобьем весь аттрактор на отрезки  $\Delta_i$ , интересуясь теперь не точными координатами точки, а лишь номерами отрезка, в который эта точка попадает. Каждой траектории при этом будет способствовать определенная последовательность отрезков.

Для определения статистики сигнала нужно найти инвариантное распределение вероятностей, т. е. знать вероятности перехода из одного отрезка в другой. В нашем случае (рис. 22.14) их нетрудно определить: если из отрезка возможен только один определенный переход, то вероятность соответствующего перехода равна единице. Это относится к переходам, начинающимся во всех отрезках, кроме  $d_1$ . Из  $d_1$  возможны несколько маршрутов и вероятность пока неизвестным нам образом распределяется между ними. Из физических соображений можно сделать вывод, что вероятности переходов  $d_1 \rightarrow \Delta_i$  должны быть пропорциональными длине отрезков  $\Delta_i$ . Используя теперь выражение для вероятностей переходов (их схема представлена на рис. 22.15)

$$\begin{aligned}
 \mu(d_i) &= \mu(d_{i+1}) \quad (i = 1, 2, 3), \\
 \mu(d_i) &= \mu(d_{i+1}) + \mu(\Delta_{i+1}) \quad (i = 4, 5, 6), \\
 \mu(d_7) &= \mu(\Delta_8), \\
 \mu(\Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8) &= \mu(d_1),
 \end{aligned} \tag{22.14}$$

мы можем определить вероятность того или иного числа ступенек на диаграмме Ламерея (рис. 22.14), т. е. определить вероятность числа импульсов в пачке (осциллограмма на рис. 22.10). Как видно из диаграммы, в рассматриваемом нами случае число импульсов может меняться от пяти до восьми. Если по окончании предыдущего цуга  $y$  попадает в интервал  $\Delta_5$ , то в следующем цуге будет пять импульсов (точка пройдет по отрезкам  $d_4, d_3, d_2, d_1$ , попадет в какой-нибудь из отрезков  $\Delta_i$  и цуг завершится) и т. д. Поэтому вероятность того, что в цуге будет  $n$  импульсов, равна условной вероятности  $P(n) = \mu(\Delta_n) / \mu(\Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7 + \Delta_8)$ . Поскольку эта вероятность пропорциональна длине интервала  $\Delta_n$ , можно приближенно получить

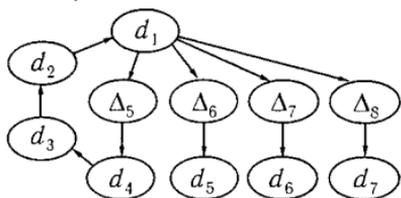


Рис. 22.15. Граф для отображения, представленного на рис. 22.14

$$P(n) \approx (n - 4)^{1/2} k^{-n}. \quad (22.15)$$

Этот результат получен именно для ситуации, представленной на диаграмме (см. рис. 22.14). Если минимальное число импульсов в цуге равно  $n_0$  (а не пяти, как в рассмотренном случае), то вместо (22.15) будем иметь  $P(n, n_0) \approx (n - n_0 + 1)^{1/2} k^{-n}$ . Построенные с помощью этой формулы распределения числа импульсов в цуге довольно хорошо описывают статистику импульсов реального генератора.

В настоящее время предложено и подробно исследовано большое число генераторов стохастических автоколебаний (см., например, [35, гл. 9]). В частности, подробно изучен теоретически и экспериментально так называемый генератор с «инерционной не линейностью» (впервые термин был введен в [42]), в котором автоколебания возникают за счет безынерционной положительной обратной связи, приводящей к отрицательному сопротивлению, а их ограничение за счет нелинейного инерционного взаимодействия между динамическими переменными (см. книги [35, 39] и библиографию к ним).

## 22.5. Пути возникновения странных аттракторов

В этом параграфе мы обсудим наиболее типичные пути возникновения странных аттракторов в системах с трехмерным фазовым пространством.

Многие из интересующих нас переходов описываются в рамках одномерных отображений. С их обсуждения мы и начнем, памятуя о том, что к одномерным отображениям вблизи границы возникновения стохастичности могут быть сведены и некоторые многомерные системы (см. гл. 23).

*Последовательные удвоения периода.* Вернемся к отображению (рис. 22.6б)  $x_{k+1} = bx_k(1 - x_k)$ , где параметр  $b$  лежит в интервале  $0 \leq b \leq 4$ .

К такому отображению сводятся многие трехмерные системы, в частности система, аттрактор которой имеет вид расширяющейся ленты, образующей складку, и затем замыкающейся на себя (рис. 22.16). Для координаты  $\varphi$  на секущей получается отображение, как на рис. 22.6б.

При любом  $b$  у этого отображения имеется неподвижная точка  $x_{k+1} \equiv x_k = x^* = 0$ , а при  $b > 1$  — еще одна:  $x^* = 1 - 1/b$ . Эта точка устойчива вплоть до  $b = 3$ . При  $b > 3$  нетривиальная неподвижная точка становится неустойчивой: мультипликатор  $dx_{k+1}/dx_k$  в этой точке переходит через значение  $-1$  и возникает устойчивое периодическое движение периода 2. Этому соответствует появление двух действительных корней в уравнении  $x_{k+2} = x_k$ . Однократная неподвижная точка не исчезает, но она становится неустойчивой. Двукратный цикл устойчив в интервале изменения параметра  $3 < b < 3,45$ . Когда  $b \approx 3,45$  двукратный цикл теряет устойчивость и рождается устойчивый четырехкратный цикл. Дальнейшее увеличение  $b$  приводит к тому, что он теряет устойчивость и возникает устойчивый цикл периода  $2^3$ , затем периода  $2^4, \dots, 2^n, 2^{n+1}$  и т. д. Наконец, при  $b_\infty \approx 3,57$  устойчивых периодических движений не остается и происходит переход к стохастичности. В трехмерном фазовом пространстве этому соответствует появление странного аттрактора (рис. 22.16). Обратим внимание на то, что и при  $b > 3,57$  это отображение может иметь устойчивые периодические точки; например, при  $b = 3,83$  существует устойчивый трехкратный цикл [14].

Замечательной особенностью перехода к хаосу путем бесконечной цепочки бифуркаций удвоения является его свойство универсальности [15]. Оказалось, что интервал изменения параметра  $b$ , внутри которого существует цикл периода  $2^n$ , с ростом  $n$  сужается по закону геометрической прогрессии

$$(b_n - b_{n-1})/(b_{n+1} - b_n) = \delta, \quad (22.16)$$

где  $\delta = 4.66920\dots$  — универсальная постоянная Фейгенбаума. Отсюда

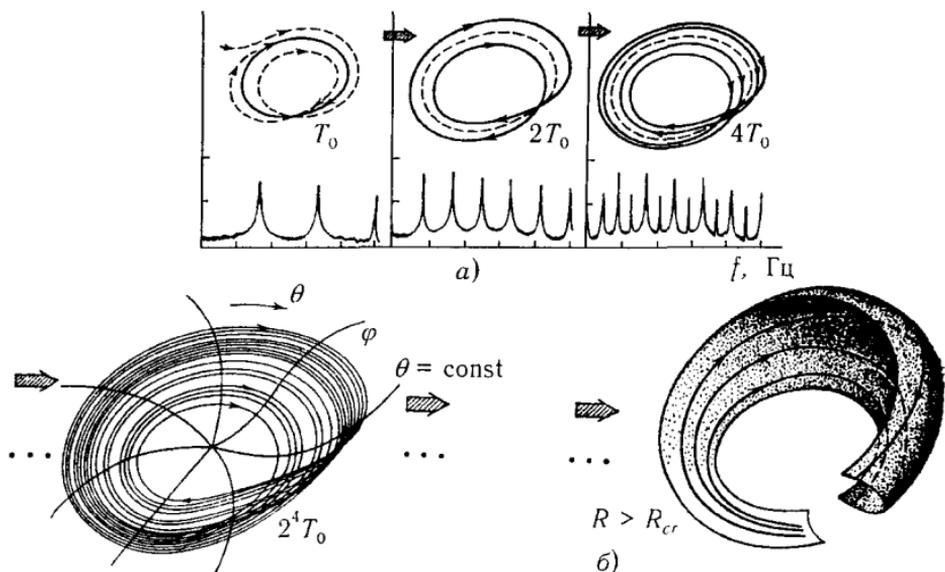


Рис. 22.16. Возникновение странного аттрактора в трехмерной системе путем последовательности бифуркаций удвоения периода (исходное движение имеет период  $T_0$ ): а — последовательность удвоений в фазовом пространстве (вверху) и на спектрограммах (внизу); б — странный аттрактор в виде складывающейся вдвое и замыкающейся на себе «ленты», который возникает вслед за потерей устойчивости движения с периодом  $2^\infty T_0$  (в сечении «лента» имеет канторовскую структуру [33])

сразу следует, что, определив экспериментально границы нескольких первых удвоений, можно по формуле  $(b_\infty - b_n) \approx \delta^{-n}$  определить значение параметра  $b_\infty$ , когда появляется цикл бесконечного периода  $T = 2^\infty T_0$ , вслед за которым и возникает стохастическое поведение. Универсальными при  $b \geq b_\infty$  оказываются и свойства возникшего таким образом стохастического движения [16, 17].

Переход к стохастичности через бесконечную цепочку бифуркаций удвоения периодического движения является довольно типичным для диссипативных систем [18, 19]. Объясняется это тем, что многие диссипативные системы, в том числе и высокого порядка (с многомерным фазовым пространством), вблизи границы перехода описываются с достаточной степенью точности гладким не взаимно однозначным одномерным отображением (рис. 22.6б). Природу этого явления мы обсудим в следующем параграфе. Здесь же приведем два примера, иллюстрирующие рассматриваемый путь перехода диссипативной системы к стохастическому поведению.

Эти примеры, описывающие резонансное взаимодействие осцилляторов, представляют и самостоятельный интерес для теории нелинейных волн.

Резонансное взаимодействие волн — наиболее характерное проявление нелинейных свойств разнообразных сред. Как мы знаем (см. гл. 20), возникающие при таком взаимодействии нелинейные явления (генерация гармоник и субгармоник, самомодуляция и самофокусировка волн, различного рода параметрические процессы) обнаруживаются в диспергирующих средах даже при весьма малой нелинейности, если выполнены условия синхронизма  $\sum n_i \omega_i = 0$ ,  $\sum n_i \mathbf{k}(\omega_i) = 0$ , где  $\omega_i$  — частоты, а  $\mathbf{k}(\omega_i)$  — волновые векторы взаимодействующих волн. Амплитуды этих волн являются медленно изменяющимися функциями пространственных координат и времени. Нелинейное взаимодействие квазигармонических волн, как мы уже говорили, играет большую роль в физике плазмы, гидродинамике, нелинейной оптике, физике конденсированного состояния и других областях. Если число элементарных возбуждений в среде очень велико, то, как правило, устанавливается нерегулярное поведение волнового поля.

При отсутствии источников и стоков энергии спектр таких волн отвечает равномерному распределению энергии по степеням свободы (распределение Рэлея–Джинса) (см. гл. 20). Для самосогласованного описания реальной волновой турбулентности необходимо учесть диссипацию и подкачку энергии из источника (внешнего поля при нагреве плазмы, ветра для волн на воде и т. д.). При таком описании задача сводится к рассмотрению динамики ансамбля взаимодействующих осцилляторов — мод, часть из которых черпает энергию от источника, а часть передает ее термостату. Рассмотрим здесь простейшие модели такого типа, не предполагая предварительно, что фазы волн хаотизированы (ср. с § 20.4).

В средах с нелинейностью, квадратичной по полю, элементарным взаимодействием является взаимодействие трех волн (условие синхронизма  $\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \delta = 0$ ,  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 = 0$ ; см. (17.30)):

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \sigma_1(a_j) + a_2^* a_3 \exp(i\delta t), \\ \dot{a}_2 &= \sigma_2(a_j) + a_1^* a_3 \exp(i\delta t), \\ \dot{a}_3 &= \sigma_3(a_j) - a_1 a_2 \exp(-i\delta t). \end{aligned} \quad (22.17)$$

Здесь  $a_j$  — комплексные амплитуды волн, которые предполагаются пространственно однородными (нормировка выбрана таким образом,

что коэффициенты взаимодействия равны 1),  $\sigma_i$  — линейные слагаемые, описывающие подкачку энергии и диссипацию,  $\delta$  — расстройка.

Характер энергообмена между неустойчивой волной из  $\omega_3$  и затухающей парой  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т. е. когда  $\sigma_3 = \gamma_3 a_3$ ,  $\sigma_1 = -\nu_1 a_1$ ,  $\sigma_2 = -\nu_2 a_2$ , существенно зависит от соотношения  $\gamma_3$  и  $\nu_{1,2}$ . Численный анализ показывает [20], что хаотический обмен энергией между такими модами реализуется в достаточно широкой области параметров. Хаос возникает в результате возникновения цепочки последовательных бифуркаций удвоения периода. Наглядное исследование структуры получающегося странного аттрактора затруднительно, поскольку следующая из (22.17) в случае  $\nu_1 \neq \nu_2$  система дифференциальных уравнений имеет порядок, равный четырем. Более перспективным в этом отношении является анализ вырожденного случая  $\nu_1 = \nu_2$ . Поскольку амплитуды одинаково затухающих низкочастотных волн при  $t \rightarrow \infty$  выравниваются (это нетрудно показать, воспользовавшись (22.17)), то система (22.17) может быть представлена в форме

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Z - 2Y^2 + \delta'Y + X, \\ \dot{Y} &= 2XY - \delta'X + Y, \\ \dot{Z} &= -2Z(X + \nu).\end{aligned}\tag{22.18}$$

Здесь  $X = (|a_3|/\gamma_3) \cos \psi$ ,  $Y = (|a_3|/\gamma_3) \sin \psi$ ,  $Z = |a_{1,2}|^2/\gamma_3$ ,  $\psi = \arg a_3 - 2 \arg a_{1,2} - \delta$ ,  $\nu = \nu_{1,2}/\gamma_3$ ,  $\delta' = \delta/\gamma_3$ . При точном синхронизме ( $\delta = 0$ ) и  $\nu > 1/2$  все траектории в фазовом пространстве системы (22.18) при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к плоскости  $Z = 0$  или  $Y = 0$ . Это следует из того, что функция  $P = ZY$  удовлетворяет уравнению  $dP/dt = (1 - 2\nu)P$ , т. е.  $P \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . На плоскостях  $Z = 0$  и  $Y = 0$  отсутствуют устойчивые состояния равновесия или предельные циклы, и все траектории по ним уходят в бесконечность. Стабилизация неустойчивой моды за счет передачи энергии равноправным низкочастотным модам в этом случае, следовательно, невозможна. Однако стабилизация возможна при ненулевой, хотя и очень малой расстройке. Поток энергии при этом в зависимости от параметров оказывается либо постоянным во времени (в фазовом пространстве — устойчивое состояние равновесия), либо периодическим (предельный цикл), либо случайным образом пульсирует (стохастический аттрактор).

Так, при  $\delta = 2$  и  $\nu \leq 3$  поглощения на низкочастотных модах еще недостаточно для стабилизации неустойчивости. При  $3 \leq \nu \leq 8,5$  стабилизация есть — устанавливается простой периодический режим

обмена энергией, затем — при  $\nu > 8,5$  — начинается последовательность бифуркаций удвоения периода этого периодического движения (при  $\nu \geq 11,9$  появляется четырехкратный цикл, при  $\nu \geq 13,5$  — восьмикратный и т. д.). При больших затуханиях реализуется хаотический режим [19].

Аналогичные бифуркации удвоения периода, приводящие к стохастическому поведению, обнаруживаются и в системе, описывающей процесс четырехволнового взаимодействия  $2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $2\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1$ . При этом стабилизация линейной неустойчивой моды  $\omega_0$  осуществляется за счет передачи энергии затухающим спутникам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_0$ , то такому режиму соответствуют стохастические модулированные колебания с несущей частотой  $\omega_0$  [21].

В заключение приведем результаты физического эксперимента с простой диссипативной системой ( $RLC$ -контуром), в котором режим стохастических автоколебаний также возникал в результате последовательности удвоений [22]. Исследовались колебания в последовательном нелинейном  $RLC$ -контуре, на который подводился периодический сигнал с частотой, равной собственной частоте контура в линейном приближении ( $f_0 = 1,784$  МГц). В качестве нелинейного элемента использовался полупроводниковый диод, емкость которого зависела от напряжения по формуле  $C(U) = C_0(1 - U/U_0)^{-0,44}$ . С ростом амплитуды внешнего воздействия в спектре колебаний появлялись последовательно субгармони-

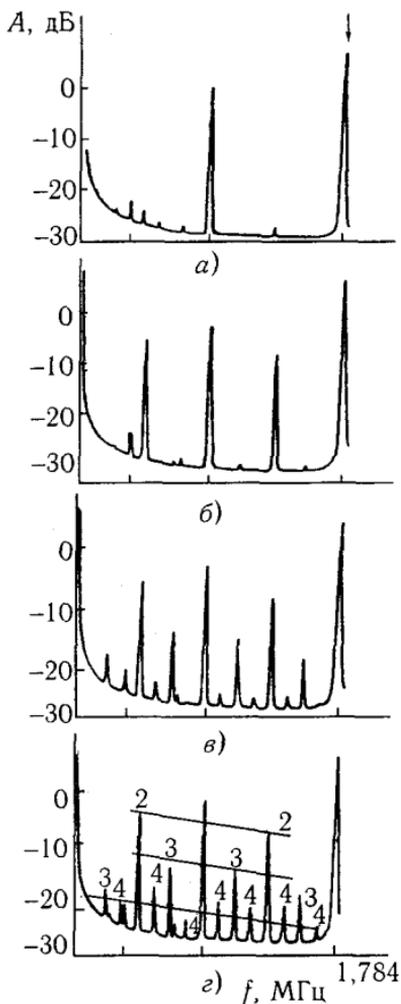


Рис. 22.17. Спектры, иллюстрирующие бифуркации удвоения периода при переходе к стохастическому поведению в нелинейном осцилляторе, возбуждаемом периодической силой;  $A$  — амплитуда;  $f$  — частота (от а к г амплитуда внешней силы увеличивается)

ки  $f_0/2$ ,  $f_0/4$ ,  $f_0/8$  и  $f_0/16$ , соответствующие рождению устойчивых периодических движений с периодами  $2T$ ,  $4T$ ,  $8T$  и  $16T$  (рис. 22.17). С ростом амплитуды внешней силы за критической точкой (точкой перехода) дискретные пики уширялись, а пьедестал поднимался. Спектр колебаний, наблюдаемых в области параметров, соответствующей развиту стохастическому движению, показан на рис. 22.18.

*Жесткий режим возникновения стохастических автоколебаний.* Один из механизмов возникновения странного аттрактора при непрерывном изменении параметра проиллюстрируем на конкретном примере — системе Лоренца. Э. Лоренц обнаружил «детерминированное неперiodическое течение» [23] в простой диссипативной системе с трехмерным фазовым пространством. Эта система, пришедшая из гидродинамики, как сейчас выяснилось, имеет многочисленные иные приложения [7], и ее динамика подробно исследована с помощью качественных и численных методов.

Система Лоренца получается, в частности, из уравнений Буссинеска, описывающих термоконвекцию в подогреваемом снизу горизонтальном слое, если ограничиться анализом лишь двумерных движений, а функцию тока  $\psi$  и изменение температуры  $T$  представить в виде (см. (21.4))

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \psi_{11}(t) \sin(\pi x a/l) \sin(\pi z/l), \\ T(x, z, t) &= T_{11}(t) \cos(\pi x a/l) \sin(\pi z/l) - T_{02}(t) \sin(2\pi z/l). \end{aligned} \quad (22.19)$$

Такое представление означает учет трех связанных пространственных мод, из которых две ( $\psi_{11}$  и  $T_{11}$ ) при  $Ra > Ra_1$  нарастают за счет конвективной неустойчивости, а третья ( $T_{02}$ ) затухает. Параметр  $a = 1/\sqrt{2}$  — это характерный масштаб мод, которые раньше других теряют устойчивость при  $Ra \geq Ra_1$ . Решение (22.19) описывает конвекцию в виде валов или роликов, не меняющихся по третьей координате.

Ограничение неустойчивости в данном случае происходит за счет передачи энергии растущих мод в моду  $T_{02}$ , что соответствует изменению основного профиля температуры таким образом, что в мо-

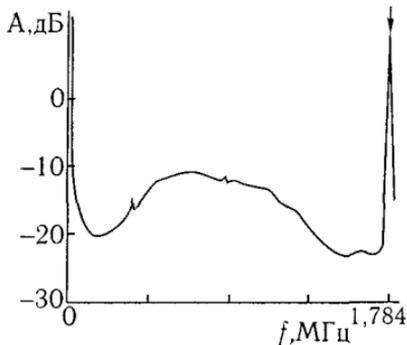


Рис. 22.18. Спектр колебаний неавтономного нелинейного осциллятора в режиме стохастических колебаний

ды  $\psi_{11}$  и  $T_{02}$  в среднем поступает как раз столько энергии, сколько тратится из-за вязкости и температуропроводности. Для амплитуд этих мод  $X \sim \psi_{11}$ ,  $Y \sim T_{11}$ ,  $Z \sim T_{02}$ , и получается система уравнений Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -PrX + PrY, \\ \dot{Y} &= -Y + rX - XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY.\end{aligned}\tag{22.20}$$

Здесь  $Pr$  — число Прандля,  $r = Ra/Ra_1$  — число Рэлея, нормированное на критическое, а  $b = 4/(1 + a^2)$  (см. гл. 21). В первую колонку здесь объединены слагаемые, ответственные за линейное затухание мод, во вторую колонку — слагаемые, ответственные за их параметрическое возбуждение (слагаемые, пропорциональные  $X$  и  $Y$ , входят с одинаковыми знаками в уравнения для  $\dot{X}$  и  $\dot{Y}$  соответственно), а в третью колонку входят слагаемые, ответственные за нелинейную перекачку энергии в затухающую моду  $Z$ . И вот такая, как казалось, простая система демонстрирует непериодическое поведение (на рис. 22.19 представлена одна из траекторий, принадлежащих аттрактору [24]).

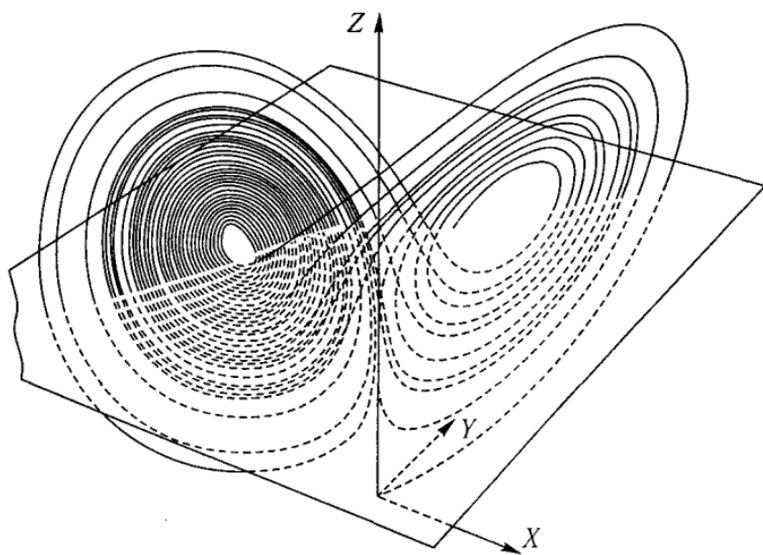


Рис. 22.19. Траектория, воспроизводящая аттрактор Лоренца (выходит из начала координат). Здесь  $r = 2,8$ , а горизонтальная плоскость соответствует  $z = 27$

Прежде всего обсудим простейшие особенности системы (22.20).

- 1) Эта система неустойчива на бесконечности, и в фазовом пространстве существует область, куда входят все траектории. Положив  $u = X^2 + Y^2 + (Z - r - Pr)^2$ , из (22.20) находим  $\dot{u} \leq -C_1 u + C_2$  ( $C_{1,2} > 0$ ), т. е. все траектории входят в шар радиуса  $u \leq 2C_2/C_1$ .
- 2) Фазовый объем системы (22.20) равномерно сжимается:

$$\partial \dot{X} / \partial X + \partial \dot{Y} / \partial Y + \partial \dot{Z} / \partial Z = -(1 + Pr + b), \quad (22.21)$$

т. е. притягивающее множество имеет нулевой объем. 3) Система симметрична по отношению к замене  $X \rightarrow -X$ ,  $Y \rightarrow -Y$ ,  $Z \rightarrow Z$ .

Проследим зависимость поведения системы от параметра  $r$  (числа Рэлея). При  $r < 1$  единственным состоянием равновесия является устойчивый узел в начале координат  $O(0, 0, 0)$ . Когда  $r > 1$ , начало координат становится седлом и из него рождаются два устойчивых состояния равновесия  $C^\pm = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ , отвечающих стационарной конвекции в виде валов с противоположным направлением вращения жидкости. Эти нетривиальные состояния равновесия существуют при  $r > 1$ , но устойчивы они только при  $r < r^* = Pr(Pr + b + 3)/(Pr - b - 1)$ .

При  $r = r^*$  в состояние равновесия  $C^+$  и  $C^-$  попадают существовавшие в их окрестности неустойчивые циклы и передают им свою неустойчивость. При  $r > r^*$  эти состояния равновесия превращаются в состояния типа седло-фокус: одномерная сепаратриса устойчива, а на двумерной расположены раскручивающиеся спирали. Таким образом, при  $r > r^*$  внутри упоминавшейся области в фазовом пространстве системы (22.20) все состояния равновесия неустойчивы. Ответ на вопрос, к чему в этом случае будут притягиваться траектории, требует существенно нелокального рассмотрения и может быть получен в результате численного исследования [24, 25].

Изменение структуры разбиения фазового пространства системы (22.20) на траектории удобно пояснить с помощью рис. 22.20, где представлены взаимные расположения основных элементов — сепаратрис седла  $(0, 0, 0)$ , состояний равновесия и предельных циклов. Эти результаты получены при  $Pr = 10$ ,  $b = 8/3$  и переменном  $r$ .

1. При  $1 < r < r_1$ , где  $r_1 = 13,92$ , система помимо тривиального имеет еще два состояния равновесия —  $C^+$  и  $C^-$ . Состояние равновесия  $O$  является седлом, имеющим двумерное устойчивое многообразие  $W$  и две неустойчивые одномерные сепаратрисы —  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , стремящиеся к состояниям равновесия  $C^+$  и  $C^-$  (рис. 22.20а).

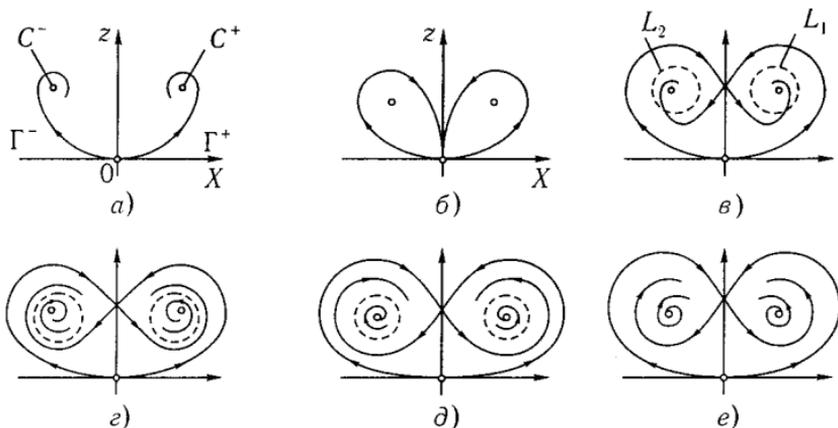


Рис. 22.20. Иллюстрация последовательных бифуркаций в системе Лоренца при увеличении параметра  $r$ : а —  $1 < r < r_1$ ; б —  $r = r_1$ ; в —  $r_1 < r < r_2$ ; г —  $r = r_2$ ; д —  $r_2 < r < r^*$ ; е —  $r^* \leq r$

2. При  $r = r_1$  каждая из сепаратрис становится двоякоасимптотической к седлу 0 (рис. 22.20б). При переходе  $r$  через  $r_1$  из замкнутых петель сепаратрис рождаются неустойчивые (седловые) периодические движения — предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$ . Вместе с этими неустойчивыми циклами рождается и очень сложно организованное предельное множество; оно, однако, не является притягивающим (аттрактором), и при  $r_1 < r < r_2$ , где  $r \approx 24,06$ , все траектории по-прежнему стремятся к  $C^\pm$ . Ситуация на рис. 22.20в отличается от предшествующей тем, что теперь сепаратрисы  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  идут к «не своим» состояниям равновесия:  $C^-$  и  $C^+$  соответственно. При  $r = r_2$  сепаратрисы  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  «наматываются» на седловые траектории  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 22.20г).

3. При  $r_2 < r < r^*$ , где  $r^* = 24,74$ , в системе наряду с устойчивыми состояниями равновесия  $C^\pm$  существует еще притягивающее множество, характеризующееся сложным поведением траекторий — аттрактор Лоренца (рис. 22.20д).

4. При  $r \rightarrow r^*$ , как уже говорилось, седловые циклы  $L_1$  и  $L_2$  стягиваются к состояниям равновесия  $C^+$  и  $C^-$ , которые при  $r = r^*$  теряют устойчивость, и при  $r \geq r^*$  аттрактор Лоренца является единственным притягивающим множеством системы (22.20).

Таким образом, если устремить  $r$  к  $r^*$  со стороны меньших значений, то стохастичность в системе Лоренца возникнет сразу, скачком, т. е. имеет место жесткое возникновение стохастических автоколебаний.

*Переход через перемежаемость.* В приложениях (см. гл. 23) встречается переход к стохастичности, который на осциллограмме выглядит как постепенное (при изменении параметра) исчезновение периодических колебаний за счет прерывания их стохастическими всплесками — перемежаемости (рис. 22.21а). Этот переход также можно описать с помощью не взаимно однозначного отображения отрезка в себя. Пусть имеется некоторое отображение (рис. 22.21б). Его характерной особенностью является наличие наряду с растягивающими участками 1 и 2 участка 3. Пересечению этого участка отображения с биссектрисой соответствуют две неподвижные точки — устойчивая и неустойчивая.

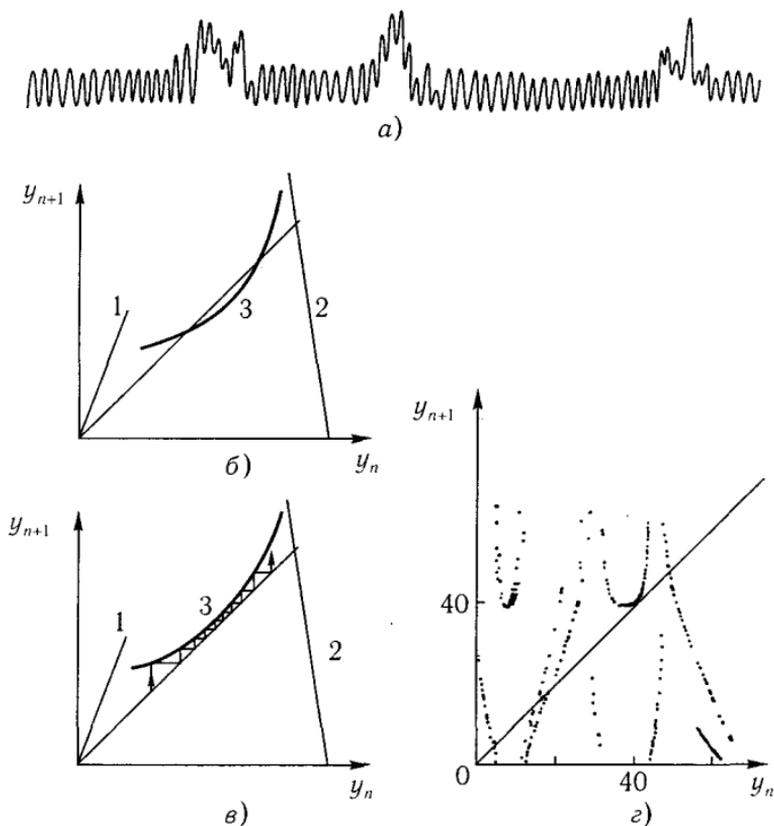


Рис. 22.21. Переход к стохастичности через перемежаемость: а — осциллограмма стохастических колебаний, возникающих непосредственно после перехода к стохастичности; б — модельное одномерное отображение, соответствующее предтурбулентному режиму ( $r > r_{кр}$ ); в — отображение при  $r \approx r_{кр}$ ; г — отображение, соответствующее модели Лоренца при  $r = 166,2$

Ввиду того, что в основной своей части отображение является растягивающим, переходные процессы в такой системе могут быть достаточно сложными. Однако при  $t \rightarrow \infty$  все траектории стремятся к единственному аттрактору — устойчивой неподвижной точке, которая соответствует устойчивому периодическому движению. Пусть теперь при изменении параметра участок 3 поднимается над биссектрисой. При этом устойчивая и неустойчивая неподвижные точки будут сближаться, затем сольются и исчезнут — устойчивое периодическое движение исчезает (рис. 22.21в). Если деформированное таким образом отображение оказывается в среднем растягивающим, то новые (более высокой кратности) устойчивые периодические точки не возникнут, и система будет двигаться стохастически.

Непосредственно вслед за слиянием и исчезновением неподвижных точек (т. е. строго периодического движения) для системы будет характерен длительный переходный процесс, соответствующий прохождению траекториями области вблизи только что исчезнувшего периодического движения («ламинарная» фаза). После прохождения этой области система движется случайно («турбулентная» фаза) до тех пор, пока вновь не попадет в упомянутую область и т. д.

Отображение, представленное на рис. 22.21г, соответствует обсуждавшейся нами системе Лоренца при достаточно больших числах Рэлея,  $r = 166, 2$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ . Из вида этого отображения следует, что и в системе Лоренца также возможен переход к стохастичности через перемежаемость [26]<sup>1</sup>.

Таким образом, в приведенном примере переход к стохастическому поведению через перемежаемость связан со слиянием и последующим исчезновением устойчивой и неустойчивой периодических траекторий. Этот же переход реализуется и в многомерных системах. Соответствующая бифуркация, приводящая к возникновению сложного поведения, описана в [27].

*Возникновение стохастичности за счет разрушения квазипериодических движений.* В автоколебательных системах с несколькими степенями свободы вне полосы взаимной синхронизации наблюдаются биения. В спектре таких автоколебаний содержится несколько несоизмеримых частот (не более двух–трех), а в фазовом пространстве им соответствует притягивающая незамкнутая намотка тора (соответственно

<sup>1</sup>При движении со стороны больших чисел  $Ra \geq 250$  в системе Лоренца наблюдается возникновение стохастичности за счет последовательности бифуркации удвоения периода.

двух- или трехмерного). Когда параметры системы попадают в область синхронизации, на торе появляется предельный цикл. Потеря устойчивости этим предельным циклом одним из рассмотренных выше способов тоже может привести к возникновению странного аттрактора. Добавим, что странный аттрактор может возникать, как показано в [28], и непосредственно вслед за разрушением трехмерного тора (см., например, [29]).

Здесь нет возможности углубляться в соответствующие математические расчеты. Описание же физических процессов, соответствующих разрушению торов, мы отложим до § 23.2, где обсуждаются механизмы возникновения турбулентности в гидродинамических течениях.

## 22.6. Размерность стохастических множеств

Как мы уже говорили в начале главы, размерность стохастического множества гамильтоновой системы совпадает с размерностью фазового пространства исходной системы. Размерность же стохастических аттракторов может быть существенно меньше размерности фазового пространства исследуемой диссипативной системы. Именно это проясняет ответ на вопрос: почему и очень простая система, например нелинейный осциллятор с трением, возбуждаемый периодической силой, и очень сложная, например гидродинамическое течение в ячейке (см. § 23.2), демонстрируют одни и те же свойства перехода.

Мы уже говорили, что на стохастическом множестве все траектории должны быть неустойчивы. Они не могут быть неустойчивы одновременно по всем направлениям — это приведет к безграничному росту объема, т. е. аттрактор перестанет быть аттрактором: располагающиеся внутри ограниченного фазового объема неустойчивые траектории могут быть только седловыми — они неустойчивы по одним направлениям и устойчивы по другим (причем эти направления вдоль траектории могут меняться). Скорость разбегания траектории по каждому из направлений характеризуется средним по траектории положительным ляпуновским показателем  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ , где  $s$  — число неустойчивых направлений), скорость сближения траекторий — отрицательными показателями  $\lambda_j$  ( $s < j \leq n$ , где  $n$  — размерность фазового пространства). Напомним (см. гл. 15), что величина  $\lambda_j$  равна среднему по траектории значению  $\ln[l(\tau)/l(0)]$ , где  $l(0)$  и  $l(\tau)$  — расстояния от возмущенной траектории до исходной и моменты времени 0 и  $\tau$  соответственно (рис. 22.22).

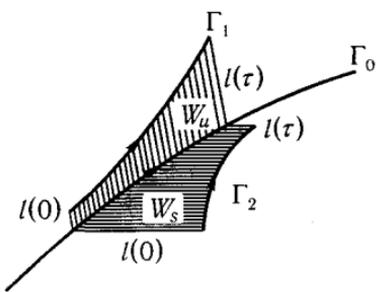


Рис. 22.22. К определению ляпуновского показателя ( $\Gamma_0$  — седловая траектория,  $\Gamma_{1,2}$  — возмущенная траектория,  $W_s$ ,  $W_u$  — устойчивое и неустойчивое многообразия)

Ввиду диссипативности системы

$$\sum_{j=1}^s \lambda_j + \sum_{j=s+1}^n \lambda_j = \operatorname{div} \mathbf{u} < 0.$$

Расположим показатели в порядке убывания:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . Тогда характеристику стохастического множества, называемую размерностью, определим так [30]:  $D = m + d$ , где  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{m-1} > 0$ ,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m < 0$ , а  $d$  определяется из равенства  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{m-1} + d\lambda_m = 0$  (очевидно,  $0 \leq d \leq 1$ ). Величина  $d$  называется дробной частью размерности аттрактора (и иногда называют фрактальной размерностью) [31].

Видно, что размерность странного аттрактора зависит не только от числа неустойчивых направлений, но и от суммарной скорости разбегания траекторий по ним.

С физической точки зрения представляется важным нахождение связи между размерностью стохастического множества и значением параметра, характеризующего степень неравновесности системы (например, числа Рейнольдса в гидродинамике). Однако пока что на этот счет имеются лишь предварительные, весьма завышенные оценки.

Если  $D \geq 2$ , то фазовые траектории, образующие аттрактор, располагаются в тонком слое вблизи некоторой поверхности<sup>1</sup>. При этом приближенно (пренебрегая толщиной аттрактора) движение на аттракторе можно описать с помощью одномерного отображения Пуанкаре, связывающего координату предыдущего пересечения принадлежащей аттрактору траектории с секущей поверхностью с координатой следующего пересечения  $x_{k+1} = F(x_k)$ . К числу аттракторов с  $D - 2 = d < 1$  принадлежит, в частности, аттрактор системы Лоренца. Именно поэтому все известные бифуркации и этой системе так хорошо описываются с помощью одномерных отображений.

Таким образом, любая диссипативная система, размерность стохастического множества которой больше или равна двум, должна демонстрировать переходы к стохастичности, которые описываются в

<sup>1</sup>В действительности траектории ложатся на бесконечное число поверхностей, так как структура аттрактора канторовская.

рамках одномерных отображений, независимо от размерности фазового пространства.

Величина  $D$  характеризует и близость странного аттрактора в слабодиссипативной системе к стохастическому множеству соответствующей гамильтоновой системы. Такая близость, в том числе и по статистическим характеристикам, имеет место, когда  $D < n$  ( $n$  — размерность фазового пространства).

Приведем один пример. Рассмотрим стохастические автоколебания в параметрически возбуждаемом нелинейном осцилляторе [32]:

$$\ddot{x} + h\dot{x} + (1 - b \cos \Omega t)x + x^3 = 0. \quad (22.22)$$

Здесь  $h$  характеризует величину диссипации,  $b$  — величину внешнего поля.

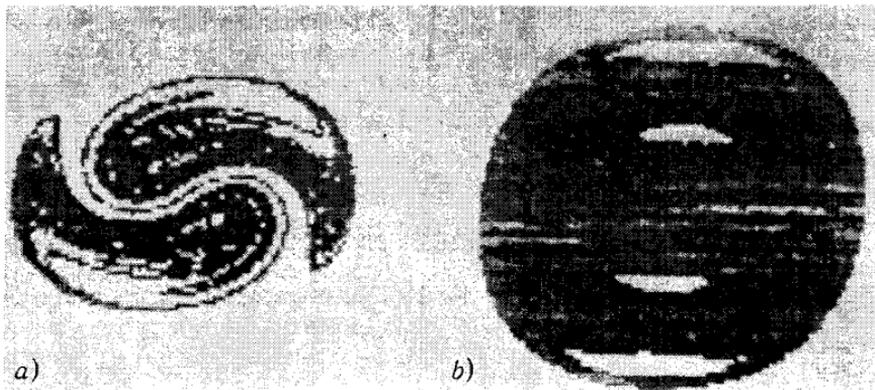


Рис. 22.23. Фазовые портреты стохастического множества уравнения (22.22) на секущей плоскости: а — странный аттрактор при  $h = 0,12$ ,  $b = 25$ ; б — стохастическое множество соответствующей гамильтоновой системы ( $h = 0$ )

Численное исследование этой системы удобно проводить с помощью построения отображения Пуанкаре точек секущих плоскости  $t = \text{const}$  в себя через период  $T_0 = 2\pi/\Omega$  (см. гл. 15). Напомним, что устойчивому периодическому движению с периодом  $NT_0$  на секущей плоскости  $\dot{x}x$  соответствует  $N$  точек. Стохастическому множеству в фазовом пространстве  $\dot{x}xt$  уравнения (22.22) на секущей плоскости отвечает сложное множество точек. При  $h > 0$  это — аттрактор. На рис. 22.23 представлены фазовые портреты на секущей одного из таких аттракторов (при  $h = 0,12$ ,  $b = 25$ ) и стохастического множества гамильтоновой системы ( $h = 0$ ,  $b = 25$ ). Размерность аттракто-

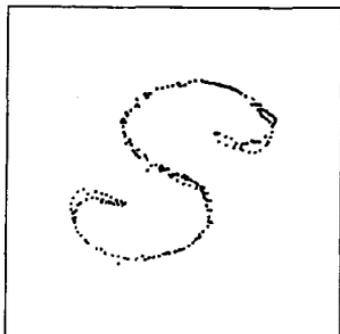


Рис. 22.24. Странный аттрактор системы (22.22), приближенно описываемый одномерным отображением ( $D = 2,22$ ,  $h = 0,9$ ,  $b = 17$ ,  $\Omega = 2,04$ )

ра, возникающего из стохастического множества гамильтоновой системы,  $D = 2,78 \approx 3$ , чем и объясняется близость фазовых портретов на рис. 22.23а.

В другом предельном случае ( $D - 2 \rightarrow D$ ) странный аттрактор уравнения (22.22) приближенно описывается одномерным отображением [32] (рис. 22.24).

## ГЛАВА 23

# Возникновение турбулентности

### 23.1. Общие замечания

В предыдущей главе мы говорили о возникновении стохастичности лишь в простых системах — системах с небольшим числом степеней свободы. Кажется совершенно очевидным, что в распределенных системах существование стохастических движений, не связанных с действием флуктуаций или шумов, должно быть еще более распространенным явлением. Действительно, стохастические движения сред или полей очень распространены в природе. Возможно, наиболее важным примером такого движения является случайное запутанное течение жидкости, возникающее при достаточно больших скоростях в отсутствие случайных внешних сил или полей (гидродинамическая турбулентность).

В то же время наличие бесконечного (или даже просто очень большого) числа степеней свободы в системе делает проблему выяснения механизма или природы стохастичности в каждом конкретном случае весьма сложной, хотя бы потому, что в таких системах может существовать большое число различных нелинейных режимов, которые реализуются при близких начальных условиях. Действие в этой ситуации даже слабого шума приведет к очень сложному и запутанному движению системы, статистические характеристики которого будут слабо зависеть от статистики действующего шума. Такие движения наблюдаются в экспериментах, в частности гидродинамических. Мы в этой главе их обсуждать не будем и сосредоточим внимание на случайном движении детерминированных распределенных систем, в частности на механизмах возникновения гидродинамической турбулентности, математическим образом которой является странный аттрактор.

Оговоримся сразу, что под турбулентностью мы понимаем стохастический автоколебания в распределенной системе, т. е. случайное движение нелинейной диссипативной среды или поля, совершающееся под действием неслучайных источников энергии.

Проблема турбулентности возникла в середине прошлого века, когда между теоретической гидродинамикой (с ее уравнениями Навье–Стокса) и прикладными задачами о течении жидкости или газа обнаружилось множество противоречий. Например, экспериментаторам было известно, что при достаточно больших скоростях течения жидкости по трубе сопротивление движению должно расти как квадрат средней (по сечению) скорости (закон Шези). Из теории же следовало, что сопротивление растёт пропорционально первой степени скорости (закон Пуазейля). Первый шаг к примирению этих противоречий сделал О. Рейнольдс, опубликовавший в 1883 г. работу о результатах опытов с окрашенными струйками в потоке, где он ввел число  $Re = VD/\nu$  ( $D$  — диаметр,  $V$  — скорость,  $\nu$  — кинематическая вязкость) и впервые связал закон Пуазейля с ламинарным течением жидкости, а закон Шези с турбулентным движением. Он установил, что ламинарное движение устойчиво только при  $Re < 2000$ , а при больших числах  $Re$  возникает турбулентность. Так, для воды, текущей по трубе диаметром 1 см при комнатной температуре, ламинарный режим, как правило, кончается уже при средней скорости течения  $\sim 30$  см/с.

Возникнув почти сто лет назад, проблема турбулентности, заключающаяся в выяснении природы случайного движения нелинейной среды и нахождения способов ее самосогласованного описания, остается и сейчас одной из самых притягательных и интригующих проблем в классической физике.

Главным в проблеме турбулентности — неупорядоченного, хаотического движения сплошной среды — во всех ее физических и иных проявлениях всегда был и остается вопрос о ее природе, т. е. причинах и механизмах возникновения хаоса.

В разное время появилось несколько вселявших энтузиазм моделей, которые претендовали на объяснение механизмов возникновения турбулентности в нелинейных средах, однако сравнительно быстро выяснилась их недостаточность. Наиболее долгоживущей оказалась модель Ландау–Хопфа, представляющая возникновение турбулентности как длинную цепочку последовательных неустойчивостей, в результате которых возбуждаются все новые и новые степени свободы и движение наконец становится очень сложным и запутанным.

Представление о том, что для перехода автоколебательной системы в турбулентное состояние необходимо возбуждение, если не бесконечного, то по крайней мере чрезвычайно большого числа степеней свободы, является очень распространенным. Это, очевидно, связано с уже упоминавшимся пониманием стохастичности динамических систем, которое

сформировалось в статистической механике: в газе движение каждой отдельной частицы в принципе известно и предсказуемо, но движение системы из очень большого числа частиц (даже невзаимодействующих). столь сложно, что динамическое описание теряет всякий смысл. Отсюда потребность в статистическом описании. Автоколебательный характер движения среды или поля по этим представлениям существен лишь на этапе установления стационарных пульсации — равновесие между отбором энергии у источника (например, среднего течения) и диссипацией определяет интенсивность «автоколебательных мод». В установившемся же режиме такой «газ автогенераторов», как кажется, не должен отличаться от идеального газа. Аналогичные представления лежат в основе упоминавшейся модели возникновения турбулентности, предложенной в 1944 г. Ландау [1] и независимо в несколько иной форме в 1948 г. Хопфом [2].

В соответствии с моделью Ландау–Хопфа турбулентность при увеличении числа Рейнольдса возникает в результате цепочки последовательных бифуркаций, благодаря которым устанавливается квазипериодическое движение  $u(t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_N t)$ , где функция  $F$  имеет период  $2\pi$  по каждому аргументу, а  $\omega_i$  — это несоизмеримые частоты. Первые бифуркации из этой цепочки очень просты: вначале устойчивое состояние равновесия превращается в неустойчивое и одновременно в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл (так появляется  $\omega_1$ ), затем возникшее периодическое движение теряет устойчивость и в окрестности исчезнувшего устойчивого цикла появляется двумерное многообразие — тор, частота обмотки которого несоизмерима с основной частотой (так появляется  $\omega_2$ ), после чего это двухпериодическое движение становится неустойчивым и рождается трехмерный тор (возникает  $\omega_3$  и т. д. При большом  $N$  реализация такого квазипериодического процесса действительно выглядит случайной, в частности, его автокорреляционная функция быстро спадает (как  $1/\sqrt{N}$ ), а время до ее следующего максимума (период возврата Пуанкаре) есть  $T \sim \exp(\alpha N)$ , где  $\alpha \approx 1$  [3].

Естественная с точки зрения привычных представлений модель турбулентности в виде «газа» автоколебательных мод с несоизмеримыми частотами оказывается тем не менее верной лишь частично. Дело в том, что учет даже слабого взаимодействия «частиц» в таком «газе» может привести к неустойчивости интересующего нас многочастотного квазипериодического движения. В результате разрушения этого движения, представляемого в фазовом пространстве незамкнутой обмоткой тора может возникать и периодическое движение — предельный цикл,

и настоящее стохастическое — странный аттрактор. То, что в автоколебательной системе при малом изменении ее параметров квазипериодическое движение может перейти в периодическое, известно достаточно давно — это уже знакомое нам явление синхронизации (см. § 16.3). А вот возможность рождения странного аттрактора при разрушении квазипериодического движения, т. е. возможность установления в результате очередной бифуркации вместо движения с дискретным спектром движения, характеризуемого сплошным спектром, — стохастического, была доказана недавно Рюэлем и Такенсом [4].

Гидродинамическая турбулентность, описываемая уравнениями Навье–Стокса, имеет много общего с движением динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, о которых шла речь в предыдущей главе. Связь эта определяется действием вязкости, которая лишает моды с высокими номерами самостоятельности<sup>1</sup>. Хопфом даже была высказана гипотеза о том, что все множество траектории уравнения Навье–Стокса (его фазовое пространство бесконечномерно) притягивается к конечномерному множеству. Отсюда сразу следует, что при  $t \rightarrow \infty$  движение жидкости можно описывать конечномерными уравнениями. Эта гипотеза, правда, до сих пор не доказана, но она кажется совершенно естественной, если учесть, что вязкость препятствует существованию мелкомасштабных возмущений. Добавим, что уже обнаруженные для уравнения Навье–Стокса основные бифуркации носят конечномерный характер [5]. Это, например, переход стационарного устойчивого течения в периодическое (рождение из состояния равновесия предельного цикла), установление двухпериодического течения (рождение двумерного тора) и др. Поэтому есть все основания считать, что и очередная бифуркация — переход к неупорядоченному течению — для многих гидродинамических задач также окажется конечномерной.

## 23.2. Возникновение стохастических автоколебаний в гидродинамическом эксперименте

Как мы видели, даже в простых системах почти всегда возникает проблема отделения истинно собственной стохастичности, определяемой динамикой системы, от стохастичности, обязанной своим происхождением наличию внешних шумов. Особенно остро эта проблема встает в сложных (число степеней свободы не менее десяти) и распре-

<sup>1</sup>Напомним, что таким модам соответствуют мелкомасштабные пульсации.

ленных системах. По существу, окончательный ответ на вопрос может дать только сравнение теории (в рамках которой такая собственная стохастичность обнаруживается) с реальным экспериментом. Поскольку собственная стохастичность возникает в результате вполне определенных бифуркаций усложнения спектра, а в режиме установившейся стохастичности индивидуальные реализации, близкие при  $t = 0$ , с ростом  $t$  экспоненциально разбегаются, именно на эти моменты и следует обращать внимание в экспериментах.

Мы сейчас опишем несколько экспериментов, демонстрирующих качественно различные пути возникновения гидродинамической турбулентности, которые соответствуют различным путям возникновения странных аттракторов, обсуждавшихся нами в предыдущей главе.

*Последовательность удвоений.* На рис. 23.1 представлены спектры мощности теплового потока в слое жидкого гелия, подогреваемого снизу [6]. При  $Ra > Ra_1$  возникла роликовая конвекция, затем при  $Ra > Ra_2$  устанавливался режим простой периодической модуляции теплового потока, дальнейшее увеличение подогрева приводило к последовательной смене режимов — в спектре появлялись субгармоники, кратные частоте периодического движения:  $1/2f$ ,  $1/4f$  и т. д. (рис. 23.1а и б). Затем (при  $Ra > Ra_\infty$ ) спектр из дискретного становился сплошным, но в нем оставалось большое число пиков на частотах  $mf/(2n)$ . Эволюция этого спектра при последующем увеличении  $Ra$  также происходила дискретными шагами. Наблюдались обратные бифуркации удвоения — при каждой очередной бифуркации число пиков умень-

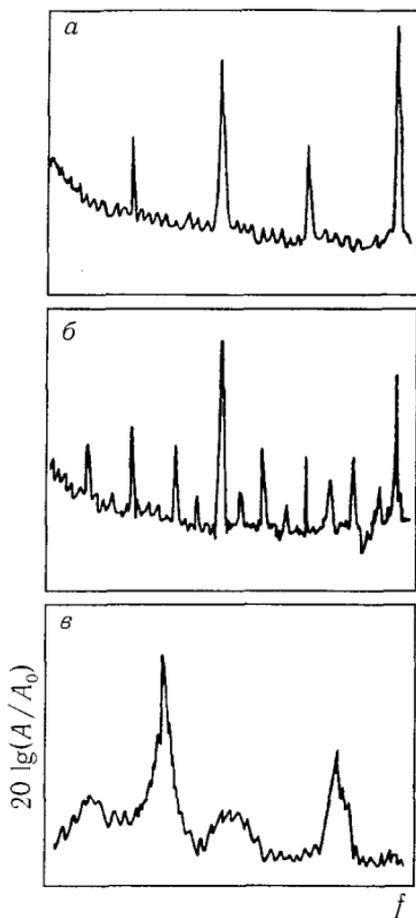


Рис. 23.1. Спектр мощности теплового потока при конвекции в слое жидкого гелия: а, б — удвоение периода при увеличении числа Рэлея до момента перехода к турбулентной конвекции; в — шумовой спектр (за точкой перехода)

шалось, а оставшиеся уширялись (пики в спектре исчезали тем быстрее по  $Ra$ , чем выше был соответствующий им номер субгармоники). Пояснить происхождение термина «обратная бифуркация удвоения» можно следующим образом: после прохождения критической точки  $Ra_\infty$  в фазовом пространстве исследуемой системы возникает аттрактор, который при  $Ra_{-2n} > Ra_\infty$  располагается как бы на  $2n$  витках «ленты», которая, непрерывно уширяясь (таким образом реализуется экспоненциальная расходимость траекторий, принадлежащих аттрактору), в некоторый момент времени складывается по ширине вдвое (см. рис. 22.16) и замыкается на себя (таким образом осуществляется возвращаемость). При  $Ra_{-2(n-1)} > Ra_{-2n}$  число витков ленты становится вдвое меньше, при  $Ra_{-2(n-2)} > Ra_{-2(n-1)}$  вчетверо меньше и т. д., т. е. как бы «размытые циклы» удвоенного периода передают свою устойчивость более чем вдвое размытым «циклам» вдвое меньшего периода. Эти обратные бифуркации также обладают свойствами универсальности [7]:  $(Ra_{-2n} - Ra_\infty) \sim (4,669\dots)^{-n}$ .

Гидродинамическое течение лишь в весьма узкой области параметров сводится к одномерному отображению в виде параболы. При изменении параметров отображение часто усложняется или становится неодномерным (см. § 22.6). Поэтому неудивительно, что в реальных течениях параллельно с цепочкой бифуркаций удвоения одного периодического движения могут, например, появляться и исчезать другие движения с несоизмеримым периодом. Подобную возможность иллюстрирует рис. 23.2 [8], на котором представлен спектр скорости конвективного течения в точке<sup>1</sup>. Рис. 23.2 а-г свидетельствуют о возникновении турбулентной конвекции за счет последовательности удвоений периодического движения периода  $f_2$ .<sup>2</sup> Режим существенно непериодической конвекции представлен на рис. 23.2д ( $Ra/Ra_{кр} = 36,9$ ). Нам сейчас особенно интересен рис. 23.2е, на котором представлен спектр течения при том же значении числа Рэлея, что и на рис. 23.2в ( $Ra/Ra_{кр} = 27,0$ ), которое возникло при других начальных условиях — при движении со

<sup>1</sup>Различные динамические режимы при численном или лабораторном исследовании конкретной системы удобно анализировать с помощью спектра реализации (осциллограммы). Это удобство связано с тем, что изменения характера движения, трудно уловимые на осциллограммах, например рождение новой спектральной компоненты, переход от квазипериодического режима к стохастическому и т. д., в спектральном представлении очевидны и легко измеряемы. Чаще других используются энергетические спектры реализации, т. е. квадрат модуля фурье-образа от  $u(t)$ .

<sup>2</sup>Этот процесс прекрасно описывается теорией Фейгенбаума [7], предсказывающей отношение спектральных интенсивностей гармоник и субгармоник на уровне 8.2 дБ. Именно такое соотношение и наблюдается экспериментально (рис. 23.2г).

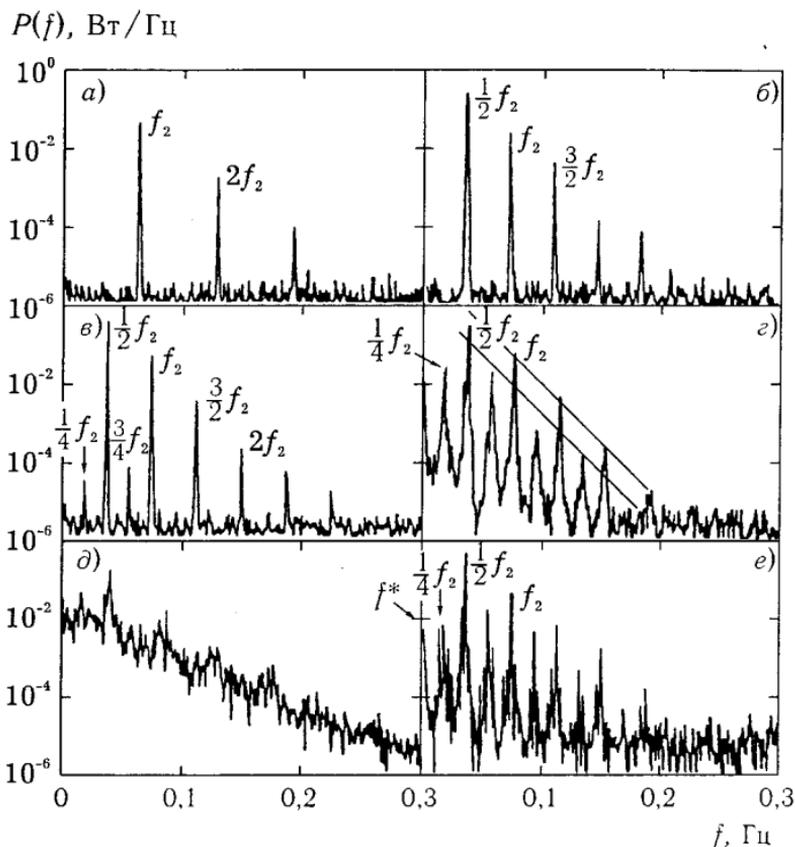
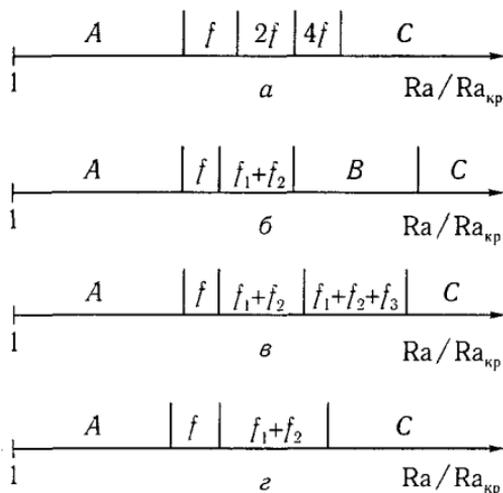


Рис. 23.2. Удвоение периода и гистерезис, наблюдавшиеся при переходе к турбулентности при термоконвекции в ячейке; спектры на рисунках е и в получены при одинаковом числе Рэлея, но при различных начальных условиях; спектрам а-е соответствуют значения  $Ra/Ra_{кр}$ , равные 21,0; 26,0; 27,0; 28,0; 36,9; 27,0 соответственно

стороны больших чисел Рэлея. Видно, что появилась другая, несоизмеримая с  $f_2$  частота  $f^*$ , взаимодействие которой с  $f_2$  и ее гармониками и субгармониками существенно усложнило спектр течения. В фазовом пространстве при этом существует, по-видимому, двумерный тор, бифуркации которого и описывают изменение характера течения в этом случае.

*Переход к стохастичности от режима биений. Разрушение двумерных торов.* Характер перехода к турбулентности, как уже отмечалось, существенно зависит от геометрии течения. В частности, для конвективного течения в ячейке принципиальными оказываются ее размеры.

Рис. 23.3. Различные пути возникновения турбулентной конвекции в ячейке (изменялись число прандтля и размеры ячейки  $A$  — статический режим;  $B$  — режим синхронизации мод;  $C$  — хаотический режим): а — возникновение турбулентного режима в результате последовательности бифуркаций удвоения ( $Pr = 5$ ); б — разрушение трехмерного тора ( $Pr = 5$ ); в — разрушение двумерного тора ( $Pr = 5$ )



Так, в экспериментах [8] с водой (при температурах от 10 до 90° С число Прандтля меняется от 9 до 2) при изменении геометрии плоской горизонтальной ячейки наблюдалось несколько качественно различных путей возникновения хаотической конвекции. Схематически они изображены на рис. 23.3 [8]. При увеличении числа Рэлея кроме последовательности удвоений наблюдались также переходы типа стационарное состояние — периодическая конвекция — квазипериодическая конвекция (с двумя или тремя несоизмеримыми частотами) — хаотическая конвекция.

Переход от двухчастотного квазипериодического режима к хаотическому обычно осуществляется через режим синхронизации мод с несоизмеримыми частотами и последующим исчезновением или потерей устойчивости возникшего периодического движения. Здесь сейчас известны два пути: 1) возникший на двумерном торе в результате синхронизации предельный цикл испытывает последовательность бифуркаций удвоения периода — этот путь исследован экспериментально в работе [10] и теоретически обнаружен в [11]; 2) возникшие на двумерном торе в результате синхронизации устойчивый и седловой циклы сливаются и исчезают. При этом свойства стохастического множества определяются либо гомоклинической структурой, принадлежащей седловому циклу, либо сложной многоскладчатой структурой самого тора [12].

*Возникновение турбулентности при разрушении трехчастотного квазипериодического режима.* Разрушение трехмерного тора — один из возможных путей перехода к турбулентности в закрытых течени-

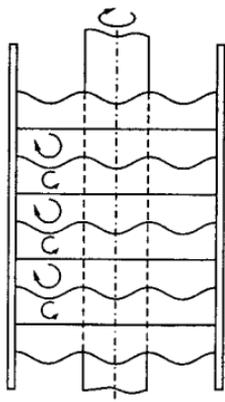


Рис. 23.4. Волны модуляции на вихрях Тейлора в течении Куэтта между цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра

ях — ячейках и полостях. Помимо уже упоминавшейся термоконвекции [9, 17] такой переход наблюдался [12] в течении Куэтта между цилиндрами при вращении внутреннего цилиндра<sup>1</sup>. При увеличении скорости вращения цилиндра (при этом увеличивается число Тейлора или пропорциональное ему число Рейнольдса) на вихрях Тейлора развиваются возмущения в виде изгибных азимутальных волн вида  $\exp(imz - in\theta)$  (рис. 23.4), где  $m$  характеризует число вихрей Тейлора (номер моды по вертикали), а  $n$  — число длин волн, укладывающихся на тороидальном вихре. Из спектров мощности скорости, представленных на рис. 23.5, видно, что при увеличении скорости вращения периодический режим азимутальных колебаний сменяется дупериодическим (бифуркация), затем возникает третья частота и спектр колебаний резко уширяется. Бифуркация разрушения трехмерного тора с возникновением притягивающего стохастического множества — странного аттрактора, соответствующая такому переходу, сейчас найдена математиками [14].

*Переход через перемежаемость.* Также в экспериментах с термоконвекцией в ячейке, но при больших числах Прандтля (для трансформаторного масла, например, число Прандтля может быть равно нескольким сотням) был обнаружен совершенно иной путь перехода к нерегулярному течению [15]. При увеличении числа Рэлея периодический режим конвекции сменялся режимом с редкими случайными всплесками, перемежающимися длительными регулярными участками, затем (с ростом  $Ra$ ) эти всплески становились все чаще и течение превраща-

<sup>1</sup>Это течение очень похоже на конвекцию — роль архимедовых сил играют центробежные. При превышении параметром  $T = \Omega^2 r^2 l^2 / \nu^2$  ( $T$  — число Тейлора;  $\Omega$ ,  $r$  — скорость вращения и радиус внутреннего цилиндра;  $l$  — зазор между цилиндрами) критического значения  $T_1$  течение становится неустойчивым и возникают структуры в виде нанизанных на внутренний цилиндр торов — вихри Тейлора [13]).

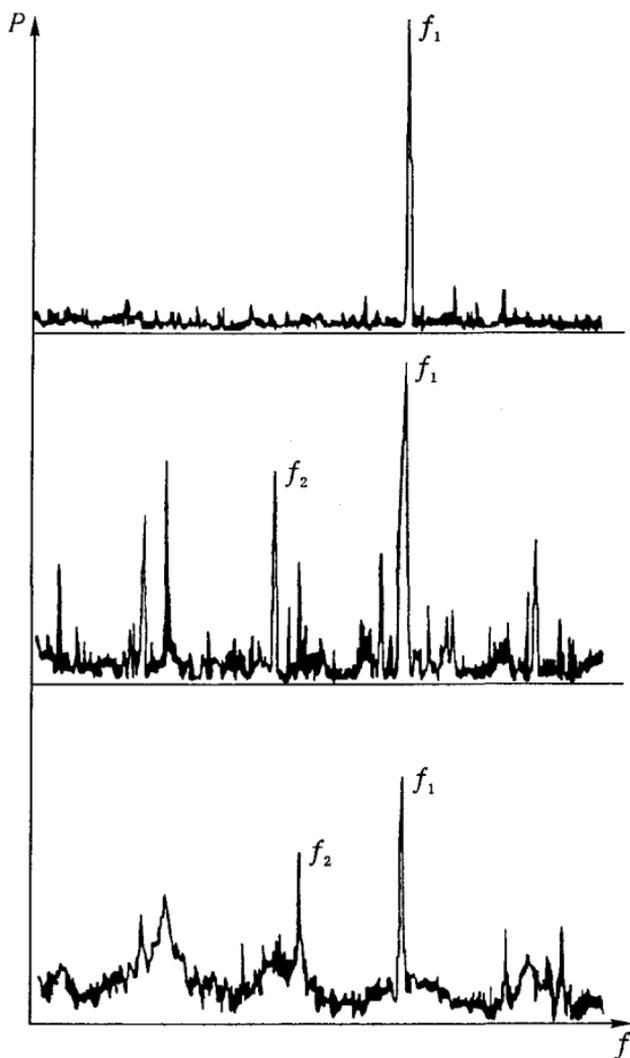


Рис. 23.5. Переход к турбулентности в цилиндрическом течении Куэтта (путем разрушения квазипериодического режима азимутальных колебаний

лось в нерегулярное (см. осциллограммы на рис. 22.21а)<sup>2</sup>. Математическим образом такого перехода является бифуркация слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов, сопровождающаяся появлением странного аттрактора (см. гл. 22).

Проиллюстрированные сейчас пути возникновения турбулентнос-

<sup>2</sup>Подобное же явление перемежаемости «турбулентной» и «ламинарной» фаз конвективного течения наблюдается и при небольших числах Прандтля [9].

ти далеко не исчерпывают всех возможностей даже для течений в полостях и ячейках — внутренних течений. Легко сообразить, что всякое усложнение геометрии, например, переход от тонкой конвективной ячейки к толстой, от цилиндрического течения к сферическому и т. д., должно привести к появлению новых осциллирующих мод течения, которые, вообще говоря, не всегда синхронизируются друг с другом. При этом в спектре предтурбулентного режима могут присутствовать не только три, но и четыре и более несоизмеримых частот [16]. Таким образом, предложенная Ландау модель возникновения турбулентности, основывающаяся на последовательном появлении (при увеличении  $Re$ ,  $Ra$  или  $T$ ) в спектре течения новых несоизмеримых частот, на первом этапе перехода оправдывается, однако турбулентность возникает все-таки не благодаря такому усложнению движения, а из-за разрушения квазипериодических движений ( $n$ -мерных торов) и возникновения в фазовом пространстве аттракторов, характеризующихся экспоненциальной неустойчивостью почти всех принадлежащих им траекторий.

### 23.3. Стохастическая модуляция

До сих пор мы вели речь о возникновении в распределенной системе стохастичности, характеризующейся сплошным спектром, включающим в себя и низкие частоты, в том числе и  $\omega \rightarrow 0$ . В экспериментах часто встречаются ситуации, когда стохастические пульсации возникают на фоне гармонических колебаний — стохастическая модуляция. Поскольку это явление имеет разнообразные приложения, остановимся на нем подробнее.

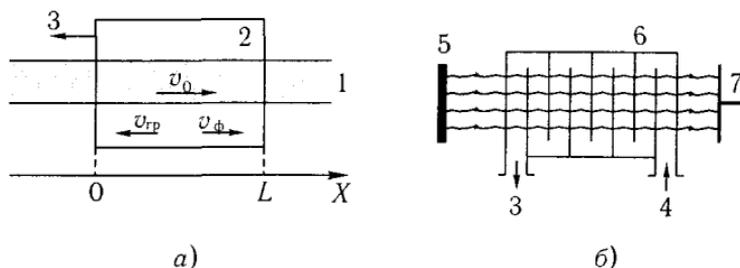


Рис. 23.6. Схема лампы обратной волны (б) и анализируемая модель (а): 1 — электронный пучок; 2 — среда; 3 — выходное устройство; 4 — входное устройство; 5 — электронная пушка; 6 — замедляющая система; 7 — коллектор

Режим стохастической модуляции может возникнуть в автономной волновой системе в результате развития собственной неустойчивости. Примером такой системы может служить лампа обратной волны. В этом электронном генераторе наблюдался [17] переход к режиму колебаний со стохастической модуляцией. Блок-схема генератора показана на рис. 23.6. Электронный пучок движется сквозь замедляющую систему, вдоль которой распространяются волны с продольным электрическим полем. Параметры системы таковы, что фазовая скорость этих волн на некоторой частоте  $\Omega$  совпадает со скоростью пучка  $v_\phi(\Omega) \approx v_0$ , а групповая скорость направлена в обратную сторону. Выходной сигнал снимается с того же конца замедляющей системы, куда поступает пучок. Тогда при взаимодействии волновых возмущений частоты  $\omega \approx \Omega$  и с электронным потоком реализуется распределенная обратная связь и возникает абсолютная неустойчивость, приводящая к стационарному режиму генерации (см. гл. 7). Характер этого режима определяется только одним параметром, подобным числу Рейнольдса для гидродинамического течения:  $\mathcal{L} = \beta l (IK/4U)^{1/3}$ , где  $\beta$  — волновое число волны, синхронной с потоком,  $l$  — длина взаимодействия,  $I$  — постоянная составляющая тока пучка,  $U$  — ускоряющее напряжение,  $K$  — параметр системы с размерностью сопротивления. Последовательность бифуркаций, наблюдаемых в этой системе по пути к режиму стохастической модуляции (при увеличении параметра  $\mathcal{L}$ ), представлена на рис. 23.7. При  $\mathcal{L} \geq \mathcal{L}_{кр}$  возникает стохастический режим, характеризующийся сплошным спектром.

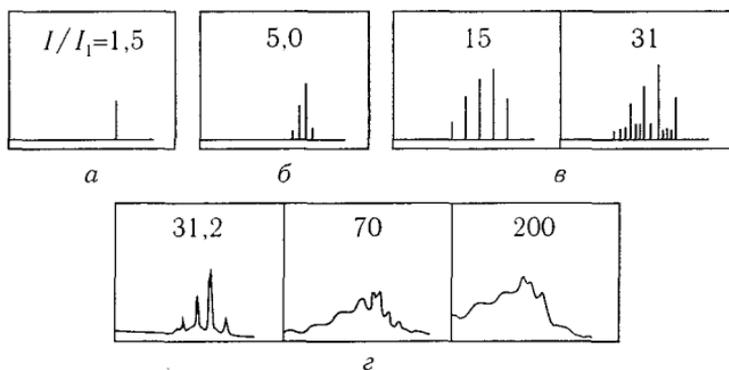


Рис. 23.7. Спектры выходного сигнала ЛОВ в различных автоколебательных режимах: а — одночастотные; б, в — многочастотные; г — стохастические колебания

В экспериментах с ЛОВ изменялись параметры замедляющей системы, электронного пучка, питания и т. д. и было обнаружено, что характер переходов по пути к хаотической модуляции качественно не меняется и в различных вариантах эксперимента определяется лишь параметром  $\mathcal{L}$ . Такое подобие говорит о том, что флуктуации (в частности, шумы электронного пучка) непринципиальны для возникновения стохастического режима в ЛОВ. Режим стохастических автоколебаний удавалось разрушить с помощью синхронизирующего внешнего сигнала [26]. Наиболее эффективно такая синхронизация происходила, если периодическое воздействие подавалось на частотах, соответствующих левым спутникам в спектре предтурбулентного режима. Наблюдался и обратный процесс — при воздействии периодическим сигналом на ЛОВ в предтурбулентном режиме дискретный спектр, соответствующий периодической модуляции при достаточно больших расстройках между частотой подаваемого сигнала и частотой спутника сменялся сплошным спектром. Все эти изменения происходили при одном и том же токе пучка (т. е. при одних и тех же флуктуациях в электронном потоке), что также свидетельствует в пользу динамического происхождения наблюдаемого стохастического режима.

В специальных расчетах и экспериментах [27] по исследованию процесса установления колебаний в ЛОВ была зафиксирована четкая связь между возникновением хаоса и появлением неустойчивости движения системы по отношению к возмущению начальных условий. Как указано в гл. 22, количественным выражением этой неустойчивости является существование положительной энтропии Колмогорова (у аттрактора должен быть хотя бы один положительный ляпуновский показатель). В [27] приведены согласующиеся между собой оценки энтропии Колмогорова из расчетов и эксперимента; показано, что степень неустойчивости движения на аттракторе возрастает с увеличением параметра  $\mathcal{L}$ .

Обработка полученной в численном эксперименте<sup>1</sup> реализации выходного сигнала ЛОВ показала, что наблюдаемому стохастическому ре-

<sup>1</sup>В экспериментах было также показано [25], что даже малые отражения от концов замедляющей системы ЛОВ приводят к следующим изменениям характера автоколебаний. У порога возникновения хаоса характер автоколебаний определяется двумя существенными параметрами — током пучка и ускоряющим напряжением. При этом обнаруживается типичная картина перехода к хаосу, связанная с разрушением (через синхронизацию или стохастизацию) квазипериодических движений. На плоскости параметров найдены характерные для этого сценария зоны синхронизации — «языки Арнольда»; внутри этих «языков» переход к хаосу осуществляется через бифуркации удвоения периода синхронизованного движения.

жиму отвечает странный аттрактор конечной дробной размерности  $d$ ; в частности, при  $\mathcal{L} = 1/2\pi$  было получено  $d \approx 5,5$ .

В рассматриваемой системе (электронный пучок — обратная волна ЛОВ) стохастическая модуляция может быть детально описана в рамках усредненных уравнений, полученных из уравнений для поля и пучка [18, 30]. Как уже отмечалось, эффективное взаимодействие пучка с полем обратной волны возможно в случае, если какая-либо ее пространственная гармоника имеет скорость, близкую к скорости электронов. Тогда, если поле этой гармоники записать в виде

$$E(x, t) = \text{Re}\{\mathcal{E}(x, t) \exp[i\Omega(t - x/\nu)]\},$$

где частота  $\Omega$  определяется из условия синхронизма  $v_\Phi(\Omega) = v_0$  ( $v_0$  — скорость пучка), то для нормированной медленно изменяющейся амплитуды  $F \sim \mathcal{E}$  и для фазы  $\theta$  электрона относительно волны может быть получена система уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\mathcal{L}}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(\alpha)} d\alpha, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\mathcal{L}^2 \text{Re}(F e^{i\theta(\alpha)}) \quad (23.1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\theta(\alpha)|_{x=0} = \alpha, \quad \partial\theta/\partial x|_{x=0} = 0, \quad F|_{x=t} = 0, \quad F|_{t=0} = F_0(x). \quad (23.2)$$

Эти уравнения, действительно, содержат лишь один параметр  $\mathcal{L} = (\Omega l/v_0)(IK/4U)^{1/3}$ .

Как следует из численного анализа системы (23.1), (23.2), при  $2,0 \leq \mathcal{L} \leq 2,9$  устанавливается немодулированный режим; при  $\mathcal{L} \geq 2,9$  возникает периодическая модуляция, после чего при  $\mathcal{L} > \mathcal{L}^*$  процесс становится непериодическим. Спектральная обработка реализации показывает, что спектр мощности в режиме стохастической модуляции согласуется с наблюдаемым в эксперименте; автокорреляционная функция этого процесса спадает достаточно быстро.

В данном примере исследуемая модель, хотя и упрощена (за счет усреднения по высокочастотным осцилляциям) по сравнению с исходными уравнениями, однако сохраняет их основную особенность — бесконечное число степеней свободы. Правда, при численном счете эта система заменяется конечномерной, однако с достаточно большим числом мод<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Число степеней свободы, которое необходимо учитывать при построении мо-

Когда речь идет об исследовании сложной динамики, возникающей в результате развития вторичных неустойчивостей на фоне, например, периодического движения, задача построения модовых моделей, непосредственно следующих из исходных уравнений, чрезвычайно усложняется. Здесь уже сама модель зачастую должна строиться с помощью вычислительной машины. Развитие каких-либо качественных представлений и построение теории на физическом уровне таким образом представляется затруднительным. В подобных ситуациях весьма полезными оказываются чисто феноменологические модели, основанные на элементарных физических представлениях и эксперименте. Одну такую модель мы сейчас обсудим [19]. Она построена для описания возникновения хаотической модуляции вихрей Тейлора в цилиндрическом течении Куэтта<sup>1</sup>.

В эксперименте наблюдалась следующая последовательность спектров мощности течения при увеличении  $Re$ . При  $Re \leq 1200$  реализуется течение, в котором на фойе вихрей Тейлора возбуждены азимутальные волны (границы вихрей изогнуты). Увеличение скорости вращения внутреннего цилиндра ведет к серии последовательных усложнений спектра, и при  $Re \approx 1270$  возникает уширение пиков на спектре мощности, соответствующее хаотизации течения. С ростом  $Re$  эти пики продолжают уширяться, и наконец спектр становится почти сплошным.

При феноменологическом описании данного эксперимента в качестве модели можно использовать уравнения непосредственно для  $a_n(t)$  — амплитуд изгиба границы между вихрями в паре с номером  $n$  [19]:

$$\frac{da_n}{dt} = \gamma a_n + (i\eta - \rho)|a_n|^2 a_n + \frac{\alpha + i\beta}{4}(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) \quad (23.3)$$

( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Эти уравнения сконструированы следующим образом: первые два слагаемых каждого уравнения совпадают с правой частью известного уравнения Ландау [1]. Если  $\gamma > 0$ , то это уравнение

дели, зависит от поставленного вопроса. Если нужно установить принципиальную возможность возникновения хаоса при автомодуляции, то может быть достаточно лишь трех мод. Если же стремиться к детальному описанию всех наблюдаемых при увеличении надкритичности переходов и эволюции спектра стохастического режима, то размерность модели следует существенно увеличить.

<sup>1</sup>В работе [19] исследовалось течение Куэтта с существенно большим зазором между цилиндрами, чем в работе [12], в которой модуляция параметров вихрей Тейлора по вертикали не наблюдалась.

описывает рост и стабилизацию изгибных колебаний вихрей за счет самовоздействия и взаимодействия со средним потоком. Модель (23.3) учитывает еще и взаимодействие между вихрями. Поскольку из эксперимента следует, что взаимодействие является малым, то естественно ограничиться слагаемыми только первого порядка по амплитуде. Коэффициенты этой модели в принципе должны определяться непосредственно из эксперимента. Добавим, что (23.3) — это дифференциально-разностный аналог нелинейного уравнения Шредингера для неравновесных сред [20].

При малых надкритичностях систему (23.3) из 30 уравнений можно укоротить до трех и перейти к модели [20], в рамках которой также обнаруживается хаотическая модуляция (см. гл. 22). Дальнейшее увеличение надкритичности приводит к пяти уравнениям и т. д. Во всех этих моделях турбулентности присутствует странный аттрактор, однако по мере увеличения числа Рейнольдса размерность модели, в рамках которой он обнаруживается, должна возрастать.

При исследовании распределенных систем возникает вопрос о том, в какой мере для них справедливы закономерности универсальности и подобия в поведении вблизи порога возникновения хаоса и в сценарии перехода к хаосу, установленные для простых систем (см. гл. 22). О наблюдении таких сценариев в экспериментах с ЛОВ при наличии отражений от замедляющей системы мы уже указывали выше. Тщательные эксперименты с генератором автостохастических колебаний, предложенным В. Я. Кисловым и его сотрудниками [28], показали следующее (см., например, работу [29], в которой исследуемый генератор представлял собой замкнутую в кольцо цепочку из ЛБВ, резонансного фильтра и акустической линии задержки). При изменении глубины обратной связи и настройки фильтра исследуемая распределенная система демонстрировала практически все сценарии перехода к хаосу, известные для простых систем: 1) через последовательность бифуркации удвоения периода; 2) через разрушение квазипериодических движений; 3) через бифуркации «удвоения торов»; 4) через перемежаемость.

## 23.4. Идеальные течения и турбулентность

Обсуждавшиеся до сих пор примеры убеждают нас, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при увеличении числа Рейнольдса (числа Тейлора или Рэлея соответственно для течения с вращением и конвекции) или, что эквивалентно, при уменьшении вязкости. В то же время и практически невязкие течения ( $Re \rightarrow \infty$ )

могут быть ламинарными, превращаясь, однако, в турбулентные при изменении какого-либо параметра или внешнего возмущения, даже регулярного.

В строгом смысле турбулентности, т. е. стохастических автоколебаний, в идеальной жидкости быть не может: из-за отсутствия диссипации в фазовом пространстве течения невозможно существование притягивающих множеств (аттракторов). Однако исследование стохастических идеальных течений представляет безусловный интерес, поскольку некоторые их свойства, в частности реакция на внешние возмущения, моделируют реальные течения при больших числах Рейнольдса.

Подчеркнем, что течения с  $(Re \rightarrow \infty)$  очень легко переходят в турбулентный режим — для этого достаточно малого возмущения течения, которое может быть результатом взаимодействия с другими течениями либо с внешними полями.

Рассмотрим в качестве примера взаимодействие двумерного сдвигового течения с акустической волной. В отсутствие вязкости движение жидкости описывается уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \quad (23.4)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление,  $\mathbf{v}$  — скорость. Первое из этих уравнений выражает условие неразрывности, а второе — закон сохранения количества движения элемента жидкости (уравнение Эйлера). При отыскании решений полную скорость  $\mathbf{v}$  удобно представить в виде суммы двух скоростей:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , где  $\mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \operatorname{grad} \varphi$ .

Физический смысл этого представления легко понять, рассмотрев два предельных случая:  $\mathbf{v}_2 = 0$  и  $\mathbf{v}_1 = 0$ . В первом из них уравнения (23.4) описывают течение несжимаемой жидкости, а во втором — акустическое поле. Если  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  одновременно не равны нулю, но малы, то взаимодействие акустического и гидродинамического полей скоростей слабое, и его можно учесть методом последовательных приближений.

Ограничимся одной из простейших моделей гидродинамического течения — периодической цепочкой точечных вихрей. Подобные цепочки моделируют периодические распределения завихренности, возникающие в сдвиговых слоях в результате развития неустойчивостей [21]. Такая цепочка в свою очередь неустойчива, при этом наибольшим инкрементом обладают возмущения удвоенного периода. Эти возмущения приводят к тому, что образуются две цепочки,двигающиеся друг относительно друга. Воспользовавшись хорошо известными результатами

теории точечных вихрей [22], можно получить уравнения, описывающие это движение:

$$\frac{dx}{d\tau} = -H \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y - \cos x}, \quad \frac{dy}{d\tau} = +H \frac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}. \quad (23.5)$$

Здесь мы перешли к безразмерным переменным  $x, y = (2\pi/l)(x', y')$ , которые пропорциональны компонентам вектора, соединяющего выбранную пару вихрей из двух цепочек,  $\tau = t \cdot 2\Gamma\pi/Hl^2$ ,  $\Gamma$  — интенсивность одного вихря,  $l$  — период невозмущенной цепочки,  $H$  — пока произвольный параметр.

Нелинейная система (23.5) — гамильтонова с интегралом  $\operatorname{ch} y - \cos x = \text{const}$ , и, следовательно, в ней возможны только простые движения. Приравняв постоянную  $H$  этому интегралу, движение одной дорожки в поле другой (при  $H = \text{const}$ ) можно описать уравнением комплексного маятника

$$\ddot{z} + \sin z = 0, \quad (23.6)$$

где  $z = x + iy$ . Для вывода этого уравнения следует умножить второе уравнение (23.5) на  $i$ , продифференцировать оба уравнения по  $\tau$  и сложить. Решение (23.6) записывается в виде

$$z(\tau) = \begin{cases} 2 \operatorname{am}(H\tau/2 + \theta_0; 2/H), & H > 2, \\ 2 \operatorname{arcsin}[H \operatorname{sn}(\tau + \theta_0)/2; H/2], & H < 2, \\ 2 \operatorname{arcsin} \operatorname{th}(\tau + \theta_0), & H = 2, \end{cases} \quad (23.7)$$

где  $\operatorname{am}$  и  $\operatorname{sn}$  — функции Якоби; фаза  $\theta_0 = \theta'_0 + i\theta''_0$  определяется из начальных условий;  $H > 2$ ,  $H < 2$  и  $H = 2$  соответствуют движениям вне сепаратрисы, внутри сепаратрисы и на сепаратрисе. Таким образом, рассматриваемое сдвиговое течение в газе описывается вполне интегрируемой системой уравнений и демонстрирует очень простую динамику — вихревые дорожки либо крутятся относительно друг друга (взаимный захват), либо скользят в противоположные стороны (при  $H > 2$ ) (фазовый портрет на рис. 23.8).

Учтем теперь слабое взаимодействие рассмотренных колебаний сдвигового течения с распространяющимися нормально к слою сдвига акустическими волнами. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда звуковую волну можно считать гармонической и заданной:  $\mathbf{u} = \mathbf{y}_0 u_0 \sin(2ky - 2\omega t)$ . Тогда в приближении малости пространственного периода цепочки по сравнению с длиной звуковой волны ( $kl \ll 1$ )

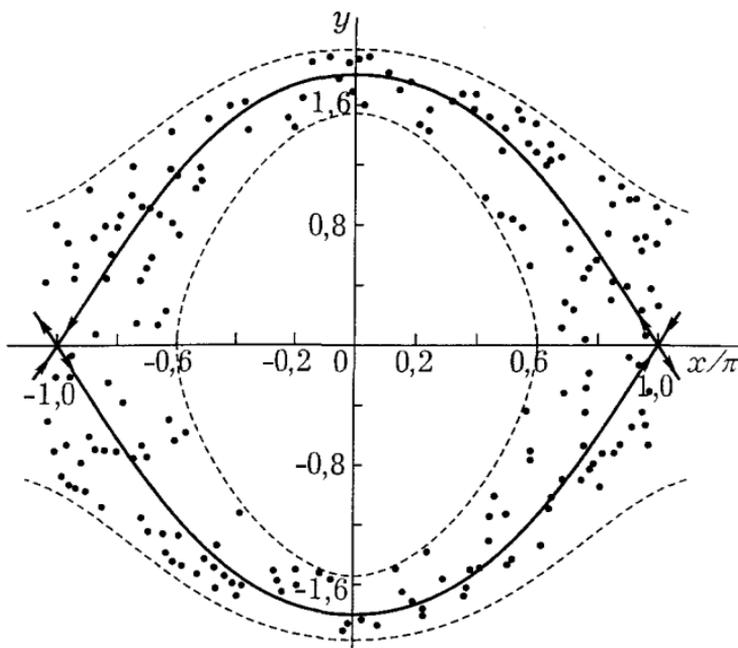


Рис. 23.8. Случайное блуждание траектории истемы (23.8), (23.9) вблизи сепаратрис; точки на секущей плоскости  $xy$  получены через период внешнего поля

и малости амплитуды звуковой волны ( $M = u_0/c \ll 1$ ,  $c = \omega/k$  — скорость звука,  $M$  — число Маха) движение одной вихревой цепочки в поле другой будет определяться еще и скоростью относительного движения цепочек в поле акустической волны [23]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -H \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y - \cos x}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= H \frac{\sin y}{\operatorname{ch} y - \cos x} + 2M \frac{\omega H}{\Omega} y \cos \left( \frac{2\omega H}{\Omega} \tau \right), \end{aligned} \quad (23.8)$$

где  $\Omega = \Gamma\pi/l^2$ . Итак, мы пришли к задаче о движении нелинейного осциллятора (23.6), на который действует периодическое поле. Такие задачи мы уже обсуждали (см. гл. 15 и 22) — в фазовом пространстве  $xyt$  подобных систем возможно существование областей со сложным поведением траекторий. Сложность движения в этих областях обычно связана с гомоклиническими структурами (см. гл. 15). Существование гомоклинической структуры в нашем случае может быть определено с помощью критерия Мельникова, т. е. из условия знакопеременности

функции

$$\Delta(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \{u[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0), t] V[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)] - \\ - v[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0), t] U[x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)]\} dt,$$

где  $u, V, U, v$  — правые части системы (23.8), переписанной в виде

$$dx/dt = U(x, y) + \mu u(x, y, t) = \partial\psi/\partial y + \mu u(x, y, t),$$

$$dy/dt = V(x, y) + \mu v(x, y, t) = -\partial\psi/\partial x + \mu v(x, y, t),$$

а  $x_0(t-t_0), y_0(t-t_0)$  — решение системы (23.8) при  $\mu = 0$ , соответствующее сепаратрисе  $H = 2$ . После подстановки в  $\Delta(t_0)$  выражения (23.7) и интегрирования находим (при не слишком больших  $\sigma\omega/\Omega$ )

$$\Delta(\tau_0) \approx M_0 \frac{5\sigma\omega}{\Omega} \operatorname{ch}^{-1} \frac{\sigma\omega}{\Omega} \cos\left(\frac{4\omega}{\Omega}\tau_0\right) \equiv \delta_0 \cos\left(\frac{4\omega}{\Omega}\tau_0\right). \quad (23.9)$$

Таким образом, в нашем случае функция  $\Delta(t_0)$  знакопеременная, и в фазовом пространстве (23.8), (23.9) существует область со стохастическим поведением. Ширина стохастического слоя (на секущей  $xy$ ) определяется величиной  $\delta$ , которая максимальна при  $\sigma\omega/\Omega \approx 1,2$  (вблизи седла размеры стохастической области пропорциональны  $\sqrt{\delta}$  (рис. 23.8)).

В заключение этого раздела заметим, что в системе точечных вихрей, моделирующей двумерное течение идеальной жидкости, стохастичность возникает и при отсутствии внешних полей. Стохастизируется, например, система уже из четырех вихрей, если их взаимное расположение несимметрично [24].

---

---

## ГЛАВА 24

# Самоорганизация

### 24.1. Основные явления, модели, математические образы

Наиболее широко явления, связанные с самоорганизацией (возникновением пространственного порядка из беспорядка, образованием сложных пространственных структур в однородной среде и др.), начали обсуждаться в 50–60-е годы в связи с задачами химической кинетики и биологии. В частности, было дано качественное описание волн в сердечной мышце [1], модели морфогенеза [2], автокаталитической химической реакции Белоусова–Жаботинского [3]. Примерно в те же годы была построена теория структур в некоторых гидродинамических течениях (ячейки Бенара при термоконвекции, вихри Тейлора между вращающимися цилиндрами [4]).

Довольно быстро выяснилось, что возникновение сложных образований в нелинейных средах или пространственных ансамблях различной природы описывается сходными математическими моделями и решениями [5, 6, 9]. Это позволило (как уже не раз было в теории колебаний и волн) перенести опыт и знания, накопленные, например, при исследовании реакции горения, на анализ распространения популяций в экологической задаче или распространения возбуждения в сердечной ткани. В результате выработались новые понятия и образы: диссипативная структура, бегущий импульс, ревербератор и т. д. – и начали выкристаллизовываться основные универсальные модели, описывающие возникновение и существование структур [7, 8, 15, 19–21, 29, 33, 34]. Фактически возникло новое направление в «нелинейных науках», которое называют неравновесной термодинамикой [5, 2], синергетикой [6, 28], теорией самоорганизации [9, 27], теорией автоволн [7, 30].

Чрезвычайный интерес физиков к явлениям самоорганизации стимулировался проблемами биологии. Самоорганизация наблюдается в ансамблях даже сравнительно простых биологических объектов, например амебоподобных клеток [10]. Такие клетки примерно один раз в 5 мин выделяют гормон цАМФ. однако при достаточном количестве пищи клетки на этот гормон не откликаются и живут независимо.

В более жестких условиях одна из клеток начинает ускоренно выделять гормон цАМФ и синхронизует выделение этого гормона у своих ближайших соседей, которые в свою очередь синхронизируют выделение гормона у своих соседей и т. д. После возбуждения гормоном клетка начинает двигаться в сторону возбудителя. Таким образом, возникают два встречных движения — расходящиеся волны стимулятора или синхронизации и сходящееся движение клеток. Этот процесс заканчивается агрегацией — появляются споры, способные выжить в экстремальных условиях.

Традиционный физический пример самоорганизации — возникновение в подогреваемом снизу слое жидкости структуры из шестигранных призматических ячеек (ячейки Бенара, рис. 24.1а). Для образования подобной структуры принципиальны неравновесность нелинейной среды и ее диссипативность — в результате развития конвективной неустойчивости нарастают возмущения поля скорости и температуры в некотором интервале пространственных масштабов, затем из-за эффекта конкуренции масштабов (возможного только при наличии диссипации) выживает решетка лишь вполне определенного масштаба (рис. 24.1б). Шестигранники образуются в результате синхронизации фаз решеток с разной пространственной ориентацией (см. § 24.4). Такая синхронизация возможна в жидкостях, где вязкость (поверхностное натяжение или диффузионные коэффициенты) зависит от температуры. Формальное описание синхронизации различных пространственных мод содержится в § 24.4. Ни масштаб решетки, ни структура ячеек практически не зависят от условий на боковых границах слоя, если его размеры по горизонтали достаточно велики.

Что же такое самоорганизация? Мы будем называть самоорганизацией установление в диссипативной неравновесной среде пространственных структур (вообще говоря, эволюционирующих во времени), параметры которых определяются свойствами самой среды и слабо зависят от пространственной структуры источника неравновесности (энергии, массы и т. д.), начального состояния среды и условий на границах. Таким образом, для самоорганизации наиболее принципиальны потеря памяти о начальных условиях и прямая связь параметров структуры со свойствами среды.

Как видно из примеров, самоорганизация есть результат развития пространственно неоднородных неустойчивостей с их последующей стабилизацией за счет баланса между диссипативными расходами и поступлением энергии от источника неравновесности. Процесс возникновения самоорганизации напоминает процесс установления авто-

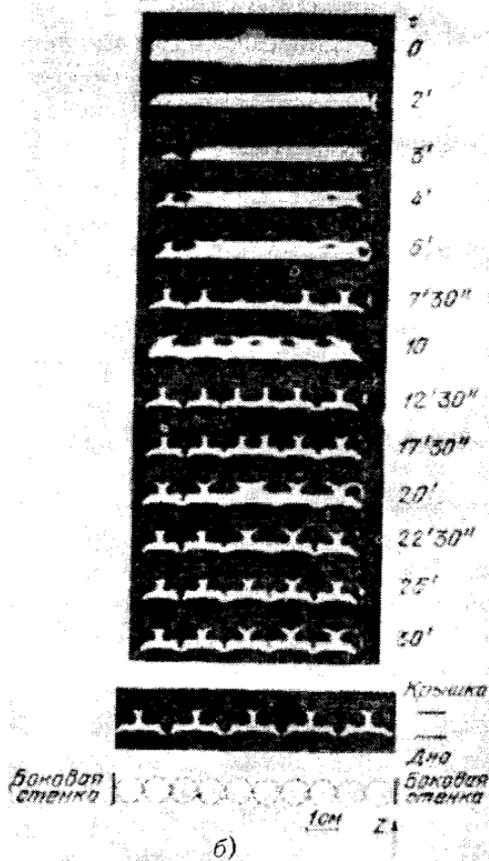
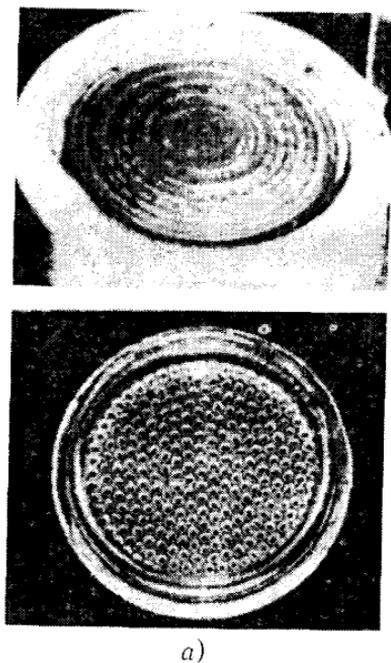


Рис. 24.1. Ячеистая конвекция: а — структура ячеек Бенара; б — возникновение и установление роликовой структуры при конвекции Бенара в прямоугольной ячейке (вид сбоку)

колебаний. Однако результат развития неустойчивости, приводящей к самоорганизации, может быть и чисто «статическим»: возникают пространственные образования, не меняющиеся во времени, — диссипативные структуры (добавим, что они могут быть и стохастическими [12]). И другое отличие — для самоорганизации условия на периферии неравновесной диссипативной среды не столь существенны, как для автоколебаний.

Явления самоорганизации даже в рамках нашего определения весьма разнообразны. В их числе можно назвать возникновение диссипативных структур, уединенных фронтов (волн горения [11], волн попу-

ляций [16, 7]), импульсов (в нервных волокнах [13, 14] и автокаталитических реакциях [9]), ведущих центров и ревербераторов (сердечная ткань [17], кооперации амёб [10], волны депрессии в тканях мозга и сетчатке глаза [18]) и др. По этой причине у явления самоорганизации не один математический образ (как странный аттрактор для стохастических автоколебаний, или предельный цикл для периодических), а несколько: это предельный цикл — для периодических диссипативных структур; странный аттрактор — для стохастических; сепаратрисы, идущие из одного состояния равновесия в другое, — для распространяющихся фронтов и т. д.

Тем не менее многие явления описываются теорией самоорганизации в рамках единых моделей, математически выражающихся нелинейными кинетическими уравнениями диффузного типа:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + D \Delta \mathbf{u}. \quad (24.1)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — набор физических (химических и т. д.) переменных, который определяет нелинейную кинетику в отсутствие диффузии,  $D$  — матрица коэффициентов диффузии (в общем случае  $D$  также зависит от  $\mathbf{u}$  — нелинейная диффузия).

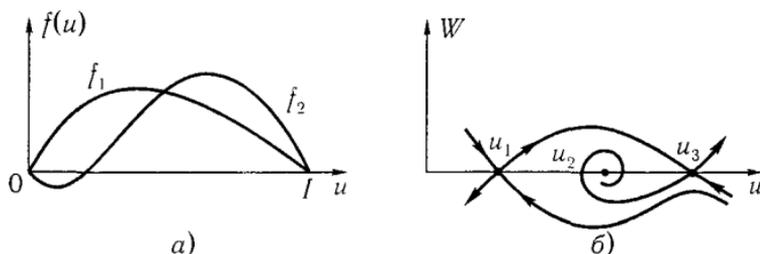


Рис. 24.2. Зависимости скорости изменения  $u$  в «точечной» системе от  $u$  в случае беспорогового ( $f_1$ ) и порогового ( $f_2$ ) распространения фронта волны (если  $f(u)$  имеет пять (и более) нулей, в системе (24.2) могут возбуждаться несколько устойчивых волн с разными амплитудами) (а) и траектории на фазовой плоскости  $W_u$  для  $f(u) = -\text{const}(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$  (б)

Конкретное обсуждение явлений самоорганизации мы начнем с анализа уединенных фронтов. Для определенности будем говорить об установлении стационарного распространения пламени. При этом происходит реакция окисления, в ходе которой высвобождается тепло. В процессе горения участвует сравнительно тонкая область, в которой происходит химическая реакция, т. е. область, отделяющая холод-

ное горючее от продуктов сгорания. движется относительно горючего вещества с постоянной скоростью, не зависящей от начальных условий. Фронту волны горения соответствует частное решение системы дифференциальных уравнений в обыкновенных производных для стационарных волн. В фазовом пространстве эти решения изображаются сепаратрисой, соединяющей два состояния равновесия (рис. 24.2), одно из которых соответствует значениям переменных перед фронтом (реакция еще не началась), а другое — за фронтом (реакция закончилась).

Для аналитического описания наиболее прост случай одномерного горения (пример — распространение пламени по бикфордову шнуру). Будем считать, что процесс описывается одной переменной  $u$ , тогда вместо (24.1) получаем кинетическое уравнение

$$\partial u / \partial t = f(u) + D \partial^2 u / \partial x^2. \quad (24.2)$$

В уравнении (24.2)  $u(x, t)$  может быть температурой, численностью живых особей, концентрацией сгоревшего топлива и т. п. Скорость изменения  $u$  в системе без диффузии ( $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ ) — так называемой «точечной» системе — определяется функцией  $f(u)$ . Для рассматриваемого класса неравновесных сред  $f(u)$  имеет вид кривых, представленных на рис. 24.2а.

Введем «бегущую» переменную  $\xi = x + vt$ . Тогда из (24.2) находим для стационарных волн  $v du / d\xi = f(u) + D d^2 u / d\xi^2$ , или

$$DW dW / du - vW + f(u) = 0, \quad (24.3)$$

где  $W = du / d\xi$ . Если  $f(u)$  задана и заданы граничные условия для  $W$ , то из (24.3) можно найти  $v$  — скорость распространения волны.

Впервые такая задача была поставлена и решена в [22] при анализе следующей биологической проблемы. Пусть некоторая большая территория занята определенным биологическим видом с определенной концентрацией  $W$ , близкой к единице. Вдоль границы рассматриваемой территории будет находиться область промежуточных значений концентраций, а за пределами этой области можно считать  $W$  близкой к нулю. В результате «положительного отбора» территория, уже занятая видом, будет увеличиваться, т. е. ее граница будет перемещаться в сторону не занятых видом областей. Какова нормальная скорость перемещения границы области, занятой видом? Математически задача описывается уравнением (24.3), причем удовлетворяет следующим условиям:  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(u) > 0$  при  $0 < u < 1$ ;  $df/du = f'(0) = \alpha > 0$ ,  $f'(u) < \alpha$  при  $0 < u \leq 1$  (кривая  $f_1(u)$  на рис. 24.2а). Необходимо найти связь между  $v$ ,  $D$  и  $f'(0)$ , при которой решения (24.3)

таковы, что  $0 \leq u(\xi) \leq 1$ ,  $u(\xi) \rightarrow 1$  при  $\xi \rightarrow 0$  и  $u(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ . Из (24.3) находим

$$dW/du = (DW)^{-1}[vW - f(u)]. \quad (24.4)$$

Представляют интерес только те интегральные кривые уравнения (24.4), которые на плоскости  $Wu$  проходят между прямыми  $u = 0$  и  $u = 1$ , приближаясь к точкам  $(u = 0, W = 0)$ , и  $(u = 1, W = 0)$  [22]. Указанные точки — особые точки уравнения (24.4), к которым интегральная кривая должна приближаться, не пересекая прямых  $u = 0$  и  $u = 1$ , т. е. не закручиваясь. Но это значит, что для существования интегральных кривых характеристическое уравнение для каждой из особых точек должно иметь действительные корни. Если, как в [22], вблизи особой точки положить  $f(u) = \alpha u$  и  $u \approx \exp(p\xi)$ , то характеристическое уравнение для точки  $(u = 0, W = 0)$  можно записать следующим образом:

$$p^2 - (v/D)p + \alpha/D = 0. \quad (24.5)$$

Уравнение (24.5) имеет положительные корни при

$$v^2 \geq 4Df'(0). \quad (24.6)$$

(Предлагаем читателю самому найти и исследовать характеристическое уравнение для точки  $u = 1, W = 0$ ). Отсюда следует, что стационарная волна может иметь скорость в интервале  $v_{\min} \leq v < \infty$ , где минимальное значение скорости определяется из (24.6) [ $v_{\min} = 2(Df'(0))^{1/2}$ ]. Неустойчивость исходного однородного состояния приводит к тому, что появляются скорости  $v$  волн, большие  $v_{\min}$ , а асимптотически устойчива только волна, движущаяся со скоростью  $v_{\min}$ .

При произвольных  $f(u)$  общего метода решения краевой задачи для (24.3) нет, однако если  $f(u)$  — антисимметричный полином, то  $W = u^k(1-u)'$ . Например, при  $f(u) = 2\zeta[u^2(1-u) - \gamma(1-u)u]$  ( $\gamma, \zeta$  — константы; функция начинается от нуля и при дальнейшем увеличении  $u$  становится отрицательной, затем обращается снова в нуль, вновь становится положительной, достигает максимума и наконец принимает нулевое значение при  $u = 1$  (кривая  $f_2$  на рис. 24.2a)), подставляя в (24.3)  $W = u(1-u)$ , приходим к выводу, что имеется единственная скорость

$$v = (1 - 2\gamma)(\zeta D/2)^{1/2} \quad (24.7)$$

распространения стационарной волны [23]. При  $u > \gamma$  данное решение описывает процесс возникновения нервных импульсов, «самовозгорание» и т. п. Соответствующая решению фазовая траектория — сепаратриса — идет из седла в седло (рис. 24.26).

## 24.2. Бегущие импульсы

Распространяющийся уединенный фронт — волна переключения — осуществляет перевод среды из одного состояния в другое. После прохождения импульса среда возвращается в исходное состояние. Для одномерных сред такому импульсу соответствует (как и солитону) петля сепаратрисы в фазовом пространстве системы, описывающей стационарные волны (рис. 24.26).

Приведем простой пример. В активной линии передачи с туннельными диодами нестационарные процессы в одноволновом приближении описываются уравнением

$$\frac{du}{dt} = \alpha u^2 - \nu_1 u - v_0 \frac{du}{dx} + \nu_2 u / dx^2. \quad (24.8)$$

Здесь предполагается, что рабочая точка туннельных диодов расположена на максимуме вольт-амперной характеристики и эту характеристику можно аппроксимировать параболической зависимостью. Отыскивая решения в виде стационарных волн, зависящих лишь от бегущей координаты  $\xi = x - vt$ , получаем для них уравнение нелинейного осциллятора с трением:

$$\nu_2 d^2 u / d\xi^2 + (v - v_0) du / d\xi + \alpha u(u - \nu_1 / \alpha) = 0. \quad (24.9)$$

Отсюда сразу следует, что бегущие импульсы могут распространяться лишь со скоростью линейных возмущений  $v = v_0$  (это следствие того, что мы рассматриваем диссипативную среду без дисперсии). Решение, соответствующее граничным условиям  $du/dx = 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , имеет вид солитона:

$$u(x, t) = (3\nu_1 / \alpha) \operatorname{ch}^{-2}[\sqrt{\nu_1 / 2\nu_2}(x - v_0 t)].$$

Это так называемый диссипативный солитон<sup>1</sup>. Диссипативные солитоны наблюдаются и в двумерных неравновесных средах, например, на

<sup>1</sup>Обратим внимание на то, что в рамках рассматриваемой модели диссипативный солитон неустойчив по отношению к возмущениям с ненулевым средним. Его существование в реальной линии передачи с туннельными диодами определяется тем, что поддержание постоянного смещения на диодах запрещает возникновение подобных возмущений (см. [26]).

стекающей пленке вязкой жидкости. Для отклонения поверхности пленки от невозмущенного уровня можно получить приближенное уравнение [24], которое описывает изменение толщины пленки  $h$ , стекающей по плоскости, наклоненной под углом  $\alpha$  вдоль оси  $x$ :

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{h}{h_0} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{8}{15} \text{Re} h_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{2}{3} h_0 \text{ctg} \alpha \cdot \Delta h + \frac{2}{3} h_0^2 W \Delta^2 h = 0. \quad (24.10)$$

Здесь  $h_0$  — невозмущенная толщина пленки,  $V_0 = h_0^2 g \sin(\alpha/2\nu)$  характеризует невозмущенную скорость течения,  $\nu$  — коэффициент вязкости,  $\text{Re} = V_0 h_0 / \nu$  — число Рейнольдса,  $W = \sigma / \rho h_0^2 g \sin \alpha$ ,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Это уравнение справедливо при  $h/h_0 \ll 1$  и  $\text{Re} \cdot (h_0/L) \ll 1$  ( $L$  — характерный размер возмущения). Как видно, возмущения развиваются при  $\text{Re} > 5 \text{ctg} \alpha/4$ . Нелинейную стадию развития возмущения аналитически проследить не удастся. Численные решения показывают, что в рассматриваемой модели существуют стационарные решения в виде одномерных солитонов, которые, однако, неустойчивы и распадаются на подковообразные уединенные волны (рис. 24.3). Именно такие солитоны и наблюдаются экспериментально на стекающей пленке вязкой жидкости. Численное решение этого уравнения с граничными условиями  $u = 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  представлено на рис. 24.3. Оно имеет вид подковообразного солитона с осциллирующим передним фронтом и спадающим задним.

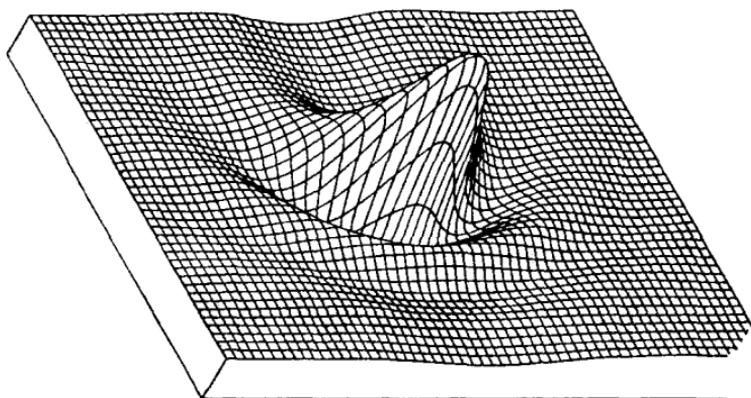


Рис. 24.3. Солитон на стекающей пленке жидкости [25]

Образования в виде бегущих импульсов типичны для многих активных сред с восстановлением, т. е. сред, свойства проводимости ко-

торых восстанавливаются после прохождения возбуждения спустя конечное время, так называемое время рефрактерности. Весьма общей моделью таких сред является двухкомпонентная модель:

$$\partial u / \partial t = F(u, v) + D_1 \Delta u, \quad \partial v / \partial t = \varphi(u, v) + D_2 \Delta v. \quad (24.11)$$

Такие уравнения описывают, например, возбуждение сердечной мышцы (тогда  $u$  — разность потенциалов на мембране клеток, а  $v$  — трансмембранная проводимость) или эволюцию возмущений в нейронной сети, состоящей из возбуждающих и тормозных клеток — нейронов [14].

Аналитическое исследование бегущих импульсов в рамках моделей типа (24.11) удастся лишь в отдельных случаях, в частности когда характерные времена изменения переменных  $u$  и  $v$  существенно различны. При этом импульс можно разбить на участки быстрого и медленного изменения и воспользоваться для анализа методом разрывных колебаний (см. гл. 14). Проиллюстрируем это на примере одномерной двухкомпонентной среды, уравнения которой явно содержат малый параметр при производной:

$$\mu \partial u / \partial t = f(u, v) + \partial^2 u / \partial x^2, \quad \partial v / \partial t = g(u, v), \quad \mu \ll 1. \quad (24.12)$$

В области быстрого изменения переменных величину  $v$  можно считать постоянной, т. е. области импульса, в которых происходит резкое изменение  $u$ , описываются уравнением

$$\partial u / \partial \tau = f(u) \Big|_{v=\text{const}} + \partial^2 u / \partial x^2, \quad (24.13)$$

с которым мы встречались при анализе распространения фронта — волн переключения ( $\mu \tau = t$ ). Таким образом, при наличии малого параметра бегущий импульс можно рассматривать как две распространяющиеся друг за другом волны переключения. Переключением  $u$  управляет при этом медленно изменяющаяся величина  $v$  — в одной области определения и происходит прямое, а в другой — обратное переключение  $u$ . Для определения границ этих областей необходимо конкретизировать вид функций  $f(u, v)$  и  $g(u, v)$  [15, 7]. В промежутке между передним и задним фронтом импульса происходит медленное изменение переменной  $v$ , за которым «следит» быстрая переменная  $u$ .

### 24.3. Спиральные и цилиндрические волны. Ведущие центры

Более или менее подробно аналитически удастся исследовать лишь сравнительно простые явления самоорганизации, которые описывают-

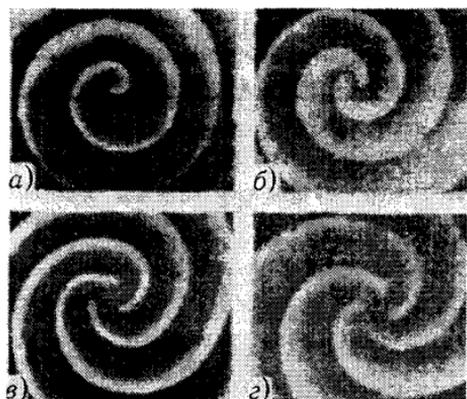


Рис. 24.4. Спиральные вихри в двумерной активной среде: а–г — вихри с топологическими зарядами, равными соответственно единице, двум, трем и четырем

Известное решение уравнения (24.1) для спиральных волн в двумерной среде имеет вид  $u = F(N\theta - \omega t)$ , где  $\theta$  и  $r$  — полярные координаты, а величина  $N$  определяет число элементарных волн, вращающихся вместе;  $N$  называют также топологическим зарядом. Спиральная волна с  $N > 1$  на плоскости выглядит, как многозаходная спираль (рис. 24.4). Спиральные вихри приведенного вида, соответствующие жесткому вращению спирали вокруг неподвижной точки, в эксперименте наблюдать не удалось; не исключено, что они неустойчивы. В недавнем эксперименте [25] впервые наблюдались спиральные волны с топологическим зарядом, равным двум, трем и четырем, однако они оказались нестационарными.

Эксперимент проводился в среде, в которой реализовалась автокаталитическая реакция Белоусова–Жаботинского. Из рис. 24.5 видно, что волны в центре вихря пульсируют: то сближаются, то расходятся, однако структура в целом устойчива.

Качественно возможность существования спиральных волн в однородной ждущей среде, т. е. среде, составленной из активных элементов с конечным временем возбуждения и конечным временем восстановления (рефрактерности), можно пояснить из довольно простых соображений. Пусть в среде имеется локальное возмущение — пятно, внутри которого возбудимость элементов на время потеряна. Рассмотрим рас-

ся, как правило, автомодельными решениями уравнения (24.1)<sup>1</sup>. Детальный же анализ большинства явлений требует привлечения ЭВМ, причем в численном эксперименте зачастую наблюдаются не простейшие решения, которые удастся найти аналитически, а их весьма сложные комбинации.

Обсудим кратко структуры в виде спиральных волн, которые экспериментально наблюдаются в сердце при возникновении аритмии [17], в химически возбудимой среде [3], а также в различных биологических средах.

<sup>1</sup>Автомодельными называют решения уравнений в частных производных, зависящие лишь от одной переменной, которая является комбинацией всех имеющихся.

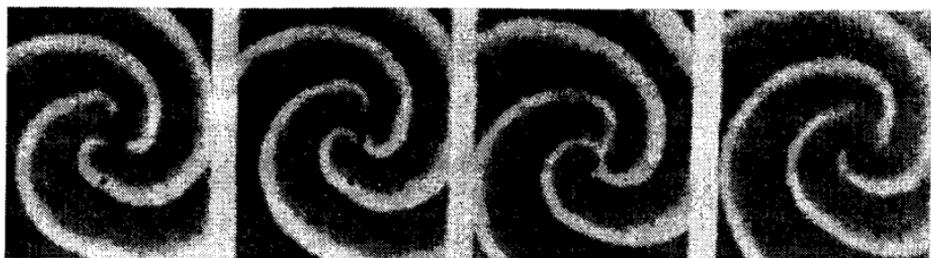


Рис. 24.5. Пульсирующий спиральный вихрь с топологическим зарядом  $N = 3$

пространение вокруг этого возмущения волны возбуждения. В общих чертах распространение этой волны можно представить себе как распространение импульсов по вложенным друг в друга концентрическим окружностям. Ясно, что ввиду ограниченности предельной скорости распространения импульсов их движение по различным окружностям должно быть неизохронным — возбуждение вблизи локальной неоднородности будет вращаться быстрее, на периферии — медленнее. Таким образом, вращающаяся вокруг спонтанно возникшей неоднородности волна возбуждения может быть только спиральной.

Ждущая среда (например, двумерный реактор, в котором происходит автокаталитическая реакция Белоусова–Жаботинского) демонстрирует еще один феномен самоорганизации — спонтанное возникновение ведущих центров. Ведущий центр представляет собой пульсирующий источник концентрически расходящихся волн. Существование такого источника (как и источника спиральных волн — ревербератора) трудно вывести из (24.1) аналитически (хотя такие работы сейчас имеются [7]), однако их довольно просто объяснить качественно.

Рассмотрим участок однородной среды из двух связанных между собой возбудимых элементов. Каждый из них, откликаясь на внешний импульс, совершает один цикл колебания — последовательно переходит из состояния покоя в состояние возбуждения, затем в состояние рефрактерности, после чего снова возвращается в состояние покоя. Динамика таких связанных элементов, очевидно, будет зависеть от фаз их колебаний и соотношения времени возбуждения и рефрактерности. Если время возбуждения превышает время рефрактерности, а состояния элементов соответствующим образом сдвинуты по фазе, то в системе из двух неколебательных элементов установится режим автоколебаний — элементы будут поочередно перезапускать друг друга и в однородной среде возникнет источник концентрических волн.

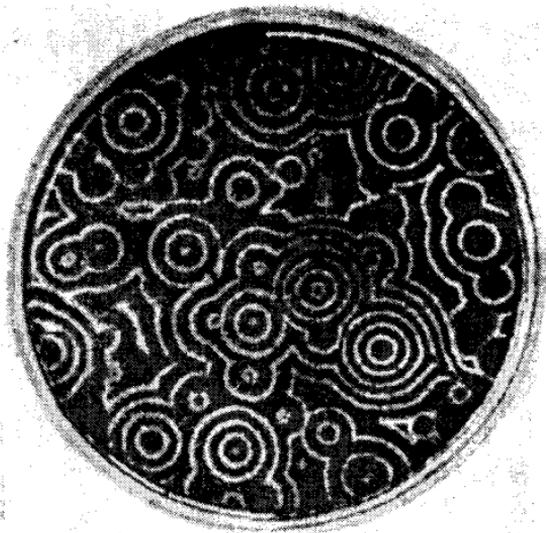


Рис. 24.6. Взаимодействие концентрических волн друг с другом при возникновении в среде нескольких ведущих центров

Подобных источников — ведущих центров в среде — может возникнуть несколько. При этом излучаемые ими концентрические волны будут взаимно уничтожать друг друга (рис. 24.6).

#### 24.4. О механизмах самоорганизации

Обычно на линейной стадии нарастает широкий спектр пространственных возмущений. Однако, когда неустойчивости резонансны, т. е. нарастают лишь возмущения определенного пространственного масштаба, не они зачастую определяют масштаб возникших структур, а их последующее взаимодействие с другими. Таким образом, главным здесь представляются не особенности неустойчивостей (хотя и они важны), а механизмы отбора и формирования структур на линейной стадии. Здесь же довольно мало конкретных результатов, поэтому мы ограничимся обсуждением лишь простейших механизмов формирования различных пространственных масштабов и их взаимной синхронизации. Сделаем это на примере бенаровской конвекции.

Ограничимся при нашем рассмотрении случаем слабого превышения над порогом конвективной неустойчивости  $Ra/Ra_{ст} \geq 1$  (см. гл. 21) в жидкостях с квадратичной зависимостью вязкости от температуры. При этом поле скорости можно представить в виде большого числа си-

нусоидальных мод, не учитывая их пространственных гармоник, — при малой надкритичности нелинейность также можно считать малой. Если бы дополнительная нелинейность, связанная с зависимостью вязкости от температуры, отсутствовала, в подогреваемом плоском слое жидкости устанавливалась бы простейшая конвективная структура в виде валов (см. гл. 21). Пространственный масштаб этих валов определяется, как мы уже говорили, конкуренцией мод с близкими пространственными масштабами. В случаях, когда можно не учитывать граничные условия, ориентация этих валов на плоскости произвольна и определяется лишь начальными условиями.

Дополнительная квадратичная нелинейность, возникающая из-за зависимости  $\nu = \nu(T)$  вязкости от температуры, приводит к резонансной связи между модами одного масштаба и различной пространственной ориентации. Простейший вариант такой связи — это связь трех мод с одинаковыми по модулю и развернутыми друг относительно друга на  $60^\circ$  волновыми векторами:  $\pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \pm \mathbf{k}_3$ , где  $|\mathbf{k}_i| = k$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Нелинейное взаимодействие приводит к установлению стационарной конвекции с равными амплитудами этих мод и синхронизованными фазами (как и в рассмотренном примере). В результате поле скорости принимает вид

$$v_z(x, y) \sim \cos(kx/2) \cos[(1/4)(kx + \sqrt{3}ky)] \cos[(1/4)(kx - \sqrt{3}ky)] \quad (24.14)$$

( $v_z$  — вертикальная компонента скорости жидкости). Ориентация ячеек в пространстве произвольна и зависит лишь от начальных условий. Для нахождения решения, описывающего такую структуру,  $v_z$  следует представить в виде

$$v_z = f(z) [\alpha_1(t) \cos kx + \alpha_2(t) \cos(kx/2 - \sqrt{3}ky/2) + \alpha_3(t) \cos(kx/2 + \sqrt{3}ky/2)].$$

Для действительных амплитуд можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= hA_1 \left[ 1 + \sigma \dot{A}_2 - \beta A_1^2 + \delta(A_2^2 + A_3^2) \right], \\ \dot{A}_2 &= hA_2 \left[ 1 + \sigma \dot{A}_3 - \beta A_2^2 + \delta(A_3^2 + A_1^2) \right], \\ \dot{A}_3 &= hA_3 \left[ 1 + \sigma \dot{A}_1 - \beta A_3^2 + \delta(A_1^2 + A_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (24.15)$$

Таким образом, линейная неустойчивость переходит во взрывную, вызванную взаимодействием параметрических связанных мод на диссипативной нелинейности ( $\sigma \sim \partial\nu/\partial T$ ). Ограничение неустойчивости происходит за счет кубичной нелинейности в зависимости вязкости от температуры. Система (24.14) имеет устойчивое стационарное решение  $A_1 = \pm A_2 = \pm A_3$ , которое и соответствует шестигранным призматическим ячейкам (см. рис. 24.1а).

Таким образом, из приведенного примера видно, что именно синхронные взаимодействия между модами определяют форму возникающих в результате неустойчивостей пространственных структур. Конкуренция же обеспечивает устойчивость этих структур по отношению к нерезонансным возмущениям.

Помимо поисков и открытий новых видов структур и исследования механизмов их образования в теории самоорганизации сегодня появилась новая увлекательная область — направленная организация структур с помощью внешних полей. Чтобы проиллюстрировать нетривиальность задач подобного рода, приведем один сравнительно простой пример. Рассмотрим влияние статического периодического в пространстве поля на диссипативные структуры в одномерной среде. Исходным будет уравнение диффузии

$$\partial u / \partial t = -u \partial u / \partial x + \gamma u + \nu \partial^2 u / \partial x^2 + U_0 \sin qx.$$

При  $U_0 = 0$  в такой среде существуют диссипативные структуры, описываемые уравнением осциллятора  $d^2 u / dx^2 - d(u^2/2)dx + \gamma u = 0$ .

В присутствии периодической неоднородности  $\sim U_0$  естественно ожидать навязывание периодической структуры заданного периода. Однако даже при слабой неоднородности (малом  $U_0$ ) структуры оказываются стохастическими [25].

Анализ поведения диссипативных структур или бегущих импульсов во внешних полях представляет собой частный случай задачи о поведении когерентных образований в поле друг друга, т. е. задачи об их взаимодействии. Сюда относятся задачи о столкновении нервных импульсов, фронтов горения, цилиндрических и спиральных волн. Очевидный интерес представляет анализ взаимодействия структур разного типа и природы. В этих направлениях уже имеются определенные успехи. Отметим, в частности, эксперимент Агладзе и Кринского [25], в котором на примере двумерной реакции Белоусова–Жаботинского наблюдалось взаимодействие спиральных вихрей со структурами типа бенаровских ячеек. В результате такого взаимодействия реакция пере-

ходила в стохастический режим, появлялась «химическая» турбулентность.

В [29, с. 7–44] обсуждены проблемы, связанные с формированием автоструктур (не зависящих от начальных и граничных условий локализованных образований) в неравновесных диссипативных средах, и исследована динамика пространственных ансамблей таких структур. В частности, проведен анализ простой модели — одномерного ансамбля не взаимно связанных структур, представляющих собой цепочку, состоящую из элементов, динамика которых описывается одномерным отображением типа параболы. Напомним, что такое отображение описывает динамику самых различных физических систем, демонстрирующих при изменении параметра цепочку бифуркаций удвоения периода. Пусть параметры цепочки выбраны так, что в первом элементе реализуется режим регулярных колебаний периода  $T$ . При некотором номере  $j$  элемента режим одночастотных колебаний становится неустойчивым и возникает режим удвоенного периода, затем и он теряет устойчивость и т. д. вплоть до установления режима хаотических колебаний. Если каждый из элементов — автогенераторов — находился в режиме стохастических колебаний, то при движении вдоль цепочки наблюдается развитие хаоса — интенсивность колебаний увеличивается, а в спектре уменьшаются выбросы (спектр «сглаживается»). В цепочке описанных автогенераторов ван-дер-полевского типа имел место пространственный переход к хаосу через квазипериодичность: сначала наблюдался квазимонохроматический режим, сменявшийся затем режимом биений с большим числом гармоник; при дальнейшем движении «вниз по потоку» этот режим переходил в слабо хаотический. Далее хаос развивался, интенсивность колебаний возрастала, но при достаточно больших  $j$  она уже не изменялась — устанавливался режим пространственно однородного хаоса.

В [31] было высказано предположение, что подобные модели можно использовать для объяснения развития хаоса не только в гидродинамических системах (цепочка связанных друг с другом вихрей Тейлора, на которых возбуждены азимутальные моды; ансамбль спиральных вихрей в пограничном слое на вращающемся конусе и др.), но и в электронных потоках. Последнее нашло подтверждение в экспериментах [32] с цилиндрическим кольцевым электронным пучком, дрейфующим в продольном постоянном магнитном поле.

# Литература

## К главе 1

- [1] Андронов А. А. *Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний* // Академик Мандельштам: К 100-летию со дня рождения. — М.: Наука, 1979, с. 127.
- [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. — 3-е изд. — М.: Физматгиз, 1981.
- [3] Lotka A. *Elements of physical biology*. — Baltimore: Williams. Wilkins, 1925; *Elements of mathematical biology*. — N.Y.: Dover, 1956.
- [4] Романовский Ю. М., Степанова И. В., Чернавский Д. С. *Что такое математическая биофизика: Кинетические модели в биофизике*. — М.: Просвещение, 1971. — Гл. 1, § 1; гл. 4, § 2.
- [5] Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование*. — М.: Наука, 1976.
- [6] Шевчик В. Н. *Основы электроники сверхвысоких частот*. — М.: Сов. радио, 1959. — Гл. 5.
- [7] Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. *Аналитические методы расчета в электронике СВЧ*. — М.: Сов. радио, 1970.
- [8] Таунс Ч., Шавлов О. *Радиоспектроскопия*. — М.: ИЛ, 1959.
- [9] Люисселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике*. — М.: ИЛ, 1963.
- [10] Люисселл У. *Излучение и шумы в квантовой электронике*. — М.: Наука, 1972.
- [11] Дирак П. А. М. *Принципы квантовой механики*. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979.
- [12] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*. — М.: Мир, 1965. — Т. 2. — С. 135–136.

## К главе 2

- [1] Вайнштейн Л. А. *Открытые резонаторы и открытые волноводы*. — М.: Сов. радио. 1966.

- [2] Бертейн Ф. *Синусоидальные методы колебаний в электромагнитных резонаторах* // Блэкьер О. *Анализ нелинейных систем*. — М.: Мир, 1969. — С. 377-379.
- [3] Мандельштам Л. И. *Лекции по теории колебаний*. — М.: Наука, 1972.
- [4] Ландау Л. Л., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Наука, 1965. — § 23.
- [5] Люисселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике*. — М.: ИЛ, 1963.
- [6] Louisell W. H. *Correspondence between Pierce's coupled mode amplitudes and quantum operators*. — J. Appl. Phys. — 1962. — V. 33. — P. 2435-2436.
- [7] Вайнштейн Л. А. *Электромагнитные волны*. — М.: Сов. радио, 1957. — § 77.
- [8] Ден-Гартог. *Теория колебаний*. — М.: Гостехиздат, 1942.

### К главе 3

- [1] Сивухин Д. В. *Общий курс физики. Т. IV. Оптика*. — М.: Наука, 1980. — Гл. 8.
- [2] *Сборник задач по теории колебаний* / Под ред. Л. В. Постникова и В. И. Королева. — М.: Наука, 1978.
- [3] Маршелл Э. *Биофизическая химия*. — М.: Мир, 1981. — Т. 2.
- [4] Займан Дж. *Принципы теории твердого тела*. — М.: Мир, 1966. — Гл. 8.
- [5] Зельдович Я. Б., Мышкис Л. Д. *Элементы прикладной математики*. — М.: Наука, 1972. — Гл. 5. § 8, 9.
- [6] Фабелинский И. Л. *Молекулярное рассеяние света*. — М.: Наука, 1965.
- [7] Якубович Е. И. *О динамике процессов в средах с неоднородным уширением линии рабочего вещества* // ЖЭТФ. — 1968. — Т. 55. — С. 304-311.

### К главе 4

- [1] Займан Дж. *Принципы теории твердого тела*. — М.: Мир, 1966.
- [2] Бриллюэн Л., Пароди М. *Распространение волн в периодических структурах*. — М.: ИЛ, 1959.
- [3] *Сборник задач по теории колебаний* / Под ред. Л. В. Постникова и В. И. Королева. — М.: Наука, 1978.

- [4] Стальмахов В. С. *Магнитостатические спиновые волны в технике сверхвысоких частот* // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике: 5-я зимняя школа-семинар инженеров. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1981. — Т. 4. — С. 37-41.
- [5] Гинзбург В. Л. *Теоретическая физика и астрофизика*. — М.: Наука, 1975. — Гл. 10.
- [6] Агранович В. М., Гинзбург В. Л. *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*. — 2-е изд. — М.: Наука, 1979.
- [7] Lonngren K. E., Hsuan H. S., Landt D. L. et al. *Properties of plasma waves defined by dispersion relation* // IEEE Trans. Plasma Sci. — 1974. — V. PS-2. — P. 93-108.
- [8] Калинин В. И., Герштейн Г. М. *Введение в радиофизику*. — М.: Физматгиз, 1957. — § 9.1.
- [9] Kompfner R. *The invention of the travelling-wave tube*. — San Francisco Press, 1964.
- [10] Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. *Аналитические методы расчета в электронике СВЧ*. — М.: Сов. радио, 1970. — Гл. 1.
- [11] Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. *Лекции по сверхвысокочастотной электронике*. — М.: Сов. радио, 1973. — Лекция 6.
- [12] Киттель Ч. *Квантовая теория твердых тел*. — М.: Наука, 1967.
- [13] Хэнли Э., Тирринг В. *Элементарная квантовая теория поля*. — М.: ИЛ, 1963.
- [14] Каганов М. И. *Электроны, фононы, магноны*. — М.: Наука, 1979.
- [15] Вундерлих Б., Баур Г. *Теплоемкость линейных полимеров*. — М.: Мир, 1972.
- [16] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Статистическая физика*. — М.: Наука, 1978. — Ч. 2; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика* — М.: Наука, 1964. — Ч. 1, § 65.

## К главе 5

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. — М.: Наука, 1986.
- [2] Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. — М.: Наука, 1970. — Т. 1. — Гл. 4. § 1.
- [3] Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. *Волны в океане* // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. — Т. 19. — С. 843-852.

- [4] Монин А. С., Кошляков М. Н. *Синоптические вихри или волны Россби в океане: эксперимент и основы теории // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова.* — М.: Наука, 1979. — С. 281–287.
- [5] Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях.* — М.: Мир, 1981.
- [6] Сивухин Д. В. *Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика.* — М.: Наука, 1975. — § 40.
- [7] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* — М.: Наука, 1973.
- [8] Флюгге З. *Задачи по квантовой механике.* — М.: Мир, 1974. — Т. 1, 2.
- [9] Халатников И. М. *Теория сверхтекучести.* — М.: Наука, 1971.
- [10] Паттерман С. *Гидродинамика сверхтекучей жидкости.* — М.: Мир, 1978.
- [11] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Статистическая физика.* — М.: Наука, 1978. — Ч. 2. — Гл. 3.
- [12] Арцимович Л. А. *Избранные труды: атомная физика и физика плазмы и лекции по физике плазмы // Лекции по физике плазмы.* — М.: Наука, 1978. — С. 164–245.
- [13] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме.* — М.: Наука, 1988. — Гл. 2.
- [14] Кролл Н., Трайвелпис А. *Основы физики плазмы.* — М.: Мир, 1975. — Гл. 4.
- [15] Lonngren K. E., Hsuan H. S., Landt D. L. et al. *Properties of plasma waves defined by dispersion relation // IEEE Trans. Plasma Sci.* — 1974. — V. PS-2. — P. 93–108.
- [16] Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. *Физика плазмы для физиков.* — М.: Атомиздат, 1979. — § 1.10.
- [17] Люисселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике.* — М.: ИЛ, 1963. — Гл. 2, 3.
- [18] Стил М., Вюраль Б. *Взаимодействие волн в плазме твердого тела.* — М.: Атомиздат, 1973.
- [19] Пожела Ю. К. *Плазма и тоновые неустойчивости в полупроводниках.* — М.: Наука, 1977.
- [20] Владимиров В. В., Волков А. Ф., Мейлихов Е. З. *Плазма полупроводников.* — М.: Атомиздат, 1979.
- [21] Филлипс О. *Динамика верхнего слоя океана.* — М.: Мир, 1969.
- [22] Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане.* — М.: Мир, 1981.

- [23] Бреховских Л. М. *Волны в слоистых средах*. — М.: Наука, 1973.
- [24] Миропольский З. С. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане*. — Л.: Гидрометеоздат, 1981.
- [25] Андроникашвили Э. Л. *Воспоминания о жидком гелии*. — Тбилиси: Ганатлеба, 1980.
- [26] Бреховских Л. М., Гончаров В. В. *Введение в механику сплошных сред*. — М.: Наука, 1982. — Ч. 2.

## К главе 6

- [1] Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости*. — М.: Наука, 1965. — Ч. 4.3. — Гл. 9; Ч. 2. — Гл. 7, 8.
- [2] *Теория автоматического управления* / Под ред. А. В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1972. — Ч. 2.
- [3] *Сборник задач по теории колебаний* / Под ред. Л. В. Постникова и В. И. Королева. — М.: Наука, 1978.
- [4] Краснов М. Л., Макаренко Г. И. *Операционное исчисление. Устойчивость движения*. — М.: Наука, 1964. — Гл. 2.
- [5] Деч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа*. — М.: Физматгиз, 1958. — § 11.
- [6] *Эффект Ганна и элементы его феноменологической теории // Электронные приборы сверхвысоких частот* / Под ред. В. Н. Шевчика и М. А. Григорьева. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1980. — Гл. 12; Левенштейн М. Е., Пожела Ю. К., Шур М. С. *Эффект Ганна*. — М.: Сов. радио, 1975.
- [7] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. *Математическое моделирование в биофизике*. — М.: Наука, 1975. — Гл. 8.
- [8] Рокар И. *Неустойчивость в механике*. — М.: ИЛ, 1959.

## К главе 7

- [1] Рольфс К. *Лекции по теории волн плотности*. — М.: Мир, 1980.
- [2] Волькенштейн М. В. *Общая биофизика*. — М.: Наука, 1978. — Гл. 8, § 8.4.
- [3] Жаботинский А. М. *Концентрационные колебания*. — М.: Наука, 1974. — С. 164–167.
- [4] Хакен Г. *Синергетика*. — М.: Мир, 1980. — С. 342–358.

- [5] Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах*. — М.: Мир, 1979.
- [6] Шевчик В. Н., Шведов Г. Н., Соболева А. В. *Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах*. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1962. — Гл. 1.
- [7] Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. *Аналитические методы расчета в электронике СВЧ*. — М.: Сов. радио, 1970.
- [8] Пирс Дж. Р. *Лампа с бегущей волной*. — М.: Сов. радио, 1952.
- [9] Пиддингтон Дж. *Растущие электромагнитные волны. Растущие электрические волны пространственного заряда и двухлучевая лампа // Вопросы радиолокационной техники*. — М.: ИЛ, 1956. — № 6(36). — С. 53-66.
- [10] *Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова*. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1975.
- [11] Альтшулер Ю. Г., Татаренко А. С. *Лампы малой мощности с обратной волной*. — М.: Сов. радио, 1963. — Табл. 1.1. С. 35.
- [12] Арсенин В. Я. *Методы математической физики и специальные функции*. — М.: Наука, 1974.
- [13] Курант Р. *Уравнения с частными производными*. — М.: Мир, 1964. — Гл. 5, § 1.
- [14] Лопухин В. М. *Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками*. — М.: Гостехиздат, 1953. — Гл. 8.
- [15] Стэррок П. А. *Кинематика нарастающих волн // Колебания сверхвысоких частот в плазме*. — М.: ИЛ, 1961. — С. 71-112.
- [16] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Физическая кинетика*. — М.: Наука, 1979. — Т. 10. — Гл. 6.
- [17] Briggs R. J. *Electron-stream interaction with plasmas*. — Cambridge, Mass.: Mass. Techn. Int. Press, 1964.
- [18] Бриггс П. *Двухлучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы*. — М.: Мир, 1974. — С. 132-171.
- [19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. — М.: Гостехиздат, 1954. — § 30.
- [20] Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. *Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах*. — М.: Наука, 1981.
- [21] Ахиезер А. И., Половин Р. В. *Критерии нарастания волн // УФН*, 1971. — Т. 104. — С. 185.

- [22] Пожела Ю. К. *Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках*. — М.: Наука, 1977. — Гл. 3.
- [23] Моник А. С., Яглом А. М. *Статистическая гидромеханика*. — М.: Наука, 1967.
- [24] Вайнштейн Л. А. *Распространение импульсов* // УФН, 1976. — Т. 118. — С. 339–367.
- [25] Pierce J. R. *An interesting wave amplifier* // IRE Trans., 1960. — V. ED-7. — P. 73–74.
- [26] Kuhl R. L., Webster H. R. *Breakup of hollow cylindrical electron beams* // IRE Trans., 1956. — V. ED-3. — P. 172–183.

## К главе 8

- [1] Мандельштам Л. И. *Лекции по некоторым вопросам теории колебаний (1944 г.)* // Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М.: Наука. 1972. — С. 401–437.
- [2] Вайнштейн Л. А. *Электромагнитные волны*. — М.: Сов. радио, 1957. — Гл. 8.
- [3] Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях*. — М.: Мир, 1981. — С. 293–319, 375–409.
- [4] Островский Л. А., Рабинович М. И. *Нелинейные и нестационарные волны (4-я Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн)*. — Рязань: Изд-во Рязанск. радиотехн. ин-та, 1975. — Лекция 1.
- [5] Вайнштейн Л. А. *Распространение импульсов* // УФН, 1976. — Т. 118. — С. 339–367.
- [6] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме*. — М.: Наука, 1988. — Гл. 2, § 4.
- [7] Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А. *Волны в океане* // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. — Т. 19. — С. 843–852.
- [8] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. — М.: Мир, 1977.
- [9] Левин М. Л. *Как свет побеждает тьму: У. Р. Гамильтон и понятие групповой скорости* // УФН, 1978. — Т. 125 — С. 565–567.
- [10] Лошаков Л. Н., Пчельников Ю. Н. *О соотношении фазовой и групповой скоростей в линиях передачи электромагнитной энергии* // Радиотехника, 1981. — Т. 36. — № 6 — С. 71–72.
- [11] Полевой В. Г., Рыгов С. М. *О четырехмерной групповой скорости* // УФН, 1978. — Т. 125. — С. 549–565.

## К главе 9

- [1] Пирс Дж. *Почти все о волнах.* — М.: Мир, 1976.
- [2] Белецкий В. В. *Очерки о движении космических тел.* — М.: Наука, 1977.
- [3] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* — М.: Мир, 1977. — Гл. 11.
- [4] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме.* — М.: Наука, 1976. — Гл. 2.
- [5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред.* — М.: Физматгиз, 1959. — Гл. 9, § 61.
- [6] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. *Теория волн.* — М.: Наука, 1990. — Гл. 2.
- [7] Вильгельмсон Х., Вейланд Я. *Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме.* — М.: Энергоиздат, 1981. — Гл. 4.
- [8] Аскен Дж., Нильсон О. *Электрические соотношения для волн в системах с временной и пространственной дисперсией // ТИИЭР, 1968.* — Т. 57, § 8. — С. 83–84.
- [9] Полевой В. Г., Рытов С. М. *О четырехмерной групповой скорости // УФН, 1978.* — Т. 125. — С. 549–565.

## К главе 10

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред.* — 2-е изд. — М.: Наука, 1982.
- [2] Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. *Нелинейные волны в неравновесных средах // Изв. вузов. Радиофизика, 1976.* — Т. 19. — С. 721–766.
- [3] Sturrock P. A. *In what sense do slow waves carry negative energy // J. Appl. Phys., 1960.* — V. 31. — P. 2052–2056.
- [4] Пирс Дж. *Почти все о волнах.* — М.: Мир, 1976. — Гл. 10, 11.
- [5] Незлин М. В. *Волны с отрицательной энергией и аномальный эффект Доплера // УФН, 1976.* — Т. 120 — С. 481–495.
- [6] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме.* — М.: Наука, 1976. — С. 88–90.
- [7] Вильгельмсон Х., Вейланд Л. *Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме.* — М.: Энергоиздат, 1981. — Гл. 8.
- [8] Шевчик В. Н. *Основы электроники сверхвысоких частот.* — М.: Сов. радио, 1959. — С. 87–92.

- [9] Louisell W. H., Pierce J. R. *Power flow in electron beam devices* // Proc. IRE, 1955. — V. 43. — P. 425-427.
- [10] Bridesall Ch. K., Brewer G. R., Haeff A. V. *The resistive wall amplifier* // Proc. IRE, 1953. — V. 41. — P. 865-874.
- [11] Цытович В. Н. *Нелинейные эффекты в плазме*. — М.: Наука, 1967.
- [12] Люиселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике*. — М.: ИЛ, 1963.
- [13] Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. *Аналитические методы расчета в электронике СВЧ*. — М.: Сов. радио, 1970.
- [14] Cutler C. C. *Mechanical travelling-wave oscillator*. — Bell Lab. Record, 1954. — P. 134-138.
- [15] Гинзбург В. Л. *Об излучении электрона, движущегося вблизи диэлектрика* // ДАН СССР, 1947. — Т. 6. — С. 145.
- [16] Гинзбург В. Л. *Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе* // Изв. АН СССР. Физ., 1947. — Т. 11 — С. 165.
- [17] Гинзбург В. Л. *Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде* // УФН, 1959. — Т. 69 — С. 537.
- [18] Бриггс Р. *Двухлучковая неустойчивость* // Достижения физики плазмы. — М.: Мир, 1974. — С. 132-171.
- [19] Benjamin T. B. *The treefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows* // J. Fluid Mech., 1963. — Pt. 3. — V. 16. — P. 463-450.
- [20] Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. *Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане* // Нелинейные волны. Самоорганизация. — М.: Наука, 1983.
- [21] Chu L. J. *The kinetic power theorem* // IRE Electron Devices Conference. — University of New Hampshire, June, 1951.
- [22] Незлин М. В. *Динамика пучков в плазме*. — М.: Энергоиздат, 1982.
- [23] Бекефи Дж. *Радиационные процессы в плазме*. — М.: Мир, 1971.
- [24] Франк И. М. *Эйнштейн и оптика* // УФН, 1979. — Т. 129. — С. 694-703.

## К главе 11

- [1] Бриллюэн Л., Пароди М. *Распространение волн в периодических структурах*. — М.: ИЛ, 1959. — Гл. 9.

- [2] Мандельштам Л. И. *Лекции по теории колебаний*. — М.: Наука, 1972. — Лекции 18, 19.
- [3] Ашкрофт Н., Мермин Н. *Физика твердого тела*. — М.: Мир, 1979. — Т. 1.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Наука, 1965. — § 27.
- [5] Люисселл У. *Связанные и параметрические колебания в электронике*. — М.: ИЛ, 1963. — Гл. 4-9.
- [6] Penfield Paul., Jr. *Frequency-power formulas*. — Cambridge: Mass. Techn. Int. Press, 1960.
- [7] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. *Теория волн*. — М.: Наука, 1990. — Гл. 4.
- [8] Элаши Ш. *Волны в активных и пассивных периодических структурах: Обзор* // ТИИЭР, 1976. — Т. 64. — № 14. — С. 22-59.
- [9] Силин Р. А., Сазонов В. П. *Замедляющие системы*. — М.: Сов. радио, 1966.
- [10] Hessel A. *General characteristics of travelling-wave antennas* // Antenna theory. Pt. 2. — N. Y.: McGraw-Hill, 1969.
- [11] *Поверхностные акустические волны* / Под ред. А. Олинера. — М.: Мир, 1981.
- [12] Магдич Л. Н., Молчанов В. Я. *Акустические устройства в их применении*. — М.: Сов. радио, 1978.
- [13] Капица П. Л. *Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса* // ЖЭТФ. 1951. — Т. 21. — С. 588-607.
- [14] Капица П. Л. *Маятник с вибрирующим подвесом* // УФН, 1951. — Т. 44. — С. 7-20.
- [15] Миллер М. А. *Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях* // Изв. вузов. Радиофизика, 1958. — Т. 1. — С. 110-123.
- [16] Миллер М. А. *Об одном принципе генерации высокочастотных колебаний* // Изв. вузов. Радиофизика, 1958. — Т. 1. — С. 166-167.
- [17] *Релятивистская высокочастотная электроника* / Под ред. А. В. Гапонова-Грехова. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1979.
- [18] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. *Нелинейная теория вынужденного рассеяния волн на релятивистских электронных пучках* // ЖЭТФ, 1979. — Т. 76. — С. 930-943.

- [19] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. *Энергетические возможности релятивистского комптоновского лазера* // Письма в ЖЭТФ, 1978. — Т. 28. — С. 207–211.
- [20] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1963.
- [21] Найфэ А. Х. *Методы возмущений*. — М.: Мир, 1976.

## К главе 12

- [1] Моисеев Н. Н. *Асимптотические методы нелинейной механики*. — М.: Наука, 1909. — Гл. 4.
- [2] Хединг Дж. *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*. — М.: Мир, 1965.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Наука, 1965. — § 49.
- [4] Крускал М. *Адиабатические инварианты*. — М.: ИЛ, 1962.
- [5] Hsich Din Yu. *Variational method and nonlinear oscillations and waves* // J. Math. Phys., 1975. — V. 16, № 8. — P. 1630–1636.
- [6] Whitham G. B. *Nonlinear dispersive waves* // Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1965. — V. 283. — January. — P. 238–261.
- [7] Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. *Вариационное исчисление. Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Задачи и упражнения*. — М.: Наука, 1973.
- [8] Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. *Геометрическая оптика неоднородных сред*. — М.: Наука, 1980.
- [9] Buneman O., Levy R. H., Inson L. M. *Stability of crossed-field electron beams* // J. Appl. Phys., 1966. — V. 37, № 8. — P. 3203; Гаврилов М. В., Трубецков Д. И. *Волновые явления в электронном потоке малой плотности в скрещенных полях при распаде однопоточного состояния* // Межвуз. научн. сб.: Вопросы электроники СВЧ. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1977. — Вып. 10. — С. 156–181.
- [10] Лопухин В. М., Магалинский В. Г., Мартынов В. П., Рошаль А. С. *Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот*. — М.: Наука, 1966. — С. 75–80.
- [11] Haddad G. I., Bevenssee R. M. *Start-oscillations of tapered backward-wave oscillator* // IRB Trans. — 1963. — V. ED-10, № 6. — P. 389–393.
- [12] Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. *Взаимодействие волн в неоднородных средах*. — Новосибирск: Наука, 1982.

- [13] Бреховских Л. М. *Волны в слоистых средах*. — М.: Наука, 1973.
- [14] Бабич В. М., Булдырев В. С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. — М.: Наука, 1972.
- [15] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. *Геометрическая теория дифракции*. — М.: Связь, 1978.
- [16] Вайнштейн Л. А., Вьякман Д. Е. *Разделение частот в теории колебаний и волн*. — М.: Наука, 1983.
- [17] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. *Теория волн*. — М.: Наука. 1990. — Гл. 7.
- [18] Гинзбург В. Л. *Распространение электромагнитные волн в плазме*. — М.: Наука, 1967.
- [19] Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. *Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабоанизотропных средах // УФН*, 1983. — Т. 141, вып. 2. — С. 257–310.
- [20] Budden K. G. *Radio waves in the ionosphere*. — Cambridge: Univ. Press, 1961.
- [21] Железняков В. В. *Радиоизлучение Солнца и планет*. — М.: Наука, 1964.
- [22] Канценеленбаум Б. З. *Высокочастотная электродинамика*. — М.: Наука, 1966.
- [23] Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов*. — М.: Радио и связь. 1987.

## К главе 13

- [1] Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. *Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний // УФН*, 1979. — Т. 128. — С. 579–624.
- [2] Л. И. Мандельштам. *Лекции по теории колебаний*. — М.: Наука, 1972.
- [3] Блэкьер О. *Анализ нелинейных систем*. — М.: Мир, 1969.
- [4] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. *Теория лазеров и мазеров на свободных электронах // Лекции по электронике СВЧ и радиоп физике — 5-я зимняя школа-семинар инженеров*. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1981 — Т. 1. — С. 69–172.
- [5] Гапонов А. В., Петелин М. И.; Юлпатов В. К. *Индукцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // Изв. вузов. Радиофизика*. — 1967. — Т. 10. — С. 1414–1453.

- [6] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме*. — М.: Наука, 1976.
- [7] Вайнштейн Л. А. *Электронные волны в замедляющих системах. О нелинейных уравнениях ЛБВ* // РаЭ, 1957. — Т. 2. — С. 688–695.
- [8] Вайнштейн Л. А. *Нелинейная теория лампы бегущей волны* // РиЭ, 1957. — Т. 2. — С. 883–894, 1027–1047.
- [9] *Лампа с бегущей волной: Сборник переводных статей* / Под ред. В. Т. Овчарова. — М.: Госэнергоиздат, 1959.
- [10] Заславский Г. М., Чириков Б. В. *Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний* // УФН, 1971. — Т. 105. — С. 7–13.
- [11] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Наука, 1965.
- [12] Заславский Г. М. *Статистическая необратимость в нелинейных системах*. — М.: Наука, 1970.
- [13] Чириков Б. В. *Нелинейный резонанс*. — Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1977.
- [14] Реутов В. П. *Плазменно-гидродинамическая аналогия и нелинейная стадия неустойчивости ветровых волн* // Изв. АН СССР. Сер. физ. атм. и океана. — 1980. — Т. 16. — С. 1266–1275.
- [15] Андронов А. А., Фабрикант А. Л. *Затухание Ландау, ветровые волны и свисток и Нелинейные волны*. — М.: Наука, 1979. — С. 68.
- [16] Бегчов Р., Криминале В. *Вопросы гидродинамической устойчивости*. — М.: Мир, 1971.
- [17] Шапиро В. Д., Шевченко В. И. *Взаимодействие волна-частица в неравновесных средах* // Изв. вузов. Радиофизика, 1976. — Т. 19. — С. 767.
- [18] Хохлов Р. В. *О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях* // РиЭ, 1961. — Т. 6. — С. 1116.
- [19] Хохлов Р. В. *К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях* // РиЭ, 1961. — Т. 6. — С. 917.
- [20] Заславский Г. М. *Стохастичность динамических систем*. — М.: Наука, 1984. — Гл. 1–4.
- [21] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. *Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса*. — М.: Наука, 1988. — Гл. 5.
- [22] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Усиков Д. А., Черников А. А. *Стохастическая паутина и симметрия структур* // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. — М.: Наука, 1989. — С. 84–106.

## К главе 14

- [1] Мандельштам Л. И. *Собрание трудов*. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
- [2] Андронов А. А. *Собрание трудов*. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
- [3] Найфэ А. Х. *Методы возмущений*. — М.: Мир, 1976.
- [4] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. — М.: Физматгиз, 1959.
- [5] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. — М.: Физматгиз, 1963.
- [6] Лоренц Э. *Детерминированное неперiodическое течение // Странные аттракторы / Пер. с англ.: Под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова*. — М.: Мир, 1981. — С. 88–116.

## К главе 15

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. — М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. — М.: Наука, 1966.
- [3] Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
- [4] Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. *Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний // УФН*, 1979. — Т. 126. — С. 579–624.
- [5] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1976. — Гл. 7, § 4.
- [6] Неймарк Ю. И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1972.
- [7] Шильников Л. П. *О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа «седло» // Матем. сб.*, 1968. — Т. 77(119). — С. 461–472.
- [8] Алексеев В. М., Якобсон М. В. *Символическая динамика и гиперболические динамические системы // Боуэн Р. Методы символической динамики / Пер. с англ. под ред. В. А. Алексеева*. — М.: Мир, 1979.
- [9] Мельников В. К. *Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. матем. об-ва*, 1963. — Т. 12. — С. 3–52.

- [10] Арнольд В. И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: Наука, 1978.
- [11] Морозов А. Д. *К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дуффинга* // ЖВММФ, 1973. — Т. 13. — С. 1134–1152.
- [12] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*. — М.: Мир, 1980.
- [13] Балеску. *Равновесная и неравновесная статистическая механика* / Пер. с англ. под ред. Д. Н. Зубарева и Ю. Л. Климонтовича. — М.: Мир, 1978.
- [14] Алексеев В. М. *Символическая динамика (XI летняя математическая школа)*. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1976. — С. 212.
- [15] Пуанкаре А. *Избр. тр.* — М.: Наука, 1972. — Т. 2. — Гл. 33.
- [16] Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. *Введение в теорию нелинейных колебаний*. — М.: Наука, 1987. — Гл. 3, § 2.
- [17] Афраймович В. С. *Краткий очерк качественной теории динамических систем* // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике: 6-я зимняя школа-семинар инженеров. — Изд-во Саратовск. ун-та, 1983. — Кн. 2. — С. 75–89.

## К главе 16

- [1] Блехман И. И. *Синхронизация в природе и технике*. — М.: Наука, 1981. *Синхронизация динамических систем*. — М.: Наука, 1971.
- [2] Гюйгенс Х. *Три мемуара по механике* / Перевод, ред. и прим. К. К. Баумгарта. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
- [3] Андронов А. А., Витт А. А. *К теории захватывания Ван-дер-Поля* // Собр. тр. А. А. Андропова. — Изд-во АН СССР, 1956. — С. 51–64.
- [4] Хаяси Т. *Нелинейные колебания в физических системах*. — М.: Мир, 1968. — Ч. 4.
- [5] Андронов А. А., Витт А. А. *К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы* // ЖТФ, 1934. — Т. 4. — С. 122.
- [6] Ван-дер-Полю. *Нелинейная теория электрических колебаний*. — М.: Связьиздат, 1935.
- [7] Уильямсон М. *Анализ биологических популяций*. — М.: Мир, 1975.
- [8] Смит Дж. М. *Модели в экологии*. — М.: Мир, 1976.
- [9] Рабинович М. И. *Стохастические автоколебания и турбулентность* // УФН, 1978. — Т. 125. — С. 138–140.

- [10] Aizawa Y. *Synergetic approach to the phenomena of mode-locking on nonlinear systems* // Progr. Theor. Phys., 1976. — V. 56. — P. 703.
- [11] Ланда П. С. *Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы*. — М.: Наука, 1980.
- [12] *Приливы в Солнечной системе*/ Пер. с англ.; Под ред. В. А. Жаркова. — М.: Мир, 1979.
- [13] Кияшко С. В., Рабинович М. И. *О преобразовании спектра волн в активной нелинейной среде* // Изв. вузов. Радиофизика, 1972. — Т. 15. — С. 1807–1814.
- [14] Молчанов А. М. *О резонансной структуре Солнечной системы* // Современные проблемы небесной механики и астродинамики. — М.: Наука, 1973.
- [15] Белецкий В. В. *Очерки о движении космических тел*. — М.: Наука, 1977.

## К главе 17

- [1] Хохлов Р. В. *О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях* // РиЭ, 1961. — Т. 6. — С. 1116.
- [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика*. — М.: Наука, 1965. — С. 145.
- [3] Белецкий В. В. *Очерки о движении космических тел*. — М.: Наука, 1977. — Очерк 6.
- [4] Качмарек Ф. *Введение в физику лазеров*. — М.: Мир, 1981.
- [5] Ярив А. *Квантовая электроника и нелинейная оптика*. — М.: Сов. радио, 1973.
- [6] Филлипс Оуэн М. *Взаимодействие волн* // Нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — Гл. 7.
- [7] Вильгельмсон Х., Вейланд Л. *Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме*. — М.: Энергоиздат, 1981.
- [8] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. *Проблемы нелинейной оптики*. — М.: Изд-во ВИНТИ, 1964.
- [9] Бломберген Н. *Нелинейная оптика*. — М.: Мир, 1966.
- [10] Рабинович М. И., Реутов В. П. *Взаимодействие параметрически связанных волн в неравновесных средах* // Изв. вузов. Радиофизика, 1973. — Т. 16. — С. 815–826.
- [11] Кияшко С. В., Рабинович М. И., Реутов В. П. *Взрывная неустойчивость и генерация солитонов в активной среде* // ЖТФ, 1972. — Т. 42. — С. 2458–2465.

- [12] Рабинович М. И. *Об асимптотическом методе в теории колебаний распределенных систем* // ДАН СССР, 1971. — Т. 191. — С. 1253–1255.

## К главе 18

- [1] Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. *Одномерные волны в линейных системах с дисперсией* // Изв. вузов. Радиофизика, 1970. — Т. 13. — С. 164–213.
- [2] Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. *Нелинейные волны* // УФН, 1971. — Т. 103. — С. 193–232.
- [3] Карпман В. И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. — М.: Наука, 1973.
- [4] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме*. — М.: Наука, 1976.
- [5] Скотт Э. *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*. — М.: Сов. радио, 1977.
- [6] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. — М.: Мир, 1977.
- [7] Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. *Лекции по сверхвысокочастотной электронике*. — М.: Сов. радио, 1973.
- [8] Шевчик В. Н. *Основы электроники сверхвысоких частот*. — М.: Сов. радио, 1959.
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. — М.: Гостехиздат, 1953.
- [10] Гапонов А. В., Фрейдман Г. И. *Об ударных электромагнитных волнах в ферритах* // ЖЭТФ, 1959. — Т. 36. — С. 957.
- [11] Катаев И. Г. *Ударные электромагнитные волны*. — М.: Сов. радио, 1963.
- [12] Половин Р. В. *Нелинейные магнитогидродинамические волны* // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1. — С. 499–522.
- [13] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнений*. — М.: Наука, 1968.
- [14] Хохлов Р. В. *К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях* // РиЭ, 1961. — Т. 6. — С. 917.
- [15] Хохлов Р. В. *О распространении волн в нелинейных диспергирующих линиях* // РиЭ, 1961. — Т. 6. — С. 1116.
- [16] Руденко О. В., Солуян С. И. *Теоретические основы нелинейной акустики*. — М.: Наука, 1975.

## К главе 19

- [1] Курант Р., Фридрихс К. *Сверхзвуковые течения и ударные волны*. — М.: ИЛ, 1950.
- [2] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. — М.: Наука, 1966.
- [3] Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*. — М.: Наука, 1977.
- [4] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме*. — М.: Наука, 1976. — Гл. 3, § 2.
- [5] Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. *Нелинейные волны // УФН*, 1971. — Т. 103. — С. 193–232.
- [6] Гапонов А. В., Островский Л. А., Фрейдман Г. И. *Ударные электромагнитные волны // Изв. вузов. Радиофизика*, 1967. — Т. 10. — С. 1371.
- [7] Богатырев Ю. К. *Импульсные устройства с нелинейными распределенными параметрами*. — М.: Сов. радио, 1974.
- [8] Белянцев А. М., Гапонов А. В., Дауме Э. Я., Фрейдман Г. И. *Экспериментальное исследование распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в волноводах, заполненных ферритом // ЖЭТФ*, 1964. — Т. 47. — С. 1699.
- [9] Карпман В. И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. — М.: Наука, 1973.
- [10] Скотт Э., Чу Ф., Маклафлин Д. *Солитон — новое понятие в прикладных науках // Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*. — М.: Сов. радио, 1977. — С. 215–284.
- [11] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи*. — М.: Наука, 1980.
- [12] *Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта*. — М.: Мир, 1981.
- [13] Ребби К. *Солитоны // УФН*, 1980. — Т. 130. — С. 329–356.
- [14] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика*. — М.: Наука, 1974.
- [15] Zabusky N. J., Kruskal M. D. *Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett.*, 1965. — V. 15. — P. 240–243.
- [16] Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В. *Взаимодействия и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ*, 1976. — Т. 71. — С. 585.

- [17] Петвиашвили В. И. *Неоднородные солитоны // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова. — М.: Наука, 1979. — С. 5.*
- [18] Петвиашвили В. И. *Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме // Письма в ЖЭТФ, 1980. — Т. 32. — С. 632.*
- [19] Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. *Солитон Россби в лаборатории // ЖЭТФ, 1982. — Т. 82. — С. 145.*
- [20] Каменкович В. М., Монин А. С. *Гидродинамика океана. — М.: Наука, 1978. — Гл. 1.*
- [21] Gardner C. S., Green J. M., Miura R. M. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett., 1967. — V. 19. — P. 1095–1097.*
- [22] Захаров В. Е. *Неустойчивость и нелинейные колебания солитонов // Письма в ЖЭТФ, 1975. — Т. 22. — С. 364.*
- [23] Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. *Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и Большое Красное Пятно Юпитера // Письма в ЖЭТФ, 1982. — Т. 36. — С. 190–193.*
- [24] Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. *Сходящиеся и расходящиеся звуковые пучки в нелинейных средах // Акуст. журн., 1970. — Т. 16. — С. 49.*
- [25] *Солитоны // Под ред Р. Буллафа и Ф. Кодри; Пер. с англ. под ред. С. П. Новикова. — М.: Мир, 1983.*
- [26] Лэм Дж. Л. *Введение в теорию солитонов / Пер. с англ. под ред. В. Б. Захарова. — М.: Мир, 1983.*
- [27] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Пер. с англ. под ред. А. Б. Шабата. — М.: Мир, 1988.*
- [28] Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике / Пер. с англ. под ред. А. В. Михайлова. — М.: Мир, 1989.*
- [29] Петвиашвили В. И., Похотелов О. А. *Уединенные волны в плазме и атмосфере. — М.: Энергоатомиздат, 1989.*
- [30] Филиппов А. Т. *Многоликий солитон. — М.: Наука, 1986.*

## К главе 20

- [1] Аскарьян Г. А. *Воздействие градиента поля интенсивного электромагнитного луча на электроны и атомы // ЖЭТФ, 1962. — Т. 42. — С. 1567.*
- [2] Lighthill M. J. *Contributions to the theory of waves in nonlinear dispersive systems // J. Inst. Math. Appl., 1965. — V. 1. — P. 260.*

- [3] Зельдович Б. Я., Поповичев В. И., Рагульский В. В., Файзуллов Ф. С. *О связи между волновыми фронтами отраженного и возбуждающего света при вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна* // ЖЭТФ, 1972. — Т. 62. — С. 872.
- [4] *Нелинейные волны: Распространение и взаимодействие* / Под ред. А. В. Гапонова. — М.: Наука, 1981.
- [5] Виноградов М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. *Теория волн.* — М.: Наука, 1990.
- [6] Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* — М.: Мир, 1977.
- [7] Горшков К. А., Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. *Вопросы асимптотической теории нелинейных волн* // ТИИЭР. — 1974. — Т. 62. — С. 113.
- [8] Островский Л. А., Соустов Л. В. *«Самомодуляция» электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи* // Изв. вузов. Радиофизика, 1972. — Т. 15. — С. 242-248.
- [9] Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. *Одномерные волны в нелинейных диспергирующих системах* // Изв. вузов. Радиофизика, 1970. — Т. 13. — С. 163-213.
- [10] Островский Л. А., Рабинович М. И. *Нелинейные и нестационарные волны* // Материалы Школы по дифракции и распространению электромагнитных волн. — Рязань: Изд-во Рязанск. радиотехн. ин-та, 1975.
- [11] Юэн Г., Лейк Б. *Теория нелинейных волн в приложении к волнам на глубокой воде* // Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. — М.: Мир, 1981.
- [12] Де Жен П. *Сверхпроводимость металлов и сплавов.* — М.: Мир, 1968.
- [13] Кадомцев Б. Б., Карпман В. П. *Нелинейные волны* // УФН, 1971. — Т. 103. — С. 193.
- [14] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи* / Под ред. С. П. Новикова. — М.: Наука, 1980.
- [15] Островский Л. А. *Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде* // ЖЭТФ, 1966. — Т. 51. — С. 1189.
- [16] Скотт Э., Чу Ф., Маклафлин Д. *Солитон — новое понятие в прикладных науках* // Скотт Э. *Волны в активных и нелинейных средах в приложении в электронике.* — М.: Сов. радио, 1977. — С. 276.

- [17] Lake B. M., Yuen H. C., Rungaldier H., Ferguson W. E. *Nonlinear deep water waves: Theory and experiment. P. II: Evolution of a continuous wave train* // J. Fluid, 1977. — V. 83. — P. 49.
- [18] Yuen H. C., Ferguson W. E. *Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrodinger equation* // Phys. Fluids, 1978. — V. 21. — P. 1275.
- [19] Hirota R., Suzuki K. *Studies on lattice solitons by using lumped networks* // J. Phys. Soc. Japan, 1970. — V. 28. — P. 1336.
- [20] Ферми Э. *Научные труды*. — М.: Наука, 1972. — Т. 2.
- [21] Захаров В. Е., Манаков С. В. *О полной интегрируемости нелинейного уравнения* // ТМФ, 1974. — Т. 19. — С. 333.
- [22] Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. *Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах* // ЖЭТФ, 1979. — Т. 77. — С. 617–629.
- [23] Кияшко С. В., Папко В. В., Рабинович М. И. *Модельные эксперименты по взаимодействию ленгмюровских и ионно-звуковых волн* // Физика плазмы, 1975. — Т. 1. — С. 1013.
- [24] Захаров В. Е., Рубенчик А. М. *О нелинейном взаимодействии высокочастотных и низкочастотных волн* // ПМТФ, 1972. — № 5. — С. 84.
- [25] Таланов В. И. *О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах* // Письма в ЖЭТФ, 1965. — Т. 2. — С. 218–222.
- [26] Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. *Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде* // УФН, 1967. — Т. 93. — С. 19.
- [27] Власов С. П., Таланов В. И., Петрищев В. А. *Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов)* // Изв. вузов. Радиофизика, 1971. — Т. 14. — С. 1353.
- [28] Львов В. С. *Лекции по физике нелинейных явлений*. — Новосибирск: Изд-во Новосибирск, ун-та, 1977.
- [29] Cuiti P., Jernetti G., Sago M. S. *Optical visualisation of non-linear acoustic propagation in cavitating liquids* // Ultrasonics, 1980. — V. 18. — P. 111.
- [30] Рабинович М. И., Реутов В. П., Цветков А. А. *О влиянии импульсов и пучков при взрывной неустойчивости* // ЖЭТФ, 1974. — Т. 67. — С. 525.
- [31] Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филлипчук Т. С. *О новом классе связанных солитонов в диспергирующей среде с квадратичной нелинейностью* // Вестн. Моск. ун-та. Физика, астрономия, 1978. — Т. 19, № 4. — С. 91.

- [32] Зельдович Б. Я., Носач О. Ю., Поповичев В. И. и др. *Обращение волнового фронта света при его вынужденном рассеянии* // Вестн. Моск. ун-та. Физика, астрономия, 1978. — Т. 19, № 4. — С. 137.
- [33] Беспалов В. И., Бетин А. А., Дятлов А. И. и др. *Нелинейное взаимодействие световых волн сложной пространственно-временной структуры в кубических средах* // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие / Под ред. А. В. Гапонова. — М.: Наука, 1981.
- [34] Захаров В. Е., Манаков С. В. *О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах* // Письма в ЖЭТФ, 1973. — Т. 18. — С. 413.
- [35] Кадомцев Б. Б. *Коллективные явления в плазме*. — М.: Наука, 1988.
- [36] Кадомцев Б. Б., Канторович В. М. *Теория турбулентности в гидродинамике и плазме* // Изв. вузов. Радиофизика, 1974. — Т. 17. — С. 509.
- [37] Хассельман К. *Описание нелинейных взаимодействий методами теоретической физики (с приложением к образованию волн ветром)* // Нелинейная теория распространения волн. — М.: Мир, 1970.
- [38] Галеев А. А., Сагдеев Р. З. *Нелинейная теория плазмы* // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1973. — Вып. 7.
- [39] Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. *Диффузионное приближение в теории нелинейного взаимодействия волн в хаотически-неоднородных средах* // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие / Под ред. А. В. Гапонова. — М.: Наука, 1981.
- [40] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика*. — М.: Наука, 1976. — Ч. 1.
- [41] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Физическая кинетика*. — М.: Наука, 1979.
- [42] Заславский Г. М., Чириков Б. В. *Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний* // УФН, 1971. — Т. 105. — С. 3.
- [43] Карпман В. И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. — М.: Наука, 1973.
- [44] Захаров В. Е., Филоненко Н. Н. *Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости* // ДАН СССР, 1966. — Т. 170. — С. 1292–1303.
- [45] Юэн Г., Лэйк Б. *Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде*. — М.: Мир, 1987.
- [46] Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. *Обращение волнового фронта*. — М.: Наука, 1985.

## К главе 21

- [1] Рабинович М. И. *Автоколебания распределенных систем* // Изв. вузов. Радиофизика, 1974. — Т. 17. — С. 477.
- [2] Гак М. З. *Лабораторное исследование автоколебаний в системе четырех вихрей* // Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1981. — Т. 17. — С. 201.
- [3] Путин Г. Ф., Ткачева Е. А. *Экспериментальное исследование надкритических конвективных движения в ячейке Хеле-Шоу* // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газов, 1979. — С. 3.
- [4] Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. *Системы гидродинамического типа и их применение.* — М.: Наука, 1981.
- [5] Джозеф Д. *Устойчивость движений жидкости.* — М.: Мир, 1981.
- [6] Петвиашвили В. И. *Неодномерные солитоны* // *Нелинейные волны.* — М.: Наука, 1979.
- [7] Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. *Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах* // Изв. вузов. Радиофизика, 1982. — Т. 25. — С. 591.
- [8] Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* — М.: Мир, 1981.
- [9] Канторович Л. В., Крылов В. И. *Приближенные методы высшего анализа.* — М.-Л.: Физматгиз, 1962. — Гл. 4, § 2.
- [10] Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернотынский В. И. *О конвективных движениях в ячейке Хеле-Шоу* // ДАН СССР, 1977. — Т. 235. — С. 554.
- [11] Roskes G. *Three-Dimensional Long Waves on a Liquids Dilm* // *Phys. Fluids*, 1970. — V. 13. — P. 1440.
- [12] Юдович В. И. *О возникновении автоколебаний в жидкости* // ПММ, 1971. — Т. 35. — С. 638.
- [13] Ланда П. С. *Автоколебания в распределенных системах.* — М.: Наука, 1983.

## К главе 22

- [1] Синай Я. Г. *Стохастичность динамических систем* // *Нелинейные волны* / Под ред. А. В. Гапонова. — М.: Наука, 1979. — С. 192-212.
- [2] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики.* — М.: Наука, 1974.

- [3] Заславский Г. М. *Статистическая необратимость в нелинейных системах*. — М.: Наука, 1970.
- [4] Заславский Г. М., Чириков Б. В. *Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // УФН*, 1971. — Т. 105. — С. 3.
- [5] Алексеев В. М. *Символическая динамика. XI летняя математическая школа*. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1976.
- [6] Боуэн Р. *Методы символической динамики / Пер. с англ. под ред. В. М. Алексеева*. — М.: Мир, 1979.
- [7] Рабинович М. И. *Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН*, 1978. — Т. 125. — С. 123.
- [8] Шарковский А. Н. *Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. мат. жур.*, 1961. — Т. 13. — № 3. — С. 86–94.
- [9] Биллингслей П. *Эргодическая теория и информация*. — М.: Мир, 1969.
- [10] Алексеев В. М., Якобсон М. В. *Символическая динамика и гиперболические динамические системы // Боуэн Р. Методы символической динамики / Пер. с англ. под ред. В. М. Алексеева*. — М.: Мир, 1979.
- [11] Хенон М. *Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова* — М.: Мир, 1981. — С. 152–163.
- [12] Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И. *Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // РиЭ*, 1980. — Т. 25. — С. 336–343.
- [13] Pikovsky A. S., Rabinovich M. I. *Stochastic oscillation in dissipative systems // Physica*, 1981. — V. 2D. — P. 8–24.
- [14] Yorke J. A., Yorke E. D. *Chaotic behaviour and fluid dynamics // Hydrodynamic instabilities and the transitions to the transition turbulence. (Topics in Applied Physics) / Eds. H. L. Swinney, J. P. Gollub*. — Springer, 1981. — V. 45. — P. 77–86.
- [15] Feigenbaum M. J. *Universal behaviour in nonlinear systems // Los Alamos Sci.*, 1980. — V. 1. — P. 4–27.
- [16] Huberman B. A., Rudnic J. *Scaling behaviour of chaotic flows // Phys. Rev. Lett.*, 1980. — V. 45. — P. 154–156.
- [17] Пиковский А. С. *О статистических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. вузов. Радиофизика*, 1980. — Т. 23. — С. 883–884.
- [18] *Нелинейные волны: Стохастичность и турбулентность / Под ред. М. И. Рабиновича*. — Горький: изд. ИПФ АН СССР, 1981.

- [19] Ott E. *Strange attractors and chaotic motions of dynamical system* // Rev. Mod. Phys., 1981. — V. 83. — P. 655–671.
- [20] Вышкинд С. Я. *О возникновении стохастичности при невырожденном взаимодействии волн в средах с усилением* // Изв. вузов. Радиофизика, 1978. — Т. 21. — С. 850–856.
- [21] Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. *Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах* // ЖЭТФ, 1979. — Т. 77. — С. 617–629.
- [22] Linsay P. S. *Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator* // Phys. Rev. Lett., 1981. — V. 47. — P. 1349–1352.
- [23] Лоренц Э. *Детерминированное непериодическое течение* // Странные аттракторы / Пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — С. 88–116.
- [24] Йорке Дж., Йорке Е. *Метастабильный хаос: переход к устойчивому хаотическому поведению в модели Лоренца* // Странные аттракторы / Пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — С. 193–212.
- [25] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. *О возникновении и структуре аттрактора Лоренца* // ДАН СССР, 1977. — Т. 234. — С. 336–339.
- [26] Manneville P., Pomeau Y. *Different ways to turbulence in dissipative dynamical system* // Physica, 1980. — V. ID. — P. 219.
- [27] Афраймович В. С., Шильников Л. П. *О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узла* // ДАН СССР, 1974. — Т. 219. — С. 1281–1285.
- [28] Рюэль Д., Такенс Ф. *О природе турбулентности* // Странные аттракторы / Пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая и Л. П. Шильникова. — М.: Мир, 1981. — С. 116–151.
- [29] Eckmann J. P. *Roads to turbulence in dissipative dynamical system* // Rev. Modern. Phys., 1981. — V. 53. — P. 643–654.
- [30] Ledrappier F. *Some Relations Between Dimension and Lyapunov Exponents* // Commun. Math. Phys., 1981. — V. 81. — P. 229.
- [31] Mandelbrot B. B. *Fractals, form, chance and dimension*. — San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1977.
- [32] Izrailev F. M., Rabinovich M. I., Ugodnikov A. D. *Approximate description of three-dimensional dissipative systems with stochastic behaviour* // Phys. Lett., 1981. — V. 68A. — P. 321–325.
- [33] Cratchfield J., Farmer D., Packard N. et al. *Power spectral analysis of a dynamical system* // Phys. Lett., 1980. — V. 76A. — P. 1.

- [34] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. — М.: Наука, 1986. — § 31.
- [35] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. *Стохастические и хаотические колебания*. — М.: Наука, 1987.
- [36] Заславский Г. М. *Стохастичность динамических систем*. — М.: Наука, 1984.
- [37] Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. *Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века. Развитие и перспективы*. — М.: Наука, 1984. — С. 219–280.
- [38] Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика*. — М.: Мир, 1984.
- [39] Анищенко В. С. *Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. I. Физико-математические основы описания и исследования динамической стохастичности*. — Изд-во Саратовск. ун-та, 1985; *Ч. II. Типичные бифуркации и квазиаттракторы в нелинейных системах с малым числом степеней свободы*. — Изд-во Саратовск. ун-та, 1986.
- [40] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. *Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса*. — М.: Наука, 1988.
- [41] Шустер Г. *Детерминированный хаос. Введение*. — М.: Мир, 1988.
- [42] Теодорчик К. Ф. *Автоколебательные системы*. — М.: Гостехиздат, 1952.

## К главе 23

- [1] Ландау Л. Д. *К проблеме турбулентности // ДАН СССР, 1944. — Т. 44. — С. 339–342.*
- [2] Hopf E. *A mathematical example displaining the features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math., 1948. — V. 1. — P. 303–322.*
- [3] Арнольд В. И. *Математические методы в классической механике*. — М.: Наука, 1974.
- [4] Ruelle D., Takens F. *On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys., 1971. — V. 20. — P. 167.*
- [5] Юдович В. И. *Возникновение автоколебаний в жидкости // ПММ, 1971. — Т. 35. — С. 638–655.*
- [6] Libchaber A. *Rayleigh-Benard experiment in liquid helium // NATO Study Nonlinear Phenomena and Phase Transitions // Ed. T. Riste. — Plenum Press, 1981.*

- [7] Feigenbaum M. J. *Universal behaviour in nonlinear systems* // Los Alamos Sci., 1980. — V. 1. — P. 4–27.
- [8] Collub J., Benson S. V., Steinman J. *A subharmonic route to turbulent convection* // Annal. N. Y. Acad. Sci., 1981. — V. 357. — P. 22.
- [9] Collub J., Benson S. V. *Many routs to turbulent convection* // J. Fluid Mech., 1980. — V. 100. — P. 449–470.
- [10] Афраймович В. С., Шильников Л. П. *О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел* // ДАН СССР, 1974. — Т. 219. — С. 1281–1285.
- [11] Афраймович В. С. *О разрушении торов* // Тр. 9-й Межд. конф. по нелинейным колебаниям. — Киев: Изд-во ИМ АН УССР, 1983. — С. 118–120.
- [12] Fenstermaher P. R., Swinney H. L., Gollub J. P. *Dynamical instabilities and transition to chaotic Taylor vortex flow* // J. Fluid Mech., 1979. — V. 94. — P. 103–128.
- [13] Рабинович М. И. *Стохастические автоколебания и турбулентность* // УФН, 1979. — Т. 125. — С. 123–168.
- [14] Newhouse S., Ruell D., Takens F. *Occurance of Strange Attractors Near Quasi Periodic Flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$*  // Comm. Math. Phys., 1978. — V. 64. — P. 35.
- [15] Berge P., Dobois M., Manneville P., Pomeau Y. *Intermittency in Rayleigh-Bernard convection* // J. Phys. Lett. (Paris), 1980. — V. 41. — P. L341.
- [16] Беляев Ю. Н., Яворская И. М. *Переход к стохастическому режиму в течении между вращающимися сферами* // Нелинейные волны: стохастичность и турбулентность / Под ред. М. И. Рабиновича. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981. — С. 78.
- [17] Безручко В. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. *Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе электронный пучок — обратная электромагнитная волна* // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29. — С. 180–184.
- [18] Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. Н. *Теория переходных процессов в релятивистской ЛОВ* // Изв. вузов. Радиофизика, 1978. — Т. 21. — С. 1037.
- [19] Львов В. С., Предтеченский А. А. *Переход к турбулентности в течения Куэтта между цилиндрами* // Нелинейные волны: стохастичность и турбулентность / Под ред. М. И. Рабиновича. — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981.
- [20] Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. *Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах* // ЖЭТФ, 1979. — Т. 77. — С. 617.

- [21] Бетчов Р. *Переход // Турбулентность. Принципы и применения.* — М.: Мир, 1980. — С. 164.
- [22] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидродинамика.* Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1948.
- [23] Рабинович М. И., Сущик М. М. *Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны: самоорганизация /* Под ред. А. В. Гапонова и М. И. Рабиновича. — М.: Наука, 1983. — С. 58–84.
- [24] Новиков Е. А. *Динамика и статистика вихрей // ЖЭТФ,* 1975. — Т. 68. — С. 1868.
- [25] Кац В. А. *Механизм возникновения хаоса в распределенном генераторе обратной волны.* — Некоторые вопросы современной физики. Ч. 2. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1984. — С. 28–33.
- [26] Безручко Б. П., Булгакова Л. В., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. *Экспериментальное и теоретическое исследование стохастических автоколебаний в лампе обратной волны // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике.* Кн. 5. — Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1980. — С. 25–77.
- [27] Безручко Б. П., Булгакова Л. В., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. *Стохастические автоколебания и неустойчивость в лампе обратной волны // РиЭ,* 1983. — Т. 28. — № 6. — С. 1136–1139.
- [28] Кислое В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А. *Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // РиЭ.* — 1979. — Т. 24. — № 6. — С. 1118–1130.
- [29] Katz V. A., Trubetzkov D. I. *Stochasticization of nonstationary structures in distributed oscillation with delay // Self-Organization Autowaves and Structures for Equilibrium /* Ed. Krinsky V. I.: Springer, 1984. — P. 35–38.
- [30] Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. *Стохастические автоколебания в системе электронный пучок — обратная волна. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.* — Горький; изд. ИПФ АН СССР, 1980. — С. 29–36.

## К главе 24

- [1] Винер Н., Розенблют А. *Проведение импульсов в сердечной мышце. Математическая формулировка проблемы проведения импульсов в сети связанных возбудимых элементов, в частности в сердечной мышце // Кибернетич. сб.* — М.: ИЛ, 1961. — Вып. 3.

- [2] Эбелинг В. *Образование структур при необратимых процессах: введение в теорию диссипативных структур.* — М.: Мир, 1979.
- [3] Жаботинский А. М. *Концентрационные колебания.* — М.: Наука, 1974.
- [4] Джозеф Д. *Устойчивость движений жидкости.* — М.: Мир, 1981.
- [5] Гленсдорф П., Пригожин И. *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации.* — М.: Мир, 1973.
- [6] Хакен Г. *Синергетика.* — М.: Мир, 1980.
- [7] *Автоволновые процессы в системах с диффузией.* — Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981.
- [8] Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. *Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах: обзор // Изв. вузов. Радиофизика, 1982. — Т. 25. — С. 591-618.*
- [9] Николис Г., Пригожин И. *Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.* — М.: Мир, 1979.
- [10] Gerish G. *Cell aggregation and differentiation in Dictyostelium discoideum // Curr. Top. Biol. — 1968. — V. 3. — P. 157.*
- [11] Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. *Теория равномерного распространения пламени // ДАН СССР, 1938. — Т. 19. — С. 693.*
- [12] Zaikin A. N., Zhabotinsky A. M. *Concentration wave propagation in two-dimensional liquid-phase self-oscillation system // Nature, 1970. — V. 225. — P. 535.*
- [13] Скотт А. *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.* — М.: Сов. радио, 1977.
- [14] Маркин В. С., Пастушенко В. Ф., Чизмаджев Ю. А. *Теория возбудимых сред.* — М.: Наука, 1981:
- [15] Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. *Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах // УФН, 1979. — Т. 128. — С. 625-666.*
- [16] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. *Устойчивость биологических сообществ.* — М.: Наука, 1978.
- [17] Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. *Математическая биофизика клетки.* — М.: Наука, 1978.
- [18] Королева В. И., Кузнецова Г. Д. *Свойства распространения депрессии при создании в коре головного мозга крысы двухкалийных очагов // Электроническая активность головного мозга. — М.: Наука, 1971. — С. 130.*

- [19] Романовский Ю. М., Степанова И. В., Чернавский Д. С. *Математическое моделирование в биофизике*. — М.: Наука, 1975.
- [20] Волькенштейн М. В. *Общая биофизика*. — М.: Наука, 1978. — Гл. 8.
- [21] Волькенштейн М. В. *Биофизика*. — М.: Наука, 1981. — Гл. 16.
- [22] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. *Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ: Сек. А., 1937. — Т. 1. — Вып. 6. — С. 1; // Вопросы кибернетики. — М.: Изд-во АН СССР, 1975. — Вып. 12. — С. 3–30.*
- [23] Франк-Каменецкий Д. А. *Диффузия и теплопередача в химической кинетике*. — М.: Наука, 1967.
- [24] Петвиашвили В. И. *Неодномерные солитоны // Нелинейные волны*. — М.: Наука, 1979. — С. 5–19.
- [25] Agladze K. I., Krinsky V. I. *Multi-armed vortices in active chemical medium // Nature*, 1982. — V. 296. — P. 424.
- [26] Кияшко С. В., Рабинович М. И., Реутов В. П. *Взрывная неустойчивость и генерация солитонов в активной среде // ЖТФ*, 1972. — Т. 42. — С. 2458–2465.
- [27] *Нелинейные волны. Самоорганизация*. — М.: Наука, 1983.
- [28] Хакен Г. *Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах*. — М.: Мир, 1985.
- [29] *Нелинейные волны. Структуры и бифуркации*. — М.: Наука, 1987.
- [30] Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. *Автоволновые процессы*. — М.: Наука, 1987.
- [31] Соколов Д. В., Трубецков Д. И. *Нелинейные волны, динамический хаос и некоторые задачи сверхвысокочастотной электроники*. — Л.: Изд-ние ФТИ, 1986. — С. 141–177.
- [32] Ампилогова В. Р., Зборовский А. В., Трубецков Д. И., Худзик К. В. *О проверке одной гипотезы возникновения хаоса из структур в электронных потоках // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике, 7-я зимняя школа-семинар инженеров*. Кн. 1. — Саратов: Изд-во Саратовск ун-та, 1986. — С. 106–110.
- [33] Трубецков Д. И., Шепелева Е. Я. *Структуры (общий взгляд и задачи электроники)*. — Л.: Изд-ние ФТИ, 1988. — С. 124–173.
- [34] *Нелинейные волны. Динамика и эволюция*. — М.: Наука, 1989.

## Предметный указатель

- Автономная система 18  
Акустическая ветвь 66  
Аттрактор 299  
— странный 305, 464, 470, 477, 496  
Бифуркация 312  
— рождения инвариантного тора 320  
— удвоения 320, 497  
Брюсселятор 154  
Взаимодействие резонансное волн 350, 360  
— — осцилляторов 350  
Вина график 342  
Волна Россби 98, 407  
— внутренняя 98  
— гравитационная 100, 379  
— кинематическая 370  
— модулированная 410  
— простая 376  
— разрывная 439  
— с положительной и отрицательной энергией 201  
— стационарная 440  
— ударная 385, 389  
Волновод 107  
Волновой пакет 178, 191  
Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна 350, 360  
Ганна диод 142  
Гомоклиническая структура 322  
Двухжидкостная гидродинамика 120  
Диаграмма Ламерея 317, 477  
Динамическая система 129, 307  
— — грубая 307, 311  
Дисперсия 60, 70  
— аномальная 53  
— временная 74  
— нормальная 53  
— пространственная 74  
Диссипативная структура 515  
Заряд топологический 522  
Затухание Ландау 125  
Звук ионный 126  
Клистрон 31, 371  
Колебания нормальные, форма 45  
— связанные, форма 45  
Критерий Бриггса 173  
— Рауса — Гурвица 132  
Лазер на свободных электронах 237  
Лампа бегущей волны 86, 155, 157, 283  
— двухлучевая 165  
— обратной волны 155, 158  
Ленгмюровские колебания 121  
Ляпуновский характеристический показатель 219  
Маятник Капицы 235  
Метод Ван-дер-Поля 261, 285, 288, 331, 342  
— Галеркина 451  
—  $D$ -разбиений 136  
— Уизема 193, 243  
— асимптотический 220  
— возмущений в теории колебаний и волн 221, 377  
— множителей Лагранжа 34  
— обратной задачи рассеяния 401  
— прямой вариационный 243  
— связанных волн 208  
— усреднения при движении в быстром осциллирующем поле 234

- Мода бароклининая 110  
— баротропная 111  
Модель Вольтерра 20, 345  
— Ландау-Хопфа 494  
— Лотки 19  
— «хищник-жертва» 20  
Модуляция 410  
— стохастическая 503  
Мультипликатор 318  
Неустойчивость 27, 129, 148  
— Гельмгольца 102  
— Джинса 152  
— Тьюринга 153  
— абсолютная 150, 160  
— взрывная 367  
— конвективная 149, 160  
— стохастическая 296  
Оптическая ветвь 66  
Отображение Пуанкаре 316, 476  
Парадокс Ферми-Паста-Улама 421  
Перекрытие резонансов 290  
Переменяемость 487  
Переход к турбулентности 499, 501  
Постоянная Фейгенбаума 478  
Предельный цикл 296  
Приближение Буссинеска 96  
— Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна 240, 241, 248  
— геометрической оптики 182  
Равновесия состояния 21-28, 134, 136, 298, 307, 313, 335  
Радиус Дебая 118  
Реакция Белоусова-Жаботинского 513, 522, 523  
Резистивный усилитель 205  
Резонанс 28  
— волновых систем 81  
— нелинейный 284  
— параметрический 217  
Релаксационные автоколебания 302  
Рефрактерности время 521, 523  
Связанность 45  
Сепаратриса 24, 276, 319, 519  
Сила Миллера 238  
Синергетика 513  
Синхронизм волн 86, 207, 368  
Синхронизма условие 360, 431  
Система Лоренца 483  
— Морса-Смейла 325  
Скорость групповая 76, 177, 184  
— распространения энергии 184  
— фазовая 72, 76, 177  
Солитон 277, 389, 397, 419  
— Россби 409  
— диссипативный 519  
— как частица 403  
Теорема Лиувилля 463  
— Чу 201  
Турбулентности возникновение 500  
Турбулентность 436, 493  
— волновая 436  
— гидродинамическая 493  
— слабая 436  
Уравнение Бюргерса 370  
— Ван-дер-Поля 299  
— Гинзбурга-Ландау 417  
— Кадомцева-Петриашвили 405  
— Клейна-Гордона 71, 78, 190, 370  
— Кортевега-де Вриза 277, 397  
— Ландау 507  
— Матье 217  
— Хилла 218  
— Хохлова-Заболотской 405  
— Шредингера 400  
— дисперсионное 81  
— нелинейное параболическое 415  
— характеристическое 27, 83  
Устойчивость 129, 149  
— асимптотическая 131  
— неавтономных систем 139  
— орбитальная 131  
— по Ляпунову 130

- структурная 307
- Фазовая плоскость 21
- Фазовое пространство 134, 135, 307, 459
- Формула Рэлея 183
- Функция Мельникова 327
- корреляционная 462
- Центр ведущий 521
- Цепочка одинаковых маятников 67
- связанных частиц 61
- точечных вихрей 509
- Частота Вайсяля 97
- нормальная 42
- парциальная 42
- плазменная 119
- циклотронная 214
- Число Маха 511
- Прандтля 484
- Рейнольдса 494
- Рэлея 484
- Тейлора 501
- Энтропия Колмогорова–Синая 469
- Эргодичность 461
- Эффект Доплера 207, 215
- Ячейка Бенара 513, 514
- Хеле–Шоу 449

---

*Михаил Израилевич Рабинович*  
*Дмитрий Иванович Трубецков*

# Содержание

Предисловие ко второму изданию . . . . .	8
Предисловие к первому изданию . . . . .	9
Введение . . . . .	11

## Часть I

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Глава 1. <b>Линейный осциллятор</b> . . . . .	17
1.1. Общие замечания . . . . .	17
1.2. Два примера. Фазовый портрет осциллятора . . . . .	19
1.3. Резонанс. Действие непериодической внешней силы на осциллятор . . . . .	28
1.4. Нормальные колебания. Аналогия с квантовой механикой. Операторы рождения и уничтожения . . . . .	35
Глава 2. <b>Колебания в системе двух связанных осцилляторов</b> . . . . .	38
2.1. Исходные уравнения . . . . .	38
2.2. Свободные колебания двух связанных осцилляторов . . . . .	40
2.3. Возбуждение двух связанных осцилляторов внешней силой. Теорема взаимности . . . . .	49
Глава 3. <b>Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов</b> . . . . .	51
3.1. Классическая теория дисперсии . . . . .	51
3.2. Колебания в ансамбле нетождественных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения . . . . .	56
Глава 4. <b>Колебания в упорядоченных структурах. Предельный переход к сплошной среде. Волны. Дисперсия</b> . . . . .	60
4.1. Общие замечания . . . . .	60
4.2. Колебания в упорядоченных структурах (цепочки из связанных частиц и из тождественных связанных осцилляторов) . . . . .	61

4.3.	Предельный переход от упорядоченных структур к одномерной сплошной среде. Временная и пространственная дисперсия. Физическая природа дисперсии . . . . .	70
4.4.	Типичные дисперсионные характеристики сред-моделей	76
4.5.	Формальный способ получения дисперсионного уравнения. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем . . . . .	81
4.6.	Квазичастицы . . . . .	88

<b>ГЛАВА 5. Свойства волн малой амплитуды в сплошных средах . . . . .</b>	<b>90</b>
5.1. Общие замечания . . . . .	90
5.2. Уравнения гидродинамики. Дисперсионное уравнение для звуковых волн . . . . .	91
5.3. Стратифицированная жидкость. Звук в океане . . . . .	94
5.4. Гравитационные волны в несжимаемой жидкости. Внутренние волны. Волны Россби . . . . .	98
5.5. Волны в сверхтекучей жидкости . . . . .	111
5.6. Волны в плазме. Гидродинамическое описание . . . . .	118

<b>ГЛАВА 6. Устойчивость и неустойчивость линеаризованных систем с дискретным спектром . . . . .</b>	<b>129</b>
6.1. Общие замечания и определения . . . . .	129
6.2. Критерий Рауса–Гурвица и трехмерные системы . . . . .	132
6.3. Метод $D$ -разбиений . . . . .	136
6.4. Устойчивость неавтономных систем . . . . .	139
6.5. Механизмы неустойчивостей . . . . .	141

<b>ГЛАВА 7. Устойчивость распределенных систем со сплошным спектром . . . . .</b>	<b>149</b>
7.1. Общие замечания . . . . .	149
7.2. Примеры неустойчивостей . . . . .	152
7.3. Абсолютная и конвективная неустойчивости. Метод характеристик . . . . .	160
7.4. Волны в потоках. Электронные потоки. Неустойчивость Гельмгольца . . . . .	164
7.5. Усиление и непропускание. Критерии разделения . . . . .	172

<b>ГЛАВА 8. Скорость распространения волн . . . . .</b>	<b>177</b>
8.1. О различных способах введения понятия групповой скорости . . . . .	177
8.2. Групповая скорость волн в некоторых сплошных средах	184

<b>Глава 9. Энергия и импульс волн</b> . . . . .	190
9.1. Уравнение переноса усредненной плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде . . . . .	190
9.2. Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией . . . . .	193
9.3. Импульс волнового пакета . . . . .	198
<b>Глава 10. Волны с отрицательной энергией. Связанные волны</b> . . . . .	200
10.1. Общие замечания . . . . .	200
10.2. Волны с положительной и отрицательной энергией . . . . .	201
10.3. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера . . . . .	207
<b>Глава 11. Параметрические системы и параметрическая неустойчивость</b> . . . . .	216
11.1. Общие замечания . . . . .	216
11.2. Параметрический резонанс. Теорема Флоке (Блоха). Уравнение Матье . . . . .	217
11.3. Волны в периодических структурах. Зоны Матье и диаграммы Бриллюэна . . . . .	229
11.4. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы. Лазеры на свободных электронах . . . . .	234
<b>Глава 12. Адиабатические инварианты. Распределение волн в неоднородных средах</b> . . . . .	240
12.1. Приближение Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна и адиабатические инварианты . . . . .	240
12.2. Эквивалентность ротатора осциллятору . . . . .	245
12.3. Распространение волн в неоднородных средах. Приближение геометрической оптики . . . . .	247
12.4. Распространение волн в плоскостистой среде в приближении геометрической оптики . . . . .	254
12.5. Линейное взаимодействие волн в неоднородной среде . . . . .	260

## Часть II

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

<b>Глава 13. Нелинейный осциллятор</b> . . . . .	271
13.1. Вводные замечания . . . . .	271
13.2. Качественное и аналитическое описание. Примеры нелинейных систем . . . . .	273

13.3. Нелинейный резонанс . . . . .	284
13.4. Перекрытие нелинейных резонансов . . . . .	288
<b>Глава 14. Периодические автоколебания . . . . .</b>	<b>296</b>
14.1. Определение . . . . .	296
14.2. Генератор Ван-дер-Поля. Зависимость формы автоколебаний от параметров системы . . . . .	299
14.3. Релаксационные автоколебания. «Быстрые» и «медленные» движения . . . . .	302
<b>Глава 15. Нелинейные динамические системы (общие свойства и методы исследования) . . . . .</b>	<b>307</b>
15.1. Основные типы траекторий. Грубость (структурная устойчивость) динамической системы . . . . .	307
15.2. Основные бифуркации на плоскости. Индексы Пуанкаре . . . . .	312
15.3. Точечные отображения . . . . .	316
15.4. Бифуркации периодических движений . . . . .	319
15.5. Гомоклинические структуры . . . . .	322
<b>Глава 16. Автоколебания в многочастотных системах . . . . .</b>	<b>328</b>
16.1. Вынужденная синхронизация . . . . .	328
16.2. Конкуренция . . . . .	341
16.3. Взаимная синхронизация мод . . . . .	346
<b>Глава 17. Резонансное взаимодействие осцилляторов . . . . .</b>	<b>350</b>
17.1. Взаимодействие трех связанных осцилляторов в системе с квадратичной нелинейностью . . . . .	350
17.2. Резонансное взаимодействие волн в слабонелинейных средах с дисперсией . . . . .	360
17.3. Взрывная неустойчивость . . . . .	367
<b>Глава 18. Простые волны и образование разрывов . . . . .</b>	<b>370</b>
18.1. Кинематические волны . . . . .	370
18.2. Бегущие волны в нелинейной среде без дисперсии . . . . .	374
18.3. Определение координат разрыва . . . . .	382
18.4. Слабые ударные волны. Граничные условия на разрыве . . . . .	385
<b>Глава 19. Стационарные ударные волны и солитоны . . . . .</b>	<b>389</b>
19.1. Структура разрыва . . . . .	389
19.2. Уединенные волны — солитоны . . . . .	397
19.3. Солитоны как частицы . . . . .	403
19.4. Неодномерные солитоны . . . . .	405

<b>Глава 20. Модулированные волны в нелинейных средах</b>	<b>410</b>
20.1. Общие замечания	410
20.2. Самомодуляция. Возвращаемость	414
20.3. Самофокусировка	424
20.4. Взаимодействие волновых пучков и пакетов	428
20.5. Взаимодействие друг с другом волн, имеющих случайно модулированные фазы. Кинетика волн	431
<b>Глава 21. Автоколебания в распределенных системах</b>	<b>438</b>
21.1. Общие замечания	438
21.2. Среда без дисперсии. Разрывные волны	439
21.3. Стационарные волны	440
21.4. Существование и роль предельных циклов	444
21.5. Конкуренция стационарных волн в активной среде	446
21.6. Периодические автоколебания в гидродинамических течениях	448
<b>Глава 22. Стохастическая динамика простых систем</b>	<b>456</b>
22.1. Как появляется случайность в динамической системе	456
22.2. Стохастическая динамика одномерных отображений	465
22.3. Генератор шума. Качественное описание и эксперимент	470
22.4. Статистическое описание простого генератора шума	473
22.5. Пути возникновения странных аттракторов	477
22.6. Размерность стохастических множеств	489
<b>Глава 23. Возникновение турбулентности</b>	<b>493</b>
23.1. Общие замечания	493
23.2. Возникновение стохастических автоколебаний в гидродинамическом эксперименте	496
23.3. Стохастическая модуляция	503
23.4. Идеальные течения и турбулентность	508
<b>Глава 24. Самоорганизация</b>	<b>513</b>
24.1. Основные явления, модели, математические образы	513
24.2. Бегущие импульсы	519
24.3. Спиральные и цилиндрические волны. Ведущие центры	521
24.4. О механизмах самоорганизации	524
<b>Литература</b>	<b>528</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>558</b>