К.Ректорис

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ

М.: Мир, 1985.— 590 с.

Монография известного чешского математика, содержащая обстоятельное и доступное изложение вариационных методов и их приложении в прикладных науках. Книга выходила на чешском языке, дважды — на английском, переведена на немецкий. Она пользуется большим успехом у специалистов.

Для математиков, инженеров, механиков, физиков, а также для преподавателей и студентов вузов.

Оглавление

От редакторов перевода	5
Предисловие	6
Глава 1. Введение	9
Часть I. Гильбертово пространство	14
Глава 2. Скалярное произведение функций. Норма, метрика	14
Глава 3. Пространство L_2	24
Глава 4. Сходимость в пространстве L_2 (G) (сходимость в среднем). Полное пространство. Сепарабельное пространство	30
а) Сходимость в пространстве L_2 (G)	30
б) Полнота	34
в) Плотность. Сепарабельность	36
Глава 5. Ортогональные системы в L_2 (G)	39
а) Линейная зависимость и независимость в L_2 (G)	39
б) Ортогональные и ортонормированные системы в L_2 (G)	43
в) Ряд Фурье. Полные системы. Ортонормирование по Шмидту	46
г) Разложение L_2 (G) на ортогональные подпространства	55
д) Некоторае свойства скалярного произведения	57
Глава 6. Гильбертово пространство	59
а) Предгильбертово пространство. Гильбертово пространство	59
б) Линейная зависимость и независимость в гильбертовом пространстве. Ортогональные системы, ряды Фурье	68
в) Ортогональные подпространства. Некоторые свойства скалярного произведения	72
г) Комплексное гильбертово пространство	73
Глава 7. Некоторые замечания к предыдущим главам. Нормированное пространство. Банахово пространство	75
Глава 8. Операторы и функционалы, в частности, в гильбертовых пространствах	80
а) Операторы в гильбертовом пространстве	81
б) Симметричные, положительные и положительно определенные операторы. Теоремы о плотности	91

в) Функционалы. Теорема Рисса 104
Часть II. Вариационные методы 109
Глава 9. Теорема о минимуме квадратичного функционала и ее следствия 109
Глава 10. Пространство H_A 117
Глава 11. Существование минимума функционала F в пространстве H_A. Обобщенные решения 130
Глава 12. Метод ортонормированных рядов. Пример 145
Глава 13. Метод Ритца 151
Глава 14. Метод Галёркина 160
Глава 15. Метод наименьших квадратов. Метод Куранта 165
Глава 16. Метод наибыстрейшего спуска. Пример 170
Глава 17. Итоги глав с 9 по 16 176
Часть III. Применение вариационных методов к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных 186
Глава 18. Неравенство Фридрихса. Неравенство Пуанкаре 186
Глава 19. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 197
а) Уравнения второго порядка 197
б) Уравнения высших порядков 220
Глава 20. Проблема выбора базиса 224
а) Общие принципы 224
б) Выбор базиса для обыкновенных дифференциальных уравнений 236
Глава 21. Численные примеры. Обыкновенные дифференциальные 239
Глава 22. Краевые задачи для уравнений в частных производных второго порядка 256
Глава 23. Бигармонический оператор. (Уравнения пластин и оболочек) 269
Глава 24. Операторы математической теории упругости 278
Глава 25. Выбор базиса в случае краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных 287
Глава 26. Численные примеры. Дифференциальные уравнения в частных производных 294
Глава 27. Краткое содержание глав 18-26 307
Часть IV. Теория краевых задач для дифференциальных уравнений, основанная на идее слабого решения и на теореме Лакса — Мильграма 314
Глава 28. Интеграл Лебега; области, имеющие границу Липшица 315
Глава 29. Пространство $W_2^{(k)}(G)$ 330
Глава 30. Следы функций из пространства $W_2^{(k)}(G)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(G)$. Обобщенные неравенства Фридрихса и Пуанкаре 340
Глава 31. Эллиптические дифференциальные операторы порядка *2k*. Слабые решения эллиптических уравнений 347
Глава 32. Формулировка краевых задач 357
а) Устойчивые и неустойчивые граничные условия 357

б) Слабое решение краевой задачи. Частные случаи 361
в) Определение слабого решения краевой задачи. Общий случай 369
Глава 33. Существование слабого решения краевой задачи. V-эллиптичность. Теоремы Лакса — Мильграма 386
Глава 34. Приложение прямых вариационных методов для приближенного построения слабого решения 401
а) Однородные граничные условия 402
б) Неоднородные граничные условия 411
в) Метод наименьших квадратов 417
Глава 35. Задача Неймана для уравнений порядка $2k$ (случай, когда форма ((v, u)) не является V-эллиптической) 419
Глава 36. Резюме и некоторые замечания к главам 28 — 35 438
Часть V. Задача на собственные значения 446
Глава 37. Введение 446
Глава 38. Вполне непрерывные операторы 450
Глава 39. Задача на собственные значения для дифференциальных операторов 469
Глава 40. Метод Ритца в задаче на собственные значения 485
а) Метод Ритца 485
б) Задача оценки ошибки 494
Глава 41. Численные примеры 504
Часть VI. Некоторые специальные методы. Регулярность слабого решения 512
Глава 42. Метод конечных элементов 512
Глава 43. Метод наименьших квадратов на границе для бигармонического уравнения. Метод Треффтца решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа 521
а) Первая краевая задача для бигармонического уравнения (задача о пластинах и оболочках) 522
б) Понятие метода наименьших квадратов на границе 525
в) Сходимость метода 528
г) Метод Треффтца 533
Глава 44. Метод ортогональных проекций 535
Глава 45. Применение метода Ритца к решению параболических краевых задач 545
Глава 46. Регулярность слабого решения, выполнение заданного уравнения и граничных условий в классическом смысле. Существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям 557
а) Гладкость слабого решения 557
б) Существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям 562
Глава 47. Заключительные замечания, перспективы предложенной теории 563
Таблица для построения наиболее распространенных функционалов 566

Литература 578
Список обозначений 580
Предметный указатель 582

Предметный указатель

Адамара пример 10
аксиомы метрики 21
— нормы 21
— скалярного произведения 60
базис 71
— ортонормированный 71
A-базис 165
Банаха теорема 89
Бесселя неравенство 48
билинейная форма 371, 378
Больцано — Коши признак 34
Бэтти тождество 283
Вейерштрасса пример 10
вектор перемещения 278
Галеркина метод 162, 181, 182, 243, 249, 255, 493
Галеркина — Петрова метод 164
Гёльдера неравенство 29
гильбертово пространство 67, 186
Грама определитель 68
граничные условия естественные 216
— — неоднородные 138, 141, 158, 197, 219, 267, 277, 286
— — неустойчивые 216
— — однородные 362, 481
— — основные 216
— — смешанные 264
— — устойчивые 216
Грина теорема 99, 353
Дирихле граничные условия 198, 260
— задача И, 80, 139, 141, 147, 258
— интеграл 10
— принцип 10, 11
евклидова норма 226
замыкание 37, 66, 77
изгиб бруса 509
интеграл расходящийся 322
— сходящийся 322
изображение оригинала 81
изотропное тело 279
Кастильяно принцип 544
колебания струны 447
Коллатца метод 504
компактный носитель 330
Корна неравенство 283, 285
Коши — Буняковского неравенство 29
Коши последовательность 34, 77
кручение бруса 151
Куранта метод 168
— минимаксный принцип 467, 483
Лагранжа принцип 544
Ламе постоянные 279
Лапласа оператор 289, 350
— уравнение 10, 141, 256
Лебега верхняя сумма 320
— внешняя мера 317
— внутренняя мера 317
— интеграл 91, 319, 320
— нижняя сумма 320
ленточные матрицы 520
линеал 15, 59, 94
линейная комбинация 68
— система 10
линейное подпространство 55
липшицева граница 14
мера множества 318
метод гиперциклов 544
— наибыстрейшего спуска 171
— наименьших квадратов 168, 169, 182, 244
— ортогональных проекций 536
— — рядов 405
методы прямые вариационные 12, 25
— энергетические 137
метрика 21
— порожденная скалярным произведением 21, 64

множество бесконечной размерности 68
— всех полиномов 38
— замкнутое 66, 67
— значений оператора 81, 82
— измеримое по Лебегу 318
— компактное 451
— конечной размерности 68
— меры нуль 28
— ограниченное 315, 450
— открытое 315
— плотное 38, 66, 78
— предкомпактное 450
— счетное 318 модуль упругости 279
Неймана граничные условия 198, 261 267, 284
— задача 258, 300
непрерывность 553
неравенство треугольника 17
норма 63, 78
— матрицы 226
— оператора 91
— порожденная скалярным произведением 21
— функции 17, 22, 26
— функционала 106
— энергетическая 137
Ньютона граничные условия 198, 260
— задача 258, 377
область замкнутая 14
— определения 81, 82
— с липшицевой границей 14, 80, 320
обобщенная производная 338
обобщенное решение 117, 132
обобщенный закон Гука 279
однородное тело 279
δ-окрестность 36, 66, 77
оператор 80
— бигармонический 287, 350
— вполне непрерывный 452
— дифференциальный 80
— инъективный 85
— линейный 86, 87
— матричный 82
— монотонный 565
— обратный 86
— ограниченный 170
— отображающий 81
— положительно определенный 102
— положительный 102
— простой 85
— самосопряженный 234
— сжимающий 88
— симметричный 99
— сопряженный 234
— теории упругости 282
— эллиптический 350, 351
оператора расширение 291
операторы коммутирующие 85
— конгруэнтные 234
операторы родственные 235
оригинал 81
ортогональная проекция 73, 535
— сумма 57, 73, 535
ортогональное дополнение 73
ортогональный элемент 72, 535
отображение на 82
— сюръективное 82
очень слабое решение 522
Парсеваля равенство 50, 71
первая вариация функционала 112
пластина с отверстием 302
подпространство 72
пополнение пространства 77
последовательность минимизирующая
— сходящаяся 30, 76
— фундаментальная 34, 65, 76
почти всюду 28, 319, 330
предел 31, 64, 76, 553
предельная точка 316
— функция 31
принцип минимума потенциальной энергии 115, 286, 416

— сжимающих отображений 89
прогиб балки 116, 162
— бруса 251
— мембраны 294
— пластины 397
производная множества 316
пространство 22, 27, 69, 117, 338, 362
— банахово 79
— линейное 15, 22, 59, 78
— метрическое 21, 76
— полное 65, 77
— предгильбертово 64
— сепарабельное 39, 67, 78, 145
— со скалярным произведением 64
— типа *B* 79
— унитарное 64
— энергетическое 137
Пуанкаре неравенство 185, 195
Пуассона коэффициент 280
— постоянная 272
— уравнение 11, 80, 109, 139, 141, 147, 256, 268, 377
равномерная ограниченность 452
равностепенная непрерывность 458
расстояние между функциями 20, 22
— — элементами 63
регуляризующее ядро 95
регулярная граница 330
регулярное значение 468
Римана интеграл 319
Рисса теорема 179
Ритца метод 9, 162, 168, 181, 182, 216, 239, 245, 251, 294, 414
— последовательность 154, 224
Симпсона метод 255
система замкнутая 71
— линейная 59
— линейно зависимая 68
— — независимая 44, 68, 69
— ортогональная 43, 65, 69
— ортонормированная 43, 69
— полная 49, 71
скалярное произведение 16, 26, 60, 74, 75, 117, 124
слабое решение 352—357, 412, 469
след функции 340, 343
Соболева теоремы о вложении 275
— пространства с весами 366, 563
собственная функция 230, 447
собственное значение 230, 446, 463
собственный элемент 446
спектр оператора 468
сплайн-функция 516
стационарная точка 112
стационарное распределение температуры 151, 294
сумма ряда 64
суммы частные 45, 70
δ-сфера 36, 66, 76
сходимость в среднем 31
— по норме 454
сходящийся ряд 64
Темпля теорема 497
тензор деформации 278
— напряжений 279
теорема о минимуме квадратичного функционала 151, 176
точка внутренняя 315
— накопления 37, 66, 77
— неподвижная 89
— предельная 37
упругий потенциал 280
уравнение полноты 50
— равновесия 281
— эллиптическое 7, 256, 309
условие однородной эллиптичности 287
— перехода 384
— полноты 71
устойчивость численного процесса 226
фактор пространство 428, 541
Фредгольма альтернатива 477
Фридрихса неравенство 185, 344
функционал 106
— вещественный 105

— интегрируемый 321
— измеримый по Лебегу 319
— квадратичный 108
— комплексный 105
— линейный 105
— энергии 137, 164
функции ортогональные 43
— с компактным носителем 94
— с метрикой 27
Фурье коэффициенты 46, 70
— метод 447
— ряд 46, 70
Шаудера базис 51, 71
Шварца неравенство 29
Шмидта ортонормирование 53
Эйлера — Ларранжа уравнение 350
Эйлера уравнение 350
элемент нулевой 60
— обратный 60
— предельный 64, 76
элементы линеала 15, 28
— ортогональные 69
— особые 66, 67
эллиптическое решение 470
энергия деформации 281
Эри функция 10, 277

От редакторов перевода

Задачи математической физики, допускающие вариационную постановку, позволяют максимально ослабить математические ограничения, накладываемые на разыскиваемое решение, а также строить априори устойчивые разностные схемы для их численной реализации. Вариационное исчисление лежит у истоков теории оптимального управления и оптимального проектирования конструкций. Поэтому так велика популярность вариационных методов в механике, физике и инженерных расчетах. Математические результаты, полученные в этом направлении, быстро принимаются на вооружение прикладниками.

Именно этим можно объяснить возрастающую потребность в книгах по вариационному исчислению, хотя таких книг не так уж мало издано у нас в стране как для математиков, так и для инженеров.

Предлагаемая советскому читателю книга К. Ректориса вышла в свет в 1974 г. на чешском языке. В 1975 г. она была переведена на английский, а в 1983 г.— на немецкий языки. В 1979 г. книга была отмечена Национальной премией ЧССР.

Возможно, советскому читателю покажется несколько необычной манера изложения автора. На наш взгляд, он в некоторых местах излишне подробно излагает не очень сложные понятия, не избегая частых повторений. Впрочем, эта манера некоторым читателям придется по душе: ведь бытует же мнение, что чем толще книга по математике, тем быстрее ее удается прочесть.

Мы благодарны автору за личные контакты с нами, которые облегчили работу по переводу, и надеемся, что книга принесет несомненную пользу широкому кругу советских читателей, как прикладникам-потребителям, так и «чистым» математикам.

Заметим также, что в книге не освещены некоторые важные проблемы вариационного исчисления, связанные, например, с теорией локальных потенциалов (см Р. Шехтер. Вариационный метод в инженерных расчетах.— М.: Мир, 1971), которая приобретает важное значение в связи с так называемой «новой» постановкой квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях и связанным с ней новым вариационным принципом (Б. Е. Победря. Численные методы в теории упругости и пластичности.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981).

Мы надеемся, что настоящая книга послужит стимулом для исследования этой и многих других интересных проблем вариационного исчисления.

К. И. Бабенко
Б. Е. Победря

Предисловие

Три основные причины побудили меня написать эту книгу: многие годы чтения спецкурсов для студентов и инженеров на машиностроительном отделении Пражского технического университета, частые консультации с инженерами и физиками, обращавшимися ко мне за советами по поводу трудностей, с которыми они сталкивались при решении возникавших перед ними задач, и, наконец, множество дискуссий с профессиональными математиками, как теоретиками, так и прикладниками. По этим же причинам книга адресована весьма обширному кругу читателей.

Первая половина книги (части I—III) посвящена теории, основанной на теореме о минимуме функционала энергии, и содержит изложение современных вариационных методов и примеры их применения. Такие задачи довольно привычны для инженеров и физиков. Вторая половина (части IV—VI) основана на сравнительно более абстрактной теореме Лакса—Мильграма. Грубо говоря, она написана в большей степени для математиков, тогда как первая больше ориентирована на использующих математику прикладников. Тем не менее я очень старался сделать всю книгу полезной и интересной как для тех, так и для других.

Осуществить подобный замысел совсем не просто. В самом деле, упомянутые категории читателей часто имеют совершенно противоположные взгляды на такую книгу и, следовательно, различные требования к ней, которым нельзя удовлетворить одновременно. Например, нельзя пойти навстречу желанию математиков получить книгу, написанную в сжатом математическом стиле, в которой теория развертывается достаточно быстро. Действительно, читателю, не являющемуся профессиональным математиком и желающему хорошо понять все отдельные соотношения и их следствия (или даже собирающемуся творчески развивать теорию), необходимо ознакомиться с современным математическим аппаратом, по крайней мере с основами функционального анализа. Этот раздел математики содержит множество новых для нематематика абстрактных понятий, которые нельзя усвоить второпях. Поэтому я продвигался вперед очень постепенно. Сначала определяются скалярное произведение, норма и метрика на множестве достаточно гладких функций, на котором эти понятия — рассматриваемые далее в более общих функциональных пространствах — весьма наглядны. Последующие понятия вводятся сначала в пространстве L_2, одном из самых простых гильбертовых функциональных пространств. Лишь после этого я приступаю к определению

абстрактного гильбертова пространства. Преимущественно индуктивный, а не дедуктивный подход применяется и во многих других местах этой книги, даже в ее более абстрактной второй половине.

Что касается математиков, я приложил все усилия, чтобы включить вопросы, интересные также и для них. В книге они найдут, с одной стороны, достаточно общие теоремы существования, и с другой — много полученных мной результатов, ряд которых публикуется здесь впервые (например, новые методы, рассмотренные в гл. 43 и 45). Некоторые из моих результатов опубликованы только здесь, в частности — уточненные оценки в неравенствах фридрихсовского типа (гл. 18), новые результаты для задач на собственные значения и оценки собственных значений для эллиптических уравнений вида $Au - \lambda Bu = 0$ (гл. 39, 40) и т. д. См. также нетрадиционный подход к задачам глав 19, 34, 35, 44 и др.

Немало внимания было уделено практическим аспектам применяемых методов (см. полное численное решение примеров в гл. 21, 26 и 41), а также вопросам численной устойчивости и удобному выбору базиса. В этой связи я особо подчеркнул практические преимущества и недостатки каждого метода, включая метод конечных элементов.

Проблема оценки ошибки приближенного решения довольно трудна. Одна из возможностей получить эту оценку — воспользоваться методом ортогональных проекций или методом Треффтца (гл. 44). Однако здесь встречается ряд практических затруднений. Поэтому я попытался получить довольно простую оценку (11.21) и повысить ее эффективность, а именно найти более эффективные оценки постоянной положительной определенности C (гл. 18). Как указывалось выше, вторая половина книги, и особенно часть IV, в некоторой степени более абстрактна. В частности, я стремился подробно проанализировать задачи (вообще говоря, несимметричные) для дифференциальных уравнений с неоднородными граничными условиями, включая задачу Неймана для уравнений более высоких порядков. Этот круг задач оказывается весьма трудным для теории, основанной на теореме о минимуме функционала энергии. В то же время я попытался исследовать эти вопросы, не вводя так называемых фактор-пространств, понятийный аппарат которых труден для восприятия инженерно ориентированных читателей.

Упомянув, что часть IV сравнительно труднее, я не имел в виду, что она предназначена только для математиков. Напротив, я стремился изложить задачи достаточно подробно, чтобы они были понятны даже инженерам и физикам; часть IV может им дать, как мне кажется, именно то, что они не могут найти в «классической» теории вариационных методов.

Часть V посвящена задачам на собственные значения для эллиптических уравнений вида $Au - \lambda u = 0$ или более общих — вида $Au - \lambda Bu = 0$.

В части VI изложены некоторые специальные методы. Я стремился описать их так, чтобы читатель, интересующийся их применением, мог прочесть текст, не обращаясь предварительно к более сложной части IV.

В заключительной гл. 47 я попытался предоставить читателю информацию, касающуюся некоторых других тем, связанных с обсуждаемым комплексом задач (нелинейные задачи, задачи в конечных областях и др.).

Для удобства читателя в конце книги помещена таблица функционалов для наиболее часто встречающихся видов задач, а также соответствующие системы уравнений Ритца.

Наконец, краткое замечание о терминологии. В литературе существует значительная путаница в употреблении таких понятий, как линейное множество, линейное пространство и т. п. Некоторые авторы понимают под «линейным пространством» множество элементов, обладающих определенными свойствами линейности, тогда как другие обозначают тем же термином множество, в котором уже введена определенная (линейная) метрика или топология. В данной книге под линейным пространством понимается *линейное метрическое пространство*. Подпространством *полного* метрического пространства всегда называется полное линейное подпространство.

В заключение я хочу искренно поблагодарить всех, кто советом или помощью способствовал улучшению этой книги.

Карел Ректорис

Прага, 1979

Глава 1

Введение

Хотя теория дифференциальных уравнений и не относится к числу новейших, она является одной из самых притягательных математических дисциплин как для инженеров, так и для ученых. В основе этого интереса лежит тот факт, что именно на языке дифференциальных уравнений может быть описано большинство физических явлений, а также явлений, изучаемых и в областях, родственных физике, и в областях, отделившихся от нее в качестве самостоятельных научных дисциплин (например, в теории упругости и др.).

В то же время проблемы, сводящиеся к решению краевых задач для дифференциальных уравнений — особенно для уравнений в частных производных, — служат источником значительных практических и теоретических трудностей для специалистов в прикладных областях (и даже для математиков). В некоторых случаях, когда и уравнение, и область простые, можно получить решение в так называемой замкнутой форме — чаще всего в виде бесконечного ряда. Сюда можно отнести, например, метод Фурье (ср. с. 447) и метод преобразования Лапласа. На протяжении всего прошлого и первых лет нашего столетия усилия математиков были направлены на поиски подходящей модификации методов этого типа или на создание новых методов, которые вели бы к нахождению решения в замкнутой форме в еще более общих случаях. В сущности можно сказать, что эти усилия не увенчались успехом, и начали развиваться различные методы отыскания подходящего приближенного решения. Наиболее приемлемыми из них оказались метод конечных разностей и вариационные методы. Среди последних значительную популярность завоевали метод Ритца, метод Галёркина и сравнительно недавно метод конечных элементов.

Простота принципа, универсальность и относительно простая реализация на ЭВМ являются достоинствами метода конечных разностей. Однако, если необходимо приближенно определить производные искомой функции на основе полученного приближенного решения, этот метод не дает преимуществ. Например, в плоских задачах теории упругости (балки и т. п.) ищется так называемая

функция Эри $U(x, y)$ как решение краевой задачи для бигармонического уравнения. Компоненты тензора напряжений $\nu_x = \partial^2 U/\partial y^2$, $\nu_y = \partial^2 U/\partial x^2$, $\tau_{xy} = -\partial^2 U/\partial x \partial y$ вычисляются тогда по этой функции. При решении указанной задачи методом конечных разностей приближенные значения функции ν_x, ν_y, τ_{xy}, полученные как разностные производные решения, довольно ненадежны, особенно вблизи границы рассматриваемой области [1]).

Как уже отмечалось, вариационные методы получили широкое распространение при решении теоретических задач в инженерном деле и в науке. Появление вариационных методов может быть датировано временем формулировки *принципа Дирихле*: рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в } G, \tag{1.1}$$

$$u = g(S) \text{ на } \Gamma, \tag{1.2}$$

где G представляет собой ограниченную плоскую область, а Γ — ее границу (на этом этапе мы не собираемся вникать в подробности, касающиеся свойств границы и области).

Пусть M представляет собой множество функций, непрерывных в $\bar{G} = G + \Gamma$, имеющих непрерывную первую производную в $\bar{G}$ и удовлетворяющих условию (1.2). Принцип Дирихле утверждает, что функция, на которой так называемый интеграл Дирихле

$$I(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \tag{1.3}$$

имеет минимальное значение среди всех функций из M, является гармонической в G и, таким образом, служит решением задачи (1.1), (1.2).

Риман применил этот принцип к решению большого числа задач (в основном в теории функций комплексной переменной). Однако Риман считал очевидным то, что для всех функций $g(s)$, непрерывных в Γ, существует функция из рассматриваемого множества M, для которой интеграл (1.3) принимает минимальное значение на множестве M. То, что существование такой функции не очевидно, было показано немецким математиком Вейерштрассом, который построил пример, включающий интеграл, похожий на (1.3) [2]), но не принимающий минимального значения ни на одной функции из данного множества функций (обладающих очень „разумными" свойствами). Несколько позднее Адамаром был приведен пример функции, которая является решением (в классическом

[1]) В этом состоит одна из причин, по которым мы изложили метод наименьших квадратов на границе (см. гл. 43 настоящей книги) для приближенного решения указанной задачи, так как, по нашему мнению, в этом случае он особенно предпочтителен.

[2]) Точнее, Вейерштрасс рассматривал случай функции одной переменной.

смысле) задачи (1.1), (1.2), но для которой интеграл (1.3) расходится, так что принцип Дирихле неприменим.

Из-за этих примеров принцип Дирихле долгое время оставался на заднем плане, чтобы возродиться только в работах одного из величайших математиков—Гильберта. Гильберт показал, что в комплексе проблем, относящихся к обоснованию принципа Дирихле, дело заключается не в „маленькой неточности" в формулировке, а в значительно более глубоком условии, касающемся того, что мы сейчас называем полнотой метрического пространства (подробно обсуждаемой в гл. 10 и 11, а также в части IV настоящей книги). Следующим выдающимся событием, привлекшим внимание как теоретиков, так и практиков к применению принципа Дирихле и некоторых его обобщений, было появление метода, предложенного в 1913 г. немецким инженером Ритцем. Чтобы проиллюстрировать основную идею метода Ритца, упомянем одну из первых задач, для решения которой он был применен самим Ритцем.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y) \quad \text{в области } G, \tag{1.4}$$

$$u=0 \quad \text{на границе } \Gamma \tag{1.5}$$

приводит к задаче отыскания минимума функционала

$$F(u)=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-2\iint\limits_G fudxdy \tag{1.6}$$

на множестве N [1]), элементы которого представляют собой достаточно гладкие [2]) функции, удовлетворяющие соотношению (1.5). В N выберем n линейно независимых функций

$$\varphi_1(x, y), \ \ldots, \ \varphi_n(x, y) \tag{1.7}$$

и будем искать приближенное решение рассматриваемой задачи как функцию, которая минимизирует функционал (1.6) не на множестве N, а на его „n-мерном" подмножестве P, элементами которого являются всевозможные линейные комбинации функций (1.7), т. е. функции вида

$$b_1\varphi_1(x, y)+\ldots+b_n\varphi_n(x, y) \tag{1.8}$$

---

[1]) Согласно (1.6), каждой функции $u(x, y)\in N$ ставится в соответствие определенное вещественное число $F(u)$. Такое соответствие называется функционалом, заданным на множестве N. Выражение (1.3) также является функционалом, заданным на множестве M. Подробнее понятие функционала будет рассмотрено в гл. 8, с. 104.

[2]) В настоящей главе мы не имеем возможности опираться в наших утверждениях на понятия, вводимые в тексте позднее. Поэтому наши утверждения в некоторых пунктах не будут сформулированы с достаточной точностью.

с произвольными коэффициентами $b_1, \ldots, b_n$. При подстановке (1.8) вместо $u(x, y)$ в (1.6) функционал (1.6) становится определенной функцией этих коэффициентов — обозначим ее $h(b_1, \ldots, b_n)$. Теперь, если функционал (1.6) принимает минимальное на P значение для некоторой функции

$$u_n(x, y) = c_1\varphi_1(x, y) + \ldots + c_n\varphi_n(x, y), \tag{1.9}$$

то должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial h}{\partial b_1}(c_1, \ldots, c_n) = 0, \ldots, \frac{\partial h}{\partial b_n}(c_1, \ldots, c_n) = 0. \tag{1.10}$$

Однако из вида рассматриваемого функционала (1.6) ясно, что функция $h(b_1, \ldots, b_n)$ является квадратичной функцией переменных $b_1, \ldots, b_n$, так что система (1.10) будет линейной относительно неизвестных $c_1, \ldots, c_n$. Если мы найдем решение этой системы, то функция (1.9) будет в некотором смысле аппроксимацией искомого решения задачи (1.4), (1.5).

Метод Ритца — принципиально простой, что видно из примера, — стал основой прямых вариационных методов. По существу даже метод конечных элементов является его частным случаем для определенного выбора так называемого базиса (см. гл. 42). В линейном случае с ним также тесно связан метод Галёркина.

Вариационные методы использовались инженерами и учеными как очень эффективное средство решения задач. В то же время возник ряд проблем теоретического и практического характера. Стало видно, что даже корректная формулировка задачи и соответствующее понятие решения далеки от ясности. Привлекли внимание вопросы сходимости, особенно следующие: при каких условиях, в каком смысле и как быстро последовательность приближенных решений сходится к „точному". Разрабатывались новые методы и изучались вопросы, связанные с их приложением к решению определенного класса задач. Стимулом к разработке новых методов (например, метода конечных элементов) и к модификации „классических" послужило также усовершенствование ЭВМ, использование которых позволяло довольно быстро решать системы уравнений с большим числом неизвестных. Однако вскоре стало ясно, что неточности, возникающие из-за ошибок округления при подсчете коэффициентов этих систем, а также при решении систем, могут существенно повлиять на точность всего расчета в целом. Неожиданные и явно нелепые результаты, получаемые иногда в процессе вычисления, заставили интенсивно изучать устойчивость этих процессов, которая связана с удачным выбором базиса и т. п. (см. гл. 20).

Оказалось, что найти ответ на ряд вопросов — интересных теоретически и необходимых практически — непросто. Существенную роль в решении этих вопросов сыграл функциональный анализ. Его методы оказались достаточно эффективными для того, чтобы

прояснить ситуацию. С другой стороны, совокупность задач, связанных с вариационными методами, в значительной мере способствовала развитию некоторых разделов функционального анализа.

Со времени их появления вариационные методы продвинулись далеко вперед. Если говорить только о работах фундаментального значения, необходимо упомянуть по крайней мере классические статьи Гильберта и Куранта, кроме того, работы (которые в определенной степени являются их продолжением) Соболева и Михлина в теории, основывающейся на теореме о минимуме квадратичного функционала („функционала энергии"), и результаты Браудера, Лионса и Нечаса в теории, основывающейся на концепции слабого решения и на теореме Лакса—Мильграма. Их результаты имеют как практическое (новые методы, теоремы сходимости), так и теоретическое (теоремы существования) значение. Значительное число современных публикаций, связанных с линейными задачами, посвящены методу конечных элементов.

Как уже упоминалось, трудно представить себе изучение вариационных методов без знания по крайней мере некоторых основных понятий и результатов функционального анализа, особенно без знакомства с теорией гильбертова пространства. Поэтому мы переходим к изучению этой теории.

Часть I

Гильбертово пространство

Глава 2

Скалярное произведение функций. *Норма, метрика*

Сначала несколько слов о применяемых обозначениях.

Символом G будем всюду обозначать N-мерную область, т. е. открытое связное множество евклидова пространства E_N. Мы будем рассматривать только ограниченные области с так называемой *липшицевой* границей. Определение этого понятия достаточно сложно и на первых порах вызвало бы у читателя излишние трудности. Поэтому оно отложено до гл. 28. Здесь мы отметим только, что это определение обладает достаточной общностью, чтобы охватывать области, чаще всего встречающиеся в инженерных приложениях, по крайней мере когда речь идет о решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Например, к этому классу принадлежит плоская область с гладкой или кусочно-гладкой границей, не имеющей точек возврата; в трехмерном пространстве — это области с гладкой или кусочно-гладкой границей, не имеющей сингулярностей, соответствующих в некотором смысле точкам возврата плоских кривых (ребер возврата и т. п.). Примерами плоских и пространственных областей (при $N=2$, $N=3$) с липшицевой границей служат круги, кольца, квадраты, треугольники, шары, кубы и т. д. Для $N=1$ такой областью будет интервал. Всякий раз, когда рассматривается более чем одна область, будем использовать для их различения нижние индексы: G_1, G_2 и т. д.

Границу области G обозначим Γ (или Γ_1, $\Gamma_2\ldots$ — для областей G_1, $G_2\ldots$). Замыкание области G в E_N, т. е. множество $G+\Gamma$, обозначим $\bar{G}$. Вместо «замыкание области в E_N» будем просто говорить «*замкнутая область*».

Координаты точки x из E_N обозначаются через $x_1, \ldots, x_N$. Тогда вместо $\int\limits_G \ldots \int u(x_1 \ldots x_N)\,dx_1 \ldots dx_N$ пишем $\int\limits_G u(x)\,dx$.

Разумеется, при $N=1$ записываем $\int\limits_a^b u(x)\,dx$. Вместо x_1, x_2 или x_1, x_2, x_3 на плоскости или в трехмерном пространстве, как обычно, используем обозначения x, y или x, y, z.

Перейдем к исследованию функций, заданных на выбранной области G, в том числе к определению скалярного произведения двух функций. *Всюду в книге* (если не будет явно оговорено противное) *будем считать функции вещественными; все постоянные, которые будут встречаться в тексте, главным образом в определениях, предполагаются также вещественными.*

Определение 2.1. Множество M, элементы которого являются функциями [1]), заданными на некотором определенном множестве S, называется *линеалом*, если вместе с функциями $u_1(x)$, $u_2(x)$ из M функция

$$a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x), \tag{2.1}$$

где a_1, a_2 — произвольные вещественные постоянные, также принадлежит M. Здесь сумма двух функций и произведение функции на число понимаются в обычном смысле, известном из классического анализа.

В частности, если $u_1 \in M$, то $a_1 u_1(x) \in M$ (что вытекает из (2.1) при $a_2 = 0$), и если $u_1 \in M$, $u_2 \in M$, то их сумма также принадлежит M (что вытекает из (2.1) при $a_1 = 1$, $a_2 = 1$).

Пример 2.1. Обозначим через L множество всех функций, непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$ с определенными обычным образом суммой двух функций и произведением функции на число. Тогда L — линеал, ибо хорошо известно, что если $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — две непрерывные в $\bar{G}$ функции, принадлежащие L, то функция $a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x)$ также непрерывна в $\bar{G}$ и, следовательно, принадлежит L.

Из определения 2.1 следует (читатель легко может проверить законность этого утверждения), что если M — линеал, то вместе с n функциями $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ их произвольная линейная комбинация $a_1 u_1(x) + \ldots + a_n u_n(x)$ также принадлежит M.

Пример 2.2. Пусть L, определенное в примере 2.1, является множеством всех функций $u(x)$, таких что $|u(x)| \leqslant 7$ для всех $x \in \bar{G}$. Обозначим это новое множество $\tilde{L}$. Множество $\tilde{L}$ — не линеал, так как не верно, что для каждого $u \in \tilde{L}$ и для каждого числа a выполнено $au(x) \in \tilde{L}$. Например, функция $u(x) = 4$ в $\bar{G}$ (постоянная в $\bar{G}$ функция) принадлежит $\tilde{L}$, так как она непрерывна в $\bar{G}$ и выполняется условие $|u(x)| \leqslant 7$. Однако функция $2u(x)$ не принадлежит $\tilde{L}$, так как $2u(x) \equiv 8$ и, следовательно, $|2u(x)| > 7$.

Рассмотрим теперь линеал L (пример 2.1). Для двух произвольных функций $u \in L$, $v \in L$ определим скалярное произведение.

---

[1]) Здесь для наглядности рассматривается частный случай, в определении линеала элементы заданного множества не обязательно являются функциями.

Определение 2.2. Под *скалярным произведением* функций u и v из L понимаем интеграл, обозначаемый (u, v):

$$(u, v)=\int_G u(x)\, v(x)\, dx. \tag{2.2}$$

Следовательно, скалярное произведение двух функций из L есть вещественное число, определяемое значением интеграла (2.2).

Пример 2.3. Пусть $\bar{G}$ представляет собой квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, и пусть $u(x, y)=x^2+y^2$, $v(x, y) \equiv 2$. Тогда

$$(u, v)=\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2)\cdot 2\, dxdy = 4/3.$$

Свойства скалярного произведения, которые будут рассмотрены в теореме 2.1, непосредственно вытекают из некоторых известных свойств интеграла.

Теорема 2.1. *Для скалярного произведения, введенного определением* 2.2, *имеем* (u, v, u_1, u_2 — произвольные функции из L, a_1, a_2 — произвольные вещественные числа):

$$(u,\ v)=(v,\ u), \tag{2.3}$$

$$(a_1u_1+a_2u_2,\ v)=a_1(u_1,\ v)+a_2(u_2,\ v), \tag{2.4}$$

$$(u,\ u) \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$(u,\ u)=0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \text{ в } G. \tag{2.6}$$

Соотношение (2.3) означает симметрию скалярного произведения, (2.4) — его аддитивность и однородность. Соотношения (2.5) и (2.6) утверждают, что скалярное произведение $u(x)$ на себя всегда неотрицательно и равно нулю тогда и только тогда, когда $u(x) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 2.1 следующее. Свойство (2.3) следует из равенства

$$\int_G u(x)\, v(x)\, dx=\int_G v(x)\, u(x)\, dx,$$

(2.4) — из равенства

$$\int_G [a_1u_1(x)+a_2u_2(x)]\, v(x)\, dx = a_1\int_G u_1(x)\, v(x)\, dx + a_2\int_G u_2(x)\, v(x)\, dx.$$

Далее имеем

$$(u,\ u)=\int_G u^2(x)\, dx \geqslant 0.$$

Ясно, что если $(u, u)=0$, то $u(x) \equiv 0$. С другой стороны, если

$$\int_G u^2(x)\, dx = 0,$$

то, как известно из интегрального исчисления, $u(x) \equiv 0$, так как функция непрерывна в $\bar{G}$ по предположению [1]).

Заметим, что из (2.4) и (2.3) немедленно следует, что

$$(u, a_1v_1 + a_2v_2) = a_1(u, v_1) + a_2(u, v_2), \tag{2.7}$$

где u, v_1, v_2 являются функциями из L, а a_1, a_2 — вещественные постоянные. Тогда из (2.4) и (2.7) можно легко видеть, что

$$\begin{aligned}(a_1u_1 + a_2u_2, a_3u_3 + a_4u_4) = a_1a_3(u_1, u_3) + \\ + a_2a_3(u_2, u_3) + a_1a_4(u_1, u_4) + a_2a_4(u_2, u_4).\end{aligned} \tag{2.8}$$

(То есть операция взятия скалярного произведения функций формально совпадает с умножением полиномов.) В частности, для произвольных функций u, v из L и для произвольных вещественных постоянных a и b имеем

$$(au, bv) = ab(u, v). \tag{2.9}$$

Скалярное произведение и его свойства позволяют ввести следующее полезное понятие — норму функции.

Определение 2.3. Под *нормой* функции u из линеала L понимаем неотрицательное число

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)\,dx}. \tag{2.10}$$

Например, для нормы функции $u = \sin \pi x \sin \pi y$, определенной в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, получим

$$\|u\| = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 \sin^2 \pi x \sin^2 \pi y\,dx\,dy} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 \sin^2 x\pi\,dx \cdot \int_0^1 \sin^2 \pi y\,dy} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 2.2. *Норма* (2.10) *обладает следующими свойствами* (u, v — произвольные функции из L, a — произвольная вещественная постоянная):

$$\|u\| \geqslant 0, \tag{2.11}$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad в\ G, \tag{2.12}$$

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|, \quad |(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \tag{2.13), (2.14}$$

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \ (\textit{неравенство треугольника}), \tag{2.15}$$

$$|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|. \tag{2.16}$$

[1]) Читатель, конечно, заметил, что предположение о непрерывности функций u и v в $\bar{G}$ не использовалось в доказательстве, кроме этой последней части. Было достаточно, чтобы соответствующие интегралы были определены. Поэтому в следующей главе не возникает трудностей при перенесении основных свойств скалярного произведения на более общий класс функций.

Доказательство [1]). Свойства (2.11), (2.12) следуют непосредственно из определения нормы и свойств скалярного произведения (2.5), (2.6). Далее из определения нормы и из (2.9) имеем $\|au\|^2 = (au, au) = a^2(u, u)$, откуда вытекает (2.13).

Доказательство неравенства (2.14). Пусть $u \in L$, $v \in L$ — две произвольные функции. Для любого вещественного числа λ, согласно (2.5), имеем $(u+\lambda v, u+\lambda v) \geqslant 0$. Применяя (2.8), получим $(u, u) + \lambda(v, u) + \lambda(u, v) + \lambda^2(v, v) \geqslant 0$. Следовательно, имеем

$$(u, u) + 2(u, v)\lambda + (v, v)\lambda^2 \geqslant 0, \tag{2.17}$$

так как $(u, v) = (v, u)$. Функции u, v произвольны, хотя они все же являются фиксированными функциями из L. Следовательно, (u, u), (u, v) и (v, v) — фиксированные числа. Выражение в левой части неравенства (2.17), содержащее квадрат λ, неотрицательно для всех вещественных λ. Выполнение неравенства возможно только в том случае, если дискриминант выражения неположителен, т. е. если $(u, v)^2 - (u, u)(v, v) \leqslant 0$, или если $(u, v)^2 \leqslant (u, u) \times (v, v)$.

Неравенство (2.14) тогда непосредственно следует из последнего неравенства, если учесть, что $(u, u) = \|u\|^2$ и $(v, v) = \|v\|^2$ в соответствии с определением нормы.

Доказательство неравенства (2.15). Имеем

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v, u+v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Из (2.14) следует, что $(u, v) \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$. Заменяя $2(u, v)$ в (2.18) большим (или равным) числом $2\|u\|\|v\|$, получим

$$\|u+v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

откуда немедленно следует (2.15).

Чтобы доказать неравенство (2.16), рассмотрим вместе с элементами u, v также элементы $u-v, v$. Из (2.15) имеем $\|(u-v)+v\| \leqslant \|u-v\| + \|v\|$, или $\|u\| \leqslant \|u-v\| + \|v\|$, откуда получим $\|u\| - \|v\| \leqslant \|u-v\|$.

Аналогично, рассматривая элементы $v-u$, u, получим $\|v\| - \|u\| \leqslant \|u-v\|$.

Неравенство (2.16) прямо следует из двух предыдущих неравенств.

---

[1]) Как видно из доказательства, свойства нормы являются следствием свойств скалярного произведения (2.3) — (2.6). Понятие скалярного произведения обобщается в следующей главе таким образом, что его основные свойства будут сохранены. Следовательно, свойства соответствующей нормы, определенной соотношением, аналогичным (2.10), также останутся неизменными. То же самое можно сказать и о свойствах метрики, вводимых в теореме 2.3.

Пример 2.4. Рассмотрим функции $u=\cos x$, $v=x$ на интервале $[0, \pi]$. Тогда

$$\|u\|=\sqrt{\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|v\|=\sqrt{\int_0^{\pi}x^2\,dx}=\sqrt{\frac{\pi^3}{3}},\quad \|u\|+\|v\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\approx 4.47,$$

$$(u, v)=\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=-2;\quad \|u+v\|=\sqrt{\int_0^{\pi}(\cos x+x)^2\,dx}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi}{2}-4}\approx 2.82.$$

Очевидно, что $2=|(u, v)|\leqslant\|u\|\cdot\|v\|=\pi^2/\sqrt{6}\approx 4.04$, $2.82\approx\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|\approx 4.47$ в соответствии с (2.14) и (2.15).

Замечание 2.1. Понятия скалярного произведения и нормы функции аналогичны подобным понятиям из элементарной векторной алгебры. Свойства нормы аналогичны хорошо известным свойствам длины вектора: рассмотрим векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ на плоскости с точками приложения в начале координат (рис. 1). Их скалярное произведение определяется, как известно, соотношением $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=uv\cos\varphi$, где u, v — длины векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ соответственно, а φ — угол между двумя векторами. Соотношения, аналогичные соотношениям (2.11)—(2.16) для нормы функции, с очевидностью справедливы и для длины вектора:

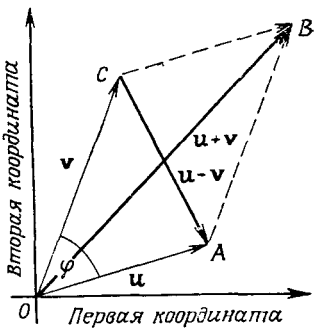

Рис. 1.

а) $u\geqslant 0$, причем $u=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}$ — нулевой вектор (ср. с (2.11) и (2.12));

б) длина вектора $a\mathbf{u}$ равна длине вектора $\mathbf{u}$, умноженной на $|a|$ (ср. с (2.13));

в) $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\leqslant uv$ (ср. (2.14)), так как $|\cos\varphi|\leqslant 1$;

г) длина векторов $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ не может быть больше, чем сумма длин векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (ср. с (2.15)), что видно из рис. 1 (треугольник OAB);

д) разность длин двух векторов (или абсолютное значение этой разности) не может превосходить длины разности этих векторов (ср. с (2.16)), см. треугольник OAC на рис. 1.

Таким образом, видно, что и скалярное произведение, и норма функции представляют собой понятия, определенные вполне естественным путем, соответствующим элементарным геометрическим представлениям, на которых они первоначально основывались.

Следующим понятием, вытекающим из элементарных геометрических представлений, является расстояние между двумя функциями.

Определение 2.4. Под *расстоянием* между функциями u, v из линеала L понимается число

$$\rho(u, v) = \|u - v\|, \tag{2.19}$$

т. е. норма разности этих двух функций.

Пример 2.5. Для расстояния между функциями u, v из примера 2.4 имеем

$$\rho^2(u, v) = \|u - v\|^2 = \int_0^{\pi} (\cos x - x)^2 \, dx = \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} + 4,$$

откуда $\rho(u, v) = \sqrt{\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} + 4} \approx 3.98$.

Основные свойства расстояния между функциями, рассматриваемые в следующей теореме 2.3, следуют непосредственно из определения расстояния между функциями и из свойств нормы (2.11), (2.12), (2.13) и (2.15), сформулированных в теореме 2.2.

Теорема 2.3. *Для произвольных функций u, v, z из L выполняется*:

$$\rho(u, v) \geqslant 0, \tag{2.20}$$

$$\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv v(x), \tag{2.21}$$

$$\rho(u, v) = \rho(v, u), \tag{2.22}$$

$$\rho(u, z) \leqslant \rho(u, v) + \rho(v, z). \tag{2.23}$$

Доказательство. Свойства (2.20) и (2.21) непосредственно вытекают из определения расстояния (2.19) и из (2.11) и (2.12). Далее, из определения расстояния и из соотношения (2.13) при $a = -1$ следует, что $\rho(u, v) = \|u - v\|$, $\rho(v, u) = \|v - u\| = \|-(u - v)\| = |-1| \cdot \|u - v\| = \|u - v\|$, откуда немедленно получается (2.22). Из (2.15) имеем:

$$\rho(u, z) = \|u - z\| = \|(u - v) + (v - z)\| \leqslant \|u - v\| + \|v - z\|, \tag{2.24}$$

что доказывает (2.23), так как сумма последних членов в (2.24) равна в соответствии с определением расстояния числу $\rho(u, v) + \rho(v, z)$.

Замечание 2.2. Свойства расстояния (2.20) — (2.23) также имеют простую геометрическую интерпретацию подобно свойствам скалярного произведения и нормы (см. рис. 1). Обозначая через $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ расстояние между концами векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и началом координат, имеем $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ (см. (2.22)), так как $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ определяется длиной вектора $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ или вектора $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, что то же самое. Кроме

того, очевидно, что $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geqslant 0$, где $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ совпадают (см. (2.20) и (2.21)). Неравенство $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \leqslant \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v}, \mathbf{z})$, геометрическое толкование которого очевидно из рис. 2, аналогично (2.23). Таким образом, геометрическая интерпретация хорошо помогает и в этом случае.

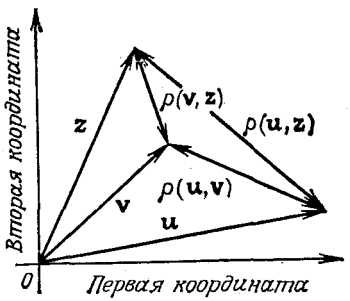

Рис. 2.

Замечание 2.3. Определение 2.4 позволяет «измерить» с помощью (2.19) расстояние между двумя функциями, принадлежащими L. Говорят, что формулой (2.19) задана метрика линеала, и в этом случае линеал L (или любое другое множество, в котором задана метрика) называется метрическим пространством. В общем случае применимо

Определение 2.5. Множество M называется *метрическим пространством*, если для каждой пары его элементов u, v определено число $\rho(u, v)$, обладающее свойствами (2.20)—(2.23), называемое *расстоянием* между элементами u, v.

Заметим, что в предыдущем определении не требовалось, чтобы элементы множества M были функциями. Как будет видно позднее, это определение часто используется при работе с метрическими пространствами, элементы которого имеют несколько иной характер. В определении 2.5 не предполагалось также, что M должно быть линеалом. В дальнейшем, как только мы встретимся с метрикой, определенной на множестве M, будем считать, что расстояние между любой парой его элементов удовлетворяет требованиям (2.20)—(2.23).

Требования (2.20) — (2.23), которым должно удовлетворять расстояние $\rho(u, v)$, называются *аксиомами метрики*. (Аналогично, соотношения (2.11)—(2.13) и (2.15), характеризующие норму, называются *аксиомами нормы* (см. гл. 7).) Если расстояние определено с помощью нормы (2.19), то, как видно из теоремы 2.3, справедливость аксиом метрики следует из выполнения аксиом нормы.

До сих пор в линеале L метрика вводилась формулой (2.19) с помощью нормы $\| \ \|$, определенной в (2.10) [1]). Возможно ввести расстояние в L другими способами, по-прежнему удовлетворяющими аксиомам метрики. Например, определим норму L формулой

$$\|u\|_C = \max_{x \in \overline{G}} |u(x)|. \tag{2.25}$$

[1]) В таких случаях говорят, что норма порождается скалярным произведением.

(Причина, по которой следует отличать эту норму от первоначальной и обозначать ее индексом C, будет ясна из дальнейшего.) Норма $\|u\|_C$ функции $u \in L$ получается из функции $|u(x)|$, непрерывной в замкнутой области $\bar{G}$ (в силу предположения непрерывности $u(x)$), рассмотрением ее максимального значения в $\bar{G}$. Нетрудно показать (не будем здесь останавливаться на деталях), что $\|u\|_C$ удовлетворяет всем четырем аксиомам нормы, что и позволяет называть ее нормой.

Согласно вышеизложенному, можно определить в L расстояние формулой

$$\rho_C(u, v) = \|u - v\|_C, \tag{2.26}$$

или, как следует из (2.25),

$$\rho_C(u, v) = \max_{x \in \bar{G}} |u(x) - v(x)|. \tag{2.27}$$

Линеал с определенным по формуле (2.27) расстоянием называется *линейным пространством* C.

Пример 2.6. Для расстояния ρ_C между функциями $u(x) = \cos x$, $v(x) = x$ из примеров 2.4 и 2.5 в пространстве $C(0, \pi)$ имеем $\rho_C(u, v) = 1 + \pi \approx 4.14$. В самом деле, на интервале $[0, \pi]$ функция $u(x) = \cos x$ убывает, функция $v(x) = x$ возрастает, а функция $|u(x) - v(x)| = |\cos x - x|$ принимает свое максимальное значение в точке $x = \pi$, где $|u(\pi) - v(\pi)| = |\cos \pi - \pi| = 1 + \pi$.

Заметим, что расстояние между рассматриваемыми функциями различно в пространстве C и в пространстве с метрикой (2.19) (см. пример 2.5). Естественно, то же самое верно и для нормы. Рекомендуем читателю проверить на примере функций $u(x) = \cos x$, $v(x) = x$, что $\|\ \|_C$ действительно удовлетворяет (2.11), (2.12), (2.13), (2.15).

Замечание 2.4. Если функции u, v «близки» друг к другу во всех точках замкнутой области $\bar{G}$, то расстояние между ними мало и в пространстве C, так как если неравенство $|u(x) - v(x)| \leqslant \varepsilon$ выполняется в $\bar{G}$, то $\rho_C(u, v) \leqslant \varepsilon$ согласно (2.27).

С другой стороны, если расстояние между функциями u и v мало в пространстве C, то модуль разности функций u и v мал в $\bar{G}$, так как из соотношения $\rho_C(u, v) \leqslant \varepsilon$ следует, что $|u(x) - v(x)| \leqslant \varepsilon$ всюду в $\bar{G}$ согласно (2.27).

Ситуация будет существенно иной в пространстве с метрикой (2.19). Если только мала разность между функциями u, v (по абсолютной величине) всюду в $\bar{G}$, то расстояние $\rho(u, v)$ также мало. В самом деле, если неравенство $|u(x) - v(x)| \leqslant \varepsilon$ выполне-

но всюду в $\overline{G}$, то из (2.19) имеем

$$\rho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int\limits_G [u(x) - v(x)]^2 dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_G \varepsilon^2 dx} = \\ = \sqrt{\varepsilon^2 P} = \varepsilon \sqrt{P}, \quad (2.28)$$

где $P = \int\limits_G dx$ есть n-мерный объем области G. Однако из того, что $\rho(u, v)$ мало, вовсе не следует, что разность $|u - v|$ также мала всюду в $\overline{G}$. Для примера рассмотрим две функции

$$u(x) = \begin{cases} 10 \sin 1000\pi x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 0.001, \\ 0 & \text{при } 0.001 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$v(x) \equiv 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

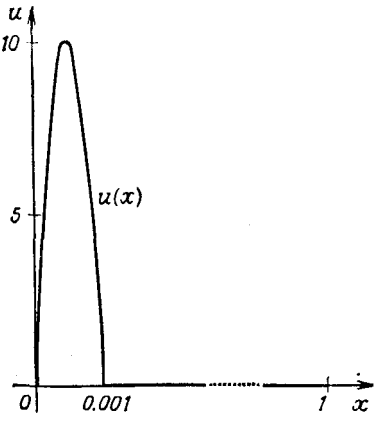

Рис. 3.

Функция $u(x)$, непрерывная на интервале $[0, 1]$, показана на рис. 3. Из (2.19) и (2.20) имеем

$$\rho(u, v) = \|u(x) - v(x)\| = \sqrt{\int\limits_0^1 [u(x) - v(x)]^2 dx} = \\ = \sqrt{\int\limits_0^{0.001} 100 \sin^2 1000\pi x dx} = \sqrt{0.05} \approx 0.224.$$

Расстояние в смысле определения 2.4 между функциями u и v мало, в то время как разность значений функций в точке $x = 0.0005$ равна десяти: $\rho_C(u, v) = 10$.

Если вместо первоначальной рассматривается функция

$$u(x) = \begin{cases} 10 \sin 100000\pi x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 0.00001, \\ 0 & \text{при } 0.00001 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

то получим $\rho(u, v) \approx 0.0224$, хотя разность значений этих функций в точке $x = 0.000005$ также будет равна десяти. При достаточном укорачивании интервала, на котором функция u описанного выше типа отлична от нуля, и при соответствующем увеличении частоты синусоидальной функции, отношение максимального значения $|u(x) - v(x)|$ к расстоянию $\rho(u, v)$ между функциями u и v можно сделать как угодно большим.

Остается непонятным, почему мы ввели на линеале метрику (2.19), тогда как метрика (2.27) в определенной степени более естественна. А именно, мы показали, что как бы мало ни отличались функции u и v всюду в $\bar{G}$, расстояние по метрике (2.27) также мало, и наоборот. Несмотря на это, мы будем пользоваться во всей книге исключительно метрикой (2.19) или метриками, сводящимися к ней. Существуют два принципиальных мотива, лежащие в основе этого решения. Во-первых, метрика (2.19) основана на норме (2.10), которая в свою очередь порождается скалярным произведением (2.2). Скалярное произведение в различных формах играет в настоящей книге роль фундаментального понятия, и для нас важно иметь возможность работы с метриками, порождаемыми определенными скалярными произведениями (например, произведением, обладающим свойствами (2.3)—(2.6)). Определить же скалярное произведение с «разумными» свойствами в пространстве C, которое порождало бы метрику (2.27), не представляется возможным (см., например, [24]). Это первая причина, по которой было отдано предпочтение метрике (2.19). Во-вторых, в последующем мы встретимся с несколькими задачами как теоретического, так и прикладного характера, при решении которых нельзя будет ограничиться работой только с непрерывными функциями. Расширить соответствующим образом метрику (2.27) на класс функций, более общий, чем класс непрерывных функций, довольно сложно, в то время как расширение метрики (2.19) на достаточно общий класс функций довольно просто и естественным образом ведет к понятию пространства L_2. Сейчас мы приступим к осуществлению этого обобщения. Позднее метрика (2.19) пригодится нам при построении некоторых более общих пространств.

Глава 3

Пространство L_2

Понятия скалярного произведения, нормы и расстояния между функциями, введенные в гл. 2 для функций из линеала L, расширяются в этой главе на линеал так называемых квадратично интегрируемых в области G функций.

Определение 3.1. Говорят, что вещественная функция $u(x)$ является *квадратично интегрируемой в области* G, если интегралы

$$\int_G u(x)\,dx, \qquad \int_G u^2(x)\,dx \tag{3.1}$$

являются сходящимися (т. е. если они существуют [1]) и конечны).

Замечание 3.1. Из приведенного определения видно, что любая непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$ функция является квадратично интегрируемой, поскольку оба интеграла, очевидно, являются сходящимися для непрерывной функции. Следовательно, все функции из линеала L, рассмотренного в гл. 2, квадратично интегрируемы. Однако к классу квадратично интегрируемых функций принадлежат и функции существенно более общего вида (см. также пример 3.1). Мы хотели бы обратить внимание читателя на то, что интегралы (3.1) должны рассматриваться в смысле Лебега, чтобы обеспечить справедливость некоторых получаемых позднее теоретических результатов, особенно тех, которые основаны на понятии полноты пространства L_2 (см. гл. 4). Определение интеграла по Лебегу вместе с его основными свойствами вкратце обсуждается в гл. 28. Однако для понимания материала знакомство с деталями теории Лебега на данном этапе не является необходимым. Функции, с которыми читатель имеет дело в инженерных и научных задачах, не имеющие сингулярностей «слишком высокого порядка» в том случае, когда они неограниченны (ср. пример 3.1), являются квадратично интегрируемыми в рассматриваемой области G как в смысле Лебега, так и в классическом смысле Римана. Более того, значения интегралов, так же как и основные способы их взятия, одни и те же. Однако с теоретической точки зрения появляющиеся в последующем интегралы (и в первую очередь интегралы (3.1)) должны рассматриваться как интегралы по Лебегу. Таким образом, *под словами функция, квадратично интегрируемая в данной области, всегда понимается функция, квадратично интегрируемая по Лебегу.*

Если речь идет об ограниченных функциях, то к классу квадратично интегрируемых функций принадлежат в первую очередь непрерывные и кусочно-непрерывные в G функции. Что же касается неограниченных функций, давайте рассмотрим два простых примера для случая $N=1$, т. е. для функций одной переменной.

Пример 3.1. Функция $u(x)=1/\sqrt[3]{x}$ квадратично интегрируема на интервале (0, 1), так как сходятся оба интеграла (3.1):

$$\int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}, \qquad \int_0^1 u^2\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3.$$

[1]) В смысле Лебега, см. замечание 3.1. Ср. также замечание 28.4, с. 325.

С другой стороны, функция $u(x)=1/\sqrt{x}$ не является квадратично интегрируемой на интервале (0, 1), поскольку, хотя первый интеграл (3.1) сходится, второй является расходящимся:

$$\int_0^1 u(x)\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2, \qquad \int_0^1 u^2(x)\,dx=\int_0^1 \frac{dx}{x}=+\infty.$$

Из теории интегралов по Лебегу известно следующее (см. гл. 28):

(I) Если функции $u(x)$ и $v(x)$ квадратично интегрируемы в G, то функция $a_1u(x)+a_2v(x)$, где a_1, a_2 — произвольные вещественные постоянные, также квадратично интегрируема в G.

(II) Если функции $u(x)$, $v(x)$ квадратично интегрируемы в G, то интеграл $\int\limits_G u(x)\,v(x)\,dx$ сходится и выполняются следующие правила:

$$\int_G u(x)\,v(x)\,dx=\int_G v(x)\,u(x)\,dx,$$

$$\int_G [a_1u_1(x)+a_2u_2(x)]\,v(x)\,dx=a_1\int_G u_1(x)\,v(x)\,dx+a_2\int_G u_2(x)\,v(x)\,dx.$$

Свойство (I) показывает, что множество функций, квадратично интегрируемых в рассматриваемой области G, является линеалом [1]). Свойство (II) позволяет определить скалярное произведение двух функций этого множества.

Определение 3.2. Пусть u, v — квадратично интегрируемые функции в области G. Число

$$(u,\ v)=\int_G u(x)\,v(x)\,dx \tag{3.2}$$

называется *скалярным произведением этих функций*.

Аналогично тому, как это сделано в гл. 2, определим норму и расстояние в случае квадратично интегрируемых функций.

Определение 3.3. *Нормой* функции $u(x)$, квадратично интегрируемой в области G, называется неотрицательное число

$$\|u\|=\sqrt{(u,\ u)}=\sqrt{\int_G u^2(x)\,dx}. \tag{3.3}$$

Определение 3.4. *Расстоянием* между двумя функциями $u(x)$, $v(x)$, квадратично интегрируемыми в области G, называется нор-

[1]) Проблема равенства двух элементов данного линеала более подробно будет обсуждена позднее (см. с. 28).

ма их разности

$$\rho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2 dx}. \tag{3.4}$$

Только что определенные понятия скалярного произведения, нормы и расстояния представляют собой очевидное обобщение понятий, введенных в предыдущей главе для специального класса функций, а именно для функций из линеала L. Поэтому естественно ожидать, что эти понятия будут обладать свойствами, сходными с рассмотренными в гл. 2. Эти свойства будут установлены в теореме 3.1. В частности, будет показано, что расстояние (3.4) удовлетворяет аксиомам метрики (2.20)—(2.23). Это дает нам право ввести следующее определение.

Определение 3.5. Линеал квадратично интегрируемых в G *функций с метрикой*, определенной с помощью (3.4), называется метрическим пространством $L_2(G)$.

Скалярное произведение и норма в этом пространстве заданы соотношениями (3.2) и (3.3).

В частном случае при $N = 1$, когда рассматривается интервал (a, b), вместо $L_2(G)$ пишем $L_2(a, b)$. Если из контекста ясно, какая область рассматривается, часто будем просто говорить о пространстве L_2.

Как видно из изложенного выше, пространство $L_2(G)$ является метрическим пространством (определение 2.5, с. 21), элементы которого [1]) представляют собой квадратично интегрируемые в G функции со скалярным произведением, нормой и расстоянием, определенными соответственно в (3.2), (3.3) и (3.4).

В частности, все непрерывные в замкнутой области $\overline{G}$ функции, т. е. функции из линеала L, рассмотренные в гл. 2, принадлежат пространству $L_2(G)$.

Как уже говорилось, свойства скалярного произведения, нормы и расстояния, полученные в гл. 2 для функций из L, могут быть почти без изменений перенесены на функции из пространства $L_2(G)$. Только свойства, подобные (2.12) (или (2.6) и (2.21) соответственно), нужно обсудить более подробно.

Если $u(x)$ непрерывна в $\overline{G}$, то из соотношения

$$\int_G u^2(x)\, dx = 0 \tag{3.5}$$

следует, что $u(x) \equiv 0$ в $\overline{G}$ и, таким образом, в G. Если u принадлежит только $L_2(G)$, то из (3.5) нельзя сделать вывод о том, что $u(x) \equiv 0$ всюду в G. Рассмотрим, например, $N = 1$ и $(a, b) = (0, 1)$. Функция $u_1(x)$, равная нулю на интервале $(0, 1)$, за

[1]) См., однако, определение 3.6 и предшествующий ему текст.

исключением точки $x=0.5$, для которой $u_1=1$ (рис. 4), несомненно интегрируема (с квадратом) на интервале (0, 1), и для нее справедливо (3.5). Но соотношению (3.5) удовлетворяет также, например, функция $u_2(x)$, равная нулю на (0, 1), за исключением счетного множества точек $x_1=1$, $x_2=1/2$, $x_3=1/3$, $x_4=1/4$, ... В этих точках функция может принимать произвольные конечные значения или быть неопределенной. Более того, вышеизложенное справедливо для любой функции, равной нулю на интервале (0, 1), кроме точек (лебеговой) меры нуль, в которых функция принимает произвольные конечные значения или в которых (может быть, только в некоторых из них) она не определена [1]).

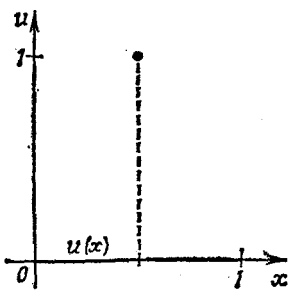

Рис. 4.

Чтобы преодолеть эту трудность, а заодно и другие, которые могут возникнуть, введем следующее соглашение.

Определение 3.6. Пусть u, v—квадратично интегрируемые в области G функции, и пусть u и v равны *почти всюду* в G. Это значит, что они отличны в точках G, образующих множество меры нуль (в некоторых из них та или другая функция могут быть не определены). Тогда будем говорить, что эти две функции *эквивалентны в* $L_2(G)$, и писать: $u=v$ в $L_2(G)$.

Функции u, v, *таким образом, считаются равными в* $L_2(G)$. *Будем также считать, что все взаимно эквивалентные функции образуют один элемент в пространстве* $L_2(G)$.

Две эквивалентные в $L_2(G)$ функции u и v характеризуются свойством

$$\int_G [u(x)-v(x)]^2\,dx=0.$$

Неэквивалентные в $L_2(G)$ функции u, v (обозначается $u\neq v$ в $L_2(G)$) характеризуются свойством

$$\int_G [u(x)-v(x)]^2\,dx\neq 0.$$

Среди всех взаимно эквивалентных в $L_2(G)$ функций только одна может быть непрерывной в G. Например, среди функций, эквивалентных нулевой функции (которая обозначается $u=0$ в

[1]) Читателя не должно смущать понятие множества меры нуль. В приложениях он встречает такие множества, состоящие, как правило, из конечного числа точек в одномерном случае или—в случаях $N=2$ или $N=3$—из очень простых множеств (гладких или кусочно-гладких кривых или поверхностей и т. п.). Подробности будут рассмотрены в гл. 28.

$L_2(G)$), непрерывна в G только функция, тождественно равная нулю в G.

Когда мы говорим, что соотношение

$$\int_G u^2(x)\,dx = 0 \tag{3.6}$$

подразумевает, что $u = 0$ в $L_2(G)$, мы имеем в виду, что $u(x)$ — функция, эквивалентная нуль-функции в пространстве $L_2(G)$ (или, короче, что $u(x)$ *эквивалентна нулю в* $L_2(G)$), т. е. $u(x) \equiv 0$ в G, кроме, может быть, точек, образующих в G множество меры нуль.

Теперь мы готовы сформулировать следующую теорему:

Теорема 3.1. *Для скалярного произведения* (3.2), *нормы* (3.3) *и расстояния* (3.4) *выполняются следующие соотношения* (a_1, a_2, a_3 — произвольные вещественные числа; u, v, z, u_1, u_2 — произвольные элементы $L_2(G)$):

$$(u, v) = (v, u), \tag{3.7}$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2, v) = a_1(u_1, v) + a_2(u_2, v), \tag{3.8}$$

$$(u, u) \geqslant 0, \tag{3.9}$$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ в } L_2(G), \tag{3.10}$$

$$\|u\| \geqslant 0, \tag{3.11}$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ в } L_2(G), \tag{3.12}$$

$$\|au\| = |a| \cdot \|u\|, \tag{3.13}$$

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|, \tag{3.14}$$

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \tag{3.15}$$

$$|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|, \tag{3.16}$$

$$\rho(u, v) \geqslant 0, \tag{3.17}$$

$$\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ в } L_2(G), \tag{3.18}$$

$$\rho(u, v) = \rho(v, u), \tag{3.19}$$

$$\rho(u, z) \leqslant \rho(u, v) + \rho(v, z). \tag{3.20}$$

Доказательство всех этих утверждений полностью аналогично соответствующим доказательствам, подробно разобранным в гл. 2 (см. также примечания на с. 17, 18), и здесь повторяться не будет. Значение же соотношений (3.10), (3.12) и (3.18) было объяснено непосредственно перед формулировкой теоремы.

Также остаются справедливыми простейшие правила обращения со скалярным произведением, выведенные в гл. 2:

$$(a_1u_1 + a_2u_2, a_3u_3 + a_4u_4) = \\ = a_1a_3(u_1, u_3) + a_2a_3(u_2, u_3) + a_1a_4(u_1, u_4) + a_2a_4(u_2, u_4). \tag{3.21}$$

Неравенство (3.14) часто упоминается в литературе как *неравенство Шварца* (или *Гёльдера*, или *Коши — Буняковского*). Раз-

вернутый вид его в случае пространства $L_2(G)$ следующий:

$$\left|\int_G u(x)\,v(x)\,dx\right| \leqslant \left(\sqrt{\int_G u^2(x)\,dx}\right)\cdot\sqrt{\int_G v^2(x)\,dx}.$$

В дальнейшем скалярное произведение, норма и расстояние между функциями из пространства $L_2(G)$ обозначаются введенными прежде символами (u, v), $\|u\|$ и $\rho(u, v)$ соответственно. Только если возможна путаница с аналогичными понятиями или символами, относящимися к другим метрическим пространствам, будем использовать более подробные обозначения: $(u, v)_{L_2(G)}$, $\|u\|_{L_2(G)}$ и $\rho(u, v)_{L_2(G)}$ соответственно.

Переходим теперь к определению другого важного понятия, а именно понятия сходимости в пространстве $L_2(G)$.

Глава 4

Сходимость в пространстве $L_2(G)$ (сходимость в среднем). Полное пространство. Сепарабельное пространство

а) Сходимость в пространстве $L_2(G)$

Как было показано в гл. 3, пространство $L_2(G)$ является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2\,dx}. \tag{4.1}$$

Следовательно, расстояние между элементами $L_2(G)$ может быть «измерено» по формуле (4.1). Это обстоятельство позволяет ввести понятие сходимости в среднем (точнее, сходимости в среднем в области G).

Определение 4.1. Говорят, что последовательность функций $u_n \in L_2(G)$ *сходится в пространстве* $L_2(G)$ *к функции* $u \in L_2(G)$ (или что эта последовательность сходится к функции u в среднем)[1]), если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0, \tag{4.2}$$

т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2\,dx} = 0. \tag{4.3}$$

Пишем $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ в $L_2(G)$ или просто $u_n \to u$ в $L_2(G)$.

[1]) В настоящей книге термин «сходимость в $L_2(G)$» используется чаще, чем «сходимость в среднем», особенно когда надо указать, в какой области исследуется сходимость в среднем — конечно, если это не ясно из текста.

Функция u называется *пределом* (или *предельной функцией*) последовательности $\{u_n\}$ в пространстве $L_2(G)$.

Определение 4.1 можно также сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Определение 4.2. Последовательность функций $u_n \in L_2(G)$ называется *сходящейся в пространстве* $L_2(G)$ *(в среднем) к функции* $u \in B_2(G)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать число n_0, такое что для любой функции u_n с индексом n, большим, чем n_0, выполняется

$$\rho(u_n, u) < \varepsilon, \quad \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Пример 4.1. На интервале $[a, b] = [-1; 1]$ определена последовательность функций

$$u_n(x) = x^{1/(2n-1)}, \tag{4.5}$$

т. е. последовательность

$$x, \sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \ldots . \tag{4.6}$$

Каждая из функций (4.5) непрерывна на интервале $[-1, 1]$. Следовательно, для любого n имеем $u_n \in L_2(-1, 1)$. Можно интуитивно предположить (рис. 5), что функция

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

(конечно, также принадлежащая $L_2(-1, 1)$) является пределом последовательности (4.5) в пространстве $L_2(-1, 1)$. Докажем, что это действительно так. В соответствии с определением 4.1 мы должны доказать, что $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0$, или, что то же самое, что $\lim_{n\to\infty} \rho^2(u_n, u) = 0$. Однако из (4.1) с учетом того, что функции $u_n(x)$ и $u(x)$ нечетные, имеем

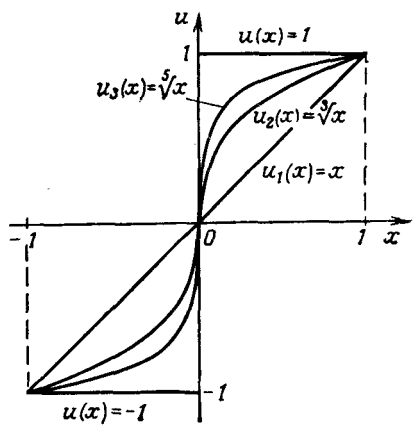

Рис. 5.

$$\rho^2(u_n, u) = \int_{-1}^{1} [x^{1/(2n-1)} - u(x)]^2 dx = 2\int_0^1 (x^{1/(2n-1)} - 1)^2 dx =$$

$$= 2\left(\frac{2n-1}{2n+1} - 2\cdot\frac{2n-1}{2n} + 1\right) = \frac{2}{n(2n+1)}.$$

Очевидно, что $\rho^2(u_n, u) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому действительно $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ в $L_2(-1, 1)$, что и требовалось доказать.

Отметим, что, хотя функции $u_n(x)$ непрерывны на интервале $[-1, 1]$, предельная функция не является непрерывной на этом интервале.

Замечание 4.1. Определение сходимости, данное в этой главе, может быть совершенно аналогично сформулировано для общего метрического пространства, т. е. для пространства с метрикой, вообще говоря, отличной от метрики пространства $L_2(G)$.

Последовательность $\{u_n\}$ элементов метрического пространства P, обладающего метрикой ρ_P, называется сходящейся в этом пространстве к элементу $u \in P$, если $\lim_{n\to\infty} \rho_P(u_n, u) = 0$. (См. определение 7.2, с. 76.)

Конечно, то же самое справедливо для некоторых других понятий и результатов, встречающихся в этой главе. На данном этапе мы определили понятие сходимости только для пространства $L_2(G)$, чтобы пояснить читателю понятие сходимости в метрическом пространстве на возможно более простом примере. Это понятие часто вызывает трудности у лиц, не являющихся профессиональными математиками.

В предыдущем примере было доказано, что функция (4.7) является пределом последовательности (4.5) в пространстве $L_2(-1, 1)$. Возникает вопрос: может ли последовательность (4.5) иметь другие пределы. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Последовательность функций $u_n \in L_2(G)$ может иметь не более одного предела в пространстве $L_2(G)$.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $u_n \in L_2(G)$ имеет в $L_2(G)$ два предела $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$, и пусть $u \neq v$ в $L_2(G)$, так что

$$\rho(u, v) = a > 0. \tag{4.8}$$

Обозначим $a/2 = \varepsilon > 0$. По определению 4.2 для этого ε существует такое n_0, что для всех $n > n_0$

$$\rho(u_n, u) < \varepsilon \text{ и одновременно } \rho(u_n, u) < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Применяя (3.20) и (3.19), с помощью (4.9) получим

$$\rho(u, v) \leqslant \rho(u, u_n) + \rho(u_n, v) < 2\varepsilon,$$

что противоречит (4.8), так как $2\varepsilon = a$.

Замечание 4.2. Теорема 4.1 утверждает (и это видно из доказательства), что последовательность $\{u_n\}$ имеет в $L_2(G)$ не более одного предела в смысле, обсужденном в предыдущей главе, т. е. в том смысле, что две функции, которые отличаются в G самое большее на множестве точек меры нуль, считаются равными

в пространстве $L_2(G)$. Очевидно, что функция

$$v(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } -1\leqslant x<0,\\ 1 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

также является пределом последовательности (4.5) по метрике $L_2(G)$. Вообще говоря, каждая функция, которая отлична от (4.7) в точках, составляющих множество меры нуль, есть предел (4.5). Однако все эти функции эквивалентны в пространстве $L_2(G)$.

Пример 4.2. Обратившись к примеру со с. 23, рассмотрим последовательность функций

$$u_n(x)=\begin{cases} 10\sin(10^{2n+1}\pi x) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 10^{-(2n+1)},\\ 0 & \text{при } 10^{-(2n+1)}\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \tag{4.10}$$

на интервале [0, 1]. Утверждение состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=0 \text{ в } L_2(0,\ 1). \tag{4.11}$$

Действительно, обозначив через $u(x)$ функцию, тождественно равную нулю на [0, 1], получим

$$\rho^2(u_n,\ u)=\int_0^1 [u_n(x)-0]^2\,dx=\int_0^1 u_n^2(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{10^{-(2n+1)}} 100\sin^2(10^{2n+1}\pi x)\,dx=50\cdot 10^{-(2n+1)},$$

откуда $\lim_{n\to\infty}\rho^2(u_n,\ u)=0$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}\rho(u_n,\ u)=0$, что и составляет утверждение (4.11).

Из примера хорошо видно (см. рис. 3 на с. 23), что даже если последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится в $L_2(G)$ (в среднем) к функции $u(x)$, то это вовсе не означает, что функции $u_n(x)$ и $u(x)$ «мало» отличаются в G при достаточно больших n. Для функции из нашего примера $\max_{x\in[0,\ 1]}|u_n(x)-u(x)|=10$ при любом n. Однако в то же время с ростом n уменьшается мера множества точек, в которых функции $u_n(x)$ и $u(x)$ имеют различные значения.

В порядке информации приведем еще одно утверждение, которое в дальнейшем использоваться не будет: если $\{u_n(x)\}$ сходится к $u(x)$ равномерно в G, то $\{u_n(x)\}$ сходится к $u(x)$ также и в пространстве $L_2(G)$, т. е. в среднем. Доказательство несложно и почти сразу же следует из определения сходимости в среднем. Однако обычная поточечная сходимость (вообще говоря, неравномерная) не означает сходимости в среднем. С другой стороны, и сходимость в среднем не означает поточечной сходимости (и тем более равномерной сходимости). См. примеры в [33].

б) Полнота

Займемся теперь более глубоким исследованием понятия сходимости и некоторых его свойств.

Из классического анализа известен признак Больцано—Коши сходимости числового ряда: последовательность $\{a_n\}$ вещественных чисел сходится в том и только том случае, если

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |a_m - a_n| = 0. \tag{4.12}$$

Соотношение (4.12) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число n_0, что если одновременно $m > n_0$, $n > n_0$, то $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Определение 4.3. Последовательность функций $u_n \in L_2(G)$ называется *фундаментальной* (или последовательностью *Коши*) в пространстве $L_2(G)$, если

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \rho(u_m, u_n) = 0. \tag{4.13}$$

Как и прежде, (4.13) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ может быть найдено такое число n_0, что если одновременно $m > n_0$, $n > n_0$, то $\rho(u_m, u_n) < \varepsilon$.

Определение фундаментальной последовательности остается тем же и в случае метрического пространства с метрикой, отличной от метрики пространства $L_2(G)$.

Определение 4.4. Последовательность u_n элементов метрического пространства P с метрикой ρ_P называется *фундаментальной* (последовательностью *Коши*) *в пространстве* P, если

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \rho_P(u_m, u_n) = 0. \tag{4.14}$$

В частном случае евклидова пространства E_1, в котором метрика задается соотношением $\rho_{E_1}(a_m, a_n) = |a_m - a_n|$ (выражающим расстояние между точками a_m и a_n по оси x), фундаментальная последовательность определяется соотношением (4.12).

В произвольном метрическом пространстве справедливо следующее утверждение (доказательство которого полностью аналогично соответствующему доказательству в классическом анализе):

Теорема 4.2. *Любая сходящаяся в метрическом пространстве* P [1]) *последовательность является фундаментальной в этом пространстве.*

Однако обратное утверждение в общем случае неверно—фундаментальная последовательность не обязательно сходится в пространстве P.

[1]) См. замечание 4.1.

Определение 4.5. Метрическое пространство P называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность является сходящейся в этом пространстве, т. е. если для любой фундаментальной последовательности $\{u_n\}$ можно найти элемент u пространства P, являющийся пределом $\{u_n\}$ в этом пространстве.

Приведенный выше признак Больцано — Коши означает полноту евклидова пространства E_1. Можно показать, что этим свойством обладает любое евклидово пространство E_N.

Следующая теорема имеет основополагающее значение для наших дальнейших исследований.

Теорема 4.3. *Пространство $L_2(G)$ является полным.*

Доказательство данного утверждения достаточно сложно и подробно рассмотренно, например, в [26]. Заметим только, что при доказательстве теоремы 4.3 существенно используется квадратичная интегрируемость по Лебегу функций, являющихся элементами $L_2(G)$.

Замечание 4.3. Не все метрические пространства являются полными. Приведем простой пример.

Пусть M представляет собой линеал элементов $L_2(G)$. Определим скалярное произведение на этом линеале так же, как оно вводится в пространстве $L_2(G)$:

$$(u, v) = \int_G u(x) v(x)\, dx, \quad u \in M, \quad v \in M.$$

С помощью этого скалярного произведения определим обычным образом норму и расстояние на M. Таким образом мы получаем определенное метрическое пространство, метрика которого совпадает с метрикой пространства $L_2(G)$. Обозначим это пространство $M_{L_2(G)}$. (В частности, если пространство $M_{L_2(G)}$ является полным, его обычно называют линейным подпространством пространства $L_2(G)$; ср. определение 5.11.)

В отличие от пространства $L_2(G)$ пространство $M_{L_2(G)}$ не обязательно является полным. Рассмотрим в качестве примера линеал M функций, непрерывных на замкнутом интервале $[-1, 1]$. Покажем, что соответствующее пространство $M_{L_2(-1, 1)}$ не является полным. Для этого достаточно найти фундаментальную в $M_{L_2(-1, 1)}$ последовательность, которая не имеет в этом пространстве предела.

Функции $u_n(x)$ из примера 4.1, несомненно, принадлежат рассматриваемому пространству, поскольку (4.5) непрерывны на интервале $[-1, 1]$. Последовательность (4.5) фундаментальна в $M_{L_2(-1, 1)}$, так как она является сходящейся (см. пример 4.1) и поэтому фундаментальной в $L_2(-1, 1)$, и пространства $L_2(-1, 1)$ и $M_{L_2(-1, 1)}$ имеют одну и ту же метрику. Тем не менее (4.5) не является сходящейся в $L_2(-1, 1)$. Предположим противное, т. е. что (4.5) сходится в этом пространстве к некоторой функции

$v \in M_{L_2(-1,\,1)}$, непрерывной в интервале $[-1, 1]$ (поскольку она принадлежит $M_{L_2(-1,\,1)}$). Мы приходим к противоречию. Действительно, последовательность (4.5) должна сходиться к функции v также и в пространстве $L_2(-1, 1)$, так как это пространство имеет ту же метрику, что и пространство $M_{L_2(-1,\,1)}$. Однако при рассмотрении примера 4.1 было показано, что (4.5) сходится в $L_2(-1, 1)$ к функции $u(x)$, определенной согласно (4.7), которая не является непрерывной на интервале $[-1, 1]$. Более того, $u(x)$, очевидно, не является эквивалентной никакой непрерывной функции в $L_2(-1, 1)$, поскольку ее нельзя сделать непрерывной на интервале $[-1, 1]$, изменив ее значения на множестве меры нуль. Следовательно, $u \neq v$ в $L_2(-1, 1)$. Из предположения, что функция $v(x)$ представляет собой предел (4.5) в $M_{L_2(-1,\,1)}$, мы, таким образом, заключаем, что (4.5) имеет в $L_2(-1, 1)$ два различных предела, что явно противоречит теореме 4.1.

Таким образом, последовательность (4.5), являющаяся фундаментальной в пространстве $M_{L_2(-1,\,1)}$, не сходится в этом пространстве ни к какому пределу. Следовательно, пространство $M_{L_2(-1,\,1)}$ не является полным (и поэтому не является линейным подпространством пространства $L_2(-1, 1)$).

Замечание 4.4. Свойство полноты имеет фундаментальное значение для многих рассуждений, проводимых в последующих главах. Пространство, не являющееся полным, может быть «пополнено» так называемыми особыми элементами так, чтобы оно стало полным. Эта процедура аналогична процедуре «пополнения» пространства рациональных чисел иррациональными числами. Однако в общем случае трудно определить характер этих особых элементов. Довольно простой и интуитивно ясный случай «пополнения» метрического пространства мы встретим в гл. 10.

в) Плотность. Сепарабельность

Читателю, несомненно, знакомо понятие окрестности точки в евклидовых пространствах E_1 (на прямой), E_2 (на плоскости) и т. д. Введение в $L_2(G)$ метрики позволяет определить окрестность также и в этом пространстве. На основе понятия окрестности можно ввести и применять некоторые часто встречающиеся понятия, аналогичные понятиям, известным из классического анализа.

Определение 4.6. Пусть $\delta > 0$. Под *δ-окрестностью* (*δ-сферой*) функции $u(x)$ в пространстве $L_2(G)$ понимается множество всех функций $v \in L_2(G)$, удовлетворяющих неравенству

$$\rho(u, v) < \delta. \tag{4.15}$$

Пример 4.3. В пространстве $L_2(0, 1)$ функции вида $v(x) = k$ **лежат в** δ-окрестности функции $u(x) \equiv 0$, если для k вы-

полнено $|k| < \delta$, так как $\rho(u, v) = \sqrt{\int_0^1 k^2\,dx} = |k| < \delta$. Однако функции (4.10) из примера 4.2 также лежат в δ-окрестности функции $u(x) \equiv 0$ при условии, что n достаточно велико, чтобы выполнялось $\sqrt{(50 \cdot 10^{-(2n+1)})} < \delta$, и т. д.

Определение 4.7. Пусть M — это множество функций из пространства $L_2(G)$. Говорят, что функция $u \in L_2(G)$ является *предельной точкой* (*точкой накопления*) множества M в $L_2(G)$, если любой произвольно малой δ-окрестности функции $u(x)$ принадлежит бесконечное число функций из M.

Пример 4.4. Пусть M — множество всех функций (4.10) ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда функция $u(x) \equiv 0$ является предельной точкой M в $L_2(0, 1)$, что следует непосредственно из определения предела и из примера 4.2 (см. также пример 4.3).

Тем же способом, который применялся в классическом анализе, может быть доказана следующая теорема.

Теорема 4.4. *Функция $u(x)$ является предельной точкой множества M в пространстве $L_2(G)$ в том и только том случае, когда существует последовательность функций $u_n \in M$ ($u_n \neq u$) в $L_2(G)$), которая сходится к функции $u(x)$ в $L_2(G)$.*

Заметим, что утверждение, приведенное в примере 4.4, следует прямо из теоремы 4.4.

Пример 4.5. Пусть L — линеал функций, непрерывных на интервале $[-1, 1]$. При этом функция (4.7) из примера 4.1 является предельной точкой L в $L_2(-1, 1)$, так как она представляет собой предел последовательности (4.5) функций из этого множества.

В соответствии с приведенным определением, предельная точка множества не обязательно является элементом этого множества. Например, она не является элементом рассматриваемого множества ни в одном из двух приведенных выше примеров.

Определение 4.8. Множество $\bar{M}$, полученное объединением множества M с его предельными точками, называется *замыканием* M в $L_2(G)$. Если $M = \bar{M}$, то M называется замкнутым в $L_2(G)$.

Следовательно, замыкание множества M получается путем «добавления» к множеству M всех предельных точек этого множества. Замкнутое множество представляет собой множество, включающее все свои предельные точки.

Пример 4.6. Линеал L всех функций, непрерывных в интервале $[-1, 1]$, не является замкнутым множеством в $L_2(-1, 1)$. Например, функция (4.7) является предельной точкой L в $L_2(-1, 1)$, но она не принадлежит этому множеству.

Определение 4.9. Множество M функций из множества $L_2(G)$ называется *плотным* в пространстве $L_2(G)$, если любая функция из $L_2(G)$ является его предельной точкой (т. е. если $\bar{M}=L_2(G)$, см. определение 4.8).

С помощью теоремы 4.4 определение 4.9 может быть сформулировано в следующей эквивалентной форме.

Определение 4.10. Множество M называется *плотным* в пространстве $L_2(G)$, если для любой функции $u\in L_2(G)$ найдется последовательность функций $u_n\in M$ ($u_n\neq u$ в $L_2(G)$), которая сходится к $u(x)$ в $L_2(G)$.

Так как по определению сходимость в $L_2(G)$ означает, что функции $u(x)$ и $u_n(x)$ произвольно близки по метрике пространства $L_2(G)$ для достаточно больших n (см. (4.2) или (4.4)), мы получаем, что M плотно в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда любая функция из $L_2(G)$ может быть аппроксимирована функциями из M с произвольной точностью по метрике $L_2(G)$. Точнее говоря, M плотно в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда для любой функции $u\in L_2(G)$ и любого $\varepsilon>0$ можно найти функцию $v\in M$, такую что

$$\|u-v\|_{L_2(G)}<\varepsilon.$$

Читателю, конечно, известна теорема Вейерштрасса. Она утверждает, что любая функция, непрерывная на замкнутом интервале $[a, b]$, может быть приближена в этом интервале с произвольной точностью полиномом, причем равномерно и, следовательно, тем более в среднем. Аналогичное утверждение справедливо (см., например, [31]) для функций из $L_2(a, b)$. Для заданной функции $u\in L_2(a, b)$ и для любого $\varepsilon>0$ можно найти полином $P(x)$, такой что $\rho_{L_2}(u, P)<\varepsilon$. Можно показать, что это утверждение остается в силе и при $N>1$, если выполняются сделанные ранее предположения, касающиеся области G (см. гл. 2; ср. также гл. 28). Другими словами, справедлива следующая теорема, которую здесь мы приводим без доказательства (см., например, [43]).

Теорема 4.5. *Множество всех полиномов плотно в* $L_2(G)$.

Ясно, что при $N>1$ необходимо рассматривать полиномы по N переменным. Так, например, в случае $N=2$ рассматриваются функции вида

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}a_{ik}x_1^i x_2^k,$$

где a_{ik} — вещественные числа (коэффициенты полинома), а p, q — неотрицательные целые числа.

Любой полином во всякой замкнутой области $\bar{G}$ является непрерывной функцией (в то время как обратное, очевидно, неверно, так как непрерывная в $\bar{G}$ функция не обязательно представляет

собой полином). Так как справедлива теорема 4.5, тем более будет справедлива

Теорема 4.6. *Линеал L всех функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$, является плотным множеством в $L_2(G)$.*

Некоторые другие важные примеры плотных множеств в $L_2(G)$ будут приведены позднее в гл. 8.

В заключение введем следующее важное понятие. Как известно, множество M называется счетным, если его элементы можно упорядочить таким образом, что они составят последовательность, т. е. если можно установить взаимно однозначное соответствие между его элементами и натуральными числами. Например, можно показать, что множество рациональных чисел счетно, в то время как множество вещественных чисел не является счетным.

Говорят, что множество M не более чем счетно, если оно либо является счетным, либо содержит конечное число элементов.

Определение 4.11. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если существует не более чем счетное множество, являющееся плотным в этом пространстве.

Можно показать (но здесь мы не будем приводить доказательства [1])), что в пространстве $L_2(G)$ таким счетным и плотным множеством является множество полиномов с рациональными коэффициентами. Поэтому справедлива

Теорема 4.7. *Пространство $L_2(G)$ сепарабельно.*

Глава 5

Ортогональные системы в $L_2(G)$

а) Линейная зависимость и независимость в $L_2(G)$

Введем сначала некоторые основные понятия и результаты, относящиеся к линейной зависимости и независимости функций. Все функции, упоминаемые в этой главе, принадлежат $L_2(G)$, и равенство между ними понимается в соответствующем смысле (т. е. $u(x)=v(x)$ в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ и $v(x)$ — функции, эквивалентные в $L_2(G)$).

---

[1]) Это утверждение вытекает из теоремы 4.5 и текста, следующего за определением 4.10.

Определение 5.1. Функция $u(x)$ называется *линейной комбинацией в* $L_2(G)$ [1]) функций

$$v_1(x), \ldots, v_r(x) \tag{5.1}$$

этого пространства, если можно представить $u(x)$ в $L_2(G)$ в виде

$$u(x) = a_1 v_1(x) + \ldots + a_r v_r(x), \tag{5.2}$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — произвольные вещественные постоянные.

Следовательно, функция $u(x)$ является линейной комбинацией функций (5.1) в $L_2(G)$, если ее можно представить в виде суммы этих функций, умноженных на некоторые постоянные.

Определение 5.2. Функции

$$u_1(x), \ldots, u_k(x), \quad u_i \in L_2(G), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{5.3}$$

называются *линейно зависимыми* в пространстве $L_2(G)$, если хотя бы одна из них может быть представлена в виде линейной комбинации остальных $k-1$ функций. Если ни одна из функций не может быть выражена в $L_2(G)$ через линейную комбинацию остальных, говорят, что функции (5.3) *линейно независимы в* $L_2(G)$.

Более кратко говорят, что система функций (5.3) линейно зависима или линейно независима в пространстве $L_2(G)$.

Следующая теорема непосредственно вытекает из определения. Она аналогична известной теореме из курса анализа.

Теорема 5.1. *Функции* (5.3) *линейно зависимы в* $L_2(G)$ *в том и только том случае, когда можно найти такие постоянные* $b_1, b_2, \ldots, b_k$, *из которых хотя бы одна отлична от нуля, для которых выполнено*

$$b_1 u_1(x) + \ldots + b_k u_k(x) = 0. \tag{5.4}$$

Функции (5.3) *линейно независимы в* $L_2(G)$ *тогда и только тогда, когда* (5.4) *выполняется лишь в случае равенства нулю всех* $b_1, \ldots, b_k$.

Напомним еще раз, что мы все время имеем в виду функции, квадратично интегрируемые в области G, и что равенства (5.2) и (5.4) рассматриваются в $L_2(G)$, т. е. они означают равенство значений функций в области G, кроме, может быть,

---

[1]) Элементы пространства $L_2(G)$ составляют линеал квадратично интегрируемых в области G функций — обозначим его через M. Равенство между элементами понимается в указанном выше смысле. В определениях линейной комбинации функций и, позднее, их линейной зависимости достаточно говорить только о линеале M. То есть можно рассматривать понятия линейной комбинации и линейной зависимости не в пространстве $L_2(G)$, а на линеале M, так как свойства пространства (метрика и т. п.) в этих определениях не использовались. Тем не менее мы предпочитаем принятую ранее терминологию, так как она позволяет проще сформулировать некоторые последующие результаты (см., например, теорему 5.2).

точек, составляющих множество меры нуль. Ясно, что пока рассматриваются только непрерывные функции, мы имеем равенства в обычном смысле, выполняющиеся везде в G (см. следующий пример; функция $u(x)$, эквивалентная нулю, всегда может рассматриваться как непрерывная, если положить $u(x) \equiv 0$ в G).

Пример 5.1. Функции

$$u_1 = \sin^2 xy, \quad u_2 = \cos^2 xy, \quad u_3 = 4$$

являются линейно зависимыми в $L_2(G)$, где G — любая область на плоскости xy. Действительно, имеем

$$4u_1 + 4u_2 - u_3 = 0.$$

Таким образом, в качестве постоянных b_1, b_2, b_3 в (5.4) можно взять 4, 4, —1.

Функции

$$u_1 = x^2, \quad u_2 = x, \quad u_3 = 1,$$

где a, b — произвольные вещественные числа, $a < b$, рассматриваемые в $L_2(a, b)$, линейно независимы в этом пространстве, поскольку равенство

$$b_1 x^2 + b_2 x + b_3 \cdot 1 = 0,$$

как известно из алгебры, может выполняться для любого x из интервала (a, b), только если $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

В общем случае, исходя только из определения 5.2 или теоремы 5.1, решить вопрос о линейной зависимости или независимости данных функций в $L_2(G)$ довольно сложно. Весьма простое условие линейной зависимости или независимости функций в пространстве $L_2(G)$ предлагается в следующей теореме.

Теорема 5.2. *Функции*

$$u_1(x), \ \ldots, \ u_k(x), \quad u_i \in L_2(G), \quad i = 1, \ \ldots, \ k, \tag{5.5}$$

являются линейно независимыми в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда так называемый определитель Грама

$$D(u_1, \ \ldots, \ u_k) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), & (u_1, u_2), & \ldots, & (u_1, u_k) \\ (u_2, u_1), & (u_2, u_2), & \ldots, & (u_2, u_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u_k, u_1), & (u_k, u_2), & \ldots, & (u_k, u_k) \end{vmatrix},$$

элементы которого представляют собой скалярные произведения функций (5.5), *равен нулю.*

Доказательство. 1. Пусть функции (5.5) линейно зависимы в $L_2(G)$. Согласно теореме 5.1, существуют постоянные b_1, b_2, $\ldots$, b_k, не все из которых равны нулю, такие что

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_k u_k = 0 \tag{5.6}$$

в $L_2(G)$. Умножим «скалярно» уравнение (5.6) на функции u_1, u_2, ..., u_k[1]).

Получим уравнения

$$\begin{aligned}
&(u_1, u_1)\, b_1 + (u_1, u_2)\, b_2 + \ldots + (u_1, u_k)\, b_k = 0,\\
&(u_2, u_1)\, b_1 + (u_2, u_2)\, b_2 + \ldots + (u_2, u_k)\, b_k = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(u_k, u_1)\, b_1 + (u_k, u_2)\, b_2 + \ldots + (u_k, u_k)\, b_k = 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Система (5.7) может рассматриваться как система k уравнений относительно k неизвестных b_1, ..., b_k. Эта система должна иметь ненулевое решение, поскольку не все числа b_1, ..., b_k равны нулю по предположению. Хорошо известно, что это возможно, только если определитель системы равен нулю. Однако определитель (5.7) представляет собой определитель Грама D. Первое утверждение теоремы 5.2, таким образом, доказано.

2. Пусть $D = 0$. Выпишем систему (5.7). Эта система имеет ненулевое решение (более того, существует бесконечное число таких решений). Выберем одно из них, обозначим его через b_1, ..., b_k, и построим функцию

$$v(x) = b_1 u_1(x) + \ldots + b_k u_k(x). \tag{5.8}$$

Мы докажем, что $(v, v) = 0$, а это означает $v = 0$ в $L_2(G)$. Таким образом будет показано (в соответствии с теоремой 5.1), что функции $u_1(x)$, ..., $u_k(x)$ линейно зависимы в $L_2(G)$, поскольку при этом в $L_2(G)$ выполняется равенство

$$0 = b_1 u_1(x) + \ldots + b_k u_k(x),$$

где хотя бы одна постоянная b_1, ..., b_k отлична от нуля.

Приступим к доказательству того, что $(v, v) = 0$. Для этого последовательно выполним «скалярное» умножение (5.8) на функции u_1, ..., u_k. Получим

$$\begin{aligned}
&(u_1, v) = b_1 (u_1, u_1) + b_2 (u_1, u_2) + \ldots + b_k (u_1, u_k),\\
&(u_2, v) = b_1 (u_2, u_1) + b_2 (u_2, u_2) + \ldots + b_k (u_2, u_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(u_k, v) = b_1 (u_k, u_1) + b_2 (u_k, u_2) + \ldots + b_k (u_k, u_k).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

В системе (5.9) все правые части равны нулю, поскольку числа b_1, b_2, ..., b_k образуют решение системы (5.7). Следовательно,

$$(u_1, v) = 0, \quad (u_2, v) = 0, \quad \ldots, \quad (u_k, v) = 0. \tag{5.10}$$

---

[1]) Умножая (5.6) на функцию $u_1(x)$, получим

$$b_1 u_1(x)\, u_1(x) + b_2 u_1(x)\, u_2(x) + \ldots + b_k u_1(x)\, u_k(x) = 0.$$

Интегрируя это уравнение по G и используя определение скалярного произведения, получим первое из уравнений (5.7). С формальной точки зрения, это уравнение получено «скалярным» умножением (5.6) на функцию u_1. Остальные уравнения системы (5.7) получены аналогичным образом.

Умножая последовательно каждое из уравнений (5.10) на числа $b_1, \ldots, b_k$ и складывая получающиеся уравнения, получаем (пользуясь свойством (3.8) скалярного произведения)

$$(b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_ku_k,\ v) = 0,$$

или, в соответствии с (5.8), $(v, v) = 0$, что и требовалось доказать.

Непосредственно из теоремы 5.2 следует

Теорема 5.3. *Функции*

$$u_1(x), \ldots, u_k(x), \quad u_i \in L_2(G), \quad i = 1, \ldots, k,$$

линейно независимы в $L_2(G)$ в том и только том случае, если их определитель Грама D отличен от нуля.

Пример 5.2. Функции $u_1 = \sin x$, $u_2 = \cos x$, $u_3 = 1$ линейно независимы в $L_2(0, \pi)$, так как

$$D = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), & (u_1, u_2), & (u_1, u_3) \\ (u_2, u_1), & (u_2, u_2), & (u_2, u_3) \\ (u_3, u_1), & (u_3, u_2), & (u_3, u_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2}, & 0, & 2 \\ 0, & \frac{\pi}{2}, & 0 \\ 2, & 0, & \pi \end{vmatrix} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \neq 0\ ^{1}).$$

б) Ортогональные и ортонормированные системы в $L_2(G)$

Определение 5.3. Две функции $u \in L_2(G)$, $v \in L_2(G)$ называются *ортогональными в пространстве $L_2(G)$*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(u, v) = 0. \tag{5.11}$$

Записываем $u \perp v$ в $L_2(G)$.

Определение 5.4. Функция $u \in L_2(G)$, норма которой равна единице

$$\|u\| = 1, \tag{5.12}$$

называется *нормированной в пространстве $L_2(G)$*.

Определение 5.5. Система (последовательность) функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \varphi_i(x) \in L_2(G) \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5.13}$$

взаимно ортогональных в пространстве $L_2(G)$, называется *ортогональной в $L_2(G)$*. Если к тому же функции (5.13) нормированы, система носит название *ортонормированной в пространстве $L_2(G)$*.

В дальнейшем главную роль будут играть именно ортонормированные системы.

---

[1]) Имеем

$$(u_1, u_1) = \int_0^{\pi} \sin x \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 5.3. Система функций

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x,\quad \ldots,\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx,\quad \ldots \qquad (5.14)$$

является ортонормированной в $L_2(0, \pi)$. Как хорошо известно, для произвольных целых чисел $j \neq k$ справедливо

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin jx \sin kx\, dx = 0,$$

$$\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k, \varphi_k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1.$$

Замечание 5.1. Говорят, что система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... *линейно независима* в $L_2(G)$, если любая система, состоящая из конечного числа этих функций, линейно независима в смысле определения 5.2.

Если из ортонормированной системы (5.13) выбрать j произвольных функций, то они будут линейно независимы в $L_2(G)$, так как из их ортонормированности следует, что соответствующий данной системе определитель Грама состоит из единиц на главной диагонали и из нулей всюду вне ее. Поэтому определитель равен единице. Следовательно, любая ортонормированная в $L_2(G)$ система линейно независима в $L_2(G)$.

Замечание 5.2. Если функция $u(x)$ есть линейная комбинация функций из ортонормированной системы (5.13),

$$u(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k \varphi_k(x),$$

то можно легко вычислить норму этой функции. Из предположения об ортонормированности

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

сразу же следует выражение для нормы рассматриваемой функции:

$$\|u\|^2 = (u, u) = \left(\sum_{k=1}^{r} a_k\varphi_k,\ \sum_{l=1}^{r} a_l\varphi_l\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} a_k a_l (\varphi_k\varphi_l) = \sum_{k=1}^{r} a_k^2. \qquad (5.15)$$

Полученный результат будет часто использоваться в дальнейшем.

Впоследствии мы рассмотрим бесконечные ряды в $L_2(G)$, т. е. ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \tag{5.16}$$

где $u_k \in L_2(G)$, $k = 1, 2, \ldots$.

В определении 4.1 было введено понятие сходимости последовательности $\{v_n(x)\}$ к функции $v(x)$ и объяснялся смысл обозначения $\lim_{n\to\infty} v_n(x) = v(x)$ в $L_2(G)$. Оно означает, что $\lim_{n\to\infty} \rho(v_n, v) = 0$ в $L_2(G)$. Что касается ряда (5.16), то, как обычно в теории рядов, вводятся *частичные суммы* $s_n(x)$:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Определение 5.6. Говорят, что ряд (5.16) *сходится в пространстве* $L_2(G)$ (или что он *сходится в среднем в области* G) и имеет сумму $s(x)$, если последовательность $\{s_n(x)\}$ его частичных сумм сходится в $L_2(G)$ к пределу $s(x)$.

Другой задачей, обсуждаемой в данной главе, является разложение произвольной функции $u \in L_2(G)$ в ряд по ортонормированной системе (5.13). Для решения этой задачи докажем следующую теорему.

Теорема 5.4. *Если система* (5.13) *ортонормирована в* $L_2(G)$, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (a_k — \textit{вещественные постоянные}) \tag{5.17}$$

сходится в пространстве $L_2(G)$ *тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \tag{5.18}$$

Доказательство. По определению ряд (5.17) сходится в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $s_n(x)$ сходится в $L_2(G)$. Так как пространство $L_2(G)$ полное, то данная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной (см. гл. 4), т. е. тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \rho(s_m, s_n) = 0. \tag{5.19}$$

То же самое верно для ряда (5.18): ряд (5.18) сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{i} a_k^2$$

фундаментальна, т. е. когда

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |\sigma_m-\sigma_n|=0.$$

Следовательно, доказательство теоремы 5.4 будет закончено, если мы покажем, что последовательность $\{s_n(x)\}$ фундаментальна в том и только том случае, когда фундаментальна последовательность $\{\sigma_n\}$. Но мы имеем (предполагая, что $m>n$, в противном случае надо поменять порядок суммирования)

$$\rho^2(s_m, s_n)=\|s_m-s_n\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\right\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\varphi_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}a_k^2$$

(см. (5.15)), так что $\rho^2(s_m, s_n)=\sigma_m-\sigma_n$. Аналогично, для $n>m$ получим $\rho^2(s_m, s_n)=\sigma_n-\sigma_m$. Следовательно, в общем случае

$$\rho^2(s_m, s_n)=|\sigma_m-\sigma_n|, \tag{5.20}$$

откуда с очевидностью следует, что $\{s_n(x)\}$ фундаментальна в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда фундаментальна $\{\sigma_n\}$, что и требовалось доказать.

Читатель должен все время помнить, что речь идет о сходимости ряда (5.17) в пространстве $L_2(G)$, т. е. сходимости в среднем, а не поточечной сходимости.

в) Ряд Фурье. Полные системы. Ортонормирование по Шмидту

Определение 5.7. Пусть заданы ортонормированная система (5.13) и функция $u\in L_2(G)$. Числа

$$\alpha_k=(u, \varphi_k)=\int_G u(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad k=1, 2, \ldots, \tag{5.21}$$

называются *коэффициентами Фурье функции* $u(x)$ *относительно системы* (5.13). Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k(x)$ называется *рядом Фурье функции* $u(x)$ *по функциям системы* (5.13).

Пример 5.4. В $L_2(0, \pi)$ коэффициенты Фурье функции $u(x)$ относительно системы (5.14) определяются интегралами

$$\alpha_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}u(x)\sin kx\,dx.$$

Соответствующий ряд Фурье есть

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sin kx,$$

где

$$\beta_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x)\sin kx\,dx.$$

Как мы увидим ниже, коэффициенты Фурье функции $u(x)$ и соответствующий ряд Фурье имеют целый ряд интересных свойств, полезных для приложений. Одним из них является тот факт, что среди всех рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\varphi_k(x)$ лучше всего аппроксимируют в среднем функцию $u(x)$.

Теорема 5.5. *Пусть система* (5.13) *ортонормированная, и пусть* $u(x)$ *— функция из* $L_2(G)$. *Пусть* n *— произвольное фиксированное целое положительное число. Введем обозначения*

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x), \tag{5.22}$$

где α_k *— коэффициенты Фурье функции* $u(x)$ *относительно системы* (5.13), *и*

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x), \tag{5.23}$$

где a_k *— произвольные вещественные числа. Тогда*

$$\rho(u_n, u) \leqslant \rho(s_n, u). \tag{5.24}$$

Неравенство в (5.24) *является строгим, если хотя бы одно из чисел* a_k *отлично от* α_k, $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. По предположению $(\varphi_l, \varphi_k) = 0$ для $i \neq k$, $(\varphi_k, \varphi_k) = \|\varphi_k\|^2 = 1$ и, кроме того, $(u, \varphi_k) = \alpha_k$. Следовательно, можно записать (см. также (5.15))

$$\begin{aligned}
\rho^2(s_n, u) = \|u - s_n\|^2 &= \left(u - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k,\ u - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) = \\
&= (u, u) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(u, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k a_l(\varphi_k, \varphi_l) = \\
&= \|u\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \\
&= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \\
&= \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha_k)^2.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Так как число $\sum_{k=1}(a_k - \alpha_k)^2$ неотрицательно (даже положительно при условии, что хотя бы одно a_k отлично от α_k), из (5.25) не-

медленно следует, что $\rho(s_n, u)$ минимально тогда и только тогда, когда $a_k=\alpha_k$ для $k=1, \ldots, n$. Таким образом, теорема доказана.

Если $a_k=\alpha_k$ для всех $k=1, \ldots, n$, то $\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha_k)^2=0$, и (5.25) означает, что

$$\rho^2(u_n, u)=\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$$

(что может быть легко проверено читателем прямым вычислением, если он представит $\rho^2(u_n, u)$ как $\|u-u_n\|^2$). Теперь, так как $\rho^2(u_n u)\geqslant 0$ для произвольного положительного целого числа n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\leqslant\|u\|^2. \tag{5.26}$$

Следовательно, все частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$ ограничены сверху величиной $\|u\|^2$.

Так как рассматриваемый ряд представляет собой ряд с неотрицательными членами, то он сходится. Одновременно, согласно (5.26), сумма ряда не превосходит $\|u\|^2$. Тем самым доказана

Теорема 5.6. *Для любой функции $u\in L_2(G)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$ из квадратов коэффициентов Фурье данной функции относительно произвольной ортонормированной системы в $L_2(G)$ сходится, причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2\leqslant\|u\|^2. \tag{5.27}$$

Соотношение (5.27) носит название неравенства Бесселя.

Из теорем 5.4 и 5.6 следует

Теорема 5.7. *Пусть* (5.13) *— ортонормированная система в $L_2(G)$ и $u\in L_2(G)$. Тогда ряд Фурье, соответствующий данной функции, сходится в пространстве $L_2(G)$.*

Здесь мы хотим еще раз напомнить читателю, что рассматривается сходимость ряда в среднем, а не поточечная сходимость.

Замечание 5.3. Из (5.25), т. е. из соотношения

$$\rho^2(s_n, u)=\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha_k)^2, \tag{5.28}$$

которое верно при любом положительном целом n, имеем также следующее. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$, частичными суммами которого являются суммы (5.23), сходится к функции $u(x)$ в $L_2(G)$. Это означает, что $\lim_{n\to\infty}\rho(s_n, u)=0$ или, согласно (5.28), что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k-\alpha_k)^2\right]=0. \tag{5.29}$$

Здесь α_k — коэффициенты Фурье функции $u(x)$ относительно системы (5.13). Согласно (5.26), разность $\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$ неотрица

тельна для всех n, так что (5.29) удовлетворяется лишь в том случае, если ни одна из сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\alpha_k)^2$ не является положительной, т. е. если $a_k=\alpha_k$ для всех k. Следовательно, справедлива

Теорема 5.8. *Пусть* (5.13) *— ортонормированная система в* $L_2(G)$. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$ *сходится в* $L_2(G)$ *к функции* $u(x)$, *то* a_k *представляют собой коэффициенты Фурье данной функции относительно системы* (5.13).

В соответствии с теоремой 5.7 ряд Фурье для произвольной функции $u\in L_2(G)$ сходится в $L_2(G)$. Однако отсюда вовсе не следует, что данный ряд сходится в $L_2(G)$ к функции $u(x)$. Рассмотрим, например, систему

$$\varphi_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x,\quad \varphi_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x,\quad \varphi_3=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 5x,$$
$$\varphi_4=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 7x\ldots, \qquad (5.30)$$

очевидно ортонормированную в $L_2(0,\pi)$. Пусть $u=\sin 2x$. Все коэффициенты Фурье $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ функции u относительно системы (5.30) равны нулю, так как данная функция ортогональна в $L_2(0,\pi)$ всем функциям системы (5.30). Ясно, что соответствующий ряд Фурье $0\cdot\sin x+0\cdot\sin 3x+0\cdot\sin 5x+\ldots$ сходится по теореме 5.7. Однако он сходится не к функции $u=\sin 2x$, а к функции $u=0$ в $L_2(0,\pi)$.

Это было бы не так, если бы система (5.30) включала также функцию $\sqrt{2/\pi}\sin 2x$. Таким образом, в системе «чего-то не хватает», система (5.30) «не полна».

Определение 5.8. Ортонормированная система (5.13) называется *полной в пространстве* $L_2(G)$, если для любой функции $u\in L_2(G)$ соответствующий ряд Фурье сходится в среднем к этой функции.

Легко найти условие полноты данной ортонормированной системы в $L_2(G)$.

Последовательность частичных сумм (5.22) ряда Фурье функции $u(x)$ сходится, по определению 5.6, к функции $u(x)$ в $L_2(G)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty}\rho(u_n, u)=0$. Принимая во внимание соотношение $\rho^2(u_n, u)=\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2$ (с. 48), данное условие можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\right)=0,$$

или, иначе,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2=\|u\|^2. \qquad (5.31)$$

Соотношение (5.31) является необходимым и достаточным условием сходимости ряда Фурье функции $u(x)$ к этой функции в $L_2(G)$. Оно носит название *равенства Парсеваля* или *уравнения полноты*.

Для полноты данной системы можно привести и другой простой критерий.

Определение 5.9. Говорят, что ортонормированная система (5.13) *замкнута в* $L_2(G)$, если не существует функции $v \in L_2(G)$, ортогональной всем функциям данной системы, за исключением функции, равной нулю в $L_2(G)$ (т. е. функции, равной нулю почти всюду в области G).

Теорема 5.9. *Ортонормированная система полна в* $L_2(G)$ *в том и только том случае, если она замкнута в* $L_2(G)$.

Доказательство. 1. Пусть система (5.13) полна. Это значит, что ряд Фурье, соответствующий произвольной функции из $L_2(G)$, сходится в среднем к этой функции. Требуется доказать, что система (5.13) замкнута, т. е. что не существует функции $u \neq 0$ в $L_2(G)$, ортогональной всем функциям системы (5.13). Проведем доказательство от противного. Пусть существует функция $u \neq 0$ в $L_2(G)$, ортогональная всем функциям системы (5.13). Но тогда все ее коэффициенты Фурье равны нулю. Следовательно, ряд Фурье для u сходится в $L_2(G)$ к функции $v = 0$, а не к функции $u \neq 0$, что противоречит предположению о полноте (5.13). Следовательно, если система (5.13) полна, она также и замкнута.

2. Пусть система (5.13) замкнута. Значит, в $L_2(G)$ не существует функции, ортогональной всем функциям (5.13), за исключением $u = 0$. Требуется доказать, что (5.13) полна, т. е. что ряд Фурье, соответствующий произвольной функции из $L_2(G)$, сходится в среднем к этой функции. Снова проведем доказательство от противного. Пусть $v \in L_2(G)$ и ее ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x)$ сходится [1]) к функции $w(x) \neq v(x)$ в $L_2(G)$. Из теоремы 5.8 следует, что α_k также являются коэффициентами Фурье функции $w(x)$. Но тогда все коэффициенты Фурье $z(x) = v(x) - w(x)$ равны нулю. Следовательно, $z(x)$ ортогональна всем функциям системы (5.13), причем $z \neq 0$ в $L_2(G)$, так как $v(x) \neq w(x)$ в $L_2(G)$. Это противоречит предположению о замкнутости системы (5.13). Следовательно, если система (5.13) замкнута, она также является полной, что и требовалось доказать.

Пример 5.5. То, что система (5.30), как мы уже знаем, не полна в $L_2(0, \pi)$, оказывается прямым следствием теоремы 5.9, так как функция $u(x) = \sin 2x$ ортогональна в $L_2(0, \pi)$ всем функциям (5.30), и в то же время не является нулевой функцией.

---

[1]) Согласно теореме 5.7, ряд действительно сходится в $L_2(G)$.

В общем случае оказывается далеко не просто решить, является ли данная ортогональная система полной или нет. Однако можно показать (см., например, [31], а также см. гл. 20 и 39 настоящей книги), что (5.14) является полной ортонормированной системой в пространстве $L_2(0, \pi)$, или, с большей общностью, что

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{5.32}$$

представляет собой полную ортонормированную систему в $L_2(a, b)$. Аналогичные утверждения имеют место в некоторых N-мерных областях ($N > 1$). Например, если G — прямоугольник $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$, то система функций

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b}, \quad m=1, 2, \ldots, \ n=1, 2, \ldots, \tag{5.33}$$

является полной ортонормированной системой в $L_2(G)$.

Всякий раз, когда (5.13) является полной ортонормированной системой в $L_2(G)$, функция $u \in L_2(G)$ может быть выражена в соответствии с предшествующим текстом с помощью ряда Фурье

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(x), \quad \alpha_k = (u, \varphi_k), \quad k=1, 2, \ldots . \tag{5.34}$$

Поэтому полная ортонормированная система в $L_2(G)$ называется ортонормированным базисом в $L_2(G)$. Для более общего случая введем следующее

Определение 5.10. Система (последовательность функций)

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{5.35}$$

из $L_2(G)$, которая может быть неортогональной и ненормированной, называется *полной* в $L_2(G)$, если множество всех линейных комбинаций элементов данной системы плотно в $L_2(G)$, т. е. если для любой функции $u \in L_2(G)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти положительное целое число n и числа $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$, такие что $\rho(u, \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k) < \varepsilon$. Если, кроме того, система (5.35) линейно независима (замечание 5.1) в $L_2(G)$, говорят, что она образует *базис* в $L_2(G)$.

Замечание 5.4. Таким образом, под базисом в пространстве $L_2(G)$ понимается *любая линейно независимая последовательность* элементов $L_2(G)$, полная в этом пространстве. Заметим, что в литературе можно встретить другие определения понятия базиса. В частности, вводится важное понятие так называемого базиса Шаудера: говорят, что последовательность (5.35) образует *базис Шаудера* (или *базис в смысле Шаудера*) в $L_2(G)$, если любой эле-

мент $u \in L_2(G)$ можно представить в этом пространстве в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x) \tag{5.36}$$

единственным образом.

Ясно, что если (5.35) является базисом Шаудера в $L_2(G)$, то она также является в $L_2(G)$ базисом в смысле определения 5.10 (так как единственность разложения означает линейную независимость системы (5.35)). Однако базис в смысле определения 5.10 необязательно является базисом Шаудера. Таким образом, базис, вводимый по нашему определению, является «слабым» базисом (требования, налагаемые на систему (5.35), слабее, чем в определении Шаудера). Поэтому и было выбрано это определение: мы увидим, что свойства базиса Шаудера не используются ни в теории, ни в приложениях, которые мы рассмотрим. Свойства базиса в смысле определения 5.10, а именно его полнота и линейная независимость его элементов, окажутся вполне достаточными для наших целей.

Поэтому под базисом мы всегда будем понимать базис в смысле определения 5.10.

Замечание 5.5. Если система (5.35) ортонормирована (и, следовательно, также линейно независима), то понятие полноты в смысле определения 5.8 совпадает с понятием полноты в смысле определения 5.10. Действительно, пусть система (5.35) полна в смысле определения 5.8. Это значит, что любая функция $u \in L_2(G)$ может быть представлена (единственным образом, согласно теореме 5.8) в $L_2(G)$ в виде суммы соответствующего ряда Фурье. Тогда система (5.35) образует базис Шаудера и в то же время базис по определению 5.10. Следовательно, она является полной в смысле определения 5.10. С другой стороны, если (5.35) полна в смысле определения 5.10, то любая функция $u \in L_2(G)$ может быть аппроксимирована с произвольной точностью в $L_2(G)$ соответствующей линейной комбинацией $\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k(x)$ элементов этой системы. По теореме 5.5 это также можно сделать с помощью линейной комбинации $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x)$, где α_k — коэффициенты Фурье функции $u(x)$ относительно системы (5.35). Следовательно, ряд Фурье любой функции $u \in L_2(G)$ сходится в $L_2(G)$ к этой функции, что означает полноту системы (5.35) в смысле определения 5.8.

В то же время видно, что если система (5.35) ортонормирована в $L_2(G)$, то понятие базиса Шаудера совпадает с понятием, введенным определением 5.10. Как уже упоминалось, в этом случае говорят об ортонормированном базисе в $L_2(G)$.

Можно показать, что примером последовательности, образующей базис в $L_2(a, b)$, но не ортонормированной (даже не ортогональной), является последовательность функций

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots . \tag{5.37}$$

Аналогично, соответствующая последовательность полиномов образует неортонормированный базис в пространстве $L_2(G)$. Например, при $N=2$ имеем систему функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ \ldots\ . \tag{5.38}$$

Замечание 5.6. Из полной системы (5.35), образованной функциями, которые не являются ни ортогональными, ни ортонормированными, можно получить ортонормированный базис посредством так называемой *ортогонализации Шмидта*, или, точнее, *ортонормирования по Шмидту*.

Пусть в $L_2(G)$ задана полная система (5.35). Если какая-нибудь из функций (5.35) является линейной комбинацией остальных, то ее можно исключить из системы без нарушения полноты последней. Поэтому можно предположить, что (5.35) образует базис в $L_2(G)$. В частности, ни одна из функций этой системы не является нулевой, что означает наличие положительной нормы у всех этих функций.

Ортонормированный базис можно построить из рассматриваемой системы следующим образом.

Сначала мы положим

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|}.$$

Ясно, что

$$\|\varphi_1\| = \left\| \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|} \right\| = \frac{\|\psi_1\|}{\|\psi_1\|} = 1, \tag{5.39}$$

так что функция $\varphi_1(x)$ нормирована. Далее положим

$$g_2(x) = \psi_2(x) + a\varphi_1(x) \tag{5.40}$$

и определим постоянную a из условия ортогональности функций φ_1 и g_2, т. е. из условия

$$(\varphi_1,\ g_2) = 0. \tag{5.41}$$

Согласно (5.40), получаем $(\varphi_1, \psi_2) + a(\varphi_1, \varphi_1) = 0$.
С учетом (5.39) это дает $a = -(\varphi_1, \psi_2)$.

Заметим, что $\|g_2\| \neq 0$. Действительно, из $g_2 = 0$ в $L_2(G)$ следовало бы, согласно (5.40), что

$$0 = \psi_2(x) + \frac{a}{\|\psi_1\|}\psi_1(x).$$

Однако это означало бы, что функции ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы в $L_2(G)$, что противоречило бы предположению о том, что (5.35) образует базис в $L_2(G)$. Следовательно, можно положить

$$\varphi_2(x) = \frac{g_2(x)}{\|g_2\|}.$$

Функция $\varphi_2(x)$ нормирована, и вследствие (5.41) она ортогональна функции $\varphi_1(x)$ в $L_2(G)$.

Далее положим

$$g_3(x) = \psi_3(x) + b\varphi_1(x) + c\varphi_2(x) \tag{5.42}$$

и определим постоянные b и c так, что

$$(\varphi_1, g_3) = 0, \quad (\varphi_2, g_3) = 0. \tag{5.43}$$

Таким образом, b и c должны определяться из уравнений

$$(\varphi_1, \psi_3) + b(\varphi_1, \varphi_1) + c(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \tag{5.44}$$

$$(\varphi_2, \psi_3) + b(\varphi_2, \varphi_1) + c(\varphi_2, \varphi_2) = 0. \tag{5.45}$$

Так как $(\varphi_1, \varphi_1) = 1$, $(\varphi_2, \varphi_2) = 1$ и $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = 0$, то из (5.44) следует, что $b = -(\varphi_1, \psi_3)$, а из (5.45) — что $c = -(\varphi_2, \psi_3)$. Аналогично тому, как это делалось выше, можно показать, что $\|g_3\| \neq 0$. Таким образом, можно положить

$$\varphi_3(x) = \frac{g_3(x)}{\|g_3\|}.$$

Функция $\varphi_3(x)$ нормирована и, согласно (5.43), ортогональна функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Аналогичным образом мы продолжаем до тех пор, пока не получим ортонормированную систему

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots. \tag{5.46}$$

Можно легко проверить, что система (5.46) образует в $L_2(G)$ ортонормированный базис: ортонормированность системы вытекает из способа ее построения. Остается убедиться в полноте системы. Однако из процесса ортонормирования видно, что n-й член (5.46) есть линейная комбинация первых n членов (5.35), и наоборот. Следовательно, если любую функцию $u \in L_2(G)$ можно аппроксимировать с произвольной точностью в $L_2(G)$ с помощью соответствующей линейной комбинации функций системы (5.35), то это также можно сделать с помощью функций системы (5.46). Отсюда следует (см. замечание 5.5), что система (5.46) полна в $L_2(G)$.

Следовательно, в результате описанного процесса ортонормирования действительно получается ортонормированный базис в $L_2(G)$.

Пример 5.6. Мы советуем читателю применить только что описанный процесс ортонормирования к базису (5.37) для случая интервала $(-1, 1)$. В $L_2(-1, 1)$ получается полная ортонормированная система полиномов

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \ \ldots,$$

отличающихся от полиномов Лежандра только численными множителями.

г) Разложение $L_2(G)$ на ортогональные подпространства

Понятие линейного подпространства уже упоминалось в замечании 4.3. Пусть M — линеал элементов $L_2(G)$. Введем на M скалярное произведение и соответственно также метрику пространства $L_2(G)$. В результате M становится метрическим пространством. Это пространство будет обозначаться $M_{L_2(G)}$ или просто M.

Определение 5.11. Если пространство M является полным, то оно называется *линейным подпространством* (или, короче, *подпространством*) *пространства* $L_2(G)$.

Пример 5.7. Рассмотрим в пространстве $L_2(0, 1)$ множество M всех функций, постоянных в интервале $(0, 1)$. Очевидно, что M является линеалом, так как линейная комбинация постоянных функций есть снова постоянная функция. Обозначим тем же символом M соответствующее метрическое пространство с метрикой пространства $L_2(0, 1)$. Утверждение состоит в том, что пространство M полное. В соответствии с определением мы должны доказать, что любая фундаментальная последовательность сходится в M к некоторому пределу, т. е. что в M существует элемент, являющийся пределом данной последовательности в M. Пусть

$$v_1(x) \equiv k_1, \quad v_2(x) \equiv k_2, \quad \ldots, \quad v_n(x) \equiv k_n, \quad \ldots \tag{5.47}$$

является фундаментальной последовательностью функций в M, где $k_1, k_2, \ldots$ — вещественные постоянные. Имеем

$$\rho(v_m, v_n) = \sqrt{\int_0^1 (k_m - k_n)^2\, dx} = |k_m - k_n| = \rho_{E_1}(k_m, k_n).$$

Следовательно, (5.47) является фундаментальной последовательностью в пространстве M в том и только том случае, когда $\{k_n\}$ является фундаментальной последовательностью в евклидовом пространстве E_1 (где расстояние между элементами $\rho_{E_1}(a, b)$ определяется, как известно, числом $|a-b|$). Однако в соответствии с признаком Больцано—Коши фундаментальная последовательность $\{k_n\}$ имеет предел в E_1. Обозначим этот предел k. Отсюда немедленно следует, что последовательность (5.47) имеет предел в M, а именно функцию $v(x) \equiv k$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \rho(v, v_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_0^1 (k - k_n)^2\, dx} = \lim_{n\to\infty} |k - k_n| = 0.$$

Следовательно, любая фундаментальная последовательность имеет предел в M. Пространство M полное, и поэтому оно является линейным подпространством пространства $L_2(0, 1)$.

Пример 5.8. Пусть $u \neq 0$ есть произвольный элемент $L_2(G)$. Обозначим через M линеал функций вида $au(x)$, где a — произ-

вольное вещественное число. Из теоремы Больцано — Коши с помощью простых рассуждений можно заключить, что если в M введена метрика пространства $L_2(G)$, то полученное пространство является полным. Следовательно, M — линейное подпространство пространства $L_2(G)$.

То же самое справедливо для пространства N, элементами которого являются всевозможные линейные комбинации конечного числа функций $u_1 \in L_2(G), \ldots, u_n \in L_2(G)$.

Пример 5.9. Рассмотрим линеал L функций, непрерывных на замкнутом интервале $[-1, 1]$. Обозначим через $M_{L_2(-1,1)}$ метрическое пространство, получаемое при введении в L метрики пространства $L_2(-1, 1)$. Пространство $M_{L_2(-1,1)}$ не является линейным подпространством $L_2(-1, 1)$, так как оно не полно, что показано в замечании 4.3.

Для полноты изложения мы приведем также следующую теорему, хотя она и не будет использоваться в дальнейшем (по поводу обозначений см. текст, предшествующий определению 5.11).

Теорема 5.10. *Пространство $M_{L_2(G)}$ является линейным подпространством пространства $L_2(G)$ в том и только том случае, если линеал M является замкнутым множеством в $L_2(G)$.*

Доказательство этой теоремы довольно просто, и мы предоставляем его читателю в качестве хорошего упражнения по ознакомлению с вводимыми выше понятиями.

Рассмотрим теперь произвольное фиксированное линейное подпространство пространства $L_2(G)$ и обозначим его через N. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 5.11. *Пусть $u(x)$ — произвольная функция из пространства $L_2(G)$. Тогда $u(x)$ может быть единственным образом представлена в виде суммы*

$$u(x) = v(x) + w(x), \tag{5.48}$$

где $v \in N$, а функция $w(x)$ ортогональна любой функции из N.

Функция $v(x)$ называется *ортогональной проекцией функции $u(x)$ на подпространство N*. То обстоятельство, что $w(x)$ ортогональна всем функциям из N, обозначается символом $w \perp N$. Говорят, что функция $w(x)$ *ортогональна подпространству N*.

Доказательство теоремы 5.11 можно найти, например, в [26]. Оно состоит в отыскании такой функции $v \in N$, для которой расстояние $\rho(u, z)$ между функцией $u(x)$ и всеми функциями $z(x)$, принадлежащими N, минимально. В доказательстве существенным образом используется полнота пространств $L_2(G)$ и N.

Пример 5.10. В пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим линейное подпространство M, обсужденное в примере 5.7. Это подпростран-

ство функций, постоянных на интервале [0, 1]. Представим функцию

$$u(x)=x^2, \quad x\in[0,\ 1] \tag{5.49}$$

в виде суммы (5.48). Функция $v(x)$ равна постоянной (пока неизвестной); обозначим ее через a. Следовательно, разложение (5.48) имеет вид $x^2=a+(x^2-a)$. Постоянная a определяется из условия ортогональности в $L_2(0,\ 1)$ функции $w(x)$, т. е. функции x^2-a к подпространству M, т. е. ко всем функциям вида $z(x)=k$, где k — постоянная. Это условие ортогональности означает

$$(z,\ w)=\int_0^1 k\,(x^2-a)\,dx=0,$$

откуда $k(1/3-a)=0$. Из произвольности k следует, что $a=1/3$. Таким образом, проекцией (5.49) на M является функция $v(x)=1/3$. В то же время $x^2-1/3\perp M$. Можно показать, что множество K всех функций, ортогональных данному подпространству N (точнее, пространство K этих функций с метрикой $L_2(G)$), снова является линейным подпространством $L_2(G)$. Говорят, что пространство $L_2(G)$ является *ортогональной суммой* (ортогональных) *подпространств* N *и* K, и пишут

$$L_2(G)=N\oplus K. \tag{5.50}$$

Значение приведенного обозначения объясняется теоремой 5.11: любая функция $u\in L_2(G)$ может быть единственным образом представлена в виде суммы двух функций $v(x)\in N$ и $w(x)\in K$ (где $v\perp K$, а $w\perp N$).

Подпространство K называется *ортогональным дополнением подпространства* N в $L_2(G)$. Записывается $K=L_2(G)\ominus N$.

Замечание 5.7. Теорема 5.11 имеет простую геометрическую интерпретацию: рассмотрим трехмерное евклидово пространство E_3 и в этом пространстве плоскость ρ, проходящую через начало координат. Тогда произвольный радиус-вектор $\mathbf{r}$ из E_3 может быть единственным образом разложен на два ортогональных вектора $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, где $\mathbf{r}_1$ представляет собой ортогональную проекцию вектора $\mathbf{r}$ на плоскость ρ, в то время как $\mathbf{r}_2$ лежит на прямой p, проходящей через начало координат и перпендикулярной ρ. Следовательно, подпространствам N и K из теоремы 5.11 в нашем случае соответствуют множества векторов, лежащих в плоскости ρ и на прямой p.

д) Некоторые свойства скалярного произведения

В завершение гл. 5 сформулируем некоторые дополнительные свойства скалярного произведения, которые будут полезны в дальнейшем.

Теорема 5.12. *Пусть последовательности* $\{u_n(x)\}$ *и* $\{v_n(x)\}$ *сходятся в пространстве* $L_2(G)$ *соответственно к функциям* $u(x)$

и $v(x)$. Тогда последовательность скалярных произведений (u_n, v_n) сходится к числу (u, v).

В кратких обозначениях:

$$u_n \to u,\ v_n \to v \text{ в } L_2(G) \Rightarrow (u_n, v_n) \to (u, v). \tag{5.51}$$

Доказательство. Мы должны доказать, что $\lim_{n\to\infty}(u_n, v_n) = (u, v)$, т. е. что $\lim_{n\to\infty}[(u_n, v_n)-(u, v)] = 0$, или, эквивалентно, что

$$\lim_{n\to\infty} |(u_n, v_n)-(u, v)| = 0. \tag{5.52}$$

По предположению $u_n \to u$, $v_n \to v$ в $L_2(G)$ или

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n-u\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n-v\| = 0. \tag{5.53}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |(u_n, v_n)-(u, v)| &= |(u_n-u, v_n-v)+(u, v_n-v)+(v, u_n-u)| \leqslant \\ &\leqslant |(u_n-u, v_n-v)|+|(u, v_n-v)|+|(v, u_n-u)| \leqslant \\ &\leqslant \|u_n-u\|\|v_n-v\|+\|u\|\|v_n-v\|+\|v\|\|u_n-u\| \end{aligned}$$

(согласно неравенству Шварца (3.14). Из последнего неравенства и из (5.53) мы немедленно получаем (5.52).

Теорема 5.12 имеет несколько простых следствий.

Теорема 5.13. (Используются только краткие обозначения.) *Если $u_n \to u$ в $L_2(G)$ и $v \in L_2(G)$, то*

$$(u_n, v) \to (u, v). \tag{5.54}$$

Теорема доказывается просто: достаточно положить в (5.51) $v_n = v$ для любого n.

Теорема 5.14. *Если $u_n \to u$ в $L_2(G)$, то*

$$\|u_n\| \to \|u\|. \tag{5.55}$$

Доказательство. Достаточно положить в (5.51) $v_n = u_n$ и $v = u$. Получим $\|u_n\|^2 \to \|u\|^2$, что означает (5.55).

Теорема 5.15. *Пусть M — плотное множество в $L_2(G)$, и пусть $u(x)$ ортогональна всем функциям из M. Тогда $u = 0$ в $L_2(G)$.*

Доказательство. По предположению M плотно в $L_2(G)$. Следовательно, можно найти такую последовательность функций $u_n(x) \in M$, что $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ в $L_2(G)$. Однако в соответствии с предположением

$$(u_n, u) = 0 \tag{5.56}$$

для любой функции $u_n(x)$ из этой последовательности. Полагая $v(x) = u(x)$, с помощью (5.54) получим

$\lim_{n\to\infty}(u_n, u) = (u, u) = 0$ (вследствие (5.56)), откуда $u = 0$ в $L_2(G)$.

Теорема 5.15 окажется впоследствии очень полезной.

Глава 6

Гильбертово пространство

Приступим теперь к определению гильбертова пространства, примером которого, как будет показано, служит уже известное пространство $L_2(G)$ функций, квадратично интегрируемых в области G с метрикой, определенной в гл. 3. Мы могли бы исходить из аксиом гильбертова пространства и из исследования его свойств без первоначального знакомства с $L_2(G)$. Однако был выбран другой подход, который, по нашему мнению, более предпочтителен для читателей, не являющихся профессиональными математиками. Понятия, введенные в предыдущих главах, существенно более наглядны в пространстве $L_2(G)$, чем в абстрактном гильбертовом пространстве. В то же время их можно ввести в общем случае почти полностью аналогично. Таким образом, гл. 6 содержит не только обобщение ранее введенных понятий и полученных результатов, но и в определенном смысле обзор или повторение вышеизложенного.

а) Предгильбертово пространство. Гильбертово пространство

Рассмотрим множество M, элементы которого могут иметь самый общий характер. Множество M может состоять, например, из функций, определенных в области G, как это было в случае, обсужденном в предыдущих главах. Однако M может быть и множеством всех n-мерных векторов или множеством числовых последовательностей, или множеством последовательностей функций и т. д.

Определение 6.1. Говорят, что M — *линеал* (точнее, *линеал над множеством вещественных чисел*) или *линейное пространство*, или *векторное пространство*, или *линейная система*, если оно обладает следующими свойствами:

1. Для произвольных элементов u, v из M определена сумма $u+v$, и для любого элемента $u \in M$ и любого вещественного числа a определено произведение au. Более того, как $u+v$, так и au являются элементами M [1]).

2. Для операций сложения и умножения, введенных в свойстве 1, справедливы следующие аксиомы (аналогичные известным правилам векторной алгебры, что объясняет также применение

---

[1]) Легко видеть, что отсюда немедленно следует, что любая линейная комбинация

$$a_1u_1+\ldots+a_nu_n \tag{6.1}$$

элементов $u_1, \ldots u_n$ из M принадлежит M, где $a_1, \ldots, a_n$ — вещественные числа.

термина «векторное пространство»):

$$u+v=v+u, \qquad u+(v+z)=(u+v)+z,$$
$$a(u+v)=au+av, \qquad (a+b)u=au+bu,$$
$$a(bu)=(ab)u, \qquad 1\cdot u=u.$$

3. Существует элемент $O\in M$, такой что $u+O=u$ для любого $u\in M$. Элемент O называется *нулевым элементом линеала* M.

4. Для любого $u\in M$ найдется $v\in M$, такой что $u+v=O$. Элемент v называется *обратным* к u *элементом*.

Из этих аксиом вытекают некоторые следствия и «правила», подобные известным правилам в алгебре. Мы не будем здесь вдаваться в подробности. Заметим только, например, что элементы O и v из аксиом 3 и 4 определяются единственным образом, что $0\cdot u=O$ справедливо для любого $u\in M$ и т. д.

Нулевой элемент линеала M часто обозначают просто символом 0, если нет опасности, что это будет неправильно понято (т. е. его перепутают с числом нуль). Подробнее пишут $u=0$ в M.

Классическим примером линеала является множество вещественных n-мерных векторов $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_n)$ с обычными определениями суммы двух векторов $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$ и произведения вектора на число $c\mathbf{u}=(cu_1, \ldots, cu_n)$. Нулевой вектор $o=(0, \ldots, 0)$ является нулевым элементом этого линеала. Фактически свойства этого множества послужили моделью для общего определения понятия линеала.

В качестве другого простого примера линеала можно упомянуть множество L всех вещественных функций, непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$, с обычными определениями суммы двух функций и произведения функции на вещественное число. В этом случае запись $u=0$ в L означает, что $u(x)\equiv 0$ в $\bar{G}$. Пример множества функций, не являющегося линеалом, приведен в примере 2.2.

Замечание 6.1. Для наших целей достаточно построить теорию «вещественного» гильбертова пространства, поэтому постоянные $a_1, \ldots, a_n$ в (6.1) считаются вещественными (см. примечание выше). Более общий случай вкратце обсуждается в замечании 6.11.

Определение 6.2. Говорят, что на линеале M определено *скалярное произведение*, если каждой паре u, v элементов этого множества ставится в соответствие вещественное число

$$(u, v), \tag{6.2}$$

обладающее следующими свойствами (u, v, u_1, v_1 — произвольные элементы M, a_1, a_2 — произвольные вещественные числа):

$$(u, v)=(v, u), \tag{6.3}$$
$$(a_1u_1+a_2u_2, v)=a_1(u_1, v)+a_2(u_2, v), \tag{6.4}$$
$$(u, u)\geqslant 0, \tag{6.5}$$
$$(u, u)=0 \Leftrightarrow u=0 \text{ в } M. \tag{6.6}$$

Замечание 6.2. Здесь используется то же обозначение (6.2) скалярного произведения, что и для скалярного произведения функций в пространстве $L_2(G)$. Мы уже отмечали в конце гл. 3, что там, где возникает опасность путаницы со скалярным произведением в других пространствах, скалярное произведение в $L_2(G)$ будет обозначаться через $(u, v)_{L_2(G)}$. Точно так же всегда, когда в дальнейшем мы будем встречаться со скалярным произведением в различных множествах, то, какое именно скалярное произведение имеется в виду, будет обозначаться соответствующим индексом, если только это не ясно из контекста. Это касается также понятий нормы и расстояния между элементами.

Как классический пример скалярного произведения упомянем скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n \tag{6.7}$$

двух n-мерных вещественных векторов $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v}=(v_1, \ldots, v_n)$, определенное на линейном пространстве таких векторов, рассмотренном выше. Подобно тому как свойства вышеупомянутого линейного пространства послужили моделью для общего определения линеала, так и свойства произведения (6.7) послужили моделью для общего определения скалярного произведения.

Приведем еще несколько примеров.

Пример 6.1. Рассмотрим линеал M, элементами которого являются функции, квадратично интегрируемые в области G, и в котором две функции, равные почти всюду в G, считаются тождественными. Соотношение

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx \tag{6.8}$$

определяет скалярное произведение на M, так как (6.8) обладает всеми свойствами (6.3)—(6.6) скалярного произведения, как это было показано в гл. 3 (теорема 3.1; доказательства были частично выполнены уже в гл. 2).

Пример 6.2. Пусть линеал M определен как множество всех векторных функций вида $\mathbf{u}(x) = u_1(x)\,\mathbf{i} + u_2(x)\,\mathbf{j}$, координаты которых $u_1(x)$, $u_2(x)$ — квадратично интегрируемые в области G функции. Для произвольного вещественного числа a и произвольных элементов $\mathbf{u}(x) = u_1(x)\,\mathbf{i} + u_2(x)\,\mathbf{j}$, $\mathbf{v}(x) = v_1(x)\,\mathbf{i} + v_2(x)\,\mathbf{j}$ из M определим $\mathbf{u}(x) + \mathbf{v}(x) = [u_1(x) + v_1(x)]\,\mathbf{i} + [u_2(x) + v_2(x)]\,\mathbf{j}$, $a\mathbf{u}(x) = au_1(x)\,\mathbf{i} + au_2(x)\,\mathbf{j}$. Читатель может легко проверить, что M действительно линеал. Нулевым элементом этого линеала является функция, обе координаты которой равны нулю в $L_2(G)$. Скалярное произведение на M определяется согласно соотношению $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$, где (u_k, v_k), $k=1, 2$, являются скалярными произведениями (6.8). Действительно, легко видеть, что свойства (6.3) и (6.4) выполняются. Далее, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2)$, откуда немедленно следует, что $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant 0$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ при $\mathbf{u} = 0$ в M.

Далее, мы имеем $(u_1, u_1) \geqslant 0$, $(u_2, u_2) \geqslant 0$. Из соотношения $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) = 0$ немедленно следует $(u_1, u_1) = 0$ и $(u_2, u_2) = 0$, откуда $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$ в $L_2(G)$, так что $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = 0$ в M. Это доказывает второе утверждение в (6.6).

Совершенно аналогичным образом скалярное произведение может быть введено на линеале векторных функций, имеющих больше двух компонент.

Пример 6.3. Рассмотрим множество функций, непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$, для которых $|u(x)| \leqslant 10$ в $\bar{G}$. В этом случае невозможно определить скалярное произведение со свойствами (6.3)—(6.6), так как рассматриваемое множество функций не является линеалом. (Какая из аксиом (6.3)—(6.6) скалярного произведения не будет выполняться?)

Пример 6.4. Рассмотрим линеал M, элементами которого являются функции, непрерывные со своими первыми производными в замкнутом интервале $[0, 1]$, с обычными определениями сложения функций и умножения функции на вещественное число и с нулевым элементом $u(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Покажем, что соотношение

$$(u, v) = \int_0^1 u(x) v(x)\, dx + \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx \tag{6.9}$$

определяет скалярное произведение на этом линеале. Очевидно, свойства (6.3) и (6.4) выполняются. Далее,

$$(u, u) = \int_0^1 u^2(x)\, dx + \int_0^1 u'^2(x)\, dx, \tag{6.10}$$

так что $(u, u) \geqslant 0$. Если $u(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, то $(u, u) = 0$; если $(u, u) = 0$, то (6.10) означает, что $u(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Следовательно, (6.9) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Пример 6.5. Рассмотрим тот же линеал, что и в примере (6.4). Соотношение

$$(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x)\, dx \tag{6.11}$$

не определяет в данном случае скалярного произведения. Выполняются все аксиомы скалярного произведения, кроме последней: согласно (6.11),

$$(u, u) = \int_0^1 u'^2(x)\, dx;$$

из $(u, u) = 0$ следует, что $u'(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$, однако отсюда не следует, что $u(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. К примеру, функция $u(x) \equiv 3$ на $[0, 1]$ принадлежит M, удовлетворяет условию $(u, u) \equiv 0$, но не является нулевым элементом M.

Замечание 6.3. Поскольку свойства (6.3)—(6.6) скалярного произведения (6.2) аналогичны свойствам (3.7)—(3.10) скалярного произведения (3.2), из них должны вытекать аналогичные следствия. В частности, справедливо правило умножения

$$(a_1u_1+a_2u_2,\ a_3u_3+a_4u_4)=a_1a_3(u_1,\ u_3)+$$
$$+a_2a_3(u_2,\ u_3)+a_1a_4(u_1,\ u_4)+a_2a_4(u_2,\ u_4),$$

аналогичное правилу (3.21).

Определение 6.3. Пусть на линеале M определено скалярное произведение (6.2) со свойствами (6.3)—(6.6). Число

$$\|u\|=\sqrt{(u,\ u)} \tag{6.12}$$

называется *нормой* элемента u из M. Число

$$\rho(u,\ v)=\|u-v\| \tag{6.13}$$

называется *расстоянием* между элементами u, v из M.

Читатель, конечно, заметил, что норма (6.12) и расстояние (6.13) определяются на основе скалярного произведения (6.2) точно таким же образом, каким определялись норма (3.3) и расстояние (3.4) в $L_2(G)$ на основе скалярного произведения (3.2). Все свойства (3.11)—(3.20) были получены в гл. 3 или, частично, уже в гл 2 исключительно на основе свойств (3.7)—(3.10) скалярного произведения (3.2). Из (6.3)—(6.6) следует, что скалярные произведения (3.2) и (6.2) имеют одинаковые свойства. Следовательно, норма (6.12) и расстояние (6.13) обладают свойствами, полностью аналогичными свойствам нормы (3.3) и расстояния (3.4). Эти свойства собраны в следующей теореме. (Читатель может провести подробные доказательства отдельных утверждений теоремы 6.1, следуя идеям соответствующих доказательств, приведенных в гл. 2 и 3.)

Теорема 6.1. *Для нормы* (6.12) *и расстояния* (6.13) *выполняется* (u, v, z — произвольные элементы M, a — произвольное вещественное число):

$$\|u\|\geqslant 0, \tag{6.14}$$
$$\|u\|=0\Leftrightarrow u=0\ в\ M\ ^{1}), \tag{6.15}$$
$$\|au\|=|a|\,\|u\|, \tag{6.16}$$
$$|(u,\ v)|\leqslant\|u\|\,\|v\|, \tag{6.17}$$
$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|, \tag{6.18}$$
$$|\|u\|-\|v\||\leqslant\|u-v\|, \tag{6.19}$$
$$\rho(u,\ v)\geqslant 0, \tag{6.20}$$
$$\rho(u,\ v)=0\Leftrightarrow u=v\ в\ M\ ^{2}), \tag{6.21}$$
$$\rho(u,\ v)=\rho(v,\ u), \tag{6.22}$$
$$\rho(u,\ z)\leqslant\rho(u,\ v)+\rho(v,\ z). \tag{6.23}$$

[1]) То есть u является нулевым элементом множества M.
[2]) То есть $u-v=0$ в M.

Определение 6.4. Линеал M с метрикой (6.13), в котором норма задается согласно (6.12), называется *предгильбертовым* (или *унитарным*) *пространством* (часто также — пространством со скалярным произведением или пространством с квадратичной метрикой).

В этой главе мы будем обозначать только что определенное пространство символом S_2. Однако в особых частных случаях будут использоваться специальные обозначения, как это делалось, например, в случае уже рассмотренного пространства $L_2(G)$.

Метрика (6.13) пространства S_2 задается нормой (6.12), определенной на основе скалярного произведения (6.2). Говорят, что данная метрика *порождается* этим скалярным произведением.

В гл. 4 на основе метрики (3.4), обладающей свойствами (3.17)—(3.20), были введены некоторые важные понятия (сходимости в L_2, точки накопления, плотности, полноты и т. д.) и доказаны теоремы, касающиеся их свойств. Поскольку метрика (6.13) имеет свойства (6.20)—(6.23), полностью аналогичные свойствам (3.17)—(3.20) метрики (3.4), аналогичные понятия можно определить для пространства S_2, а доказательства соответствующих теорем могут быть проведены почти без изменений. Поэтому рассуждения, подробно проведенные в гл. 4, здесь не повторяются, а соответствующие определения и теоремы просто формулируются. Только там, где это необходимо, внимание читателя будет обращено на различие и текст снабжен примечаниями или рассмотрены некоторые дополнительные результаты.

Для лучшего ознакомления с понятиями и теоремами, приводимыми в дальнейшем, мы рекомендуем читателю применить их в частных случаях пространств, рассмотренных в примерах 6.1, 6.2 и 6.4.

Определение 6.5. Говорят, что последовательность элементов $u_n \in S_2$ *сходится в* S_2 *к элементу* $u \in S_2$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0$. Записывают $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ в S_2. Элемент u называется *пределом* или *предельным элементом последовательности* u_n.

Пример 6.6. В пространстве, рассмотренном в примере 6.4 (обозначим это пространство W), имеем

$$\rho_W(u, v) = \|u - v\|_W = (u - v,\ u - v)_W = \|u - v\|^2_{L_2(0,1)} + \\ + \|u' - v'\|^3_{L_2(0,1)} = \rho^2_{L_2(0,1)}(u, v) + \rho^2_{L_2(0,1)}(u', v'). \qquad (6.24)$$

Сходимость в этом пространстве означает, что последовательность функций $u_n(x)$ сходится в $L_2(0, 1)$ к предельной функции, и в то же время соответствующая последовательность производных $u_n'(x)$ сходится в $L_2(0, 1)$ к производной от этой функции.

Замечание 6.4. Сходимость бесконечных рядов определяется на основе понятия сходимости последовательности: говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится в пространстве* S_2 и имеет *сумму* $s \in S_2$, если

последовательность $\{s_n\}$ его частичных сумм $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ сходится в S_2 к элементу s.

Теорема 6.2. *Последовательность $\{u_n\}$ может иметь в S_2 не более одного предела.*

Таким образом, последовательность либо имеет в S_2 единственный предел, либо вообще не имеет предела в S_2.

Определение 6.6. Последовательность элементов $u_n \in S_2$ называется *фундаментальной последовательностью* (или последовательностью Коши) в пространстве S_2, если

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \rho(u_m, u_n) = 0.$$

Подробнее: если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число n_0, что если одновременно выполнено $m > n_0$, $n > n_0$, то $\rho(u_m, u_n) < \varepsilon$.

Теорема 6.3. *Любая последовательность u_n, которая сходится в S_2 к некоторому элементу $u \in S_2$, является фундаментальной в S_2.*

Однако не всякая фундаментальная последовательность обязательно имеет предел в S_2.

Определение 6.7. Пространство S_2 называется *полным*, если любая последовательность $\{u_n\}$, фундаментальная в S_2, сходится в S_2 к некоторому элементу $u \in S_2$.

Пример 6.7. Пространство $L_2(G)$, рассмотренное в примере 6.1, полное (см. теорему 4.3).

Пример 6.8. Аналогично, пространство, рассмотренное в примере 6.2 (обозначим его $\mathbf{L}_2(G)$), полное. Во-первых, для любых двух элементов $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$ выполняется

$$\begin{aligned}\rho^2_{\mathbf{L}_2(G)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{L}_2(G)} = (\mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(G)} = \\ &= (u_1-v_1, u_1-v_1)_{L_2(G)} + (u_2-v_2, u_2-v_2)_{L_2(G)} = \\ &= \|u_1-v_1\|^2_{L_2(G)} + \|u_2-v_2\|^2_{L_2(G)} = \\ &= \rho^2_{L_2(G)}(u_1, v_1) + \rho^2_{L_2(G)}(u_2, v_2).\end{aligned}$$

Следовательно, для последовательности $\{{}^n\mathbf{u}\}$ элементов из $\mathbf{L}_2(G)$ имеем

$$\rho^2_{\mathbf{L}_2(G)}({}^m\mathbf{u}, {}^n\mathbf{u}) = \rho^2_{L_2(G)}({}^mu_1, {}^nu_1) + \rho^2_{L_2(G)}({}^mu_2, {}^nu_2).$$

Это значит, что последовательность $\{{}^n\mathbf{u}\}$ фундаментальна в $\mathbf{L}_2(G)$ в том и только том случае, если обе последовательности $\{{}^nu_1\}$ и $\{{}^nu_2\}$ фундаментальны в $L_2(G)$. Однако пространство $L_2(G)$ полное, так что последовательности $\{{}^nu_1\}$ и $\{{}^nu_2\}$ имеют единственные пределы в $L_2(G)$, обозначенные соответственно u_1 и u_2. Далее, очевидно, что функция $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ является пределом $\{{}^n\mathbf{u}\}$ в $\mathbf{L}_2(G)$,

и этот предел принадлежит $\mathbf{L}_2(G)$. Следовательно, пространство $\mathbf{L}_2(G)$ полное.

Пример 6.9. Можно показать, что пространство W, рассмотренное в примере 6.4, не является полным. (В соответствии с (6.24) последовательность $\{u_m\}$ фундаментальна в W тогда и только тогда, когда обе последовательности $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$ фундаментальны в $L_2(0, 1)$. Теперь достаточно рассмотреть последовательность $\{u_m\}$, фундаментальную в W, для которой, например, соответствующая последовательность $\{u_n'\}$, фундаментальная в $L_2(G)$, сходится в $L_2(G)$ к функции, не являющейся непрерывной на $[0, 1]$.)

Пространство S_2, не являющееся полным, может быть «пополнено» добавлением новых, так называемых *особых элементов* (см., например, [26]; см. также гл. 10). Можно показать, что пространство W, рассмотренное в примере 6.4, становится полным при добавлении определенных элементов из $L_2(0, 1)$. Мы не будем здесь уточнять вид этих элементов. (Они представляют собой такие функции из $L_2(0, 1)$, которые обладают так называемой первой обобщенной производной, квадратично интегрируемой (по Лебегу) на $(0, 1)$. Смотри определение 29.1 пространства $W_2^{(1)}$, гл. 29.) Однако в общем случае определение характера этих особых элементов может оказаться непростой задачей.

Определение 6.8. Пусть $\delta > 0$. Под *δ-окрестностью* (*δ-сферой*) элемента u в S_2 понимается множество таких элементов S_2, для которых $\rho(u, v) < \delta$.

Определение 6.9. Пусть N — множество элементов пространства S_2. Элемент $u \in S_2$ называется *точкой накопления N в S_2*, если в любой (произвольно малой) δ-окрестности u содержится бесконечное число элементов N.

Точка накопления N в S_2 может, хотя и необязательно, принадлежать N.

Теорема 6.4. *Элемент $u \in S_2$ является точкой накопления множества N в S_2 в том и только том случае, когда существует последовательность элементов $u_n \in N$ $(u_n \neq u)$, сходящаяся в S_2 к u.*

Определение 6.10. Множество $\bar{N}$, представляющее собой объединение всех элементов N и всех точек накопления N в S_2, называется *замыканием множества N в пространстве S_2*. Если $\bar{N} = N$ (т. е. если все точки накопления N принадлежат N), то N называется *замкнутым в S_2*.

Определение 6.11. Множество N называется *плотным в пространстве S_2*, если $\bar{N} = S_2$, т. е. если любой элемент S_2 является точкой накопления N в S_2.

Замечание 6.5. В соответствии с теоремой 6.4 N плотно в S_2 тогда и только тогда, когда для любого элемента $u \in S_2$ можно найти последовательность $\{u_n\}$ элементов N, сходящуюся к u в S_2. Или, другими словами, N является плотным в S_2 в том и только том случае, если любой элемент $u \in S_2$ может быть аппроксимирован с произвольной точностью элементами множества N (т. е. в том и только том случае, если для любого $u \in S_2$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $v \in N$, такой что $\rho(u, v) < \varepsilon$).

Определение 6.12. Если существует не более чем счетное множество, плотное в S_2, то пространство S_2 называется *сепарабельным*.

Замечание 6.6. Примером сепарабельного пространства служит пространство $L_2(G)$ (см. теорему 4.7). Используя это обстоятельство, можно показать (читатель может легко сделать это сам), что пространство $\mathbf{L}_2(G)$, рассматриваемое в примере 6.2, также является сепарабельным.

Определение 6.13. Полное предгильбертово пространство S_2 называется *гильбертовым пространством*.

В настоящей книге для обозначения гильбертова пространства наиболее часто используется символ H. В некоторых случаях при необходимости различить два или более гильбертовых пространства будут использоваться различные индексы.

Мы хотели бы обратить внимание читателя на то обстоятельство, что в литературе имеются значительные разногласия по поводу определения гильбертова пространства. Не везде требуется полнота гильбертова пространства. С другой стороны, кроме полноты часто предполагается сепарабельность или накладывается требование, чтобы любому натуральному n соответствовали n линейно независимых элементов в H. В настоящей книге под гильбертовым пространством везде понимается пространство, определенное в определении 6.13, т. е. полное предгильбертово пространство.

Пример 6.10. Оба пространства $L_2(G)$ и $\mathbf{L}_2(G)$, рассмотренные соответственно в примерах 6.1 и 6.2, являются гильбертовыми. $L_2(G)$ полное в соответствии с теоремой 4.3, полнота $\mathbf{L}_2(G)$ была показана в примере 6.8.

Более того, согласно замечанию 6.6, оба пространства сепарабельны.

Пространство W, рассмотренное в примере 6.4, не является гильбертовым пространством, так как оно не полное. (Пример 6.9.)

Дальнейшие рассмотрения, как правило, будут проводиться в гильбертовом пространстве, даже несмотря на то что для многих последующих определений и теорем требование полноты, как легко будет видно, не существенно. (Там, где это возможно, соответствующие положения будут формулироваться непосредственно

для S_2, тем самым поясняя указанное обстоятельство. Конечно, эти положения тем более справедливы в гильбертовом пространстве.) Теперь, поскольку темы, обсуждаемые далее в этой главе, аналогичны темам гл. 5 и даже доказательства соответствующих утверждений подобны подробно приведенным в гл. 5, мы переходим к дальнейшему изложению в той же сжатой форме, которая использовалась в первой части настоящей главы.

б) Линейная зависимость и независимость в гильбертовом пространстве. Ортогональные системы, ряды Фурье

Определение 6.14. Говорят, что $u \in S_2$ является *линейной комбинацией в* S_2 *элементов* $v_1, \ldots, v_r$ этого пространства, если u можно представить в виде

$$u = a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r, \tag{6.25}$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — некоторые вещественные постоянные.

Определение 6.15. Говорят, что элементы $u_1, \ldots, u_k$ из S_2 линейно зависимы в S_2, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. В противном случае говорят, что элементы линейно независимы в S_2.

Также говорят о *линейно зависимых* или *линейно независимых системах* элементов $u_1, \ldots, u_k$ (в S_2).

Теорема 6.5. *Элементы* $u_1 \in S_2, \ldots, u_k \in S_2$ *линейно зависимы в* S_2 *в том и только том случае, если их определитель Грама*

$$D(u_1, \ldots, u_k) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_1, u_k) \\ (u_2, u_1), (u_2, u_2), \ldots, (u_2, u_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (u_k, u_1), (u_k, u_2), \ldots, (u_k, u_k) \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Следствие: элементы $u_1, \ldots, u_k$ из S_2 линейно независимы в S_2 тогда и только тогда, когда $D \neq 0$.

Замечание 6.7. Если в S_2 существует n линейно независимых элементов, в то время как любые $n+1$ элементов из S_2 линейно зависимы, говорят, что S_2 имеет *конечную размерность* n. Примером такого пространства может служить пространство n-мерных алгебраических векторов с обычными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на число (и с обычным определением скалярного произведения, с. 61). Если при любом n существует n линейно независимых элементов в S_2, говорят, что S_2 имеет *бесконечную размерность*. Примером такого пространства служит пространство $L_2(G)$.

Определение 6.16. Элементы u, v пространства S_2 называются *ортогональными в* S_2, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(u, v) = 0. \tag{6.26}$$

Ортогональность обозначается записью

$$u \perp v. \tag{6.27}$$

Определение 6.17. Элемент $u \in S_2$ называется *нормированным*, если $\|u\| = 1$.

Определение 6.18. Если любые два различных элемента системы

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \varphi_i \in S_2, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{6.28}$$

ортогональны в S_2 (т. е. если $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ при $i \neq k$), то система (6.28) называется *ортогональной в* S_2. Если, более того, элементы (6.28) нормированы в S_2, система называется *ортонормированной в* S_2.

Примеры некоторых ортогональных систем были приведены в гл. 5.

Говорят, что система элементов

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots, \psi_i \in S_2, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

линейно независима в S_2, если любая система, образованная конечным числом этих элементов, линейно независима в S_2 (в смысле определения 6.15).

Если выбрать j произвольных элементов из ортонормированной системы (6.28), то эти элементы будут линейно независимы в S_2 в силу теоремы 6.5, поскольку свойство ортонормированности означает, что определитель Грама для этих элементов будет иметь единицы на главной диагонали и нули на всех остальных позициях, так что он будет равен единице. Следовательно, *любая система, ортонормированная в* S_2, *линейно независима в* S_2.

Теорема 6.6. *Пусть* (6.28) *— ортонормированная система в гильбертовом пространстве* H. *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \tag{6.29}$$

где a_k *— вещественные постоянные, является сходящимся в* H *в том и только том случае, если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \tag{6.30}$$

Читатель, конечно, заметил, что теорема 6.6 формулируется для гильбертова пространства H, а не для пространства S_2. Из доказательства аналогичной теоремы 5.4 можно видеть, что без требования полноты соответствующего пространства нельзя обе-

спечить справедливость нашего утверждения. (В каком месте доказательства теоремы 5.4 используется полнота?)

Определение 6.19. Пусть (6.28) — ортонормированная система в S_2, и пусть $u \in S_2$. Числа

$$\alpha_k = (u, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.31}$$

называются коэффициентами Фурье элемента u относительно системы (6.28). Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \tag{6.32}$$

называется рядом Фурье (относительно системы (6.28)), соответствующим u.

Ряд Фурье дает наилучшую среди всех рядов вида (6.29) аппроксимацию элемента u в S_2 в следующем смысле.

Теорема 6.7. *Пусть* (6.28) — *ортонормированная система в* S_2, *и пусть* u — *произвольный элемент* S_2. *Пусть* n — *произвольное, но фиксированное целое положительное число. Обозначим через*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

n-ю частичную сумму ряда Фурье, соответствующего u, *и через*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

частичную сумму ряда (6.29), *где* a_k — *произвольные вещественные числа. Тогда* $\rho(u, u_n) \leqslant \rho(u, s_n)$, *причем неравенство является строгим, если хотя бы для одного значения индекса* $k = 1, \ldots, n$ $a_k \neq \alpha_k$.

Теорема 6.8. *Ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье произвольного элемента* $u \in S_2$, *является сходящимся в* S_2, *и справедливо неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leqslant \|u\|^2. \tag{6.33}$$

Теорема 6.9. *Пусть* (6.28) — *ортонормированная система в гильбертовом пространстве* H, *и пусть* u — *произвольный элемент этого пространства. Тогда ряд Фурье*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \tag{6.34}$$

соответствующий u, *сходится в* H. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы* (6.34) *сходился именно к элементу* u, *яв-*

ляется выполнение так называемого равенства Парсеваля (также называемого *условием полноты*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|u\|^2. \tag{6.35}$$

Определение 6.20. Ортонормированная система (6.28) называется *полной в гильбертовом пространстве* H, если для любого $u \in H$ соответствующий ряд Фурье сходится в H к элементу u, т. е. для любого $u \in H$ выполняется равенство (6.35).

Определение 6.21. Система (6.28) называется *замкнутой в пространстве* H, если единственным элементом, ортогональным ко всем элементам этой системы, является нулевой элемент H.

Теорема 6.10. *Ортонормированная система* (6.28) *является полной в гильбертовом пространстве в том и только том случае, когда она замкнута в этом пространстве.*

Некоторые примеры полных ортонормированных систем в $L_2(G)$ были приведены в гл. 5.

Определение 6.22. Система (последовательность)

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots \tag{6.36}$$

(необязательно ортонормированная) элементов гильбертова пространства называется *полной* в этом пространстве, если множество всевозможных линейных комбинаций ее элементов плотно в H, т. е. если для любого элемента $u \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти положительное целое число n и числа $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$, такие что

$$\rho\left(u, \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \psi_k\right) < \varepsilon. \tag{6.37}$$

Если, более того, система (6.36) линейно независима в H (определение 6.15), то говорят, что она образует *базис* в H [1]).

Следовательно, базис в пространстве H образуется не более чем счетной линейно независимой полной системой в H. Если, кроме того, система ортонормирована, она называется *ортонормированным базисом* в пространстве H.

Замечание 6.8. Здесь можно сделать замечания (связанные с понятием *базиса Шаудера* и т. п.) к определению 6.22, полностью аналогичные замечаниям 5.4 и 5.5.

Замечание 6.9. Из требования линейной независимости базиса (6.36) вытекает, что если выбрать из этого базиса конечное число

---

[1]) В это определение входят также и конечные системы. Например, в любом пространстве размерности k (ср. замечание 6.7) любые k линейно независимых векторов образуют базис.

элементов, то определитель Грама, соответствующий этим элементам, отличен от нуля.

Примеры ортонормированных, а также и неортонормированных базисов были приведены в гл. 5 (системы (5.14), (5.32), (5.33), (5.37), (5.38)).

Если система (6.36) не является ортонормированной, то она может быть ортонормирована с помощью процедуры, показанной в замечании 5.6. Полученная таким образом система полна в H в том и только том случае, если система (6.36) полна в H.

Можно показать, что выполняется следующая теорема (см., например, [27]).

Теорема 6.11. *В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует базис*[1]).

Учитывая упомянутую выше возможность ортонормирования этого базиса, получаем следующий результат.

Теорема 6.12. *В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис*[2]).

Можно легко показать (это следует почти прямо из определения плотности), что если (не более чем счетный) базис найден в пространстве S_2, то S_2 сепарабельно.

в) Ортогональные подпространства. Некоторые свойства скалярного произведения

Определение 6.23. Рассмотрим линеал N элементов гильбертова пространства H. Если на этом линеале ввести ту же метрику, что и в H, то N станет метрическим пространством. Если N — полное пространство, то оно называется (*линейным*) *подпространством пространства* H.

Следующая теорема является аналогом теоремы 5.10.

Теорема 6.13. *Пространство N является линейным подпространством H в том и только том случае, когда множество N замкнуто в H.*

Определение 6.24. Говорят, что элемент $u \in H$ *ортогонален подпространству* N гильбертова пространства H, и пишут $u \perp N$, если u ортогонален всем элементам N.

---

[1]) Идея доказательства этого утверждения довольно проста: если H сепарабельно, то существует не более чем счетное множество, плотное в H. Расположим это множество в виде последовательности и удалим все члены, являющиеся линейной комбинацией предыдущих членов.

[2]) Можно ожидать, что выполняется еще более сильное утверждение (см., например, [27], [29]): если M — плотное множество в сепарабельном пространстве (гильбертовом) H, то можно построить базис (или ортонормированный базис) в H из элементов этого множества.

Теорема 6.14. *Пусть N — линейное подпространство гильбертова пространства H. Тогда любой элемент $u \in H$ можно единственным образом представить в виде суммы*

$$u = v + w, \tag{6.38}$$

где $v \in N$, а $w \perp N$.

Элемент v называется *ортогональной проекцией* u на N. См. также пример 5.10.

Замечание 6.10. Можно показать, что множество K всех элементов $w \in N$, ортогональных линейному подпространству N гильбертова пространства, снова является линейным подпространством. Говорят, что K *ортогонально* N, и пишут $K \perp N$. Результат теоремы 6.14 выражает тогда короткая запись

$$H = N \oplus K; \tag{6.39}$$

говорят, что H представляет собой *ортогональную сумму* подпространств N и K. Пространство K называется *ортогональным дополнением* подпространства N в H; пишут

$$K = H \ominus N. \tag{6.40}$$

Если $N = H$ (этот случай не исключается определением 6.23), то K содержит только один элемент, а именно нулевой элемент пространства H.

В заключение этого раздела приведем некоторые теоремы, аналогичные теоремам 5.12—5.14 из гл. 5. В их формулировке используется сокращенная запись $u_n \to u$, $v_n \to v$ и $a_n \to a$, обозначающая, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в H к элементу u, последовательность $\{v_n\}$ — к v, а последовательность чисел $\{a_n\}$ — к (вещественному) числу a соответственно.

Теорема 6.15. *Если $u_n \to u$, $v_n \to v$, то $(u_n, v_n) \to (u, v)$.*

Полагая здесь $v_n = v$ при любом n, или $v_n = u_n$, $v = u$, соответственно получаем следующие два вывода из теоремы 6.15.

Теорема 6.16. *Если $u_n \to u$, то $(u_n, v) \to (u, v)$ при любом $v \in H$.*

Теорема 6.17. *Если $u_n \to u$, то $\|u_n\| \to \|u\|$.*

Важна также следующая теорема, аналогичная теореме 5.15.

Теорема 6.18. *Если $u \in H$ ортогонален всем элементам множества N, плотного в гильбертовом пространстве H, то u — нулевой элемент H.*

г) Комплексное гильбертово пространство

Замечание 6.11. Итак, в этой главе была разработана теория *вещественного гильбертова пространства*. В некоторых случаях удобно рассматривать гильбертово пространство с «комплексными»

элементами, которые образуют линеал M над полем комплексных чисел (где, таким образом, числа $a_1, \ldots, a_n$, появляющиеся в (6.1) в примечании на с. 59, являются комплексными). Типичный пример таких «комплексных» элементов представляют комплексные функции вещественной переменной, т. е. функции вида

$$u(x) = u_1(x) + iu_2(x) \tag{6.41}$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — вещественные функции в области G, i обозначает мнимую единицу.

Здесь возникают некоторые трудности. Если мы собираемся строить метрическое пространство, метрика которого порождается скалярным произведением (см. (6.12), (6.13)), то (u, u) должно быть неотрицательным. Следовательно, для начала надо определить скалярное произведение подходящим образом. Например, если бы скалярное произведение было определено для функций (6.41) так же, как и раньше, т. е. по формуле

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx$$

(где $v(x) = v_1(x) + iv_2(x)$), то число

$$(u, u) = \int_G u^2(x)\, dx$$

не обязательно было бы неотрицательным (в общем случае оно не обязательно было бы и вещественным). Однако определяя

$$(u, v) = \int_G u(x)\, \overline{v}(x)\, dx, \tag{6.42}$$

где $\overline{v}(x) = v_1(x) - iv_2(x)$ — комплексно сопряженная $v(x)$ функция, мы имеем $u(x)\overline{u}(x) = u_1^2(x) + u_2^2(x)$, и число

$$(u, u) = \int_G [u_1^2(x) + u_2^2(x)]\, dx,$$

таким образом, неотрицательно. Читатель может немедленно возразить, что теперь не выполняется аксиома (6.3): $(u, v) \neq (v, u)$. Конечно, согласно (6.42), мы получаем

$$(v, u) = \int_G v(x)\, \overline{u}(x)\, dx = \int_G \overline{u(x)\, \overline{v}(x)}\, dx = \overline{(u, v)}$$

(где комплексно сопряженные величины обозначаются, как обычно, чертой). Можно показать, что все трудности, возникающие в «комплексном» случае, могут быть легко устранены, если определить на линеале M скалярное произведение как число (комплексное,

вообще говоря), удовлетворяющее следующим аксиомам:

$$(u,\ v)=\overline{(v,\ u)}, \tag{6.43}$$

$$(a_1u_1+a_2u_2,\ v)=a_1(u_1,\ v)+a_2(u_2,\ v), \tag{6.44}$$

$$(u,\ u)\geqslant 0, \tag{6.45}$$

$$(u,\ u)=0\Leftrightarrow u=0 \text{ в } M. \tag{6.46}$$

Мы видим, что первая из этих аксиом отличается от соответствующей аксиомы в вещественном гильбертовом пространстве. Следовательно, некоторые изменения должны произойти и в алгебре скалярного произведения; например, согласно (6.43) и (6.44), имеем

$$(u,\ av)=\overline{(av,\ u)}=\bar{a}\,\overline{(v,\ u)}=\bar{a}\,(u,\ v). \tag{6.47}$$

Формула для скалярного умножения из замечания 6.3 должна быть заменена на

$$(a_1u_1+a_2u_2,\ a_3u_3+a_4u_4)=a_1\bar{a}_3(u_1,\ u_3)+a_2\bar{a}_3(u_2,\ u_3)+$$
$$+a_1\bar{a}_4(u_1,\ u_4)+a_2\bar{a}_4(u_2,\ u_4)$$

и т. д. Если норма и расстояние определяются согласно (6.12) и (6.13), то свойства нормы и расстояния (6.14)—(6.23) остаются неизменными. Точно так же и теория предгильбертова пространства, равно как и теория гильбертова пространства, изложенные в этой главе, остаются неизменными.

Глава 7

Некоторые замечания к предыдущим главам. Нормированное пространство, банахово пространство

Главная цель предыдущих глав состояла в разработке теории гильбертова пространства, которое будет встречаться в последующем в самых различных формах. Поэтому мы начали с понятия линеала и ввели на этом множестве понятия скалярного произведения, нормы и расстояния. Множество понятий, а также результатов, относящихся к метрическим пространствам, было приведено только для этого линейного случая. В настоящей главе мы обратим внимание читателя на то, какие из этих понятий (или результатов) могут или не могут быть расширены на нелинейные пространства. Читатель, заинтересованный в скорейшем переходе к изучению вариационных методов, изложенных в последующих главах, может в данный момент опустить гл. 7.

При определении скалярного произведения в гл. 6 было отмечено, что линейность множества, на котором определяется скалярное произведение, существенна для выполнения всех заданных аксиом скалярного произведения. Причина этого заключается

в том, что сумма элементов из M, так же как и их произведение на произвольное вещественное число (и, следовательно, также и произвольная линейная комбинация этих элементов), встречается прямо в аксиомах скалярного произведения. Что касается определения метрического пространства, то совершенно не нужно, чтобы его метрика порождалась скалярным произведением. Для определения метрики на множестве M линейность множества M также не требуется (см. определение 2.5). То же справедливо и в отношении некоторых других понятий (сходимости в метрическом пространстве, полноты, плотности, сепарабельности и т. д.).

Определения, которые будут вводиться ниже для этого более общего случая, почти буквально совпадают с определениями, сформулированными ранее для линейных пространств. Было бы достаточно сослаться на введенные определения и предложить читателю произвести формальные изменения самому (например, в некоторых определениях из гл. 6 заменить пространство S_2 общим метрическим пространством). Однако мы предпочитаем привести здесь эти определения и соответствующие основные результаты в формулировках, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем.

Определение 7.1. Множество M называется *метрическим пространством*, если для любой пары u, v его элементов определено расстояние $\rho(u, v)$, удовлетворяющее следующим аксиомам метрики (u, v, z — произвольные элементы M):

$$\rho(u, v) \geqslant 0, \tag{7.1}$$

$$\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \text{ в } M, \tag{7.2}$$

$$\rho(u, v) = \rho(v, u), \tag{7.3}$$

$$\rho(u, z) \leqslant \rho(u, v) + \rho(v, z). \tag{7.4}$$

Определение 7.2. Говорят, что последовательность $\{u_n\}$ элементов u_n метрического пространства P *сходится в этом пространстве к элементу* $u \in P$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0. \tag{7.5}$$

Пишут

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } P; \tag{7.6}$$

элемент u называется *пределом* или *предельным элементом последовательности* $\{u_n\}$ в P.

Теорема 7.1. *Последовательность* $\{u_n\}$ *может иметь в* P *не более одного предела.*

Определение 7.3. Последовательность $\{u_n\}$ элементов метрического пространства P называется *фундаментальной последова-*

тельностью (или *последовательностью Коши*) в P, если

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \rho(u_m, u_n) = 0,$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число n_0, что $\rho(u_m, u_n) < \varepsilon$ для любых $m > n_0$ и $n > n_0$.

Теорема 7.2. *Любая последовательность* $\{u_n\}$, *сходящаяся в* P *к элементу* $u \in P$, *фундаментальна в* P.

Как показано в предыдущих главах, не всякая фундаментальная последовательность обязательно имеет предел в P.

Определение 7.4. Метрическое пространство P называется *полным*, если любая последовательность $\{u_n\}$, фундаментальная в P, сходится в этом пространстве к элементу $u \in P$.

Замечание 7.1. Для неполного метрического пространства можно построить полное пространство, называемое *пополнением* исходного пространства, путем добавления так называемых *особых* элементов. (См. относительно простое построение пополнения, показанное в гл. 10.)

Определение 7.5. Пусть $\delta > 0$. Под δ-окрестностью (δ-сферой) элемента u в метрическом пространстве P понимается множество всех элементов $v \in P$, для которых

$$\rho(u, v) < \delta. \tag{7.7}$$

Определение 7.6. Пусть N — множество элементов метрического пространства P. Говорят, что элемент $u \in P$ является точкой накопления N в P, если в любой (произвольно малой) δ-окрестности u лежит бесконечное число элементов N.

Точка накопления N в P может, хотя и необязательно, принадлежать N.

Теорема 7.3. *Элемент* u *метрического пространства* P *является точкой накопления* N *в* P *тогда и только тогда, когда существует последовательность элементов* $u_n \in N$ $(u_n \neq u)$, *которая сходится к элементу* u *в* P.

Определение 7.7. Множество $\overline{N}$, которое представляет собой объединение элементов N и всех точек накопления N в P, называется *замыканием* N *в* P. Если $\overline{N} = N$ (т. е. если любая точка накопления N принадлежит P), то говорят, что N *замкнуто в* P.

Теорема 7.4. *Пусть* P — *полное метрическое пространство. Множество* $N \subset P$ *с метрикой* P *само является полным метрическим пространством в том и только том случае, если* N *замкнуто в* P. (См. также теорему 6.13.)

Определение 7.8. Множество N называется *плотным в метрическом пространстве* P, если $\overline{N}=P$, т. е. если любой элемент P является точкой накопления N в P.

Замечание 7.2. Из определений 7.6, 7.8 следует, что N плотно в P в том и только том случае, когда любой элемент $u\in P$ может быть аппроксимирован с произвольной точностью с помощью элементов N, т. е. если для любого $u\in P$ и любого $\varepsilon>0$ можно найти элемент $v\in N$, такой что $\rho(u, v)<\varepsilon$.

Далее из определения 7.8 и теоремы 7.3 следует

Теорема 7.5. *Множество N плотно в метрическом пространстве P в том и только том случае, если для любого элемента $u\in P$ существует последовательность $\{u_n\}$ элементов N, которая сходится в P к элементу u.*

Определение 7.9. Метрическое пространство P называется *сепарабельным*, если существует не более чем счетное множество [1]) N, плотное в P.

В завершение этой главы сформулируем следующее определение:

Определение 7.10. Пусть M — линеал. Сопоставим каждому элементу $u\in M$ вещественное число $\|u\|$, так называемую *норму* элемента u, обладающую следующими свойствами (т. е. удовлетворяющую следующим аксиомам нормы):

$$\|u\|\geqslant 0, \tag{7.8}$$

$$\|u\|=0\Leftrightarrow u=0 \text{ в } M\ ^{2}), \tag{7.9}$$

$$\|au\|=|a|\,\|u\| \text{ для любого } a\ ^{3}), \tag{7.10}$$

$$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\| \text{ для любых } u, v \text{ из } M. \tag{7.11}$$

Линеал M, на котором определена норма, обладающая свойствами (7.8)—(7.11), называется *линейным нормированным пространством*.

Полагая в этом пространстве

$$\rho(u, v)=\|u-v\|, \tag{7.12}$$

можно легко проверить (как это было сделано для частного случая в гл. 2), что $\rho(u, v)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Следовательно, пространство M с метрикой (7.12) является линейным нормированным метрическим пространством.

---

[1]) То есть счетное множество или множество, содержащее лишь конечное число элементов.

[2]) То есть u является нулевым элементом линеала M.

[3]) Вещественного или комплексного соответственно тому, какое — вещественное или комплексное — нормированное пространство рассматривается.

Определение 7.11. Линейное нормированное метрическое пространство, полное в метрике (7.12), называется *банаховым пространством*, или *пространством типа B*.

Примером банахова пространства является пространство $L_2(G)$. Вообще любое гильбертово пространство (с нормой $\|u\|=\sqrt{(u, u)}$) является банаховым пространством.

Замечание 7.3. Из (7.11) легко следует (см. доказательство теоремы 2.2) неравенство

$$|\|u\|-\|v\|| \leqslant \|u-v\|. \tag{7.13}$$

Заметим далее, что в пространстве с метрикой (7.12) сходимость последовательности $\{u_n\}$ к элементу u_0 определяется соотношением

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n-u_0\|=0. \tag{7.14}$$

Фундаментальная последовательность $\{u_n\}$ характеризуется соотношением

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m-u_n\|=0. \tag{7.15}$$

Отсюда следует

Теорема 7.6. *Если в пространстве с метрикой* (7.12)

$$\lim_{n\to\infty} u_n=u_0, \tag{7.16}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|=\|u_0\|. \tag{7.17}$$

Доказательство. Согласно (7.13), имеем $|\|u_n\|-\|u_0\|| \leqslant \|u_n-u_0\|$, откуда, согласно (7.14), $\lim_{n\to\infty} |\|u_n\|-\|u_0\||=0$, что равносильно (7.17).

Теорема 7.7. *Если последовательность $\{u_n\}$ является фундаментальной в пространстве с метрикой* (7.12), *то последовательность соответствующих норм $\{\|u_n\|\}$ сходится.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Больцано—Коши (см. (4.12)) достаточно доказать, что последовательность чисел $\{\|u_n\|\}$ фундаментальна. Однако из неравенства $|\|u_m\|-\|u_n\|| \leqslant \|u_m-u_n\|$ и из (7.15) немедленно следует, что $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} |\|u_m\|-\|u_n\||=0$. Это означает, что $\{\|u_n\|\}$ является фундаментальной последовательностью.

Поскольку, как известно, всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена, то из теорем 7.6 и 7.7 следует

Теорема 7.8. *Если в пространстве с метрикой* (7.12) *последовательность* $\{u_n\}$ *является сходящейся или хотя бы фундаментальной, то она ограничена, т. е. существует такое число* K, *что*

$$\|u_n\| \leqslant K \quad \text{для всех } n. \tag{7.18}$$

Глава 8

Операторы и функционалы, в частности, в гильбертовых пространствах

В дальнейшем будут рассматриваться уравнения вида

$$Au = f, \tag{8.1}$$

где A — некоторый оператор (в приложениях чаще всего дифференциальный оператор), f — данный элемент (как правило, функция, рассматриваемая как элемент гильбертова пространства, например пространства $L_2(G)$), а u — искомое решение. Чтобы подробнее объяснить смысл уравнения (8.1), приведем простой пример.

Пример 8.1. Рассмотрим плоскую область G с границей Γ [1]). Как и прежде, обозначим через $\bar{G} = G + \Gamma$ соответствующую замкнутую область и будем решать в области G задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{8.2}$$

(где Δ — оператор Лапласа),

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{8.3}$$

Относительно функции $f(x, y)$ здесь мы предполагаем, что она непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$.

Найти так называемое *классическое решение* задачи (8.2), (8.3) — это значит найти функцию $u(x, y)$, непрерывную в замкнутой области $\bar{G}$, удовлетворяющую уравнению (8.2) в открытой области G и равную нулю на границе Γ. Учитывая, что функция $f(x, y)$ непрерывна в $\bar{G}$ по предположению, естественно искать решение задачи (8.2), (8.3) среди функций, принадлежащих $C^{(2)}(\bar{G})$ [2]) (т. е. среди функций, непрерывных в G вместе со своими частными производными до второго порядка включительно; см. с. 580) и равных нулю на Γ. Множество этих функций является линеалом —

[1]) В соответствии с гл. 2 в этой книге под областью понимается ограниченная область с границей, описанной в гл. 2 и точно определенной в гл. 28 (так называемая *область с липшицевой границей*).

[2]) Эти вопросы будут подробно разобраны в следующих главах, в которых понятие решения этой или подобных ей задач будет существенно обобщено.

обозначим его через M_1 — поскольку если u_1, u_2 — две произвольные функции из M_1 и если a_1, a_2 — произвольные (вещественные) числа, то функция $a_1u_1+a_2u_2$ также принадлежит классу $C^{(2)}(\bar{G})$ и удовлетворяет условию $u=0$ на Γ; следовательно, она также принадлежит M_1. Данная задача тогда формулируется следующим образом: необходимо найти такую функцию u из линеала M_1, которая удовлетворяет уравнению $\Delta u=f$. Еще короче: мы должны решить уравнение

$$\Delta u=f \tag{8.4}$$

на линеале M_1. В этой связи о M_1 говорят как об области, на которой рассматривается оператор Δ, или, вкратце, как об *области определения этого оператора*. К элементам этой области мы применяем операцию

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

которая каждой функции $u\in M_1$ ставит в соответствие функцию

$$v=\Delta u, \tag{8.5}$$

непрерывную в $\bar{G}$. Множество всех функций v, которые получаются с помощью (8.5) из всевозможных функций $u\in M_1$, снова является линеалом, который мы обозначим через N. Этот линеал N называется *множеством значений* данного оператора.

Замечание 8.1. Если указана область определения данного дифференциального оператора, то задачу с граничными условиями можно выписать в виде одного уравнения $Au=f$ (в примере 8.1 — уравнения (8.4)). Такая запись учитывает также и граничные условия, которые однозначно определяются соответствующим выбором области определения данного оператора. В нашем примере, в котором рассматривалось решение уравнения (8.2) с граничным условием (8.3), в качестве этой области мы выбрали линеал M_1. Функции из M_1 равны нулю на границе области и, следовательно, граничные условия (8.3) уже удовлетворены.

Вслед за этим кратким введением мы переходим к общему определению оператора.

а) Операторы в гильбертовом пространстве

Определение 8.1. Пусть даны два множества M_1 и M_2. Говорят, что на множестве M_1 определен *оператор A, отображающий множество M_1 в множество M_2*, если задано правило, по которому каждому элементу $u\in M_1$ однозначно ставится в соответствие определенный элемент $v\in M_2$. Пишут

$$v=Au\ ^{1}). \tag{8.6}$$

[1]) В этом смысле мы часто говорим об отображении множества M_1 в множество M_2. Элемент u тогда называется оригиналом, а элемент $v=Au$ — изображением оригинала u.

M_1 называется *областью определения* оператора A; множество N, состоящее из всех элементов, полученных с помощью (8.6) из всевозможных элементов $u \in M_1$, называется *множеством значений оператора* A. Оно обозначается через R_A.

Определение 8.2. Если $R_A = M_2$, то говорят, что оператор A отображает множество M_1 *на* множество M_2[1]).

Очевидно, что отображение множества M_1 *на* множество M_2 (т. е. когда $R_A = M_2$) является частным случаем отображения M_1 *в* M_2 (в последнем случае требуется только, чтобы $R_A \subset M_2$).

Легко видеть, что определение 8.2 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Определение 8.3. Говорят, что оператор A отображает множество M_1 *на* множество M_2, если он отображает M_1 в M_2 и если для любого элемента $v \in M_2$ найдется хотя бы один элемент $u \in M_1$, такой что $Au = v$.

Поскольку одной из главных целей настоящей книги является знакомство читателя с применением вариационных методов к решению дифференциальных уравнений с граничными условиями, в центре нашего внимания будут находиться дифференциальные операторы. Классическим примером недифференциального оператора является квадратная матрица $\mathbf{A}$ n-го порядка, посредством которой, т. е. посредством правила $\mathbf{v} = \mathbf{Au}$, любому вектору

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$$

из линеала V всех n-мерных векторов ставится в соответствие вектор

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

из того же множества. (Здесь $\mathbf{Au}$ обозначает обычное матричное произведение (см., например, [33]), в котором вектор $\mathbf{u}$ рассматривается как $(n \times 1)$-матрица.)

Если, более того, матрица $\mathbf{A}$ неособенная (невырожденная), то соотношением $\mathbf{v} = \mathbf{Au}$ задается отображение V *на* V. Действительно, для любой невырожденной матрицы существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ (см., например, теорему 6 в [33]), так что для любого $\mathbf{v} \in V$ найдется элемент $\mathbf{u} \in V$, такой что $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$ (а именно $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$).

[1]) Или что отображение A является *сюръективным*.

Пример 8.2. Область определения оператора Δ из примера 8.1 — линеал M_1 функций, принадлежащих $C^{(2)}(\overline{G})$ и равных нулю на Γ. Оператор Δ отображает M_1 в линеал M_2 функций, непрерывных в $\overline{G}$, так как для любого $u \in M_1$ мы имеем

$$v = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

т. е. функция, непрерывная в $\overline{G}$. На данном этапе мы не в состоянии решить, является ли это отображение отображением *на* M_2, из-за того, что мы не знаем еще, можно ли для любой непрерывной функции $v \in M_2$ найти функцию $u \in M_1$, такую что $\Delta u = v$. (Читатель может легко видеть, что этот вопрос эквивалентен вопросу, имеет ли задача Дирихле (8.2), (8.3) решение $u \in M_1$ при любой непрерывной правой части $f \in M_2$.)

Определение 8.4. Говорят, что два оператора A, B *равны*, и пишут $A = B$, если их области определения представляют собой одно и то же множество M и если, кроме того, $Au = Bu$ при любом $u \in M$ [1]).

Сделаем к этому определению следующее замечание: в качестве области определения оператора Лапласа из примера 8.1 мы взяли линеал M_1 функций, принадлежащих $C^{(2)}(\overline{G})$ и равных нулю на границе Γ. Выбор такой области определения удобен для преследуемых нами целей, а именно для нахождения классического решения рассматриваемой задачи Дирихле (8.2), (8.3). В той мере, в какой речь идет об операторе как таковом, имеет смысл определить его и на других множествах. Например, выберем в качестве его области определения линеал N_1 функций, опять принадлежащих $C^{(2)}(\overline{G})$, но не обязательно удовлетворяющих условию $u = 0$ на Γ. Ясно, что любая функция $u \in M_1$ принадлежит также N_1, но не любая функция $u \in N_1$ должна принадлежать M_1, поскольку она не обязательно равна нулю на Γ (например, постоянная в $\overline{G}$ функция, отличная от нуля). Следовательно, N_1 шире, чем M_1, т. е. $M_1 \subset N_1$ и в то же время $M_1 \neq N_1$. Обозначим через A оператор Δ с областью определения M_1 и через B — оператор Δ с областью определения N_1. Согласно опр. 8.4, $A \neq B$, так как их области определения различны. Позднее, при обсуждении таких понятий, как симметрия, положительность и т. п., мы увидим, что операторы A, B действительно имеют существенно различные свойства.

Мы уже отметили, что в только что рассмотренном случае областей определения M_1 и N_1 операторов A и B имеет место $M_1 \subset N_1$. В данном случае включение строгое, т. е. $M_1 \neq N_1$. В то же время

[1]) Под $Au = Bu$ понимается равенство элементов Au и Bu в множестве M_2, в которое отображают операторы A, B множество M. Если, например, $M_2 = L_2(G)$, то функции Au и Bu могут отличаться в G на множестве меры нуль.

для любого $u \in M_1$ мы имеем $Au = Bu = (\Delta u)$. В таких случаях говорят, что оператор B является расширением оператора A. Общее определение приводится ниже. В этом определении для областей определения операторов A и B используются общепринятые в литературе обозначения D_A и D_B соответственно, которые часто будут употребляться в дальнейшем.

Определение 8.5. Пусть имеются операторы A и B с областями определения D_A и D_B соответственно. Если $D_A \subset D_B$ $(D_A \neq D_B)$ и если в то же время для любой $u \in D_A$ выполняется $Au = Bu$, то говорят, что оператор B является *расширением* оператора A.

В связи с этими проблемами отметим следующее: согласно определению 8.1, оператор задается своей областью определения, обозначенной ранее через M_1, и операцией $v = Au$, которая задает отображение M_1 в M_2. Если из контекста будет ясно, какая область рассматривается, мы часто будем более лаконичны (хотя и менее точны). Например, мы говорим об операторе Δ вместо оператора A, областью определения которого является рассмотренное множество функций и который задается на этом множестве операцией $v = \Delta u$. Этот краткий способ выражения будет часто использоваться, конечно лишь постольку, поскольку из контекста недвусмысленно ясно, какая область рассматривается.

В определении 8.4 равенство двух операторов определяется способом, очень похожим на тот, которым устанавливается равенство двух функций в классическом анализе. Аналогично вводятся сумма и произведение двух операторов.

Определение 8.6. *Сумма* $A + B$ и *произведение* AB двух операторов A и B с соответствующими областями определения D_A и D_B задаются следующими соотношениями:

$$(A + B)u = Au + Bu, \tag{8.7}$$

$$(AB)u = A(Bu). \tag{8.8}$$

Здесь оператор $A + B$ определен на пересечении областей D_A и D_B, в то время как оператор AB определен на множестве D_{AB} тех элементов $u \in D_B$, для которых $Bu \in D_A$.

Требования, налагаемые на области определения операторов $A + B$ и AB, вполне естественны: в случае оператора $A + B$ область определения является пересечением областей определения D_A и D_B двух операторов, т. е. множеством элементов, принадлежащих как D_A, так и D_B, поскольку обе операции Au и Bu в правой части (8.7) должны иметь смысл. В случае произведения AB область определения D_{AB} представляет собой множество тех $u \in D_B$, для которых Bu лежит в области определения D_A оператора A, поскольку в соответствии с (8.8) нам нужно применить оператор A к элементу Bu.

Замечание 8.2. В общем случае $BA \neq AB$, как следует из рассуждений по поводу области определения произведения двух операторов. Однако даже если $D_{BA} = D_{AB}$, вовсе необязательно, чтобы $BA = AB$, что легко может быть показано с помощью следующего примера.

Пусть V — линеал всех двумерных векторов (см. с. 82), и пусть

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{Vmatrix}$$

суть матрицы, отображающие V в V. Легко видеть, что $D_{\mathbf{A}} = V$, $D_{\mathbf{B}} = V$, а также $D_{\mathbf{AB}} = V$, $D_{\mathbf{BA}} = V$. Однако (см., например, [33])

$$\mathbf{AB} = \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & 2 \\ 3, & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1, & 1 \\ 2, & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3, & 0 \\ 1, & -2 \end{Vmatrix},$$

так что $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Например, для вектора

$$\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

имеем

$$\mathbf{ABu} = \begin{Vmatrix} 0, & 2 \\ 3, & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{BAu} = \begin{Vmatrix} 3, & 0 \\ 1, & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Операторы A, B, для которых выполняется $AB = BA$, называются *коммутирующими*.

Определение 8.7. Оператор A называется *простым* (или *инъективным*) в его области определения D_A, если для любых двух элементов $u_1 \neq u_2$ из D_A

$$Au_1 \neq Au_2 \tag{8.9}$$

(см., конечно, примечание на с. 83).

Замечание 8.3. Рассмотрим оператор A, отображающий множество M_1 на множество M_2, который к тому же является простым на M_1. Из определения отображения M_1 на M_2 (см. определение 8.3) следует, что любому элементу $v \in M_2$ соответствует по меньшей мере один элемент $u \in M_1$, такой что $Au = v$. Из предположения простоты A на M_1 следует тогда, что любому $v \in M_2$ соответствует ровно один элемент $u \in M_1$, такой что $Au = v$. Действительно, пусть существуют два [1]) элемента u_1, u_2, соответствующих

[1]) Или более чем два.

v; тогда должно выполняться $v = Au_1 = Au_2$, что противоречит предположению (8.9). Это свойство простого отображения на множество ведет к следующему важному определению.

Определение 8.8. Пусть оператор A отображает множество M_1 на множество M_2 и пусть A простой. Оператор B, определенный на M_2, который любому элементу $v \in M_2$ ставит в соответствие такой элемент $u \in M_1$, для которого $v = Au$, называется *оператором, обратным к оператору* A. Пишут A^{-1}.

Из определения с очевидностью следует, что для всех $u \in M_1$ и для всех $v \in M_2$ выполняется

$$A^{-1}Au = u, \quad AA^{-1}v = v. \tag{8.10}$$

Пример 8.3. Рассмотрим оператор A из примера 8.1, т. е. оператор Δ с областью определения M_1, элементами которой являются те функции из $C^{(2)}(\bar{G})$, которые равны нулю на Γ. Как и в упомянутом примере, обозначим множество значений оператора A символом N. Непосредственно из определения множества значений оператора A следует, что A отображает M_1 на N. Мы утверждаем, что это отображение является простым. Это следует из единственности решения задачи Дирихле (8.2), (8.3) (см., например, [33])[1]. А именно, если бы для какого-нибудь $v \in N$ существовали два различных элемента u_1, u_2 из M_1, для которых $Au_1 = v$, $Au_2 = v$, то задача Дирихле

$$\Delta u = v, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{8.11}$$

имела бы два различных решения u_1, u_2 из M_1, что противоречит указанной теореме. Таким образом, рассматриваемый оператор простой. В соответствии с замечанием 8.3 каждому $v \in N$ соответствует ровно один $u \in M_1$, такой что $\Delta u = v$. Следовательно, существует обратный оператор A^{-1}, ставящий каждому $v \in N$ в соответствие определенное решение u задачи Дирихле (8.11). Как уже было отмечено в примере 8.2, на данном этапе мы не можем решить, принадлежат ли к N все функции, непрерывные в замкнутой области $\bar{G}$, т. е. имеет ли задача Дирихле (8.11) решение $u \in M$ при любой правой части, непрерывной в $\bar{G}$.

Определение 8.9. Оператор A называется *линейным*, если его область определения D_A является линеалом и если для произвольных элементов $u_1, \ldots, u_n$ из D_A и произвольных (вещественных) чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется соотношение

$$A(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = a_1Au_1 + \ldots + a_nAu_n. \tag{8.12}$$

---

[1]) Позднее (см. теорему 9.1, с. 110) мы докажем единственность решения другим способом, без использования теорем классической теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Определение 8.9 может быть сформулировано в следующей, очевидно эквивалентной, форме.

Определение 8.10. Оператор A называется *линейным*, если его область определения D_A является линеалом и если

(I) $A(au) = aAu$ для любого $u \in D_A$ и для любого (вещественного) числа a, (8.13)

(II) $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2$ для всех $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$. (8.14)

Это в самом деле так, поскольку (8.13) и (8.14) с очевидностью следуют из (8.12) как частные случаи, причем, с другой стороны, если выполняется (8.13) и (8.14), то

$$A(a_1u_1 + a_2u_2) = A(a_1u_1) + A(a_2u_2) = a_1Au_1 + a_2Au_2$$

при любых $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$ и для любых вещественных чисел a_1, a_2, откуда по индукции немедленно следует (8.12).

Как пример линейного оператора, отметим оператор A, заданный на линеале $C^{(1)}(a, b)$ (см. с. 580) формулой

$$Au = \frac{du}{dx}.$$

В этом случае, во-первых, множество $C^{(1)}(a, b)$, очевидно, линейное и, во-вторых, хорошо известные правила дифференцирования дают

$$A(au) = \frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx} = aAu,$$

$$A(u_1 + u_2) = \frac{d(u_1+u_2)}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} = Au_1 + Au_2.$$

Как будет видно позже, линейные операторы очень важны для приложений.

Замечание 8.4. На основании свойств (8.13), (8.14) линейного оператора A можно легко показать, что его множество значений также является линеалом. В то же время ясно (достаточно в (8.13) написать $a = 0$), что нулевому элементу D_A соответствует нулевой элемент R_A, т. е. $A0 = 0$ в R_A. Далее, если для данного линейного оператора A существует обратный к нему A^{-1} (определенный на R_A), то A^{-1} также является линейным оператором в R_A. А именно, пусть a — произвольное вещественное число, и пусть v_1, v_2 — произвольные элементы из R_A. Надо показать, что выполняются соотношения

$$A^{-1}(av_1) = aA^{-1}v_1, \quad A^{-1}(v_1 + v_2) = A^{-1}v_1 + A^{-1}v_2.$$

Как следует из определения обратного оператора, $A^{-1}v_1 = u_1$, $A^{-1}v_2 = u_2$, где u_1, u_2 — элементы D_A, однозначно определяемые по элементам v_1, $v_2 \in R_A$ таким образом, что $Au_1 = v_1$, $Au_2 = v_2$. Но

A — линейный оператор, так что $A(au_1) = aAu_1 = av_1$, $A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2 = v_1 + v_2$. Отсюда и из (8.10) следует, что

$$A^{-1}(av_1) = A^{-1}A(au_1) = au_1 = aA^{-1}v_1,$$
$$A^{-1}(v_1 + v_2) = A^{-1}A(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = A^{-1}v_1 + A^{-1}v_2.$$

Таким образом, линейность A^{-1} на линеале R_A доказана.

Из линейности A^{-1} немедленно следует, что нулевому элементу линеала R_A соответствует нулевой элемент линеала D_A, т. е. справедливо соотношение $A^{-1}0 = 0$ в D_A.

Часто бывает полезен следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть оператор A линеен на линеале D_A, и пусть R_A — его множество значений. Тогда обратный оператор A^{-1} существует в том и только том случае, если*

$$Au = 0 \quad \text{в} \quad R_A \Rightarrow u = 0 \quad \text{в} \quad D_A. \tag{8.15}$$

Доказательство. 1. Пусть оператор A имеет обратный оператор A^{-1} (определенный, таким образом, на R_A). Пусть u — элемент из D_A, для которого

$$Au = 0 \quad \text{в} \quad R_A. \tag{8.16}$$

Из (8.16) следует $A^{-1}Au = A^{-1}0 = 0$ в D_A (см. замечание 8.4), откуда $u = 0$ в D_A согласно (8.10).

2. С другой стороны, пусть выполняется (8.15). Мы должны доказать, что в R_A существует оператор A^{-1}, обратный к оператору A. Для этого достаточно доказать, что отображение D_A на R_A простое, т. е. доказать, что $u_1 \neq u_2 \Rightarrow Au_1 \neq Au_2$. Однако если бы для $u_1 \neq u_2$ было $Au_1 = Au_2$, то тогда вследствие линейности A должно было бы выполняться $A(u_1 - u_2) = 0$ и $u_1 - u_2 \neq 0$, что противоречит (8.15).

Теорема 8.1 доказана.

Таким образом, требование, чтобы отображение D_A на R_A было простым, являющееся достаточным условием существования обратного оператора, может быть «заменено» в случае линейного оператора требованием (8.15). Это обстоятельство упростит наши рассмотрения.

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с линейными операторами, преимущественно с линейными операторами в гильбертовом пространстве. Приведем, однако, пример оператора, который в общем случае не является линейным и который имеет большое значение, особенно для задач, связанных с численными методами.

Пусть P — метрическое пространство с метрикой ρ. Оператор A, отображающий это пространство само в себя, называется *сжимающим*, если существует такое число α, $0 < \alpha < 1$, что для любой пары элементов x, $y \in P$ $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$.

Сжимающий оператор, таким образом, «сжимает расстояния», что и объясняет его название: расстояние между изображениями Ax, Ay меньше, чем расстояние между их оригиналами x, y. Точнее, это расстояние не больше, чем расстояние между оригиналами, умноженное на α.

Для сжимающих операторов верна следующая теорема. Мы приводим ее без доказательства, так как в настоящей книге она использоваться не будет. Читатель может найти доказательство, например, в [26].

Теорема 8.2. (Теорема Банаха о неподвижной точке или принцип сжимающих отображений.) *Пусть A — сжимающий оператор в полном метрическом пространстве P. Тогда уравнение*

$$x = Ax$$

имеет в этом пространстве одно и только одно решение, т. е. существует ровно один элемент $u \in P$, для которого выполняется $u = Au$. Этот элемент может быть получен как предел последовательности элементов $u_n \in P$,

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n,$$

где $u_{n+1} = Au_n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем элемент $u_1 \in P$ может быть выбран произвольно.

Теорема 8.2 в первую очередь означает существование и единственность решения уравнения $x = Ax$ в предположении, что оператор A является сжимающим в P. Более того, теорема 8.2 дает алгоритм нахождения решения этого уравнения с помощью итерационного процесса, а именно как предел последовательности «последовательных приближений» u_n. Этот алгоритм представляет собой эффективный метод решения (приближенного) задач из различных математических дисциплин. Одно из самых простых применений теоремы Банаха имеет место в линейной алгебре при решении системы n линейных уравнений вида $\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{C}$ с «малой» матрицей $\mathbf{B}$. В этом случае оператор $\mathbf{A}$ задается формулой $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx} + \mathbf{C}$ и является сжимающим на множестве n-мерных векторов, на котором из стандартных методов вводится метрика (для того чтобы $\mathbf{A}$ был сжимающим, достаточно соответствующей норме матрицы $\mathbf{B}$ удовлетворять соотношению $\|\mathbf{B}\| < 1$), и можно применять упомянутую итерационную процедуру, известную в этом случае как простая итерация Ритца (или Якоби). (См., например, [33].)

В последующих главах наиболее часто будут встречаться операторы в гильбертовом пространстве H. Это будут операторы A, B, ..., области определений которых являются подмножествами H (в частных случаях все множество H) и которые отображают эти подмножества в то же гильбертово пространство. Как

уже упоминалось, области определения этих операторов обозначаются символами D_A, D_B, ..., а их множества значений обозначаются символами R_A, R_B, ... Поскольку эти операторы являются отображениями D_A, D_B в H, множества R_A, R_B, ... лежат в H. Заметим, что многие определения и теоремы, приведенные в настоящей главе для этого частного случая, могут быть расширены на более общие случаи, например на случай, в котором рассматриваемый оператор отображает определенное метрическое (или нормированное) пространство на другое метрическое (или нормированное) пространство и т. п.

Следовательно, далее в этой главе нас будет интересовать определенное фиксированное гильбертово пространство H и операторы A, B, ..., имеющие области определения D_A, D_B, ... в H и множества значений R_A, R_B, ... в этом же пространстве H. Короче, речь пойдет об *операторах в гильбертовом пространстве*.

Напоминаем, что норма в гильбертовом пространстве H задается соотношением

$$\|u\| = \sqrt{(u,\ u)},$$

причем метрика задается правилом $\rho(u,\ v) = \|u - v\|$. Запись $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ в H означает то же, что и $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n,\ u) = 0$, т. е. то же, что и $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$. Запись $u = 0$ в H означает, что u является нулевым элементом пространства H.

Определение 8.11. Оператор I называется *единичным оператором*, если он ставит в соответствие любому элементу $u \in D_I$ тот же самый элемент u. Оператор O называется *нулевым оператором*, если он любому элементу $u \in D_O$ ставит в соответствие нулевой элемент пространства H.

Таким образом, единичный оператор характеризуется соотношением

$$Iu = u \text{ для всех } u \in D_I,$$

а нулевой оператор — соотношением

$$Ou = 0 \text{ в } H \text{ для всех } u \in D_O.$$

Определение 8.12. Оператор A называется *непрерывным в точке* $u_0 \in D_A$, если для любой последовательности элементов $u_n \in D_A$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \text{ в } H,$$

мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = Au_0 \text{ в } H$$

(т. е. $\lim_{n\to\infty} \|Au_n - Au_0\| = 0$). Если оператор A непрерывен во всех точках своей области определения D_A, говорят, что он непрерывен в D_A.

Тривиальным примером непрерывного оператора служит единичный оператор (см. опр. 8.11), поскольку в этом случае из соотношения $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$ в H следует

$$\lim_{n\to\infty} Iu_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u_0 = Iu_0 \text{ в } H.$$

Простой признак непрерывности линейных операторов приведен в теореме 8.3.

Определение 8.13. Оператор A называется *ограниченным* в области его определения D_A, если можно найти число $K \geqslant 0$, такое что для всех $u \in D_A$ имеем

$$\|Au\| \leqslant K\|u\|. \tag{8.17}$$

Наименьшее[1]) из чисел K, для которых выполняется соотношение (8.17), называется *нормой оператора* A. Пишут $\|A\|$.

Очевидно, что для всех $u \in D_A$ выполняется соотношение $\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|$.

Пример 8.4. Пусть $K(s, x)$ — (вещественная) функция, квадратично интегрируемая в квадрате Q $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1)$. Обозначим

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(s, x)\, ds\, dx = C^2 \quad (C > 0).$$

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$ оператор A, задаваемый формулой

$$Au = v(s) = \int_0^1 K(s, x)\, u(x)\, dx. \tag{8.18}$$

Из теории интегралов Лебега известно, что при сделанных выше предположениях, во-первых, функция $K(s, x)$ является квадратично интегрируемой по x для почти всех $s \in [0, 1]$ (так что интеграл (8.18) существует для почти всех $s \in [0, 1]$), и, во-вторых, что $v(s) \in L_2(0, 1)$. В соответствии с неравенством Шварца, для любого $s \in [0, 1]$, для которого $K(s, x) \in L_2(0, 1)$, мы имеем

$$v^2(s) = \left(\int_0^1 K(s, x)\, u(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 K^2(s, x)\, dx \int_0^1 u^2(x)\, dx.$$

---

[1]) Можно легко доказать, что такое наименьшее число действительно существует.

Поэтому

$$\int_0^1 v^2(s)\,ds \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 K^2(s,\ x)\,dx \int_0^1 u^2(x)\,dx\right) ds = \\ = \int_0^1 \int_0^1 K^2(s,\ x)\,ds\,dx \cdot \int_0^1 u^2(x)\,dx,$$

или, другими словами, $\|v^2\|_{L_2(0,\,1)} \leqslant C^2 \|u\|^2_{L_2(0,\,1)}$, т. е. $\|Au\|_{L^2(0,\,1)} \leqslant C\|u\|_{L_2(0,\,1)}$.

Следовательно, оператор (8.18) является ограниченным в гильбертовом пространстве $L_2(0,\ 1)$. Так как в качестве постоянной K в (8.17) мы можем взять число C, для нормы $\|A\|$ оператора A получаем оценку $\|A\| \leqslant C$.

Пример 8.5. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(0,\ 1)$ линеал $D_A = C^{(1)}(0,\ 1)$ и определим оператор A на этом линеале с помощью соотношения

$$Au = \frac{du}{dx}.$$

Этот оператор не ограничен на D_A. Чтобы это доказать, достаточно показать, что невозможно найти такую постоянную K, при которой для всех $u \in D_A$ выполняется

$$\|Au\|_{L_2(0,\,1)} \leqslant K\|u\|_{L_2(0,\,1)}. \tag{8.19}$$

Предположим, напротив, что такая постоянная существует, и покажем, что это предположение ведет к противоречию. Рассмотрим функцию

$$v(x) = \sin n\pi x \quad (n \text{—положительное целое число}). \tag{8.20}$$

Ясно, что $v \in D_A$. Далее, $Av = n\pi \cos n\pi x$. По определению нормы имеем

$$\|v\|_{L_2(0,\,1)} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2 n\pi x\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\|Av\|_{L_2(0,\,1)} = \sqrt{\int_0^1 n^2\pi^2 \cos^2 n\pi x\,dx} = n\pi\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Выбирая функцию (8.20), такую что $n\pi > K$, мы получаем противоречие с предположением, что (8.19) справедливо для любой функции из D_A.

Неограниченность является свойством не только оператора A из примера 8.5, но и типичным свойством для всех дифференциальных операторов. Это обстоятельство, как хорошо известно, является источником значительных трудностей в теории диффе-

ренциальных уравнений (обыкновенных и в особенности в частных производных) с граничными условиями. Позднее будет показано, как преодолеть эти трудности.

Если оператор A линейный, то существует простое соотношение между ограниченностью и непрерывностью этого оператора.

Теорема 8.3. *Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H (т. е. отображение линеала $D_A \subset H$ в H). Если оператор A ограничен в D_A, то он также и непрерывен в D_A.*

Доказательство. Мы докажем, что A непрерывен в произвольной точке u_0 своей области определения D_A, тем самым доказав утверждение теоремы. В соответствии с опр. 8.12 мы должны доказать, что для произвольной последовательности элементов $u_n \in D_A$, которая сходится в H к элементу $u_0 \in D_A$, выполняется соотношение $\lim_{n\to\infty} Au_n = Au_0$, или, что то же самое, соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \| Au_n - Au_0 \| = 0. \tag{8.21}$$

Но A линеен по предположению, так что

$$Au_n - Au_0 = A(u_n - u_0). \tag{8.22}$$

Далее, A ограничен. Следовательно,

$$\| A(u_n - u_0) \| \leqslant \| A \| \cdot \| u_n - u_0 \|, \tag{8.23}$$

где $\| A \|$ — норма рассматриваемого оператора (см. опр. 8.13). Поскольку последовательность $\{u_n\}$ сходится по предположению к элементу u_0, т. е. выполняется $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u_0 \| = 0$, из (8.23) следует, что $\lim_{n\to\infty} \| A(u_n - u_0) \| = 0$, откуда, согласно (8.22), $\lim_{n\to\infty} \| Au_n - Au_0 \| = \lim_{n\to\infty} \| A(u_n - u_0) \| = 0$, что и требовалось доказать.

Также справедлива следующая теорема, обратная теореме 8.3. Мы приводим ее без доказательства, поскольку дальше она нам не потребуется.

Линейный оператор A, отображающий свою область определения $D_A \subset H$ в H и непрерывный в D_A, ограничен в D_A.

б) Симметричные, положительные и положительно определенные операторы. Теоремы о плотности

В последующем важную роль будут играть симметричные, положительные и положительно определенные операторы. Перед тем как вводить эти понятия, мы приведем некоторые теоремы, которые, с одной стороны, будут нам нужны непосредственно, а с другой — будут использоваться в дальнейших главах. Это так называемые теоремы о плотности (теоремы 8.5 и 8.6) и теорема Грина для функций нескольких переменных.

Напомним, что символом $C^{(\infty)}(\overline{G})$ мы обозначаем линеал всех (вещественных) функций, непрерывных вместе со своими производными всех порядков в $\overline{G}$. Символом $C_0^{(\infty)}(G)$ (в литературе часто встречается также обозначение $\mathcal{D}(G)$) мы обозначаем линеал всех функций из $C^{(\infty)}(\overline{G})$, которые равны нулю в некоторой окрестности границы области G (эта окрестность может быть различной для различных функций из $C_0^{(\infty)}(G)$. Функции из $C_0^{(\infty)}(G)$ известны в литературе как *функции с компактным носителем в* G. Здесь под носителем функции $\varphi(x)$ (обозначаем через $\operatorname{supp}\varphi$) в G понимается замыкание (в E_N) множества тех точек $x \in \overline{G}$, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Следовательно, $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ означает, что $\varphi \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ и что $\operatorname{supp}\varphi \subset G$. Поскольку $\operatorname{supp}\varphi$ является замкнутым множеством по определению, и поскольку он лежит по предположению в открытой области G, то расстояние от границы Γ до этой области положительно. Это обстоятельство коротко характеризуется утверждением, что $\varphi(x)$ равна нулю в определенной окрестности границы.

Для $N=1$ примером функции с компактным носителем на интервале $(-3, 3)$ служит функция, определенная на этом интервале по формуле

$$u(x) = \begin{cases} e^{-1/(4-x^2)} & \text{при } x \in (-2, 2), \\ 0 & \text{вне интервала } (-2, 2) \end{cases}$$

и изображенная на рис. 6. Во-первых, эта функция имеет непрерывные производные всех порядков в интервале $(-2, 2)$.

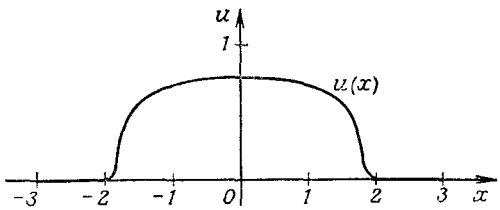

Рис. 6

(Конечно, это верно и в интервалах $(2, 3)$ и $(-3, -2)$, где функция тождественно равна нулю.) Кроме того, непосредственным вычислением легко убедиться в том, что предел справа в точке $x=-2$ и предел слева в точке $x=2$ функции $u(x)$, равно как и всех ее производных, равны нулю (что, конечно, также верно для предела слева в точке $x=-2$ и предела справа в точке $x=2$). Таким образом, функция $u(x)$ действительно обладает производными всех порядков в интервале $(-3, 3)$. Более того, очевидно, что $\operatorname{supp} u = [-2, 2]$, так что $\operatorname{supp} u \subset (-3, 3)$. Следовательно, функция $u(x)$ действительно является функцией с компактным носителем в $(-3, 3)$.

Обсудим случай $N=1$ подробнее.

Рассмотрим сначала функцию $\psi(\rho, x, t)$ вида

$$\psi(\rho, x, t)=\begin{cases} e^{-1/[\rho^2-(x-t)^2]} & \text{при } |x-t|<\rho, \\ 0 & \text{при } |x-t|\geqslant\rho, \end{cases}$$

где ρ — фиксированное положительное число. Аналогично только что рассмотренному случаю функции $u(x)$ можно показать для любого фиксированного $x\in(-\infty, +\infty)$, что функция $\psi(\rho, x, t)$ (как функция переменной t) имеет производные всех порядков в интервале $(-\infty, +\infty)$, причем $\psi(\rho, x, t)\not\equiv 0$ только в интервале $(x-\rho, x+\rho)$. (То же самое, конечно, верно для ψ как функции переменной x при любом фиксированном t.)

Обозначим (для фиксированного x)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\rho, x, t)\,dt=\int\limits_{x-\rho}^{x+\rho}e^{-1/[\rho^2-(x-t)^2]}\,dt=\int\limits_{-\rho}^{\rho}e^{-1/(\rho^2-z^2)}\,dz=h(\rho). \tag{8.24}$$

(Мы произвели подстановку $t-x=z$.) Из этого результата ясно, что интеграл не зависит от x. Функция

$$\varphi(\rho, x, t)=\frac{\psi(\rho, x, t)}{h(\rho)},$$

для которой, конечно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\rho, x, t)\,dt=1 \tag{8.25}$$

на основании (8.24), называется *регуляризующим ядром*. Поясним смысл этого названия.

Рассмотрим произвольную функцию $u\in L_2(a, b)$. Расширим эту функцию с помощью нуля на весь интервал $(-\infty, +\infty)$ (так что в интервалах $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ мы будем иметь $u(x)\equiv 0$) и рассмотрим интеграл

$$\mu(\rho, x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(t)\varphi(\rho, x, t)\,dt,$$

где ρ — заданное положительное число.

Из определения $u(t)$ и из свойств функции $\varphi(\rho, x, t)$ ясно, во-первых, что функция $\mu(\rho, x)$ тождественно равна нулю при x, лежащих вне интервала $(a-\rho, b+\rho)$. Во-вторых, поскольку $\varphi(\rho, x, t)$ — очень гладкая функция, можно ожидать того же от функции $\mu(\rho, x)$. В связи с (8.25) можно ожидать далее, что если число $\rho>0$ очень мало, то $\mu(\rho, x)$ очень «незначительно» отличается в интервале $[a, b]$ от $u(x)$. Эти предполагаемые свойства функции строго формулируются ниже в теореме 8.4 (см., например, [39], с. 219 и 222).

Теорема 8.4. *В интервале* $(-\infty, +\infty)$ *функция* $\mu(\rho, x)$ *имеет производные всех порядков, причем* $\mu(\rho, x) \equiv 0$ *вне интервала* $(a-\rho, b+\rho)$ [1]. *Более того, в* $L_2(a, b)$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{\rho \to 0} \mu(\rho, x) = u(x). \tag{8.26}$$

Теперь мы собираемся доказать теорему «о плотности», которая будет многократно применяться в дальнейшем. Однако сначала мы приведем известное утверждение, касающееся функций из $L_2(a, b)$; см., к примеру, [31].

Пусть $u \in L_2(a, b)$. *Тогда для любого* $\eta > 0$ *можно найти такое* $\delta > 0$, *что как только интервал* $[c, d]$ *лежит в интервале* $[a, b]$ *и как только* $|d-c| \leqslant \delta$, *то*

$$\int_c^d u^2(x)\, dx < \eta. \tag{8.27}$$

Теорема 8.5. *Линеал* $C_0^{(\infty)}(G)$ *плотен в* $L_2(a, b)$.

Доказательство. Мы должны доказать, что любая функция $u \in L_2(a, b)$ может быть аппроксимирована в пространстве $L_2(a, b)$ с произвольной точностью функциями из линеала $C_0^{(\infty)}(a, b)$. Точнее, мы должны доказать, что для любого $u \in L_2(a, b)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $v \in C_0^{(\infty)}(a, b)$, такая что $\|u-v\|_{L_2(a, b)} < \varepsilon$.

Итак, пусть заданы функция $u \in L_2(a, b)$ и число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\eta = \varepsilon^2/8$. Согласно (8.27), для этого η можно найти $\delta > 0$ $[\delta < (b-a)/2]$, такое что

$$\int_a^{a+\delta} u^2(x)\, dx + \int_{b-\delta}^{b} u^2(x)\, dx < 2\eta = \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{8.28}$$

Пусть $z(x)$ — функция, определенная на интервале $[a, b]$ выражением

$$z(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \in [a+\delta, b-\delta], \\ 0 & \text{при } x \in [a, a+\delta) \text{ и при } x \in (b-\delta, b]. \end{cases}$$

(Таким образом, $z(x)$ представляет собой функцию, совпадающую с $u(x)$ в $[a, b]$, за исключением δ-окрестностей точек a и b, в которых она тождественно равна нулю.) Очевидно, что $z \in L_2(a, b)$ и

$$\|u(x)-z(x)\|^2_{L_2(a, b)} = \int_a^b [u(x)-z(x)]^2\, dx = \int_a^{a+\delta} u^2(x)\, dx + \int_{b-\delta}^{b} u^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

[1]) Следовательно, $\mu(\rho, x)$ — функция с компактным носителем, например, в интервале $(a-2\rho, b+2\rho)$.

согласно (8.28), так что $\|u(x)-z(x)\|_{L_2(a,\,b)}<\varepsilon/2$. Выберем число $\rho>0$ и построим по функции $z(x)$ функцию

$$\nu(\rho,\ x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(t)\,\varphi(\rho,\ x,\ t)\,dt$$

аналогично тому, как строилась функция $\mu(\rho,\ x)$ по функции $u(x)$ на с. 95. Эта функция, аналогично функции $\mu(\rho,\ x)$ из теоремы 8.4, имеет производные всех порядков при любом

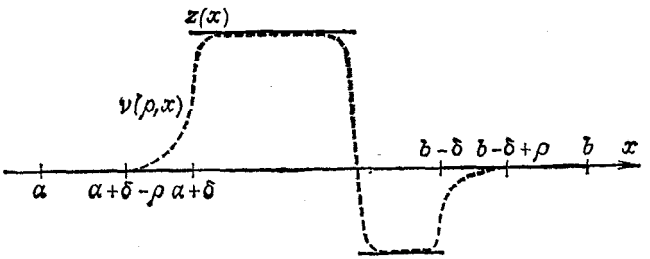

Рис. 7.

$x\in(-\infty,\ \infty)$. Более того, поскольку $z(x)$ тождественно равна нулю в интервалах $[a,\ a+\delta)$, $(b-\delta,\ b]$, то функция $\nu(\rho,\ x)$ при любом $\rho<\delta$ имеет компактный носитель в $(a,\ b)$ (рис. 7).

В соответствии с (8.26) для числа $\varepsilon/2$ можно найти число $\rho_0>0$, такое что для любого положительного $\rho<\rho_0$ выполняется соотношение $\|\nu(\rho,\ x)-z(x)\|_{L_2(a,\,b)}<\varepsilon/2$. Если одновременно $\rho_0<\delta$, то, как только что отмечалось, функция

$$\nu(\rho,\ x),\quad \rho<\rho_0, \tag{8.29}$$

является функцией с компактным носителем в интервале $(a,\ b)$, т. е.

$$\nu(\rho,\ x)\in C_0^{(\infty)}(a,\ b). \tag{8.30}$$

Но в то же время

$$\|u(x)-\nu(\rho,\ x)\|_{L_2(a,\,b)}\leqslant\|u(x)-z(x)\|_{L_2(a,\,b)}+$$
$$+\|z(x)-\nu(\rho,\ x)\|_{L_2(a,\,b)}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

В качестве функции $v\in C_0^{(\infty)}(a,\ b)$, которую мы ищем, можно взять функцию (8.29).

Это завершает доказательство теоремы 8.5.

Аналогичная теорема, охватывающая случай нескольких переменных, может быть доказана подобным образом.

Теорема 8.6. *Пусть G — область с липшицевой границей. Тогда линеал $C_0^{(\infty)}(G)$ всех функций, имеющих компактный носитель в G, плотен в $L_2(G)$.*

Замечание 8.5. Из теоремы 8.5 следует, к примеру, что линеал N всех функций $u(x)$, непрерывных со своими первыми и вторыми производными в интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям $u(a)=0$, $u(b)=0$, плотен в $L_2(a, b)$. Действительно, множество N, очевидно, содержит все функции из $C_0^{(\infty)}(a, b)$; следовательно, если любую функцию $f \in L_2(a, b)$ можно аппроксимировать с произвольной точностью (в метрике $L_2(a, b)$) функциями из $C_0^{(\infty)}(a, b)$, то тем более это можно сделать функциями из N (которых «больше», чем функций из $C_0^{(\infty)}(a, b)$).

Конечно, то же самое верно также и для линеала P, состоящего из тех функций, которые обладают свойствами функций из N и удовлетворяют более общим условиям

$$c_1 u'(a) + c_2 u(a) = 0, \quad c_3 u'(b) + c_4 u(b) = 0,$$

где хотя бы одно из чисел в каждой из пар (c_1, c_2), (c_3, c_4) отлично от нуля (таковы, например, условия $u'(a) - 2u(a) = 0$, $u(b) = 0$). Этот линеал также содержит все функции из $C_0^{(\infty)}(a, b)$, поскольку любая функция $u \in C_0^{(\infty)}(a, b)$ имеет непрерывные производные всех порядков и тождественно равна нулю в окрестности точек a, b, так что $u'(a)=0$, $u(a)=0$, $u'(b)=0$, $u(b)=0$.

Подобные следствия вытекают также из теоремы 8.6. Например, линеал Q всех функций, непрерывных в $\overline{G}$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющих на границе Γ условию $u=0$, плотен в $L_2(G)$. То же верно и для линеала R функций с аналогичными свойствами в $\overline{G}$, удовлетворяющих на Γ условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = 0,$$

где ν — внешняя нормаль к Γ. Здесь c либо постоянная, которая может быть равна нулю, либо функция, заданная на Γ. Оба линеала Q и R содержат множество $C_0^{(\infty)}(G)$, элементы которого с очевидностью удовлетворяют данным условиям.

Замечание 8.6. На рассматриваемые функции можно наложить также и другие требования. Например, без труда можно показать, что линеал функций $u(x)$, имеющих компактные носители в интервале (a, b) и удовлетворяющих в то же время условию

$$\int_a^b u(x)\, dx = 0,$$

плотен в пространстве $L_2(a, b)$ (с метрикой $L_2(a, b)$), состоящем из тех функций $f \in L_2(a, b)$, которые удовлетворяют тому же

условию

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

и т. д.

Для наших рассмотрений будет полезна следующая теорема, известная из классического анализа.

Теорема 8.7. (Теорема Грина или теорема об интегрировании по частям функций нескольких переменных.) *Пусть G — область с липшицевой границей, и пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ и $g(x) = (x_1, \ldots, x_N)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\partial f/\partial x_i$, $\partial g/\partial x_i$ (где i принимает значения 1, ..., N) в $\overline{G} = G + \Gamma$. Тогда выполняется соотношение*

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} g\,dx = \int_\Gamma f g \nu_i\,dS - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_i}\,dx, \tag{8.31}$$

где ν_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали [1]). Приведем теперь определения симметричных, положительных и положительно определенных операторов и типичные примеры этих операторов.

Определение 8.14. Пусть D_A — линеал, плотный в H [2]). Оператор A, линейный в D_A, называется симметричным в D_A, если для любой пары элементов u, v из D_A выполняется

$$(Au, v) = (u, Av). \tag{8.32}$$

Пример 8.6. Обозначим через D_A линеал функций $u(x)$, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{8.33}$$

Согласно теореме 8.5 и замечанию 8.5, этот линеал плотен в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$, в котором, как известно, скалярное произведение определяется соотношением

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\,v(x)\,dx.$$

Определим на D_A оператор A формулой

$$Au = -u''. \tag{8.34}$$

Мы утверждаем, что A симметричен на D_A.

[1]) Можно показать, что если граница Γ области G является липшицевой, то вектор внешней нормали существует почти везде на Γ и интеграл по Γ в (8.31) сходится. (См. гл. 28.)

[2]) Необходимость этого предположения будет ясна из доказательства теоремы 9.2.

Линейность A очевидна. В соответствии с определением 8.14 нам надо доказать, что для любой пары функций $u(x)$, $v(x)$ из D_A

$$(Au,\ v)=(u,\ Av). \tag{8.35}$$

Однако мы имеем

$$(Au,\ v)=-\int_a^b u''v\,dx=-[u'v]_a^b+\int_a^b u'v'\,dx=\int_a^b u'v'\,dx, \tag{8.36}$$

поскольку $v\in D_A$ и, таким образом, $[u'v]_a^b=u'(b)\,v(b)-u'(a)\,v(a)=0$ вследствие (8.33). Применяя эти условия еще раз, получаем

$$\int_a^b u'v'\,dx=[uv']_a^b-\int_a^b uv''\,dx=\int_a^b u(-v'')\,dx=(u,\ Av). \tag{8.37}$$

Из (8.36) и (8.37) немедленно следует (8.35), что и требовалось доказать.

Пример 8.7. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(a,\ b)$ линеал D_B функций, непрерывных со своими первыми и вторыми производными на замкнутом интервале $[a,\ b]$, но не обязательно удовлетворяющих условиям (8.33). Так как линеал D_A из примера 8.6 плотен в $L_2(a,\ b)$, то D_B тем более плотен в $L_2(a,\ b)$. Определим на D_B оператор B соотношением

$$Bu=-u'', \tag{8.38}$$

идентичным соотношению (8.34), определяющему оператор A. Оператор B не является симметричным на D_B. Чтобы это доказать, достаточно найти хотя бы одну пару функций $u(x)$, $v(x)$ из D_B, для которой не выполняется условие

$$(Bu,\ v)=(u,\ Bv). \tag{8.39}$$

Рассмотрим функции

$$u(x)=x-a,\quad v(x)=(x-a)(x-b), \tag{8.40}$$

которые, очевидно, принадлежат D_B. Имеем

$$(Bu,\ v)=-\int_a^b u''v\,dx=0,\quad (u,\ Bv)=-\int_a^b 2(x-a)\,dx=-(b-a)^2\neq 0.$$

Таким образом, (8.39) для функций (8.40) не выполняется, так что оператор B не может быть симметричен на D_B.

Из примеров 8.6 и 8.7 хорошо видно, что свойства двух операторов, определяемых одинаковыми соотношениями (в наших примерах — соотношениями (8.34) и (8.38)), могут быть различны, если различны их области определения.

Пример 8.8. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ линеал D_A функций, принадлежащих $C^{(2)}(\bar{G})$ (т. е. непрерывных вместе со своими частными производными вплоть до второго порядка включительно в замкнутой области $\bar{G}=G+\Gamma$) и удовлетворяющих граничному условию

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{8.41}$$

В соответствии с теоремой 8.6 и замечанием 8.5 D_A плотен в $L_2(G)$. Определим на D_A оператор A соотношением

$$Au=-\Delta u, \tag{8.42}$$

где Δ — оператор Лапласа. (Причина использования здесь отрицательного знака будет ясна из примера 8.10.) Мы докажем, что A — симметричный оператор на D_A.

Линейность A очевидна. Далее, возьмем две произвольные функции $u(x)$, $v(x)$ из D_A. Имеем

$$(Au,\ v)=-\int_G \Delta u\cdot v\,dx=-\int_G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right)v\,dx. \tag{8.43}$$

Полагая в (8.31) $f=\partial u/\partial x_i$ и $g=v$, получаем

$$-\int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,v\,dx=-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}\,v\nu_i\,dS+\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx. \tag{8.44}$$

Написав уравнения (8.44) последовательно для $i=1,\ \ldots,\ N$, просуммировав их и учтя, что

$$\nu_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+\nu_N\frac{\partial u}{\partial x_N}=\frac{\partial u}{\partial \nu},$$

где $\partial u/\partial\nu$ — производная $u(x)$ по внешней нормали, получаем

$$\begin{aligned}(Au,\ v)&=-\int_G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right)v\,dx=\\&=-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\,v\,dS+\sum_{i=1}^N\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx=\sum_{i=1}^N\int_G \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx,\end{aligned} \tag{8.45}$$

поскольку $v\in D_A$ и, следовательно, $v=0$ на Γ. Полностью аналогичным образом получается

$$(u,\ Av)=-\int_G \Delta v\cdot u\,dx=\sum_{i=1}^N\int_G \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx. \tag{8.46}$$

Сравнивая (8.45) и (8.46), мы получаем искомое соотношение $(Au,\ v)=(u,\ Av)$ для всех $u\in D_A$, $v\in D_A$, которое завершает доказательство утверждения.

Аналогично тому, как это было сделано в примере 8.7, мы могли бы обнаружить, что оператор B, определенный посредством

(8.42) на линеале D_B функций, имеющих свойства, подобные свойствам функций из D_A, но необязательно удовлетворяющих условиям (8.41), не является симметричным.

Определение 8.15. Оператор A называется *положительным в своей области определения* D_A, если он симметричен[1]) и если для всех $u \in D_A$ выполняются соотношения

$$(Au,\ u) \geqslant 0, \tag{8.47}$$

$$(Au,\ u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ в } D_A. \tag{8.48}$$

Если, кроме того, существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in D_A$ справедливо

$$(Au,\ u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{8.49}$$

то оператор A называется положительно определенным в D_A.

Из определения 8.15 следует, что любой положительно определенный оператор положителен в D_A. Обратное неверно.

Из следующих примеров станет ясно, что проверка условия (8.48) существенна для того, чтобы показать положительность оператора A в D_A. «Обратное» свойство $u = 0$ в $D_A \Rightarrow (Au,\ u) = 0$ очевидно.

Пример 8.9. Оператор A из примера 8.6 является положительным: в примере 8.6 было доказано, что A симметричен. Далее, из (8.36), т. е. из

$$(Au,\ v) = \int_a^b u'v'\,dx \text{ при всех } u \in D_A,\ v \in D_A, \tag{8.50}$$

прежде всего следует, что

$$(Au,\ u) = \int_a^b u'^2\,dx \geqslant 0 \text{ для любого } u \in D_A, \tag{8.51}$$

поскольку $u'^2(x) \geqslant 0$ в $[a, b]$. Осталось доказать (8.48), т. е. справедливость вывода

$$(Au,\ u) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b]. \tag{8.52}$$

Таким образом, пусть $(Au,\ u) = 0$, т. е., согласно (8.51), пусть

$$\int_a^b u'^2\,dx = 0. \tag{8.53}$$

---

[1]) Можно показать, что в случае комплексного гильбертова пространства симметрия оператора A следует прямо из требования (8.47). Для вещественного гильбертова пространства требование симметрии должно быть сформулировано отдельно.

Функция $u'(x)$ непрерывна на $[a, b]$ по предположению, так как $u \in D_A$. Следовательно, из (8.53) вытекает, что $u'(x) \equiv 0$, т. е. $u(x) = \text{const}$ на $[a, b]$. Поскольку $u \in D_A$, мы имеем $u(a) = u(b) = 0$, так что $u(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Мы докажем, что A является даже положительно определенным в D_A. Для этого мы должны показать, что существует постоянная C, такая что для любого $u \in D_A$

$$(Au, u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{8.54}$$

т. е., согласно (8.51), такая что

$$\int_a^b u'^2(x)\,dx \geqslant C^2 \int_a^b u^2(x)\,dx.$$

Поскольку $u \in D_A$, мы имеем $u(a) = 0$ и, таким образом,

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Согласно неравенству Шварца (6.17) (см. также с. 29), получаем

$$u^2(x) = \left(\int_a^x u'(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^x 1^2 dx \cdot \int_a^x u'^2(t)\,dt = (x-a)\int_a^x u'^2(t)\,dt.$$

Так как $x - a \geqslant 0$ и $u'^2(t) \geqslant 0$ на $[a, b]$, тем более справедливо

$$u^2(x) \leqslant (x-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt$$

и, следовательно,

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant \int_a^b u'^2(t)\,dt \cdot \int_a^b (x-a)\,dx = \int_a^b u'^2(t)\,dt \cdot \frac{(b-a)^2}{2}. \tag{8.55}$$

Если вернуться к обычному обозначению x для переменной в определенном интеграле $\int_a^b u'^2(t)\,dt$, то можно переписать (8.55) в виде

$$\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)\,dx \geqslant \int_a^b u^2(x)\,dx,$$

т. е., учитывая (8.51), в виде $(Au, u) \geqslant C^2\|u\|^2$, где

$$C = \frac{\sqrt{2}}{b-a},$$

что и требовалось доказать.

Пример 8.10. Покажем, что оператор A из примера 8.8 положителен в D_A. В примере 8.8 было показано, что A симметричен

в D_A. Таким образом, достаточно доказать, что для любого $u \in D_A$ выполняются условия (8.47), (8.48), т. е. что для любого $u \in D_A$ мы имеем

$$(-\Delta u,\ u) \geqslant 0, \tag{8.56}$$

$$(-\Delta u,\ u) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \text{ в } \bar{G}. \tag{8.57}$$

Однако из (8.45) для любого $u \in D_A$ следует неравенство

$$(Au,\ u) = (-\Delta u,\ u) = \sum_{i=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant 0, \tag{8.58}$$

поскольку $(\partial u/\partial x_i)^2 \geqslant 0$ в $\bar{G}$ для любого $i = 1, \ldots, N$. Поэтому (8.56) справедливо для любого $u \in D_A$. Осталось доказать

$$(-\Delta u,\ u) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \text{ в } \bar{G}. \tag{8.59}$$

Однако из $(-\Delta u,\ u) = 0$, т. е. из

$$\sum_{i=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0,$$

мы получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \equiv 0, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_N} \equiv 0 \text{ в } \bar{G}, \tag{8.60}$$

поскольку $u \in D_A$ и в силу этого производные $\partial u/\partial x_1, \ \ldots, \ \partial u/\partial x_N$ непрерывны в $\bar{G}$. Из (8.60) имеем $u(x) = \text{const}$ в $\bar{G}$, и из условия (8.41), т. е. из условия $u = 0$ на Γ, следует тогда, что $u(x) \equiv 0$ в $\bar{G}$, что и требовалось доказать.

Следовательно, оператор A из примера 8.8 положителен в D_A. Как и в предыдущем примере, можно показать, что A является даже положительно определенным в D_A. Доказательство здесь не приводится, поскольку этот результат будет следовать в качестве частного случая из рассуждений, проведенных в гл. 22.

в) Функционалы. Теорема Рисса

В этой посвященной операторам главе были введены некоторые понятия. Сначала (см. определения 8.1—8.10) был определен оператор как отображение множества M_1 в множество M_2 (в качестве частного случая обсуждалось отображение M_1 на M_2), были введены равенство, сумма и произведение двух операторов (в связи с этим упоминалось так называемое расширение оператора), определены простой оператор, оператор, обратный к данному, и линейный оператор. Темой второго раздела послужил частный случай операторов — операторы в гильбертовом пространстве. В этом разделе были определены единичный и нулевой операторы, затем непрерывный оператор и ограниченный оператор. Простая связь

между двумя последними была обсуждена для случая линейных операторов. Наконец, мы уделили внимание симметричным, положительным и положительно определенным операторам, играющим существенную роль в краевых задачах для дифференциальных уравнений.

В этом последнем разделе гл. 8 мы займемся так называемыми функционалами, которые представляют собой частный случай операторов.

Определение 8.16. Оператор F, который отображает свою область определения D_F в множество вещественных или комплексных чисел, называется *функционалом* (*вещественным* или *комплексным* соответственно).

Таким образом, функционал F ставит в соответствие каждому элементу $u \in D_F$ определенное число Fu (в литературе часто записываемое также $F(u)$), вещественное или комплексное.

В последующем будут рассматриваться *вещественные функционалы*, если не будет специально оговариваться обратное.

Так как функционал представляет собой частный случай оператора, все понятия и результаты, приведенные в предыдущих разделах, остаются справедливыми, конечно, в той мере, в какой они не были получены для других случаев (например, для случая операторов, отображающих некоторое множество из гильбертова пространства в то же гильбертово пространство). В частности, определение 8.9 остается неизменным.

Определение 8.17. Вещественный функционал F называется *линейным* в своей области определения D_F, если D_F — линеал и если для произвольных вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ и произвольных элементов $u_1, \ldots, u_n$ из D_F выполняется соотношение

$$F(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = a_1Fu_1 + a_nFu_n. \tag{8.61}$$

Определения непрерывности и ограниченности функционалов также полностью аналогичны определениям 8.12 и 8.13. Мы приводим их здесь для случая, в котором область определения D_F данного функционала лежит в некотором гильбертовом пространстве H. Заметим, что Fu и Fu_n — вещественные числа и символ $\lim_{n\to\infty} Fu_n = Fu$ означает поэтому сходимость последовательности вещественных чисел Fu_n к числу Fu. Норма $\|Au\|$ из определения 8.13 в данном случае представляет собой абсолютную величину $|Fu|$ числа Fu.

Определение 8.18. Функционал F называется *непрерывным в точке* $u_0 \in D_F$, если для любой последовательности элементов $u_n \in D_F$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \quad \text{в} \quad H, \tag{8.62}$$

мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} Fu_n = Fu_0. \tag{8.63}$$

Если функционал F непрерывен в каждой точке $u_0 \in D_F$, говорят, что он непрерывен в D_F.

Определение 8.19. Функционал F называется *ограниченным* в D_F, если существует число K, такое что для всех элементов $u \in D_F$ справедливо

$$|Fu| \leqslant K\|u\|. \tag{8.64}$$

Наименьшее из чисел K, для которых выполняется (8.64), называется *нормой функционала* F. Пишут $\|F\|$.

Пример 8.11. Пусть v — некоторый фиксированный элемент (вещественного) гильбертова пространства H. Тогда соотношение

$$Fu = (u, v) \quad \text{для всех} \quad u \in H \tag{8.65}$$

задает линейный ограниченный функционал в H, норма которого равна норме элемента v. Во-первых, ясно, что F — функционал, поскольку для любого $u \in H$, (u, v) представляет собой определенное (вещественное) число. Далее, в соответствии с определением гильбертова пространства множество элементов H является линеалом. Проверить условие (8.61) несложно, поскольку из свойств скалярного произведения следует, что

$$F(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = (a_1u_1 + \ldots + a_nu_n, v) = \\ = a_1(u_1, v) + \ldots + a_n(u_n, v) = a_1Fu_1 + \ldots + a_nFu_n. \tag{8.66}$$

Следовательно, функционал (8.65) линейный. Из хорошо известного свойства скалярного произведения, $|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$, следует, что F ограничен; легко видеть, что в качестве числа K в неравенстве (8.64) можно взять $\|v\|$. Более того, легко можно показать, что $\|v\|$ — наименьшее из чисел K, удовлетворяющих условию (8.64): действительно, для элемента v имеем $Fv = (v, v) = \|v\| \cdot \|v\|$, так что число $K = \|v\|$ в (8.64) не может быть уменьшено. Следовательно, норма функционала (8.65) равна $\|v\|$.

Частным случаем функционала (8.65) при $H = L_2(0, 1)$ и при $v(x) \equiv 1$ на интервале $[0, 1]$ является функционал G, задаваемый формулой

$$Gu = \int_0^1 u(x)\, dx. \tag{8.67}$$

В соответствии с примером 8.11 G является линейным ограниченным функционалом с нормой $\|G\| = 1$.

Из примера 8.11 ясно, что для фиксированного $v \in H$ скалярное произведение (u, v) определяет линейный ограниченный функционал с нормой $\|F\| = \|v\|$. Однако справедлива также следующая важная теорема.

Теорема 8.8. (Теорема Рисса.) *Любой линейный ограниченный функционал F в гильбертовом пространстве H может быть представлен в виде*

$$Fu = (u, v), \tag{8.68}$$

где v — некоторый элемент H, однозначно определяемый функционалом F. Кроме того, $\|v\| = \|F\|$.

Заметим, что теорема 8.8 гарантирует существование такого элемента $v \in H$, что для всех $u \in H$ справедливо (8.68). Однако в общем случае далеко не просто найти такой элемент по заданному функционалу F.

Идея доказательства теоремы 8.8 состоит в следующем: если для всех $u \in H$ $Fu = 0$, то достаточно положить $v = 0$. Пусть Fu — ненулевой функционал. Обозначим через L линеал с метрикой пространства H, состоящий из тех элементов $z \in H$, для которых $Fz = 0$. Так как F ограничен, то легко доказать, что L является подпространством H. Обозначим через K его ортогональное дополнение в H, так что $H = L \oplus K$. Далее, поскольку F не является нулевым функционалом, существует такой $x \in K$, что $Fx = \alpha \neq 0$. Для элемента $y = x/\alpha$ тогда справедливо, что $y \in K$ и $Fy = 1$. Пусть u — произвольный элемент H. Обозначим $Fu = \beta$. Легко можно показать, что $u = (u - \beta y) + \beta y$, где $u - \beta y \in L$, $\beta y \in K$. Следовательно, простое вычисление дает

$$(u, y) = ((u - \beta y) + \beta y, y) = \beta \|y\|^2 = \|y\|^2 \cdot Fu,$$

поскольку $u - \beta y \perp y$, так что

$$Fu = \left(u, \frac{y}{\|y\|^2}\right).$$

Таким образом, в теореме 8.8 достаточно положить $v = y/\|y\|^2$.

Если v' — некоторый другой элемент, такой что $Fu = (u, v')$ для любого $u \in H$, то (вычитая) мы имеем $(u, v' - v) = 0$. Следовательно, полагая $u = v' - v$, получаем $v' - v = 0$, так что элемент v, обладающий рассматриваемым свойством, единствен.

Далее, $|Fu| = |(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$, так что $\|F\| \leqslant \|v\|$. Однако не может быть $\|F\| < \|v\|$, поскольку $Fv = (v, v) = \|v\|^2$, так что, действительно, $\|F\| = \|v\|$.

Аналогично тому, как это делалось на с. 93, можно доказать следующий результат.

Теорема 8.9. *Линейный функционал непрерывен в D_F в том и только том случае, если он ограничен.*

Замечание 8.7. В следующей главе будут встречаться функционалы вида $Fu = (Au, u) - 2(f, u)$, где A — положительный оператор на линеале D_A, плотном в гильбертовом пространстве H, и $f \in H$. Так как (ввиду линейности A) для любого вещественного

a выполняется соотношение

$$(A(au),\ au) = a^2 (Au,\ u),$$

мы говорим о члене (Au, u) как о квадратичном члене функционала F, а сам функционал F называем *квадратичным функционалом*.

Понятия, введенные в этой главе, равно как и полученные результаты, позволяют нам перейти сейчас к формулировке основных теорем, непосредственно позволяющих применять вариационные методы к решению операторных уравнений вида $Au = f$, в частности к решению краевых задач для дифференциальных уравнений.

Часть II

Вариационные методы

Глава 9

Теорема о минимуме квадратичного функционала и ее следствия

В начале гл. 8 мы уже отмечали, что наибольший интерес для нас будут представлять уравнения вида

$$Au = f, \tag{9.1}$$

где A — некоторый оператор (чаще всего дифференциальный), f — заданная правая часть (как правило, элемент гильбертова пространства), а u — искомое решение. Мы показали, как прийти к уравнению такого вида на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона, т. е. задачи [1])

$$-\Delta u = f(x, y) \text{ в } G, \tag{9.2}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{9.3}$$

где Γ — граница области G. Оператор $-\Delta$ рассматривался на линеале M_1 функций, принадлежащих $C^{(2)}(\bar{G})$ и удовлетворяющих условию (9.3) на Γ. Мы показали (см. теорему 8.6 или замечание 8.5 и примеры 8.8 и 8.10), что M_1 плотен в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ и что оператор $-\Delta$ симметричен и положителен на M_1. Было упомянуто, что позднее будет доказана положительная определенность этого оператора.

В дальнейшем будет очень часто встречаться следующая постановка задачи: задано некоторое гильбертово пространство (не обязательно пространство $L_2(G)$, как в случае рассмотренного примера; при решении некоторых задач целесообразно рассматривать более общие пространства или пространства с существенно отличными свойствами). В этом пространстве заданы линеал D_A, а также плотный в H и положительный (или положительно определенный) оператор A, который отображает D_A в H. Далее, задан некоторый элемент $f \in H$. Мы ищем такой элемент $u \in D_A$, который

[1]) Вместо оператора Δ, рассмотренного в упомянутом примере, мы рассматриваем здесь оператор $-\Delta$, который обладает тем преимуществом, существенным для дальнейшего изложения, что является положительным на линеале M_1. С другой стороны, совершенно безразлично, пишем ли мы уравнение Пуассона в виде $\Delta u = g(x, y)$ или в виде $-\Delta u = f(x, y)$, где $f(x, y) = -g(x, y)$.

удовлетворяет в H уравнению

$$Au = f. \tag{9.4}$$

Записывая (9.4), мы имеем в виду, что уравнение $Au = f$ удовлетворяется в рассматриваемом пространстве H, т. е. что $Au - f$ — нулевой элемент H. Например, если $H = L_2(G)$, то (9.4) означает выполнение равенства $Au = f$ почти везде в области G, т. е. везде, кроме, может быть, точек, образующих множество меры нуль.

Сначала мы покажем, что если A положителен в D_A, то уравнение (9.4) может иметь не более одного решения $u \in D_A$ в H. Прежде чем перейти к доказательству, повторим вкратце некоторые определения, введенные в гл. 8.

Пусть D_A — линеал, плотный в гильбертовом пространстве H. Оператор A, отображающий D_A в H, называется симметричным в D_A, если он линеен в D_A и если равенство

$$(Au, v) = (u, Av) \tag{9.5}$$

справедливо для любой пары элементов $u \in D_A$, $v \in D_A$. Оператор A называется положительным в D_A, если он симметричен в D_A и если для всех $u \in D_A$ выполняется неравенство

$$(Au, u) \geqslant 0, \tag{9.6}$$

причем

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{в} \quad D_A. \tag{9.7}$$

Теорема 9.1. *Если A — положительный оператор в D_A, то уравнение* (9.4), *в котором $f \in H$, имеет не более одного решения $u \in D_A$ в H.*

Доказательство. Допустим, что существуют два решения $u_1 \in D_A$, $u_2 \in D_A$, т. е. пусть в H выполнены равенства

$$Au_1 = f, \tag{9.8}$$

$$Au_2 = f. \tag{9.9}$$

Вычитая (9.8) из (9.9) и принимая во внимание, что A положителен и поэтому заведомо является линейным оператором, так что $Au_2 - Au_1 = A(u_2 - u_1)$, получаем $A(u_2 - u_1) = 0$ в H. Умножая [1]) последнее уравнение на элемент $u_2 - u_1 \in D_A$, получаем $(A(u_2 - u_1), u_2 - u_1) = 0$, откуда, согласно (9.7), $u_2 - u_1 = 0$ в D_A, или, что то же самое, $u_2 = u_1$ в D_A, что и требовалось доказать.

Следующая теорема чрезвычайно важна для наших целей.

Теорема 9.2. (Теорема о минимуме квадратичного функционала). *Пусть A — положительный оператор в D_A, $f \in H$. Пусть уравне-*

[1]) Точнее, умножая скалярно «справа».

ние (9.4) *имеет решение* $u_0 \in D_A$, *т. е. выполняется*

$$Au_0 = f \text{ в } H, \quad u_0 \in D_A. \tag{9.10}$$

Тогда квадратичный[1]) *функционал*

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u) \tag{9.11}$$

принимает на u_0 *минимальное значение в* D_A, *т. е. для всех* $u \in D_A$ *имеет место* $Fu \geqslant Fu_0$, *причем* $Fu = Fu_0$ *только при* $u = u_0$.

С другой стороны, пусть среди всех элементов $u \in D_A$ *функционал* (9.11) *принимает свое минимальное значение на элементе* u_0. *Тогда* u_0 *является решением уравнения* (9.4) *в* H, *т. е. справедливо* (9.10).

Доказательство. Во-первых, очевидно, что функционал Fu определен при всех $u \in D_A$.

1. Пусть уравнение (9.10) удовлетворяется в H при $u = u_0$, так что $f = Au_0$. Подставляя это f в (9.11), получаем при $u \in D_A$ $Fu = (Au, u) - 2(Au_0, u)$. Однако легко видеть, что

$$\begin{aligned} Fu &= (Au, u) - 2(Au_0, u) = (Au, u) - (Au_0, u) - (u, Au_0) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) + (Au_0, u_0) - (Au_0, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0). \end{aligned}$$

(Мы использовали, с одной стороны, симметрию скалярного произведения, т. е. равенство $(Au_0, u) = (u, Au_0)$, и, с другой стороны, симметрию оператора A, согласно которой $(u, Au_0) = (Au, u_0)$.)

Следовательно, если выполнено $Au_0 = f$, то

$$Fu = (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0). \tag{9.12}$$

Член (Au_0, u_0) в (9.12) не зависит от u и, таким образом, остается постоянным; затем, оператор A положителен по предположению, так что для первого члена в правой части (9.12) мы имеем $(A(u - u_0), u - u_0) \geqslant 0$ при любом $u \in D_A$, причем $(A(u - u_0), u - u_0) = 0$ в том и только том случае, если $u - u_0 = 0$ в D_A. Таким образом, из (9.12) следует, что $Fu \geqslant Fu_0$ при любом $u \in D_A$ и при этом $Fu = Fu_0$, только если $u = u_0$ в D_A. Следовательно, если удовлетворяется уравнение $Au_0 = f$, то функционал Fu принимает свое минимальное значение в D_A в точности на элементе $u = u_0$. Это завершает доказательство первого утверждения теоремы 9.2.

2. Пусть функционал Fu принимает свое минимальное значение в D_A на элементе u_0. Это значит, что если мы выберем произвольный элемент $v \in D_A$ и произвольное вещественное число t (так что $u_0 + tv$, разумеется, также принадлежит D_A), то

$$F(u_0 + tv) \geqslant Fu_0. \tag{9.13}$$

[1]) См. замечание 8.7.

Используя снова симметрию A и симметрию скалярного произведения, можно получить

$$\begin{aligned} F(u_0+tv) &= (A(u_0+tv),\ u_0+tv)-2(f,\ u_0+tv) = \\ &= (Au_0+tAv,\ u_0+tv)-2(f,\ u_0)-2t(f,\ v) = \\ &= (Au_0,\ u_0)+t(Av,\ u_0)+t(Au_0,\ v)+t^2(Av,\ v)-2t(f,\ v)- \\ &\qquad -2(f,\ u_0) = \\ &= (Au_0,\ u_0)+2t(Au_0,\ v)+t^2(Av,\ v)-2t(f,\ v)-2(f,\ u_0). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$F(u_0+tv) = (Au_0,\ u_0)+2t(Au_0,\ v)+t^2(Av,\ v)-2t(f,\ v)-2(f,\ u_0). \tag{9.14}$$

Поскольку $u_0 \in D_A$ и $f \in H$ — фиксированные элементы, то из (9.14) очевидно, что для фиксированного $v \in D_A$ функция $F(u_0+tv)$ является квадратичной по переменной t. Из (9.13) следует существование у этой функции локального минимума при $t=0$. Это означает, что ее первая производная равна нулю при $t=0$,

$$\frac{d}{dt}F(u_0+tv)\Big|_{t=0} = 0, \tag{9.15}$$

или, согласно (9.14), что

$$2(Au_0,\ v)-2(f,\ v) = 0, \tag{9.16}$$

т. е. что [1])

$$(Au_0-f,\ v) = 0. \tag{9.17}$$

Элемент $v \in D_A$ можно выбрать произвольным образом (использовалось лишь то, что он фиксирован), так что от условия (9.13) можно прийти к уравнению (9.17) при любом $v \in D_A$. Линеал D_A по предположению плотен в H. Следовательно, из (9.17) следует, что элемент Au_0-f ортогонален в H всем элементам множества, являющегося плотным в H. Таким образом, в соответствии с теоремой 6.18

$$Au_0-f = 0 \text{ в } H, \tag{9.18}$$

т. е. u_0 является в H решением уравнения $Au_0=f$, что и требовалось доказать.

Пример 9.1. В качестве примера, делающего теорему 9.2 и ее доказательство более привычными для инженеров и научных работников, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(EIu'')'' = q \tag{9.19}$$

[1]) В вариационном исчислении функционал $d/dtF(u+tv)|_{t=0}$ называется первой вариацией функционала F. Элемент u_0, для которого первая вариация равна нулю, часто называют стационарной точкой функционала F. В нашем случае первая вариация F имеет вид $(Au-f,\ v)$ и функционал принимает минимальное значение в стационарной точке u_0.

с граничными условиями

$$u(0)=u(l)=0, \quad u'(0)=u'(l)=0. \tag{9.20}$$

Предположим, что функции $E(x)$, $I(x)$ и их первые и вторые производные, равно как и функция $q(x)$, непрерывны в интервале $[0, l]$ и что

$$E(x)>0, \quad I(x)>0 \text{ в } [0, l]. \tag{9.21}$$

Уравнение (9.19) можно интерпретировать как дифференциальное уравнение изгиба балки длины l с модулем упругости $E(x)$, с моментом инерции $I(x)$ поперечного сечения относительно оси изгиба (эта ось носит также название нейтральной) и с распределенной нагрузкой $q(x)$. Условия (9.20) означают, что балка жестко закреплена («заделана») на обоих концах.

Если E и I постоянны в $[0, l]$, то (9.19) можно записать в виде $EIu^{(4)}=q$.

Выберем $H=L_2(0, l)$ и обозначим через D_A линеал функций, которые непрерывны со своими производными до четвертого порядка включительно в интервале $[0, l]$ и удовлетворяют условиям (9.20). В соответствии с теоремой 8.5 и замечанием 8.5, D_A плотен в $L_2(0, l)$. Определим оператор A на D_A выражением

$$Au=(EIu'')''. \tag{9.22}$$

Задача (9.19), (9.20) может быть записана тогда в виде

$$Au=q. \tag{9.23}$$

Легко доказать, что A положителен на D_A. Сначала докажем, что он симметричен в D_A. Для любых $u\in D_A$, $v\in D_A$ получаем

$$(Au, v)=\int_0^l (EIu'')''v\,dx=[(EIu'')'v]_0^l-\int_0^l (EIu'')'v'\,dx=$$

$$=-\int_0^l (EIu'')'v'\,dx=-[EIu''v']_0^l+\int_0^l EIu''v''\,dx=\int_0^l EIu''v''\,dx. \tag{9.24}$$

(Выражения $[(EIu'')'v]_0^l$ и $[EIu''v']_0^l$ равны нулю, поскольку вследствие (9.20) мы имеем $v(0)=v(l)=0$ и $v'(0)=v'(l)=0$ соответственно.) Аналогично получаем

$$(u, Av)=\int_0^l u(EIv'')''\,dx=\int_0^l EIu''v''\,dx. \tag{9.25}$$

Из (9.24) и (9.25) немедленно следует симметрия A на D_A. Далее, из (9.24) получаем

$$(Au, u)=\int_0^l EIu''^2\,dx \tag{9.26}$$

при всех $u\in D_A$.

Ввиду (9.21) из (9.26) следует, что $(Au,\ u)\geqslant 0$ при любом $u\in D_A$. Кроме того, если $(Au,\ u)=0$, то из (9.26) и (9.21) следует, что $u''(x)\equiv 0$ на $[0,\ l]$, откуда $u(x)=ax+b$ на $[0,\ l]$ и вследствие (9.20) $u(x)\equiv 0$ на $[0,\ l]$.

Это доказывает, что A является положительным на D_A.

Функционал $Fu=(Au,\ u)-2(q,\ u)$ имеет в данном случае вид

$$Fu=\int_0^l EIu''^2\,dx-2\int_0^l qu\,dx \tag{9.27}$$

и при заданном прогибе $u\in D_A$ равен удвоенной общей потенциальной энергии Lu рассматриваемой балки:

$$Fu=2Lu=2\left(\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2\,dx-\int_0^l qu\,dx\right). \tag{9.28}$$

(Как известно, упругая потенциальная энергия балки и потенциальная энергия внешних сил, т. е. заданной нагрузки q, даются соответственно выражениями

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2\,dx \quad \text{и} \quad -\int_0^l qu\,dx.) \tag{9.29}$$

Пусть $u_0(x)$ — решение (9.23), т. е. пусть $u_0\in D_A$ и

$$(EIu_0'')''=q. \tag{9.30}$$

Подставляя q из (9.30) в (9.27), получаем

$$Fu=\int_0^l EIu''^2\,dx-2\int_0^l (EIu_0'')''u\,dx.$$

Интегрируя по частям аналогично (9.24), имеем (для заданного $u_0\in D_A$ и при любом $u\in D_A$)

$$\int_0^l (EIu_0'')''u\,dx=\int_0^l EIu_0''u''\,dx,$$

так что

$$Fu=\int_0^l EIu''^2\,dx-2\int_0^l EIu_0''u''\,dx=\int_0^l EI(u''-u_0'')^2\,dx-\int_0^l EIu_0''^2\,dx. \tag{9.31}$$

Поскольку $(u''-u_0'')^2\geqslant 0$ и в то же время выполняется (9.21), из (9.31) видно, что Fu минимально в D_A, только если $u''-u_0''=0$ в D_A, или, вследствие (9.20), только если $u=u_0$ в D_A. Таким образом, мы можем сформулировать наше первое утверждение, которое соответствует первому утверждению теоремы 9.2: если

$u_0 \in D_A$ является решением уравнения (9.23), то функционал Fu принимает минимальное значение в D_A в точности на u_0.

Пусть, обратно, $u_0 \in D_A$ — элемент, минимизирующий в D_A функционал (9.27). Пусть $v \in D_A$ — произвольный элемент из D_A и пусть t — произвольное вещественное число. В этом случае условие минимума

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\Big|_{t=0} = 0$$

(см. (9.15)) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^l EI(u_0'' + tv'')^2\,dx - 2\int_0^l q(u_0 + tv)\,dx\right]\Big|_{t=0} = 0,$$

или

$$2\int_0^l EIu_0''v''\,dx - 2\int_0^l qv\,dx = 0. \tag{9.32}$$

Деля (9.32) на 2 и интегрируя первый член по частям (см. (9.24)), можно свести рассматриваемое условие к виду

$$\int_0^l [(EIu_0'')'' - q]\,v\,dx = 0.$$

Это равенство должно выполняться при всех $v \in D_A$. Однако линеал D_A плотен в $L_2(0, l)$, откуда (так же, как и в (9.18))

$$(EIu_0'')'' - q = 0 \tag{9.33}$$

в $L_2(0, l)$. Но функции, входящие в (9.33), так же как и их производные, непрерывны в $[0, l]$ по предположению, так что (9.33) выполняется и в обычном смысле. Таким образом, мы приходим ко второму утверждению, снова соответствующему утверждению теоремы 9.2: если функция $u_0(x)$, принадлежащая D_A (и удовлетворяющая тем самым условиям (9.20)), минимизирует в D_A функционал (9.27) [1]), то она удовлетворяет условию (9.33), т. е. является решением дифференциального уравнения для прогиба рассматриваемой балки.

Оба только что приведенных утверждения представляют собой не что иное, как принцип минимума потенциальной энергии, известный из теории упругости и примененный к рассматриваемой балке. Они показывают тесную связь между теоремой 9.2 и вариационными принципами механики. Конечно, теорема 9.2 рассматривает уравнение $Au = f$ безотносительно к его физической интерпретации или к интерпретации соответствующего функционала Fu.

[1]) Или функционал Lu, поскольку Lu, конечно, принимает минимальное значение в D_A только в том случае, если Fu принимает минимальное значение на D_A.

Замечание 9.1. Чтобы прояснить связь между теоремой 9.2 и принципами механики, был приведен очень простой пример. Читатель может проверить, что в этом случае достаточно последовательно интегрировать уравнение (9.19) без рассмотрения его связей с «функционалами энергии» (9.27) или (9.28). Однако теорема 9.2 будет применяться в дальнейшем к решению задач существенно более общего характера.

Значение теоремы 9.2 заключается в том, что она сводит задачу решения уравнения $Au=f$ к задаче нахождения элемента $u_0 \in D_A$, минимизирующего функционал (9.11) на линеале D_A. В последующих главах будут продемонстрированы эффективные методы нахождения этого элемента u_0 (или, может быть, его достаточно хорошей аппроксимации).

Однако здесь необходимо сделать следующее замечание, которое имеет принципиальное значение. Теорема 9.2 имеет *условный характер*: она выражает эквивалентность задачи о решении на D_A уравнения $Au=f$ и задачи о нахождении на D_A минимума квадратичного функционала (9.11) при условии, что либо существует решение уравнения $Au=f$ (подробнее — существует такое $u_0 \in D_A$, что справедливо $Au_0=f$ в H), либо функционал (9.11) принимает на D_A минимальное значение. Однако заведомое выполнение любого из этих предположений не гарантируется даже в очень простых случаях. Например, если мы ищем решение уравнения (9.2) среди функций линеала M_1, упомянутого в начале этой главы, и если функция f в правой части этого уравнения «в достаточной мере» разрывна (например, если эта функция равна нулю в некоторой подобласти области G и единице во всех остальных точках G), так что она не может быть сделана непрерывной никаким изменением ее значений на множестве меры нуль, то очевидно, что уравнение (9.1) не имеет решения в M_1, поскольку при всех $u \in M_1$ Δu является непрерывной в $\bar{G}$ функцией. Согласно теореме 9.2, в этом случае функционал (9.11) не может принимать минимального значения на M_1. (В противном случае в силу теоремы 9.2 существовало бы решение $u_0 \in M_1$ уравнения (9.2)[1].) Чтобы преодолеть эту трудность, представляется естественным соответствующим образом расширить (или прямо задать) область определения оператора $-\Delta u$. Подобные проблемы, связанные с расширением первоначальной области определения рассматриваемого оператора, встречаются также и в более общем случае. Задача о расширении соответствующим образом базового линеала D_A непроста. Это расширение должно быть таким, чтобы функционал (9.11) принимал, в определенном смысле, минималь-

[1]) Аналогично, если нагрузка $q(x)$ на балку, рассмотренную в примере 9.1, разрывна (случай, часто встречающийся в приложениях), то (9.23) не может иметь решение $u_0 \in D_A$ (так как левая часть этого уравнения должна тогда быть непрерывной на $[0, l]$) и, следовательно, функционал (9.27) также не может принимать на D_A минимальное значение.

ное значение на расширенной области. Элемент, на котором принимается это минимальное значение, называется тогда «обобщенным» решением уравнения $Au=f$. В то же время эта расширенная область должна оставаться достаточно «узкой», чтобы обеспечить единственность обобщенного решения; затем, если существует «классическое» решение u_0 уравнения (9.10) в смысле теоремы 9.2, то обобщенное решение должно совпадать с этим «классическим». Одна общая для некоторых расширений процедура будет приведена в гл. 34. Ниже будет показано построение так называемого пространства H_A, которое является достаточно общим для наших ближайших целей и в котором можно с легкостью доказать существование и единственность элемента, минимизирующего расширенный функционал (9.11), и тем самым также существование и единственность обобщенного решения нашей задачи. Построение будет выполнено при предположении о том, что оператор A *положительно определен в* D_A.

Глава 10

Пространство H_A

Пусть в гильбертовом пространстве H задан плотный в H линеал D_A и на нем — оператор A, отображающий D_A в H и являющийся положительно определенным на D_A. Тогда этот оператор симметричен на D_A и существует такая постоянная $C>0$, что при всех $u\in D_A$ выполняется

$$(Au,\ u)\geqslant C^2\|u\|^2. \tag{10.1}$$

Определим на D_A новое скалярное произведение формулой

$$(u,\ v)_A=(Au,\ v) \text{ для всех } u\in D_A,\ v\in D_A. \tag{10.2}$$

Легко проверить, что $(u,\ v)_A$ действительно является скалярным произведением, т. е. удовлетворяет всем аксиомам (6.3)—(6.6): так как A по предположению положительно определен, уже из определения следует, что он симметричен (и поэтому еще и линеен). Следовательно, для произвольных элементов u, v, u_1, u_2 из D_A и для произвольных вещественных чисел a_1, a_2 имеем

$$(u,\ v)_A=(Au,\ v)=(u,\ Av)=(Av,\ u)=(v,\ u)_A,$$

$$(a_1u_1+a_2u_2,\ v)_A=(A(a_1u_1+a_2u_2),\ v)=(a_1Au_1+a_2Au_2,\ v)=$$
$$=a_1(Au_1,\ v)+a_2(Au_2,\ v)=a_1(u_1,\ v)_A+a_2(u_2,\ v)_A,$$

что доказывает выполнение первых двух аксиом (6.3) и (6.4) скалярного произведения. Но оставшиеся аксиомы (6.5) и (6.6) также выполнены, поскольку из (10.1) следует, что $(u,\ u)_A=(Au,\ u)\geqslant 0$, причем $(u,\ u)_A=0$ только в том случае, если $u=0$ в D_A.

Следовательно, (10.2) действительно определяет скалярное произведение на D_A.

Пример 10.1. Рассмотрим в пространстве $L_2(a, b)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x) v(x) dx$$

линеал D_A функций, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными на замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{10.3}$$

Определим на D_A оператор A формулой

$$Au = -u''. \tag{10.4}$$

Как показано в примере 8.9, этот оператор положительно определен на D_A, причем в указанном примере выведено равенство

$$(u, v)_A = (u', v'). \tag{10.5}$$

В этом случае новое скалярное произведение $(u, v)_A$ функций $u(x)$, $v(x)$ из D_A задается исходным скалярным произведением (т. е. скалярным произведением в $L_2(a, b)$) их производных $u'(x)$, $v'(x)$.

Поскольку $(u, v)_A$ обладает всеми свойствами скалярного произведения, то, как показано в гл. 3 (или по существу уже в гл. 2),

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A} \tag{10.6}$$

и

$$\rho_A(u, v) = \|u - v\|_A \tag{10.7}$$

удовлетворяют всем аксиомам нормы и расстояния соответственно, так что соотношения (10.6), (10.7) определяют на D_A соответственно новые норму и расстояние. Следовательно, линеал D_A с метрикой (10.7) образует линейное метрическое пространство, а именно предгильбертово пространство (см. определение 6.4) со скалярным произведением (10.2). Обозначим это пространство через S_A. Заметим, что из (10.6), (10.2) и (10.1) следует, что для любого элемента $u \in D_A$ мы имеем

$$\|u\|_A^2 \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{10.8}$$

т. е.

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{C} \|u\|_A \tag{10.9}$$

с той же самой постоянной $C > 0$, что и в (10.1).

Например, для оператора (10.4) из примера 10.1 мы имеем при всех $u \in D_A$

$$\|u\|_A^2 = \|u'\|^2 \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{10.10}$$

т. е.

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{C}\|u\|_A, \tag{10.11}$$

где (см. пример 8.9) можно положить $C = \sqrt{2}/(b-a)$.

Из (10.9) немедленно следует: если для последовательности $\{u_n\}$ элементов из D_A мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0 \tag{10.12}$$

или

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0, \tag{10.13}$$

то также выполняются соответственно утверждения

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\| = 0 \tag{10.14}$$

или

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\| = 0. \tag{10.15}$$

На словах: *если последовательность $\{u_n\}$ сходится к элементу u в S_A, то она также сходится к этому элементу в H; если $\{u_n\}$ фундаментальна в S_A, то она также фундаментальна и в H. Как легко видеть, обратные утверждения неверны.*

В общем случае пространство S_A (с метрикой (10.7)) не обязательно является полным. Если оно полное, то это — гильбертово пространство (определение 6.13) и для наших целей его дальше расширять не нужно. Поэтому пусть S_A не является полным. Как отмечалось в гл. 7, «добавляя» так называемые особые элементы к элементам S_A, можно построить полное пространство, называемое пополнением пространства S_A. Обозначим это полное пространство H_A. В этой главе мы опишем построение такого пространства и одновременно покажем, что при сделанном в начале главы предположении о положительной определенности A на D_A все особые элементы могут быть выбраны из элементов исходного пространства H[1]).

Для этой цели рассмотрим множество M всех последовательностей, фундаментальных в S_A. Так как S_A по предположению не полное, некоторые из этих последовательностей сходятся к элементам, принадлежащим S_A (обозначим множество этих последовательностей через M_1), в то время как некоторые из них не имеют предела в S_A (обозначим их множество через M_2). Мы

[1]) Читателю, желающему продвигаться побыстрее, нет необходимости прослеживать всю процедуру построения пространства H_A в деталях. В настоящий момент он может ограничиться только сделанным утверждением. См. также краткое изложение на с. 177.

утверждаем, во-первых, что если мы выберем две произвольные последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ из M, то независимо от того принадлежат ли они M_1 или M_2, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A. \tag{10.16}$$

В соответствии с критерием Больцано — Коши достаточно доказать, что последовательность $\{\|u_n - v_n\|_A\}$ является фундаментальной, т. е. что

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} (\|u_m - v_m\|_A - \|u_n - v_n\|_A) = 0. \tag{10.17}$$

Однако согласно (6.19) и (6.18),

$$\begin{aligned} |\|u_m - v_m\|_A - \|u_n - v_n\|_A| &\leqslant \|(u_m - v_m) - (u_n - v_n)\|_A = \\ &= \|(u_m - u_n) - (v_m - v_n)\|_A \leqslant \|u_m - u_n\|_A + \|v_m - v_n\|_A. \end{aligned} \tag{10.18}$$

По предположению последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ фундаментальны в S_A, так что

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0, \tag{10.19}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|v_m - v_n\|_A = 0, \tag{10.20}$$

откуда, согласно (10.18), следует (10.17), что и требовалось доказать.

Так как числа $\|u_n - v_n\|_A$ неотрицательны, предел $\{\|u_n - v_n\|_A\}$ не может быть отрицательным. Следовательно, для любой пары последовательностей $\{u_n\} \in M$, $\{v_n\} \in M$ мы имеем либо

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A = 0, \tag{10.21}$$

либо

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A = a > 0 \tag{10.22}$$

(где, естественно, число a для разных пар рассматриваемых последовательностей в общем случае различно).

Рассмотрим теперь последовательности из M_1, т. е. фундаментальные последовательности, имеющие предел в S_A. Обозначим через M_{u_0} множество всех последовательностей из M_1, которые сходятся в S_A к элементу u_0. Мы утверждаем, что все эти последовательности удовлетворяют соотношению (10.21). И обратно, если $\{u_n\}$ — одна из этих последовательностей, то любая другая последовательность $\{v_n\}$, удовлетворяющая (10.21), принадлежит M_{u_0} (т. е. сходится в S_A к тому же элементу u_0, что и последовательность $\{u_n\}$).

Первая часть сделанного утверждения следует из неравенства

$$\|u_n - v_n\|_A = \|(u_n - u_0) - (v_n - u_0)\|_A \leqslant \|u_n - u_0\|_A + \|v_n - u_0\|_A. \tag{10.23}$$

А именно, если обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ принадлежат M_{u_0}, то

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0, \tag{10.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u_0\|_A = 0, \tag{10.25}$$

откуда, согласно (10.23), мы получаем (10.21).

Вторая часть сделанного утверждения, т. е. справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u_0\|_A = 0 \tag{10.26}$$

при предположении, что выполняются (10.24) и (10.21), сразу же следует из неравенства

$$\|v_n - u_0\|_A = \|(v_n - u_n) + (u_n - u_0)\|_A \leqslant \|v_n - u_n\|_A + \|u_n - u_0\|_A. \tag{10.27}$$

Как легко видеть, из приведенного утверждения следует, что если $\{u_n\} \in M_{u_0}$ и если для последовательности $\{v_n\}$ выполнено (10.22), то $\{v_n\}$ не может принадлежать M_{u_0}, так как в этом случае должно было бы выполняться (10.21), что противоречит (10.22).

Из полученных результатов следует, что если последовательности из M_1 разбить на классы таким образом, что последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ из M_1 принадлежат к одному классу тогда и только тогда, когда они удовлетворяют (10.21), то эти классы находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами S_A. *Каждому элементу $u_0 \in S_A$ соответствует класс M_{u_0} последовательностей из M_1, которые сходятся в S_A к этому элементу, и каждому из таких классов соответствует один и только один элемент $u_0 \in S_A$, а именно тот, к которому сходится в S_A некоторая* (произвольная) *последовательность из этого класса* (поскольку, как только что было показано, все остальные последовательности из этого класса сходятся к тому же элементу).

Рассмотрим теперь последовательности из M_2, т. е. фундаментальные в S_A последовательности, не имеющие предела в S_A. Аналогично рассмотренному выше случаю, разобьем также и эти последовательности на классы таким образом, что две последовательности $\{u_n\} \in M_2$, $\{v_n\} \in M_2$ принадлежат к одному классу тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A = 0. \tag{10.28}$$

В настоящем случае этим классам не будут соответствовать элементы u_0 из S_A в рассмотренном выше смысле, поскольку последовательности из M_2 не имеют предела в S_A. Однако мы увидим, что можно установить взаимно однозначное соответствие между этими классами и некоторыми элементами H (не принадлежащими S_A). Обозначим множество этих элементов через D_I. В дальней-

шем на эти элементы мы обобщим скалярное произведение $(u, v)_A$, определенное пока только для элементов S_A, и таким образом придем к искомому полному пространству H_A. Элементы D_I оказываются при этом упомянутыми выше „особыми элементами“ (см. текст, следующий за соотношением (10.15)).

Элементы D_I получаются следующим образом. Возьмем некоторую последовательность $\{u_n\}$ из M_2. По предположению эта последовательность фундаментальна в S_A, так что она также фундаментальна в H (см. (10.15)). Поскольку H — полное пространство, последовательность $\{u_n\}$ сходится в H к некоторому элементу (однозначно определяемому этой последовательностью), который мы обозначим через u_0. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \text{ в } H. \tag{10.29}$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{v_n\} \in M_2$ из того же класса, к которому принадлежит $\{u_n\}$, так что справедливо (10.28). Мы докажем, что $\{v_n\}$ имеет в H тот же предел u_0, что и $\{u_n\}$, т. е. что

$$\lim_{n\to\infty} v_n = u_0 \text{ в } H. \tag{10.30}$$

Следовательно, нам нужно доказать, что из (10.29) и (10.28) следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u_0\| = 0. \tag{10.31}$$

Однако из (10.9) следует, что $\|u_n - v_n\| \leqslant (1/C)\|u_n - v_n\|_A$, откуда, согласно (10.28), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = 0. \tag{10.32}$$

Аналогично (10.27), $\|v_n - u_0\| = \|(v_n - u_n) + (u_n - u_0)\| \leqslant \|v_n - u_n\| + \|u_n - u_0\|$, откуда, так как выполняются (10.32) и (10.29), следует (10.31), что и требовалось доказать.

Следовательно, каждому классу последовательностей из M_2 соответствует, в смысле построения (10.29), некоторый элемент H (не принадлежащий S_A), однозначно определяемый этим классом последовательностей. Множество всех таких элементов (соответствующих рассматриваемым классам) обозначается символом D_I, как уже упоминалось. Покажем, что и наоборот — каждому $u_0 \in D_I$ соответствует один и только один класс последовательностей из M_2. Для этого достаточно доказать, что любым двум различным классам последовательностей из M_2 соответствуют (в смысле построения (10.29)) два различных элемента из D_I [1]).

[1]) Это не так очевидно, как может показаться на первый взгляд. Из (10.9) следует, что если последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ „близки“ в метрике S_A, то они также „близки“ в метрике H. Но две последовательности, „близкие“ в H, не обязательно „близки“ в S_A. Поэтому может оказаться, что две последовательности из различных классов в метрике S_A могут иметь один и тот же предел в H.

Две последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ из M_2 принадлежат или не принадлежат одному классу в зависимости от того, удовлетворяют ли они (10.21) или (10.22) соответственно. Таким образом, рассмотрим две последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ из различных классов, так что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_A = a > 0. \tag{10.33}$$

Предположим, что эти последовательности имеют один и тот же предел в H, т. е. пусть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = u_0 \text{ в } H. \tag{10.34}$$

Мы покажем, что это предположение ведет к противоречию, которое доказывает, что два различных класса последовательностей из M_2 не могут соответствовать (в смысле построения (10.29)) общему элементу в H.

Обозначим $z_n = u_n - v_n$. Поскольку обе последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ фундаментальны в S_A, последовательность $\{z_n\}$ также фундаментальна, и, согласно (10.33),

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n\|_A = a > 0, \tag{10.35}$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} (z_n, z_n)_A = a^2 > 0, \tag{10.36}$$

поскольку $(z_n, z_n)_A = \|z_n\|_A^2$. В то же время, согласно (10.34),

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \text{ в } H, \tag{10.37}$$

и, таким образом, по теореме 6.17

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 0. \tag{10.38}$$

Так как $\{z_n\}$ является фундаментальной последовательностью в S_A, то по теореме 7.8 существует такая постоянная $K > 0$, что для всех n выполняется

$$\|z_n\|_A \leqslant K. \tag{10.39}$$

Обозначим

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2(K+1)}, \tag{10.40}$$

где a — постоянная из (10.35). Так как $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{z_n\}$ фундаментальна, можно найти для данного ε число n_0, такое что

$$\|z_m - z_n\|_A < \varepsilon \tag{10.41}$$

для любой пары положительных целых чисел $m > n_0$, $n > n_0$. Выберем фиксированное $m > n_0$. Как легко видеть,

$$(z_n, z_n)_A = (z_n - z_m, z_n)_A + (z_m, z_n)_A. \tag{10.42}$$

Далее,

$$|(z_m,\ z_n)_A| = |(Az_m,\ z_n)| \leqslant \|Az_m\| \cdot \|z_n\|. \tag{10.43}$$

Поскольку m фиксировано, и, таким образом, Az_m является фиксированным элементом H, то из (10.43) и (10.38) следует, что для числа ε, заданного в (10.40), можно найти такое число n_0', что для всех $n > n_0'$ выполняется

$$|(z_m,\ z_n)_A| < \varepsilon. \tag{10.44}$$

В то же время для всех $n > n_0$, согласно (10.39) и (10.41), выполняется

$$|(z_n - z_m,\ z_n)_A| \leqslant \|z_m - z_n\|_A \cdot \|z_n\|_A < K\varepsilon. \tag{10.45}$$

Обозначим $N = \max(n_0,\ n_0')$. Для всех $n > N$ неравенства (10.44) и (10.45) справедливы одновременно и, таким образом, согласно (10.42), также выполняется

$$(z_n,\ z_n)_A < K\varepsilon + \varepsilon = (K+1)\varepsilon = \frac{a^2}{2} \tag{10.46}$$

ввиду (10.40) [1]). Следовательно, не может быть $\lim_{n\to\infty}(z_n,\ z_n)_A = a^2$, что противоречит (10.36).

Таким образом, для классов последовательностей из M_2 можно сделать утверждение, аналогичное тому, которое касалось взаимно однозначного соответствия между классами последовательностей из M_1 и элементами линеала D_A:

Любому элементу $u_0 \in D_I$ соответствует в точности один класс последовательностей из M_2, а именно класс тех последовательностей из M_2, которые сходятся в H к u_0. И наоборот — каждому из этих классов в D_I соответствует ровно один элемент u_0, а именно тот элемент, который является в H пределом (произвольной) последовательности из этого класса.

Обозначим через D объединение D_A и D_I,

$$D = D_A \cup D_I. \tag{10.47}$$

Таким образом, в соответствии с только что приведенным утверждением существует взаимно однозначное соответствие между элементами D и классами фундаментальных в S_A последовательностей, причем, как было объяснено выше, эти классы характеризуются тем, что две последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, фундаментальные в S_A, принадлежат к одному классу в том и только том случае, если справедливо (10.21). Рассматриваемое соответствие, очевидно, линейное (если $\{u_n\}$ соответствует элемент u_0, то $\{au_n\}$ соответствует элемент au_0 и т. д.), откуда следует, что D — линеал. Это позволяет определить на этом множестве скалярное произведение. Обозначим это произведение тем же символом $(u,\ v)_A$, который

[1]) Знак модуля можно опустить, так как $(z_n,\ z_n)_A \geqslant 0$.

мы уже использовали в (10.2) для элементов D_A. (Из дальнейшего будет видно, что мы действительно имеем на это право.) Мы определяем

$$(u_0, v_0)_A = \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n)_A \text{ для любой пары элементов } u_0 \in D,\ v_0 \in D, \tag{10.48}$$

где $\{u_n\}$ или $\{v_n\}$ $(u_n \in D_A, v_n \in D_A)$ — последовательность из класса, который соответствует в указанном выше смысле u_0 или v_0 соответственно.

Чтобы оправдать определение (10.48) (и выбранное обозначение), необходимо показать, что:

1. Предел (10.48) всегда существует и конечен.

2. Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{u_n\}$ или $\{v_n\}$ из класса, который соответствует u_0 или v_0 соответственно.

3. (10.48) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

4. Для $u_0 \in D_A$, $v_0 \in D_A$ произведение (10.48) равно произведению (10.2) (так что скалярное произведение (10.48) представляет собой расширение скалярного произведения (10.2) с линеала D_A на линеал D).

Проведем доказательство по пунктам.

1. Достаточно показать, что последовательность $(u_n, v_n)_A$ фундаментальна, т. е. что

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |(u_m, v_m)_A - (u_n, v_n)_A| = 0. \tag{10.49}$$

Но последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ фундаментальны в S_A, так что

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0, \tag{10.50}$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|v_m - v_n\|_A = 0; \tag{10.51}$$

кроме того, по теореме 7.8 существует постоянная K, такая что для всех n выполняется

$$\|u_n\|_A \leqslant K, \quad \|v_n\|_A \leqslant K. \tag{10.52}$$

Далее, так как элементы последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ принадлежат S_A, имеем

$$\begin{aligned} |(u_m, v_m)_A - (u_n, v_n)_A| &= |(u_m - u_n, v_m)_A + (u_n, v_m - v_n)_A| \leqslant \\ &\leqslant |(u_m - u_n, v_m)_A| + |(u_n, v_m - v_n)_A| \leqslant \|u_m - u_n\|_A \cdot \|v_m\|_A + \\ &+ \|u_n\|_A \cdot \|v_m - v_n\|_A \leqslant K(\|u_m - u_n\|_A + \|v_m - v_n\|_A), \end{aligned} \tag{10.53}$$

откуда ввиду (10.50) и (10.51) следует соотношение (10.49).

2. Пусть $\{\tilde{u}_n\}$ или $\{\tilde{v}_n\}$ суть некоторые другие фундаментальные последовательности из классов, соответствующих в указанном выше

смысле элементам u_0 или v_0, рассматриваемым в (10.48). Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n-\tilde{u}_n\|_A=0, \tag{10.54}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n-\tilde{v}_n\|_A=0. \tag{10.55}$$

Затем, пусть постоянная K в (10.52) такова, что помимо (10.52) выполняется также неравенство

$$\|\tilde{u}_n\|_A\leqslant K. \tag{10.56}$$

Имеем

$$\begin{aligned}|(u_n,\ v_n)_A-(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)_A|&=|(u_n-\tilde{u}_n,\ v_n)_A+(\tilde{u}_n,\ v_n-\tilde{v}_n)_A|\leqslant\\ &\leqslant|(u_n-\tilde{u}_n,\ v_n)_A|+|(\tilde{u}_n,\ v_n-\tilde{v}_n)_A|\leqslant\|u_n-\tilde{u}_n\|_A\cdot\|v_n\|_A+\\ &+\|\tilde{u}_n\|_A\cdot\|v_n-\tilde{v}_n\|_A\leqslant K(\|u_n-\tilde{u}_n\|_A+\|v_n-\tilde{v}_n\|_A),\end{aligned} \tag{10.57}$$

откуда вследствие (10.54) и (10.55) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}|(u_n,\ v_n)_A-(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)_A|=0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(u_n,\ v_n)_A=\lim_{n\to\infty}(\tilde{u}_n,\ \tilde{v}_n)_A.$$

Полученное соотношение доказывает независимость предела (10.48) от выбора последовательностей из классов, соответствующих u_0 и v_0.

3. Свойства (6.3)—(6.6) произведения (10.48) здесь подробно доказываться не будут, поскольку они непосредственно вытекают при переходе к пределу (10.48) из свойств скалярного произведения (10.2). Например,

$$(u_0,\ v_0)_A=\lim_{n\to\infty}(u_n,\ v_n)_A=\lim_{n\to\infty}(v_n,\ u_n)_A=(v_0,\ u_0)_A$$

и т. д.

4. Если $u_0\in D_A$, $v_0\in D_A$, достаточно положить в (10.48) $u_n=u_0$ и $v_n=v_0$, поскольку, как доказано выше в п. 2, величина произведения (10.48) не зависит от выбора последовательностей из соответствующих классов.

Следовательно, (10.48) действительно определяет скалярное произведение на D. Это произведение является расширением скалярного произведения (10.2), определенного первоначально для элементов множества D_A, на все множество D. Поскольку (10.48) является скалярным произведением, соотношения

$$\|u\|_A=\sqrt{(u,\ u)_A},\quad u\in D, \tag{10.58}$$

$$\rho_A(u,\ v)=\|u-v\|_A,\quad u\in D,\ v\in D, \tag{10.59}$$

определяют на D норму и метрику. Здесь опять-таки легко показать, что (10.58) и (10.59) суть расширения нормы (10.6) и метрики (10.7) соответственно на все множество D. Кроме того, из

(10.48) легко можно получить „обычные правила“, например:

$$\|u\|_A = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_A, \tag{10.60}$$

если $u \in D$ и $\{u_n\}$ — некоторая последовательность из класса фундаментальных последовательностей, соответствующих в S_A u, и т. д.

Определение 10.1. Предгильбертово пространство, образованное элементами линеала D со скалярным произведением (10.48) и метрикой (10.59), называется *пространством* H_A.

Теорема 10.1. *Пространство H_A — полное в метрике* (10.59); *таким образом, оно является гильбертовым пространством. Линеал D_A плотен в H_A.*

Доказательство. а) *Плотность.* Пусть u — произвольный элемент из H_A. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти элемент $v \in D_A$, такой что выполнено

$$\rho_A(u, v) = \|u - v\|_A \leqslant \varepsilon. \tag{10.61}$$

По предположению $u \in D$. Следовательно, этому u однозначно соответствует некоторый класс последовательностей, фундаментальных в S_A (и тем самым также в H_A). Выберем одну из них и обозначим ее через $\{u_n\}$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $\{u_n\}$ фундаментальна в H_A, найдется число n_0, такое что для любой пары чисел m, n, для которых $m > n_0$, $n > n_0$, мы имеем

$$\|u_m - u_n\|_A \leqslant \varepsilon. \tag{10.62}$$

Пусть u_n — фиксированный элемент, выбранный из рассматриваемой последовательности так, что $n > n_0$. Поскольку $\{u_m\}$ — одна из последовательностей из S_A, соответствующих элементу u, то $\{u_m - u_n\}$ (при фиксированном n) — одна из последовательностей из S_A, соответствующих $u - u_n$. Согласно (10.60), имеем

$$\|u - u_n\|_A = \lim_{m\to\infty} \|u_m - u_n\|_A.$$

Но $n > n_0$, так что при всех $m > n_0$ справедливо соотношение (10.62). Таким образом, рассматриваемый предел не может быть больше ε, т. е.

$$\|u - u_n\|_A \leqslant \varepsilon. \tag{10.63}$$

Следовательно, в качестве искомого элемента v можно взять выбранный элемент u_n.

Это завершает доказательство плотности D_A в H_A.

Отметим еще следующее обстоятельство: число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, так что из (10.63) следует, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в H_A к элементу u. Следовательно, если u — произвольный элемент из H_A и если $\{u_n\}$ — последовательность

из класса фундаментальных в S_A последовательностей, соответствующего u, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } H_A. \tag{10.64}$$

б) *Полнота.* Пусть $\{v_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в H_A. Нужно доказать, что эта последовательность имеет предел в H_A.

Так как D_A плотен в H_A, то в этом пространстве любой элемент $\{v_n\}$ можно аппроксимировать с произвольной точностью элементом z_n из D_A. В частности, можно найти последовательность $\{z_n\}$ элементов из D_A, такую что при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполняется

$$\|z_n - v_n\|_A < 1/n. \tag{10.65}$$

Мы утверждаем, что не только последовательность $\{v_n\}$, но также и последовательность $\{z_n\}$ являются фундаментальными в H_A. Действительно, из неравенства треугольника следует

$$\|z_m - z_n\|_A = \|(z_m - v_m) + (v_n - z_n) + (v_m - v_n)\|_A \leqslant \\ \leqslant \|z_m - v_m\|_A + \|z_n - v_n\|_A + \|v_m - v_n\|_A. \tag{10.66}$$

Из (10.66), (10.65) и из того, что $\{v_n\}$ — фундаментальная последовательность, немедленно следует сделанное утверждение.

Теперь, поскольку $\{z_n\}$ фундаментальна в H_A и, таким образом, также в S_A (так как элементы $\{z_n\}$ принадлежат D_A), ей соответствует в D некоторый элемент z (однозначно определяемый этой последовательностью). Согласно (10.64), $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ в H_A, или

$$\lim_{n\to\infty} \|z - z_n\|_A = 0. \tag{10.67}$$

Несложно показать, что также выполняется

$$\lim_{n\to\infty} v_n = z \text{ в } H_A. \tag{10.68}$$

Действительно, мы имеем $\|z - v_n\|_A \leqslant \|z - z_n\|_A + \|z_n - v_n\|_A$. Из (10.67), (10.65) и последнего соотношения немедленно следует $\lim_{n\to\infty} \|z - v_n\|_A = 0$, т. е. (10.68).

Этим завершается доказательство полноты пространства H_A.

Замечание 10.1. Из (10.48) легко показать переходом к пределу, что соотношения (10.8) и (10.9), т. е. соотношения

$$\|u\|_A^2 \geqslant C^2 \|u\|^2, \quad C > 0, \tag{10.69}$$

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{C} \|u\|_A, \quad C > 0, \tag{10.70}$$

которые выполняются в S_A, остаются справедливыми в H_A.

Замечание 10.2. В начале этой главы мы не исключали случай, в котором S_A является полным пространством. Если это так, то строить расширение не нужно и мы имеем $D=D_A$ и $H_A=S_A$. Этот случай имеет место, например, если $D_A=H$ и A—единичный оператор (определение 8.11), т. е. если $A=I$. Очевидно, этот оператор положительно определен в H, поскольку он линеен и симметричен, и для любого $u\in H$ мы имеем $(Iu, u)=(u, u)$, так что достаточно положить в (10.1) $C=1$. Однако этот случай не представляет большого интереса, поскольку уравнение $Au=f$ сводится здесь к $u=f$ и элемент f сам является решением этого уравнения. Интерес представляет именно случай, когда S_A—не полное и, таким образом, $H_A\neq S_A$. Это типично, например, для дифференциальных операторов, встречающихся в инженерных и научных задачах.

Замечание 10.3. В гл. 11 будет показано, что пространство H_A уже достаточно «широкое», чтобы можно было доказать существование его элемента, минимизирующего в этом пространстве функционал F из гл. 9 (соответствующим образом модифицированный), и таким образом доказать существование «обобщенного» решения данной задачи $Au=f$. Мы построили пространство H_A—в случае, когда пространство S_A не было полным—путем «добавления» к элементам множества D_A некоторых элементов пространства H (множество таких элементов было обозначено через D_I). Этим способом мы получили линеал D и расширили на это множество скалярное произведение и метрику S_A. Конечно, читатель задаст вопрос: какова структура множества D_I, т. е. как в двух словах охарактеризовать те элементы H, которые принадлежат D_I? В данный момент мы не можем дать более общий ответ на этот вопрос. Что касается частных случаев, то здесь некоторую идею подсказывает пример 10.1: в этом примере $H=L_2(a, b)$, и D_A образовано функциями $u(x)$, непрерывными вместе со своими первыми и вторыми производными на замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяющими граничным условиям

$$u(a)=u(b)=0. \tag{10.71}$$

Из (10.5) следует, что скалярное произведение $(u, v)_A$ задается в пространстве S_A соотношением

$$(u, v)_A=\int_a^b u'v'dx. \tag{10.72}$$

Таким образом, можно ожидать, что D_I будет образовано, грубо говоря, такими функциями из $H=L_2(a, b)$, которые не принадлежат D_A, но для которых интеграл (10.72) все же имеет смысл. (Для этого достаточно, например, чтобы первые производные этих функций были квадратично интегрируемы в (a, b).) Кроме того,

необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли — по крайней мере, в некотором «разумном» смысле — граничным условиям (10.71).

В случае дифференциальных операторов (обыкновенных или в частных производных) второго порядка — случай, очень часто встречающийся в приложениях, — мы, как правило, выбираем в качестве пространства H $L_2(a, b)$ или $L_2(G)$, и тогда в качестве линеала D_A, как правило, линеал функций, непрерывных вместе со своими обыкновенными или частными производными первого и второго порядка на замкнутом интервале $[a, b]$ или в замкнутой области $\bar{G}$ и удовлетворяющих определенным условиям в точках a, b или на границе Γ области G соответственно. Функции из множества D_I (по крайней мере в случаях, встречающихся в книге) имеют тогда так называемые обобщенные производные (обыкновенные или частные) первого порядка, квадратично интегрируемые в рассматриваемой области (интервале или пространственной области соответственно). Однако, вообще говоря, уже производных второго порядка они не имеют. Подробнее эти вопросы см. в гл. 32. Поскольку, как мы увидим, вышеупомянутый функционал F принимает минимальное значение на линеале D (это означает, что «обобщенное решение» нашей задачи $Au = f$ является элементом D), возникает вопрос — в каком смысле это обобщенное решение будет решением рассматриваемой задачи, если этот элемент не будет принадлежать D_A. Удовлетворительный — в некотором смысле — ответ на этот вопрос будет дан в следующей главе.

Глава 11

Существование минимума функционала F в пространстве H_A. Обощенные решения

Рассмотрим функционал

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u), \quad u \in D_A \tag{11.1}$$

из гл. 9. В предположении, что оператор A положителен на линеале D_A, из теоремы 9.2 мы знаем, что если уравнение $Au = f$ имеет решение[1]) $u_0 \in D_A$, то функционал F принимает на этом элементе u_0 свое минимальное значение среди всех элементов $u \in D_A$, и наоборот — если F принимает на D_A минимальное значение на определенном элементе $u_0 \in D_A$, то этот элемент является решением уравнения $Au = f$ в H. В конце гл. 9 отмечалось, что теорема 9.2 имеет условный характер, поскольку в ней предполагается либо существование решения $u_0 \in D_A$ данного уравнения, либо существование элемента $u_0 \in D_A$, минимизирующего функционал F на D_A,

[1]) Имеется в виду решение в рассматриваемом гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v).

в то время как существование такого элемента не гарантируется ни в первом, ни во втором случае.

Если, более того, оператор A положительно определен, то, как видно из гл. 10, можно построить «пополнение» D_A — гильбертово пространство H_A, скалярное произведение $(u, v)_A$ которого представляет собой расширение скалярного произведения, заданного на исходном множестве D_A соотношением

$$(u, v)_A = (Au, v), \quad u \in D_A, \quad v \in D_A. \tag{11.2}$$

Функционал (11.1) может тогда быть записан в виде

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in D_A. \tag{11.3}$$

Однако скалярное произведение $(u, v)_A$ определено для всех элементов H_A, а не только для элементов линеала D_A. Это относится (при фиксированном $f \in H$) и к скалярному произведению (f, u), так как если $u \in H_A$, то также $u \in H$. Следовательно, функционал F, согласно (11.3), может быть расширен на все пространство H_A,

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in H_A. \tag{11.4}$$

Мы покажем, что функционал, расширенный таким образом, принимает в H_A минимальное значение и что элемент u_0, на котором достигается этот минимум в H_A, однозначно определяется элементом $f \in H$.

Функционал (f, u) является линейным [1]) и в то же время ограниченным в H (определение 8.19) при любом фиксированном $f \in H$, так как, согласно неравенству Шварца (6.17),

$$|(f, u)| \leqslant \|f\| \cdot \|u\|, \tag{11.5}$$

так что можно в определении 8.19 положить $K = \|f\|$. Однако функционал (f, u) является (при любом фиксированном $f \in H$) линейным и ограниченным также и в H_A. А именно, согласно (10.70), при любом $u \in H_A$

$$\|u\| \leqslant (1/C)\|u\|_A, \tag{11.6}$$

откуда с учетом (11.5) следует, что для любых $f \in H$ и $u \in H_A$, $|(f, u)| \leqslant (\|f\|/C)\|u\|_A$. Следовательно, в этом случае в определение 8.19 можно положить $K = \|f\|/C$. Поскольку H_A — гильбертово пространство, а F ограничен в H_A, в соответствии с теоремой Рисса (теорема 8.8) существует элемент $u_0 \in H_A$, однозначно определяемой элементом $f \in H$, такой что

$$(u_0, u)_A = (f, u) \tag{11.7}$$

для всех $u \in H_A$. Если теперь вместо (f, u) написать в (11.4), согласно (11.7), $(u_0, u)_A$, то получится

$$Fu = (u, u)_A - 2(u_0, u)_A = (u, u)_A - 2(u_0, u)_A + (u_0, u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2. \tag{11.8}$$

[1]) Линейность (f, u) очевидна, так как $(f, a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1(f, u_1) + a_2(f, u_2)$.

Но $\|u\|_A$ — это норма в H_A, так что

$$\|u-u_0\|_A=0, \text{ если } u-u_0=0 \text{ в } H_A, \text{ т. е. если } u=u_0 \text{ в } H_A, \tag{11.9}$$

и

$$\|u-u_0\|_A>0, \text{ если } u\neq u_0 \text{ в } H_A. \tag{11.10}$$

Из (11.8)—(11.10) очевидно, что F принимает минимальное значение в H_A в том и только том случае, если $u=u_0$ в H_A, т. е. в точности на элементе u_0, определяемом (однозначно) из (11.7). Итак, мы получили следующую теорему.

Теорема 11.1. *Пусть оператор A является положительно определенным на линеале D_A, который плотен в гильбертовом пространстве H. Пусть H_A — гильбертово пространство, построенное в гл. 10. Тогда функционал F, задаваемый в H_A посредством* (11.4), *принимает в H_A свое минимальное значение. Элемент u_0, на котором F достигает минимального значения в H_A, однозначно определяется соотношением* (11.7).

Как уже упоминалось в гл. 9, введем следующее

Определение 11.1. Элемент u_0, минимизирующий функционал (11.4) в H_A, называется *обобщенным решением уравнения $Au=f$.*

В некоторых случаях может оказаться, что обобщенное решение u_0, на котором F принимает минимальное значение в H_A, принадлежит D_A. Для дифференциальных операторов этот случай соответствует, в определенном смысле, понятию классического решения данной задачи. Подробнее см. замечание 11.4.

Теорема 11.1, так же как и опр. 11.1, требует некоторых пояснений.

Замечание 11.1. Как следует из изложенного выше, обобщенное решение u_0 уравнения $Au=f$ однозначно определяется соотношением (11.7). Однако с практической точки зрения само по себе это соотношение не дает эффективного способа построения решения. Таким способом является только минимизация (в пространстве H_A) функционала F. Целью последующих глав будет описание эффективных методов отыскания желаемого решения, которое минимизирует F в H_A, или по крайней мере получения его достаточно близкой аппроксимации.

Замечание 11.2. Из (11.7) следует, согласно (11.6), что

$$|(u_0, u)_A|=|(f, u)|\leqslant\|f\|\cdot\|u\|\leqslant\frac{\|f\|}{C}\|u\|_A \text{ для всех } u\in H_A. \tag{11.11}$$

В частности, для $u=u_0$ мы получаем отсюда

$$\|u_0\|_A^2=(u_0, u_0)_A\leqslant\frac{\|f\|}{C}\|u_0\|_A,$$

откуда сразу же вытекает важное неравенство [1])

$$\|u_0\|_A \leqslant \|f\|/C. \tag{11.12}$$

Это неравенство выражает *непрерывную зависимость* обобщенного решения u_0 от правой части f данного уравнения $Au=f$. Это значит, во-первых, что если f «мало» в норме пространства H, то обобщенное решение «мало» в норме пространства H_A (и, следовательно, в силу (11.6), также «мало» в норме пространства H). Затем, если u_0 и v_0 представляют собой обобщенные решения уравнений

$$Au=f \tag{11.13}$$

и

$$Av=g, \tag{11.14}$$

т. е. если выполняется

$$(u_0,\ u)_A=(f,\ u) \text{ для всех } u\in H_A, \tag{11.15}$$

и

$$(v_0,\ u)_A=(g,\ u) \text{ для всех } u\in H_A, \tag{11.16}$$

то $z_0=v_0-u_0$ является обобщенным решением уравнения

$$Az=g-f, \text{ [2])} \tag{11.17}$$

поскольку из (11.15) и (11.16) мы получаем

$$(z_0,\ u)_A=(g-f,\ u) \text{ для всех } u\in H_A. \tag{11.18}$$

Аналогично тому, как это было сделано в случае неравенства (11.12), мы получаем из (11.18) соотношение

$$\|z_0\|_A \leqslant \|g-f\|/C. \tag{11.19}$$

Следовательно, если правые части уравнений (11.13), (11.14) отличаются незначительно по норме H, то соответствующие обобщенные решения отличаются лишь незначительно по норме H_A (и тем самым — согласно (11.6) — также по норме H). Это обстоятельство оказывается полезным — например, при оценке погрешности, если мы ищем обобщенное решение (или, точнее, его аппроксимацию) с помощью одного из приближенных методов, описанных в последующих главах. А именно, если n-е приближение $u_n\in D_A$ обобщенного решения u_0 таково, что элемент

$$f_n=Au_n \tag{11.20}$$

---

[1]) Для $u_0\neq 0$; естественно, для $u_0=0$ (11.12) также выполнено.

[2]) Формально этот результат следует, конечно, из вычитания уравнения $Au_0=f$ из уравнения $Av_0=g$; формальное — потому что символы Au_0, Av_0 не обязательно имеют смысл, если u_0 и v_0 не принадлежат D_A. Поэтому необходимо показать, что z_0 удовлетворяет соотношению (11.18), поскольку обобщенное решение уравнения (11.17) определяется именно в этом смысле.

незначительно отличается от f по норме H, то u_n лишь незначительно отличается от u_0 в H_A. Точнее, согласно (11.19), мы имеем

$$\|u_n-u_0\|_A \leqslant \|f_n-f\|/C=\|Au_n-f\|/C. \tag{11.21}$$

Таким образом, если известна постоянная C (подробности, касающиеся этого вопроса, см. в ч. III настоящей книги, особенно в гл. 18, 19 и 22; см. также пример 8.9), то соотношение (11.21) позволяет оценить погрешность приближенного решения u_n в пространстве H_A (и, согласно (11.6), в пространстве H).

Конечно, мы можем оценить «достаточную точность» аппроксимации также и с инженерной точки зрения: в приложениях правая часть данного уравнения обычно имеет простую физическую или техническую интерпретацию; например, в случае уравнения изгиба пластины (см. гл. 23) правая часть задается функцией $f \in L_2(G)$, характеризующей нагрузку на рассматриваемую пластину. Принимая во внимание (11.20), мы видим, что аппроксимация u_n представляет в этом случае точное решение задачи того же типа, но с нагрузкой f_n вместо f. Близость функций f_n и f по норме пространства $L_2(G)$ позволяет сделать вывод, согласно (11.21), о близости решения u_0 и его аппроксимации u_n (по норме пространства H_A). Однако в технике часто удовлетворяются простым сравнением функций f_n и f при решении о том, является ли u_n аппроксимацией решения задачи, достаточной для преследуемых целей. Действительно, f обычно является величиной, задаваемой из измерений, имеющих ошибку, которая может внести в решение рассматриваемой задачи погрешность, большую, чем та, которая возникает при замене u_0 на ее аппроксимацию u_n.

В связи с этим заметим, что сходимость $f_n=Au_n$ к f при возрастании n в общем случае не гарантируется ни одним из методов, приведенных в последующих главах. При обсуждении отдельных методов мы еще раз отметим это. Этот вопрос тесно связан с удачным выбором базиса, элементы которого (точнее, линейные комбинации элементов которого) используются для построения приближенного решения; более подробно об этом см. гл. 20. См. также гл. 44, в которой приведен метод оценивания погрешности, основанный на совершенно иной идее.

Замечание 11.3. Как уже отмечалось, большинство приводимых в дальнейшем методов состоит в построении некоторой последовательности $u_n \in H_A$ (здесь, как правило, $u_n \in D_A$), для которой будет доказано, что она сходится в H_A к искомому обобщенному решению u_0, т. е. для которой будет выполняться

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n-u_0\|_A=0. \tag{11.22}$$

В этой связи отметим следующее. Как известно, функционал F принимает минимальное значение в H_A на элементе u_0, опреде-

ляемом соотношением (11.7). Тогда из (11.8) следует, что это минимальное значение равно числу $-\|u_0\|_A^2$, т. е.

$$\min_{u \in H_A} Fu = -\|u_0\|_A^2.$$

Определение 11.2. Говорят, что последовательность $\{u_n\}$ элементов из H_A является *минимизирующей последовательностью* для функционала (11.4) (и, следовательно, для функционала (11.8)) или что $\{u_n\}$ является *μ-последовательностью*, если выполняется соотношение

$$\lim_{n \to \infty} Fu_n = -\|u_0\|_A^2. \tag{11.23}$$

Следовательно, μ-последовательность — это последовательность $\{u_n\}$ элементов H_A, такая что предел соответствующих значений Fu_n функционала F равен минимуму этого функционала в H_A. Из (11.22), (11.23) и из соотношения (11.8), т. е. из соотношения

$$Fu = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2, \tag{11.24}$$

немедленно следует

Теорема 11.2. *Если $\{u_n\}$ является μ-последовательностью, то выполняется* (11.22). *И наоборот, если выполняется* (11.22), *то $\{u_n\}$ является μ-последовательностью.*

Доказательство. 1. Если $\{u_n\}$ — μ-последовательность, то выполняется (11.23), и из (11.24) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\|_A^2 = \lim_{n \to \infty} (Fu_n + \|u_0\|_A^2) = \lim_{n \to \infty} Fu_n + \|u_0\|_A^2 = \\ = -\|u_0\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 = 0,$$

т. е. $\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\|_A = 0$; таким образом, (11.22) выполнено.

2. Если выполняется (11.22), то из (11.24) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} Fu_n = \|u_n - u_n\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 = -\|u_0\|_A^2,$$

а это есть не что иное, как соотношение (11.23).

Следовательно, если доказано, что некоторая последовательность $\{u_n\}$ является μ-последовательностью, то в соответствии с теоремой 11.2 это значит, что она сходится в H_A к обобщенному решению u_0 уравнения $Au = f$. Это обстоятельство будет использовано при исследовании сходимости некоторых методов, приведенных в следующих главах.

Замечание 11.4. В настоящей главе мы ввели понятие обобщенного решения уравнения $Au = f$. В тексте, следующем за определением 11.1, рассматривался его частный случай, когда это решение принадлежит исходному линеалу D_A (представляющему собой, особенно для дифференциальных уравнений, некоторый

аналог понятия классического решения данного уравнения, с которым читатель знаком, например, из классической теории дифференциальных уравнений в частных производных). Принадлежит элемент $u_0 \in H_A$ множеству D_A или нет — зависит главным образом от свойств оператора A и элемента f (т. е. от правой части уравнения $Au = f$); подробнее см. гл. 46.

Обсудим упомянутые понятия решения подробнее, особенно в связи со случаем, представляющим наибольший интерес, т. е. в связи с дифференциальными операторами.

Во-первых, заметим, что хотя понятия «классического решения» и «решения из множества D_A» в этих случаях тесно связаны, они не обязательно обозначают одно и то же. Рассмотрим знакомую уже задачу Дирихле для уравнения Пуассона в плоской области G с границей Γ,

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \tag{11.25}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{11.26}$$

Под классическим решением этой задачи понимается такая функция u, которая непрерывна в $\bar{G} = G + \Gamma$, равна нулю на Γ и имеет в G производные $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$, удовлетворяющие (11.25) в G. Однако в качестве линеала $D_A = D_{-\Delta}$ был выбран (см., например, гл. 8) линеал функций, непрерывных со своими первыми и вторыми производными в $\bar{G} = G + \Gamma$ и удовлетворяющих условию (11.26). Если функция u является решением нашей задачи и если она принадлежит D_A, то она прежде всего должна обладать всеми упомянутыми свойствами функций из D_A. Следовательно, к гладкости функций из D_A (и тем самым также к гладкости рассматриваемого решения из D_A) здесь предъявляются более строгие требования, чем к гладкости классического решения. Причина (не очень существенная), по которой в качестве D_A был выбран класс таких очень гладких функций, состоит в том, что характеристические свойства данного оператора, такие как симметрия, положительность и т. д., могут быть очень просто установлены на линеале, определенном таким образом. (Если потребовать еще большую гладкость рассматриваемых функций, то ничего не изменится. Например, можно показать, что построение, приведенное в гл. 10, дает — в нашей задаче (11.25), (11.26) — то же самое пространство H_A, если мы выберем в качестве D_A множество функций, непрерывных со своими частными производными всех порядков в $\bar{G} = G + \Gamma$ и удовлетворяющих условию (11.26).)

Только что рассмотренный случай задачи (11.25), (11.26) ясно показывает, что, вообще говоря, понятие классического решения отличается от понятия решения из линеала D_A. Тем не менее эти два понятия тесно связаны, и читатель может понимать под «решением из D_A» некоторую модифицированную форму классического решения.

С другой стороны, свойства обобщенного решения — если оно не лежит в D_A — существенно отличны в общем случае от свойств классического решения. Как упоминалось в конце гл. 10, для дифференциальных операторов второго порядка функции из множества D_l в общем случае имеют в рассматриваемой области производные только первого порядка; более того, это так называемые обобщенные производные. Следовательно, обобщенное решение может, вообще говоря (если не выполняются некоторые условия, касающиеся гладкости коэффициентов рассматриваемого уравнения, и т. п.), не иметь даже производных порядка рассматриваемого уравнения. Читатель может возразить, что тогда либо обсуждаются «бессмысленные» задачи, либо что-то не в порядке с понятием решения. Но это не так. Дифференциальные уравнения, описывающие некоторые физические явления, часто выводятся из различных физических принципов (скажем, из принципа минимума потенциальной энергии и т. п.) с помощью методов вариационного исчисления. Математически это значит, что минимизируются некоторые функционалы (энергии и т. п.). Используя уравнения Эйлера, известные из вариационного исчисления, выражающие необходимые условия экстремума этих функционалов, мы получаем дифференциальные уравнения, в которые входят производные более высокого порядка, чем порядок производных, входящих в рассматриваемый функционал. (Типичным примером является уравнение для прогиба мембраны.) Поскольку наш функционал F соответствует в этих случаях именно упомянутым функционалам (упругой энергии, потенциальной энергии [1]) и т. д.), с физической точки зрения [2]) представляется более естественным искать обобщенное решение данной задачи, а не ее классическое решение. В случае дифференциальных уравнений с (грубо говоря) достаточно гладкими коэффициентами и достаточно гладкой правой частью f, обобщенное решение является достаточно гладким. (Например, обобщенное решение задачи (11.25), (11.26) имеет непрерывные частные производные всех порядков в (открытой) области G, если функция f имеет непрерывные частные производные всех порядков в G.) На данном этапе невозможно объяснить значение термина «достаточно гладкий» более точно, и мы вернемся к этой проблеме в гл. 46.

Замечание 11.5. Если $u_0 \in D_A$ и в то же время u_0 минимизирует функционал (11.4) в H_A, то u_0 тем более минимизирует

---

[1]) По этой причине функционал F часто называют *функционалом энергии*, а вариационные методы, основанные на его минимизации, — *энергетическими методами*. В этой связи скалярное произведение $(u, v)_A$ часто называют *энергетическим произведением*, норму $\|u\|_A$ — *энергетической нормой*, а пространство H_A — *энергетическим пространством*.

[2]) Хорошо известно высказывание Гильберта: «законы физики должны быть сформулированы не в дифференциальной, а в интегральной форме».

функционал (11.3) в D_A и в соответствии с теоремой 9.2 является решением в H уравнения $Au=f$. Однако если элемент u_0, минимизирующий функционал (11.4) в H_A, не принадлежит D_A, то уравнение $Au=f$ не может иметь решения из D_A. Это утверждение легко доказывается от противного: пусть $u_0 \notin D_A$ минимизирует в H_A функционал (11.4), так что, согласно (11.8),

$$Fu_0 = \min_{u \in H_A} (\|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2) = -\|u_0\|_A^2, \tag{11.27}$$

и пусть $v \in D_A$ — решение уравнения $Au=f$ в H. В соответствии с теоремой 9.2 элемент v минимизирует на D_A функционал $(Au, u)-2(f, u)$, который при $u \in D_A$ идентичен функционалу F. Следовательно,

$$Fv = \min_{u \in D_A} (\|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2) = \|v-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2. \tag{11.28}$$

Так как $v \neq u_0$ (поскольку $v \in D_A$, а $u_0 \notin D_A$), имеем $\|v-u_0\|_A^2 > 0$, и, таким образом, согласно (11.27) и (11.28),

$$Fv > Fu_0. \tag{11.29}$$

Обозначим

$$Fv - Fu_0 = \|v-u_0\|_A^2 = a > 0. \tag{11.30}$$

Но множество D_A плотно в H_A, так что существует последовательность элементов $\{u_n\}$, принадлежащих D_A, которая сходится в H_A к u_0, т. е. $\lim_{n\to\infty} \|u_n-u_0\|_A = 0$. Следовательно, существует элемент $u_n \in D_A$ с достаточно большим индексом, такой что $\|u_n-u_0\|_A < \sqrt{a/2}$.

Но тогда

$$Fu_n = \|u_n-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 < -\|u_0\|_A^2 + \frac{a}{2} < -\|u_0\|_A^2 + a = Fu_0 + a = Fv \tag{11.31}$$

в соответствии с (11.30). Таким образом, функционал F принимает на элементе $u_n \in D_A$ значение, меньшее, чем то, которое он принимает на v, что противоречит предположению о том, что v минимизирует F на D_A.

Следовательно, если элемент u_0, который минимизирует функционал F, не лежит в D_A, то уравнение $Au=f$ не имеет решения из D_A. Обобщенное решение u_0 надо тогда понимать как решение данной задачи в смысле, обсужденном в замечании 11.4.

Замечание 11.6. (*Неоднородные граничные условия.*) Теория, развитая в гл. 9—11, исходит из предположения, что область определения оператора A представляет собой линеал. В то же время в приближенных методах, встречающихся в последующих главах, аппроксимация решения данной задачи, т. е. аппроксимация обобщенного решения u_0, ищется в виде линейной комбинации эле-

ментов этого множества или по крайней мере элементов из H_A, т. е. опять-таки элементов линеала.

В знакомом уже случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона, т. е. задачи

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \tag{11.32}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{11.33}$$

мы могли выбрать в качестве первоначального линеала D_A (так и было сделано) множество функций, непрерывных вместе со своими частными производными первого и второго порядка в $\overline{G} = G + \Gamma$ и удовлетворяющих условию (11.33). С другой стороны, множество M, элементами которого являются функции, удовлетворяющие тем же условиям гладкости, что и функции из D_A, но для которых выполняется

$$u = 2 \text{ на } \Gamma, \tag{11.34}$$

не является линейным: если u и v — две функции из M, то $u + v = 4$ на Γ, так что функция $u + v$ не удовлетворяет условию $u + v = 2$ на Γ, и, следовательно, не принадлежит M.

Точно так же множество всех функций, для которых выполняются те же условия гладкости, что и для функций из D_A, и которые удовлетворяют условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -u \text{ на } \Gamma \tag{11.35}$$

($\partial u/\partial \nu$ — производная u по направлению внешней нормали), образует линеал, в то время как множество функций, удовлетворяющих тем же условиям гладкости, но условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -(u - 3) \text{ на } \Gamma, \tag{11.36}$$

не является линейным.

Следовательно, остается нерешенным вопрос: как включить в нашу теорию решение дифференциальных уравнений с неоднородными граничными условиями, как сформулировать эту задачу в форме, аналогичной той, которая использовалась в этой главе для случая, когда область определения данного оператора была линеалом, и что понимать под решением, или, может быть, под обобщенным решением рассматриваемой задачи.

Один из возможных ответов на этот вопрос совершенно элементарен: преобразовать задачу с неоднородными граничными условиями в задачу с однородными граничными условиями. В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона с заданной непрерывной функцией g на границе Γ:

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \tag{11.37}$$

$$u = g \text{ на } \Gamma. \tag{11.38}$$

Предположим, что мы можем найти функцию w, непрерывную в $\overline{G}=G+\Gamma$, удовлетворяющую условию (11.38) и одновременно условию

$$-\Delta w \in L_2(G). \tag{11.39}$$

Если искать решение задачи (11.37), (11.38) в виде

$$u=w+z, \tag{11.40}$$

то для функции z получаются условия

$$-\Delta z=f+\Delta w \text{ в } G, \tag{11.41}$$

$$z=0 \text{ на } \Gamma. \tag{11.42}$$

По предположению $f\in L_2(G)$; далее, согласно (11.39), $\Delta w\in L_2(G)$, так что для функции $h=f+\Delta w$ также справедливо $h\in L_2(G)$. Задача

$$-\Delta z=h \text{ в } G, \tag{11.43}$$

$$z=0 \text{ на } \Gamma \tag{11.44}$$

имеет вид (11.32), (11.33); такую задачу мы уже рассматривали выше.

Поэтому в более общем случае задача ставится так: задано линейное дифференциальное уравнение

$$Au=f \tag{11.45}$$

с линейными неоднородными граничными условиями. Эти условия могут быть различного вида, например (11.38), (11.36) и т. д. В общем случае на границе может быть задано несколько таких условий в соответствии с порядком данного дифференциального уравнения. Для простоты рассмотрим случай, когда в качестве базового гильбертова пространства выбрано пространство $L_2(G)$, так что предполагается $f\in L_2(G)$. Положим затем, что мы можем найти функцию w, удовлетворяющую заданным граничным условиям и одновременно достаточно гладкую для того, чтобы к w можно было применить оператор A, и $Aw\in L_2(G)$. Тогда функция $h=f-Aw$ принадлежит $L_2(G)$. Если решение данной задачи ищется в виде $u=w+z$, мы получаем уравнение $Az=h$ с однородными граничными условиями. Далее, если оператор A положительно определен на линеале D_A достаточно гладких функций, которые удовлетворяют данным однородным граничным условиям, то в соответствии со сказанным выше последняя задача имеет обобщенное решение z_0. Тогда под обобщенным решением исходной задачи с неоднородными граничными условиями мы будем понимать функцию $u_0=w+z_0$.

Заметим в связи с этим, что в общем случае непросто найти функцию w, обладающую указанными выше свойствами, которая позволяет свести задачу с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями. Непросто дока-

зать сам факт ее существования, даже если условия, налагаемые на эту функцию, несколько ослабить (см. гл. 32 и 46).

Однако в задачах практического характера, возникающих в науке и технике, решение рассматриваемого вопроса, как правило, относительно просто, и искомая функция w часто может быть задана непосредственно. Приведем следующий простой пример: пусть мы решаем задачу Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике $G\,(0<x<a,\ 0<y<b)$, и пусть граничные условия на границе Γ задаются выражениями

$$g=\sin\frac{\pi x}{a} \text{ при } 0<x<a,\ y=0,$$
$$g=0 \text{ на остальной части } \Gamma. \tag{11.46}$$

Очевидно, что здесь достаточно выбрать функцию

$$w=\left(1-\frac{y}{b}\right)\sin\frac{\pi x}{a},$$

которая удовлетворяет условиям (11.46) и преобразует рассматриваемую задачу в уже знакомую задачу

$$-\Delta z=-\frac{\pi^2}{a^2}\left(1-\frac{y}{b}\right)\sin\frac{\pi x}{a} \text{ в } G, \tag{11.47}$$
$$z=0 \text{ на } \Gamma. \tag{11.48}$$

Если z_0 — (обобщенное) решение этой задачи, то решение исходной задачи — это $u_0=w+z_0$.

Замечание 11.7. (*Неоднородные граничные условия, вторая формулировка.*) Мы приведем теперь вторую формулировку задачи с неоднородными граничными условиями, которая по своему смыслу ближе к понятию обобщенного решения для случая однородных граничных условий. Мы поясним идею на простом примере, поскольку пока мы не имеем возможности точно сформулировать, какими свойствами должна обладать функция $w(x)$, обсуждаемая в замечании 11.6, и в каком смысле должна она удовлетворять данным граничным условиям. Вопросы, относящиеся к этому кругу задач, будут рассматриваться в весьма общей постановке в ч. IV настоящей книги (см. особенно гл. 34 и 35), где в нашем распоряжении будут понятия пространства $W_2^{(k)}(G)$ и следов. Таким образом, в тексте этого замечания будут встречаться довольно существенные неточности.

Рассмотрим еще раз задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u=f \text{ в } G, \tag{11.49}$$
$$u=g \text{ на } \Gamma, \tag{11.50}$$

и пусть $w(x)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\Delta w\in L_2(G)$ и $w=g$ на Γ. Полагая, как в замечании 11.6,

$$u=w+z, \tag{11.51}$$

мы получим для z условия

$$-\Delta z = f + \Delta w \text{ в } G, \tag{11.52}$$

$$z = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{11.53}$$

Таким образом, граничное условие для функции z однородно. Как обычно, обозначим через D_A линеал функций $z(x)$, которые непрерывны вместе со своими частными производными первого и второго порядка в G и равны нулю на Γ, и через $A = -\Delta$ — оператор, рассматриваемый на этом множестве. Как уже было показано в примерах 8.8 и 8.10, оператор A положителен на D_A и

$$(Au, v) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx, \tag{11.54}$$

так что

$$(Au, u) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx. \tag{11.55}$$

В гл. 22 будет показано, что он является даже положительно определенным на D_A. Соответствующее пространство H_A из гл. 10 образовано, грубо говоря (как уже отмечалось, некоторые из приводимых здесь понятий и результатов будут уточнены позднее в ч. IV настоящей книги), функциями, равными нулю на Γ и имеющими в G частные производные первого порядка, квадратично интегрируемые в G.

Функционал

$$Gz = (z, z)_A - 2(f + \Delta w, z), \tag{11.56}$$

т. е. функционал

$$Gz = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\int_G (f + \Delta w)\, z\, dx, \tag{11.57}$$

принимает минимальное значение в H_A, и элемент $z_0 \in H_A$, на котором этот минимум достигается, является обобщенным решением задачи (11.49), (11.50).

Поскольку $z = 0$ на Γ, так как $z \in H_A$, формальное применение теоремы Грина дает — аналогично цитированному примеру 8.8 —

$$\int_G \Delta w \cdot z\, dx = -\int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx,$$

так что функционал (11.57) может быть записан в виде

$$Gz = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\int_G fz\, dx + 2\int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx. \tag{11.58}$$

Такая запись позволяет прежде всего ослабить требования, предъявляемые к функции $w(x)$. Из (11.58) видно, что достаточно

рассматривать $w(x)$ как функцию, удовлетворяющую условию $w=g$ на Γ и имеющую частные производные только первого порядка, квадратично интегрируемые в G [1]). Затем, очевидно следующее: скалярное произведение

$$(v, z)_A = \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx \tag{11.59}$$

было определено для функций v, z из H_A, т. е. для функций, удовлетворяющих условию $v=0$ и $z=0$ на Γ. Однако интеграл в (11.59) имеет смысл для существенно более общего класса функций, для которых вовсе не обязательно удовлетворение указанным условиям на границе. Обозначим символом $((v, z))$ интегральную форму (11.59), рассматриваемую на этом более общем классе функций,

$$((v, z)) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx. \tag{11.60}$$

Используя это обозначение, можно записать функционал Gz в виде

$$Gz = ((z, z)) - 2(f, z) + 2((w, z)), \quad z \in H_A, \tag{11.61}$$

который значительно лучше соответствует нашему пониманию, чем вид (11.57) (см. также функционал (34.58); (11.61) является его частным случаем).

Процедура, продемонстрированная на предыдущем простом примере, может быть легко расширена на более общие случаи. Однако, с одной стороны, необходима определенная осторожность при рассмотрении задач с так называемыми неустойчивыми граничными условиями (граничные условия Неймана и т. д.), с другой — необходимо ввести некоторые дополнительные понятия, чтобы можно было избежать некоторых неточностей в формулировках, имеющих место в этом замечании. Поэтому решение этих вопросов оставлено до ч. IV этой книги. Что касается этих проблем в ч. II и III, то будут приводиться только некоторые результаты, непосредственно полезные для приложений, со ссылками на теорию, излагаемую позднее.

Замечание 11.8. Если подставить (11.51) в (11.61), то получится функционал

$$\begin{aligned} G(u-w) = H(u) &= ((u-w,\ u-w)) - 2(f, u-w) + 2((w, u-w)) = \\ &= ((u, u)) - 2((w, u)) + ((w, w)) - 2(f, u) + 2(f, w) + 2((w, u)) - \\ &\quad - 2((w, w)) = ((u, u)) - 2(f, u) - ((w, w)) + 2(f, w). \end{aligned} \tag{11.62}$$

---

[1]) Точнее (в смысле гл. 30), достаточно, чтобы $w \in W_2^{(1)}(G)$ и $w=g$ на Γ в смысле теории следов.

Вместо того чтобы искать обобщенное решение задачи (11.49), (11.50) в виде $u_0 = w + z_0$ и определять функцию z_0 как элемент, минимизирующий (11.61) в H_A, мы можем искать u_0 как элемент, минимизирующий (11.62), или, что то же самое, минимизирующий функционал

$$Fu = ((u, u)) - 2(f, u). \tag{11.63}$$

(Поскольку члены $((w, w))$ и (f, w) остаются постоянными при изменении u.) Таким образом, этот функционал имеет ту же форму, что и функционал (11.4), рассматриваемый для случая однородных граничных условий. Существенное различие заключается здесь в том обстоятельстве, что функционал (11.63) минимизируется не в пространстве H_A, а (как следует из (11.51)) в пространстве (достаточно гладких) функций, удовлетворяющих условию $u = g$ на Γ.

Заметим по этому поводу, что (как уже отмечалось во введении) с исторической точки зрения эта задача была в действительности первой, которая исследовалась в данном направлении. Это было сделано для уравнения Лапласа, т. е. для случая, когда $f = 0$: найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $-\Delta u = 0$ в G, $u = g$ на Γ как элемент, минимизирующий интеграл Дирихле

$$((u, u)) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \tag{11.64}$$

на множестве достаточно гладких функций, удовлетворяющих условию $u = g$ на Γ. Здесь также первые трудности заключались в том, как строго определить класс «достаточно гладких функций, удовлетворяющих условию $u = g$ на Γ», и каким образом расширить функционал (11.64), чтобы он действительно принимал минимальное значение на этом классе. Эта задача вызвала прежде всего интенсивное изучение задач с однородными граничными условиями для неоднородных дифференциальных уравнений, которое привело к построению пространства H_A и понятию обобщенного решения, а позднее дало начало более общей теории, изложенной в ч. IV настоящей книги.

Вслед за подробным обсуждением понятия обобщенного решения мы переходим сейчас к исследованию методов, позволяющих находить это обобщенное решение или по крайней мере его достаточно близкую аппроксимацию.

Глава 12

Метод ортонормированных рядов. Пример

Рассмотрим, как обычно, гильбертово пространство H и оператор A, который является положительно определенным на линеале D_A, плотном в H. Пусть H_A—пространство, построенное в гл. 10, со скалярным произведением $(u, v)_A$, которое, как мы знаем, представляет собой расширение скалярного произведения $(u, v)_A$, определенного первоначально на D_A соотношением

$$(u, v)_A = (Au, v), \quad u \in D_A, \quad v \in D_A, \tag{12.1}$$

на все пространство H_A. В предыдущей главе было показано, что функционал

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in H_A \tag{12.2}$$

достигает минимума в H_A на определенном элементе u_0, однозначно определяемом по элементу f из соотношения

$$(u_0, u)_A = (f, u) \quad \text{при любом } u \in H_A. \tag{12.3}$$

Элемент u_0, минимизирующий функционал (12.2) в H_A, называется обобщенным решением уравнения $Au = f$. Некоторые свойства этого решения обсуждались в гл. 11. В этой и последующих главах будут показаны несколько эффективных методов нахождения или аппроксимирования этого обобщенного решения.

С этой целью мы будем предполагать, что пространство H_A *сепарабельно*. Для этого достаточно—как можно было бы ожидать и как подробно доказано, например, в [29],—*чтобы пространство H было сепарабельным*. Таким образом, если мы выберем в качестве пространства H пространство $L_2(G)$—как это очень часто и будет в дальнейшем,— то сепарабельность H_A также будет обеспечена, поскольку $L_2(G)$ сепарабельно (см. теорему 4.7).

Напомним, что метрическое пространство P называют сепарабельным, если можно найти не более чем счетное множество его элементов, которое плотно в этом пространстве. В соответствии с теоремой 6.11 в каждом сепарабельном гильбертовом пространстве существует так называемый базис, т. е. не более чем счетная линейно независимая система

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{12.4}$$

которая полна в этом пространстве, т. е. для любого $u \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти положительное целое число i и числа $a_k^{(i)}$, такие что

$$\rho\left(u, \sum_{k=1}^{i} a_k^{(i)} \varphi_k\right) < \varepsilon. \tag{12.5}$$

Более того, если M—множество, плотное в этом пространстве, то можно построить базис только из элементов этого множества

(см. примечание на с. 72). В соответствии с теоремой 6.12 можно также считать, что базис (12.4) ортонормирован в рассматриваемом пространстве.

Итак, пусть (12.4) — ортонормированный базис в H_A, построенный (если в этом есть необходимость) из элементов линеала D_A. Для элементов этого базиса, таким образом, мы имеем

$$(\varphi_i, \varphi_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ 1 & \text{при } k = i. \end{cases} \tag{12.6}$$

Поскольку по предположению (12.4) является ортонормированным базисом в H_A (т. е. полной ортонормированной системой в H_A), обобщенное решение u_0 нашей задачи может быть записано в этом пространстве в виде соответствующего ряда Фурье (см. с. 70)

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \text{ [1]} \tag{12.7}$$

где

$$a_k = (u_0, \varphi_k)_A, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12.8}$$

Однако для любого $u \in H_A$ и, таким образом, для любого φ_k ($k = 1, 2, \ldots$) выполняется соотношение (12.3), так что

$$a_k = (u_0, \varphi_k)_A = (f, \varphi_k). \tag{12.9}$$

Коэффициенты ряда Фурье (12.7) тем самым определяются очень просто как скалярные произведения (в H) правой части f данного уравнения и функций базиса φ_k.

Итак, задача решена.

Заметим, что из сходимости ряда (12.7) в H_A следует его сходимость также и в H. А именно, если s_n — n-я частичная сумма (12.7), то из (10.70) следует, что

$$\| s_n - u_0 \| \leqslant \frac{1}{C} \| s_n - u_0 \|_A. \tag{12.10}$$

Поскольку $\{\varphi_n\}$ образует базис в H_A, имеем $\lim_{n \to \infty} s_n = u_0$ в H_A, откуда, согласно (12.10),

$$\lim_{n \to \infty} s_n = u_0 \text{ в } H. \tag{12.11}$$

(См. также текст, следующий за уравнением (10.15).)

Полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 12.1. *Пусть A — положительно определенный оператор на линеале D_A, плотном в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и пусть $f \in H$. Далее, пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортонормированный базис в пространстве H_A* (по поводу H_A см. гл. 10).

[1] Естественно, если система (12.4) имеет только конечное число элементов, то (12.7) содержит только конечное число членов.

Тогда обобщенное решение u_0 уравнения $Au=f$ дается рядом

$$u_0=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k, \tag{12.12}$$

где

$$a_k=(f,\ \varphi_k) \tag{12.13}$$

($(f,\ \varphi_k)$—скалярное произведение в H). *Этот ряд сходится к обобщенному решению u_0 как в H_A, так и в H.*

Следовательно, согласно (12.12), решить нашу задачу очень просто: достаточно вычислить коэффициенты $a_k=(f,\ \varphi_k)$ ряда Фурье (12.12). В частности, если $H=L_2(G)$, задача сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_G f(x)\,\varphi_k(x)\,dx. \tag{12.14}$$

Читатель может решить, что этим задача нахождения обобщенного решения рассматриваемого уравнения $Au=f$ полностью решена и что дальше развивать теорию в этом направлении не нужно. Однако трудность заключается в том, что в общем случае построить ортонормированный базис в H_A непросто. Эта задача нетривиальна, даже если не требуется ортонормированности базиса. (При построении базиса трудно удовлетворить требованию полноты, которое входит в его определение; см., в частности, гл. 20 и 25, в которых рассматриваются эти вопросы.) Однако даже если базис найден, его ортогонализация или, наконец, ортонормирование (см. с. 69 и 53) представляет собой, вообще говоря, чрезвычайно трудоемкий процесс и, как правило, с точки зрения численных расчетов едва ли осуществима. Поэтому были разработаны другие методы, не требующие ортонормирования базиса. Они будут обсуждаться в последующих главах.

Тем не менее построение ортонормированного базиса в некоторых частных случаях (например, для очень простых обыкновенных дифференциальных операторов или дифференциальных операторов в частных производных, рассматриваемых в очень простых областях) может быть выполнено относительно несложно.

Приведем пример.

Пример 12.1. Решим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $G\ (0<x<a,\ 0<y<b)$:

$$-\Delta u=f \quad \text{в} \quad G, \tag{12.15}$$

$$u=0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{12.16}$$

Выберем $H=L_2(G)$. Как обычно, в качестве линеала $D_A=D_{-\Delta}$ выберем множество функций, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными в $\bar{G}=G+\Gamma$ и удовлетворяющих условию (12.16). Мы знаем, что это множество плотно в $L_2(G)$ (теорема 8.6). Как будет показано ниже (в гл. 22), оператор A,

заданный на D_A правилом $A=-\Delta$, положительно определен на этом линеале. Следовательно, обычным способом можно построить гильбертово пространство $H_A=H_{-\Delta}$ (см. гл. 10). В данном случае в качестве базиса в этом пространстве можно выбрать систему функций

$$\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{12.17}$$

(см. гл. 20, текст, следующий за равенством (20.20)). Теперь построим из функций (12.17) последовательность, ортонормированную в $H_{-\Delta}$. Сначала обозначим функции следующим образом:

$$\begin{gathered}\psi_1=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\\ \psi_2=\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \psi_3=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},\\ \psi_4=\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},\quad \psi_5=\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},\quad \psi_6=\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b},\end{gathered} \tag{12.18}$$

и т. д.

Процедура перечисления состоит в следующем: образуются группы из тех функций (12.17), для которых $m+n=i$, где i принимает последовательно значения 2, 3, ... В каждой из этих групп функции упорядочены в соответствии с убыванием значений первого индекса m, который принимает в каждой группе последовательно значения $i-1$, $i-2$, ..., 1. Этим способом получается система функций $\psi_s(x,\ y)$, $s=1,\ 2,\ \ldots$.

Как известно,

$$\int_0^a \sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq j,\\ a/2, & \text{если } m=j,\end{cases} \tag{12.19}$$

и, аналогично,

$$\int_0^b \sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy=\begin{cases}0, & \text{если } n\neq k,\\ b/2, & \text{если } n=k.\end{cases} \tag{12.20}$$

Поэтому выполняется

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},\ \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)&=\\ =\int_0^a\int_0^b \sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy&=\\ =\int_0^a \sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx\cdot\int_0^b \sin\frac{k\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy&=\\ =\begin{cases}\frac{ab}{4}, & \text{если одновременно } m=j \text{ и } n=k,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}&\end{aligned} \tag{12.21}$$

Функции ψ_s, конечно, принадлежат $D_{-\Delta}$, так что

$$(\psi_s,\ \psi_t)_{-\Delta} = (-\Delta\psi_s\psi_t) = \left(-\frac{\partial^2\psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_s}{\partial y^2},\ \psi_t\right).$$

Поскольку

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\right) = \frac{j^2\pi^2}{a^2}\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b}\right) = \frac{k^2\pi^2}{b^2}\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},$$

мы имеем

$$\left(\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},\ \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)_{-\Delta} =$$
$$= \int_0^a\int_0^b \left(\frac{j^2\pi^2}{a^2}+\frac{k^2\pi^2}{b^2}\right)\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{k\pi x}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{ab}{4}\left(\dfrac{j^2\pi^2}{a^2}+\dfrac{k^2\pi^2}{b^2}\right), & \text{если } m=j \text{ и } n=k \text{ одновременно,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (12.22)$$

Следовательно, функции (12.18) ортогональны в $H_{-\Delta}$, поскольку для любой пары различных функций из этой системы различны либо j и m, либо n и k. Следовательно, согласно (12. 22), функции

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{2\pi y}{b},$$
$$\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{9\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$
$$\varphi_5 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},$$
$$\varphi_6 = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{9\pi^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \text{ и т. д.} \qquad (12.23)$$

ортонормированы в $H_{-\Delta}$. Таким образом, система (12.23) образует ортонормированный базис в $H_{-\Delta}$.

В соответствии с (12.12) и (12.13) решение задачи (12.15), (12.16) дается рядом

$$u=\sum_{s=1}^{\infty} a_s\varphi_s, \tag{12.24}$$

где (см. (12.23))

$$a_1=(f,\ \varphi_1)=\frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}}\int_0^a\int_0^b f(x,\ y)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy,$$

$$a_2=(f,\ \varphi_2)=\frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}}\int_0^a\int_0^b f(x,\ y)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy \tag{12.25}$$

и т. д. Принимая во внимание вид функций (12.18) и (12.23), можно написать

$$u=\sum_{s=1}^{\infty} b_s\psi_s, \tag{12.26}$$

где

$$b_1=\frac{1}{\frac{ab}{4}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}\int_0^a\int_0^b f(x,\ y)\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy,$$

$$b_2=\frac{1}{\frac{ab}{4}\left(\frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy \tag{12.27}$$

и т. д. Выразив этот результат через функции (12.17), его можно записать также в виде

$$u=\sum_{m,\ n=1}^{\infty} c_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{12.28}$$

где

$$c_{mn}=\frac{1}{\frac{ab}{4}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}\int_0^a\int_0^b f(x,\ y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy.$$

В соответствии с теоремой 12.1 ряд (12.28) при любом $f\in L_2(G)$ является сходящимся как в $H_{-\Delta}$, так и в $L_2(G)$. Таким образом, задача (12.15), (12.16) решена.

Если, в частности, $f(x, y) = k = \text{const}$, мы имеем

$$c_{mn} = \frac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \int_0^a \int_0^b k \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \frac{kab}{mn\pi^2} \left[\cos\frac{m\pi x}{a}\right]_0^a \left[\cos\frac{n\pi y}{b}\right]_0^b =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{ab\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \dfrac{4kab}{mn\pi^2} = \dfrac{16a^2b^2k}{\pi^4 mn\,(b^2m^2+a^2n^2)}, & \text{если и } m, \text{ и } n \text{ нечетные,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, в этом случае решение имеет вид

$$u = \frac{16a^2b^2k}{\pi^4} \sum_{\substack{m=1,\ 3,\ \ldots \\ n=1,\ 3,\ \ldots}} \frac{1}{mn\,(b^2m^2+a^2n^2)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \quad (12.29)$$

К решению (12.15), (12.16) ведет большое число задач, например некоторые задачи *теории потенциала*, задача о *стационарном распределении температуры в бесконечной призме* с заданной нулевой температурой на границе и с интенсивностью внутренних источников тепла, характеризуемой функцией $f(x, y)$, задача о *кручении бруса прямоугольного сечения* и т. д.

Глава 13

Метод Ритца

Пусть, как и прежде, A — положительно определенный оператор на линеале D_A в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и $f \in H$. Пусть H_A — гильбертово пространство из гл. 10 (сепарабельное, поскольку H сепарабельно, см. с. 145). Рассмотрим в H_A базис (т. е. не более чем счетную линейно независимую полную систему)

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots. \quad (13.1)$$

В отличие от гл. 12 мы не будем здесь предполагать, что этот базис ортогонален в H_A.

В гл. 12 отмечалось, что процесс ортогонализации базиса (13.1), как и его нормировка, ведущая к ортонормированному базису, в общем случае весьма трудоемки. Следовательно, метод ортонормированных рядов, приведенный в гл. 12, можно эффективно применять для нахождения или аппроксимации обобщенного решения нашей задачи только в очень частных случаях, хотя простота идеи этого метода остается его сильной стороной. Поэтому в этой главе будет приведен еще один метод, так называемый *метод*

Ритца, который является одним из наиболее часто используемых, особенно в технических приложениях. Он основан на следующей идее.

По определению обобщенное решение рассматриваемого уравнения $Au=f$ — это элемент $u_0 \in H_A$, который минимизирует в H_A функционал

$$Fu=(u,\ u)_A-2(f,\ u), \tag{13.2}$$

т. е. элемент, для которого

$$Fu_0=\min_{u\in H_A} Fu. \tag{13.3}$$

Выберем целое положительное число n и будем искать аппроксимацию u_n элемента u_0 в виде

$$u_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \tag{13.4}$$

где φ_k — элементы базиса (13.1), а a_k — неизвестные пока вещественные постоянные. Эти постоянные определяются из условия

$$Fu_n=\min, \tag{13.5}$$

которое означает, что среди всех аппроксимаций вида

$$v_n=\sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k, \tag{13.6}$$

где b_k — произвольные вещественные постоянные (т. е. в n-мерном подпространстве, порождаемом элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$), функционал F принимает минимальное значение в точности на аппроксимации (13.4). По предположению (13.1) образует базис в H_A, так что обобщенное решение u_0 можно с произвольной точностью аппроксимировать соответствующей линейной комбинацией его элементов. Кроме того, условие (13.5) аналогично (13.3). Поэтому можно ожидать (и это будет подтверждено теоремой 13.1), что приближение (13.4) с постоянными, определенными в соответствии с (13.5), будет достаточно мало отличаться от искомого решения u_0 в H_A, если n будет достаточно велико.

Определение постоянных a_k в (13.4) довольно просто (это обстоятельство существенно для применимости метода Ритца), см. систему (13.11). А именно, подстановка (13.6) вместо u в (13.2) дает прежде всего

$$\begin{aligned} Fv_n=(b_1\varphi_1+\ldots+b_n\varphi_n,\ b_1\varphi_1+\ldots+b_n\varphi_n)_A-2(f,\ b_1\varphi_1+\ldots+b_n\varphi_n)= \\ =(\varphi_1,\ \varphi_1)_A b_1^2+(\varphi_1,\ \varphi_2)_A b_1b_2+\ldots+(\varphi_1,\ \varphi_n)_A b_1b_n+ \\ +(\varphi_2,\ \varphi_1)_A b_2b_1+(\varphi_2,\ \varphi_2)_A b_2^2+\ldots+(\varphi_2,\ \varphi_n)_A b_2b_n+\ldots \\ +(\varphi_n,\ \varphi_1)_A b_nb_1+(\varphi_n,\ \varphi_2)_A b_nb_2+\ldots+(\varphi_n,\ \varphi_n)_A b_n^2- \\ -2(f,\ \varphi_1)b_1-2(f,\ \varphi_2)b_2-\ldots-2(f,\ \varphi_n)b_n, \end{aligned} \tag{13.7}$$

или, с учетом того, что в силу симметрии скалярного произведения

$$(\varphi_2,\ \varphi_1)_A b_2 b_1 = (\varphi_1,\ \varphi_2)_A b_1 b_2 \text{ и т. д.},$$

$$\begin{aligned} Fv_n = {} & (\varphi_1,\ \varphi_1)_A b_1^2 + 2(\varphi_1,\ \varphi_2)_A b_1 b_2 + \ldots + 2(\varphi_1,\ \varphi_n)_A b_1 b_n + \\ & + (\varphi_2,\ \varphi_2)_A b_2^2 + \ldots + 2(\varphi_2,\ \varphi_n)_A b_2 b_n + \ldots + (\varphi_n,\ \varphi_n)_A b_n^2 - \\ & - 2(f,\ \varphi_1) b_1 - 2(f,\ \varphi_2) b_2 - \ldots - 2(f,\ \varphi_n) b_n. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Скалярные произведения $(\varphi_i,\ \varphi_k)_A$ — это фиксированные числа, определяемые элементами заданного базиса. Следовательно, в результате подстановки (13.6) вместо u в (13.2) функционал F становится квадратичной функцией переменных $b_1, \ldots, b_n$. Необходимые условия существования минимума этой функции в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ суть

$$\left.\frac{\partial Fv_n}{\partial b_1}\right|_{b_1=a_1,\ \ldots,\ b_n=a_n} = 0, \quad \ldots, \quad \left.\frac{\partial Fv_n}{\partial b_n}\right|_{b_1=a_1,\ \ldots,\ b_n=a_n} = 0, \tag{13.9}$$

т. е. должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} & 2(\varphi_1,\ \varphi_1)_A a_1 + 2(\varphi_1,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + 2(\varphi_1,\ \varphi_n)_A a_n - 2(f,\ \varphi_1) = 0, \\ & 2(\varphi_1,\ \varphi_2)_A a_1 + 2(\varphi_2,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + 2(\varphi_2,\ \varphi_n)_A a_n - 2(f,\ \varphi_2) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & 2(\varphi_1,\ \varphi_n)_A a_1 + 2(\varphi_2,\ \varphi_n)_A a_2 + \ldots + 2(\varphi_n,\ \varphi_n)_A a_n - 2(f,\ \varphi_n) = 0. \end{aligned} \tag{13.10}$$

После простых преобразований эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} & (\varphi_1,\ \varphi_1)_A a_1 + (\varphi_1,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_1,\ \varphi_n)_A a_n = (f,\ \varphi_1), \\ & (\varphi_1,\ \varphi_2)_A a_1 + (\varphi_2,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_2,\ \varphi_n)_A a_n = (f,\ \varphi_2), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\varphi_1,\ \varphi_n)_A a_1 + (\varphi_2,\ \varphi_n)_A a_2 + \ldots + (\varphi_n,\ \varphi_n)_A a_n = (f,\ \varphi_n). \end{aligned} \tag{13.11}$$

Система (13.11)[1] — это система n уравнений для n искомых постоянных $a_1, \ldots, a_n$. Так как по предположению $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы, определитель системы (13.11), который является их определителем Грама (теорема 6.5), отличен от нуля. Следовательно, существует единственное решение системы (13.11). Нетрудно показать (так как форма

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} (\varphi_i,\ \varphi_j)_A b_i b_j$$

при сделанных предположениях положительно определена), что экстремум, получаемый на основе уравнений (13.9), является стро-

[1]) Эту систему, возможно, легче запомнить в виде, в котором симметрия скалярного произведения $(u,\ v)_A$ не используется, т. е. в „исходном" виде

$$\begin{aligned} & (\varphi_1,\ \varphi_1)_A a_1 + (\varphi_1,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_1,\ \varphi_n)_A a_n = (f,\ \varphi_1), \\ & (\varphi_2,\ \varphi_1)_A a_1 + (\varphi_2,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_2,\ \varphi_n)_A a_n = (f,\ \varphi_2), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\varphi_n,\ \varphi_1)_A a_1 + (\varphi_n,\ \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_n,\ \varphi_n)_A a_n = (f,\ \varphi_n). \end{aligned}$$

гим минимумом. (Это заключение геометрически очевидно, поскольку (13.8) можно рассматривать как уравнение параболоида в $(n+1)$-мерном пространстве и $(\varphi_1, \varphi_1)_A > 0$, и т. д.)

Замечание 13.1. В частном случае, когда базис (13.1) ортонормирован в H_A — обозначим его элементы в этом случае через

$$\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots — \tag{13.12}$$

получим

$$(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases}$$

и система (13.11) принимает вид

$$a_1 = (f, \tilde{\varphi}_1), \quad a_2 = (f, \tilde{\varphi}_2), \quad \ldots \quad a_n = (f, \tilde{\varphi}_n). \tag{13.13}$$

Следовательно, метод Ритца в этом случае дает аппроксимацию u_n в виде суммы

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \tilde{\varphi}_k) \tilde{\varphi}_k \tag{13.14}$$

первых n членов ряда (12.12) (с коэффициентами (12.13)), который фигурировал в предыдущей главе. Это обстоятельство легко использовать для доказательства того, что так называемая *последовательность Ритца* — т. е. последовательность аппроксимаций u_n, даваемых выражениями (13.4) с постоянными a_k, определяемыми из (13.11), — сходится в H_A (и тем самым также в H) к обобщенному решению u_0 уравнения $Au = f$.

Предположим, что к (13.1) в H_A применена процедура ортонормирования, описанная в гл. 5 (см. замечание 5.6), так что получен ортонормированный базис, который мы, как и ранее, обозначим через

$$\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots. \tag{13.15}$$

Из указанной процедуры ортонормирования следует, что элементы базиса (13.15) являются (однозначно определенными) линейными комбинациями элементов базиса (13.1), и наоборот. Подробнее можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= d_{11}\varphi_1, \\ \tilde{\varphi}_2 &= d_{21}\varphi_1 + d_{22}\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\varphi}_n &= d_{n1}\varphi_1 + d_{n2}\varphi_2 + \ldots + d_{nn}\varphi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{13.16}$$

и

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= d'_{11}\tilde{\varphi}_1,\\
\varphi_2 &= d'_{21}\tilde{\varphi}_1 + d'_{22}\tilde{\varphi}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_n &= d'_{n1}\tilde{\varphi}_1 + d'_{n2}\tilde{\varphi}_2 + \ldots + d'_{nn}\tilde{\varphi}_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{13.17}$$

где как d_{kk}, так и d'_{kk} $(k=1, \ldots, n)$ отличны от нуля. Подставляя (13.6) вместо u в (13.2) и применяя (13.5), получаем аппроксимацию u_n, задаваемую посредством (13.4) с постоянными, определяемыми из (13.11). Аналогично, подставляя линейную комбинацию

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tilde{\varphi}_k \tag{13.18}$$

элементов ортонормированного базиса (13.15) вместо u в (13.2) и требуя, чтобы на множестве всех линейных комбинаций (13.18) (с вещественными коэффициентами β_k) выполнялось условие

$$Fw_n = \min, \tag{13.19}$$

получаем аппроксимацию

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{\varphi}_k \tag{13.20}$$

с постоянными (см. (13.13))

$$\alpha_1 = (f, \tilde{\varphi}_1), \quad \alpha_2 = (f, \tilde{\varphi}_2), \quad \ldots \quad \alpha_n = (f, \tilde{\varphi}_n). \tag{13.21}$$

Однако легко показать, что

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{\varphi}_k = z_n. \tag{13.22}$$

Действительно, всевозможные линейные комбинации элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, т. е. все элементы вида (13.6), где b_k — произвольные вещественные постоянные, образуют линеал — обозначим его через M. Однако из построения элементов (13.15) следует, что тот же самый линеал образуют и всевозможные линейные комбинации элементов $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$, т. е. все элементы вида (13.18), где β_k — произвольные вещественные постоянные. Согласно условию (13.5), получаем задачу о нахождении такого элемента u_n из M, на котором F достигает минимума на этом линеале. Как мы видели, эта задача имеет единственное решение — постоянные a_k из (13.4) однозначно определяются системой (13.11). Аналогично, условие (13.19) определяет задачу о нахождении элемента z_n, минимизирующего F на M. Поскольку эта задача также имеет единственное решение, то ситуация, когда $z_n \neq u_n$, невозможна. Следовательно, выполняется (13.22). Однако последовательность (13.20) — это последова-

тельность частичных сумм ряда

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tilde{\varphi}_k, \tag{13.23}$$

с которыми мы знакомы (в несколько иных обозначениях) по гл. 12, и сумма (в H_A) которого равна u_0. Итак, последовательность (13.4) с постоянными, определяемыми из (13.11), сходится в H_A к u_0. Следовательно, получаем следующее утверждение.

Теорема 13.1. *Пусть A — положительно определенный оператор на линеале D_A, плотном в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и пусть $f \in H$. Далее, пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, образуют базис (не обязательно ортогональный) в H_A. Тогда последовательность Ритца $\{u_n\}$ с постоянными $a_1, \ldots, a_n$, однозначно определяемыми для каждого фиксированного n из системы* (13.11) [1], *сходится в H_A (и тем самым также в H) к обобщенному решению u_0 уравнения $Au = f$.*

Замечание 13.2. Из замечания 13.1 следует, что метод Ритца приводит к тем же результатам, что и метод ортонормированных рядов. Он исключает трудоемкий процесс ортонормирования данного базиса, но требует построения и решения системы n линейных уравнений для n неизвестных постоянных $a_1, \ldots, a_n$. Для решения этой системы можно применять обычные численные методы, использующие симметрию матрицы этой системы, и т. д. См. также численные примеры в гл. 21 и 26.

Замечание 13.3. Можно показать, что хотя последовательность Ритца $u_n \to u_0$ в H_A, в общем случае не обязательно $Au_n \to f$ в H. Следовательно, процедуру, описанную в замечании 11.2, вообще говоря, нельзя применять для нахождения оценки погрешности. В гл. 20 и 25 будет показано, насколько важен для метода Ритца выбор базиса и, помимо прочего, как добиться удачным его выбором, чтобы не только $u_n \to u_0$ в H_A, но чтобы также и $Au_n \to f$ в H. Последнее делает возможной упомянутую оценку погрешности. Оценка погрешности метода Ритца, основанная на другой идее, обсуждается в гл. 44.

Замечание 13.4. Из замечания 13.1 также вытекает следующее: с ростом n элементы u_n последовательности Ритца лучше аппроксимируют (в H_A) обобщенное решение u_0. Точнее, если $n > m$, то

$$\|u_n - u_0\|_A \leqslant \|u_m - u_0\|_A. \tag{13.24}$$

---

[1] Вообще говоря, постоянные в (13.4) зависят от n. Поэтому их надо было бы обозначать $a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$. Чтобы не усложнять обозначения, мы пишем $a_1, \ldots, a_n$, поскольку здесь нет опасности неправильного понимания.

Действительно, как показано в замечании 13.1, $u_n = z_n$ (см. 13.22)). Но в соответствии с гл. 12

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tilde{\varphi}_k \tag{13.25}$$

(в обозначениях замечания 13.1) и, согласно (13.22),

$$u_n = z_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{\varphi}_k, \tag{13.26}$$

где $\alpha_k = (f, \tilde{\varphi}_k)$. Из (13.25) и (13.26) следует, что

$$u_0 - u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \tilde{\varphi}_k. \tag{13.27}$$

Далее, $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \ldots$ является ортонормированной системой в H_A, так что

$$(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_k)_A = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Из (13.27) получаем тогда

$$\| u_0 - u_n \|_A^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2. \tag{13.28}$$

Следовательно, при возрастании n норма $\|u_0 - u_n\|_A$ не возрастает откуда для $n > m$ немедленно следует (13.24).

Таким образом, если мы увеличиваем n в методе Ритца, то аппроксимация обобщенного решения u_0 рассматриваемого уравнения улучшается (или по крайней мере не ухудшается) в метрике пространства H_A. Заметим, что с выбором большего n первоначально построенная система только расширяется и что ранее вычисленные скалярные произведения и в левой, и в правой части рассматриваемых уравнений остаются неизменными; таким образом, к матрице этой системы должны присоединяться лишь дополнительные строки и столбцы вместе с дополнительными скалярными произведениями в правой части. Аналогично, если по какой-либо причине нам достаточно аппроксимации более низкого порядка, то достаточно опустить из системы соответствующие уравнения и неизвестные. Это другое свойство метода Ритца, важное с вычислительной точки зрения.

Замечание 13.5. Как уже говорилось в гл. 12, базис в H_A можно выбрать из элементов линеала D_A, поскольку это множество плотно в H_A. Тогда мы имеем $(\varphi_i, \varphi_k)_A = (A\varphi_i, \varphi_k)$ для всех $i, k = 1, \ldots, n$, и систему (13.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_1), \\
&(A\varphi_1, \varphi_2)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_2), \\
&\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&(A\varphi_1, \varphi_n)\, a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n = (f, \varphi_n).
\end{aligned} \tag{13.29}$$

Замечание 13.6. *(Неоднородные граничные условия.)* Применение метода Ритца для достаточно общего класса неоднородных граничных условий будет подробно объяснено в гл. 34. На данном этапе мы ограничимся простой задачей, рассмотренной в замечании 11.7. Если искать обобщенное решение u_0 этой задачи в виде

$$u_0 = w + z_0, \tag{13.30}$$

где w—функция, удовлетворяющая неоднородному граничному условию, то (в обозначениях замечания 11.7) получится, что функция z_0 минимизирует в H функционал

$$Gz = ((z,\ z)) - 2(f,\ z) + 2((w,\ z)) = (z,\ z)_A - 2(f,\ z) + 2((w,\ z)) =$$
$$= \int\limits_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\int\limits_G fz\,dx + 2\int\limits_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx. \tag{13.31}$$

Минимизируя этот функционал методом Ритца, где аппроксимация $z_n(x)$ функции $z_0(x)$ снова отыскивается в виде

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

с $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, образующими базис в H_A, мы легко получим для неизвестных постоянных a_k систему

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1, \varphi_1)_A a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A a_n = (f, \varphi_1) - ((w, \varphi_1)),\\
&(\varphi_1, \varphi_2)_A a_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A a_n = (f, \varphi_2) - ((w, \varphi_2)),\\
&\qquad\qquad\qquad

соответствии с гл. 20 можно выбрать, например, следующий базис:

$$\varphi_1 = 1 - x^2,\ \varphi_2 = x(1-x^2),\ \varphi_3 = x^2(1-x^2),\ \ldots,\ \varphi_n = x^{n-1}(1-x^2),\ \ldots. \tag{13.35}$$

Если $f(x)$ — четная функция переменной x, то задача симметрична относительно начала координат и ее (обобщенное) решение $u_0(x)$ будет четной[1]) функцией. (В противном случае функция $v(x) = u_0(-x)$ будет отличаться от функции $u_0(x)$, причем, как легко установить, она также будет решением задачи (13.33), (13.34) в противоречии с теоремой о единственности решения.) В этом случае в (13.35) достаточно удержать только четные функции, т. е. функции

$$1 - x^2, \quad x^2(1-x^2), \quad x^4(1-x^2). \tag{13.36}$$

Легко понять, почему это можно сделать. Любая линейная комбинация

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} b_n \varphi_n(x) \tag{13.37}$$

функций (13.35) может быть представлена в виде

$$u(x) = t(x) + z(x), \tag{13.38}$$

где $t(x)$ и $z(x)$ включают только нечетные и четные функции соответственно из (13.35). В данном случае в последовательности Ритца $\{u_n(x)\}$ не нужно рассматривать члены с ненулевыми нечетными частями $t_n(x)$: мы заранее знаем, что предел в H_A (так же, как и в $L_2(-1, 1)$) последовательности $\{t_n(x)\}$ есть нулевая функция, поскольку решение является четной функцией[2]). Итак, в этом случае нам нужен только „базис для четных функций".

Аналогичное справедливо и для задач с уравнениями в частных производных. Если, например, обсуждается плоская задача и если ясно, что решение будет четной функцией переменной x и нечетной функцией переменной y, то достаточно построить базис, состоящий только из функций, обладающих теми же свойствами.

Численные примеры, иллюстрирующие применение метода Ритца, можно найти в гл. 21 и 26. Применение метода Ритца к решению задач на собственные значения будет показано в гл. 40 и 41, к решению параболических задач — в гл. 45.

По поводу метода конечных элементов, тесно связанного с методом Ритца, см. гл. 42.

---

[1]) *За исключением самое большее множества точек меры нуль.*

[2]) Прямое вычисление приведет, несомненно, к тому же результату — коэффициенты при нечетных функциях в аппроксимации Ритца $u_n(x)$ равны нулю.

Глава 14

Метод Галёркина

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H и его плотное подмножество M. В соответствии с теоремой 6.18, если для некоторого элемента $u \in H$ при любом $v \in M$ выполняется

$$(u, v) = 0, \tag{14.1}$$

то $u = 0$ в H. Пусть теперь

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \tag{14.2}$$

образуют базис в H. Утверждается, что если для всех $k = 1, 2, \ldots$ $(u, \varphi_k) = 0$, то опять-таки $u = 0$ в H. В краткой записи

$$(u, \varphi_k) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \ldots \Rightarrow u = 0 \text{ в } H. \tag{14.3}$$

Действительно, по предположению (14.2) образует базис в H, так что множество N всех элементов вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{14.4}$$

где n — произвольное целое положительное число, а a_k — произвольные вещественные числа, является плотным в H. Поскольку для всех k выполняется $(u, \varphi_k) = 0$, то

$$\left(u, \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right) = 0$$

для всех элементов (14.4) из N, откуда следует (14.3).

Пусть

$$Au = f \tag{14.5}$$

— уравнение в H.

Если мы найдем такой элемент $u_0 \in D_A$, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$(Au_0 - f, \varphi_k) = 0, \tag{14.6}$$

то в соответствии с (14.3)

$$Au_0 - f = 0 \text{ в } H, \tag{14.7}$$

так что $u_0 \in D_A$ представляет собой решение уравнения (14.5) в H.

Это простое рассуждение, ведущее к утверждению, что из (14.6) следует (14.7), составляет основную идею метода Галёркина.

Пусть базис (14.2) и область определения D_A оператора A таковы, что любая линейная комбинация (14.4) элементов этого базиса принадлежит D_A, и пусть приближенное решение u_0 уравнения (14.5) ищется в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{14.8}$$

где n — произвольное, но фиксированное положительное целое число, а a_k — пока неизвестные постоянные. В методе Галёркина эти постоянные определяются из условий

$$(Au_n - f,\ \varphi_k) = 0, \quad k = 1,\ \ldots,\ n, \tag{14.9}$$

аналогичных (14.6). Условия (14.9) представляют собой n уравнений для n неизвестных постоянных $a_1,\ \ldots,\ a_n$ [1]).

Если оператор A линейный, условия (14.9) принимают вид

$$(a_1 A\varphi_1 + \ldots + a_n A\varphi_n - f,\ \varphi_k) = 0, \quad k = 1,\ \ldots,\ n, \tag{14.10}$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1,\ \varphi_1)\,a_1 + (A\varphi_2,\ \varphi_1)\,a_2 + \ldots + (A\varphi_n,\ \varphi_1)\,a_n = (f,\ \varphi_1),\\
&(A\varphi_1,\ \varphi_2)\,a_1 + (A\varphi_2,\ \varphi_2)\,a_2 + \ldots + (A\varphi_n,\ \varphi_2)\,a_n = (f,\ \varphi_2),\\
&\qquad\qquad\qquad

линейных уравнений и к одинаковым последовательностям приближенных решений. Однако возможности применения метода Галёркина существенно шире, чем у метода Ритца. В методе Галёркина, характеризуемом условием (14.9), заранее не налагается на оператор A никаких существенных ограничений: вовсе не является необходимым, чтобы оператор A был положительно определенным, не требуется даже, чтобы он был симметричным, и, что самое главное, он может не быть линейным. С формальной точки зрения, метод Галёркина поэтому может применяться даже в случае очень общих операторов. Как и следовало ожидать, соответствующий анализ разрешимости системы (14.9) (которая в этом случае не обязательно линейна) и сходимости последовательности Галёркина (в соответствующем пространстве) в общем случае весьма сложен. (См. также книгу [27].)

Замечание 14.2. Хотя методы Ритца и Галёркина ведут в случае линейных положительно определенных операторов к одинаковым результатам, основные идеи этих методов, как мы видели, полностью различны. Эта разница отчетливо проявляется также в обычном инженерном подходе к решению классических задач теории упругости. Приведем простой пример.

Решим задачу об определении прогиба $u(x)$ неоднородной балки длины l с переменным поперечным сечением, заделанной на обоих концах, под действием поперечной нагрузки $q(x)$ (см. пример 9.1). Инженеры, как правило, решают эту задачу двумя способами. Либо они исходят из соответствующего дифференциального уравнения

$$[E(x)\,I(x)\,u'']'' = q(x) \tag{14.13}$$

с граничными условиями

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(l) = u'(l) = 0, \tag{14.14}$$

либо минимизируют „функционал энергии"

$$\frac{1}{2}\int_0^l EIu''^2\,dx - \int_0^l q\,u\,dx \tag{14.15}$$

на классе достаточно гладких функций, удовлетворяющих (14.14). Этот функционал здесь представляет собой полную потенциальную энергию деформации нагруженной балки (см. указанный пример 9.1).

Если мы ищем приближенное решение данной задачи в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{14.16}$$

где функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют условиям (14.14), и если мы применяем метод Галёркина для решения задачи (14.13), (14.14),

мы получаем систему уравнений (14.11)

$$a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\varphi_1\,dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\varphi_1\,dx + \ldots + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\varphi_1\,dx = \int_0^l q\varphi_1\,dx,$$

$$a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\varphi_2\,dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\varphi_2\,dx + \ldots + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\varphi_2\,dx = \int_0^l q\varphi_2\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1\int_0^l (EI\varphi_1'')''\varphi_n\,dx + a_2\int_0^l (EI\varphi_2'')''\varphi_n\,dx + \ldots + a_n\int_0^l (EI\varphi_n'')''\varphi_n\,dx = \int_0^l q\varphi_n\,dx. \tag{14.17}$$

Если мы минимизируем функционал (14.15) методом Ритца с u, замененным согласно (14.16), мы получаем систему

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''^2\,dx + a_2\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2''\,dx + \ldots + a_n\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_n''\,dx = \int_0^l q\varphi_1\,dx,$$

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_2''\,dx + a_2\int_0^l EI\varphi_2''^2\,dx + \ldots + a_n\int_0^l EI\varphi_2''\varphi_n''\,dx = \int_0^l q\varphi_2\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_1\int_0^l EI\varphi_1''\varphi_n''\,dx + a_2\int_0^l EI\varphi_2''\varphi_n''\,dx + \ldots + a_n\int_0^l EI\varphi_n''^2\,dx\,l = \int_0^l q\varphi_n\,dx. \tag{14.18}$$

Разница между методами Ритца и Галёркина становится здесь очевидной—системы (14.17) и (14.18) отличаются по форме. (На самом деле они идентичны—см. конец этого замечания.) Однако основное различие заключается в совершенно разном понимании решения одной и той же задачи—метод Галёркина исходит из дифференциального уравнения задачи, а метод Ритца—из соответствующего функционала.

Заметим еще, что инженеры при использовании метода Ритца в своих задачах, как правило, исходят из функционалов без предварительного изучения их свойств или свойств соответствующих дифференциальных операторов. При этом нужна известная осторожность. Однако, как правило, относящиеся сюда вопросы очень просты. В частности, в приведенном выше примере легко показать (см. гл. 19), что при довольно простых предположениях, касающихся функций $E(x)$ и $I(x)$, соответствующий оператор A положительно определен на соответствующем линеале, так что для ап-

проксимации обобщенного решения задачи (14.13), (14.14) мы вправе применять как метод Ритца, так и метод Галёркина. Соответствующий функционал

$$Fu=(u,\ u)_A-2(q,\ u)=\int_0^l EIu''^2\,dx-2\int_0^l qu\,dx, \qquad (14.19)$$

минимизируемый методом Ритца, здесь представляет собой удвоенный „функционал энергии". Таким образом, оба рассмотренных метода решения данной задачи можно применять, естественно, лишь постольку, поскольку выбранный базис удовлетворяет предположениям, рассмотренным в этой и предыдущих главах. (По поводу выбора базиса см. гл. 20.)

Так как по предположению функции φ_i удовлетворяют условиям (14.14), интегрируя по частям

$$\int_0^l (EI\varphi_i'')''\varphi_k\,dx=[(EI\varphi_i'')'\varphi_k]_0^l-\int_0^l (EI\varphi_i'')''\varphi_k'\,dx=$$

$$=-[EI\varphi_i''\varphi_k']+\int_0^l EI\varphi_i''\varphi_k''\,dx=\int_0^l EI\varphi_i''\varphi_k''\,dx,$$

мы приходим к выводу, что коэффициенты систем (14.17) и (14.18) совпадают. (См. также замечание 14.1.)

В целом пример носит, конечно, чисто иллюстративный характер, поскольку задачу (14.13), (14.14) легко решить последовательным интегрированием уравнения (14.13).

Замечание 14.3. По поводу модификации метода Галёркина в случае, когда некоторые элементы базиса не принадлежат D_A (случай, когда не учтены некоторые граничные условия и т. д.), см. замечание 19.5, пример 21.2 и замечание 34.3.

Замечание 14.4. При формулировке метода Галёркина для построения приближенного решения (14.8) и формулировки условий (14.9) использовался один и тот же базис (14.2). В методе Галёркина—Петрова, являющемся модификацией метода Галёркина, два используемых базиса, вообще говоря, различны. Для построения приближенного решения (14.8) используется базис (14.2), в то время как для формулировки условия (14.9) используется другой базис $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Условия (14.9) принимают тогда вид $(Au_n-f,\ \psi_k)=0,\ k=1,\ \ldots,\ n$.

Подробно об этой модификации и некоторых предшествующих ей см., например, [11].

В заключение отметим, что уравнения (13.11) метода Ритца выражают условие стационарности функционала на подпространстве, образованном на элементах $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в то время как уравнения, к которым приводит метод Галёркина, могут быть совершенно формальными, не имеющими этого вариационного смысла.

Всегда, когда эти уравнения имеют физический смысл, они совпадают с уравнениями метода Ритца для определенного функционала — функционала энергии и т. п. См. также примечания на с. 137.

Глава 15

Метод наименьших квадратов. Метод Куранта

Как и в предыдущих главах, рассмотрим оператор A, положительно определенный на линеале D_A, плотном в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и уравнение

$$Au = f, \tag{15.1}$$

где $f \in H$. Пусть

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in D_A, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15.2}$$

образуют так называемый *A-базис* в H, т. е. последовательность (возможно, конечную, если рассматривается конечномерное пространство), такую что

$$A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots \tag{15.3}$$

образуют базис в H. Следовательно, для любого $f \in H$ и любого $\eta > 0$ можно найти положительное целое число m и постоянные $c_1, \ldots, c_m$, такие что

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} c_k A\varphi_k - f \right\| < \eta, \tag{15.4}$$

или — поскольку оператор A линеен — что

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} A(c_k\varphi_k) - f \right\| < \eta\ ^{1}). \tag{15.5}$$

Метод наименьших квадратов состоит в нахождении приближенного решения u_n (т. е. аппроксимации обобщенного решения) уравнения $Au = f$ в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \tag{15.6}$$

где постоянные a_k определяются из условия

$$\| Au_n - f \|^2 = \min. \tag{15.7}$$

---

[1]) См. примечание на с. 156. Здесь постоянные c_k также должны были бы обозначаться $c_1^m, \ldots, c_m^m$.

Подробнее: в n-мерном пространстве, образованном элементами вида

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k, \tag{15.8}$$

где b_k — произвольные постоянные, выражение $\|Av_n - f\|^2$ должно быть минимально именно для элемента (15.6).

Если вместо v_n в $\|Av_n - f\|^2$ подставить (15.8), то это выражение станет квадратичной функцией переменных b_k. Необходимым условием выполнения (15.7) является удовлетворение в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ равенств

$$\frac{\partial \|Av_n - f\|^2}{\partial b_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \|Av_n - f\|^2}{\partial b_n} = 0.$$

Аналогично тому, как в случае метода Ритца мы получали систему (13.11) из условий (13.9), в данном случае мы получаем следующую систему (подробный вывод здесь не приводится):

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1, A\varphi_1)a_1 + (A\varphi_1, A\varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_1, A\varphi_n)a_n = (f, A\varphi_1),\\
&(A\varphi_1, A\varphi_2)a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_2, A\varphi_n)a_n = (f, A\varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A\varphi_1, A\varphi_n)a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_n)a_2 + \ldots + (A\varphi_n, A\varphi_n)a_n = (f, A\varphi_n).
\end{aligned} \tag{15.9}$$

Система (15.9) имеет единственное решение, поскольку ее определитель представляет собой определитель Грама, соответствующий первым n элементам последовательности (15.3), а эти элементы по предположению образуют базис в H, так что они линейно независимы в H.

Мы докажем, что последовательность приближенных решений (15.6) с постоянными, определяемыми из условия (15.7), сходится в H_A [1]) (и поэтому также в H) к обобщенному решению u_0 уравнения $Au = f$. Следовательно, нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти положительное целое число m, такое что для всех $n > m$ выполняется $\|u_n - u_0\|_A < \varepsilon$. Итак, выберем $\varepsilon > 0$. По предположению оператор A положительно определен на линеале D_A, так что существует постоянная $C > 0$, такая что

$$\|u\|_A \geqslant C\|u\| \tag{15.10}$$

для всех $u \in H_A$. В соответствии с (11.21) для любой аппроксимации $u_n \in D_A$ обобщенного решения u_0 уравнения $Au = f$

$$\|u_n - u_0\|_A \leqslant \frac{\|Au_n - f\|}{C}. \tag{15.11}$$

[1]) H_A — это пространство, построенное в гл. 10.

Таким образом, достаточно доказать, что выражение $\|Au_n - f\|$ можно сделать произвольно малым за счет выбора n достаточно большим.

Обозначим

$$\eta = C\varepsilon. \tag{15.12}$$

Для этого η можно найти такое число m и такие постоянные $c_1, \ldots, c_m$, чтобы выполнялось (15.5). Определим в линейной комбинации

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} b_k \varphi_k \tag{15.13}$$

постоянные b_k как такие, для которых $\|Au_m - f\|^2 = \min$, или, что то же самое,

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} A(b_k \varphi_k) - f \right\| = \min. \tag{15.14}$$

Поскольку для рассматриваемого m существуют постоянные $c_1, \ldots, c_m$, такие что выполняется (15.5), для b_k, определяемых условием (15.14), тем более будет

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} A(b_k \varphi_k) - f \right\| < \eta. \tag{15.15}$$

Однако если $n > m$ и если a_k в (15.6) таковы, что удовлетворяется (15.7), то также

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} A(a_k \varphi_k) - f \right\| \leqslant \eta. \tag{15.16}$$

Действительно, для $a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$ и для $a_{m+1} = \ldots = a_n = 0$ выражение в левой части неравенства (15.16) совпадает с выражением в левой части неравенства (15.15). Более того, если постоянные $a_k (k = 1, \ldots, n)$ определены так, что удовлетворено условие (15.7), то норма в (15.16) может только уменьшиться. Итак, если u_n определено посредством (15.6) с постоянными, определяемыми согласно (15.7), то для любого $\varepsilon > 0$ существует m, такое что

$$\|Au_n - f\| < \eta = C\varepsilon \tag{15.17}$$

при всех $n > m$. Используя (15.11), получаем $\|u_n - u_0\|_A < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Кроме того, из (15.17) следует, что $\lim_{n\to\infty} Au_n = f$ в H. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 15.1. *Пусть A — положительно определенный оператор на линеале D_A, плотном в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и пусть $f \in H$. Пусть последовательность* (15.3) *образует*

базис в H. Тогда последовательность элементов u_n, задаваемая (15.6) *с постоянными a_k, однозначно определяемыми условием* (15.7) (см. систему (15.9)), *сходится в H_A и, следовательно, также в H к обобщенному решению u_0 уравнения $Au=f$. Кроме того,* $\lim_{n\to\infty} Au_n = f$ *в H.*

Замечание 15.1. Упомянем вкратце некоторые свойства метода наименьших квадратов, особенно в сравнении с методом Ритца.

Так как последовательность $\{u_n\}$, полученная по методу наименьших квадратов, сходится в H_A к обобщенному решению u_0 уравнения $Au=f$, она в соответствии с теоремой 11.2 является μ-последовательностью для функционала

$$Fu=(u,\ u)_A-2(f,\ u), \tag{15.18}$$

т. е. $\lim_{n\to\infty} Fu_n = \min_{u\in H_A} Fu = -\|u_0\|_A^2$. Обозначим через $\{v_n\}$ последовательность Ритца (гл. 13), построенную при том же выборе базиса (15.2). (По теореме 20.1 (15.2) является базисом и в H_A.) Как известно, последовательность Ритца $\{v_n\}$ также имеет вид (15.6), но в отличие от последовательности $\{u_n\}$, полученной по методу наименьших квадратов, соответствующие коэффициенты определяются в ней условием $Fv_n=\min$ (см. гл. 13). Следовательно, для любого n справедливо $Fv_n \leqslant Fu_n$, или, если записать функционал (15.18) в виде $Fu=\|u-u_0\|_A^2-\|u_0\|_A^2$, см. (11.8),

$$\|v_n-u_0\|_A \leqslant \|u_n-u_0\|_A. \tag{15.19}$$

Из (15.19) следует, что при выборе одного и того же базиса последовательность Ритца сходится в пространстве H_A к обобщенному решению u_0 уравнения $Au=f$ лучше (по крайней мере не хуже), чем последовательность $\{u_n\}$, построенная по методу наименьших квадратов. Кроме того, в случае метода Ритца элементы базиса необязательно выбирать из D_A.

С другой стороны, преимуществом метода наименьших квадратов является то, что в случае этого метода не только $u_n \to u_0$ в H_A, но также и

$$Au_n \to f \text{ в } H, \tag{15.20}$$

что позволяет установить относительно простую оценку погрешности в соответствии с (15.11) (если постоянная C из (15.10) известна). Если, кроме того, $H=L_2(G)$, то в некоторых простых случаях можно доказать на основании (15.20) равномерную сходимость последовательности $\{u_n\}$ на $\overline{G}$. См., например, [29], где используется функция Грина для доказательства такой сходимости в случае задачи Дирихле с нулевыми граничными условиями для уравнения Пуассона $-\Delta u=f$ с $f\in L_2(G)$.

Замечание 15.2. (*Метод Куранта.*) Метод Куранта представляет собой некоторое сочетание метода Ритца и метода наименьших квадратов. Пусть заранее известно, что обобщенное решение

u_0 уравнения $Au=f$ принадлежит D_A. Построим функционал

$$\tilde{F}u=Fu+\|Au-f\|^2, \quad u\in D_A, \tag{15.21}$$

где F — функционал (15.18). Функционал $\tilde{F}$ достигает минимума на D_A в точности на $u=u_0$, поскольку Fu минимально на D_A при $u=u_0$ в соответствии с теоремой 9.2; $\|Au-f\|^2$ также минимально при $u=u_0$, так как при этом $\|Au_0-f\|=0$. Таким образом, нахождение решения u_0 уравнения $Au=f$ эквивалентно нахождению элемента $u_0\in D_A$, минимизирующего в D_A функционал (15.21). Из формы функционала (15.21) видно, что его минимизация в D_A (например, с помощью метода Ритца) существенно труднее, чем минимизация исходного функционала F или $\|Au-f\|^2$. Однако в то же время метод Куранта сочетает преимущества метода Ритца и метода наименьших квадратов, и это, как можно показать, положительно влияет на скорость сходимости или, возможно, на ее тип. Если мы строим минимизирующую последовательность для $\tilde{F}$, например с помощью метода Ритца, то, очевидно, снова будем иметь

$$Au_n\longrightarrow f \text{ в } H \text{ при } n\longrightarrow\infty, \tag{15.22}$$

что в некоторых простых случаях позволяет провести рассуждения, касающиеся равномерной сходимости, аналогичные указанным выше.

Если $H=L_2(G)$ и если известно, что как u_0, так и f — достаточно гладкие в $\bar{G}$ функции, то вместо функционала (15.21) можно рассматривать функционал

$$Fu+\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1+\ldots+i_N=k}\left\|\frac{\partial^k(Au-f)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_N^{i_N}}\right\|^2. \tag{15.23}$$

В этом случае вычисления, ведущие к нахождению u_n (например, по методу Ритца), будут, понятно, очень трудоемкими, но, с другой стороны, сходимость последовательности $\{u_n\}$ — очень быстрой. В частности, из соотношений

$$\frac{\partial^k(Au_n-f)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_N^{i_N}}\longrightarrow 0 \text{ в } H \text{ при } n\longrightarrow\infty, \tag{15.24}$$

которые аналогичны соотношению (15.22), можно сделать соответствующие выводы, касающиеся равномерной сходимости не только последовательности $\{u_n\}$, но также и ее производных в рассматриваемой области. Подробнее см., например, [27].

Замечание 15.3. Ясно, что для формального применения метода наименьших квадратов не требуется, чтобы оператор A был положительно определенным на D_A. С такой ситуацией мы уже сталкивались в случае метода Галёркина. Естественно, если опе-

ратор A относится к более общему типу, то вопросы, связанные с однозначной определимостью постоянных a_k в (15.6) из условия (15.7) и со сходимостью соответствующей последовательности $\{u_n\}$ (в подходящем пространстве), становятся намного более сложными. Можно показать—см., например, [27]—что ответ на оба этих вопроса положителен (причем под сходимостью $\{u_n\}$ понимается сходимость в пространстве H), если выполнены следующие требования:

1. Оператор A линеен и D_A—линеал, плотный в H.
2. Последовательность (15.3.) образует базис в H.
3. Уравнение $Au=f$, $f\in H$, имеет в H решение $u_0\in D_A$.
4. Существует положительная постоянная K, такая что для любого $u\in D_A$

$$\|Au\|\geqslant K\|u\|. \tag{15.25}$$

Замечание 15.4. Из (15.25) следует единственность решения. Действительно, вследствие (15.25) уравнение $Au=0$ имеет в H только решение $u=0$. (Если бы $Au=0$ при $u\neq 0$ в H, то выполнялось бы $\|Au\|=0$ и $\|u\|\neq 0$, что противоречит (15.25).)

Глава 16

Метод наибыстрейшего спуска. Пример

Введем еще один метод, приводящий к приближенному решению уравнения $Au=f$, в котором оператор A является положительно определенным,—так называемый *метод наибыстрейшего спуска*. Этот метод применим в случае *ограниченных* операторов (определение 8.13), поэтому для дифференциальных операторов он не годится. Типичным примером уравнений, для решения которых данный метод предпочтителен, служат интегральные уравнения.

Пусть A—положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H [1]). Пусть $f\in H$, и пусть u_0 является в H решением уравнения

$$Au=f. \tag{16.1}$$

Как мы знаем из теоремы 9.2, элемент u_0 минимизирует в H функционал

$$Fu=(Au,\ u)-2(f,\ u). \tag{16.2}$$

[1]) Если оператор A ограничен и положительно определен только на линеале D_A, всюду плотном в H, то его действие можно расширить (см., например, [26]) на все пространство H, сохраняя как норму, так и положительную определенность.

Это обстоятельство делает возможным следующее геометрическое представление, на котором основан метод, описанный в настоящей главе.

Функционал на каждом $u \in H$ принимает определенное значение. Геометрически можно представить этот функционал в виде некоторой «поверхности» над пространством H, которая имеет «наименьшую координату» в точности при $u = u_0$. Отправляясь из начальной точки, мы теперь хотим как можно быстрее достигнуть точки, для которой эта «координата» минимальна. Мы движемся по поверхности именно в «направлении наибыстрейшего спуска».

Выберем некоторый элемент $u_1 \in H$. Если $Au_1 = f$, то задача решена. В противном случае $Au_1 - f \neq 0$ в H, и элемент u_1 рассматривается как первое приближение искомого решения. Найдем в H такой элемент v_1, для которого

$$\|v_1\| = \|Au_1 - f\|, \tag{16.3}$$

$$\frac{d}{dt} F(u_1 + tv_1)\,|_{t=0} = \max \quad [1]). \tag{16.4}$$

Однако мы имеем

$$F(u_1 + tv_1) = (A(u_1 + tv_1),\ u_1 + tv_1) - 2(f,\ u_1 + tv_1) =$$
$$= (Au_1,\ v_1) + 2t(Au_1,\ v_1) + t^2(Av_1,\ v_1) - 2(f,\ u_1) - 2t(f,\ v_1) =$$
$$= Fu_1 + 2t(Au_1 - f,\ v_1) + t^2(Av_1,\ v_1), \tag{16.6}$$

$$\frac{d}{dt} F(u_1 + tv_1) = 2(Au_1 - f,\ v_1) + 2t(Av_1,\ v_1). \tag{16.7}$$

Для $t = 0$

$$\frac{d}{dt} F(u_1 + tv_1)\,|_{t=0} = 2(Au_1 - f,\ v_1). \tag{16.8}$$

Тогда требования (16.3) и (16.4) означают (как легко видеть), что

$$v_1 = Au_1 - f \tag{16.9}$$

(поскольку если норма v_1 устанавливается из (16.3), то скалярное произведение правой части (16.8) будет максимально в точности при $v_1 = Au_1 - f$). В то же время из (16.7) и (16.6) видно, что для такого выбора v_1 функционал F будет принимать мини-

[1]) Геометрическая интерпретация: элементы вида

$$u = u_1 + tv_1, \tag{16.5}$$

где t пробегает всю совокупность вещественных чисел, образуют в H «прямую линию, соединяющую точки u_1 и $u_1 + v_1$». Вспоминая представление функционала F в виде поверхности над H, мы можем интерпретировать F над прямой линией (16.5) как «кривую» на этой поверхности. Мы ищем элемент $v_1 \in H$, иными словами, «направление», такое что касательная к этой кривой имеет максимальный наклон в точке $u = u_1$. В этом заключается геометрическая интерпретация условия (16.4). Чтобы определить v_1, остается узнать его норму. Чтобы получить результат возможно более просто, мы устанавливаем эту норму условием (16.3).

мальное значение вдоль «прямой линии» $u = u_1 + tv_1$ при

$$t = t_1 = -\frac{(Au_1 - f,\ v_1)}{(Av_1,\ v_1)} = -\frac{(v_1,\ v_1)}{(Av_1,\ v_1)}. \tag{16.10}$$

В качестве второго приближения решения берется элемент

$$u_2 = u_1 + tv_1. \tag{16.11}$$

Если $Au_2 \neq f$, мы продолжаем дальше в том же духе, т. е. мы конструктируем, подобно (16.9) и (16.11), элементы

$$v_2 = Au_2 - f, \tag{16.12}$$

$$u_3 = u_2 + t_2 v_2, \tag{16.13}$$

где

$$t_2 = -\frac{(v_2,\ v_2)}{(Av_2,\ v_2)} \tag{16.14}$$

и т. д. Так получается последовательность элементов $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

Пусть m, M — положительные постоянные, такие что

$$m\|u\|^2 \leqslant (Au,\ u) \leqslant M\|u\|^2 \text{ для всех } u \in H. \tag{16.15}$$

Тогда можно видеть (см., например, [27]), что последовательность $\{u_n\}$ сходится к решению u_0 данного уравнения как в H, так и в пространстве H_A со скалярным произведением $(u,\ v)_A = (Au,\ v)$, и что справедлива оценка

$$\|u_{n+1} - u_0\|_A \leqslant \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n. \tag{16.16}$$

Пример 16.1. В пространстве $H = L_2(0,\ \pi)$ рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x) - 0.1\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,ds = h(x), \tag{16.17}$$

где $h \in L_2(0,\ \pi)$. Заметим прежде всего, что оператор

$$Au = u(x) - 0.1\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,ds \tag{16.18}$$

симметричен в $L_2(0,\ \pi)$, поскольку

$$\begin{aligned}(Au,\ v) &= \int_0^\pi \left[u(x) - 0.1\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,ds\right] v(x)\,dx = \\ &= \int_0^\pi u(x)\,v(x)\,dx - 0.1\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\,u(s)\,v(x)\,ds\,dx = \\ &= \int_0^\pi u(x)\,v(x)\,dx - 0.1\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+s)\,v(s)\,u(x)\,ds\,dx = \\ &= \int_0^\pi \left[v(x) - 0.1\int_0^\pi \sin(x+s)\,v(s)\,ds\right] u(x)\,dx = (Av, u).\end{aligned} \tag{16.19}$$

Далее, в соответствии с (16.19)

$$(Au,\ u)=\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx-0.1\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+s)\,u(s)\,u(x)\,ds\,dx. \quad (16.20)$$

Но, согласно неравенству Шварца (3.14), для любых двух функций $f\in L_2(0,\pi)$, $g\in L_2(0,\pi)$ выполняется

$$\left[\int_0^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx\right]^2\leqslant\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx\cdot\int_0^{\pi} g^2(x)\,dx. \quad (16.21)$$

Следовательно, полагая

$$f(x)=\int_0^{\pi}\sin(x+s)u(s)\,ds,\quad g(x)=u(x),$$

получим

$$\left(\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin(x+s)\,u(s)\,ds\right]\cdot u(x)\,dx\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin(x+s)\,u(s)\,ds\right]^2 dx\cdot\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx. \quad (16.22)$$

Еще раз применив неравенство Шварца, можно получить

$$\left[\int_0^{\pi}\sin(x+s)\,u(s)\,ds\right]^2\leqslant\int_0^{\pi}\sin^2(x+s)\,ds\cdot\int_0^{\pi} u^2(s)\,ds=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[1-\cos 2(x+s)\right]ds\cdot\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx. \quad (16.23)$$

Подстановка в (16.22) дает

$$\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+s)u(s)\,u(x)ds\,dx\right]^2\leqslant\frac{\pi^2}{2}\left[\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx\right]^2,$$

или, другими словами,

$$\left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x+s)\,u(s)\,u(x)\,ds\,dx\right|\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} u^2(x)\,dx. \quad (16.24)$$

Из (16.24) и (16.20) следует, что

$$\left(1-\frac{0.1\pi}{\sqrt{2}}\right)\|u\|^2\leqslant(Au,\ u)\leqslant\left(1+\frac{0.1\pi}{\sqrt{2}}\right)\|u\|^2, \quad (16.25)$$

откуда прежде всего вытекает положительная определенность оператора (16.18) и в $L_2(0,\pi)$, поскольку ясно, что $1-0.1\pi/\sqrt{2}>0$.

Далее, неравенства (16.25) представляют собой неравенства типа (16.25). Следовательно, если метод наибыстрейшего спуска применяется к решению уравнения (16.17), то процесс получается сходящимся.

В качестве численного примера возьмем случай $h(x) \equiv 1$ на промежутке $[0, \pi]$. Мы получаем уравнение

$$u(x) = 0.1 \int_0^{\pi} \sin(x+s)\, u(s)\, ds = 1. \tag{16.26}$$

Поскольку коэффициент 0.1 при втором члене в (16.26) «мал», очевидно, что удобно будет в качестве первого приближения решения взять правую часть данного уравнения, т. е. функцию

$$u_1(x) \equiv 1 \text{ на } [0, \pi]. \tag{16.27}$$

В соответствии с (16.9) мы определим сначала

$$v_1 = Au_1 - f = 1 - 0.1 \int_0^{\pi} \sin(x+s) \cdot 1 \cdot ds - 1 = 0.1 [\cos(x+s)]_0^{\pi} = -0.2 \cos x. \tag{16.28}$$

Далее, согласно (16.10), имеем

$$t_1 = -\frac{(v_1, v_1)}{(Av_1, v_1)}. \tag{16.29}$$

Однако

$$(v_1, v_1) = 0.04 \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx = 0.04 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.02\pi, \tag{16.30}$$

$$(Av_1, v_1) = \int_0^{\pi} \left[-0.2 \cos x + 0.02 \int_0^{\pi} \sin(x+s) \cos s\, ds \right] (-0.2) \cos x\, dx =$$

$$= 0.04 \int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx - 0.004 \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\sin x + \sin(x+2s)]\, ds \right] \cos x\, dx =$$

$$= 0.04 \cdot \frac{\pi}{2} - 0.004 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = 0.02\pi, \tag{16.31}$$

так как

$$\int_0^{\pi} \sin(x+2s)\, ds = 0 \quad \text{при любом } x.$$

Подстановка (16.30) и (16.31) в (16.29) дает

$$t_1 = -\frac{0.02\pi}{0.02\pi} = -1.$$

Следовательно, согласно (16.11), второе приближение решения имеет вид

$$u_2 = u_1 + t_1 v_1 = 1 + 0.2 \cos x. \tag{16.32}$$

Согласно (16.16), это второе приближение в H_A по меньшей мере в $(M+m)/(M-m)$ раз (т. е. по меньшей мере в четыре раза [1])) лучше, чем первое приближение u_1.

Пример, конечно, носит чисто иллюстративный характер и был выбран исключительно для того, чтобы показать эффективность метода. Поскольку $\sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$, ясно, что ядро уравнения (16.17) вырождено, так что решение этого уравнения можно искать в виде

$$u(x) = h(x) + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Пытаясь найти решение уравнения (16.26) в виде

$$u(x) = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x, \tag{16.33}$$

получаем подстановкой в (16.26) условие

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x - 0.1 \int_0^{\pi} (\sin x \cos s + \cos x \sin s)(1 + c_1 \sin s + c_2 \cos s)\, ds = 0.$$

Интегрируя и сравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $\sin x$ и $\cos x$, получаем

$$c_1 - 0.1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot c_2 = 0, \quad c_2 - 0.1\left(2 + \frac{\pi}{2} \cdot c_1\right) = 0,$$

откуда для неопределенных коэффициентов c_1, c_2 находим значения

$$c_1 = \frac{0.01\pi}{1 - 0.0025\pi^2}, \quad c_2 = \frac{0.2}{1 - 0.0025\pi^2}.$$

Следовательно, согласно (16.33), решение уравнения (16.26) имеет вид

$$u(x) = 1 + \frac{0.01\pi}{1 - 0.0025\pi^2} \sin x + \frac{0.2}{1 - 0.0025\pi^2} \cos x. \tag{16.34}$$

Так как числа $0.0025\pi^2$ и 0.01π малы по сравнению с числами 1 и 0.2 соответственно, (16.32) дает действительно очень хорошее приближение решения (16.34).

---

[1]) Точнее, мы имеем

$$\frac{M+m}{M-m} = \frac{2}{2 \cdot \frac{0.1\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{0.1\pi} > \frac{1.41}{0.32} > 4.$$

Глава 17

Итоги глав с 9 по 16

Содержание части II, т. е. глав с 9 по 16, относительно богатое. Будет полезно подытожить основные результаты ч. II в этой главе и тем самым помочь читателю лучше ориентироваться в изложенном материале.

При решении задач техники и математической физики часто приходится сталкиваться с уравнениями типа

$$Au=f, \tag{17.1}$$

где f — элемент гильбертова пространства H, а A — это оператор, чаще всего положительный или положительно определенный на линеале D_A, плотном в H. В случае краевых задач для дифференциальных уравнений (решению таких задач, хотя и не только таких, посвящена настоящая книга) мы, как правило, выбираем $H=L_2(G)$; тогда D_A является линеалом достаточно гладких функций (для которых, таким образом, возможно применить операции дифференцирования, предписываемые рассмотренным дифференциальным оператором), которые удовлетворяют данным граничным условиям (и, может быть, также другим требованиям). Тогда под решением уравнения $Au=f$ в H понимается элемент $u_0\in D_A$, такой что

$$Au_0=f \text{ в } H. \tag{17.2}$$

Если, например, $H=L_2(G)$, то

$$Au_0=f \text{ в } L_2(G)$$

означает, что равенство удовлетворяется почти везде в области G.

Если A — положительный оператор на линеале D_A, то уравнение $Au=f$ имеет не более одного решения в H, т. е. не могут существовать два различных элемента u_1, u_2 из D_A, такие что оба равенства $Au_1=f$ и $Au_2=f$ выполнялись бы в H. В этом состоит утверждение теоремы 9.1. Главным результатом гл. 9 является теорема о минимуме квадратичного функционала (теорема 9.2). Согласно этой теореме, задача нахождения решения $u_0\in D_A$ уравнения $Au=f$ для положительного оператора A эквивалентна задаче о нахождении элемента $u_0\in D_A$, который минимизирует в D_A функционал

$$Fu=(Au,\ u)-2(f,\ u). \tag{17.3}$$

Теорема 9.2 имеет фундаментальное значение, поскольку она сводит решение данного уравнения к нахождению элемента u_0, минимизирующего в D_A функционал (17.3). Для решения (или, возможно, приближенного решения) последней задачи были разработаны относительно простые численные методы. Однако теорема 9.2 не содержит ничего, относящегося к существованию ре-

шения данного уравнения или существованию элемента u_0, минимизирующего в D_A функционал (17.3). В действительности можно привести множество даже довольно простых примеров уравнений типа $Au=f$, которые не имеют решений $u_0 \in D_A$ в H, и, следовательно, задача нахождения элемента u_0 в D_A, который минимизирует функционал (17.3), в этих случаях не имеет решений. Ясно, что аппроксимация этих несуществующих решений, например методом Ритца, не имеет смысла. Простая идея, позволяющая преодолеть эту трудность, заключается в том, чтобы рассматривать функционал в области, более широкой, чем линеал D_A. В соответствии с этой идеей при предположении, что оператор A положительно определен на линеале D_A, сбласть данного функционала была расширена в так называемое пространство H_A. Функционал, расширенный таким образом, действительно принимает в этом пространстве свое минимальное значение. Элемент $u_0 \in H_A$, на котором достигается этот минимум, однозначно определяется правой частью уравнения $Au=f$ и называется обобщенным решением этого уравнения. Однако в частных случаях может оказаться, что u_0 принадлежит исходному множеству D_A, так что тогда получаем решение уравнения $Au=f$ в обычном смысле, упомянутом выше.

Пространство H_A было построено следующим образом: мы определили на D_A новое скалярное произведение

$$(u, v)_A=(Au, v), \quad u, v \in D_A, \tag{17.4}$$

на основе которого обычным образом были определены норма $\|u\|_A$ и расстояние $\rho_A(u, v)$. Таким образом было получено предгильбертово пространство S_A. В случае, если S_A — полное пространство в метрике ρ_A, мы полагаем $H_A=S_A$. В противном случае рассматривается множество M всех последовательностей, фундаментальных в S_A. Эти последовательности (т. е. элементы множества M) были разбиты на классы таким образом, что две последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ из M принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда выполняется

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\|_A = 0. \tag{17.5}$$

Каждому из этих классов был приписан (так, чтобы выполнялось взаимно однозначное соответствие) определенный элемент пространства H [1]). Множество таких элементов было обозначено через D. Линеал D представляет собой объединение исходного линеала D_A и множества D_I «новых» элементов. Эти новые элементы соответствуют классам тех последовательностей, фундаментальных в S_A, которые не имеют предела в S_A.

[1]) Во взаимно однозначном соответствии определенных элементов классам фундаментальных последовательностей заключается основная идея «пополнения» даже в случае общего метрического пространства, см. [26]. Однако в общем случае непросто описать характер «особых» элементов, т. е. элементов, которые «добавляются» к элементам исходного пространства.

Скалярное произведение $(u, v)_A$ элементов $u_0, v_0 \in D$ было определено на линеале D соотношением

$$(u_0, v_0)_A = \lim_{n \to \infty} (u_n, v_n)_A, \tag{17.6}$$

где $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — некоторые последовательности элементов из D_A, а именно из классов, которые сопоставляются — согласно с рассмотренным выше взаимно однозначным отображением — элементам u_0, v_0 соответственно. Предел (17.6) всегда существует и не зависит от выбора последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ из классов, сопоставляемых элементам u_0 и v_0. Было показано, что (17.6) действительно обладает всеми свойствами скалярного произведения и что оно определяет расширение скалярного произведения, первоначально определенного только для элементов D_A, на все множество D.

На основе (17.6) на линеале D были обычным образом определены норма $\|u\|_A$ и расстояние ρ_A. Они вновь являются расширениями нормы $\|u\|_A$ и расстояния $\rho_A(u, v)$, определенных первоначально на D_A с помощью (17.4), на полное множество D. Линеал D с метрикой ρ_A называется пространством H_A. Это пространство полно в метрике ρ_A; следовательно, оно является гильбертовым пространством. Как уже отмечалось, его элементы являются, с одной стороны, элементами линеала D_A (всюду плотного в H_A), с другой — элементами D_I. В соответствии с изложенным выше элементы D_I могут быть охарактеризованы утверждением, что каждый элемент $u \in D_I$ является элементом H, не принадлежащим D_A, хотя в то же время является пределом в H некоторой последовательности $\{u_n\}$, фундаментальной в S_A. Элементы из D_I могут иметь самый различный характер. Например, в распространенном случае дифференциальных операторов второго порядка, где в качестве H выбирается, как правило, $L_2(G)$ [1]) и где линеал функций, непрерывных со своими частными производными первого и второго порядка в замкнутой области $\bar{G}$ и удовлетворяющих рассмотренным граничным условиям, берется в качестве D_A; в отношении элементов D_I мы можем в общем сказать только то, что они обладают так называемыми обобщенными частными производными первого порядка, квадратично интегрируемыми в области G. Позже, когда будет определено пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(G)$, можно будет характеризовать элементы H_A более подробно.

Соотношение $\|u\|_A \geqslant C\|u\|$, характеризующее положительную определенность оператора A на D_A, остается справедливым также и в пространстве H_A.

Функционал F, определенный на линеале D_A формулой $Fu = (Au, u) - 2(f, u)$, или, что то же самое, формулой

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u), \tag{17.7}$$

[1]) Естественно, в случае обычных дифференциальных операторов мы имеем $G = (a, b)$ и вместо частных производных говорим об обыкновенных.

после только что описанного расширения скалярного произведения $(u, u)_A$ может быть расширен с помощью (17.7) на все пространство H_A. Тогда функционал (17.7) принимает свое минимальное значение в H_A на определенном элементе u_0, который находится из условия, состоящего в том, что для всех $u \in H_A$ должно удовлетворяться равенство

$$(u_0, u)_A = (f, u). \tag{17.8}$$

В соответствии с теоремой Рисса u_0 определяется однозначно этим условием (т. е. правой частью уравнения $Au = f$). Как уже было сказано, элемент u_0 называется обобщенным решением данного уравнения. Следовательно, в случае, когда A — положительно определенный оператор в D_A, существование минимума F в H_A и тем самым (по определению) также существование обобщенного решения уравнения $Au = f$ доказано.

Подставляя (f, u) из (17.8) в (17.7), мы можем написать функционал F в виде

$$Fu = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|^2, \tag{17.9}$$

откуда немедленно вытекает, что

$$\min_{u \in H_A} Fu = -\|u_0\|^2. \tag{17.10}$$

В связи с (17.10) для F было введено понятие минимизирующей последовательности (или μ-последовательности) как такой последовательности элементов u_n из H_A, для которых

$$\lim_{n \to \infty} Fu_n = \min_{u \in H_A} Fu = -\|u_0\|^2. \tag{17.11}$$

Из (17.9) следует, что $\{u_n\}$ представляет собой μ-последовательность тогда и только тогда, когда она сходится в H_A к элементу u_0 (т. е. к обобщенному решению уравнения $Au = f$).

Обобщенное решение u_0 уравнения $Au = f$ зависит непрерывным образом от правой части $f \in H$ этого уравнения. Точнее, выполняется неравенство

$$\|u_0\|_A \leqslant \|f\|/C. \tag{17.12}$$

Если u_0 и v_0 являются обобщенными решениями уравнений $Au = f$ и $Au = g$ соответственно, то из (17.12) следует, что

$$\|v_0 - u_0\|_A \leqslant \|g - f\|/C. \tag{17.13}$$

Если $u_n \in D_A$ представляет собой аппроксимацию u_0 в H_A, которая получена, например, одним из методов, изложенных в гл. 12—15, то

$$\|u_n - u_0\|_A \leqslant \|Au_n - f\|/C, \tag{17.14}$$

что позволяет оценить погрешность, т. е. разность между аппроксимацией u_n и обобщенным решением u_0 в пространстве H_A.

В гл. 11 мы сделали несколько дополнительных замечаний, касающихся в наибольшей степени решения краевых задач для дифференциальных уравнений — обыкновенных или в частных производных.

Если обобщенное решение u_0 уравнения $Au=f$, т. е. элемент, минимизирующий (17.7) в H_A, принадлежит D_A (грубо говоря, это так, когда и коэффициенты, и правая часть данного уравнения являются достаточно гладкими функциями), тогда это решение соответствует (хотя и в несколько измененном смысле, см. замечание 11.4) понятию классического решения, знакомого из классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных. Если u_0 не принадлежит D_A, то он принадлежит D_I и является, следовательно, обобщенным решением данной задачи, вообще говоря, не имеющим даже того числа производных в рассматриваемой области, которое требуется данным дифференциальным уравнением. Тем не менее обобщенное решение обычно хорошо согласуется с характером решения данной задачи с физической точки зрения. Оно часто минимизирует тот функционал, из которого с помощью методов вариационного исчисления было выведено данное дифференциальное уравнение. Соответствующее дифференциальное уравнение в этом случае часто содержит производные более высоких порядков, нежели требуется данной задачей. См. также гл. 46, в которой рассматриваются вопросы, касающиеся гладкости обобщенного решения уравнения $Au=f$.

Условие, по которому первоначальная область оператора A представляет собой линеал (и также тот факт, что приближенное решение уравнения, найденное, например, методом Ритца, следует искать среди элементов определенного линеала), отвечает задачам с однородными граничными условиями. В замечаниях 11.6—11.8 было показано, как свести данную задачу с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными условиями, если удалось найти подходящую функцию w, удовлетворяющую заданным граничным условиям. Был приведен пример, показывающий, как находить эту функцию в некоторых простых случаях, но отмечалось, что с теоретической точки зрения даже существование такой функции доказать, вообще говоря, не просто. Эти проблемы будут обсуждены более подробно в гл. 32, 34 и 46.

Назначение гл. 9—11 состояло в следующем:

(I) Показать в случае положительного оператора, как свести решение уравнения $Au=f$ к нахождению элемента, минимизирующего функционал F в D_A.

(II) Доказать, для случая положительно определенного оператора, существование (и единственность) элемента $u_0 \in H_A$, минимизирующего в H_A функционал F, расширенный на все это пространство, и тем самым доказать для этого случая существование (и единственность) обобщенного решения уравнения $Au=f$.

Назначение гл. 12—16 состояло в том, чтобы описать эффективные методы нахождения этого обобщенного решения, или, по возможности, его достаточно близкой аппроксимации. Так, основным предположением гл. 12—16 была положительная определенность оператора A в D_A. В гл. 12—15 было еще предположено, что H_A является сепарабельным пространством (достаточным условием этого является сепарабельность пространства H), что означало существование не более чем счетного базиса

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \tag{17.15}$$

в этом пространстве. (В случае метода наименьших квадратов было предположено, что (17.15) является так называемым A-базисом в H, см. (17.25); (17.15) тогда образует базис и в H_A. Если (17.15) представляет собой ортонормированный базис, то (см. гл. 12) обобщенное решение представляется в виде ряда

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k, \qquad a_k = (f, \varphi_k), \tag{17.16}$$

который сходится как в H_A, так и в H. В качестве простого примера применения этого метода (так называемого метода ортонормированных рядов) было показано решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. К этой задаче сводится большое число теоретических и инженерных задач.

Если ряд (17.15) не является ортонормированным в H_A, его можно ортонормировать известным образом (замечание 5.6). Однако в общем случае эта процедура трудоемка. Поэтому были представлены другие методы. Если выбрать фиксированное число n, то набор всех линейных комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k, \tag{17.17}$$

где φ_k — элементы базиса (17.15), образует в H_A n-мерное подпространство, обозначаемое здесь символом M. Приближенное решение нашей задачи может быть найдено тогда в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{17.18}$$

где постоянные a_k определяются одним из следующих условий:

(I) условием

$$Fu_n = \min \text{ на } M \tag{17.19}$$

в случае метода Ритца;

(II) условием ортогональности в H $Au_n - f$ элементам $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, т. е. условиями

$$(Au_n - f, \varphi_1) = 0, \ \ldots, \ (Au_n - f, \varphi_n) = 0, \tag{17.20}$$

в случае метода Галёркина;

(III) условием

$$\|Au_n - f\|^2 = \min \text{ на } M \tag{17.21}$$

в случае метода наименьших квадратов.

Задача нахождения коэффициентов a_k в (17.18) сводится в случае метода Ритца к решению системы

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1, \varphi_1)_A a_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_1, \varphi_n)_A a_n = (f, \varphi_1),\\
&(\varphi_1, \varphi_2)_A a_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A a_2 + \ldots + (\varphi_2, \varphi_n)_A a_n = (f, \varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\varphi_1, \varphi_n)_A a_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A a_2 + \ldots + (\varphi_n, \varphi_n)_A a_n = (f, \varphi_n),
\end{aligned} \tag{17.22}$$

или (при условии, что элемент φ_k выбран из D_A) системы

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1, \varphi_1)a_1 + (A\varphi_1, \varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_1, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_1),\\
&(A\varphi_1, \varphi_2)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_2, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A\varphi_1, \varphi_n)a_1 + (A\varphi_2, \varphi_n)a_2 + \ldots + (A\varphi_n, \varphi_n)a_n = (f, \varphi_n).
\end{aligned} \tag{17.23}$$

В случае метода Галёркина определение a_k ведет к решению системы (17.23), в то время как в случае метода наименьших квадратов — к решению системы

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1, A\varphi_1)a_1 + (A\varphi_1, A\varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_1, A\varphi_n)a_n = (f, A\varphi_1),\\
&(A\varphi_1, A\varphi_2)a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_2)a_2 + \ldots + (A\varphi_2, A\varphi_2)a_n = (f, A\varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A\varphi_1, A\varphi_n)a_1 + (A\varphi_2, A\varphi_n)a_2 + \ldots + (A\varphi_n, A\varphi_n)a_n = (f, A\varphi_n).
\end{aligned} \tag{17.24}$$

При упомянутых выше предположениях (положительная определенность оператора A, сепарабельность пространства H_A) приведенные выше системы однозначно разрешимы и соответствующие последовательности $\{u_n\}$ сходятся в H_A (и, следовательно, H) к обобщенному решению u_0 уравнения $Au = f$ в следующих ситуациях:

(I) в случае метода Ритца — когда (17.15) образует базис в H_A; если используется (17.23), этот базис должен быть образован элементами линеала D_A;

(II) в случае метода Галёркина — когда (17.15) образует в H_A базис, состоящий из элементов линеала D_A;

(III) в случае метода наименьших квадратов — когда

$$A\varphi_1, A\varphi_2, \ldots \tag{17.25}$$

образуют базис в H.

В конце гл. 13 был вкратце обсужден вид системы Ритца для случая неоднородных граничных условий.

Касаясь формального аспекта, т. е. не рассматривая разрешимость соответствующих систем и сходимость соответствующих последовательностей $\{u_n\}$, заметим, что требование положительной

определенности оператора A в методе Ритца довольно естественно, поскольку, как видно из (17.19), метод Ритца по существу основан на теореме о минимуме квадратичного функционала, сформулированной для положительного оператора. Для метода Галёркина и метода наименьших квадратов требование положительной определенности оператора A совершенно излишне. Чтобы переход к системам (17.23) и (17.24) от условий (17.20) и (17.21) соответственно был возможен, достаточно, чтобы оператор A был линейным. Сами по себе условия (17.20) и (17.21) имеют смысл, даже если оператор A нелинеен (здесь можно заметить, что даже метод Ритца может быть формально применен к решению нелинейных задач). Проблемы, касающиеся разрешимости соответствующих последовательностей в этих случаях, естественно, значительно более сложны, чем в рассматриваемом нами. См. также конец гл. 15, где рассматриваются некоторые предположения, которые обеспечивают сходимость метода наименьших квадратов в случае линейных операторов.

Для метода наименьших квадратов далее было отмечено, что одновременно с $u_n \to u_0$ в H выполняется также

$$Au_n \to f \text{ в } H. \tag{17.26}$$

(В случае, например, метода Ритца этот вывод справедлив только при специальном выборе базиса; см., в частности, гл. 20 и 25.) Из (17.26) вытекает, во-первых, что можно использовать (17.24) для известной оценки погрешности. Далее, в некоторых простых случаях, когда $H = L_2(G)$, на основании (17.26) можно прийти к некоторым выводам, касающимся равномерной сходимости последовательности $\{u_n\}$ на $\overline{G}$. Подобное улучшение сходимости является целью также и метода Куранта, который состоит в минимизации функционала вида

$$Fu_n + \| Au_n - f \|^2 \tag{17.27}$$

или (в более общем случае) вида

$$Fu_n + \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1+\ldots+i_N=k} \left\| \frac{\partial^k (Au_n - f)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}} \right\|^2 \tag{17.28}$$

на соответствующем линеале M. Условие минимальности (17.27) на M, таким образом, представляет собой сочетание условий (17.19) и (17.21).

Далее в гл. 16 был введен метод, полезный в случае положительно определенных ограниченных операторов (тем самым не в случае дифференциальных операторов), определенных на пространстве H или, может быть, расширенных на все это пространство. Этот метод основан на идее «приближения к минимуму поверхности, которая изображает функционал F над пространством H, в направлении наибыстрейшего спуска вдоль этой поверхности».

Безотносительно к геометрической интерпретации конструируется последовательность приближенных решений $u_1, u_2, \ldots$, где u_1 — выбранное первое приближение $u_{n+1} = u_n + t_n v_n$ с

$$v_n = Au_n - f, \quad t_n = -\frac{(v_n, v_n)}{(Av_n, v_n)}$$

для $n = 1, 2 \ldots$. Если $0 < m \leqslant M$ и для любого $u \in H$ выполняется

$$m \| u \|^2 \leqslant (Au, u) \leqslant M \| u \|^2,$$

то мы получаем оценку для скорости сходимости:

$$\| u_{n+1} - u_0 \|_A \leqslant \| u_1 - u_0 \|_A \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n .$$

Как типичный (хотя и чисто иллюстративный) пример применения этого метода было показано решение интегрального уравнения (16.17).

Часть III

Применение вариационных методов к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных

В предшествующих главах мы обсудили наиболее часто встречающиеся вариационные методы, подходящие для решения (или приближенного решения) линейных операторных уравнений типа $Au = f$ с положительно определенным оператором A. Хотя результаты были сформулированы для общего случая положительно определенного оператора, с точки зрения применения вариационных методов к теоретическим и инженерным задачам наиболее важными являются уравнения с дифференциальными операторами. Поэтому в настоящей книге на эти уравнения обращено особое внимание. В этой части мы покажем, что дифференциальные операторы, с которыми чаще всего приходится сталкиваться в краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных, являются положительно определенными в правильно выбранных областях, так что упомянутые выше вариационные методы действительно применимы. В этой связи будет показано, насколько важен выбор базиса как для устойчивости соответствующего численного алгоритма, так и для получения некоторых желаемых свойств искомой последовательности приближенных решений u_n. На важных для применений примерах будут показаны численные расчеты для рассматриваемых задач (как правило, вместе с оценкой погрешности). Эти задачи будут приближенно решены различными методами, чтобы можно было сравнить их эффективность.

Важным инструментом для проверки отправного пункта этой теории, т. е. неравенства $(Au, u) \geqslant C^2 \|u\|^2$ и тем самым положительной определенности соответствующих операторов, являются *неравенства Фридрихса и Пуанкаре*. Им посвящена первая глава этой части книги [1]). Значительное внимание уделяется численным аспектам указанных неравенств, особенно соответствующей оценке постоянной C, поскольку, как уже говорилось, это дает одну из возможных численных оценок погрешности, возникающей при применении упомянутых вариационных методов. По этой причине мы

[1]) Некоторые обобщения этих неравенств см. в гл. 30.

постарались получить некоторые неравенства, более точные, чем обычно встречающиеся в литературе. Читателю, который хочет двигаться побыстрее, нет необходимости следить за всеми подробностями этих выкладок; он может выбрать только те результаты, которые ему непосредственно нужны. Последнее в сущности касается всех глав этой части.

Так же как и в предыдущих главах, под гильбертовым пространством мы будем всегда понимать *вещественное* гильбертово пространство. В частности, все функции и постоянные, встречающиеся в этой части главы, будут *вещественными*.

Глава 18

Неравенство Фридрихса. Неравенство Пуанкаре

Как обычно, через G мы обозначим ограниченную область в N-мерном евклидовом пространстве с липшицевой границей Γ (см. гл. 2 и 28). (Для $N=1$ рассматривается интервал (a, b).) Все результаты этой главы будут получены в вещественном гильбертовом пространстве $L_2(G)$, в котором, как известно, скалярное произведение, норма и метрика определяются соотношениями

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx, \quad \|u\| = \sqrt{\int_G u^2(x)\, dx},$$

$$\rho(u, v) = \sqrt{\int_G [u(x) - v(x)]^2\, dx}$$

соответственно.

Обозначим для краткости через M линеал функций $u(x)$, непрерывных со своими частными производными первого порядка в $\overline{G}$ (т. е. множестве $C^{(1)}(\overline{G})$, см. с. 580).

Теорема 18.1. (Неравенство Фридрихса.) *Пусть G — область, обладающая липшицевой границей. Тогда существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2, зависящие от рассматриваемой области, но не зависящие от функций из M, такие что для любой функции $u \in M$*

$$\int_G u^2(x)\, dx \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2(S)\, dS. \tag{18.1}$$

В частности, при $N=2$ мы получаем в принятых обозначениях переменных:

$$\iint_G u^2(x, y)\, dx\, dy \leqslant c_1 \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + c_2 \int_\Gamma u^2(s)\, ds. \tag{18.2}$$

При $N=1$, когда M является линеалом функций, непрерывных со своими первыми производными на замкнутом интервале $[a, b]$, неравенство Фридрихса может быть записано в любой из следующих форм:

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant c_1 \int_a^b u'^2(x)\,dx + c_2 u^2(a), \tag{18.3}$$

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant c_1 \int_a^b u'^2(x)\,dx + c_2 u^2(b), \tag{18.4}$$

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant c_1 \int_a^b u'^2(x)\,dx + c_2 [u^2(a) + u^2(b)]. \tag{18.5}$$

Постоянные в приведенных выше неравенствах обозначены одними и теми же символами c_1 и c_2 (в отличие от обозначений c_3 и c_4, которые будут использованы для постоянных в неравенстве Пуанкаре (18.50). Конечно, c_1, c_2 могут иметь различные значения в каждом из этих неравенств (см., в частности, (18.17), (18.19), (18.21), (18.28), (18.37), (18.39), (18.46) и (18.48)).

Доказательство теоремы 18.1 будет подробно проведено сначала для неравенства (18.4) таким способом, что будет очевидно, как поступать в остальных случаях.

Обозначим

$$g(x) = \cos \frac{\pi(x-a)}{4(b-a)} \tag{18.6}$$

и

$$v = u/g, \text{ или, другими словами, } u = gv. \tag{18.7}$$

Ясно, что выполняется

$$u'^2 = (gv)'^2 = g^2 v'^2 + 2vv'gg' + v^2 g'^2 = g^2 v'^2 + (v^2 gg')' - v^2 gg'', \tag{18.8}$$

так что

$$(v^2 gg')' - v^2 gg'' \leqslant u'^2. \tag{18.9}$$

Интегрирование (18.9) от a до b дает

$$[v^2 gg']_a^b - \int_a^b v^2 gg''\,dx \leqslant \int_a^b u'^2\,dx. \tag{18.10}$$

Однако из (18.6) получаем

$$g'' = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\, g, \tag{18.11}$$

так что

$$v^2 gg'' = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\, v^2 g^2 = -\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\, u^2. \tag{18.12}$$

Далее

$$[v^2gg']_a^b = \left[v^2g^2\frac{g'}{g}\right]_a^b = \left[u^2\frac{g'}{g}\right]_a^b = -\frac{\pi}{4(b-a)}u^2(b), \quad (18.13)$$

поскольку

$$\frac{g'}{g} = -\frac{\pi}{4(b-a)}\operatorname{tg}\frac{\pi(x-a)}{4(b-a)}, \quad (18.14)$$

$$\frac{g'(a)}{g(a)} = 0, \quad \frac{g'(b)}{g(b)} = -\frac{\pi}{4(b-a)}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4(b-a)}. \quad (18.15)$$

Из (18.10), (18.12) и (18.13) следует, что

$$\frac{\pi^2}{16(b-a)^2}\int_a^b u^2\,dx \leqslant \int_a^b u'^2\,dx + \frac{\pi}{4(b-a)}u^2(b),$$

или, иначе,

$$\int_a^b u^2\,dx \leqslant \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2\,dx + \frac{4(b-a)}{\pi}u^2(b). \quad (18.16)$$

Следовательно, в (18.4) достаточно положить

$$c_1 = \frac{16(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{4(b-a)}{\pi}. \quad (18.17)$$

Доказательство неравенства (18.3) полностью идентично. Вместо функции (18.6) достаточно рассмотреть функцию

$$g(x) = \cos\frac{\pi(x-b)}{4(b-a)};$$

тогда постоянные c_1 и c_2 будут опять даваться выражением (18.17).

Неравенство (18.5) является следствием неравенства (18.4) или (18.3), так что для значений c_1 и c_2 можно опять взять выражение (18.17). Однако в этом случае можно улучшить [1]) полученные оценки, просто если описанное выше доказательство провести с функцией

$$g(x) = \cos\frac{\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{2(b-a)}.$$

---

[1]) Улучшить в следующем смысле: положительно определенный оператор характеризуется неравенством $(Au, u) \geqslant C^2\|u\|^2$. Для различных целей полезно, чтобы постоянная C в этом неравенстве была наибольшей. Например, при оценке погрешности с использованием (11.21) постоянная C появляется в знаменателе. В случаях, с которыми придется сталкиваться в дальнейшем, будут получаться оценки для C^2 вида

$$C^2 = \frac{p}{c_1}, \quad C^2 = \min\left(\frac{p}{c_1}, \frac{\sigma}{c_2}\right) \quad (18.18)$$

и т. д. (см., например, (19.77) (19.43)), где p и σ — положительные постоянные, задаваемые исследуемым дифференциальным уравнением и граничными условиями. Чтобы получить C как можно больше, необходимо получить наименьшие оценки для c_1 и c_2.

В этом случае легко проверить прямым вычислением, что в (18.5) можно положить

$$c_1 = \frac{4\,(b-a)^2}{\pi^2}, \qquad c_2 = \frac{2\,(b-a)}{\pi}. \tag{18.19}$$

Замечание 18.1. Если $b-a$ значительно больше единицы, то $c_1 \gg c_2$ в (18.19). Точно так же если $b-a \ll 1$, то $c_1 \ll c_2$. Это обстоятельство может вызвать трудности в оценках типа (18.18) (см. примечание), особенно во второй из них. Следовательно, полезно иметь возможность некоторого «регулирования» соотношения между числами c_1, c_2 для того, чтобы мы могли сделать числа p/c_1 и σ/c_2 в (18.18) равными или по меньшей мере приблизительно равными. Этого можно достичь следующим образом.

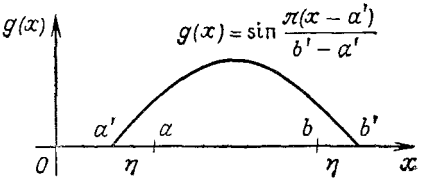

Рис. 8.

Выберем $\eta > 0$ и обозначим $a' = a-\eta$, $b' = b+\eta$, так что $[a, b] \subset [a', b']$ (рис. 8), и положим в данном доказательстве

$$g(x) = \sin \frac{\pi\,(x-a')}{b'-a'} \tag{18.20}$$

(см. график этой функции на рис. 8). Для c_1 и c_2 мы получаем в этом случае тем же способом, что и раньше (читатель легко может выполнить подробные расчеты сам), следующие оценки:

$$c_1 = \frac{(b'-a')^2}{\pi^2} = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2},$$

$$c_2 = \frac{b'-a'}{\pi} \cdot \frac{\cos \dfrac{\pi\,(a-a')}{b'-a'}}{\sin \dfrac{\pi\,(a-a')}{b'-a'}} = \frac{b-a+2\eta}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\eta}{b-a+2\eta}. \tag{18.21}$$

Таким путем получается неравенство, справедливое для всех $u \in M$:

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2(x)\,dx + \\ + \frac{b-a+2\eta}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\eta}{b-a+2\eta} [u^2(a) + u^2(b)]. \tag{18.22}$$

Соответствующим выбором чисел a', b', т. е. числа η, мы можем тогда получить требуемое соотношение между c_1 и c_2. (В частности, для $2\eta = b-a$ выражения (18.21) сводятся к выражениям (18.19).)

Пример 18.1. Пусть $b-a=5$, $p=1$, $\sigma=8$. Мы должны определить $\eta > 0$ так, чтобы числа

$$p/c_1 \text{ и } \sigma/c_2$$

были приблизительно равны. С учетом (18.21) мы должны найти такое $\eta > 0$, чтобы

$$\frac{\pi^2}{(5+2\eta)^2} \quad \text{и} \quad \frac{8\pi}{5+2\eta}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi\eta}{5+2\eta} \tag{18.23}$$

были приблизительно равны (мы имеем $b'-a'=b-a+2\eta=5+2\eta$). Поскольку $\pi^2/(5+2\eta)^2$ значительно меньше, чем $8\pi/(5+2\eta)$, мы выбираем η малым; тогда можно положить

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi\eta}{5+2\eta} \approx \frac{\pi\eta}{5+2\eta}\,.$$

Данное условие тогда превращается в

$$\frac{\pi^2}{(5+2\eta)^2} \approx \frac{8\pi}{5+2\eta}\cdot\frac{\pi\eta}{5+2\eta}\,. \tag{18.24}$$

Ясно, что достаточно выбрать $\eta = 1/8$.

Замечание 18.2. Если функции линеала M удовлетворяют дополнительным условиям, а именно условиям $u(a)=0$, или $u(b)=0$, или одновременно $u(a)=0$, $u(b)=0$, то для этих специальных случаев получаются соответствующие частные случаи только что выведенных оценок. В частности, если мы обозначим через M_1 линеал таких функций из M, которые удовлетворяют условию

$$u(a)=0, \quad u(b)=0, \tag{18.25}$$

то получим с помощью (18.5) оценку

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant c_1 \int_a^b u'^2(x)\,dx, \quad u \in M_1, \tag{18.26}$$

где для c_1 может быть взята одна из оценок (18.19), (18.21). Если выбрана оценка (18.21), мы получаем

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b'-a')^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2(x)\,dx = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2(x)\,dx. \tag{18.27}$$

Однако поскольку (18.27) выполняется для любого положительного η, простое рассуждение дает неравенство

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2(x)\,dx, \tag{18.28}$$

справедливое для всех $u \in M_1$, т. е. для всех $u \in M$, удовлетворяющих условиям (18.25).

Замечание 18.3. Для функций из M_1 неравенство типа (18.26) может также быть выведено следующим простым путем (сравни со с. 103). Поскольку справедливо первое из условий (18.25),

имеем

$$u(x) = \int_a^b u'(t)\,dt,$$

так что

$$u^2(x) = \left[\int_a^x u'(t)\,dt\right]^2.$$

Применяя неравенство Шварца к правой стороне этого уравнения, получаем

$$u^2(x) \leqslant \int_a^x 1^2\,dx \cdot \int_a^x u'^2(t)\,dt.$$

Поскольку $u'^2(t)$ неотрицательна на $[a, b]$, мы получаем

$$u^2(x) \leqslant \int_a^x 1^2\,dx \int_a^b u'^2(t)\,dt = (x-a)\int_a^b u'^2(t)\,dt.$$

Интегрируя это неравенство от a до b и возвращаясь опять к первоначальному обозначению x вместо t под знаком интеграла, получаем

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)\,dx, \tag{18.29}$$

т. е. неравенство (18.26) с

$$c_1 = \frac{(b-a)^2}{2}. \tag{18.30}$$

Это — оценка, обычно встречающаяся в литературе.

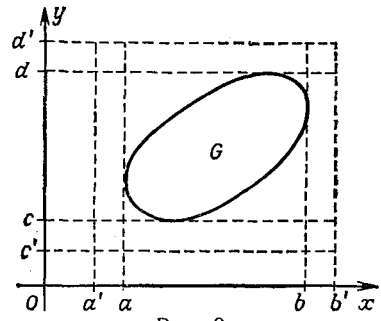

Рис. 9.

Сравнивая этот результат с (18.28), мы видим, что наша оценка (18.28) приблизительно в 5 раз лучше, чем оценка (18.30).

Идея доказательства неравенств (18.3) — (18.5) применима с тем же успехом в многомерном случае. Если, например, $N = 2$ и если промежутки $[a, b]$ и $[c, d]$ являются проекциями замкнутой области G (не имеет значения, является ли эта область многосвязной) на оси x и y соответственно, так что $\overline{G}$ лежит в прямоугольнике $\overline{O} = [a, b] \times [c, d]$ (рис. 9), можно положить, например,

$$g(x, y) = \cos\frac{\pi\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{2(b-a)}\cos\frac{\pi\left(y - \frac{c+d}{2}\right)}{2(d-c)} \tag{18.31}$$

и провести почти буквальную аналогию с доказательством (18.4). Вместо (18.8) используем тождество

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=g^2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(v^2g\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v^2g\frac{\partial g}{\partial y}\right)-v^2g\,\Delta g, \qquad (18.32)$$

где снова $u=gv$; вместо $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ мы пишем коротко Δg.

Опуская первый член в правой части (18.32), который с очевидностью неотрицателен, получаем неравенство, подобное (18.9), и интегрированием по области G приходим к неравенству

$$-\iint\limits_G v^2g\Delta g\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy-\int\limits_\Gamma v^2g\frac{\partial g}{\partial\nu}\,ds; \qquad (18.33)$$

ν в последнем члене означает внешнюю нормаль к границе Γ. Мы использовали (8.31), где писали

$$v^2g\frac{\partial g}{\partial x}\text{ или }v^2g\frac{\partial g}{\partial y}$$

вместо f и 1 вместо g, и приняли во внимание, что

$$\frac{\partial g}{\partial x}\nu_x+\frac{\partial g}{\partial y}\nu_y=\frac{\partial g}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial g}{\partial\nu}.$$

Однако с помощью (18.31) получаем

$$\Delta g=-\left(\frac{\pi^2}{4(b-a)^2}+\frac{\pi^2}{4(d-c)^2}\right)g,$$

так что

$$-\iint\limits_G v^2g\Delta g\,dx\,dy=\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{(b-a)^2}+\frac{1}{(d-c)^2}\right]\iint\limits_G v^2g^2\,dx\,dy=$$
$$=\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{(b-a)^2}+\frac{1}{(d-c)^2}\right]\iint\limits_G u^2\,dx\,dy. \qquad (18.34)$$

Далее,

$$\left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\nu}\right|_\Gamma=\left|\frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial g}{\partial y}\cos\beta\right)\right|_\Gamma\leqslant\left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x}\right|_\Gamma+\left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial y}\right|_\Gamma\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\pi}{2(b-a)}\frac{\max\limits_{[a,b]}\left|\sin\dfrac{\pi\left(x-\frac{1}{2}(a+b)\right)}{2(b-a)}\right|}{\min\limits_{[a,b]}\left|\cos\dfrac{\pi\left(x-\frac{1}{2}(a+b)\right)}{2(b-a)}\right|}+$$

$$+\frac{\pi}{2(d-c)}\frac{\max\limits_{[c,\,d]}\left|\sin\dfrac{\pi\left(y-\dfrac{c+d}{2}\right)}{2(d-c)}\right|}{\min\limits_{[c,\,d]}\left|\cos\dfrac{\pi\left(y-\dfrac{c+d}{2}\right)}{2(d-c)}\right|}=$$

$$=\frac{\pi}{2(b-a)}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}+\frac{\pi}{2(d-c)}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2(b-a)}+\frac{\pi}{2(d-c)}$$

и, следовательно,

$$\left|-\int\limits_\Gamma v^2 g\frac{\partial g}{\partial\nu}ds\right|\leqslant\left|\int\limits_\Gamma v^2 g^2\,\frac{\frac{\partial g}{\partial\nu}}{g}\,ds\right|\leqslant\int\limits_\Gamma u^2\left|\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\nu}\right|ds\leqslant$$

$$\leqslant\left[\frac{\pi}{2(b-a)}+\frac{\pi}{2(d-c)}\right]\cdot\int\limits_\Gamma u^2 ds. \tag{18.35}$$

Из (18.33)—(18.35) следует тогда, что

$$\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{(b-a)^2}-\frac{1}{(d-c)^2}\right]\iint\limits_G u^2\,dx\,dy\leqslant\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{d-c}\right)\int\limits_\Gamma u^2 ds,$$

или, иначе, вводя обозначения

$$A=\frac{1}{(b-a)^2}+\frac{1}{(d-c)^2},\qquad B=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{d-c},$$

$$\int\limits_G u^2(x,\,y)\,dx\,dy\leqslant\frac{4}{\pi^2 A}\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy+\frac{2B}{\pi A}\int\limits_\Gamma u^2(s)\,ds. \tag{18.36}$$

Таким образом, в (18.2) достаточно положить

$$c_1=\frac{4}{\pi^2 A},\qquad c_2=\frac{2B}{\pi A}. \tag{18.37}$$

Если мы, неважно по какой причине, хотим изменить соотношение между оценками c_1 и c_2, мы можем действовать аналогично замечанию 18.1. Мы выбираем опять $\eta>0$, обозначаем

$$a'=a-\eta,\quad b'=b+\eta,\quad c'=c-\eta,\quad d'=d+\eta$$

и вместо функции (18.31) применяем функцию

$$g(x,\,y)=\sin\frac{\pi(x-a')}{b'-a'}\sin\frac{\pi(y-c')}{d'-c'}. \tag{18.38}$$

Для c_1 и c_2 мы получаем тогда оценки

$$c_1 = \frac{1}{\pi^2 A'}, \quad c_2 = \frac{B'}{\pi A'}, \tag{18.39}$$

где

$$A' = \frac{1}{(b'-a')^2} + \frac{1}{(d'-c')^2} = \frac{1}{(b-a+2\eta)^2} + \frac{1}{(d-c+2\eta)^2},$$

$$B' = \frac{1}{(b'-a')\sin\dfrac{\pi(a-a')}{b'-a'}} + \frac{1}{(d'-c')\sin\dfrac{\pi(c-c')}{d'-c'}} =$$

$$= \frac{1}{(b-a+2\eta)\sin\dfrac{\pi\eta}{b-a+2\eta}} + \frac{1}{(d-c+2\eta)\sin\dfrac{\pi\eta}{d-c+2\eta}}.$$

Таким образом, мы вместо (18.36) получаем

$$\iint\limits_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\pi^2 A'} \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \frac{B'}{\pi A'} \int\limits_\Gamma u^2(s)\,ds. \tag{18.40}$$

Желаемые оценки c_1 и c_2 могут быть получены соответствующим выбором числа η подобно тому, как в примере 18.1.

Если область G имеет некоторую специальную форму, то с использованием описанной выше процедуры эти оценки могут быть еще улучшены. Когда $N > 2$, мы действуем аналогично.

Замечание 18.4. Если, кроме того, функции из M удовлетворяют условию

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{18.41}$$

то из (18.1) и (18.2) имеем

$$\int\limits_G u^2(x)\,dx \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{N} \int\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx, \tag{18.42}$$

$$\int\limits_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant c_1 \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \tag{18.43}$$

В частности, если используется оценка (18.39), получаем с помощью (18.40)

$$\iint\limits_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\pi^2 A'} \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \tag{18.44}$$

где

$$A' = \frac{1}{(b'-a')^2} + \frac{1}{(d'-c')^2} = \frac{1}{(b-a+2\eta)^2} + \frac{1}{(d-c+2\eta)^2}. \tag{18.45}$$

Поскольку неравенство (18.44) справедливо для любого $\eta > 0$, то, так же как в замечании 18.2, получаем

$$\iint\limits_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\pi^2 A} \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \tag{18.46}$$

где

$$A = \frac{1}{(b-a)^2} + \frac{1}{(d-c)^2}. \tag{18.47}$$

Если, в частности, G представляет собой квадрат со стороной l, так что $A = 2/l^2$, то из (18.46) следует, что

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{l^2}{2\pi^2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \tag{18.48}$$

Эта оценка приблизительно в 20 раз лучше, чем оценка

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant l^2 \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \tag{18.49}$$

которая обычно встречается в литературе (см., например, [27]).

Другой важный тип неравенства рассматривается в следующей теореме.

Теорема 18.2. (Неравенство Пуанкаре.) *Пусть G — область с липшицевой границей, и пусть M — линеал функций, непрерывных со своими частными производными первого порядка в $\bar{G}$* (если $N = 1$, то здесь имеются в виду интервал $[a, b]$ и обычные производные). *Тогда существуют неотрицательные постоянные c_3 и c_4, зависящие от данной области, но не зависящие от функций $u(x)$ из M, такие что для всех $u \in M$*

$$\int_G u^2(x)\,dx \leqslant c_3 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_4 \left[\int_G u(x)\,dx\right]^2. \tag{18.50}$$

Как частные случаи этого неравенства, при $N = 2$ и $N = 1$ получаем

$$\iint_G u^2(x, y)\,dx\,dy \leqslant c_3 \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + c_4 \left[\iint_G u(x, y)\,dx\,dy\right]^2 \tag{18.51}$$

и

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant c_3 \int_a^b u'^2(x)\,dx + c_4 \left[\int_a^b u(x)\,dx\right]^2 \tag{18.52}$$

соответственно.

Конечно, значения постоянных c_3 и c_4 могут быть различными в каждом из неравенств (18.50)—(18.52), хотя мы и использовали здесь одинаковые обозначения. (См. такое же замечание, касающееся неравенств (18.1)—(18.5).)

Доказательство теоремы 18.2 будет подробно проведено в случае $N = 1$, т. е. для неравенства (18.52). Идея доказательства остается той же самой для $N > 1$.

Пусть $u(x)$ — произвольная функция, определенная на $[a, b]$ и принадлежащая M (так что и $u(x)$, и $u'(x)$ суть непрерывные функции на $[a, b]$). Для любых двух точек x_1, x_2 из $[a, b]$ имеем

$$u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$u^2(x_2) + u^2(x_1) - 2u(x_1)\,u(x_2) = \left[\int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx\right]^2. \qquad (18.53)$$

В силу неравенства Шварца

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left|\int_{x_1}^{x_2} 1^2\,dx\right| \cdot \left|\int_{x_1}^{x_2} u'^2(x)\,dx\right| \qquad (18.54)$$

(где знак модуля может быть опущен, если $x_2 > x_1$). Из (18.53) и (18.54) следует

$$u^2(x_2) + u^2(x_1) - 2u(x_1)\,u(x_2) \leqslant (b-a)\int_a^b u'^2(x)\,dx. \qquad (18.55)$$

Интегрируя это неравенство на $[a, b]$ сначала по x_1, считая x_2 постоянным, потом по x_2, получаем

$$(b-a)\int_a^b u^2(x_1)\,dx_1 + (b-a)\int_a^b u^2(x_2)\,dx_2 - 2\int_a^b u(x_1)\,dx_1 \int_a^b u(x_2)\,dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)^3 \int_a^b u'^2(x)\,dx,$$

или, в иной форме,

$$\int_a^b u^2(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2(x)\,dx + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b u(x)\,dx\right)^2, \qquad (18.56)$$

а это является неравенством (18.52) с постоянными

$$c_3 = \frac{(b-a)^2}{2}, \quad c_4 = \frac{1}{b-a}. \qquad (18.57)$$

Доказательство неравенств (18.50) и (18.51) может быть проведено аналогично. Если, в частности, рассматриваемая область представляет собой прямоугольник со сторонами l_1 и l_2, то возможно — по почти буквальной аналогии с приведенными выше рассуждениями — прийти к неравенству (18.51), где

$$c_3 = \max(l_1^2, l_2^2), \quad c_4 = \frac{1}{l_1 l_2}. \qquad (18.58)$$

С использованием специальных процедур возможно также и в случае неравенства Пуанкаре получить оценки, улучшенные по срав-

нению с приведенными выше, подобно тому, как это было сделано для неравенства Фридрихса. Однако эти более тонкие оценки здесь далеко не так полезны для вычислительных целей, как в предыдущем случае.

Некоторые обобщения неравенств, представленных в этой главе, содержатся в гл. 30.

Глава 19

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

а) Уравнения второго порядка

Рассмотрим сначала обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(pu')' + ru = f, \tag{19.1}$$

где $f \in L_2(a, b)$, $p(x)$, $p'(x)$ и $r(x)$ — непрерывные [1]) на $[a, b]$ функции,

$$p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad r(x) \geqslant 0 \text{ на } [a, b], \tag{19.2}$$

p_0 — постоянная [2]).

Рассмотрим граничные условия для уравнения (19.1) вида

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \tag{19.3}$$

где α, β, γ, δ представляют собой неотрицательные числа, такие что

$$\alpha + \beta > 0, \quad \gamma + \delta > 0. \tag{19.4}$$

Как примеры условий (19.3), мы упомянем условия вида

$$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0, \tag{19.5}$$

$$u'(a) = 0, \qquad u'(b) = 0, \tag{19.6}$$

$$u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad u'(b) + \delta u(b) = 0, \quad \beta > 0, \ \delta > 0, \tag{19.7}$$

$$u(a) = 0, \qquad u'(b) = 0 \tag{19.8}$$

и т. д.

Замечание 19.1. Таким образом, предполагается, что граничные условия однородны. Если даны неоднородные граничные условия, то задача легко может быть сведена к задаче с однород-

---

[1]) По поводу обобщения условий, налагаемых на коэффициенты уравнения (19.1) или, возможно, уравнений более высоких порядков, см. гл. 31 и 32.

[2]) По поводу условия, допускающего $p(x) = 0$ в некоторых точках интервала $[a, b]$, см. гл. 47. В качестве примера отметим уравнение $-(xu')' + u = f$ на $[0, 1]$.

ными граничными условиями (см. замечание 11.6). Для этого нужно найти достаточно гладкую функцию $w(x)$, удовлетворяющую данным неоднородным граничным условиям, и искать решение в виде

$$u(x) = w(x) + z(x). \tag{19.9}$$

Функция $z(x)$ будет тогда удовлетворять уравнению (19.1) с правой частью

$$g = f + (pw')' - rw$$

(вместо первоначальной правой части f) и с соответствующими однородными граничными условиями.

Пример 19.1. Рассмотрим уравнение

$$-[(1+x^2)u']' + u = \sin \pi x$$

с граничными условиями

$$u(0) = 1, \quad u'(1) = 3. \tag{19.10}$$

Используя (19.9), например с $w(x) = 1 + 3x$ (эта функция с очевидностью удовлетворяет условиям (19.10)), мы получаем для функции $z(x)$ уравнение

$$-[(1+x^2)z']' + z = \sin \pi x + 3x - 1$$

с однородными граничными условиями

$$z(0) = 0, \quad z'(1) = 0.$$

Замечание 19.2. В дальнейшем мы увидим, что дифференциальный оператор, задаваемый левой частью (19.1) и рассматриваемый на выбранном соответствующим образом линеале функций, удовлетворяющих (19.3), является положительно определенным. Однако мы исследуем сначала частные случаи граничных условий (19.3), а именно условия (19.5)—(19.8). Одной из главных причин этого является то обстоятельство, что каждое из граничных условий (19.5)—(19.8) имеет очень близкую аналогию в случае дифференциальных уравнений в частных производных [1]). В то же время здесь, т. е. в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, весь комплекс вопросов значительно яснее.

Соответствующие рассуждения будут проводиться в вещественном гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ функций, квадратично интегрируемых на $[a, b]$, т. е. в пространстве со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$$

[1]) Условия (19.5)—(19.8) соответствуют последовательно условиям Дирихле, Неймана, Ньютона и смешанным граничным условиям для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

и нормой

$$\|u\| = \sqrt{\int_a^b u^2(x)\,dx}\,.$$

Только в случае граничных условий $u'(a) = 0$, $u'(b) = 0$ мы будем использовать пространство $\tilde{L}_2(a, b)$, которое является пространством $L_2(a, b)$, образованным теми функциями $u \in L_2(a, b)$, которые удовлетворяют условию $\int_a^b u(x)dx = 0$. Из теоремы 8.5 и из замечаний 8.5 и 8.6 следует, что все линеалы, над которыми мы собираемся исследовать рассматриваемый оператор, в этой главе являются плотными в $L_2(a, b)$ или $\tilde{L}_2(a, b)$. Это обстоятельство не будет вновь указываться в дальнейшем. Поэтому при доказательстве, например, симметрии оператора A_1 на линеале M_1 мы собираемся доказать справедливость соотношения $(A_1u, v) = (A_1v, u)$ и для $u, v \in M_1$ без упоминания о плотности M_1 в $L_2(a, b)$, которая следует из упомянутой теоремы 8.5.

Приступим теперь к исследованию рассматриваемых задач.

1. *Граничные условия* $u(a) = 0$, $u(b) = 0$

Обозначим через M_1 линеал всех функций, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными на замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0; \tag{19.11}$$

пусть A_1 — оператор, определенный на указанном множестве формулой

$$A_1u = -(pu')' + ru, \tag{19.12}$$

где $p(x)$ и $r(x)$ представляют собой функции из уравнения (19.1), свойства которых описаны в тексте, следующем после этого уравнения.

Мы докажем, что A_1 положительно определен на M_1. Для этого достаточно доказать, что A_1 симметричен на M_1 и что существует постоянная $C > 0$, такая что для всех $u \in M_1$ выполняется $(A_1u, u) \geqslant C^2\|u\|^2$. Однако для всех $u \in M_1$, $v \in M_1$ с очевидностью справедливо следующее:

$$(A_1u, v) = \int_a^b \left[-(pu')' + ru\right] v\,dx = -\int_a^b (pu')'v\,dx + \int_a^b ruv\,dx =$$

$$= -[pu'v]_a^b + \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx = \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx, \tag{19.13}$$

поскольку $v \in M_1$ и, таким образом, из (19.11) следует, что

$$[pu'v]_a^b = 0. \tag{19.14}$$

Это доказывает симметрию A_1 на M_1, поскольку правая часть (19.13) симметрична относительно замены u на v. Из (19.13) следует далее, что

$$(A_1u,\ u)=\int_a^b pu'^2\,dx+\int_a^b ru^2\,dx,$$

откуда ввиду предположений (19.2) получаем

$$(A_1u,\ u)\geqslant p_0\int_a^b u'^2\,dx.$$

Поскольку $u\in M_1$, имеем $u(a)=0$, $u(b)=0$. Следовательно, мы можем использовать, например, неравенство (18.28)

$$\int_a^b u'^2\,dx\geqslant\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\int_a^b u^2dx=\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\|u\|^2,\quad u\in M_1,$$

так что

$$(A_1u,\ u)\geqslant C^2\|u\|^2,\quad u\in M_1, \tag{19.15}$$

где

$$C=\frac{\pi\sqrt{p_0}}{b-a}, \tag{19.16}$$

что доказывает положительную определенность оператора A_1 на линеале M_1.

2. *Граничные условия* $u'(a)=0$, $u'(b)=0$

По сравнению с остальными этот случай в определенной степени более сложен. Обозначим через M_2 линеал всех функций, непрерывных со своими первыми и вторыми производными на замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$u'(a)=0,\quad u'(b)=0, \tag{19.17}$$

а через A_2—оператор, определенный на указанном линеале формулой

$$A_2u=-(pu')'+ru, \tag{19.18}$$

где $p(x)$ и $r(x)$—это функции из левой части уравнения (19.1).

Точно таким же образом, как и в (19.13), доказывается, что оператор A_2 симметричен на M_2, поскольку из (19.17) мы опять получаем (19.14) для всех $u\in M_2$, $v\in M_2$. Однако мы увидим, что, вообще говоря, без некоторых дополнительных предположений о функции $r(x)$ оператор A_2 не будет положительно определенным на M_2 [1]).

[1]) Заметим, что оценка (18.28), использованная в предыдущем случае, здесь неприменима. В самом деле, эта оценка включает значения $u(x)$ на концах интервала $[a, b]$. Поскольку $u(x)$ принадлежит M_2, она удовлетворяет (19.17). Однако эти условия не дают никакой информации о значениях $u(a)$, $u(b)$. По этой причине нельзя использовать оценки (18.3)—(18.5).

Рассмотрим сначала случай, когда функция $r(x)$ удовлетворяет дополнительному предположению

$$r(x) \geqslant r_0 > 0 \text{ на } [a, b], \tag{19.19}$$

где r_0 является (положительной) постоянной. Тогда из соотношения

$$(A_2 u, u) = \int_a^b p u'^2 dx + \int_a^b r u^2 dx$$

(следующего из (19.13) для $u = v$) мы получим (так как $p(x) \geqslant 0$) неравенство

$$(A_2 u, u) \geqslant r_0 \int_a^b u^2 dx,$$

которое означает, что при предположении (19.19) оператор A_2 положительно определен на линеале M_2; очевидно, что можно положить $C = \sqrt{r_0}$.

Замечание 19.3. Положительная определенность оператора A_2 на линеале M_2 может быть доказана при более слабом ограничении на коэффициент $r(x)$, чем (19.19). Достаточно предположить, что $r(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$ и что $r(x) > 0$ по меньшей мере в одной точке $x_1 \in [a, b]$. На самом деле, если $[c, d]$ представляет собой произвольный, но фиксированный интервал положительной длины, лежащий на $[a, b]$, то можно показать (этот результат является частным случаем более общего неравенства, приведенного в [32]), что существует число $\varkappa > 0$, не зависящее от функций из M_2, такое что для любого $u \in M_2$ имеет место

$$\|u\|^2 \leqslant \varkappa \left(\int_a^b u'^2 dx + \int_c^d u^2 dx \right). \tag{19.20}$$

Таким образом, пусть $r(x_1) > 0$. Поскольку $r(x)$ непрерывна на $[a, b]$ по предположению, то на некотором интервале $[c, d]$, лежащем в $[a, b]$ и включающем точку x_1, ее значения превышают некоторую положительную постоянную m:

$$r(x) \geqslant m > 0 \text{ на } [c, d].$$

Из (19.20) и из формулы

$$(A_2 u, u) = \int_a^b p u'^2 dx + \int_a^b r u^2 dx$$

следует тогда (ввиду того, что $p(x) \geqslant p_0 > 0$ на $[a, b]$), что

$$(A_2 u, u) \geqslant p_0 \int_a^b u'^2 dx + m \int_c^d u^2 dx \geqslant C^2 \|u\|^2,$$

где, как легко видеть, достаточно положить

$$C^2 = \min\left(\frac{p_0}{\varkappa}, \frac{m}{\varkappa}\right).$$

Следовательно, оператор A_2 является положительно определенным на линеале M_2 также и в данном случае.

Ниже показывается, что если $r(x) \equiv 0$, то A_2 даже не положителен на M_2 (и, следовательно, наверняка не положительно определен).

Так, пусть $r(x) \equiv 0$, т. е. мы рассматриваем уравнение

$$-(pu')' = f(x) \tag{19.21}$$

с граничными условиями

$$u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \quad [1]) \tag{19.22}$$

Таким образом, в этом случае имеем для всех $u \in M_2$

$$(A_2 u, u) = \int_a^b pu'^2\, dx. \tag{19.23}$$

По определению, симметричный оператор A_2 является положительным на M_2, если выполняются следующие условия:

$$(A_2 u, u) \geqslant 0 \text{ для любого } u \in M_2, \tag{19.24}$$

$$(A_2 u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ на } M_2, \text{ т. е. } u(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b]. \tag{19.25}$$

Ввиду предположений, касающихся функций $p(x)$, из (19.23) следует (19.24). Однако условие (19.25) не выполняется: как видно из (19.23), $(A_2 u, u)$ может быть равно нулю для функции $u \neq 0$ из M_2, например для функции $u(x) \equiv 7$ на $[a, b]$, которая, как легко видеть, принадлежит M_2, поскольку удовлетворяет (19.22). Следовательно, в случае, когда $r(x) \equiv 0$, A_2 не является положительным на линеале M_2 (и тем более не является положительно определенным).

Отметим еще одно интересное обстоятельство: предположим, что задача (19.21), (19.22) имеет решение $u \in M_2$. Интегрируя (19.21) от a до b, получаем

$$-\int_a^b (pu')'\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

---

[1]) Естественно, можно прямо проинтегрировать (19.21) и получить последующие заключения значительно более простым путем. Однако желательно разработать здесь более комплексный подход к целой совокупности задач, которые совершенно аналогичны — как будет видно — проблемам, возникающим при рассмотрении эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Однако согласно (19.22) имеем

$$-\int_a^b (pu')'\,dx = -[pu']_a^b = 0.$$

Таким образом, если данная задача имеет решение, то с необходимостью должно выполняться

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0. \tag{19.26}$$

Следовательно, (19.26) в данном случае является необходимым условием существования решения.

Таким образом, если $r(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, то оператор A_2 не является положительно определенным на линеале M_2 и нельзя утверждать, что уравнение $A_2 u = f$ разрешимо (в смысле гл. 11) при любой правой части $f \in L_2(a, b)$. Это также легко увидеть с помощью только что полученных результатов. Однако условие (19.26) наводит на определенную мысль, как надо действовать, чтобы прийти к позитивному заключению.

Обозначим через $\tilde{L}_2(a, b)$ пространство тех функций $u(x)$ из $L_2(a, b)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_a^b u(x)\,dx = 0 \tag{19.27}$$

со скалярным произведением из $L_2(a, b)$, так что

$$(u, v)_{\tilde{L}_2(a, b)} = \int_a^b u(x)\,v(x)\,dx, \quad u \in \tilde{L}_2(a, b), \quad v \in \tilde{L}_2(a, b). \tag{19.28}$$

Несложно доказать, что $\tilde{L}_2(a, b)$ представляет собой линейное подпространство в $L_2(a, b)$ [1]), так что оно само является гильбертовым пространством. Далее, пусть $\tilde{M}_2$ обозначает линеал тех функций $u(x)$ из M_2, которые удовлетворяют условию (19.27). Этот линеал плотен в $\tilde{L}_2(a, b)$ в соответствии с замечанием 8.6. Пусть $\tilde{A}_2$ — оператор с областью определения $\tilde{M}_2$, заданный равенством

$$\tilde{A}_2 u = -(pu')', \quad u \in M_2. \tag{19.29}$$

Покажем, что $\tilde{A}_2$ является положительно определенным на $\tilde{M}_2$.

---

[1]) Фактически $\tilde{L}_2(a, b)$ — это ортогональное дополнение в $L_2(a, b)$ к подпространству, все элементы которого являются постоянными функциями на $[a, b]$ (или функциями, эквивалентными им), так что $\tilde{L}_2(a, b)$ — полное пространство.

Сначала с помощью той же процедуры, что и в (19.13), мы придем к выводу, что $\tilde{A}_2$ симметричен на $\tilde{M}_2$. В самом деле, равенство (19.13) выполняется — как было уже показано в случае оператора (19.18) — для любой пары функций u, v из M_2. Следовательно, оно тем более справедливо и для любой пары функций u, v из $\tilde{M}_2$. Далее, из (19.13) следует, что для любого $u \in \tilde{M}$

$$(\tilde{A}_2 u,\ u)_{\tilde{L}_2(a,b)} = (\tilde{A}_2 u,\ u) = \int_a^b p u'^2 dx$$

и, таким образом, поскольку справедливо (19.2),

$$(\tilde{A}_2 u,\ u) \geqslant p_0 \int_a^b u'^2(x)\, dx,\ u \in \tilde{M}_2. \tag{19.30}$$

Однако для функций $u(x)$ из $\tilde{M}_2$, которые удовлетворяют (19.27), имеем, согласно неравенству Пуанкаре (18.52),

$$\int_a^b u^2 dx \leqslant c_3 \int_a^b u'^2 dx,$$

или, иначе,

$$\|u\|^2_{\tilde{L}_2(a,b)} \leqslant c_3 \int_a^b u'^2 dx, \tag{19.31}$$

где можно положить, например,

$$c_3 = (b-a)^2/2 \tag{19.32}$$

согласно (18.57). Из (19.30) и (19.31) следует

$$(\tilde{A}_2 u,\ u)_{\tilde{L}_2(a,b)} \geqslant C^2 \|u\|^2_{\tilde{L}_2(a,b)}, \tag{19.33}$$

что доказывает положительную определенность оператора $\tilde{A}_2$ на линеале $\tilde{M}_2$. Далее, из (19.32) следует, что можно выбрать

$$C = \sqrt{2p_0}/(b-a). \tag{19.34}$$

Необходимо еще раз обратить внимание читателей на то обстоятельство, что в рассмотренном случае, когда $r(x) \equiv 0$, мы все время работали с оператором $\tilde{A}_2$ на линеале $\tilde{M}_2$ и тем самым в гильбертовом пространстве $H = \tilde{L}_2(a, b)$. Поэтому из только что установленной положительной определенности $\tilde{A}_2$ на $\tilde{M}_2$ существование обобщенного решения $u_0(x)$ (в смысле гл. 11) уравнения $\tilde{A}_2 u = f$ (т. е. уравнения (19.21) с граничными условиями (19.22)) следует только для правых частей $f \in \tilde{L}_2(a, b)$, т. е. только для тех функций $f \in L_2(a, b)$, которые удовлетворяют условию (19.26). Далее, из (19.21), (19.22) видно, что если, кроме того, $u_0 \in \tilde{M}_2$,

то любая функция вида $u_0(x)+k$, где k — произвольная постоянная, также является решением задачи (19.21), (19.22). Если $u_0 \notin \tilde{M}_2$, то функция $u_0(x)+k$ может рассматриваться как решение этой задачи в некотором обобщенном смысле (см. теорему 35.1) [1]).

3. *Граничные условия* $u'(a)-\beta u(a)=0$, $u'(b)+\delta u(b)=0$, $\beta>0$, $\delta>0$

Рассмотрим в $L_2(a, b)$ линеал M_3, состоящий из всех таких функций $u(x)$, которые непрерывны со своими производными первого и второго порядка на замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяют граничным условиям

$$u'(a)-\beta u(a)=0, \quad u'(b)+\delta u(b)=0, \quad \beta>0, \quad \delta>0. \tag{19.35}$$

Далее рассмотрим оператор A_3, определенный на M_3 равенством

$$A_3u=-(pu')'+ru, \tag{19.36}$$

где $p(x)$ $r(x)$ представляют собой функции из уравнения (19.1).

Для любой пары функций $u(x)$, $v(x)$ из M_3 имеем

$$(A_3u,\ v)=\int_a^b\left[-(pu')'+ru\right]v\,dx=-\int_a^b(pu')'v\,dx+\int_a^b ruv\,dx=$$

$$=-[pu'v]_a^b+\int_a^b pu'v'\,dx+\int_a^b ruv\,dx=$$

$$=\int_a^b pu'v'\,dx+\int_a^b ruv\,dx+\delta p(b)\,u(b)v(b)+\beta p(a)\,u(a)\,v(a), \tag{19.37}$$

что означает симметрию A_3 на M_3. Согласно (19.37), имеем далее:

$$(A_3u,\ u)=\int_a^b pu'^2dx+\int_a^b ru^2dx+\delta p(b)\,u^2(b)+\beta p(a)\,u^2(a).$$

Учитывая (19.2) и обозначая

$$k=\min(\beta,\ \delta),$$

можно написать

$$(A_3u,\ u)\geqslant p_0\left\{\int_a^b u'^2dx+k\left[u^2(a)+u^2(b)\right]\right\}. \tag{19.38}$$

Но, согласно неравенству Фридрихса (18.5), имеем

$$\|u\|^2=\int_a^b u^2dx\leqslant c_1\int_a^b u'^2dx+c_2\left[u^2(a)+u^2(b)\right], \tag{19.39}$$

[1]) Конечно, не в буквальном смысле гл. 11, поскольку для $k\neq 0$ функция $u_0(x)+k$ не принадлежит базисному пространству $\tilde{L}_2(a, b)$.

где можно выбрать в соответствии с (18.19) или с (18.21)

$$c_1 = \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{2(b-a)}{\pi} \tag{19.40}$$

или

$$c_1 = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{b-a+2\eta}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\eta}{b-a+2\eta}, \tag{19.41}$$

где $\eta > 0$. Из (19.38) и (19.39) следует тогда, что

$$(A_3 u, u) \geqslant \frac{p_0}{c_1} c_1 \int_a^b u'^2 dx + \frac{p_0 k}{c_2} c_2 [u^2(a) + u^2(b)] \geqslant$$

$$\geqslant C^2 \left\{ c_1 \int_a^b u'^2 dx + c_2 [u^2(a) + u^2(b)] \right.$$

и, согласно (19.39),

$$(A_3 u, u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{19.42}$$

где

$$C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1}, \frac{p_0 k}{c_2}\right). \tag{19.43}$$

Таким образом, положительная определенность оператора A_3 на линеале M_3 доказана.

Если выбрать для c_1 и c_2 оценку (19.41), то соответствующим подбором числа η можно добиться, чтобы значения c_1 и c_2 были «оптимальными», т. е. чтобы числа p_0/c_1 и $p_0 k/c_2$ были по крайней мере приблизительно равны (ср. с примером (18.1)).

4. *Граничные условия* $u(a) = 0$, $u'(b) = 0$

Обозначим посредством M_4 линеал тех функций, которые непрерывны со своими первыми и вторыми производными на $[a, b]$ и удовлетворяют условиям

$$u(a) = 0, \quad u'(b) = 0. \tag{19.44}$$

Далее, пусть A_4 — оператор, определенный на M_4 равенством

$$A_4 u = -(pu')' + ru, \tag{19.45}$$

где $p(x)$ и $r(x)$ представляют собой функции из уравнения (19.1). Полностью аналогично тому, как это делалось в предыдущих случаях, доказывается, что A_4 симметричен на M_4 и что для любой $u \in M_4$

$$(A_4 u, u) = \int_a^b pu'^2 dx + \int_a^b ru^2 dx \geqslant p_0 \int_a^b u'^2 dx, \tag{19.46}$$

где $p_0 > 0$ — это постоянная из (19.2). В силу первого из условий (19.44), которому удовлетворяет любая функция из M_4, можно

написать

$$u(x)=\int_a^x u'(t)\,dt \tag{19.47}$$

и почти буквально тем же способом, какой был использован при выводе неравенства (18.29) в гл. 18, получаем

$$\|u\|^2=\int_a^b u^2dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b u'^2dx,\quad u\in M_4. \tag{19.48}$$

Тогда из (19.46) и (19.48) следует, что для всех $u\in M_4$

$$(A_4u,\ u)\geqslant C^2\|u\|^2, \tag{19.49}$$

где

$$C=\frac{\sqrt{2p_0}}{b-a}. \tag{19.50}$$

Таким образом, положительная определенность оператора A_4 на линеале M_4 доказана.

Оценка (19.48) лучше, чем оценка

$$\|u\|^2\leqslant\frac{16(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b u'^2dx,$$

получаемая из (18.3) и (18.17) при использовании первого из условий (19.44), так как $1/2<16/\pi^2$.

Такой же результат (19.49), (19.50) получается также в случае граничных условий

$$u'(a)=0,\quad u(b)=0. \tag{19.51}$$

Достаточно рассмотреть интеграл

$$u(x)=-\int_x^b u'(t)\,dt \tag{19.52}$$

вместо (19.47).

Как уже отмечалось, мы встретимся с почти буквальными аналогиями рассмотренных выше результатов, полученных для граничных условий (19.5)—(19.8), при обсуждении условий Дирихле, Неймана, Ньютона и смешанных граничных условий для уравнений в частных производных второго порядка (см. гл. 22). Естественно, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений анализ этих задач значительно проще; именно по этой причине эти конкретные задачи были здесь подробно обсуждены.

Обратимся теперь к общему случаю граничных условий (19.3).

5. Граничные условия

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0. \tag{19.53}$$

Здесь α, β, γ, δ — неотрицательные числа и

$$\alpha + \beta > 0, \quad \gamma + \delta > 0, \tag{19.54}$$

так что ни в одной из пар α, β; γ, δ оба числа одновременно не равны нулю.

Пусть M представляет собой линеал тех функций, которые непрерывны со своими первыми и вторыми производными на $[a, b]$ и удовлетворяют условиям (19.53). Мы покажем, что дифференциальный оператор, определенный на M равенством

$$Au = -(pu')' + ru, \quad u \in M, \tag{19.55}$$

является (при соответствующих предположениях относительно функций $p(x)$, $r(x)$) положительно определенным, причем единственным исключением является случай, когда условия (19.53) сводятся к (19.17) и в то же время $r(x) \equiv 0$. Чтобы доказать это утверждение, мы существенно используем полученные выше результаты.

Во-первых, так же, как и выше, докажем, что A симметричен на M (даже в случае граничных условий (19.17)). В самом деле, для любой пары функций $u(x)$, $v(x)$ из M имеем

$$(Au, v) = -\int_a^b (pu')' v\,dx + \int_a^b ruv\,dx =$$

$$= -p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a) + \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx. \tag{19.56}$$

Рассмотрим теперь следующие четыре возможных случая:

а) $\alpha = 0, \ \gamma = 0;$ (19.57)

б) $\alpha = 0, \ \gamma > 0;$ (19.58)

в) $\alpha > 0, \ \gamma = 0;$ (19.59)

г) $\alpha > 0, \ \gamma > 0.$ (19.60)

Учитывая, что, согласно (19.54),

$$\alpha = 0 \Rightarrow \beta > 0, \text{ и следовательно, } u(a) = 0 \text{ или } v(a) = 0,$$
$$\gamma = 0 \Rightarrow \delta > 0 \text{ и, следовательно, } u(b) = 0 \text{ или } v(b) = 0, \tag{19.61}$$

получаем из (19.56) (используя, возможно, (19.53)), для рассматриваемых случаев

а) $$(Au, v) = \int_a^b pu'v'\,dx + \int_a^b ruv\,dx; \tag{19.62}$$

б) $$(Au,\ v)=\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b ruvdx+\frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u(b)\,v(b); \tag{19.63}$$

в) $$(Au,\ v)=\int_a^b up'v'dx+\int_a^b ruvdx+\frac{\beta}{\alpha}\,p(a)\,u(a)\,v(a); \tag{19.64}$$

г) $$(Au,\ v)=\int_a^b pu'v'dx+\int_a^b ruvdx+\frac{\beta}{\alpha}\,p(a)\,u(a)\,v(a)+\frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u(b)\,v(b). \tag{19.65}$$

В каждое из этих четырех выражений функции $u(x)$ и $v(x)$ входят симметрично (меняя местами $u(x)$ и $v(x)$, мы получаем тот же результат), что означает симметрию оператора A на линеале M.

Из равенств (19.62)—(19.65), полагая $v(x)=u(x)$ и учитывая (19.2) ($r(x)\geqslant 0$, $p(x)\geqslant p_0>0$ на $[a, b]$), находим

а) $$(Au,\ u)\geqslant p_0\int_a^b u'^2\,dx; \tag{19.66}$$

б) $$(Au,\ u)\geqslant p_0\int_a^b u'^2\,dx; \tag{19.67}$$

в) $$(Au,\ u)\geqslant p_0\int_a^b u'^2\,dx; \tag{19.68}$$

г) $$(Au,\ u)\geqslant p_0\left\{\int_a^b u'^2\,dx+k\left[u^2(a)+u^2(b)\right]\right\}, \tag{19.69}$$

где

$$k=\min\left(\frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\delta}{\gamma}\right).$$

В случае а) из (19.54) и (19.57) получаем

$$u(a)=0,\quad u(b)=0,$$

так что, согласно (19.66) и гл. 18, имеем

а) $$(Au,\ u)\geqslant\frac{p_0}{c_1}\|u\|^2, \tag{19.70}$$

где для c_1 можно выбрать значение $(b-a)^2/\pi^2$ в соответствии с (18.28) (см. (19.15), (19.16)).

В случаях б) и в) можно применить оценку (19.48), так как, согласно (19.54) и (19.58) или (19.59), имеем $u(a)=0$ или $u(b)=0$, так что можно писать (19.47) или (19.52) соответственно. Следовательно, имеем

б), в) $$(Au,\ u)\geqslant\frac{p_0}{c_1}\|u\|^2, \tag{19.71}$$

где

$$c_1 = \frac{(b-a)^2}{2}. \tag{19.72}$$

Если при этом $\delta > 0$ или $\beta > 0$, то можно использовать оценки (18.4) или (18.3) соответственно с постоянными (согласно (18.17))

$$c_1 = \frac{16\,(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c^2 = \frac{4\,(b-a)}{\pi}, \tag{19.73}$$

так как из (19.63) или (19.64) следует, что

б) $$(Au,\ u) \geqslant p_0 \left[\int_a^b u'^2\, dx + \frac{\delta}{\gamma} u^2(b) \right] \tag{19.74}$$

или

в) $$(Au,\ u) \geqslant p_0 \left[\int_a^b u'^2\, dx + \frac{\beta}{\alpha} u^2(a) \right] \tag{19.75}$$

соответственно.

Таким образом, получаем

$$(Au,\ u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{19.76}$$

где

б) $$C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1},\ \frac{p_0\delta}{c_2\gamma} \right) \tag{19.77}$$

или

в) $$C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1},\ \frac{p_0\beta}{c_2\alpha} \right) \tag{19.78}$$

соответственно. Конечно, оценка (19.71), (19.72) лучше, поскольку она дает бо́льшие значения для C^2 (см. примечание на с. 188).

Если в случае г) $\beta > 0$ и $\delta > 0$, то можно применять неравенство (18.5), где можно положить либо

$$c_1 = \frac{4\,(b-a)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{2\,(b-a)}{\pi}, \tag{19.79}$$

либо

$$c_1 = \frac{(b-a+2\eta)^2}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{b-a+2\eta}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\eta}{b-a+2\eta}, \tag{19.80}$$

(см. (18.19) и (18.21)). Из (19.69) следует тогда, что

г) $$(Au,\ u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{19.81}$$

где

$$C^2 = \min\left(\frac{p_0}{c_1},\ \frac{p_0 k}{c_2} \right). \tag{19.82}$$

Если в случае г) $\beta = 0$, но $\delta > 0$, или $\delta = 0$, но $\beta > 0$, то для $(Au,\ u)$ получаются неравенства (19.74) или (19.75) соответственно и, следовательно, неравенство (19.76)

$$(Au,\ u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \tag{19.83}$$

где C^2 дается выражениями (19.77) или (19.78) соответственно.

(Заметим, что ни в одном из последних трех случаев нельзя использовать аналогию с (19.71), (19.72), поскольку, вообще говоря, мы не можем здесь считать ни $u(a)=0$, ни $u(b)=0$, так что ни (19.47), ни (19.52) не выполняются, и, следовательно, также не справедлива оценка (19.48).)

При $\beta=0$ и $\delta=0$ условия (19.53) сводятся к условиям (19.17)

$$u'(a)=0, \quad u'(b)=0, \tag{19.84}$$

исследованным в п.2 (с. 200). Для случая, когда $r(x)\geqslant r_0>0$ на $[a, b]$ (или когда $r(x)>0$ хотя бы в одной точке $x_1\in[a, b]$, см. замечание 19.3), мы доказали положительную определенность данного оператора; для случая $r(x)\equiv 0$ на $[a, b]$ мы доказали положительную определенность рассматриваемого оператора на линеале $\tilde{M}_2$ функций, удовлетворяющих условию (19.27).

За исключением случая граничных условий (19.84), который носит особый характер (к этому случаю мы вернемся позже), можно сказать, что оператор A, определенный равенством (19.55), является положительно определенным на линеале M функций, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми производными на замкнутом интервале $[a, b]$ и удовлетворяющих (19.53). [Естественно, свойства функций из M и, таким образом, также свойства оператора A, зависят от постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из (19.53); поэтому «постоянная положительной определенности» C также различна в разных случаях (см. соответствующие неравенства (19.70), (19.71), (19.76), (19.81), (19.83)).] Следовательно, во всех случаях можно построить соответствующее пространство H_A (см. гл. 10) и получить обобщенное решение уравнения $Au=f$ (т. е. данного дифференциального уравнения (19.1) с граничными условиями (19.2)) как элемент u_0, минимизирующий в H_A соответствующий функционал F, т. е. в конкретных случаях а), б), в), г) функционалы

$$F_1u=\int_a^b pu'^2\,dx+\int_a^b ru^2\,dx-2\int_a^b fu\,dx, \tag{19.85}$$

$$F_2u=\int_a^b pu'^2\,dx+\int_a^b ru^2\,dx-2\int_a^b fu\,dx+\frac{\delta}{\gamma}p(b)u^2(b), \tag{19.86}$$

$$F_3u=\int_a^b pu'^2\,dx+\int_a^b ru^2\,dx-2\int_a^b fu\,dx+\frac{\beta}{\alpha}p(a)u^2(a), \tag{19.87}$$

$$F_4u=\int_a^b pu'^2\,dx+\int_a^b ru^2\,dx-2\int_a^b fu\,dx+\frac{\beta}{\alpha}p(a)u^2(a)+\frac{\delta}{\gamma}p(b)u^2(b) \tag{19.88}$$

соответственно. (В случае когда $r(x) \equiv 0$ и $\beta = \delta = 0$, обобщенное решение u_0 минимизирует функционал (19.88), в котором, естественно, полагаем $r(x) \equiv 0$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, т. е. функционал

$$\tilde{F}_4 u = \int_a^b pu'^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx$$

в пространстве $H_{\tilde{A}_2}$.)

Замечание 19.4. При поиске обобщенного решения $u_0(x)$ рассматриваемых задач можно применять методы, представленные в гл. 12—15. Выберем один из этих методов, скажем, метод Ритца, и обозначим через $\{\varphi_n\}$ соответствующий базис, удовлетворяющий предположениям, представленным в указанных главах. Поскольку M плотен в H_A, можно выбрать элементы φ_n этого базиса из M. Обозначим далее через $\{u_n(x)\}$ последовательность приближенных решений (построенных с помощью выбранного метода), сходящуюся, как известно, в H_A к обобщенному решению $u_0(x)$ данной задачи,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0. \tag{19.89}$$

Если элементы базиса выбраны из M, то, кроме того, $u_n \in M$ для всех n. Мы покажем, что в этом случае последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к обобщенному решению $u_0(x)$ равномерно на интервале $[a, b]$ и, более того, что предельная функция $u_0(x)$ почти везде на $[a, b]$ имеет производные $u_0' \in L_2(a, b)$, в то время как последовательность $\{u_n'(x)\}$ сходится к этой функции в $L_2(a, b)$ (т. е. в среднем).

Сделанные утверждения будут доказаны в простейшем из рассмотренных случаев, т. е. в случае функционала (19.85), который соответствует граничным условиям

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{19.90}$$

Доказательство может быть легко расширено на другие случаи (см., например, [27]).

В случае условий (19.90) имеем (ср. с (19.62))

$$\|u\|_A^2 = (Au,\ u) = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx$$

и, следовательно,

$$\|u_n - u_n\|_A^2 = \int_a^b p\,(u_m' - u_n')^2\,dx + \int_a^b r\,(u_m - u_n)^2\,dx. \tag{19.91}$$

Так как последовательность $\{u_n(x)\}$ является сходящейся в H_A (см. (19.89)), она фундаментальна в H_A и, таким образом,

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_A = 0. \tag{19.92}$$

Из (19.92) и (19.91) ввиду неотрицательности подынтегральных выражений получаем

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \int_a^b p\,(u_m'-u_n')^2\,dx=0$$

и, далее, поскольку $p(x)\geqslant p_0>0$ на $[a,\ b]$,

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ u\to\infty}} \int_a^b (u_m'-u_n')^2\,dx=0. \tag{19.93}$$

Однако это значит, что $\{u_n'(x)\}$ является фундаментальной последовательностью в $L_2(a,\ b)$. Но пространство $L_2(a,\ b)$ полное, так что эта последовательность сходится в этом пространстве к функции, которую мы обозначим $v_0(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n'(x)=v_0(x) \text{ в } L_2(a,\ b). \tag{19.94}$$

Далее, ввиду первого из условий (19.90) имеем

$$u_n(x)=\int_a^b u_n'(t)\,dt \text{ при любом } n=1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Откуда мы получаем обычным путем (используя неравенство Шварца)

$$[u_m(x)-u_n(x)]^2=\left[\int_a^x (u_m'-u_n')\,dt\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^x 1^2\,dt\cdot\int_a^x (u_m'-u_n')^2\,dt\leqslant(b-a)\int_a^b (u_m'-u_n')^2\,dx. \tag{19.95}$$

Так как справедливо (19.93), то (19.95) является не чем иным, как условием Больцано—Коши для равномерной сходимости последовательности $\{u_n(x)\}$ на $[a,\ b]$. (Согласно (19.95), оценка разности $|u_m(x)-u_n(x)|$ не зависит от x и в силу (19.93) можно сделать ее произвольно малой, если и m, и n достаточно велики.) Следовательно, последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится на интервале $[a,\ b]$ равномерно. Поэтому предельная функция $u(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$ ($u_n(x)$ являются функциями из M и сходимость равномерная). Более того, в $L_2(a,\ b)$ выполняется $u(x)=u_0(x)$, где $u_0(x)$ — это искомое обобщенное решение нашей задачи. Действительно, $\{u_n(x)\}$ сходится к $u(x)$ равномерно на $[a,\ b]$; таким образом, она сходится на $[a,\ b]$ к той же функции и в среднем, см. с. 33. Однако поскольку $\{u_n(x)\}$ сходится к $u_0(x)$ в H_A ввиду (19.89) и, следовательно, тем более в $L_2(a,\ b)$, то $u\neq u_0$ в $L_2(a,\ b)$ не может иметь места. Если бы это было так, последовательность $\{u_n(x)\}$ имела бы два различных предела в $L_2(a,\ b)$, что противоречило

бы теореме 4.1. Так как $u(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $u_0(x) = u(x)$ в $L_2(a, b)$, функция $u_0(x)$ также может рассматриваться как непрерывная на $[a, b]$. (Если бы это было не так, можно было бы изменить значение $u_0(x)$ на множестве меры нуль таким образом, чтобы она стала непрерывной на $[a, b]$.) Тогда равномерная сходимость $\{u_n(x)\}$ к $u(x)$ означает равномерную сходимость этой последовательности к $u_0(x)$:

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u_0(x) \text{ равномерно на } [a, b]. \tag{19.96}$$

Обозначим далее

$$V_0(x) = \int_a^b v_0(t)\, dt, \tag{19.97}$$

где $v_0(x)$ — предел последовательности $\{u_n'(x)\}$ в $L_2(a, b)$ (см. (19.94)), так что $V_0'(x) = v_0(x)$ почти везде на $[a, b]$. Поскольку

$$u_n(x) = \int_a^x u_n'(t)\, dt,$$

мы имеем

$$u_n(x) - V_0(x) = \int_a^x [u_n'(t) - v_0(t)]\, dt,$$

откуда известным способом (применяя неравенство Шварца) получаем

$$[u_n(x) - V_0(x)]^2 \leqslant (b-a) \int_a^b [u_n'(t) - v_0(t)]^2\, dx$$

при всех $x \in [a, b]$. Из (19.94) следует тогда, что $\lim_{n \to \infty} u_n(x) = V_0(x)$ равномерно на $[a, b]$, так что $V_0(x) = u_0(x)$ на $[a, b]$. Таким образом, в соответствии с (19.97) $u_0'(x) = v_0(x)$ почти везде на $[a, b]$.

Резюмируя полученные результаты, касающиеся рассмотренных задач для уравнения (19.1), можно сказать так: *обобщенное решение $u_0(x)$ представляет собой непрерывную функцию на $[a, b]$, имеющую почти везде на $[a, b]$ производную $u_0'(x) \in L_2(a, b)$. Минимизирующая последовательность $\{u_n(x)\}$ (с $u_n \in M$), построенная с помощью одного из методов, приведенных в г. 12—15, сходится к $u_0(x)$ равномерно на $[a, b]$, в то время как последовательность $\{u_n'(x)\}$ сходится к $u_0'(x)$ на $[a, b]$ в среднем.*

Можно показать, что если на гладкость функций $p(x)$, $r(x)$ (или, может быть, $f(x)$), появляющихся в (19.1), наложить дальнейшие ограничения, то можно получить дополнительные свойства, касающиеся гладкости функции $u_0(x)$. См. гл. 46, с. 560.

Замечание 19.5. (*Устойчивые и неустойчивые граничные условия, некоторые замечания, касающиеся структуры пространства* H_A.) Как было показано в этой главе, характер граничных условий

$$u(a)=0, \quad u(b)=0 \tag{19.98}$$

и

$$u'(a)=0, \quad u'(b)=0 \tag{19.99}$$

совершенно различен. В то время как условия (19.98) не были источником каких-либо трудностей при нашем анализе, в случае условий (19.99) было необходимо или вводить дополнительные предположения, касающиеся положительности функций $r(x)$, или, если $r(x)\equiv 0$, вводить специальное пространство $\tilde{L}_2(a, b)$, состоящее из таких функций из $L_2(a, b)$, для которых

$$\int_a^b u(x)\,dx=0, \tag{19.100}$$

и исследовать данную задачу в этом пространстве.

Мы обращаем внимание читателя на еще одно важное различие между условиями вида (19.98) и (19.99), которое имеет в то же время большое значение для численного решения рассматриваемых задач. Для простоты рассмотрим случай, когда $r(x)\equiv 0$ на $[a, b]$.

В случае условий (19.98) оператор A_1, заданный на линеале M_1 (т. е. на линеале функций, непрерывных со своими первыми и вторыми производными на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (19.98)) соотношением

$$A_1u=-(pu')', \tag{19.101}$$

является положительно определенным на M_1 (см. неравенство (19.15)). Следовательно, можно построить соответствующее пространство H_{A_1}, элементы которого принадлежат, как мы видели в гл. 10, пространству $L_2(a, b)$. Однако не любой элемент из $L_2(a, b)$ принадлежит H_{A_1}. Как будет показано в ч. IV этой книги, элементы H_{A_1} принадлежат так называемому пространству $\mathring{W}_2^{(1)}(a, b)$. Пространства этого типа подробно обсуждаются в гл. 29 и 30. Грубо говоря, $\mathring{W}_2^{(1)}(a, b)$ представляет собой пространство таких функций из $L_2(a, b)$, которые имеют первые производные (в некотором обобщенном смысле), квадратично интегрируемые на $[a, b]$, и которые удовлетворяют (также в некотором обобщенном смысле, в так называемом смысле следов) условиям (19.98) [1]. Поэтому

[1]) Скалярное произведение в этом пространстве дается соотношением

$$(u, v)_{\mathring{W}_2(a, b)}=\int_a^b uv\,dx+\int_a^b u'v'\,dx.$$

условия (19.98) называются *устойчивыми*: все функции из пространства H_{A_1} удовлетворяют тем же самым условиям (в указанном обобщенном смысле), что и функции из исходного линеала M_1.

Случай оператора

$$\tilde{A}_2 u = -(pu')', \tag{19.102}$$

определенного на линеале $\tilde{M}_2$ функций, непрерывных со своими производными до второго порядка на $[a, b]$, удовлетворяющих условию (19.100) и граничным условиям (19.99), в значительной мере отличается от предыдущего. Как мы видели, $\tilde{A}_2$ положительно определен на $\tilde{M}_2$. Однако далеко не все функции из соответствующего пространства $H_{\tilde{A}_2}$ удовлетворяют условиям (19.99) (даже и в обобщенном смысле). (Сравните с примерами функций (32.3), (32.4).) Поэтому условия (19.99) называются *неустойчивыми* [1]). Это справедливо также и в случае, когда соответствующий дифференциальный оператор является положительно определенным на линеале M_2 функций, не удовлетворяющих, вообще говоря, условию (19.100), который имеет место, например, если $r(x) \geqslant r_0 > 0$ на $[a, b]$.

Из сказанного вытекает следующий практический вывод (более подробно см. гл. 34, с. 409).

Как известно, под обобщенным решением уравнения

$$A_1 u = f$$

с условиями (19.98) мы понимаем функцию u_0, которая минимизирует в пространстве H_{A_1} функционал

$$F_1 u = \int_a^b pu'^2\, dx - 2\int_a^b fu\, dx.$$

Очень часто для минимизации этого функционала применяется метод Ритца: в пространстве H_{A_1} мы выбираем определенный базис и минимизируем рассматриваемый функционал на подпространстве, образованном первыми n элементами этого базиса. Поскольку элементы базиса принадлежат H_{A_1} и все элементы этого пространства удовлетворяют условиям (19.98) (может быть, в обобщенном смысле), все элементы базиса автоматически удовлетворяют устойчивым граничным условиям (19.98).

Аналогично, в случае уравнения

$$\tilde{A}_2 u = f$$

---

[1]) Вместо устойчивых или неустойчивых граничных условий в литературе часто встречаются термины *основные* или *естественные* граничные условия соответственно.

с условиями (19.99) искомое обобщенное решение представляет собой функцию, минимизирующую функционал

$$\tilde{F}_2 u = \int_a^b pu'^2\,dx - 2\int_a^b fu\,dx$$

(который в данном случае совпадает по форме с функционалом $F_1 u$) в пространстве $H_{\tilde{A}_2}$. Как уже было сказано, элементы этого пространства, вообще говоря, не удовлетворяют условиям (19.99) (даже в обобщенном смысле). При выборе базиса $\{\varphi_i(x)\}$ в этом пространстве мы, естественно, должны заботиться о том, чтобы элементы этого базиса удовлетворяли условию (19.100), в то время как удовлетворяют ли они условиям (19.99) или нет — для нас несущественно. На самом деле теорема сходимости обеспечивает сходимость последовательности Ритца к искомому обобщенному решению $u_0(x)$ [1]) при единственном предложении, что $\{\varphi_i(x)\}$ является базисом в $H_{\tilde{A}_2}$ [2]), без дальнейших требований, касающихся выполнения граничных условий для его элементов. Естественно, желательно выбрать такой базис в $H_{\tilde{A}_2}$, чтобы его элементы удовлетворяли (19.99). В этом случае указанные условия будут выполняться для всех линейных комбинаций элементов базиса, тем самым также для каждого из приближений по Ритцу $u_n(x)$, так что, вообще говоря, невыполненным (т. е. выполненным приближенно) остается только данное дифференциальное уравнение.

Можно легко расширить эти простые рассуждения как на случай обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков, так и на случай дифференциальных уравнений в частных производных. В этих случаях также нет необходимости при выборе базиса [3]) учитывать выполнение неустойчивых граничных условий, т. е. условий, включающих производные порядка выше, чем $(k-1)$, где $2k$ — это порядок данного уравнения [4]). Мы еще не развили достаточно эффективных методов, чтобы произвести более глубокий анализ этих проблем; поэтому сделанные здесь утверждения не формулируются с должной строгостью и представляются на рассмотрение читателя без доказательства. Более подробное обсуждение этих проблем последует в гл. 32, 34 и 35. Кроме

---

[1]) Которое удовлетворяет — *как обобщенное решение* — как устойчивым, так и неустойчивым граничным условиям (в обобщенном смысле); см. ч. IV и VI.

[2]) То же самое верно, конечно, для метода ортонормированных рядов, который в действительности, как мы видели, представляет собой частный случай метода Ритца с базисом $\{\varphi_i(x)\}$, ортонормированным в H_A.

[3]) По поводу соответствующего выбора базиса, см., в частности, гл. 20 и 25.

[4]) В нашем примере обсуждаемое уравнение было второго порядка, так что $2k=2$ и $k-1=0$. Условия (19.98), содержащие производные нулевого порядка, являются устойчивыми, в то время как условия (19.99), содержащие производные первого порядка, являются неустойчивыми.

того, в гл. 21 (пример 21.2) будет приведен очень простой, но поучительный пример, который позволит вникнуть в суть этих проблем. Заметим, что вопросы, связанные с возможным невыполнением неустойчивых граничных условий, возникают для тех методов, которые основываются на минимизации соответствующего функционала — в частности, они касаются метода Ритца. Что же касается, например, метода Галёркина, то здесь ситуация в определенном смысле иная. В формулировке метода Галёркина (гл. 14) было сделано предположение, что функции φ_i принадлежат к области определения D_A данного оператора, так что они заведомо удовлетворяют всем (тем самым и неустойчивым) заданным граничным условиям. При этом предположении мы пришли к системе уравнений для неизвестных коэффициентов, совпадающей с соответствующей системой, полученной методом Ритца, при условии, что базис был также выбран в этом методе из D_A (так что коэффициенты рассматриваемой системы в обоих случаях были равны числам $(A\varphi_i, \varphi_j)$) (см. (14.11) и (13.29)). Из сходимости метода Ритца, которая была доказана ранее, и из идентичности построенных таким образом последовательностей Галёркина и Ритца мы приходим к заключению о сходимости метода Галёркина. Если некоторые из данных граничных условий неустойчивы, то соответствующее пространство H_A также содержит, как уже отмечалось, функции, которые не удовлетворяют этим условиям. В случае метода Ритца, если мы записываем данную систему уравнений в виде (13.11), а не в виде (13.29) (т. е. с коэффициентами $(\varphi_i, \varphi_j)_A$ вместо $(A\varphi_i, \varphi_j)$), нам нужно выбирать базис не из D_A, а из H_A, так что элементы базиса не должны обязательно удовлетворять неустойчивым граничным условиям [1]). Если в случае метода Галёркина мы хотим работать с базисом, который не учитывает неустойчивых граничных условий, то также необходимо писать систему уравнений с коэффициентами вида $(\varphi_i, \varphi_j)_A$. Это означает, что необходимо выполнить *интегрирование по частям*, которое «превращает» скалярное произведение (Au, v) в форму $(u, v)_A$,

[1]) Читателю может показаться, что в этом способе неустойчивые границы некоторым образом «исчезают» из нашей задачи. Однако эти условия, вообще говоря, появляются в форме скалярного произведения $(u, v)_A$, и, таким образом, с одной стороны, в структуре пространства H_A, а с другой — в форме минимизируемого функционала. Например, для уравнения (19.1) с граничными условиями

$$u(a)=0, \qquad \gamma u'(b)+\delta u(b)=0 \qquad (\gamma \neq 0,\ \delta \neq 0), \tag{19.103}$$

где второе условие включает производную первого порядка и поэтому является неустойчивым, имеем

$$(u, v)_A = \int_a^b pu'^2\,dx + \int_a^b ru^2\,dx + \frac{\delta}{\gamma}\,p(b)\,u^2(b),$$

так что здесь появляется член $(\delta/\gamma)\,p(b)\,u^2(b)$, который не появляется в случае устойчивых граничных условий $u(b)=0$.

заранее и *с функциями* $u \in D_A$, $v \in D_A$, т. е. применить все граничные условия. (При этом не «теряются» такие члены, как, например, член $(\delta/\gamma)\, p(b)\, u^2(b)$ в случае граничных условий (19.103).) Тогда мы получаем, по существу, систему Ритца в виде (13.11). Если бы мы использовали метод Галёркина в первоначальной формулировке и если бы мы выбрали в качестве базиса функции, не удовлетворяющие данным неустойчивым граничным условиям, то эти условия действительно бы «исчезли» из рассматриваемой задачи, и мы решали бы совсем другую задачу. Это вопросы станут совершенно ясными в гл. 34, а также в цитированном примере 21.2.

Замечание 19.6. (*Неоднородные граничные условия.*) Если вместо однородных граничных условий (19.3) рассматриваются неоднородные граничные условия

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = K_1, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = K_2, \tag{19.104}$$

где K_1, K_2 — заданные вещественные числа, и если мы не хотим заранее свести эту задачу к задаче с однородными граничными условиями (см. замечание 19.1 и пример 19.1), то (см. замечание 11.8) вместо функционалов (19.85)—(19.88) мы минимизируем функционалы

$$F_1 u = \int_a^b p u'^2\, dx + \int_a^b r u^2\, dx - 2\int_a^b f u\, dx, \tag{19.105}$$

$$F_2 u = \int_a^b p u'^2\, dx + \int_a^b r u^2\, dx - 2\int_a^b f u\, dx + \frac{\delta}{\gamma} p(b)\, u^2(b) - \frac{2K_2}{\gamma} p(b)\, u(b), \tag{19.106}$$

$$F_3 u = \int_a^b p u'^2\, dx + \int_a^b r u^2\, dx - 2\int_a^b f u\, dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a)\, u^2(a) + \frac{2K_1}{\alpha} p(a)\, u(a), \tag{19.107}$$

$$F_4 u = \int_a^b p u'^2\, dx + \int_a^b r u^2\, dx - 2\int_a^b f u\, dx + \frac{\beta}{\alpha} p(a)\, u^2(a) + \frac{\delta}{\gamma} p(b)\, u^2(b) + \frac{2K_1}{\alpha} p(a)\, u(a) - \frac{2K_2}{\gamma} p(b)\, u(b) \tag{19.108}$$

на множестве достаточно гладких функций[1]), удовлетворяющих данным устойчивым неоднородным граничным условиям (и условию $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ в случае, когда $r(x) \equiv 0$ и $\beta = \delta = 0$). Например,

[1]) В терминах ч. IV этой книги они являются функциями из пространства $W_2^{(1)}(a, b)$.

в случае условий $u(a)=2$, $u(b)=3$ мы ищем минимум функционала (19.105) на множестве тех функций, которые удовлетворяют обоим условиям $u(a)=2$, $u(b)=3$; в случае условий $u(a)=2$, $u'(b)-4a(b)=3$ — на множестве тех функций, которые удовлетворяют только первому условию, и т. д. Подробности, относящиеся к этим вопросам, и построение функционалов (19.105)—(19.108) будут обоснованы в гл. 34 и 35. См. также таблицу функционалов в конце книги.

Наконец, получим условие разрешимости задачи

$$-(pu')'=f, \tag{19.109}$$

$$u'(a)=K_1, \quad u'(b)=K_2. \tag{19.110}$$

Предположим, что решение этой задачи существует, и проинтегрируем уравнение (19.109) в интервале $[a, b]$. Получим

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b (pu')'\,dx=-[pu']_a^b=-p(b)u'(b)+p(a)u'(a)=$$

$$=-K_2p(b)+K_1p(a).$$

Таким образом, необходимым и — как будет видно из дальнейшего — также достаточным условием для существования решения служит соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx+K_2p(b)-K_1p(a)=0. \tag{19.111}$$

б) Уравнения высших порядков

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $2k$

$$(-1)^k(p_ku^{(k)})^{(k)}+(-1)^{k-1}(p_{k-1}u^{(k-1)})^{(k-1)}+\ldots+p_0u=f, \tag{19.112}$$

которое можно кратко записать в виде

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(p_iu^{(i)})^{(i)}=f, \tag{19.113}$$

где $f\in L_2(a, b)$, $p_i(x)$, $i=0, 1, \ldots, k$, представляют собой функции, непрерывные вместе со своими производными до i-го порядка на замкнутом интервале $[a, b]$, причем

$$p_i(x)\geqslant 0 \text{ на } [a, b], \quad i=0, 1, \ldots, k-1, \tag{19.114}$$

$$p_k(x)\geqslant p>0 \text{ на } [a, b], \quad p=\text{const}, \tag{19.115}$$

с граничными условиями

$$u(a)=u'(a)=\ldots=u^{(k-1)}(a)=0, \tag{19.116}$$

$$u(b)=u'(b)=\ldots=u^{(k-1)}(b)=0. \tag{19.117}$$

Обозначим через M линеал (плотный в $L_2(a, b)$, см. теорему 8.5 и замечание 8.5) функций, непрерывных вместе со своими произ-

водными до k-го порядка включительно на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (19.116) и (19.117). Обозначим через A оператор с областью определения M, заданный соотношением

$$Au = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (p_i u^{(i)})^{(i)}, \quad u \in M. \tag{19.118}$$

Последовательное интегрирование по частям и применение (19.116), (19.117) дает

$$(Au, v) = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b p_i u^{(i)} v^{(i)}\, dx, \tag{19.119}$$

откуда немедленно следует симметрия A. Далее, из (19.119) имеем

$$(Au, u) = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b p_i (u^{(i)})^2\, dx \geqslant p \int_a^b (u^{(k)})^2\, dx \tag{19.120}$$

как следствие (19.114) и (19.115). Однако согласно (19.116), (19.117), мы имеем $u(a) = u(b) = 0$, так что (см. 18.28))

$$\int_a^b u^2 dx \leqslant c_1 \int_a^b u'^2\, dx, \tag{19.121}$$

где можно выбрать для c_1 оценку

$$c_1 = \frac{(b-a)^2}{\pi^2}; \tag{19.122}$$

аналогично, ввиду условия $u'(a) = u'(b) = 0$,

$$\int_a^b u'^2 dx \leqslant c_1 \int_a^b u''^2\, dx \tag{19.123}$$

и т. д. вплоть до

$$\int_a^b (u^{(k-1)})^2 dx \leqslant c_1 \int_a^b (u^{(k)})^2\, dx. \tag{19.124}$$

Из (19.120), (19.121), (19.123) и (19.124) следует, что

$$(Au, u) \geqslant \frac{p}{c_1^k} \| u \|^2, \tag{19.125}$$

где можно выбрать для c_1 оценку (19.122). Полученное неравенство (19.125) показывает, что A является положительно определенным на M. Таким образом, можно искать обобщенное решение u_0 данной задачи как элемент, который минимизирует в соответствующем пространстве H_A функционал

$$Fu = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b p_i (u^{(i)})^2\, dx - 2 \int_a^b fu\, dx. \tag{19.126}$$

Если при поиске этого обобщенного решения мы применяем один из методов, введенных в ч. II этой книги, и при условии, что элементы данного базиса принадлежат M, можно доказать, подобно тому как это было сделано в замечании 19.4, что последовательность $\{u_n^{(k)}(x)\}$ является сходящейся в $L_2(a, b)$ и что последовательность $\{u_n^{(k-1)}(x)\}$ является равномерно сходящейся на $[a, b]$. Тогда легко сделать заключение, что обобщенное решение $u_0(x)$ имеет непрерывные производные на $[a, b]$ вплоть до $(k-1)$-го порядка включительно и почти везде на $[a, b]$ производная $u_0^{(k)} \in L_2(a, b)$; последовательности $\{u_n^{(i)}(x)\}$, $i=0, 1, \ldots, k-1$, сходятся на $[a, b]$ равномерно к функциям $u_0(x), u_0'(x), \ldots, u_0^{(k-1)}(x)$, и последовательность $\{u_n^{(k)}(x)\}$ сходится к функции $u_0^{(k)}(x)$ в среднем.

Замечание 19.7. Для уравнения (19.113) такой полный анализ, какой был произведен в этой главе для дифференциального уравнения (19.1) с граничными условиями (19.3), весьма трудоемок. Однако мы покажем, хотя бы на примере, как действовать в случае граничных условий, отличных от (19.116), (19.117).

Рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$(p_2u'')'' - (p_1u')' + p_0u = f \tag{19.127}$$

с коэффициентами, удовлетворяющими требованиям, выдвинутым ранее (таким образом, p_0, p_1, p_1', p_2, p_2', p_2'' непрерывны на $[a, b]$,

$$p_0(x) \geqslant 0, \quad p_1(x) \geqslant 0, \quad p_2(x) \geqslant p > 0 \text{ на } [a, b]), \tag{19.128}$$

и с граничными условиями

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \tag{19.129}$$

$$u''(a) = 0, \quad u''(b) = 0. \tag{19.130}$$

Обозначим, как и ранее, через M линеал функций, непрерывных со своими производными вплоть до четвертого порядка включительно на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (19.129), (19.130). Далее, обозначим через A определенный на M оператор:

$$Au = (p_2u'')'' - (p_1u')' + p_0u. \tag{19.131}$$

Ввиду условий (19.129), (19.130) интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}(Au, v) &= [(p_2u'')'v]_a^b - \int_a^b (p_2u'')'v'\,dx - [p_1u'v]_a^b + \int_a^b p_1u'v'dx + \int_a^b p_0uvdx = \\ &= -[p_2u''v']_a^b + \int_a^b p_2u''v''\,dx + \int_a^b p_1u'v'\,dx + \int_a^b p_0uv\,dx = \\ &= \int_a^b p_2u''v''\,dx + \int_a^b p_1u'v'\,dx + \int_a^b p_0uv\,dx,\end{aligned} \tag{19.132}$$

откуда немедленно следует симметрия оператора A на линеале M. Далее, согласно (19.132), имеем

$$(Au,\ u)=\int_a^b p_2u''^2\,dx+\int_a^b p_1u'^2\,dx+\int_a^b p_0u^2\,dx\geqslant p\int_a^b u''^2\,dx. \qquad (19.133)$$

Если мы теперь напишем неравенство Пуанкаре (18.52) для функции $u'(x)$ $(u\in M)$, то получим

$$\int_a^b u'^2\,dx\leqslant c_3\int_a^b u''^2\,dx+c_4\left(\int_a^b u'\,dx\right)^2=c_3\int_a^b u''^2dx, \qquad (19.134)$$

поскольку

$$\int_a^b u'\,dx=u(b)-u(a)=0$$

как следствие условия (19.129). Далее, в соответствии с теми же условиями выполняется неравенство (18.28):

$$\|u\|^2=\int_a^b u^2\,dx\leqslant c_1\int_a^b u'^2dx. \qquad (19.135)$$

Из (19.133), (19.134) и (19.135) следует, что

$$(Au,\ u)\geqslant\frac{p}{c_1c_3}\|u\|^2, \qquad (19.136)$$

где для c_1 и c_2 можно использовать оценки

$$c_1=\frac{(b-a)^2}{\pi^2},\quad c_3=\frac{(b-a)^2}{2}. \qquad (19.137)$$

Положительная определенность оператора A, таким образом, доказана. Следовательно, задача (19.127), (19.129), (19.130) сводится к минимизации функционала

$$Fu=\int_a^b p_2\,u''^2\,dx+\int_a^b p_1\,u'^2\,dx+\int_a^b p_0\,u^2\,dx-2\int_a^b fu\,dx \qquad (19.138)$$

в соответствующем пространстве H_A. См. численный пример на с. 251.

Глава 20

Проблема выбора базиса

а) Общие принципы

Рассуждения, излагаемые в этой главе, относятся преимущественно — хотя и не исключительно — к методу Ритца, который из вариационных методов применяется наиболее часто. Поэтому только в некоторых местах мы будем обращать внимание читателя на возможность применения полученных результатов к другим методам. В конечном счете читатель сможет сам решить, какие из полученных результатов полезны в том или ином случае.

При применении метода Ритца к минимизации функционала $Fu=(u, u)_A-2(f, u)$, соответствующего данному положительно определенному оператору A (действующему в пространстве H_A, подробно рассмотренному в гл. 10), мы должны прежде всего построить подходящую последовательность функций [1])

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \tag{20.1}$$

из которой мы затем образуем последовательность Ритца

$$u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots. \tag{20.2}$$

Здесь n-й член последовательности Ритца есть линейная комбинация функций (20.1): $u_n=a_1\varphi_1+\ldots+a_n\varphi_n$. Коэффициенты a_n определяются системой уравнений (13.11), т. е. системой

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1, \varphi_1)_A a_1+(\varphi_1, \varphi_2)_A a_2+\ldots+(\varphi_1, \varphi_n)_A a_n=(f, \varphi_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\varphi_n, \varphi_1)_A a_1+(\varphi_n, \varphi_2)_A a_2+\ldots+(\varphi_n, \varphi_n)_A a_n=(f, \varphi_n).
\end{aligned} \tag{20.3}$$

Последовательность (20.1) должна обладать определенными свойствами, см. гл. 13. Во-первых, она должна образовывать базис в H_A, т. е.

а) она должна быть полной в этом пространстве;

б) ее члены должны быть линейно независимы в H_A.

Как известно, свойство б) обусловливает наличие единственного решения системы (20.3). При этом свойство а) обеспечивает сходимость последовательности Ритца в H_A (а значит, также в $L_2(G)$) к обобщенному решению u_0 рассматриваемой задачи; короче говоря, оно обеспечивает сходимость метода Ритца.

В то время как задача нахождения такой последовательности (20.1), которая была бы полной в H_A, в общем случае довольно сложна — вопрос выбора полной последовательности является одним из главных вопросов настоящей главы — требование б), как

1) Поскольку в этой части книги мы имеем дело с дифференциальными уравнениями, нас интересуют только те пространства, элементами которых являются функции.

правило, выполняется или же его проверка не представляет большого труда.

Как уже отмечалось, свойство б) обеспечивает наличие единственного решения системы (20.3), свойство а) — сходимость метода Ритца. С теоретической точки зрения тогда все в порядке, хотя при численных расчетах могут возникнуть непредвиденные осложнения. Действительно, выполнение данных требований обеспечивает сходимость метода, т. е. n-й член последовательности Ритца можно сделать сколь угодно близким (в метрике пространства H_A) к искомому обобщенному решению u_0 данной задачи, взяв достаточно большое n. Однако при этом необходимо решать систему (20.3) с большим числом неизвестных. При этом ошибки округления начинают играть существенную роль, с одной стороны, при вычислении коэффициентов системы (20.3), а с другой — при решении этой системы. А именно, может случиться, что функции (20.1) лишь «слегка» линейно независимы в H_A в том смысле, что определитель системы (20.3) лишь «незначительно» отличается от нуля. Пример, приведенный в [28], показывает, насколько бессмысленные результаты могут получиться в таком случае. См. также книгу [5]. Поэтому на выбор базиса необходимо наложить некоторые дополнительные требования, касающиеся устойчивости численных процессов в методе Ритца.

Обозначим через $\mathbf{R}_n$ матрицу системы (20.3), через

$$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \tag{20.4}$$

— вектор решения этой системы [1]) и через $\mathbf{f}_n$ — вектор ее правых частей. Тогда (20.3) принимает вид

$$\mathbf{R}_n \mathbf{a}_n = \mathbf{f}_n. \tag{20.5}$$

С учетом ошибок округления получим матрицу $\mathbf{R}_n + \mathbf{Q}_n$ вместо $\mathbf{R}_n$ и вектор $\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n$ вместо $\mathbf{f}_n$. Вместо системы (20.5) тогда получаем систему

$$(\mathbf{R}_n + \mathbf{Q}_n)\, \mathbf{b}_n = (\mathbf{f}_n + \mathbf{g}_n), \tag{20.6}$$

[1]) Или, чтобы быть более точными,

$$a_n^n = \begin{pmatrix} a_1^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n^n \end{pmatrix},$$

если мы хотим подчеркнуть, что коэффициенты при функциях φ_k в последовательности Ритца зависят от n.

решением которой является вектор

$$\mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{20.7}$$

Обозначим $v_n = b_1\varphi_1 + \ldots + b_n\varphi_n$. Говорят, что численный процесс в методе Ритца *устойчив*, если можно найти такие числа p, q и r, не зависящие от n, что если $\|\mathbf{Q}_n\| \leqslant r$ [1]), то

$$\|v_n - u_n\|_A \leqslant p\|\mathbf{Q}_n\| + q\|\mathbf{g}_n\|. \tag{20.8}$$

Следовательно, если задано $\varepsilon > 0$, то достаточно оценить элементы $\mathbf{R}_n$ и $\mathbf{f}_n$ с точностью, достаточной, чтобы получить $\|v_n - u_n\|_A < \varepsilon$.

Обсуждая численную устойчивость, мы не учитывали остаточных членов, возникающих при решении самой системы (20.3), например с помощью итерационной процедуры (или с использованием других методов). Как известно, влияние этих поправок тем меньше, чем меньше так называемое *число обусловленности* матрицы данной системы (т. е. отношение наибольшего собственного значения этой матрицы к наименьшему). Поэтому естественно потребовать, чтобы это число было равномерно ограничено по отношению к n.

Итак, на базис (20.1) целесообразно наложить следующие дополнительные требования: базис (20.1) должен быть таким, чтобы:

в) численный процесс был устойчив,

г) числа обусловленности матриц $\mathbf{R}_n$ были равномерно ограничены по отношению к n.

Выполнение этих требований позволяет избежать «сюрпризов» при численных расчетах.

В гл. 11 было указано, как оценить погрешность на основе соотношения (11.21)

$$\|u_n - u\|_A \leqslant \frac{\|Au_n - f\|}{C}, \tag{20.9}$$

где $\|Au_n - f\|$ — норма разности $Au_n - f$ в пространстве $L_2(G)$, а C — постоянная положительной определенности из (10.1),

$$\|u\|_A^2 \geqslant C^2\|u\|^2. \tag{20.10}$$

При обсуждении достоинств и недостатков метода Ритца было отмечено, что оценкой (20.9) не всегда можно с успехом воспользоваться, поскольку не всегда

$$Au_n - f \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty \tag{20.11}$$

---

[1]) Под нормой матрицы здесь понимается евклидова норма: если $\mathbf{C} = (c_{ij})$, то $\|\mathbf{C}\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2\right)^{1/2}$. Вектор $\mathbf{g}_n$ считается матрицей, состоящей из одного столбца.

(в $L_2(G)$), и что выполнение или невыполнение (20.11) зависит от выбора базиса. Следующее требование к базису (20.1) поэтому таково:

д) базис таков, что в случае метода Ритца выполняется (20.11) [1]).

Следуя этому введению, приведем некоторые критерии и подходы к построению базиса, обладающего свойствами а)—д) или по крайней мере некоторыми из них. Мы существенно используем результаты Михлина, особенно из его монографии [28]. См. также [5].

Напомним сначала некоторые классические примеры систем, полных в $L_2(G)$. Уже в гл. 4 мы отметим систему простых полиномов: так, в $L_2(a, b)$ полной является система

$$1, x, x^2, x^3, \ldots ; \tag{20.12}$$

в $L_2(G)$ полной является соответствующая система простых полиномов от N переменных; например, в плоскости ($N=2$) — это система [2])

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \ldots . \tag{20.13}$$

Однако системы типа (20.12), (20.13) неудобно брать в качестве базиса именно в тех случаях, которые представляют для нас наибольший интерес, а именно когда должны выполняться определенные (однородные) граничные условия. Причина заключается в том, что отдельные элементы таких систем не удовлетворяют этим условиям даже в простейшем случае. С другой стороны, в случае функций одной переменной нулевые граничные условия на концах интервала $[a, b]$ удовлетворяются, например, функциями

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n=1, 2, \ldots \tag{20.14}$$

(в частности, для интервала $[0, \pi]$ — функциями

$$\varphi_n(x) = \sin nx, \quad n=1, 2, \ldots), \tag{20.15}$$

причем, как известно, система (20.14) полна в $L_2(a, b)$. Аналогично, система

$$\varphi_{mn}(x) = \sin\frac{m\pi(x_1-a)}{b-a}\sin\frac{n\pi(x_2-c)}{d-c}, \quad m=1, 2, \ldots, n=1, 2, \ldots, \tag{20.16}$$

---

[1]) Заметим, что для некоторых методов, например метода наименьших квадратов, соотношение (20.11) является прямым следствием метода.

[2]) Напомним (см. гл. 4), что $L_2(G)$ является сепарабельным: одно из счетных множеств, плотных в метрике этого пространства, образовано полиномами (от N переменных) с рациональными коэффициентами. Заметим, что это множество плотно во всех пространствах, встречающихся в книге (т. е. и в H_A, и в пространствах $W_2^{(k)}(G)$, которые будут введены в ч. IV). Таким образом, все эти пространства сепарабельны, что везде в дальнейшем будет использоваться.

удовлетворяющая нулевым граничным условиям на границе прямоугольника $G=(a, b)\times(c, d)$, полна в $L_2(G)$. (В частности, функции $\varphi_{mn}(x)=\sin mx_1\cdot\sin nx_2$ удовлетворяют нулевым граничным условиям на границе квадрата $(0, \pi)\times(0, \pi)$.)

Подобные утверждения справедливы и в случае брусов в N-мерном пространстве (при $N>2$).

Остается выяснить, могут ли эти системы использоваться как полные в пространствах H_A.

Мы приводим здесь без доказательства (доказательство можно найти, например, в [28]) следующую теорему.

Теорема 20.1. *Пусть* (как обычно) A *— положительно определенный оператор на линеале* D_A, *плотном в гильбертовом пространстве* H. *Если последовательность*

$$A\varphi_1,\ A\varphi_2,\ \ldots,\ A\varphi_n,\ \ldots\ (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\in D_A) \tag{20.17}$$

полна в H, *то последовательность*

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots \tag{20.18}$$

полна в H_A.

Таким образом, легко получить, что в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $G=(a, b)\times(c, d)$,

$$-\Delta u=f \text{ в } G, \tag{20.19}$$

$$u=0 \text{ на } \Gamma, \tag{20.20}$$

система (20.16) полна в соответствующем пространстве H_A. Как будет показано в гл. 22, оператор $A=-\Delta$ на линеале D_A (плотном в $L_2(G)$) функций, принадлежащих $C^2(\overline{G})$ и удовлетворяющих условиям (20.20), положительно определен на этом множестве. Очевидно, что все функции (20.16) принадлежат D_A; далее,

$$A\varphi_{mn}=-\Delta\varphi_{mn}=\left(\frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2}+\frac{n^2\pi^2}{(d-c)^2}\right)\sin\frac{m\pi(x_1-a)}{b-a}\sin\frac{n\pi(x_2-c)}{d-c},$$

так что функции $A\varphi_{mn}$ отличаются от φ_{mn} только (ненулевым) постоянным множителем и образуют в $L_2(G)$ полную систему, так как система функций φ_{mn} полна. Согласно теореме 20.1, φ_{mn} составляют полную систему и в H_A. Более того, эти функции ортогональны в H_A и, значит, линейно независимы, так что они образуют базис в этом пространстве.

Это же справедливо и в общем N-мерном случае. В частности, при $N=1$ функции (20.14) образуют базис для задачи

$$-u''=f, \tag{20.21}$$

$$u(a)=0,\quad u(b)=0. \tag{20.22}$$

Другая возможность удовлетворить однородным нулевым граничным условиям, используя на этот раз полноту системы полиномов, заключается в следующем (для простоты рассмотрим слу-

чай $N=2$). Пусть A — положительно определенный дифференциальный оператор второго порядка (например, оператор $-\Delta$) на линеале D_A функций, непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно в $\overline{G}$ и удовлетворяющих условию

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{20.23}$$

Рассмотрим на границе Γ уравнение

$$g(x,y)=0, \tag{20.24}$$

где g — достаточно гладкая функция двух переменных [1]), положительная в области G. Далее, последовательность функций (20.13), умноженных на $g(x, y)$ (так что все эти функции удовлетворяют условию (20.23)), т. е. последовательность

$$g,\ xg,\ yg,\ x^2g,\ xyg,\ y^2g,\ \ldots, \tag{20.25}$$

полна в H_A [27]. Если, например, G — это окружность с центром в начале координат и радиусом R, или эллипс с полуосями a, b по координатным осям, или прямоугольник $(-a, a)\times(-b, b)$, или тот же самый прямоугольник с круговой дыркой, имеющей центр в начале координат и радиус R $(R<\min(a, b))$, то в качестве функции $g(x, y)$ нужно взять соответственно

$$R^2-x^2-y^2, \text{ или } 1-x^2/a^2-y^2/b^2,$$
$$\text{или } (a^2-x^2)(b^2-y^2), \text{ или } (x^2-a^2)(y^2-b^2)(x^2+y^2-R^2);$$

очевидно, что каждая из этих функций достаточно гладкая в соответствующей области, равна нулю на ее границе и положительна в (открытой) области G. Например, аппроксимация Ритца u_6 в первом из вышеперечисленных случаев может быть выбрана в виде [2])

$$u_6(x, y)=(R^2-x^2-y^2)(a_1+a_2x+a_3y+a_4x^2+a_5xy+a_6y^2). \tag{20.26}$$

Для $N>2$ действуем аналогично. Например, для решения в области G задачи

$$\Delta^2u=f, \tag{20.27}$$

$$u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \text{ на } \Gamma \tag{20.28}$$

(ν — внешняя нормаль к G) можно использовать систему (20.13), умноженную на функцию $g^2(x, y)$. Эта система будет полной в H_A. (Функция $g(x, y)$ входит здесь в квадрате для того, чтобы

---

[1]) То есть непрерывная вместе с ее частными производными до второго порядка включительно в $\overline{G}$.

[2]) Аналогично, в случае задачи (20.21), (20.22) можно выбрать, например, $u_4(x)=(x-a)(b-x)(a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3)$ и т. д.

удовлетворялись оба условия (20.28).) Аналогично, решая задачу Дирихле для уравнения более высокого порядка, можно использовать систему функций (20.13), умноженных на соответствующую степень g.

Описанную процедуру можно в частных случаях изменить. Например, решая в полукруге $x^2+y^2<R^2$, $y>0$, задачу

$$\Delta^2 u = f, \tag{20.29}$$

$$u=0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \text{ на верхней полуокружности,} \tag{20.30}$$

$$u=0 \text{ при } y=0, \tag{20.31}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}=0 \text{ при } y=0 \tag{20.32}$$

(полукруглая пластинка защемлена вдоль закругленной стороны и просто оперта на оставшейся части границы), можно выбрать в качестве базиса систему функций (20.13), умноженных на

$$y(R^2-x^2-y^2)^2. \tag{20.33}$$

Функция (20.33) положительна и достаточно гладка на G, и для любой функции из полученной последовательности условия (20.31) и (20.30) будут удовлетворены. Условию (20.32) не нужно удовлетворять, так как оно неустойчиво.

Хотя указанные системы (типа (20.25), возможно, модифицированные) действительно полны в H_A, но они, вообще говоря, «слабо ортогональны» и поэтому не всегда удобны для численных расчетов. Здесь значительно лучше применять полиномы Лежандра, см. [28]. Однако описываемый ниже процесс обычно существенно эффективнее.

Читатель, может быть, знаком с понятиями собственного значения и собственной функции задачи. Подробности, относящиеся к этим понятиям, можно найти в гл. 37—41. Здесь вкратце изложим лишь некоторые полезные результаты и примеры.

Пусть A — линейный дифференциальный оператор [1]), определенный на линеале D_A достаточно гладких функций (так как к ним будет применяться оператор A, необходимо, чтобы они имели требуемое число производных), удовлетворяющих заданным однородным граничным условиям. Число λ называется *собственным значением* A, если существует ненулевая функция $u \in D_A$, такая что

$$Au-\lambda u=0. \tag{20.34}$$

Функция $u(x)$ $(u(x) \not\equiv 0)$ называется *собственной функцией* оператора A, отвечающей собственному значению λ.

[1]) В этой части книги рассматриваются только дифференциальные операторы с достаточно гладкими коэффициентами в $\overline{G}$.

Из однородности рассматриваемой задачи следует, что если $u(x)$ — собственная функция оператора A, отвечающая собственному значению λ, то функция $ku(x)$, где k — ненулевая постоянная, также является собственной функцией оператора, отвечающей тому же λ.

В гл. 39 будет показано (хотя соответствующая теорема будет сформулирована в несколько иной форме[1]), что для положительно определенных дифференциальных операторов рассматриваемого в этой книге типа справедливо следующее утверждение. *Оператор A имеет счетное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и счетное множество соответствующих собственных функций*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{20.35}$$

которые можно считать ортогональными в H_A (так что они линейно независимы в H_A). *Система* (20.35) *полна в H_A.*

Следовательно, система (20.35) удовлетворяет требованиям а), б), рассмотренным в начале этой главы. Можно показать (см., например, [28]), что *если эта система ортонормирована, то она также удовлетворяет требованиям* в), г) *и* д), которые связаны с численной устойчивостью процесса в методе Ритца, равномерной ограниченностью чисел обусловленности матриц Ритца по отношению к n и сходимостью последовательности Au_n к функции f в $L_2(G)$.

В качестве очень простого примера отметим задачу на собственные значения

$$-u'' - \lambda u = 0, \tag{20.36}$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0 \tag{20.37}$$

для оператора $A = -u''$, область определения D_A которого образуют функции, дважды непрерывно дифференцируемые на интервале $[0, \pi]$ и удовлетворяющие условиям (20.37). Найти собственные значения и собственные функции этого оператора очень просто. Найдем ненулевое решение $u(x)$ задачи (20.36), (20.37). Так как оператор A положительно определен на линеале D_A, он может иметь только положительные собственные значения (см. теорему 37.1; этот результат может быть получен непосредственно из скалярного умножения уравнения (20.36) на $u(x)$ с учетом того, что $(-u'', u) = (u', u') > 0$ и $(u, u) > 0$ вследствие $u(x) \not\equiv 0$). Следовательно, можно положить $\lambda = n^2$, $n > 0$. В этих обозначениях уравнение (20.36), т. е. уравнение $u'' + n^2 u = 0$, имеет решение $u = a\cos nx + b\sin nx$. Из первого условия (20.37) следует, что $a = 0$, откуда $u = b\sin nx$. Второе условие в (20.37) означает, что $b\sin n\pi = 0$. Решение должно быть отлично от нуля, так что $b \neq 0$. Следовательно, $\sin n\pi = 0$. Так как $n > 0$ по предположе-

[1]) Если коэффициенты дифференциального оператора недостаточно гладкие, то необходимо понимать собственные функции в обобщенном смысле.

нию, это означает, что $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, ... Следовательно, собственные значения рассматриваемой задачи суть $\lambda_1 = n_1^2 = 1$, $\lambda_2 = n_2^2 = 4$, $\lambda_3 = n_3^2 = 9$, ..., а соответствующие собственные функции —

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots . \tag{20.38}$$

Они ортогональны в соответствующем пространстве H_A, что можно легко проверить непосредственным вычислением:

$$(A \sin jx,\ \sin kx) = \int_0^{\pi} j^2 \sin jx \sin kx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, \\ \dfrac{\pi j^2}{2} & \text{при } k = j. \end{cases}$$

Так как скалярное произведение $(u, v)_A$ в H_A — это просто расширение скалярного произведения (Au, v), функции (20.38) ортогональны в H_A.

Кроме того, в соответствии с приведенным выше утверждением система (20.38) полна в H_A [1]). Если нормировать эту систему в H_A, то она будет также удовлетворять требованиям в), г), д), сформулированным выше.

Точно так же можно показать, что (20.14) есть система собственных функций для задачи

$$-u'' - \lambda u = 0,$$
$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

и, далее, что (20.16) — система собственных функций для задачи

$$-\Delta u - \lambda u = 0 \text{ в } G, \tag{20.39}$$
$$u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{20.40}$$

в прямоугольнике $G = (a, b) \times (c, d)$, т. е. система собственных функций оператора $-\Delta$ на линеале функций, непрерывных вместе со своими производными вплоть до второго порядка включительно в $\bar{G}$ и удовлетворяющих (20.40) [2]). Аналогично, можно построить подобную систему собственных функций на брусах более высокой размерности.

Точно так же, как в случае задачи (20.36), (20.37), мы приходим к системе

$$\cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \ldots \tag{20.41}$$

собственных функций оператора $-u''$, который является положительно определенным (см. с. 204) на линеале $\tilde{M}_2$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых на интервале $[0, \pi]$ и удовлетво-

---

[1]) Полнота (20.15) в H_A следует тогда не только из теоремы 20.1, но также из только что полученного результата.

[2]) Напомним, что система (20.16), предварительно нормированная, использовалась в примере 12.1 при применении метода ортонормированных рядов.

ряющих условиям

$$\int_0^{\pi} u(x)\,dx = 0, \tag{20.42}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = 0. \tag{20.43}$$

Аналогично, функции

$$\cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{20.44}$$

образуют систему собственных функций для подобной задачи, рассматриваемой на интервале $[a, b]$.

В рассмотренных случаях мы строили систему собственных функций — и соответствующий базис в H_A, который после нормировки в этом пространстве удовлетворял всем требованиям а) — д), — без каких бы то ни было затруднений, поскольку и операторы $-u''$, $-\Delta u$, и области, на которых эти операторы рассматривались (интервал, прямоугольник), были очень простыми. Задача значительно усложнится, если, скажем, рассматривать операторы с переменными коэффициентами. Поэтому тем более важен результат, который будет сформулирован в теореме 20.2 и который позволит нам «заменять» систему собственных функций более сложного оператора системой собственных функций более простого оператора. Прежде чем привести эту теорему, введем понятие самосопряженного оператора.

Рассмотрим линейный оператор A с областью определения D_A, плотной в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением (u, v). Для некоторых элементов $v \in H$ существуют $v^* \in H$, такие что $(Au, v) = (u, v^*)$ при всех $u \in D_A$. Например, этим свойством обладает элемент $v = 0$; соответствующим элементом является $v^* = 0$, поскольку для любого $u \in D_A$ выполняется $(Au, 0) = (u, 0) = 0$.

Если оператор A симметричен на линеале D_A, то все элементы $v \in D_A$ обладают указанным свойством; соответствующими элементами являются $v^* = Av$, поскольку для любых $u \in D_A$, $v \in D_A$ в этом случае выполняется $(Au, v) = (u, v^*)$. Однако может оказаться, что множество всех $v \in H$, обладающих этим свойством, шире.

В общем случае обозначим через M множество всех $v \in H$, обладающих рассматриваемым свойством. Так как D_A плотен в H, по элементу $v \in M$ всегда единственным образом определяется[1]) соответствующий элемент v^*. Это задает на M оператор A^*, такой что *для любого* $u \in D_A$ *и для любого* $v \in M = D_{A^*}$ выполняется $(Au, v) = (u, A^*v)$.

[1]) Пусть элементу $v \in M$ соответствуют два элемента v_1^*, v_2^*, таких что $(Au, v) = (u, v_1^*)$, $(Au, v) = (u, v_2^*)$ выполнено при всех $u \in D_A$. Вычитая и применяя теорему 6.18, на основании плотности D_A в H получаем $v_1^* - v_2^* = 0$.

Оператор A^* называется *сопряженным* оператору A. Если $A^*=A$ (т. е. если $D_{A^*}=D_A$ и $A^*v=Av$ при любом $v\in D_A$), то оператор A называется *самосопряженным*.

Очевидно, что для симметричного оператора $D_A\subset D_{A^*}$, где, как уже отмечалось, множество D_{A^*} в действительности может быть шире, чем D_A. Заметим также, что (грубо говоря) чем шире область D_A определения данного оператора, тем уже область D_{A^*} определения сопряженного оператора (так как уравнение $(Au, v)=(u, v^*)$, входящее в определение, должно выполняться для «большего числа» элементов u). Можно ожидать, что подходящее расширение области определения симметричного оператора сузит область определения сопряженного ему оператора ровно настолько, что обе области совпадут. Можно показать [29], что положительно определенные операторы обладают следующим свойством. *Любой положительно определенный оператор*[1] *можно расширить в самосопряженный оператор*[2]. Кроме того, оператор, расширенный таким образом, остается положительно определенным и система его собственных функций совпадает с системой собственных функций исходного оператора A.

Два положительно определенных оператора A, B называются *конгруэнтными*[3], если $D_A=D_B$.

Для положительно определенных дифференциальных операторов одного порядка (рассматриваемых в этой части нашей книги), области определения которых состоят из достаточно гладких функций, можно несколько нестрого сказать, что самосопряженные операторы $\bar{A}, \bar{B}$, являющиеся их расширениями, конгруэнтны, если области определения исходных операторов совпадают. Эти вопросы подробно разобраны, например, в [28], где читатель может найти доказательства утверждений, приводимых ниже. Так, операторы

$$A=-(pu')'+ru, \tag{20.45}$$

$$B=-u'', \tag{20.46}$$

где p, p', r — функции, непрерывные на $[a, b]$, $p(x)\geqslant p_0$, $r(x)\geqslant 0$ на $[a, b]$, положительно определены на общей области определения $D_A=D_B$, состоящей из функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям

$$u(a)=0, \quad u(b)=0. \tag{20.47}$$

Их самосопряженные расширения $\bar{A}$, $\bar{B}$ являются конгруэнтными операторами.

---

[1]) По определению любой положительно определенный оператор симметричен.

[2]) Это обстоятельство позволяет осуществить так называемое расширение по Фридрихсу положительно определенного оператора. См., например, [29].

[3]) Читатель должен иметь в виду, что терминология в литературе не устоялась.

То же самое верно и для самосопряженных расширений операторов

$$A = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad k > 0, \tag{20.48}$$

$$B = -\Delta u, \tag{20.49}$$

положительно определенных на общей области определения $D_A = D_B$, состоящей из функций, непрерывных вместе со своими частными производными вплоть до второго порядка включительно в замкнутой области $\bar{G}$ и удовлетворяющих условию

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{20.50}$$

Естественно, читатель может сам построить много дополнительных примеров.

Два конгруэнтных оператора называются *родственными*, если можно найти положительные постоянные c и k, такие что для любого $u \in D_A = D_B$

$$|(Au, (B + kI)u)| \geqslant c \|Au\|^2,$$

где I — единичный оператор.

Опять-таки можно показать ([28], с. 138 и далее), что конгруэнтные операторы, представляющие собой самосопряженные расширения положительно определенных операторов, рассматриваемых в нашей книге, удовлетворяют данному условию.

Справедлива следующая важная теорема (см. [28], с. 369—371):

Теорема 20.2. *Пусть самосопряженные расширения $\overline{A}$, $\overline{B}$ положительно определенных операторов родственны. Тогда ортонормированная*[1]) *система собственных функций оператора B обладает всеми свойствами* а)—д), *требуемыми от базиса в пространстве H_A.*

Грубо говоря, при выборе в H_A базиса, имеющего свойства а)—д), можно заменить ортонормированную систему собственных функций оператора A (с. 231) ортонормированной системой собственных функций некоторого более простого оператора B, если самосопряженные расширения этих операторов являются родственными операторами.

Например, для решения по методу Ритца задачи

$$-(pu')' + ru = f,$$
$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0,$$

можно использовать то обстоятельство, что самосопряженные расширения операторов (20.45) и (20.46) конгруэнтны и родственны, и выбрать в качестве базиса систему (20.38) собственных функций оператора B, ортонормированную в пространстве H_B, т. е.

[1]) В метрике пространства H_B.

в пространстве со скалярным произведением

$$(u, v)_B = \int_0^{\pi} u'v'\,dx,$$

т. е. систему

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,n} \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{20.51}$$

б) Выбор базиса для обыкновенных дифференциальных уравнений

Приведенных выше общих положений достаточно для выбора базиса в конкретных задачах. Практические следствия, вытекающие из этого рассмотрения, могут быть далее улучшены или упрощены. По этому вопросу мы отсылаем к книгам [28], [5]. Здесь мы приведем только конкретные инструкции по выбору базиса для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с наиболее часто встречающимися граничными условиями. Соответствующие инструкции по выбору базиса для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных будут даны в гл. 25.

Заметим вдобавок, что постоянные множители, не зависящие от n, которые появляются в процессе нормирования собственных функций, не влияют на свойства а)—д) рассматриваемого базиса, и что для простоты их можно опустить. Следовательно, вместо базиса (20.51) можно рассматривать базис

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{20.52}$$

и т. д. Точно так же можно несколько упростить сложные выражения, зависящие от n, которые возникают в процессе нормирования, так как важен в сущности лишь «порядок» зависимости этих выражений от n. Например, коэффициенты вида

$$\sqrt{\frac{n}{a^2n^2+b}} \tag{20.53}$$

могут быть заменены коэффициентами вида

$$\sqrt{\frac{1}{n}}, \tag{20.54}$$

которые при $n \to \infty$ стремятся к нулю с той же скоростью, что и коэффициенты (20.53). Однако этот порядок зависимости от n должен быть сохранен, поскольку в противном случае элементы матрицы Ритца, вообще говоря, очень быстро возрастают (по абсолютной величине) в направлении главной диагонали, и это может существенно повлиять на устойчивость численного процесса. При определенном выборе численных процедур (программирование в арифметике с плавающей запятой, решение системы Ритца ме-

тодом исключения и, естественно, при рассмотрении лишь небольшого числа членов базиса) можно положить эти коэффициенты равными единице, не учитывая типа их зависимости от n; см [5].

Инструкции по выбору базиса предлагаются ниже для уравнений второго и четвертого порядков для наиболее часто встречаемых в приложениях интервалов $[0, l]$ и $[-l, l]$.

I. Уравнение

$$-(pu')' + ru = f, \tag{20.55}$$

p, p', r — непрерывны на $[0, l]$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $r(x) \geqslant 0$ на $[0, l]$.

1. *Граничные условия*

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{20.56}$$

Выберем базис

$$\varphi_n(x) = \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{20.57}$$

В частности, при $l = \pi$ получим базис (20.52).

2. *Граничные условия*

$$u'(0) - \beta u(0) = 0, \quad u'(l) + \delta u(l) = 0, \quad \beta \geqslant 0, \ \delta \geqslant 0. \tag{20.58}$$

Если не выполняются одновременно $r(x) \equiv 0$, $\beta = \delta = 0$, выберем базис

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_n(x) = \frac{\cos \frac{n\pi x}{l}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \text{[1]}. \tag{20.59}$$

Если $r(x) \equiv 0$, $\beta = \delta = 0$ (с. 202), мы опускаем в (20.59) функцию $\varphi_0(x)$. Естественно, в этом простом случае решение легко получается прямым интегрированием.

3. *Граничные условия*

$$u(0) = 0, \quad u'(l) + \delta u(l) = 0, \quad \delta \geqslant 0. \tag{20.60}$$

Мы выбираем базис

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2l} (2n-1)x, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{20.61}$$

[1] Если $\beta^2 + \delta^2 > 0$ (причем допускается $r(x) \equiv 0$), то родственным оператором является самосопряженное расширение оператора, определяемого посредством $-u''$ на линеале (достаточно гладких) функций, которые удовлетворяют условиям (20.58). Однако система собственных функций этого оператора непроста. Поэтому мы предпочли здесь систему (20.59). (См. [28], с. 168, 169.)

II. Уравнение

$$(p^2u'')''-(p_1u')'+p_0u=f, \tag{20.62}$$

p_0, p_1, p_1', p_2, p_2', p_2'' — непрерывные функции на интервале $[0, l]$ или на $[-l, l]$, $p_0(x)\geqslant 0$, $p_1(x)\geqslant 0$, $p_2(x)\geqslant p>0$ на $[0, l]$ или на $[-l, l]$ соответственно.

4. *Граничные условия*

$$u(0)=0, \quad u(l)=0, \tag{20.63}$$
$$u''(0)=0, \quad u''(l)=0. \tag{20.64}$$

Мы выбираем базис

$$\varphi_n(x)=\frac{\sin\dfrac{n\pi x}{l}}{n^2}, \quad n=1, 2, \ldots. \tag{20.65}$$

5. *Граничные условия*

$$u(-l)=0, \quad u(l)=0, \tag{20.66}$$
$$u'(-l)=0, \quad u'(l)=0. \tag{20.67}$$

Выбираем базис

$$\varphi_{2n-1}=\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{\lambda_n x}{l}-\frac{x}{l}\sin\lambda_n\right), \tag{20.68}$$
$$\varphi_{2n}=\frac{1}{n^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{l}-(-1)^n\right], \quad n=1, 2, \ldots,$$

где λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\lambda=\lambda$, причем $\lambda_1<\lambda_2<\ldots$, так что

$$\frac{(2n-1)\pi}{2}\leqslant\lambda_n\leqslant\frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Имеем $\lambda_1\cong 4.4932$, $\lambda_2\cong 7.7252$, $\lambda_3\cong 10.9035$, ...

Дополнительные примеры базисов можно найти в [28] и в [5].

Заметим, что в специальных случаях (если задача является «нечетной» или «четной» и т. д.) можно использовать базисы, более простые по сравнению с приведенными выше (см. текст на с. 159).

По поводу специального выбора базиса в случае метода конечных элементов см. гл. 42.

Глава 21

Численные примеры. Обыкновенные дифференциальные уравнения

В этой главе рассматриваются три примера решения вариационными методами обыкновенных дифференциальных уравнений. Первые два чисто иллюстративны, поскольку их решение известно. Они приведены здесь из-за того, что они во всех отношениях поучительны и на них хорошо прослеживается, как можно и как нельзя действовать в существенно менее очевидных ситуациях (скажем, в случае дифференциальных уравнений в частных производных).

В третьем примере будет описано численное решение уравнения четвертого порядка (21.50) с переменными коэффициентами; используются граничные условия (21.51), (21.52). (С инженерной точки зрения — это задача о прогибе неоднородного просто опертого бруса, лежащего на упругом основании или, может быть, находящегося под осевой нагрузкой.)

Пример 21.1. Решим задачу

$$-u'' = \cos x, \tag{21.1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0. \tag{21.2}$$

Решение этой задачи — функция $u(x) = \cos x + (2/\pi)x - 1$; достаточно два раза проинтегрировать уравнение (21.1) и определить постоянные интегрирования из условий (21.2). Конечно, пример иллюстративный. Используя этот пример, мы покажем применение методов Ритца и Галёркина, а также метода наименьших квадратов, и одновременно применение формулы (11.21) для оценки погрешности. Задача настолько проста, что не может причинить никаких «неприятностей». Однако мы будем использовать результаты этого примера в примере 21.2, в котором мы встретимся с многочисленными «неприятностями».

Положительная определенность оператора A, заданного соотношением $Au = -u''$, на линеале M (плотном в $L_2(0, \pi)$) дважды непрерывно дифференцируемых в интервале функций, которые удовлетворяют условиям (21.2), следует в качестве частного случая из результатов гл. 19.

1. *Решение методом Ритца*

В соответствии с (20.57) выбираем базис

$$\sin x, \ \frac{\sin 2x}{2}, \ \frac{\sin 3x}{3}, \ \ldots . \tag{21.3}$$

Следовательно, n-е приближение по Ритцу будет иметь вид

$$u_n(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\sin jx}{j},$$

или, если записать $c_j/j=a_j$, вид

$$u_n(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j \sin jx. \tag{21.4}$$

Если используется форма (21.4), то это фактически означает выбор базиса

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots\ . \tag{21.5}$$

Как будет видно, в данном случае, когда речь идет о явных выражениях для коэффициентов a_j, для численных аспектов проблемы это несущественно.

Заметим дополнительно, что задача «симметрична относительно точки $(\pi/2,\ 0)$»: данный дифференциальный оператор имеет постоянные коэффициенты, граничные условия симметричны относительно точки $(\pi/2,\ 0)$, и график правой части уравнения (21.1) также симметричен относительно этой точки. В соответствии с замечанием 13.7 в (21.5) можно рассматривать только те функции, графики которых симметричны относительно точки $(\pi/2,\ 0)$. Поэтому выбираем базис

$$\varphi_j(x)=\sin 2jx, \quad j=1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{21.6}$$

(Читатель может легко проверить прямым вычислением, что, беря в качестве базиса (21.5), он в ходе вычислений действительно получит коэффициенты при членах $\varphi_1,\ \varphi_3,\ \ldots$ равными нулю.)

Поскольку в этом случае элементы базиса принадлежат области определения D_A заданного оператора, мы можем написать систему Ритца для постоянных $a_1,\ \ldots,\ a_n$ в виде (13.29):

$$\begin{aligned}
&(A\varphi_1,\ \varphi_1)\,a_1+(A\varphi_1,\ \varphi_2)\,a_2+\ldots+(A\varphi_1,\ \varphi_n)\,a_n=(f,\ \varphi_1),\\
&\cdots\cdots\cdots

Следовательно, система (21.7) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\pi\cdot 1^2\cdot a_1 + \quad 0\cdot a_2 \quad + \ldots + 0\cdot a_n &= \frac{4}{4\cdot 1^2-1}, \\ 0\cdot a_1 + 2\pi\cdot 2^2\cdot a_2 \quad + \ldots + 0\cdot a_n &= \frac{4\cdot 2}{4\cdot 2^2-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0\cdot a_1 + \quad 0\cdot a_2 + \ldots + 2\pi\cdot n^2\cdot a_n &= \frac{4n}{4n^2-1}. \end{aligned} \tag{21.10}$$

Итак, мы получаем

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{\pi j\,(4j^2-1)}, \\ u_n &= \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin 2jx}{j\,(4j^2-1)}. \end{aligned} \tag{21.11}$$

В соответствии с общей теорией (гл. 13) последовательность $\{u_n\}$ сходится к обобщенному решению $u_0(x)$ как в пространстве H_A, так и в пространстве $L_2(0, \pi)$. Согласно замечанию 19.4, $\{u_n(x)\}$ сходится к $u_0(x)$ на интервале $[0, \pi]$ равномерно, а $\{u_n'(x)\}$ сходится к $u_0'(x)$ в среднем; см., однако, ниже замечание 21.1.

Оценка погрешности

Оценим погрешность после n-го шага в H_A, т. е. оценим число $\|u_0 - u_n\|_A$. Для этого применим (11.21):

$$\|u_0 - u_n\|_A \leqslant \frac{\|Au_n - f\|}{C}. \tag{21.12}$$

В соответствии с (18.28), где $a=0$, $b=\pi$, можно положить $C=1$. Далее, согласно (21.11),

$$\begin{aligned} \|Au_n - f\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{n}\frac{8j^2\sin 2jx}{\pi j\,(4j^2-1)} - \cos x \right\|^2 = \int_0^{\pi}\left[\frac{64}{\pi^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2\sin^2 2jx}{(4j^2-1)^2} + \cos^2 x\right]dx + \\ &+ \int_0^{\pi}\frac{64}{\pi^2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{j\sin jx}{4j^2-1}\,\frac{k\sin kx}{4k^2-1}\,dx - \int_0^{\pi}\frac{16}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{j\sin 2jx\cos x}{4j^2-1}\,dx = \\ &= \frac{64}{\pi^2}\,\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{(4j^2-1)^2} + \frac{\pi}{2} - \frac{16}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{4j^2}{(4j^2-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{32}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{(4j^2-1)^2} \end{aligned} \tag{21.13}$$

ввиду того, что

$$\int_0^{\pi}\sin^2 2jx\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}\sin 2jx\sin 2kx\,dx = 0 \text{ при } j\neq k, \quad \int_0^{\pi}\sin 2jx\cos x\,dx = \frac{4j}{4j^2-1}$$

(см. [33]).

Если мы выберем, например, $n=3$, то с помощью (21.12) и (21.13) получим

$$\|u_0-u_3\|_A^2 \leqslant \|Au_3-f\|^2=\frac{\pi}{2}-\frac{32}{\pi}\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{225}+\frac{9}{1225}\right)<0.1849,$$

и, таким образом,

$$\|u_0-u_3\|_A<0.43. \tag{21.14}$$

Фактическая погрешность, которую можно в этом случае легко вычислить, поскольку известно решение $u_0(x)=\cos x+(2/\pi)x-1$, конечно, меньше:

$$\|u_0-u_3\|_A^2=\left\|\cos x+\frac{2}{\pi}x-1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{\sin 4x}{2\cdot 15}+\frac{\sin 6x}{3\cdot 35}\right)\right\|_A^2=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\cos x+\frac{2}{\pi}x-1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{\sin 4x}{2\cdot 15}+\frac{\sin 6x}{3\cdot 35}\right)\right]'^2 dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left[-\sin x+\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\cos 2x}{3}+\frac{4\cos 4x}{30}+\frac{6\cos 6x}{105}\right)\right]^2 dx\approx 0.001\ 217,$$

откуда $\|u_0-u_3\|\approx 0.035$. Далее,

$$\|u_3\|_A^2=\|u_3'\|^2=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left(\frac{2\cos 2x}{3}+\frac{4\cos 4x}{30}+\frac{6\cos 6x}{105}\right)^2 dx>0.3481,$$

так что $\|u_3\|_A>0.59$.

Следовательно, для оценки относительной погрешности $\|u_0-u_3\|_A/\|u_3\|_A$ мы получаем, согласно (21.14),

$$\frac{\|u_0-u_3\|_A}{\|u_3\|_A}<\frac{0.43}{0.59}<0.74.$$

Фактическая относительная погрешность равна

$$\frac{\|u_0-u_3\|_A}{\|u_3\|_A}\approx\frac{0.035}{0.59}\approx 0.06.$$

Как можно было ожидать (n мало), приведенные оценки не очень хорошие. Заметим, однако, что их можно сделать произвольно малыми за счет выбора n достаточно большим, поскольку, как известно из предыдущей главы, для выбранного базиса мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\|Au_n-f\|=0.$$

Замечание 21.1. Легко показать, что сумма ряда

$$s(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)} \tag{21.15}$$

равна упомянутой выше функции $\cos x + (2/\pi)x - 1$. Действительно, если мы почленно продифференцируем ряд (21.15), то получится ряд

$$\frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos 2jx}{4j^2-1}, \tag{21.16}$$

который равномерно сходится на интервале $[0, \pi]$ благодаря наличию второй степени j в знаменателе. Тогда его сумма является производной суммы ряда (21.15), который также является равномерно сходящимся в $[0, \pi]$. Согласно формуле 10, [33], сумма ряда (21.16) на $[0, \pi]$ равняется функции

$$\frac{2}{\pi} - \sin x. \tag{21.17}$$

Следовательно, функция $s(x)$ является на $[0, \pi]$ первообразной функции (21.17) и, поскольку $s(0) = s(\pi) = 0$, она равна функции $\cos x + (2/\pi)x - 1$. Далее, из только что проведенного рассмотрения следует, что не только последовательность Ритца $\{u_n(x)\}$, но также и последовательность ее производных $\{u_n'(x)\}$ равномерно сходятся на $[0, \pi]$ (к искомой функции $u_0(x)$ и ее производной $u_0'(x)$ соответственно).

2. *Решение методом Галёркина*

Выберем снова базис (21.6), т. е. базис

$$\varphi_j = \sin 2jx, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{21.18}$$

Так как функции базиса (21.18) принадлежат D_A, из результатов гл. 14 следует, что система уравнений Галёркина для неизвестных постоянных b_j в аппроксимации по Галёркину

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sin 2jx \tag{21.19}$$

будет совпадать с системой Ритца, так что мы будем иметь $b_j = a_j$, $j = 1, \ldots, n$ и $v_n(x) = u_n(x)$. Конечно, этот результат также можно было бы получить непосредственно из условия, которое определяет метод Галёркина, т. е. из условия, что функция $Av_n - f$ должна быть ортогональна в $L_2(0, \pi)$ функциям $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Записывая эти условия

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j A\varphi_j - f, \varphi_k\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

выполняя умножение и используя симметрию (т. е. соотношение $(A\varphi_j, \varphi_k) = (A\varphi_k, \varphi_j)$), мы получаем в точности систему (21.7). Поэтому мы не будем далее анализировать этот метод в применении к рассматриваемому примеру.

3. Решение методом наименьших квадратов

Выберем базис (21.5). Последовательность $\{\sin jx\}$ действительно удовлетворяет требованию, сформулированному в гл. 15, поскольку последовательность $\{A \sin jx\} = \{j^2 \sin jx\}$ является полной в пространстве $L_2(0, \pi)$. Учитывая симметрию задачи относительно точки $(\pi/2, 0)$ (см. с. 240), достаточно ограничиться базисом (21.6), т. е. базисом

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{21.20}$$

Как известно, принцип метода наименьших квадратов состоит в минимизации выражения

$$\| Az_n - f \|^2 \tag{21.21}$$

в метрике пространства $L_2(0, \pi)$ на линеале функций вида

$$z_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x).$$

Как показано в гл. 15, условие минимальности (21.21) ведет к следующей системе для постоянных c_j:

$$\sum_{j=1}^{n} (A\varphi_j, A\varphi_k) c_j = (f, A\varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{21.22}$$

Так как $A\varphi_k = 4k^2 \varphi_k$, то разделив (21.22) на $4k^2$, мы получаем систему

$$\sum_{j=1}^{n} (A\varphi_j, \varphi_k) c_j = (f, \varphi_k), \tag{21.23}$$

которая опять-таки благодаря симметрии оператора A совпадает с системой (21.7). Таким образом, и здесь дальнейший анализ применяемого метода излишен.

Пример 21.2. Решим задачу

$$-u'' = \cos x, \tag{21.24}$$

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = 0. \tag{21.25}$$

Функция из правой части удовлетворяет условию

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0, \tag{21.26}$$

которое является (см. (19.26)) необходимым (и достаточным) условием существования решения. Оператор $\tilde{A}_2 = -u''$ положительно определен (см. (19.33)) на линеале $\tilde{M}_2$ функций, дважды непрерывно

дифференцируемых на $[0, \pi]$ и удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\pi} u(x)\,dx = 0 \tag{21.27}$$

и граничным условиям (21.25). Следовательно, обычным методом можно построить пространство $H_{\tilde{A}_2}$, в котором существует единственное обобщенное решение задачи (21.24), (21.25). Это решение минимизирует в $H_{\tilde{A}_2}$ функционал

$$Fu = \int_0^{\pi} u'^2(x)\,dx - 2\int_0^{\pi} u(x)\cos x\,dx. \tag{21.28}$$

Напомним, что все функции из $H_{\tilde{A}_2}$ удовлетворяют условию (21.27), но, вообще говоря, не удовлетворяют условиям (21.25), которые являются неустойчивыми для оператора $\tilde{A}_2$.

Легко проверить, что в рассматриваемом случае $u_0(x) = \cos x$. Таким образом, решение известно и пример имеет иллюстративный характер. Тем не менее читатель найдет в этом примере много поучительного.

1. *Решение методом Ритца*

В соответствии с (20.59) выбираем базис (мы опускаем функцию $\varphi_0(x) \equiv 1$ из системы (20.59))

$$\cos x,\ \frac{\cos 2x}{2},\ \frac{\cos 3x}{3},\ \ldots\ ^{1}), \tag{21.29}$$

так что

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\cos jx}{j}.$$

Если обозначить, как в предыдущем примере, $c_j/j = a_j$, то получится

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos jx, \tag{21.30}$$

что соответствует базису

$$\varphi_j(x) = \cos jx, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{21.31}$$

(см. с. 240).

[1]) В этом базисе четные члены можно опустить, учитывая симметрию системы относительно точки $(\pi/2, 0)$.

Ввиду соотношения $\tilde{A}_2\varphi_j = j^2 \cos jx$ и ортогональности функций (21.31) на $[0, \pi]$ система Ритца (21.7) сводится к системе

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n = \frac{\pi}{2},\\
&0 \cdot a_1 + \frac{2^2\pi}{2} a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0 \cdot a_1 + 0 \cdot a^2 + \ldots + \frac{n^2\pi}{2} a_n = 0,
\end{aligned} \tag{21.32}$$

имеющей решение $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Отсюда немедленно следует, что $u_n(x) = \cos x$ для любого n, и мы получаем уже известный результат $u_0(x) = \cos x$.

Замечание 21.2. Заметим, что все функции базиса (21.31) удовлетворяют рассмотренным граничным условиям (21.25). Как указано в замечании 19.4, в случае метода Ритца это вовсе не необходимо. Так, исследуем решение по методу Ритца при условии, что выбран базис, функции которого не удовлетворяют граничным условиям (21.25). Возьмем, например, в качестве базиса функции (21.6), т. е. функции

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{21.33}$$

не удовлетворяющие условиям (21.25). Функции (21.33) удовлетворяют условию (21.27). Однако поскольку они не принадлежат области определения $D_{\tilde{A}_2}$ оператора $\tilde{A}_2$, систему Ритца для коэффициентов a_j необходимо писать в виде (13.11):

$$\sum_{k=1}^{n} (\varphi_j, \varphi_k)_{\tilde{A}_2} c_k = (\varphi_j, f), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{21.34}$$

Но для $u \in D_{\tilde{A}_2}$, $v \in D_{\tilde{A}_2}$

$$(\tilde{A}_2 u, v) = \int_0^{\pi} (-u'')\, v\, dx = \int_0^{\pi} u'v'\, dx \tag{21.35}$$

ввиду (21.25). Скалярное произведение в $H_{\tilde{A}_2}$ является простым обобщением скалярного произведения (21.35) из M_2 на все пространство $H_{\tilde{A}_2}$, так что

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{\tilde{A}_2} = \int_0^{\pi} \varphi_j'\varphi_k'\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j,\\ 2\pi j^2 & \text{при } k = j. \end{cases}$$

Поскольку $(f, \varphi_j) = 4j/(4j^2-1)$, как и в (21.9), система (21.34) принимает вид

$$\begin{aligned}
2\pi \cdot 1^2 \cdot a_1 \quad + \quad 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n &= \frac{4}{4 \cdot 1^2 - 1}, \\
0 \cdot a_1 + 2\pi \cdot 2^2 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n &= \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 2^2 - 1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
0 \cdot a_1 + \quad 0 \cdot \quad a_2 + \ldots + 2\pi n^2 \cdot a_n &= \frac{4n}{4n^2 - 1}.
\end{aligned} \tag{21.36}$$

Но это — в точности система (21.10), так что и в рассматриваемом случае

$$u_n(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)}. \tag{21.37}$$

Однако последовательность (21.37) не может сходиться к искомому (и в нашем случае известному) решению $u_0(x) = \cos x$, поскольку, как было показано, сумма ряда

$$\frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)}$$

на интервале $[0, \pi]$ равна функции

$$\cos x + \left(\frac{2}{\pi}\right) x - 1. \tag{21.38}$$

Где мы допустили ошибку?

Ошибка состоит не в том, что функции $\sin jx$ не удовлетворяют граничным условиям (21.25) (эти условия являются неустойчивыми), и не в том, что мы опустили нечетные члены в системе функций $\sin jx$ и сохранили только члены $\sin 2jx$; задача действительно симметрична относительно точки $(\pi/2, 0)$. Нет ошибки и в том, что касается выполнения для базисных функций условия

$$\int_0^{\pi} u(x)\, dx = 0,$$

обязательного для функций из $H_{\tilde{A}_2}$: все функции $\sin 2jx$ удовлетворяют этому условию. Однако система $\{\sin 2jx\}$ не является полной в пространстве $H_{\tilde{A}_2}$. Она является полной (напомним, что задача симметрична относительно точки $(\pi/2, 0)$), например, в пространстве $L_2(0, \pi)$ или в пространстве H_A, где A — оператор из примера 21.1 (и где функции из H_A удовлетворяют тогда условиям $u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$). Однако она не является полной в метрике пространства $H_{\tilde{A}_2}$, которое «у́же», чем H_A, в том смысле, что функции из $H_{\tilde{A}_2}$ удовлетворяют (21.27), но «шире», чем H_A, так как оно содержит также функции, не обращающиеся в нуль

на концах интервала $[0, \pi]$. Даже из интуитивных соображений можно ожидать, что именно эти функции (и, таким образом, также искомое решение $u_0(x) = \cos x$) нельзя аппроксимировать в метрике пространства $H_{\tilde{A}_2}$ с помощью функций вида $\sin 2jx$, которые равны нулю при $x = 0$ и $x = \pi$ [1]).

В случае метода Ритца можно показать, что все «приводится в порядок» добавлением к системе (21.6) соответствующей линейной функции [2]). Чтобы эта функция одновременно удовлетворяла условию

$$\int_0^\pi u(x)\,dx = 0$$

и условию симметрии относительно точки $(\pi/2, 0)$, выберем ее в виде $x - \pi/2$. Тем самым выбираем базис

$$\varphi_0(x) = x - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_j(x) = \sin 2jx, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{21.39}$$

Тогда, вычисляя скалярные произведения

$$(\varphi_j, \varphi_k)_{\tilde{A}_2} = \int_0^\pi \varphi_j' \varphi_k'\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

и учитывая, что

$$(\varphi_0, f) = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx = \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = -2,$$

легко установить, что система Ритца принимает вид

$$\begin{aligned}
&\pi \cdot a_0 + \quad 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + \quad 0 \cdot a_n = -2,\\
&0 \cdot a_0 + 2\pi \cdot 1^2 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + \quad 0 \cdot a_n = \frac{4}{4 \cdot 1^2 - 1},\\
&\qquad\qquad \ldots \ldots \ldots

т. е. отличается от (21.10) только первым уравнением; это уравнение означает, что $a_0 = -2/\pi$. Члены последовательности Ритца будут тогда иметь вид

$$u_n(x) = -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sin 2jx}{j(4j^2-1)}.$$

Таким образом, мы «приобрели» как раз функцию

$$-\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{2}{\pi}\right) = -\frac{2}{\pi}x + 1,$$

«отсутствующую» в (21.38).

2. *Метод Галёркина*

Выбирая базис (21.29), т. е.

$$\cos x, \quad \frac{\cos 2x}{2}, \quad \cos\frac{3x}{3}, \quad \ldots, \tag{21.41}$$

мы тем самым ищем аппроксимацию $v_n(x)$ в виде, напоминающем (21.30), т. е. в виде

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cos jx. \tag{21.42}$$

Условия Галёркина дают

$$(\tilde{A}_2 v_n - f, \cos kx) = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{21.43}$$

Так как $\cos jx \in D_{\tilde{A}_2}$, то из общей теории (равно как и из непосредственных вычислений) следует (см. гл. 14), что система Галёркина для неизвестных постоянных совпадает с системой Ритца (21.32). Таким образом, мы получаем $b_1 = 1$, $b_2 = \ldots = b_n = 0$ и, наконец, $v_n(x) = \cos x$ для любого n, тогда как $u_0(x) = \cos x$.

Итак, здесь выбор базиса (21.41) немедленно ведет к решению.

Исследуем теперь ход решения этой задачи по методу Галёркина, если используется последовательность (21.33), т. е. последовательность

$$\varphi_j(x) = \sin 2jx, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{21.44}$$

Приближенное решение тогда имеет вид

$$v_n(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sin 2jx, \tag{21.45}$$

причем постоянные b_j определяются, как обычно, из условий

$$(\tilde{A}_2 v_n - f, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{21.46}$$

т. е. из условий

$$\sum_{j=1}^{n} (\tilde{A}_2 \varphi_j, \varphi_k) b_k = (f, \varphi_k) \quad k = 1, \ldots, n. \tag{21.47}$$

Заметим, что, строго говоря, обозначение $\tilde{A}_2\varphi_j$ теряет смысл, поскольку функции (21.44) не принадлежат области определения оператора $\tilde{A}_2$ (они не удовлетворяют условиям (21.25)). Формально продолжая применять соответствующую процедуру и полагая $\tilde{A}_2\varphi_j = -\varphi_j'' = 4j^2 \sin 2jx$, мы получаем

$$(\tilde{A}_2\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^{\pi} 4j^2 \sin 2jx \sin 2kx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, \\ 2\pi j^2 & \text{при } k = j, \end{cases}$$

откуда видно, что система (21.47) в данном случае совпадает с системой Ритца (21.36)[1]. Следовательно, система приближений по Галёркину имеет — подобно последовательности Ритца, рассмотренной выше, — вид (21.37) и не сходится к (известному) решению задачи $u_0 = \cos x$, а сходится к решению $\cos x + (2/\pi)x - 1$ задачи

$$-u'' = \cos x,$$
$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0. \tag{21.48}$$

В случае метода Галёркина ситуацию нельзя исправить даже дополнением последовательности (21.44) членом $x - \pi/2$, т. е. выбором базиса в виде

$$\varphi_0(x) = x - \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_j(x) = \sin 2jx, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{21.49}$$

В самом деле, если мы тогда напишем систему Галёркина

$$\sum_{j=0}^{n} (\tilde{A}_2\varphi_j, \varphi_k) b_j = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

где мы опять положим $\tilde{A}_2\varphi_j = -\varphi_j''$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, мы получим систему $n+1$ уравнений относительно n неизвестных, так как $\tilde{A}_2\varphi_0 = -\varphi_0'' = 0$ и коэффициенты при b_0 будут равны нулю во всех уравнениях. Таким образом, неизвестное b_0 вообще не появится в системе[2].

Как уже отмечалось, примеры 21.1 и 21.2 носили чисто иллюстративный характер. Они были подробно обсуждены, чтобы показать, насколько важен удачный выбор базиса, какие аспекты заслуживают особого внимания и т. д., чтобы читатель был в состоянии решать подобные вопросы в значительно более сложных случаях (включая задачи для дифференциальных уравнений в частных производных).

---

[1]) Если функции φ_j не принадлежат области определения рассматриваемого оператора (как в нашем случае), то это не обязательно имеет место.

[2]) Такая ситуация не могла бы возникнуть при выборе базиса (21.41), элементы которого принадлежат к области определения оператора $\tilde{A}_2$.

Пример 21.3. Рассмотрим задачу

$$[(4+x)u'']'' + 600u = 5\,000\,(x - x^2), \tag{21.50}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{21.51}$$

$$u''(0) = 0, \quad u''(1) = 0. \tag{21.52}$$

Задача (21.50)—(21.52) является частным случаем задачи (19.127), (19.129), (19.130), в котором

$$p_2(x) = 4 + x, \quad p_1(x) = 0, \quad p_0(x) = 600, \quad f(x) = 5000\,(x - x^2). \tag{21.53}$$

Ее можно интерпретировать, например, как задачу определения *прогиба бруса переменного поперечного сечения* (или, скажем, с *переменным модулем упругости*), *лежащего на упругом основании*, свободно опертого (условия (21.51) и (21.52)) и находящегося под вертикальной нагрузкой. В общем случае соответствующее уравнение имеет вид

$$[E(x)\,I(x)\,u'']'' + Q(x)\,u = f(x), \tag{21.54}$$

где E, I, Q, f—соответственно модуль упругости Юнга, момент инерции поперечного сечения относительно оси изгиба, «коэффициент жесткости» среды и член, характеризующий вертикальную нагрузку. Естественно, возможны и другие интерпретации.

Ясно, что функции (21.53) являются достаточно гладкими на интервале $[0, 1]$. Поскольку, более того, $p_2(x) \geqslant 4 > 0$ на этом интервале, то из анализа задачи (19.127), (19.129), (19.130) следует, что оператор, заданный соотношением $Au = [(4+x)u'']'' + 600u$, положительно определен на линеале D_A функций, которые четырежды непрерывно дифференцируемы на $[0, 1]$ и удовлетворяют условиям (21.51), (21.52). Обобщенное решение задачи минимизирует в соответствующем пространстве H_A функционал (см. (19.138))

$$Fu = \int_0^1 (4+x)\,u''^2\,dx + \int_0^1 600u^2\,dx - 2\int_0^1 5000\,(x - x^2)\,u\,dx. \tag{21.55}$$

1. *Метод Ритца*

Выберем, согласно (20.65), для численных вычислений базис

$$\varphi_j(x) = \frac{\sin j\pi x}{j^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{21.56}$$

члены которого удовлетворяют всем условиям (21.51), (21.52)[1]). Далее, возьмем $n = 3$ (чтобы для этого небольшого числа членов можно было выбирать знаменатели в (21.56) равными единице, см. с. 237), и, таким образом, будем искать приближение по Ритцу $u_3(x)$ в виде

$$u_3(x) = a_1 \sin \pi x + a_2 \sin 2\pi x + a_3 \sin 3\pi x. \tag{21.57}$$

[1]) Вообще говоря, при применении метода Ритца нет необходимости, чтобы базис удовлетворял также и условиям (21.52), так как эти условия являются неустойчивыми для данного оператора.

Поскольку члены рассматриваемого базиса принадлежат D_A, можно записать систему Ритца в форме (13.29), т. е. в виде

$$\begin{aligned}
(A\varphi_1,\ \varphi_1)\,a_1+(A\varphi_1,\ \varphi_2)\,a_2+(A\varphi_1,\ \varphi_3)\,a_3&=(f,\ \varphi_1),\\
(A\varphi_2,\ \varphi_1)\,a_1+(A\varphi_2,\ \varphi_2)\,a_2+(A\varphi_2,\ \varphi_3)\,a_3&=(f,\ \varphi_2),\\
(A\varphi_3,\ \varphi_1)\,a_1+(A\varphi_3,\ \varphi_2)\,a_2+(A\varphi_3,\ \varphi_3)\,a_3&=(f,\ \varphi_3).
\end{aligned}\tag{21.58}$$

Для численного вычисления коэффициентов $(A\varphi_j,\ \varphi_k)$ и правых частей в (21.58) применяем формулу

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\tag{21.59}$$

и некоторые интегральные формулы. Прежде всего, интегрирование по частям (см. (19.132)) дает

$$\begin{aligned}
(A\varphi_j,\ \varphi_k)&=\int_0^1\left[(4+x)\,(\sin j\pi x)''\right]''\sin k\pi x\,dx+\\
&+\int_0^1 600\sin j\pi x\sin k\pi x\,dx=\pi^4j^2k^2\int_0^1(4+x)\sin j\pi x\sin k\pi x\,dx+\\
&+600\int_0^1\sin j\pi x\sin k\pi x\,dx.
\end{aligned}\tag{21.60}$$

Далее,

$$\int_0^1\sin j\pi x\sin k\pi x\,dx=\begin{cases}0 & \text{при}\quad k\neq j,\\ \dfrac{1}{2} & \text{при}\quad k=j,\end{cases}\tag{21.61}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin j\pi x\sin k\pi x\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\cos(j-k)\,\pi x-\cos(j+k)\,\pi x\right]dx=\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(j-k)\,\pi x}{(j-k)^2\pi^2}+\frac{x\sin(j-k)\,\pi x}{(j-k)\,\pi}-\frac{\cos(j+k)\,\pi x}{(j+k)^2\pi^2}-\frac{x\sin(j+k)\,\pi x}{(j+k)\,\pi}\right]_0^1=\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{j-k}-1}{(j-k)^2\pi^2}-\frac{(-1)^{j+k}-1}{(j+k)^2\pi^2}\right],\quad\text{если}\quad k\neq j
\end{aligned}\tag{21.62}$$

(см. например, [33], формула (286)),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sin^2 j\pi x\,dx&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,(1-\cos 2j\pi x)\,dx=\\
&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2j\pi x}{4j^2\pi^2}+\frac{x\sin 2j\pi x}{2j\pi}\right]_0^1=\frac{1}{4}
\end{aligned}\tag{21.63}$$

(применяя ту же формулу),

$$\int_0^1 (x-x^2)\sin j\pi x\,dx =$$

$$= \left[\frac{\sin j\pi x}{j^2\pi^2} - \frac{x\cos j\pi x}{j\pi} - \frac{2x\sin j\pi x}{j^2\pi^2} + \left(\frac{x^2}{j\pi} - \frac{2}{j^3\pi^3}\right)\cos j\pi x\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{(-1)^j}{j\pi} + \left(\frac{1}{j\pi} - \frac{2}{j^3\pi^3}\right)(-1)^j + \frac{2}{j^3\pi^3} = \frac{2}{j^3\pi^3}[1-(-1)^j]. \quad (21.64)$$

Здесь применены формулы (247) и (248) из [33].

Подставляя полученные результаты в (21.60) и (21.58), мы получаем искомую систему Ритца в виде

$$\left(2\pi^4 + \frac{\pi^4}{4} + 300\right)a_1 + 4\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right)a_2 + \qquad 0\cdot a_3 = \frac{5000\cdot 4}{\pi^3},$$

$$4\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right)a_1 + (32\pi^4 + 4\pi^4 + 300)\,a_2 +$$

$$+ 36\pi^4\left(-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2}\right)a_3 = 0,$$

$$0\cdot a_1 \qquad -\frac{24\cdot 36\pi^2}{25}a_2 + \left(\frac{729\pi^4}{4} + 300\right)a_3 = \frac{20\,000}{27\pi^3},$$

и после упрощений

$$\left(\frac{9}{4}\pi^4 + 300\right)a_1 \qquad -\frac{32\pi^2}{9}a_2 + \qquad 0\cdot a_3 = \frac{20\,000}{\pi^3},$$

$$-\frac{32\pi^2}{9}a_1 + (36\pi^4 + 300)\,a_2 - \qquad \frac{24\cdot 36\pi^2}{25}a_3 = 0,$$

$$0\cdot a_1 \qquad -\frac{24\cdot 36\pi^2}{25}a_2 + \left(\frac{729\pi^4}{4} + 300\right)a_3 = \frac{20\,000}{\pi^3},$$

т. е. окончательно

$$\begin{aligned} 519.17a_1 - \;\; 35.09a_2 + \;\; 0\cdot a_3 &= 645.05,\\ -35.09a_1 + 3806.76a_2 - \;\; 341.09a_3 &= 0,\\ 0\cdot a_1 - \;\; 341.09a_2 + 18052.97a_3 &= 23.89. \end{aligned} \quad (21.65)$$

Решение этой системы имеет вид

$$a_1 \approx 1.243, \quad a_2 \approx 0.0116, \quad a_3 \approx 0.00154. \quad (21.66)$$

Следовательно, при рассмотрении трех членов метод Ритца дает аппроксимацию

$$u_3(x) = 1.243\sin\pi x + 0.0116\sin 2\pi x + 0.00154\cdot\sin 3\pi x. \quad (21.67)$$

Погрешность может быть оценена так же, как и в примере 21.1, с помощью соотношения

$$\|u_0 - u_3\|_A^2 \leqslant \frac{\|Au_3 - f\|^2}{C^2},$$

в котором, согласно (19.136), можно положить $C^2 = p/c_1c_3$, где $p=4$, $c_1 = 1/\pi^2$ и $c_3 = 1/2$ согласно (19.137), так что $C^2 = 8\pi^2$.

Мы имеем

$$Au^3 = [(4+x)\,u_3']' + 600u = 1230.12\sin\pi x + 79.28\sin 2\pi x + \\ + 49.52\sin 3\pi x + x\,(121.08\sin\pi x + 18.08\sin 2\pi x + \\ + 12.15\sin 3\pi x) - (77.08\cos\pi x + 5.75\cos 2\pi x + 2.58\cos 3\pi x),$$

$$f(x) = 5000\,(x - x^2).$$

Для сведения читателя значения функций $u_3(x)$, Au_3 и $f(x)$ в точках $x = 0,\ 1/6,\ 2/6,\ 3/6,\ 4/6,\ 5/6,\ 1$ даны в приведенной таблице, а соответствующие графики — на рис. 10 и 11.

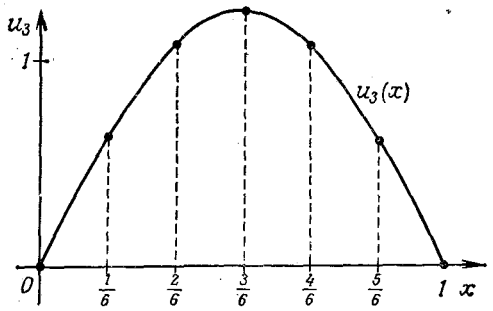

Рис. 10.

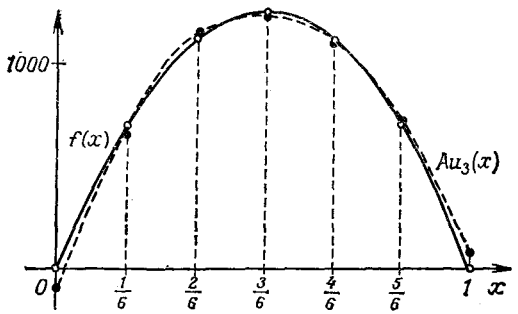

Рис. 11.

С помощью несложных вычислений получаем

$$\|Au_3 - f\|^2 = \int_0^1 (Au_3 - f)^2\,dx = 15795.0104,$$

$$C^2 = 8\pi^2 \approx 78.9568$$

и, следовательно,

$$\|u_0 - u_3\|_A = \sqrt{\left(\frac{\|Au_3 - f\|^2}{C^2}\right)} < 14.15. \qquad (21.68)$$

Таблица 21.1

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
u_3x	0	0.633 1	1.0865	1.2415	1.0664	0.6130	0
Au_3	−85.41	678.33	1 138.44	1 240.82	1 094.92	707.38	73.91
$f(x)$	0	694.17	1 111.11	1 250.00	1 111.11	694.17	0

Далее,

$$\|u_3\|_A^2 = (Au_3,\ u_3) = \int_0^1 u_3 Au_3\, dx = 801.3484,$$

откуда

$$\|u_3\|_A > 28.30. \tag{21.69}$$

Таким образом, из (21.68) и (21.69) мы получаем оценку

$$\frac{\|u_0 - u_3\|_A}{\|u_3\|_A} < \frac{14.15}{28.30} = 0.5 \tag{21.70}$$

для относительной погрешности (в пространстве H_A).

Хотя оценка (21.70) и не вполне удовлетворительна с теоретической точки зрения (фактическая относительная погрешность, конечно, меньше), с практической стороны функция (21.67) — особенно если мы интерпретируем функцию $u_0(x)$ как прогиб бруса, упомянутого в начале этого примера,— вполне удовлетворительная аппроксимация искомого решения. Действительно, функция Au_3 отличается от правой части уравнения (21.50) довольно незначительно, как это явствует из рис. 11. В технических терминах это означает, что функция (21.67) представляет собой точное решение задачи (21.50)—(21.52), в которой «нагрузка» $f(x)$ заменена очень близкой нагрузкой Au_3.

2. *Метод Галёркина*

Выберем опять базис (21.56). Поскольку функции базиса принадлежат области определения данного оператора, система Галёркина совпадает с системой Ритца (21.65) и решение методом Галёркина совпадает с решением методом Ритца (21.67).

Замечание 21.3. Во всех трех рассмотренных примерах было возможно относительно просто определить коэффициенты соответствующей системы, поскольку все рассмотренные интегралы можно было вычислить с помощью первообразных (хотя нам и пришлось в третьем примере использовать некоторые специальные формулы). В общем случае эти коэффициенты, т. е. соответствующие интегралы, можно вычислить с применением численных методов (методом Симпсона и др.; см., например, [33]).

Глава 22

Краевые задачи для уравнений в частных производных второго порядка

Рассмотрим в N-мерной области G с липшицевой границей дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{N} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, \tag{22.1}$$

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x), \tag{22.2}$$

где $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ — функции, непрерывные в $\overline{G}$, $f(x)\in L_2(G)$. (Мы используем распространенные обозначения, введенные на с. 14; так, вместо $a_{ij}(x_1, \ldots, x_N)$ пишем сокращенно $a_{ij}(x)$ и т. д.)

Определение 22.1. Уравнение (22.1) называется *однородно эллиптическим в G*; соответствующий дифференциальный оператор, определяемый левой частью уравнения, также называется однородно эллиптическим в G, если существует постоянная $p>0$, не зависящая от $x\in G$ и от векторов, рассматриваемых в (22.3) и (22.4), такая что для любого вещественного вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ мы имеем при всех $x\in G$ либо

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\geqslant p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2, \tag{22.3}$$

либо

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\leqslant -p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2. \tag{22.4}$$

Таким образом, только что определенное свойство уравнения (22.1) зависит только от коэффициента при старшей производной в этом уравнении.

Пример 22.1. Уравнение Пуассона

$$-\Delta u=f, \tag{22.5}$$

где

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

(как известно, уравнение Лапласа $-\Delta u=0$ является его частным случаем), однородно эллиптическое в любой области, так как здесь

$$a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ при } j=i,\\ 0 \text{ при } j\neq i;\end{cases}$$

таким образом,

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2,$$

и достаточно положить в (22.3) $p=1$.

Пример 22.2. Уравнение

$$-\left(x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \tag{22.6}$$

однородно эллиптическое в любой области G, лежащей в правой полуплоскости $x_1>0$ на ненулевом расстоянии от оси $x_1=0$, т. е. для которой $\inf_{(x_1,\,x_2)\in G} x_1 = k > 0$; в таком случае достаточно положить $p=\min(1, k)$.

Уравнение (22.6) не обладает этим свойством в такой области G, которая лежит в полуплоскости $x_1>0$, но граница которой имеет общие точки с осью $x_1=0$, а также в области, содержащей точки с отрицательной координатой x_1.

Замечание 22.1. Если умножить (22.1) на -1, то уравнение не изменится, но его коэффициенты изменят свои знаки. Поэтому в определении 22.1 необходимо рассматривать оба случая, (22.3) и (22.4). В противном случае уравнение $-\Delta u=0$, например, было бы эллиптическим, в то время как $\Delta u=0$ не было бы, или наоборот. Конечно, если данное уравнение удовлетворяет условию (22.4), то, умножая его на -1, мы получим уравнение, удовлетворяющее условию (22.3). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только условие (22.3) (см. уравнение 22.7), так как (22.3) позволяет просто сформулировать условие, обеспечивающее положительную определенность исследуемых ниже операторов.

Рассмотрим в области G уравнение[1])

$$-\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu=f, \quad a_{ij}=a_{ji}, \tag{22.7}$$

где $f(x)\in L_2(G)$ и где функции $a_{ij}(x)$ вместе со своими первыми частными производными, равно как и функция $c(x)$, непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$. Кроме того, мы предполагаем, что в G выполняются неравенства

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \geqslant p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2, \quad p>0, \tag{22.8}$$

где p не зависит от выбора точки $x\in G$ и рассматриваемых векторов, и

$$c(x)\geqslant 0. \tag{22.9}$$

[1]) Часто говорят, что это уравнение записано в *дивергентной форме*.

Вследствие (22.8) уравнение (22.7) является однородно эллиптическим в G, так как

$$-\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=-\sum_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}-\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j},$$

так что (22.7) — уравнение типа (22.1) с коэффициентами при старших производных, удовлетворяющими (22.3).

Рассмотрим три типичных вида граничных условий для уравнения (22.7), определяющих для рассматриваемого уравнения задачи Дирихле, Неймана и Ньютона соответственно:

$$u=0 \text{ на } \Gamma, \tag{22.10}$$

$$Nu=0 \text{ на } \Gamma, \tag{22.11}$$

$$Nu+\sigma u=0 \quad [\sigma(S)\geqslant\sigma_0>0] \text{ на } \Gamma, \tag{22.12}$$

где

$$Nu=\sum_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i, \tag{22.13}$$

$\nu_i=\cos(\nu, x_i)$ $(i=1, \ldots, N)$ — направляющие косинусы внешней нормали ν.

Выражение (22.13) часто называют *производной по направлению конормали.*

Для уравнения Пуассона имеем

$$a_{ij}(x)=\begin{cases}1 \text{ при } j=i,\\ 0 \text{ при } j\neq i,\end{cases} \tag{22.14}$$

так что

$$Nu=\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i=\frac{\partial u}{\partial \nu}; \tag{22.15}$$

следовательно, для этого уравнения производная по направлению конормали совпадает с производной по внешней нормали.

Граничные условия (22.10)—(22.12) аналогичны граничным условиям (19.5)—(19.7) для обыкновенного дифференциального уравнения (19.1). Решение соответствующих задач, связанных, в частности, с вопросами симметрии и положительной определенности, будет, как мы увидим, также очень схоже с приведенным в гл. 19.

Обозначим через M_1, M_2 и M_3 линеалы функций $u(x)$, непрерывных вместе со своими первыми и вторыми частными производными в $\bar{G}$ и удовлетворяющих соответственно условиям (22.10), (22.11) или (22.12). (Каждое из этих множеств плотно в $L_2(G)$; см. теорему 8.6 и замечание 8.5.) Пусть A_1, A_2 и A_3 — операторы, определенные в M_1, M_2 и M_3 соответственно следующей форму-

лой, одинаковой для всех $k=1, 2, 3$:

$$A_k u = -\sum_{i,\, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu \quad (a_{ij}=a_{ji}), \quad k=1, 2, 3. \quad (22.16)$$

Покажем сначала, что каждый из этих операторов симметричен в соответствующем множестве независимо от того, удовлетворяют ли коэффициенты a_{ij} предположению (22.8), коэффициент c — предположению (22.9), а функция σ — предположению (22.12).

Начнем с того, что вспомним формулу (8.31), которую теперь перепишем в виде

$$\int_G \frac{\partial g_1}{\partial x_i} g_2\, dx = \int_\Gamma g_1 g_2 \nu_i\, dS - \int_G g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_i}\, dx. \quad (22.17)$$

Если в этой формуле положить

$$g_1 = -a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad g_2 = v$$

(при рассмотренных предположениях это можно сделать для любых $u \in M_k$, $v \in M_k$, $k=1, 2, 3$) и просуммировать по $i, j=1, \ldots, N$, то получится

$$-\int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) v\, dx = -\int_\Gamma \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i v\, dS + \int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx =$$

$$= -\int_\Gamma Nu \cdot v\, dS + \int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx. \quad (22.18)$$

В частных случаях для пар функций u, v, которые принадлежат рассматриваемым множествам и удовлетворяют поэтому условиям (22.10), или (22.11), или (22.12), мы получим соответственно

$$(A_1 u, v) = \int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_G cuv\, dx, \quad (22.19)$$

или

$$(A_2 u, v) = \int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx + \int_G cuv dx, \quad (22.20)$$

или

$$(A_3 u, v) = \int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_G cuv\, dx + \int_\Gamma \sigma uv\, dS. \quad (22.21)$$

Так как $a_{ij}=a_{ji}$, согласно (22.7), мы получим во всех трех случаях симметричные выражения по u и v, что и доказывает симметричность операторов A_1, A_2, A_3 на соответствующих линеалах.

Положительная определенность:

1. *Граничное условие Дирихле*

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{22.22}$$

Согласно (22.19), в этом случае

$$(A_1u,\ u)=\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx. \tag{22.23}$$

Однако (22.8) и (22.9) означают, что

$$\sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\geqslant p\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \text{ в } G. \tag{22.24}$$

В то же время, согласно неравенству Фридрихса (8.1),

$$\|u\|^2=\int\limits_G u^2\,dx\leqslant c_1\int\limits_G\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx,\quad c_1>0, \tag{22.25}$$

так как $u=0$ на Γ. (В частности, при $N=2$ для c_1 можно использовать оценки (18.46).)

Из формул (22.23)—(22.25) далее следует

$$(A_1u,\ u)=\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx\geqslant p\int\limits_G\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\geqslant\frac{p}{c_1}\|u\|^2, \tag{22.26}$$

что доказывает положительную определенность оператора A_1 на линеале M_1. Следовательно, задача (22.7) с граничными условиями (22.22) может быть приближенно решена с помощью методов, изложенных в гл. 12—15. Обобщенное решение u_0 минимизирует в соответствующем пространстве H_{A_1} функционал

$$F_1u=\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx-2\int\limits_G fu\,dx. \tag{22.27}$$

Прежде чем рассматривать случай граничных условий (22.11), исследуем условия (22.12).

2. *Граничные условия Ньютона*

$$Nu+\sigma u=0 \text{ на } \Gamma\quad \sigma(S)\geqslant\sigma_0>0. \tag{22.28}$$

Согласно (22.21) и (22.8), (22.9), (22.28), имеем

$$(A_2u,\ u)=\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2dx+$$

$$+\int\limits_\Gamma \sigma u^2\,dS\geqslant p\int\limits_G\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx+\sigma_0\int\limits_\Gamma u^2\,dS. \tag{22.29}$$

Неравенство Фридрихса (18.1)

$$\|u\|^2 = \int_G u^2\,dx \leqslant c_1 \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2\,dS \qquad (22.30)$$

тогда дает

$$(A_3 u,\ u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \quad C > 0, \qquad (22.31)$$

где

$$C^2 = \min\left(\frac{p}{c_1}, \frac{\sigma_0}{c_2}\right). \qquad (22.32)$$

Таким образом, положительная определенность оператора A_3 на линеале M_3 доказана. В частности, в случае $N=2$ для чисел c_1 и c_2 в (22.32) можно выбрать оценки (18.37) или (18.39).

Следовательно, можно найти приближенное решение задачи (22.7), (22.28), применяя методы, описанные в гл. 12—15. Обобщенное решение этой задачи минимизирует в соответствующем пространстве H_{A_3} функционал

$$F_3 u = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int_G cu^2\,dx + \int_\Gamma \sigma u^2\,dS - 2\int_G fu\,dx. \qquad (22.33)$$

Так как условие (22.28) неустойчиво (см. замечание 19.5), не обязательно (хотя это и удобно) выбирать базис в H_{A_3} так, чтобы его элементы удовлетворяли (22.28). См. также гл. 25.

3. *Граничные условия Неймана*

$$Nu = 0. \qquad (22.34)$$

В этом случае можно почти дословно повторить анализ, проведенный в гл. 19 для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями $u'(a)=0$, $u'(b)=0$. Из (22.20) имеем

$$(A_2 u,\ u) = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int_G cu^2\,dx. \qquad (22\ 35)$$

Согласно дополнительному предположению, заключающемуся в том, что

$$c(x) \geqslant c_0 > 0 \text{ в } \overline{G}, \qquad (22.36)$$

из (22.35) и (22.8) следует, что

$$(A_2 u,\ u) \geqslant p \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + c_0 \int_G u^2 dx \geqslant c_0 \|u\|^2. \qquad (22.37)$$

Таким образом, в соответствии с этим предположением оператор A_2 положительно определен, и опять можно применять мето-

ды из гл. 12—15. Соответствующий функционал — это

$$Fu_2=\int\limits_G \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx-2\int\limits_G fu\,dx. \qquad (22.38)$$

Так как условие $Nu=0$ неустойчиво (замечание 19.5), его можно не учитывать при выборе базисных функций.

Замечание 22.2. К такому же выводу и к такому же функционалу (22.38) можно прийти при более общем предположении, что функция $c(x)$ непрерывна и неотрицательна в $\overline{G}$ и что $c(x)>0$ выполняется хотя бы в одной точке $x_0\in\overline{G}$ подобно тому, как это было сделано в замечании 19.3. Это утверждение следует после рассуждений, аналогичных приведенным в указанном замечании, из неравенства

$$\|u\|^2\leqslant\varkappa\left[\int\limits_G\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx+\int\limits_K u^2\,dx\right],\quad \varkappa>0, \qquad (22.39)$$

которое, так же как и неравенство (19.20), является частным случаем более общего неравенства, приведенного в [32]. Здесь K — N-мерный куб, лежащий в $\overline{G}$.

Если $c(x)\equiv 0$ в $\overline{G}$, оператор A_2 не является положительным на множестве M_2. В самом деле, в этом случае

$$(A_2u,\ u)=\int\limits_G\sum_{i,\,j=1}^{N}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx. \qquad (22.40)$$

Из (22.8) следует, что $(A_2u,\ u)\geqslant 0$ для любого $u\in M_2$; тем не менее из $(A_2u,\ u)=0$ не следует, что $u=0$ в M_2 (т. е. $u(x)\equiv 0$ в $\overline{G}$). В самом деле, при $u(x)\equiv\text{const}\neq 0$, согласно (22.40), мы имеем $(A_2u,\ u)=0$. Следовательно, оператор A_2 не является положительным на M_2 в этом случае (и, конечно, не является положительно определенным).

Далее, предположим, что $u\in M_2$ — решение задачи

$$A_2u=-\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f\ \text{в}\ G, \qquad (22.41)$$

$$Nu=0\ \text{на}\ \Gamma. \qquad (22.42)$$

Интегрируя (22.41) по G, с помощью простых вычислений (в (22.17) полагаем

$$g_1=-a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\quad g_2=1$$

и применяем (22.13)) получаем

$$-\int\limits_\Gamma Nu\,dS=\int\limits_G f(x)\,dx.$$

Последнее равенство вместе с (22.42) означает, что условие

$$\int_G f(x)\,dx = 0 \tag{22.43}$$

является необходимым для того, чтобы задача (22.41), (22.42) имела решение.

Рассматриваемый случай $c(x) \equiv 0$, таким образом, вполне аналогичен соответствующему случаю для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. с. 203). Соответствующая процедура решения также совершенно аналогична. Рассмотрим подпространство $\tilde{L}_2(G)$ пространства $L_2(G)$, состоящее из таких функций $L_2(G)$, для которых

$$\int_G u(x)\,dx = 0. \tag{22.44}$$

Рассмотрим в этом пространстве линеал $\tilde{M}_2$ таких функций из множества M_2, которые удовлетворяют условию (22.44). $\tilde{M}_2$—плотное множество в $\tilde{L}_2(G)$, см. замечание 8.6. Определим на $\tilde{M}_2$ оператор $\tilde{A}_2$:

$$\tilde{A}_2 u = -\sum_{i,\,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad u \in \tilde{M}_2 \tag{22.45}$$

(см. (22.16)). Точно так же, как и в соответствующем случае для оператора A_2 (см. (22.20)), придем к равенству

$$(\tilde{A}_2 u, v) = \int_G \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx, \tag{22.46}$$

которое означает в силу предположения $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ симметрию оператора $\tilde{A}_2$ на $\tilde{M}_2$.

Из (22.46) далее следует, что

$$(\tilde{A}_2 u, u) = \int_G \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx \geqslant p\int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx, \quad p > 0, \tag{22.47}$$

в соответствии с предположением (22.8).

Однако согласно неравенству Пуанкаре (18.50), для функций из $\tilde{M}_2$ (тем самым удовлетворяющих (22.47)) имеет место оценка

$$c_3\int_G \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant \int_G u^2(x)\,dx, \tag{22.48}$$

где c_3—положительная постоянная.

Например, в случае прямоугольника со сторонами l_1, l_2 можно положить

$$c_3 = \max(l_1^2,\ l_2^2) \tag{22.49}$$

(см. (18.58)). Тогда неравенства (22.47) и (22.48) означают положительную определенность оператора $\tilde{A}_2$ на линеале $\tilde{M}_2$:

$$(\tilde{A}_2 u, u) \geqslant C^2 \|u\|^2, \quad u \in \tilde{M}_2, \tag{22.50}$$

где

$$C^2 = \frac{p}{c_3}. \tag{22.51}$$

Замечание 22.3. Этот результат можно сопроводить замечанием, аналогичным замечанию на с. 204: положительная определенность оператора $\tilde{A}_2$ была доказана только для функций из множества $\tilde{M}_2$. Для существования обобщенного решения u_0 задачи (22.41), (22.42) необходимо и достаточно, чтобы правая часть f принадлежала $\tilde{L}_2(G)$, или, другими словами, удовлетворяла условию

$$\int_G f(x)\, dx = 0. \tag{22.52}$$

Таким образом, приближенное решение может быть найдено с помощью методов, описанных в гл. 12—15. Соответствующий функционал имеет вид

$$\tilde{F}_2 u = \int_G \sum_{i,\, j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx - 2 \int_G f u\, dx. \tag{22.53}$$

Напомним, что функции из пространства $H_{\tilde{A}_2}$ удовлетворяют условию (22.44); однако, вообще говоря, они не удовлетворяют неустойчивому граничному условию $Nu = 0$. При выборе базиса в $H_{\tilde{A}_2}$ это условие учитывать необязательно.

Заметим к тому же, что если $u_0 \in D_{\tilde{A}_2}$ — решение задачи

$$-\sum_{i,\, j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f \text{ в } G,$$

$$Nu = 0 \text{ на } \Gamma,$$

то любая функция вида $u_0(x) + k$, где k — произвольная постоянная, также является решением. Если решение $u_0(x)$ не принадлежит $D_{\tilde{A}_2}$, то можно рассматривать функцию $u_0(x) + k$ как решение в некотором обобщенном смысле (см. с. 205).

Смешанные граничные условия

Для уравнений в частных производных часто встречается следующий тип граничных условий. На границе Г рассматриваемой области не задаются условия единого типа (например, условие $u = 0$, или $Nu = 0$, или $Nu + \sigma u = 0$), а граница разбивается на

несколько частей (как правило, на две) $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ [1]), и на каждой из этих частей задаются граничные условия определенного типа.

Для примера рассмотрим граничные условия

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{22.54}$$

$$Nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2. \tag{22.55}$$

Обозначим через M линеал функций, непрерывных в $\bar{G}$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющих условиям (22.54), (22.55). Согласно замечанию 8.5, этот линеал плотен в $L_2(G)$. Обозначим через A оператор, определенный в M выражением

$$Au = -\sum_{i,\ j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu, \tag{22.56}$$

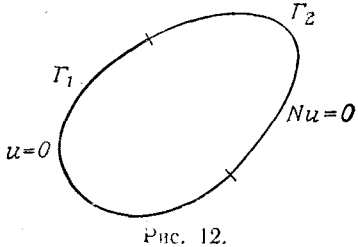

Рис. 12.

где функции $a_{ij} = a_{ji}$ и c удовлетворяют сформулированным выше условиям гладкости и условиям (22.8), (22.9). Применяя обычным образом теорему Грина (см. (22.17)), получим уравнение (22.18). Если $u \in M$, $v \in M$, то получим

$$\int_{\Gamma} Nu \cdot v\, dS = \int_{\Gamma_1} Nu \cdot v\, dS + \int_{\Gamma_2} Nu \cdot v\, dS = 0, \tag{22.57}$$

так как первый интеграл в правой части (22.57) равен нулю согласно (22.54), а второй — согласно (22.55). Следовательно,

$$(Au,\ v) = \int_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx + \int_G cuv\,dx, \quad u \in M,\ v \in M, \tag{22.58}$$

откуда (ввиду предположения $a_{ij} = a_{ji}$) немедленно следует симметрия оператора A на линеале M.

Далее из (22.58) и из (22.8), (22.9) следует, что

$$(Au,\ u) \geqslant p \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \tag{22.59}$$

(аналогично тому, как это было раньше).

Здесь мы должны сослаться на неравенство (30.6), согласно которому существует постоянная $c > 0$, зависящая только от дан-

[1]) Под частями понимаются куски границы, имеющие размерность $N-1$; естественно, мы не рассматриваем случаи, когда какая-либо из частей Γ_i вырождается в точку и т. п.

ной области, такая что для любой функции $u \in W_2^{(1)}(G)$ имеем

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant c\left[\int_{\Gamma_1} u^2\,dS + \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]. \tag{22.60}$$

Но, как будет показано в гл. 29, имеет место равенство

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} = \int_G u^2\,dx + \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx,$$

и тем самым, согласно (22.60), заведомо

$$\|u\|^2 \leqslant c\left[\int_{\Gamma_1} u^2\,dS + \int_G \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx\right]. \tag{22.61}$$

Более того, для каждого $u \in M$ мы имеем $u \in W_2^{(1)}(G)$. Далее, так как $u = 0$ на Γ_1, первый интеграл в правой части (22.61) равен нулю и из (22.59), (22.61) поэтому следует, что

$$(Au,\ u) \geqslant \frac{p}{c}\|u\|^2. \tag{22.62}$$

Последнее неравенство доказывает как положительную определенность оператора A на линеале M, так и применимость приближенных методов, разработанных в гл. 12—15, для решения рассматриваемой задачи. В соответствующем пространстве H_A обобщенное решение минимизирует функционал

$$Fu = \int_G \sum_{i=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int_G cu^2\,dx - 2\int_G fu\,dx. \tag{22.63}$$

Вообще говоря, функции этого пространства не удовлетворяют граничным условиям (22.55); таким образом, при выборе базиса в H_A не нужно принимать это условие во внимание.

Аналогично можно показать, что оператор, определенный равенством (22.56) на линеале функций, непрерывных в $\overline{G}$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющих условиям

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad Nu + \sigma u = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{22.64}$$

или

$$Nu = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad Nu + \sigma u = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{22.65}$$

(где Γ_1, Γ_2 имеют смысл, аналогичный (22.54), (22.55)), положительно определен на этом множестве при условии $a_{ij} = a_{ji}$ и выполнении (22.8), (22.9) и (22.12). Даже и в этих случаях можно применять методы, введенные в гл. 12—16. В обоих случаях

соответствующие обобщенные решения минимизируют функционал

$$Fu=\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx+\int\limits_{\Gamma_2}\sigma u^2\,dS-2\int\limits_G fu\,dx \quad (22.66)$$

(конечно, в соответствующем пространстве H_A). В случае условий (22.64) функции из H_A не удовлетворяют неустойчивому условию $Nu+\sigma u=0$ на Γ_2; в случае же условий (22.56) вообще ни одно из этих условий не выполняется. Таким образом, при выборе базиса необходимо удовлетворить только условию $u=0$ на Γ_1.

Аналогичные результаты могут быть получены в случае, когда граница Γ разделена более чем на две части с различными условиями на границе[1]).

Замечание 22.4. *(Неоднородные граничные условия.)* В случае неоднородных граничных условий

$$u=g(S) \text{ на } \Gamma, \quad (22.67)$$

или

$$Nu=h(S) \quad \text{на } \Gamma, \quad (22.68)$$

или

$$Nu+\sigma u=k(S) \quad \text{на } \Gamma \quad (22.69)$$

необходимо минимизировать вместо функционала (22.27), или (22.38), или (22.33) соответственно следующие функционалы (подробнее см. гл. 34 и 35; также см. таблицу функционалов в конце книги):

$$\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx-2\int\limits_G fu\,dx, \quad (22.70)$$

или

$$\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx-2\int\limits_G fu\,dx-2\int\limits_\Gamma hu\,dS, \quad (22.71)$$

или

$$\int\limits_G \sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx+\int\limits_G cu^2\,dx+\int\limits_\Gamma \sigma u^2\,dS-2\int\limits_G fu\,dx-2\int\limits_\Gamma ku\,dS. \quad (22.72)$$

Эти функционалы должны быть минимизированы на классе достаточно гладких функций (функций из пространства $W_2^{(1)}(G)$ — в терминах гл. 29), которые удовлетворяют (в общем случае в смысле теории следов, см. гл. 30) заданным устойчивым граничным усло-

[1]) Таким образом, единственным случаем, в котором возникают «трудности», касающиеся положительной определенности, является случай граничных условий Неймана $Nu=0$ на всей границе, рассмотренный на с. 261—264.

виям (т. е. в случае функционала (22.70) только граничному условию (22.67), все остальные граничные условия неустойчивы). Если заданы граничные условия (22.68), то в случае, когда $c(x) \equiv 0$, мы минимизируем функционал (22.71) на множестве функций из пространства $H_{\tilde{A}_2}$ (которые поэтому удовлетворяют условию $\int_G u\,dx = 0$). Заметим, что в этом случае задача имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\int_G f\,dx + \int_\Gamma h\,dS = 0. \tag{22.73}$$

Функционалы (22.27), (22.38) или (22.53) и (22.33) — это, конечно, частные случаи функционалов (22.70), (22.71), (22.72).

В случае смешанных граничных условий можно получить похожие результаты. Например, в случае граничных условий

$$u = g(S) \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{22.74}$$

$$Nu + \sigma u = h(S) \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \tag{22.75}$$

мы минимизируем функционал

$$\int_G \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int_G cu^2\,dx + \int_{\Gamma_2} \sigma u^2\,dS - 2\int_G fu\,dx - 2\int_{\Gamma_2} hu\,dS \tag{22.76}$$

на классе функций, удовлетворяющих условию $u = g(S)$ на Γ_1.

Замечание 22.5. Для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ имеет место равенство

$$\int_G \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx,$$

$$c(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad Nu = \frac{\partial u}{\partial \nu};$$

см. (22.15). Следовательно, граничные условия трех основных типов в этом случае будут иметь следующий вид:

$$u = g(S) \text{ на } \Gamma, \tag{22.77}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(S) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{22.78}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = k(S) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{22.79}$$

и соответствующие функционалы упрощаются.

Например, функционал (22.72), соответствующий функционалу (22.79), примет вид

$$\int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Gamma \sigma u^2\, dS - 2\int_G fu\, dx - 2\int_\Gamma ku\, dS. \qquad (22.80)$$

Глава 23

Бигармонический оператор. (Уравнения пластин и оболочек)

В этой главе мы подробнее рассмотрим только бигармонический оператор по двум переменным. Более общие случаи операторов четвертой и более высоких степеней будут обсуждаться в ч. IV настоящей книги.

Рассмотрим линеал M, элементами которого являются функции $u(x_1, x_2)$, непрерывные вместе со своими производными до четвертого порядка включительно в замкнутой области $\overline{G}$.

По причинам, которые скоро станут понятны, запишем бигармонический оператор

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4},$$

действующий на функцию $u \in M$, в виде

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}. \qquad (23.1)$$

Возьмем произвольную функцию $v \in M$ и рассмотрим скалярное произведение

$$(\Delta^2 u,\ v). \qquad (23.2)$$

Исследование этого скалярного произведения естественным образом приводит к ряду полезных следствий, в частности, к удобной формулировке граничных условий, встречающихся в теории пластин, и т. д. Конечно, соответствующие вычисления будут здесь более трудоемкими, чем для операторов второго порядка, исследованных в предыдущей главе.

Подставим (23.1) в (23.2) и рассмотрим сначала скалярное произведение

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4},\ v\right) = \int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} v\, dx. \qquad (23.3)$$

Применяя уже знакомую формулу (8.31)

$$\int_G \frac{\partial g_1}{\partial x_l} g_2\, dx = \int_\Gamma g_1 g_2 \nu_l\, dS - \int_G g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_l}\, dx, \qquad (23.4)$$

где ν_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали, получим [1])

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} v\,dx = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} v\nu_1\,ds - \int_G \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx. \tag{23.5}$$

Согласно (23.4), имеем далее

$$-\int_G \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx = -\int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1\,ds + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\,dx. \tag{23.6}$$

Соотношения (23.5) и (23.6) дают

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} v\,dx = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} v\nu_1\,ds - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1\,ds + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\,dx. \tag{23.7}$$

Аналогично получаем

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} v\,dx =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2} v\nu_1\,ds - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_2 ds + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx, \tag{23.8}$$

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} v\,dx =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1} v\nu_2\,ds - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_1\,ds + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx \text{ [2])}, \tag{23.9}$$

$$\int_G \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} v\,dx = \int_\Gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} v\nu_2\,ds - \int_\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2\,ds + \int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\,dx. \tag{23.10}$$

Прежде всего преобразуем интеграл по границе Г. Имеем

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_1\,\partial x_2}\nu_1 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\nu_2\right) v\,ds =$$

$$= \int_\Gamma v\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u)\nu_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta u)\nu_2\right] ds = \int_\Gamma v\frac{\partial}{\partial \nu}\Delta u\,dt. \tag{23.11}$$

---

[1]) Пишем ds, а не dS, так как рассматривается случай двух переменных; таким образом, ds — дифференциал дуги границы. Если область G односвязная, так что границей ее является одна замкнутая кривая c длины l, то некоторую точку P можно выбрать в качестве начальной и записать $\int_\Gamma g(s)\,ds$ в виде $\int_0^l g(s)\,ds$. В случае многосвязной области интеграл вдоль границы Г может быть записан в виде суммы подобных интегралов.

[2]) Мы использовали здесь предположения, касающиеся функций u и v и записали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_2\,\partial x_1} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, сумма первых интегралов в правых частях (23.7)—(23.10) выражается относительно просто. Преобразуем сумму вторых интегралов в правых частях этих равенств. Из известных соотношений (рис. 13)

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_1 \quad (23.12)$$

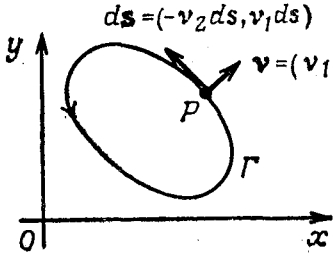

Рис. 13.

после простых вычислений следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\nu_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\nu_1. \quad (23.13)$$

Применяя эти формулы, получим для суммы вторых интегралов в правых частях равенств (23.7)—(23.10) выражение

$$-\int_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\nu_2\right) ds =$$
$$= -\int_\Gamma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\nu_2\right)\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_1 - \frac{\partial v}{\partial s}\nu_2\right)\nu_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\nu_1\right)\nu_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_2 + \frac{\partial v}{\partial s}\nu_1\right)\nu_2\right] ds =$$
$$= -\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_2^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_2^2\right) ds -$$
$$-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}\left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right] ds. \quad (23.14)$$

Во-первых, как известно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_2^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}. \quad (23.15)$$

Затем, предполагая определенную гладкость границы Γ, можно преобразовать последний интеграл в (23.14). Записывая его в виде

$$-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s} F\, ds, \quad (23.16)$$

где

$$F(s) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2, \quad (23.17)$$

и интегрируя его по частям (см. примечание 1 на с. 270), получим

$$-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s} F\, ds = -[vF] + \int_\Gamma v\frac{\partial F}{\partial s}\, ds. \quad (23.18)$$

Член в квадратных скобках равен нулю: в самом деле, интегрирование проводится по границе Γ, которая либо является замкнутой кривой, либо состоит из конечного числа таких кривых; функция vF непрерывна [1]) на Γ; поэтому, обойдя любую из этих кривых, мы вернемся в начальную точку с тем же самым значением функции. Следовательно,

$$-\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial s}F\,ds=\int_{\Gamma}v\frac{\partial F}{\partial s}\quad{}^{2}). \tag{23.19}$$

Из (23.7)—(23.10) и из (23.11), (23.14), (23.15) и (23.19) следует тогда, что для любой пары функций $u\in M$, $v\in M$

$$(\Delta^2u,\ v)=\int_{G}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}+2\,\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}\right)dx+$$
$$+\int_{\Gamma}v\left\{\frac{\partial}{\partial\nu}(\Delta u)+\frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2+\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}(\nu_1^2-\nu_2^2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right]\right\}ds-\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial\nu}\frac{\partial^2u}{\partial\nu^2}\,ds. \tag{23.20}$$

Прежде чем переходить к следствиям интегрального тождества (23.20), мы приведем обобщение этого тождества, возникающее из требования теории упругости о возможности учета постоянной Пуассона. Записывая бигармонический оператор в виде

$$\Delta^2u=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)+2\,\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right), \tag{23.21}$$

где σ — вещественное число (постоянная Пуассона), с помощью полностью аналогичного вычисления получаем тождество

$$(\Delta^2u,\ v)=\int_{G}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}\right)+2(1-\sigma)\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1\,\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}\right)\right]dx-\int_{\Gamma}v\,Nu\,ds-\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial\nu}Mu\,ds, \tag{23.22}$$

[1]) Здесь используется гладкость границы Γ. В противном случае функции $\nu_1(s)$, $\nu_2(s)$ могут не быть непрерывными на Γ. Тогда, интегрируя по частям, мы могли бы получить «точечные члены» в «угловых точках», которые в механике пластин соответствуют определенным точечным реакциям.

[2]) Если G — односвязная область и если написать интеграл $\int_{\Gamma}(\partial v/\partial s)\,F\,ds$ в виде $\int_0^l(\partial v/\partial s)\,F\,ds$, то немедленно получится результат (23.19)

$$-\int_0^l\frac{\partial v}{\partial s}F\,ds=-[vF]_0^l+\int_0^l v\frac{\partial F}{\partial s}\,ds=\int_0^l v\frac{\partial F}{\partial s}\,ds,$$

поскольку функция v, так же как и функция F, имеет одно и то же значение при $s=0$ и $s=l$. В случае многосвязной области мы можем выполнить интегрирование по частям вдоль каждой из граничных кривых в отдельности.

где

$$Nu = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right],$$

$$Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}. \tag{23.23}$$

Очевидно, что (23.20) является частным случаем (23.22) при $\sigma = 0$. Теперь рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 u = f \text{ в } G \tag{23.24}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \tag{23.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{23.26}$$

или условиями

$$u = 0, \tag{23.27}$$

$$Mu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{23.28}$$

или условиями

$$Mu = 0, \tag{23.29}$$

$$Nu = 0 \text{ на } \Gamma\ ^1). \tag{23.30}$$

Отметим, что условия (23.25), (23.26) эквивалентны условиям

$$u = 0, \tag{23.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{23.32}$$

как легко видеть из (23.12), (23.13), учитывая, что из (23.31) следует $\partial u/\partial s = 0$ на Γ.

Отметим, что для уравнения (23.24) можно задать иные граничные условия, чем (23.25)—(23.30); мы ограничились лишь наиболее часто встречающимися в приложениях.

Обозначим через M_1, M_2 и M_3 линеалы функций, непрерывных вместе со своими частными производными вплоть до четвертого порядка включительно в $\overline{G}$ и удовлетворяющих условиям (23.25), (23.26), или (23.27), (23.28), или (23.29), (23.30) соответственно; далее, обозначим через A_1, A_2 и A_3 бигармонические операторы, рассматриваемые соответственно на линеалах M_1, M_2 и M_3.

Сначала покажем, что оператор A_1 положительно определен на M_1. Таким образом, пусть $u \in M_1$, $v \in M_1$. Согласно (23.25), (23.26), $v = 0$ и $\partial v/\partial \nu = 0$ на Γ, так что оба интеграла по гра-

---

[1]) Уравнение (23.24) можно интерпретировать физически как уравнение пластины либо защемленной, либо свободно опертой, либо со свободным краем соответственно в зависимости от того, какая пара граничных условий задана. Условия для свободно опертой пластины могут быть сформулированы также и в другой форме, см., например, [27].

нице Г в (23.20) обращаются в нуль [1]), и мы получаем

$$(A_1u,\ v)=\int\limits_G\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}+2\,\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2v}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}\right)dx, \tag{23.33}$$

откуда очевидна симметрия оператора A_1 на множестве M_1. Из (23.33) следует далее, что

$$(A_1u,\ u)=\int\limits_G\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2\right]dx. \tag{23.34}$$

Используя эквивалентность условий (23.25), (23.26) и условий (23.31), (23.32), применим к функциям $\partial u/\partial x_1$ и $\partial u/\partial x_2$ неравенство Фридрихса. Ввиду (23.32)

$$\int\limits_G\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2dx\leqslant c_1\int\limits_G\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right]dx, \tag{23.35}$$

$$\int\limits_G\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2dx\leqslant c_1\int\limits_G\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2}\right)^2\right]dx \tag{23.36}$$

(где для c_1 можно использовать, скажем, оценку (18.37)). Аналогично, ввиду условия (23.31)

$$\int\limits_G u^2\,dx\leqslant c_1\int\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]dx. \tag{23.37}$$

Следовательно, из (23.35)—(23.37) вытекает, что

$$\int\limits_G u^2\,dx\leqslant c_1^2\int\limits_G\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2\right]dx, \tag{23.38}$$

т. е.

$$(A_1u,\ u)\geqslant\frac{1}{c_1^2}\|u\|^2; \tag{23.39}$$

это завершает доказательство положительной определенности оператора A_1 на множестве M_1. Таким образом, для приближенного решения задачи (23.24)—(23.26) можно использовать методы, приведенные в гл. 12—15. Обобщенное решение $u_0(x)$ рассматриваемой задачи минимизирует в соответствующем пространстве H_A функционал

$$F_1u=\int\limits_G\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2\right]dx-2\int\limits_G fu\,dx. \tag{23.40}$$

[1]) Мы можем также применить (23.22); однако и мы используем здесь более простое равенство (23.20). Заметим, что при выводе (23.20) (это же справедливо и для (23.22)) было необходимо предположение об определенной гладкости границы. Хотя наш анализ основан на формуле (23.20), это требование здесь излишне. Действительно, оно было необходимо в тексте на с. 271, где мы преобразовывали последний из интегралов (23.14) к виду (23.19). Но в данном случае из условия $v=0$ на Г следует, что $\partial v/\partial s=0$ на Г, так что этот интеграл преобразовывать не нужно, поскольку он равен нулю. То же самое в последующем будет верно для оператора A_2.

Здесь элементы базиса в H_{A_1} должны удовлетворять обоим условиям (23.25) и (23.26), поскольку они оба для бигармонического оператора являются устойчивыми [1]).

Рассмотрим теперь оператор A_2. Для этого применим интегральное тождество (23.22). Если $u \in M_2$, $u \in M_2$, то оба интеграла вдоль границы Γ в этом тождестве обращаются в нуль, так что (раскрывая скобки в первом и третьем членах правой части (23.22))

$$(A_2u,\ v) = \int_G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\right] dx, \quad (23.41)$$

откуда следует симметрия оператора A_2 на M_2. Далее,

$$(A_2u,\ u) = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 \right] dx. \quad (23.42)$$

В приложениях (особенно в теории упругости) имеет смысл рассматривать случай

$$0 \leqslant \sigma < 1. \quad (23.43)$$

Покажем, что тогда A_2 положительно определен на M_2.

Из очевидного тождества $a^2 + 2\sigma ab + b^2 - (1-\sigma)(a^2+b^2) = \sigma(a+b)^2$, справедливого для произвольных a, b и σ, следует для вещественных a, b и $\sigma \geqslant 0$, что

$$a^2 + 2\sigma ab + b^2 \geqslant (1-\sigma)(a^2+b^2). \quad (23.44)$$

Полагая здесь $a = \partial^2 u/\partial x_1^2$, $b = \partial^2 u/\partial x_2^2$, получаем, согласно (23.42),

$$(A_2u,\ u) \geqslant (1-\sigma)\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 \right] dx. \quad (23.45)$$

Так как выполняется условие (23.27), применение теоремы Грина дает

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_1}\,dx = \int_\Gamma u\,dx_2 = 0,$$
$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx = -\int_\Gamma u\,dx_1 = 0.$$

[1]) Можно показать, что последовательность Ритца или любая другая минимизирующая последовательность сходится к $u_0(x)$ равномерно в $\overline{G}$. См., например, [27]. Этот результат является частным случаем так называемых теорем Соболева о вложении. См. также гл. 46.

Применяя неравенство Пуанкаре (18.51) к функциям $\partial u/\partial x_1$, $\partial u/\partial x_2$, получаем

$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx \leqslant c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] dx, \tag{23.46}$$

$$\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \leqslant c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx \tag{23.47}$$

(где, например, в случае, когда G — прямоугольник, можно использовать оценку (18.58) для постоянной c_3). К функции u мы применяем тогда, как и выше, неравенство Фридрихса, которое ввиду условия (23.27) опять-таки имеет форму (23.37). Отсюда и из (23.46), (23.47)

$$\int_G u^2\, dx \leqslant c_1 c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx,$$

или, в другой форме,

$$(A_2 u,\ u) \geqslant \frac{1-\sigma}{c_1 c_3} \|u\|^2. \tag{23.48}$$

Это доказывает в силу предположения $0 \leqslant \sigma < 1$ положительную определенность оператора A_2 на M_2 и тем самым также применимость методов, приведенных в гл. 12—15, к приближенному решению задачи (23.24), (23.27), (23.28). Обобщенное решение $u_0(x)$ этой задачи минимизирует в соответствующем пространстве H_{A_2} функционал

$$F_2 u = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] dx - \\ - 2\int_G f u\, dx. \tag{23.49}$$

Не все функции из H_{A_2} удовлетворяют неустойчивому условию (23.28); выбирая базис в H_{A_2}, нам это условие учитывать не нужно.

Что касается уравнения (23.24) с граничными условиями (23.29), (23.30), мы оставляем вопросы разрешимости этой задачи (соответствующей задаче Неймана для уравнения Пуассона) до гл. 35.

Замечание 23.1. Если область G представляет собой прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям, то в случае граничного условия $u = 0$ на Γ функционалы (23.40) и (23.49) совпадают, так как

$$\int_G \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\, dx = \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 dx.$$

Действительно, это равенство следует в рассматриваемом случае из теоремы Грина, по которой

$$\int\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] dx = \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 \right);$$

последний интеграл равен нулю, поскольку $u = 0$ на Γ, и, таким образом, $\partial^2 u / \partial x_1^2$ и $\partial u / \partial x_2$ равны нулю на сторонах прямоугольника, параллельных оси x_1 и оси x_2 соответственно. Следовательно, функционалы (23.40) и (23.49) в рассматриваемом случае имеют одинаковый вид. Этот результат можно обобщить, см. [27].

Замечание 23.2. Так же как и в случае уравнений второго порядка, здесь встречаются смешанные граничные условия. Например, условия (23.25), (23.26) могут быть заданы на части Γ_1 границы, а на части Γ_2 — условия (23.27), (23.28). Здесь можно сделать заключение, почти буквально аналогичное заключению гл. 22: для трех рассмотренных типов граничных условий (если условия (23.29), (23.30) не заданы на всей границе; этот случай представляет собой исключение) может быть установлена положительная определенность бигармонического оператора на соответствующем линеале функций, удовлетворяющих этим смешанным граничным условиям. См. также гл. 34, 35.

Замечание 23.3. *(Неоднородные граничные условия.)* Как известно, задачи об оболочках сводятся к решению бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{23.50}$$

(уравнение для *функции Эри*) с неоднородными граничными условиями. Например, *первая задача плоской теории упругости* приводит к решению уравнения (23.50) с граничными условиями

$$u = g_1(s) \quad \text{на } \Gamma, \tag{23.51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2(s) \quad \text{на } \Gamma \tag{23.52}$$

(подробности по этому вопросу см. в гл. 43). Даже в этом случае можно действовать по аналогии с предыдущей главой. Например, обобщенное решение задачи (23.50)—(23.52) можно найти как функцию, минимизирующую функционал (23.40) (с $f(x) \equiv 0$),

$$\int\limits_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx \tag{23.53}$$

в классе достаточно гладких функций, удовлетворяющих данным (устойчивым) граничным условиям (23.51), (23.52)[1]. (См. гл. 34.)

[1]) Точнее, в терминах гл. 29 и 30, рассматриваются функции из пространства $W_2^{(2)}(G)$, удовлетворяющие условиям (23.51), (23.52) в смысле теории следов.

Как мы знаем, эта задача на практике означает поиск приближенного решения $u_n(x)$ в виде

$$u_n(x) = w(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{23.54}$$

где $w(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям (23.51), (23.52); $\varphi_k(x)$ — функции базиса в пространстве H_{A_1}, которые удовлетворяют однородным граничным условиям (23.25), (23.26), а постоянные a_k, $k=1, \ldots, n$, определяются из условий минимальности функционала (23.53) при этих постоянных. В этом случае задача нахождения (достаточно гладкой) функции $w(x)$, удовлетворяющей обоим граничным условиям, вообще говоря, не проста[1]). Поэтому в гл. 43 будет приведен еще один метод решения задачи (23.50)—(23.52) («метод наименьших квадратов на границе»), который не требует предварительного нахождения функции $w(x)$ и который предпочтителен также и по другим причинам.

Глава 24

Операторы математической теории упругости

В настоящей главе мы будем иметь дело с линейной математической теорией упругости, в которой соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций линейные, и рассматриваются только малые деформации.

Кратко изложим некоторые известные положения этой теории.

Пусть тело G — ограниченная (в общем случае многосвязная) область с липшицевой границей в трехмерном пространстве E_3. Обозначим через

$$\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3) \tag{24.1}$$

вектор перемещения (компоненты которого являются функциями переменных x_1, x_2, x_3 в G) и через ε_{ik} — *компоненты тензора деформации* (кратко — *компоненты деформации*), определенные соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_{ik} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad i, k = 1, 2, 3, \quad i \neq k. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Очевидно, что $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ для каждой пары индексов $1 \leqslant i, k \leqslant 3$ [2]).

[1]) Более того, если мы не хотим налагать на функции $g_1(s)$, $g_2(s)$ довольно жесткие ограничения, которые не позволят нам рассмотреть достаточно общую нагрузку на границе оболочки, функция $w \in W_2^{(2)}(G)$, удовлетворяющая (23.51), (23.52), может вообще не существовать. См. гл. 43.

[2]) Конечно, для обозначения переменных часто используются символы x,

Обозначим компоненты *тензора напряжений* через σ_{ik} ($\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$)[1]. Соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций задаются *обобщенным законом Гука*

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=a_{11}\varepsilon_{11}+a_{12}\varepsilon_{22}+a_{13}\varepsilon_{33}+a_{14}\varepsilon_{12}+a_{15}\varepsilon_{13}+a_{16}\varepsilon_{23},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_{23}&=a_{61}\varepsilon_{11}+a_{62}\varepsilon_{22}+a_{63}\varepsilon_{33}+a_{64}\varepsilon_{12}+a_{65}\varepsilon_{13}+a_{66}\varepsilon_{23},\end{aligned}\tag{24.4}$$

где $a_{ik}=a_{ki}$ (так что матрица коэффициентов обобщенного закона Гука симметрична)[2].

Замечание 24.1. В общем случае коэффициенты a_{ik} являются функциями переменных x_1, x_2, x_3, т. е. $a_{ik}=a_{ik}(x)$. Если тело однородно, то a_{ik} постоянны в G.

Если тело изотропно, то (24.4) приводятся к виду

$$\begin{aligned}&\sigma_{ii}=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{ii},\quad i=1,\ 2,\ 3,\\ &\sigma_{ik}=\mu\varepsilon_{ik},\quad i,\ k=1,\ 2,\ 3,\quad i\neq k,\end{aligned}\tag{24.5}$$

где $\theta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$[3], а $\lambda\geqslant 0$ и $\mu>0$ — *коэффициенты Ламе*. Если тело однородно, то λ и μ постоянны (постоянные Ламе). Эти постоянные связаны с модулем упругости E и коэффициентом

---

y, z вместо x_1, x_2, x_3. Тогда вместо ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{13}, ε_{22} мы обычно будем писать ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy} γ_{xz}, γ_{yz}; при этом

$$\varepsilon_x=\partial u_1/\partial x,\qquad \gamma_{xy}=\partial u_1/\partial y+\partial u_2/\partial x\tag{24.3}$$

и т. д.

В литературе нет единства в определении функции ε_{ik} ($i\neq k$) или γ_{xy}, ... Некоторые авторы определяют

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\quad\left(\text{т. е. }\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\text{ и т. д.}\right).$$

Конечно, в этом случае коэффициенты обобщенного закона Гука (24.4) должны быть соответствующим образом изменены. Например, в случае изотропного тела второе уравнение в (24.5) должно быть заменено на уравнение $\sigma_{ik}=2\mu\varepsilon_{ik}$ при $i\neq k$.

[1]) Вместо σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{23} часто используются обозначения σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}.

[2]) В других обозначениях $\sigma_x=a_{11}\varepsilon_x+a_{12}\varepsilon_y+a_{13}\varepsilon_z+a_{14}\gamma_{xy}+a_{15}\gamma_{xz}+a_{16}\gamma_{yz}$ и т. д.

Обобщенный закон Гука можно записать в следующем компактном виде:

$$\sigma_{ik}=\sum_{l,\,m=1}^{3}c_{iklm}\varepsilon_{lm},\qquad i=1,\ 2,\ 3,\qquad k=1,\ 2,\ 3,$$

где $c_{iklm}=c_{lmik}=c_{kilm}$. Эта симметрия тензора c_{iklm} означает, что максимальное число независимых компонент тензора равняется 21, что согласуется (ввиду соотношения $a_{ik}=a_{ki}$) с максимальным числом независимых коэффициентов a_{ik} в (24.4).

[3]) В классических обозначениях

$$\sigma_x=\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+2\mu\varepsilon_x,\quad \tau_{xy}=\mu\gamma_{xy}\text{ и т. д.}$$

Пуассона σ соотношениями

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

Однако в этой главе нам не потребуются ни предположение об изотропии, ни предположение об однородности данного тела.

Рассмотрим в области G два вектора перемещений $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, и пусть $\varepsilon_{ik}(\mathbf{u})$ — компоненты тензора деформации, соответствующего вектору $\mathbf{u}$, $\sigma_{ik}(\mathbf{v})$ — компоненты тензора напряжений, соответствующего вектору $\mathbf{v}$. Таким образом, $\varepsilon_{11}(\mathbf{u}) = \partial u_1/\partial x_1$ и т. д.,

$$\sigma_{11}(\mathbf{v}) = a_{11}\varepsilon_{11}(\mathbf{v}) + \ldots + a_{16}\varepsilon_{23}(\mathbf{v}) = a_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{16}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)$$

и т. д. Обозначим

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{11}(\mathbf{u})\sigma_{11}(\mathbf{v}) + \ldots + \varepsilon_{23}(\mathbf{u})\sigma_{23}(\mathbf{v})\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left[a_{11}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{16}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right] + \ldots\right. \\ &\left. \ldots + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\left[a_{61}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + a_{66}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{24.6}$$

Ввиду симметрии коэффициентов a_{ik} очевидно, что

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = W(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{24.7}$$

Заменяя $\mathbf{v}$ на $\mathbf{u}$ в правой части (24.6), получим функцию $W(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, которая в теории упругости обычно коротко обозначается через $W(\mathbf{u})$: $W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = W(\mathbf{u})$. Таким образом, в сокращенной записи

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}\sigma_1 + \ldots + \varepsilon_{23}\sigma_{23}).$$

Функция $W(\mathbf{u})$ получила название *упругого потенциала единичного объема*. Упругий потенциал тела G задается интегралом

$$\int_G W(\mathbf{u})\,dx.$$

В частности, в случае изотропного тела в соответствии с (24.5)

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{11}(\mathbf{u})\left[\lambda\theta(\mathbf{u}) + 2\mu\varepsilon_{11}(\mathbf{u})\right] + \ldots + \varepsilon_{23}(\mathbf{u})\mu\varepsilon_{23}(\mathbf{u})\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\lambda\theta^2(\mathbf{u}) + 2\mu\left[\varepsilon_{11}^2(\mathbf{u}) + \varepsilon_{22}^2(\mathbf{u}) + \varepsilon_{33}^2(\mathbf{u})\right] + \right. \\ &\left. + \mu\left[\varepsilon_{12}^2(\mathbf{u}) + \varepsilon_{13}^2(\mathbf{u}) + \varepsilon_{23}^2(\mathbf{u})\right]\right\}. \end{aligned} \tag{24.8}$$

В теории упругости хорошо известно, что $W(\mathbf{u})$ — положительно определенная квадратичная форма компонент деформации ε_{ik}, т. е. что можно найти постоянную $k > 0$, такую что в $\bar{G}$

$$W(\mathbf{u}) \geqslant k \sum_{i,\,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2. \tag{24.9}$$

(В случае изотропного тела приведенное утверждение прямо следует из (24.8): если μ постоянна в области G, то достаточно положить, например, $k=\mu/2$; если $\mu(x)$ непрерывна (и положительна) в $\bar{G}$, достаточно взять $k=(1/2)\min_{x\in\bar{G}}\mu(x)$.)

Функции $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и $W(\mathbf{u})$ будут играть важную роль в наших дальнейших рассмотрениях.

Обозначим далее через

$$\mathbf{f}=(f_1, f_2, f_3) \tag{24.10}$$

вектор объемных сил (возникающих за счет наличия массы) в теле G. Интеграл

$$\int_G W(\mathbf{u})\,dx-\int_G \mathbf{fu}\,dx, \tag{24.11}$$

где $\mathbf{fu}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{f}$ и $\mathbf{u}$, представляет собой в случае однородных граничных условий *общую потенциальную энергию деформации* данного тела.

Если считать вектор $\mathbf{f}$ заданным, то компоненты тензора напряжений должны подчиняться в G *уравнениям равновесия*

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+f_i=0, \quad i=1, 2, 3. \tag{24.12}$$

Выписывая подробно эти уравнения (умноженные на -1) с компонентами f_i в правой части, получим

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}\right)&=f_1,\\
-\left(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}\right)&=f_2,\\
-\left(\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}\right)&=f_3.
\end{aligned} \tag{24.13}$$

Естественно, можно вместо σ_{21} писать σ_{12} и т. д. Правые части уравнений (24.13) — это координаты вектора $\mathbf{f}$. Следовательно, в левых частях стоят также координаты некоторого вектора. Обозначим этот вектор $A\mathbf{u}$. В самом деле, мы можем подставить в (24.13) вместо σ_{ik} его выражение из обобщенного закона Гука (24.4). При этом левые части рассматриваемых уравнений становятся некоторыми функциями компонент деформации ε_{ik}; в соответствии с (24.2) функции ε_{ik} определяются производными функции $\mathbf{u}$ или, точнее, ее компонент. Следовательно, A — дифференциальный оператор второго порядка, действующий на функцию $\mathbf{u}$. В частном случае изотропного тела оператор A имеет относительно простой вид, который может быть легко установлен:

$$A\mathbf{u}=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu\,\Delta\mathbf{u}. \tag{24.14}$$

Далее в этой главе уравнения (24.13) будем писать в сокращенной форме

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}. \tag{24.15}$$

Оператор A называется *оператором теории упругости*. Мы увидим, что этот оператор положительно определен на выбранном соответствующим образом линеале векторов, удовлетворяющих определенным граничным условиям, и что обобщенное решение уравнения $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ минимизирует в соответствующем пространстве функционал (24.11) (*«принцип минимума потенциальной энергии»*).

Вместе с уравнением (24.15) рассмотрим три типа граничных условий:

1. *Граничное условие*

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{24.16}$$

Очевидно, что оно эквивалентно условиям

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{24.17}$$

2. *Граничное условие*

$$\mathbf{t} = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{24.18}$$

Здесь $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$, $t_i = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}\nu_k$, $i = 1, 2, 3$, где, как обычно, ν_k — направляющие косинусы внешней нормали, а σ_{ik} (точнее, $\sigma_{ik}(\mathbf{u})$) — компоненты тензора напряжений, соответствующие искомому вектору $\mathbf{u}$ [1]). Подробнее, нужно писать $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ вместо $\mathbf{t}$.

3. *Граничные условия*

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{24.19}$$

$$\mathbf{t} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \tag{24.20}$$

где Γ_1 и Γ_2 ($\overline{\Gamma}_1 + \overline{\Gamma}_2 = \Gamma$) — непересекающиеся открытые части границы Γ, имеющие ненулевую размерность.

Граничные условия (24.16), или (24.18), или (24.19) и (24.20) определяют для уравнения $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ соответственно *первую*, *вторую* [2]) или *смешанную* задачу математической теории упругости. Обозначим через $\mathbf{L}_2(G)$ гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(G)} = \int_G \mathbf{u}\mathbf{v}\, dx = \int_G (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\, dx, \tag{24.21}$$

[1]) Согласно (24.18), на границе задано нулевое напряжение.

[2]) В литературе нет единой терминологии. Часто под первой задачей теории упругости понимается задача, характеризуемая условием (24.18).

элементами которого, как известно (см. примеры 6.2 и 6.8), являются векторы, компоненты которых квадратично интегрируемы в области G. Далее, обозначим через M линеал таких векторов из $\mathbf{L}_2(G)$, компоненты которых являются функциями, непрерывными вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в $\overline{G}$. Пусть M_1, M_2 и M_3 — линеалы векторов из M, удовлетворяющих соответственно условиям (24.16), (24.18) и (24.19), (24.20). Из замечания 8.5 с помощью простого рассуждения получим, что каждый из перечисленных линеалов плотен в $\mathbf{L}_2(G)$.

Далее, обозначим через A_1, A_2 и A_3 дифференциальный оператор A, рассматриваемый на линеале M_1, M_2 и M_3 соответственно.

Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два произвольных вектора из M. Применяя, как обычно, теорему Грина к скалярному произведению $(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(G)}$, т. е. к интегралу $\int_G \mathbf{v} A\mathbf{u}\, dx$, получим известное тождество Бэтти:

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(G)} = 2\int_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx - \int_\Gamma \mathbf{v}\mathbf{t}(\mathbf{u})\, dS. \qquad (24.22)$$

Более того, если векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ принадлежат M_1, M_2 или M_3, то они удовлетворяют граничным условиям (24.16), или (24.18), или (24.19), (24.20) соответственно, так что интеграл вдоль границы Γ равен нулю. Следовательно, для векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ из M_1, M_2 или M_3

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(G)} = 2\int_G W(\mathbf{u}, \mathbf{v})\, dx. \qquad (24.23)$$

Из этого тождества немедленно следует симметрия операторов A_1, A_2 и A_3 на соответствующих линеалах M_1, M_2 и M_3 ввиду (24.7).

Докажем, что A_1 положительно определен на M_1. Важным моментом в этом доказательстве является так называемое *неравенство Корна*, которое здесь приводится без доказательства:

$$\int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx \leqslant k_1 \int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\, dx, \quad \mathbf{u} \in M_1, \qquad (24.24)$$

где k_1 — положительная постоянная (не зависящая от векторов из множества M_1). Неравенство Корна является основой и для доказательства положительной определенности операторов A_2 и A_3. Его доказательство достаточно сложно, и мы отсылаем читателя к статье [19] или к монографии С. Г. Михлина [29], с. 191—202.

Из (24.23), (24.9) и (24.24) следует, что

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(G)} = 2\int_G W(\mathbf{u})\, dx \geqslant 2k \int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\, dx \geqslant \frac{2k}{k_1} \int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx. \qquad (24.25)$$

Каждый из векторов $\mathbf{u} \in M_1$ равен нулю на границе Г, так что на границе равны нулю и их компоненты, т. е. функции u_1, u_2 и u_3 (см. (24.17)). Следовательно, применяя неравенство Фридрихса (18.1) к функции u_1, получим

$$\|u_1\|^2 \leqslant c_1 \int_G \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right] dx.$$

Аналогичные неравенства выполняются для функций u_2 и u_3. Из этих неравенств из и (24.25) следует, что

$$(A_1\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(G)} \geqslant \frac{2k}{k_1 c_1} (\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2) = C^2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(G)}, \quad (24.26)$$

где $C^2 = 2k/k_1c_1$, что и доказывает положительную определенность оператора A_1 на линеале M_1.

Рассмотрим теперь оператор A_2 на линеале M_2 векторов, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{t}(\mathbf{u}) = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (24.27)$$

Это условие соответствует условию Неймана из гл. 22. Из теории упругости хорошо известно (и может быть легко проверено с помощью теоремы Грина), что в случае граничных условий (24.27) для существования решения необходимо, чтобы объемные силы $\mathbf{f}$ удовлетворяли определенным условиям, которые характеризуют статическое и моментное равновесие тела:

$$\int_G x\mathbf{f}\, d = 0, \quad \int_G \mathbf{r} \times \mathbf{f}\, dx = 0, \quad (24.28)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки x. Далее, легко можно показать, что оператор A_2 неположителен на M_2: соотношение $(A_2\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(G)} = 0$ означает в соответствии с (24.25), что

$$\varepsilon_{ik} = 0 \text{ для всех } 1 \leqslant i,\ k \leqslant 3. \quad (24.29)$$

Однако — как известно, и как следует из (24.3) — это не значит, что $\mathbf{u} = 0$. Для того чтобы вектор $\mathbf{u}$ был однозначно определен соотношениями (24.29) как нулевой вектор, достаточно, чтобы он удовлетворял условиям

$$\int_G \mathbf{u}\, dx = 0, \quad (24.30)$$

$$\int_G \mathbf{r} \times \mathbf{u}\, dx = 0. \quad (24.31)$$

Теперь можно ожидать, что дальнейшая процедура будет аналогичной той, с которой мы встречались в задаче Неймана в гл. 22. Обозначим через $\tilde{M}_2$ линеал векторов из M_2, удовлетворяющих условиям (24.30), (24.31), а через $\tilde{A}_2$ — оператор A_2, рассматри-

ваемый на $\tilde{M}_2$. Как уже отмечалось, в этом случае можно доказывать неравенство Корна:

$$\int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx \leqslant k_2 \int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\, dx, \quad \mathbf{u} \in M_2 \tag{24.32}$$

(см. [19] или [29]). Из (24.23), (24.9) и (24.32) следует тогда для $u \in \tilde{M}_2$, что

$$(A_2\mathbf{u},\ \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(G)} = 2\int_G W(\mathbf{u})\, dx \geqslant 2k \int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \varepsilon_{ik}^2\, dx \geqslant \frac{2k}{k_2} \int_G \sum_{i,\,k=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 dx. \tag{24.33}$$

Далее, поскольку вектор $\mathbf{u}$ из $\tilde{M}_2$ удовлетворяет условию (24.30), то же справедливо и для его компонент:

$$\int_G u_1\, dx = 0, \quad \int_G u_2\, dx = 0, \quad \int_G u_3\, dx = 0. \tag{24.34}$$

Вследствие первого из соотношений (24.34) неравенство Пуанкаре (18.50) дает

$$\|u_1\|^2 \leqslant c_3 \int_G \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right] dx. \tag{24.35}$$

Аналогичные неравенства справедливы для u_2 и u_3. Из этих соотношений и из (24.33) следует, что для любого вектора $\mathbf{u} \in \tilde{M}_2$

$$(A_2\mathbf{u},\ \mathbf{u})_{\mathbf{L}_2(G)} \geqslant \frac{2k}{k_2 c_3}\left(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \|u_3\|^2\right) = C^2 \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(G)}, \tag{24.36}$$

где $C^2 = 2k/k_2c_3$, т. е. выполнено условие положительной определенности оператора $\tilde{A}_2$ на линеале $\tilde{M}_2$.

Можно показать, но мы не будем на этом подробно останавливаться, что оператор A_3 положительно определен на линеале M_3, если та часть Γ_1 границы Γ, на которой задано условие $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, имеет положительную размерность (не вырождается в точку и т. п.)—а это предполагалось при формулировке задачи.

В каждом из трех рассматриваемых случаев обобщенное решение минимизирует функционал

$$2\int_G W(\mathbf{u})\, dx - 2\int_G \mathbf{f}\mathbf{u}\, dx,$$

или, что то же самое, функционал

$$\int_G W(\mathbf{u})\, dx - \int_G \mathbf{f}\mathbf{u}\, dx$$

(«*принцип минимума потенциальной энергии*»), конечно, в соответствующем пространстве. Условие $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ устойчиво для оператора теории упругости, имеющего второй порядок, так что функции из H_{A_1} удовлетворяют этому условию (более точно — в смысле теории следов, см. гл. 30). Условие $\mathbf{t}(\mathbf{u})=\mathbf{0}$ неустойчиво и векторы из $H_{\tilde{A}_2}$ в общем случае не удовлетворяют этому условию; таким образом, при выборе базиса его принимать во внимание не нужно. Однако необходимо учитывать, что векторы из $H_{\tilde{A}_2}$ подчиняются условиям (24.30), (24.31). Для векторов, принадлежащих H_{A_3}, вообще говоря, удовлетворяется только первое из условий (24.19), (24.20). Условие (24.20) не нужно принимать во внимание при выборе базиса в H_{A_3}.

Замечание 24.2. (*Неоднородные граничные условия.*) Если вместо однородных граничных условий (24.16), или (24.18), или (24.19), (24.20) заданы условия

$$\mathbf{u}=\mathbf{g}(S) \text{ на } \Gamma, \tag{24.37}$$

или

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})=\mathbf{h}(S) \text{ на } \Gamma, \tag{24.38}$$

или

$$\mathbf{u}=\mathbf{g}(S) \text{ на } \Gamma_1, \tag{24.39}$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})=\mathbf{h}(S) \text{ на } \Gamma_2, \tag{24.40}$$

то обобщенное решение рассматриваемой задачи ищется как вектор, минимизирующий функционал

$$\int\limits_G W(\mathbf{u})\,dx - \int\limits_G \mathbf{f}\mathbf{u}\,dx, \tag{24.41}$$

или

$$\int\limits_G W(\mathbf{u})\,dx - \int\limits_G \mathbf{f}\mathbf{u}\,dx - \int\limits_\Gamma \mathbf{h}\mathbf{u}\,dS, \tag{24.42}$$

или соответственно

$$\int\limits_G W(\mathbf{u})\,dx - \int\limits_G \mathbf{f}\mathbf{u}\,dx - \int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{h}\mathbf{u}\,dS \tag{24.43}$$

на классе векторов, удовлетворяющих данным устойчивым граничным условиям. Подробнее: функционал (24.41) минимизируется на классе векторов, удовлетворяющих (24.37), функционал (24.43) — на классе векторов, которые удовлетворяют (24.39). В случае (24.42) не требуется, чтобы рассматриваемые векторы удовлетворяли каким-нибудь граничным условиям, однако необходимо, чтобы они удовлетворяли условиям (24.30), (24.31). Заметим, что в случае граничных условий (24.38) необходимым и достаточным условием существования решения являются соотно-

шения

$$\int_G \mathbf{f}\, dx + \int_G \mathbf{h}\, dS = \mathbf{0}, \tag{24.44}$$

$$\int_G \mathbf{r}\times\mathbf{f}\, dx + \int_\Gamma \mathbf{r}\times\mathbf{h}\, dS = \mathbf{0} \tag{24.45}$$

(условия статического и моментного равновесия). Некоторые соображения, касающиеся численных аспектов решения задач в трехмерной математической теории упругости, можно найти, например, в [28].

Замечание 24.3. Здесь хотелось бы обратить внимание читателя на серию интересных работ И. Хлавачека (см. особенно [15], [16]), в которых обсуждаются различные вариационные принципы (как классические, так и очень современные) в математической теории упругости.

Глава 25

Выбор базиса в случае краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных

Общие принципы выбора базиса при применении метода Ритца (и не только этого метода) обсуждались в гл. 20. В этой главе мы напомним некоторые приведенные там результаты и выведем дальнейшие практически важные следствия. В частности, нас интересуют здесь операторы второго и четвертого порядков для случая двух переменных. Будут рассматриваться операторы второго порядка вида

$$Au = -\sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu, \tag{25.1}$$

где — если использовать вместо x_1, x_2 для переменных обозначения x, y — коэффициенты $a_{ij}(x, y) = a_{ji}(x, y)$ непрерывны со своими частными производными первого порядка в $\overline{G}$, $c(x, y) \geqslant 0$ — непрерывная функция в $\overline{G}$ и удовлетворяется условие (22.8) однородной эллиптичности

$$\sum_{i,\,j=1}^{2} a_{ij}(x, y)\,\xi_i\xi_j \geqslant p\,(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad p > 0. \tag{25.2}$$

Из операторов четвертого порядка больше всего нас интересует бигармонический оператор.

В гл. 20 мы обратили внимание на систему простых функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ \ldots. \tag{25.3}$$

Из гл. 5 мы уже знаем, что эта система полна в $L_2(G)$. Мы отметили, что при рассмотрении, например, задачи

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \tag{25.4}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{25.5}$$

можно показать, что функции

$$g,\ xg,\ yg,\ x^2g,\ xyg,\ y^2g,\ \ldots, \tag{25.6}$$

где $g = g(x, y)$ — достаточно гладкая функция, положительная в области G [1]) и равная нулю на ее границе, образуют базис в соответствующем пространстве H_A. Если, например, G — квадрат с круглой дыркой (рис. 14), достаточно выбрать в качестве $g(x, y)$ функцию

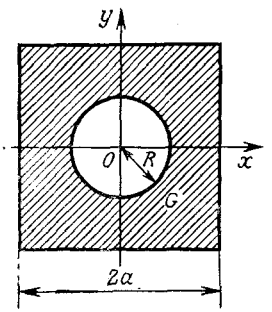

Рис. 14.

$$(a^2 - x^2)(a^2 - y^2)(x^2 + y^2 - R^2), \tag{25.7}$$

которая, очевидно, обладает всеми требуемыми свойствами [2]).

Система (25.6) образует базис в соответствующем пространстве H_A так же, как и в случае задачи $Au = f$ в G, $u = 0$ на Γ, где A — оператор (25.1).

Было отмечено, что система функций

$$g^2,\ xg^2,\ yg^2,\ x^2g^2,\ xyg^2,\ y^2g^2,\ \ldots \tag{25.8}$$

обладает аналогичным свойством в пространстве H_A, если рассматривается задача $\Delta^2 u = f$ в G, $u = 0$, $\partial u/\partial \nu = 0$ на Γ.

В случае задачи

$$\Delta^2 u = f \text{ в } G, \tag{25.9}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{25.10}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{25.11}$$

$$\partial^2 u/\partial \nu^2 = 0 \text{ на } \Gamma_2, \tag{25.12}$$

где G — полукруг, изображенный на рис. 15, а Γ_1 — верхняя полуокружность, в качестве базиса в соответствующем пространстве H_A можно выбрать систему функций (25.3), умноженных на функцию $g(x, y) = y(R^2 - x^2 - y^2)^2$. Эта функция обеспечивает выполнение

[1]) Все время рассматриваются области с липшицевой границей.

[2]) Отметим, что функция (25.7) имеет производные всех порядков в плоскости xy, а граница G не является гладкой (она содержит четыре угловые точки).

условий (25.10) и (25.11). Условие (25.12) неустойчиво, поэтому его не нужно учитывать при выборе базиса.

Преимущество систем типа (25.6), (25.8) в том, что они относительно просты и что с их помощью можно удовлетворить граничным условиям даже в случае «неприятных» многосвязных областей, например типа изображенной на рис. 14. Более того, как уже упоминалось, они образуют базис в H_A и поэтому удовлетворяют требованиям а), б), сформулированным в начале гл. 20. Нежелательным свойством этих систем является «недостаточная» ортогональность их членов в H_A и как следствие этого их слабая численная устойчивость (см. требования в) и г) на с. 226); уравнения системы Ритца тогда «почти» линейно зависимы, и необходима большая точность как при вычислении коэффициентов этой системы, так и при ее решении. Более того, требование д), т. е. условие, что $Au_n \to f$ при $n \to \infty$, в общем случае не удовлетворяется. По этой причине мы оказываем предпочтение, в частности в случае областей специального вида, системе собственных функций оператора A или некоторого простого родственного оператора (с. 235). Кроме того, мы часто используем здесь то обстоятельство, что самосопряженные расширения оператора $-\Delta u$ и оператора (25.1), положительно определенные на соответствующем линеале [1]), являются родственными операторами.

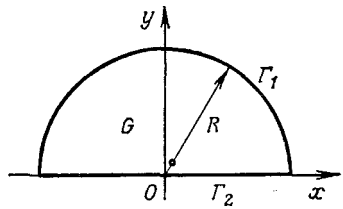

Рис. 15.

Аналогичная процедура может быть проведена для случая операторов высших порядков.

Для оператора Лапласа $-\Delta$ и граничных условий $u=0$ на Γ в случае некоторых простых областей можно без труда выписать полную систему собственных функций, ортонормированных в соответствующем пространстве $H_{-\Delta}$, и таким образом получить ввиду изложенного выше базис в пространстве H_A, соответствующем оператору (25.1) и граничным условиям $u=0$ на Γ. Если область G представляет собой круг K с центром в начале координат и радиусом R, то такую систему образуют функции

$$\varphi_{mn}(r, \varphi) = c_{mn} J_m(\gamma_{mn} r) \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{cases} \qquad (25.13)$$

$m=0, 1, 2, \ldots$, $n=0, 1, 2, \ldots$, где J_m — функция Бесселя порядка m, а γ_{mn} — положительные корни уравнения $J_m(\gamma R)=0$.

[1]) Если рассматриваются граничные условия Неймана и случай $c(x) \equiv 0$ в (25.1), то, как известно, операторы $-\Delta u$ и (25.1) положительно определены на линеале функций, не только достаточно гладких и удовлетворяющих граничным условиям Неймана, но также удовлетворяющих и условию $\int_G u\,dx = 0$.

Коэффициенты c_{mn} такие, что система (25.13) ортонормирована в $H_{-\Delta}$, т. е. $(\varphi_{mn}, \varphi_{mn})_{-\Delta} = 1$.

Если G — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, то соответствующая система имеет вид

$$\varphi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\pi \sqrt{ab}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, \ldots. \tag{25.14}$$

Прежде чем приступить к исследованию систем, соответствующих некоторым другим граничным условиям, сделаем еще одно замечание.

Замечание 25.1. Часто оказывается возможным найти такое простое и достаточно гладкое отображение области G на круг K, что оператор (25.1), положительно определенный на линеале функций, достаточно гладких в G и равных нулю на Γ, преобразуется в эллиптический оператор A с аналогичными свойствами в K. В соответствии с вышеизложенным в этом случае можно применить систему (25.13) к решению преобразованной задачи. В качестве типичного примера отметим следующую задачу:

$$-\Delta u = f \text{ в } E, \tag{25.15}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{25.16}$$

где E — эллипс с полуосями длины a и b, направленными по координатным осям x и y. Преобразование координат

$$x' = x, \quad y' = \frac{a}{b} y \tag{25.17}$$

превращает задачу (25.15), (25.16) в задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = f \text{ в } K, \tag{25.18}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma', \tag{25.19}$$

где K — круг с центром в начале координат и радиусом a, а Γ' — его граница. При рассматриваемых граничных условиях самосопряженные расширения оператора $-\Delta$ и оператора, стоящего в левой части уравнения (25.18), являются конгруэнтными родственными операторами. Поэтому для решения задачи (25.18), (25.19) методом Ритца можно использовать систему (25.13), в которой мы пишем x', y' вместо x, y и которая обеспечивает удовлетворение всех требований а)—д), сформулированных в гл. 20. Можно, конечно, действовать и таким образом: вернуться к исходным переменным и решать задачу (25.15), (25.16) в эллипсе E, используя систему (25.13), написанную сначала в координатах x', y' и преобразованную обратно к координатам x, y согласно (25.17).

Читатель может найти множество подобных примеров в книге [28], с. 179 и далее. Заметим, однако, что система (25.13) довольно сложна сама по себе, поскольку в нее входят функции Бесселя, и станет еще сложнее после рассмотренного преобразования. Поэтому, хотя в подобных случаях и гарантируется выполнение условий а)—д) из гл. 20 при применении метода Ритца, мы часто оказываем предпочтение «менее устойчивым» системам типа (25.6), (25.8), даже несмотря на то, что они требуют существенно большей точности при численных расчетах. (См. также гл. 42.)

Более просты и чаще встречаются преобразования системы (25.14). Приведем следующий простой пример (см. [5]).

Решим задачу

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \tag{25.20}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{25.21}$$

где G — параллелограмм с рис. 16. Сделаем замену переменных

$$x' = x - \frac{k}{b} y, \quad y' = y, \tag{25.22}$$

которая преобразует этот параллелограмм в прямоугольник $Q = (0, a) \times (0, b)$ с границей Γ'. Согласно (25.22), уравнение (25.20) принимает вид

$$-\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{2k}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} = f. \tag{25.23}$$

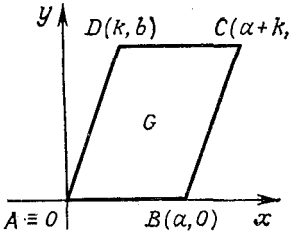

Рис. 16.

Левая часть получившегося уравнения снова представляет собой положительно определенный оператор на множестве достаточно гладких в $\overline{Q}$ функций, которые удовлетворяют условию $u = 0$ на Γ'.

Аналогично можно заключить, что выбор базиса

$$\varphi_{mn}(x', y') = c_{mn} \sin \frac{m\pi x'}{a} \sin \frac{n\pi y'}{b} \tag{25.24}$$

(где c_{mn} — коэффициенты из (25.14)) для решения уравнения (25.23) с условием $u = 0$ на Γ' по методу Ритца обеспечивает выполнение требований а)—д) из гл. 20. Вместо решения преобразованной задачи с базисом (25.24) можно, естественно, решать исходную задачу и использовать «преобразованный» базис

$$\tilde{\varphi}_{mn}(x, y) = \tilde{c}_{mn} \sin \frac{m\pi \left(x - \frac{k}{b} y\right)}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{25.25}$$

Поскольку прямоугольник и фигуры, приводимые к прямоугольнику посредством простых преобразований (типа (25.22) и

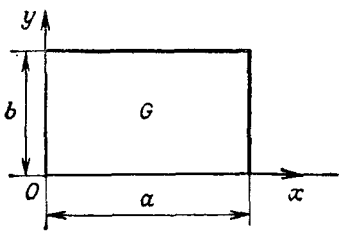

Рис. 17.

т. п.), очень часто встречаются в приложениях, мы приведем примеры соответствующих базисов для операторов второго и четвертого порядков в прямоугольнике, по крайней мере для наиболее простых граничных условий.

Выбор базиса для оператора второго порядка (вида (25.1)) *в прямоугольнике* $G=(0,\ a)\times(0,\ b)$, рис. 17.

а) *Граничные условия* $u=0$ на Γ:

$$\varphi_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad m,\ n=1,\ 2,\ \ldots{}^{1}).\qquad(25.26)$$

б) *Граничные условия* $du/d\nu=0$, или

$$(a_{11}\nu_1+a_{21}\nu_2)\frac{\partial u}{\partial x}+(a_{12}\nu_1+a_{22}\nu_2)\frac{\partial u}{\partial y}=0\ \text{на}\ \Gamma,$$

где ν_1, ν_2 — направляющие косинусы внешней нормали

$$\varphi_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+1\right)}}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\quad m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.\qquad(25.27)$$

В случае $c(x)\equiv 0$ в (25.1) первый (постоянный) член, соответствующий значениям $m=0$, $n=0$, опускается.

в) *Граничные условия* $u=0$ при $x=0$, $x=a$ (на боковых сторонах прямоугольника), $du/d\nu=0$, или

$$(a_{11}\nu_1+a_{21}\nu_2)\frac{\partial u}{\partial x}+(a_{12}\nu_1+a_{22}\nu_2)\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \text{при}\ y=0,\ y=b:$$

$$\varphi_{mn}=\frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b},\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

(25.28)

---

[1]) Постоянные множители, не зависящие от m и n, например число $2/(\pi\sqrt{ab})$ в (25.14), при выборе базисных функций можно опустить. В некоторых случаях (когда мы применяем метод исключения для решения системы Ритца, используя программирование, основанное на арифметике с плавающей точкой, или рассматривая только «небольшое» число членов базиса), можно опустить даже постоянные множители, зависящие от m и n, т. е. положить их равными единице.

Выбор базиса для бигармонического оператора в прямоугольнике $G=(-a, a)\times(-b, b)$, рис. 18.

Вообще говоря (если мы не используем особых процедур, см. примечание), рассматриваемые функции нужно отнормировать, т. е. умножить на постоянные c_{mn}, где

$$\frac{1}{c_{mn}^2}=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial x^2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi_{mn}}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy,$$

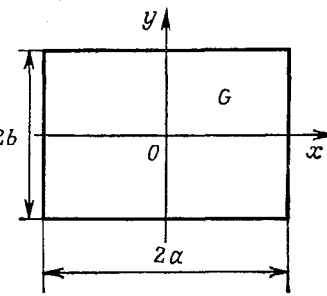

Рис. 18.

или по крайней мере на такие постоянные, которые сохраняли бы «порядок» m и n (см. с. 236), например на

$$c_{mn}=\frac{1}{m^2+n^2}.$$

г) *Граничные условия* $u=0$, $\partial u/\partial\nu=0$ на Γ:

$$\varphi_{2m,\,2n}=\left[\cos\frac{m\pi x}{a}-(-1)^m\right]\left[\cos\frac{n\pi y}{6}-(-1)^n\right],$$
$$\varphi_{2m-1,\,2n}=\left(\sin\frac{\lambda_m x}{a}-\frac{x}{a}\sin\lambda_m\right)\left[\cos\frac{n\pi y}{b}-(-1)^n\right],$$
$$\varphi_{2m,\,2n-1}=\left[\cos\frac{m\pi x}{a}-(-1)^m\right]\left(\sin\frac{\lambda_n y}{b}-\frac{y}{b}\sin\lambda_n\right),$$
$$\varphi_{2m-1,\,2n-1}=\left(\sin\frac{\lambda_m x}{a}-\frac{x}{a}\sin\lambda_m\right)\left(\sin\frac{\lambda_n y}{b}-\frac{y}{b}\sin\lambda_n\right), \quad (25.29)$$

$m, n=1, 2, \ldots$, где λ_k — такой корень уравнения $\operatorname{tg}\lambda_k=\lambda$, для которого $(2k-1)\pi/2<\lambda_k<(2k+1)\pi/2$. Имеем $\lambda_1\approx 4.4932$, $\lambda_2\approx 7.7252$, $\lambda_3\approx 10.9035$ и т. д.

д) *Граничные условия* $u=0$, $\partial^2 u/\partial\nu^2=0$ на Γ:

$$\varphi_{2m-1,\,2n-1}=\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi y}{2b},$$
$$\varphi_{2m,\,2n-1}=\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{(2n-1)\pi y}{2b},$$
$$\varphi_{2m-1,\,2n}=\cos\frac{(2m-1)\pi x}{2a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$
$$\varphi_{2m,\,2n}=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad m, n=1, 2, \ldots. \quad (25.30)$$

(На самом деле в случае д) лучше рассматривать задачу в прямоугольнике $(0, a)\times(0, b)$ и использовать систему

$$\varphi_{mn}=\frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{6}}{m^2+n^2},\quad m, n=1, 2, \ldots .)$$

Читатель может найти дополнительные примеры базисов в [5] и особенно в [28], где также даны примеры некоторых удобных базисов в трехмерном пространстве (сферы, цилиндры, круговые конусы и т. п.). См. также гл. 42.

Глава 26

Численные примеры. Дифференциальные уравнения в частных производных

В этой главе мы сначала продемонстрируем численное решение методом Ритца задачи Дирихле для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Затем мы приведем решение некоторых модификаций этой задачи (случая постоянных коэффициентов, задачи Неймана, смешанной задачи). Во второй части главы мы решим тем же методом Ритца неоднородное бигармоническое уравнение с граничными условиями Дирихле в двусвязной области. Мы уделим внимание физическим и техническим интерпретациям рассматриваемых задач и наметим их решение методом Галёркина. В конце главы мы на простом примере покажем, как оценивать ошибку приближенного решения.

Пример 26.1. Решим методом Ритца в параллелограмме K с границей Γ, изображенном на рис. 16, задачу

$$Au\equiv-(4+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=y^2, \tag{26.1}$$

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{26.2}$$

(*Прогиб мембраны переменной толщины, имеющей форму параллелограмма*, защемленной на границе и находящейся под действием вертикальной нагрузки, величина которой пропорциональна квадрату одной из координат; *стационарное распределение температуры в бесконечной призме, имеющей поперечное сечение в виде параллелограмма*, с переменной проводимостью, внутренними источниками тепла и нулевой температурой на поверхности и т. д.)

Сначала легко докажем положительную определенность оператора A на линеале M функций, дважды непрерывно дифференцируемых в K и равных нулю на Γ (см. также гл. 22, с. 261). Применяя обычным образом теорему Грина, получаем для любой пары

$u \in M$, $v \in M$:

$$(u, v)_A = (Au, v) = -\iint_K \left[(4+y)\, v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] dx\, dy =$$

$$= \iint_K \left[(4+y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}\right] dx\, dy, \tag{26.3}$$

откуда следует симметрия A на M. Далее, согласно (26.3),

$$(u, u)_A = (Au, u) = \iint_K \left[(4+y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \iint_K \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy, \tag{26.4}$$

откуда, в силу, например, (18.46), немедленно следует положительная определенность рассматриваемого оператора на M.

Для решения *методом Ритца* возьмем первые четыре члена базиса (25.25) (мы можем положить $c_{mn} = 1$), т. е. функции

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \sin \frac{\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & \varphi_{12} &= \sin \frac{\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ \varphi_{21} &= \sin \frac{2\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, & \varphi_{22} &= \sin \frac{2\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \end{aligned} \tag{26.5}$$

где $h = k/b$. Если искать приближенное решение в виде

$$u_{22} = \sum_{i,\, j=1}^{1} a_{ij} \varphi_{ij}, \tag{26.6}$$

то система уравнений Ритца для неизвестных постоянных a_{ij} принимает вид

$$\sum_{m,\, n=1}^{2} (\varphi_{ij}, \varphi_{mn})_A\, a_{mn} = (\varphi_{ij}, f), \quad i, j = 1, 2, \tag{26.7}$$

где $f(x, y) = y^2$. Но, согласно (26.3),

$$(\varphi_{ij}, \varphi_{mn})_A = \iint_K \left[(4+y) \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial y}\right] dx\, dy =$$

$$= \iint_K (4+y) \frac{i\pi}{a} \cos \frac{i\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \cdot \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy +$$

$$+ \iint_K \left[-\frac{hi\pi}{a} \cos \frac{i\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} + \frac{j\pi}{b} \sin \frac{i\pi (x-hy)}{a} \cos \frac{j\pi y}{b}\right] \times$$

$$\times \left[-\frac{hm\pi}{a} \cos \frac{m\pi (x-hy)}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi (x-hy)}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}\right] dx\, dy. \tag{26.8}$$

Подстановка

$$z = x - hy, \quad y = y \tag{26.9}$$

(с якобианом, равным единице) сводит вычисление интегралов (26.8) в параллелограмме K к вычислению этих интегралов в пря-

моугольнике

$$O=(0,\ a)\times(0,\ b), \tag{26.10}$$

т. е.

$$\begin{aligned}(\varphi_{ij},\ \varphi_{mn})_A=\frac{\pi^2 im}{a^2}\int_0^a\int_0^b \cos\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\cdot(4+y)\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dz\,dy+\\ +\frac{h^2\pi^2 im}{a^2}\int_0^a\int_0^b \cos\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dz\,dy+\\ +\frac{\pi^2 jn}{b^2}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{mnz}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dz\,dy-\\ -\frac{h\pi^2 in}{ab}\int_0^a\int_0^b \cos\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\,dz\,dy-\\ -\frac{h\pi^2 jm}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dz\,dy.\end{aligned} \tag{26.11}$$

Используя подстановку (26.9), получим далее

$$(\varphi_{ij},\ f)=\int_0^a\int_0^b y^2\sin\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dz\,dy. \tag{26.12}$$

Заметим [33], что

$$\begin{aligned}\int_0^a \sin\frac{i\pi z}{a}\sin\frac{m\pi z}{a}\,dz=\int_0^a \cos\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\,dz=\begin{cases}a/2, & \text{если } i=m,\\ 0, & \text{если } i\neq m,\end{cases}\\ \int_0^a \sin\frac{i\pi z}{a}\cos\frac{m\pi z}{a}\,dz=\begin{cases}\dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{2i}{i^2-m^2}, & \text{если } i-m \text{ нечетно},\\ 0, & \text{если } i-m \text{ четно};\end{cases}\end{aligned} \tag{26.13}$$

аналогичные соотношения выполняются для соответствующих интегралов по y, если, конечно, заменить b на a. Далее, мы имеем (с помощью подстановки $\pi y/b=t$)

$$\begin{aligned}\int_0^b (4+y)\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy=\\ =\frac{b}{2\pi}\int_0^\pi\left(4+\frac{bt}{\pi}\right)[\cos(j-n)t-\cos(j+n)t]\,dt=\\ =\begin{cases}2b+\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{b^2}{2\pi^2}\left[\dfrac{\cos 2jt}{4j^2}+\dfrac{t\sin 2jt}{2j}\right]_0^\pi=2b+\dfrac{b^2}{4}, & \text{если } j=n,\\ \dfrac{b^2}{2\pi^2}\left[\dfrac{\cos(j-n)t}{(j-n)^2}+\dfrac{t\sin(j-n)t}{j-n}-\dfrac{\cos(j+n)t}{(j+n)^2}-\dfrac{t\sin(j+n)t}{j+n}\right]_0^\pi=\\ =\dfrac{b^2}{2\pi^2}\left[\dfrac{(-1)^{j-n}-1}{(j-n)^2}-\dfrac{(-1)^{j+n}-1}{(j+n)^2}\right], & \text{если } j\neq n,\end{cases}\end{aligned} \tag{26.14}$$

$$\int_0^b y^2 \sin\frac{j\pi y}{b}\,dy = \left[\frac{2b^2 y}{y^2\pi^2}\sin\frac{j\pi y}{b}\right]_0^b - \left[\left(\frac{by^2}{j\pi} - \frac{2b^3}{j^3\pi^3}\right)\cos\frac{j\pi y}{b}\right]_0^b =$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}b^3}{j\pi} + \frac{2b^3}{j^3\pi^3}[(-1)^j - 1]. \quad (26.15)$$

Подставляя (26.11)—(26.15) в (26.7), получаем систему

$$\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{bh^2}{a}+\frac{a}{b}\right)\Big]a_{11}+$$
$$+\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{12}+0\cdot a_{21}+$$
$$+\frac{2\pi^2 h}{ab}\left(\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}+\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}\right)a_{22}=\frac{2a}{\pi}\cdot\left(\frac{b^3}{\pi}-\frac{4b^3}{\pi^3}\right),$$

$$\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{11}+\left[\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{bh^2}{a}+\frac{4a}{b}\right)\right]a_{12}-$$
$$-\frac{\pi^2 h}{ab}\left(\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}+4\cdot\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}\right)a_{21}+0\cdot a_{22}=-\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{b^3}{2\pi},$$

$$0\cdot a_{11}-\frac{\pi^2 h}{ab}\left(4\cdot\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}+\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}\right)a_{12}+\left[\frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{4bh^2}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]a_{21}+\frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\cdot\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{22}=0,$$

$$\frac{2\pi^2 h}{ab}\left(\frac{2a}{3\pi}\cdot\frac{4b}{3\pi}+\frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{2b}{3\pi}\right)a_{11}+0\cdot a_{12}+\frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2}{2\pi^2}\left(-2+\frac{2}{9}\right)a_{21}+$$
$$+\left[\frac{4\pi^2}{a^2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(2b+\frac{b^2}{4}\right)+\pi^2\left(\frac{bh^2}{a}+\frac{a}{b}\right)\right]a_{22}=0. \quad (26.16)$$

Выполним численные расчеты для параллелограмма, изображенного на рис. 19. Подставим

$$a=\pi,\quad b=\pi,\quad k=\pi,\quad h=\frac{k}{b}=1 \quad (26.17)$$

в (26.16) и получим следующую систему для неизвестных a_{ij}, $i, j=1, 2$:

$$\left(\frac{3\pi^2}{2}+\frac{\pi^3}{8}\right)a_{11}-\frac{4\pi}{9}a_{12}+0\cdot a_{21}+\frac{32}{9}a_{22}=\frac{1}{2}(\pi^2-4),$$
$$-\frac{4}{9}a_{11}+\left(\frac{9\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{8}\right)a_{12}-\frac{32}{9}a_{21}+0\cdot a_{22}=-\pi^2,$$
$$0\cdot a_{11}-\frac{32}{9}a_{12}+\left(\frac{21\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{2}\right)a_{21}-\frac{16}{9}\pi a_{22}=0,$$
$$\frac{32}{9}a_{11}+0\cdot a_{12}-\frac{16}{9}\pi a_{21}+\left(6\pi^2+\frac{\pi^3}{2}\right)a_{22}=0, \quad (26.18)$$

или

$$\begin{aligned}
18.6802a_{11} - 1.3963a_{12} + 0\cdot a_{21} + 3.5556\ a_{22} &= 11.7392,\\
-1.3963a_{11} + 26.0824a_{12} - 3.5556a_{21} + 0\cdot a_{22} &= -9.8696,\\
0\cdot a_{11} - 3.556\ a_{12} + 67.3186a_{21} - 5.5850\ a_{22} &= 0,\\
3.5556a_{11} + 0\cdot a_{12} - 5.5850\ a_{21} + 74.7208a_{22} &= 0.
\end{aligned}$$

Решение этой системы — это

$$a_{11}\approx 0.608,\quad a_{12}\approx 0.349,\quad a_{21}\approx -0.021,\quad a_{22}\approx -0.031. \tag{26.19}$$

Следовательно, решение задачи (26.1), (26.2) в параллелограмме с рис. 19 дается приближенно выражениями

$$\begin{aligned}
u_{22}(x) = {} & 0.608\sin(x-y)\sin y - 0.349\sin(x-y)\sin 2y - \\
& - 0.021\sin 2(x-y)\sin y - 0.031\sin 2(x-y)\sin 2y.
\end{aligned} \tag{26.20}$$

Замечание 26.1. Вычисления в приведенном примере довольно длинны из-за того, что рассматриваемая область представляет собой параллелограмм и коэффициенты уравнения (26.1), равно как и правой части, переменны. В случае когда область G представляет собой прямоугольник $O=(0,\ a)\times(0,\ b)$ и вместо задачи (26.1), (26.2) дана задача

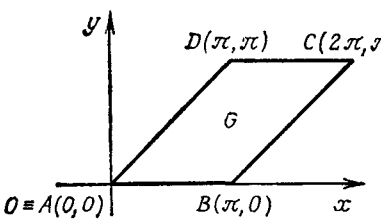

Рис. 19.

$$-\Delta u = 1 \quad \text{в } O, \tag{26.21}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{26.22}$$

вычисления значительно упрощаются. Система (26.5) принимает вид

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \quad \varphi_{12} = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b},\\
\varphi_{21} &= \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \quad \varphi_{22} = \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b}.
\end{aligned} \tag{26.23}$$

В этом случае мы получаем

$$\begin{aligned}
(\varphi_{ij},\ \varphi_{mn})_A &= \iint_O \left(\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial y}\right)dx\,dy =\\
&= \int_0^a\int_0^b \left(\frac{i\pi}{a}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} + \right.\\
&\left. + \frac{j\pi}{b}\frac{n\pi}{b}\sin\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{i\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)dx\,dy =\\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi^2 ab}{4}\left(\dfrac{i^2}{a^2}+\dfrac{j^2}{b^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{4ab}(a^2j^2+b^2i^2), & \text{если } m=i \text{ и } n=j,\\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{26.24}$$

Далее, мы имеем

$$(\varphi_{ij}, f) = \int_0^a \int_0^b \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy = \begin{cases} \frac{4ab}{\pi^2 ij}, & \text{если и } i, \text{ и } j \text{ нечетные,} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{26.25}$$

Поэтому система уравнений Ритца будет следующей:

$$\frac{\pi^2(a^2+b^2)}{4ab} a_{11} = \frac{4ab}{\pi^2}, \quad \frac{\pi^2(4a^2+b^2)}{4ab} a_{12} = 0,$$
$$\frac{\pi^2(a^2+4b^2)}{4ab} a_{21} = 0, \quad \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{ab} a_{22} = 0, \tag{26.26}$$

откуда

$$a_{11} = \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 0 \tag{26.27}$$

и

$$u_{22}(x) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4(a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}. \tag{26.28}$$

Смотри также формулу (12.29). Из приведенных вычислений, в равной мере как и из указанной формулы, следует, что в нашем случае выбор системы из четырех функций (26.23) ведет к тому же результату, что и выбор одной из этих функций, а именно первой. (Симметрию задачи относительно центра прямоугольника можно использовать уже при выборе базисных функций, избегая тем самым излишних вычислений коэффициентов a_{12}, a_{21}, a_{22}.) Если бы мы выбрали вместо (26.23) систему

$$\varphi_{ij} = \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{26.29}$$

(воспользовавшись только что отмеченной симметрией), мы с помощью простых вычислений получили бы в соответствии с (26.24), (26.25)

$$u_{33}(x) = \frac{16a^2b^2}{\pi^4}\left[\frac{1}{a^2+b^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{3(9a^2+b^2)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3(a^2+9b^2)} \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{81(a^2+b^2)} \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{b}\right]. \tag{26.30}$$

В частности, если мы выберем $a = b = \pi$, как в предыдущем примере, то получим

$$u_{33}(x) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin x \sin y + \frac{1}{15} \sin x \sin 3y + \frac{1}{15} \sin 3x \sin y + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{81} \sin 3x \sin 3y\right). \tag{26.31}$$

При рассмотрении дальнейших элементов базиса действуют аналогично. См. указанную формулу (12.29).

Замечание 26.2. (*Задача Неймана.*) Если для уравнения (26.1) в прямоугольнике $O=(0, a)\times(0, b)$ рассматривается задача Неймана, т. е. задача

$$-\Delta u = 1 \text{ в } O, \tag{26.32}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{26.33}$$

то легко проверить, что она не имеет решения, а именно условие

$$\iint\limits_O f(x, y)\, dy\, dx = 0 \tag{26.34}$$

не выполняется (см. (22.43)), так как в нашем случае

$$\iint\limits_O f(x, y)\, dx\, dy = ab > 0.$$

Если дана задача

$$-\Delta u = f \text{ в } O, \tag{26.35}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{26.36}$$

где функция $f \in L_2(O)$ удовлетворяет условию (26.34), то, как известно из гл. 22, она имеет единственное решение (обобщенное) $u(x, y)$, которое удовлетворяет условию

$$\int\limits_O u(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{26.37}$$

Предположим теперь, что условие (26.34) выполнено. В соответствии с (25.27) (отметим здесь, что $c(x, y) \equiv 0$ в (25.1), так что мы опускаем член, соответствующий $m=0$, $n=0$; кроме того, мы полагаем $c_{mn}=1$) выберем первые пятнадцать базисных функций, например, в следующем виде:

$$\varphi_{ij}(x, y) = \cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad (i, j) \neq (0, 0). \tag{26.38}$$

Для коэффициентов a_{ij} приближенного решения

$$\sum_{\substack{i, j=0 \\ (i, j)\neq(0, 0)}}^{3} a_{ij}\varphi_{ij}(x, y) \tag{26.39}$$

мы получаем аналогично тому, как это делалось в (26.24) и (26.26), систему уравнений

$$\frac{\pi^2(a^2j^2+b^2i^2)}{4ab}\, a_{ij} = \int\limits_0^a\int\limits_0^b f(x, y)\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy \quad \text{для} \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{26.40}$$

$$\frac{\pi^2 aj^2}{2b}\, a_{ij} = \int\limits_0^a\int\limits_0^b f(x, y)\cos\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy \text{ для } i=0,\ j=1, 2, 3, \tag{26.41}$$

$$\frac{\pi^2 bi^2}{2a}\, a_{ij} = \int\limits_0^a\int\limits_0^b f(x, y)\cos\frac{i\pi x}{a}\, dx\, dy \text{ для } j=0,\ i=1, 2, 3. \tag{26.42}$$

(Из данных формул очевидно, что вовсе не обязательно ограничиваться только рассмотренными значениями индексов, поскольку приведенные уравнения в той же мере справедливы и для других положительных целых чисел i, j.) Если, например,

$$f(x, y) = \cos\frac{\pi x}{a}, \tag{26.43}$$

а эта функция удовлетворяет условию (26.34), мы получим

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) \cos\frac{i\pi x}{a} \cos\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy = \begin{cases} \frac{ab}{2} & \text{для } i = 1,\ j = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Единственный ненулевой коэффициент a_{10} определяется при этом из уравнения $\pi^2 b a_{10}/2a = ab/2$ (см. (26.42)), откуда

$$u(x) = \frac{a^2}{\pi^2} \cos\frac{\pi x}{a}, \tag{26.44}$$

что является классическим решением задачи (26.35), (26.36) с правой частью (26.43).

Рассмотрим теперь смешанную задачу в прямоугольнике $O = (0, a) \times (0, b)$

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad O, \tag{26.45}$$

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ x = a, \tag{26.46}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = b. \tag{26.47}$$

В соответствии с гл. 22 эта задача имеет единственное обобщенное решение независимо от того, удовлетворяет функция $f \in L_2(G)$ условию (26.34) или нет. Если в соответствии с (25.28) (где мы полагаем $c_{mn} = 1$) выбираются базисные функции

$$\varphi_{ij}(x, y) = \sin\frac{i\pi x}{a} \cos\frac{j\pi y}{b}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

то аналогично предыдущему случаю для коэффициентов a_{ij} приближенного решения

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} \varphi_{ij}(x, y) \tag{26.48}$$

получается система уравнений

$$\frac{\pi^2 (a^2 j^2 + b^2 i^2)}{4ab} a_{ij} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{i\pi x}{a} \cos\frac{j\pi y}{b}\, dx\, dy, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{26.49}$$

$$\frac{\pi^2 b i^2}{2a} a_{ij} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\frac{i\pi x}{a}\, dx\, dy, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0. \tag{26.50}$$

Даже в этом случае из приведенных уравнений очевидно, что необязательно ограничиваться лишь рассмотренными значениями индексов i, j.

Пример 26.2. Рассмотрим задачу

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в} \quad G, \tag{26.51}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{26.52}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{26.53}$$

в двусвязной области G с липшицевой границей ((рис. 20); *пластина с отверстием, защемленная на границе, под действием вертикальной нагрузки*).

Как показывается в гл. 23, бигармонический оператор, рассматриваемый на линеале функций, непрерывных в $\overline{G}$ вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно и удовлетворяющих условиям (26.52), (26.53), является положительно определенным. Обобщенное решение задачи (26.51) — (26.53) минимизирует функционал

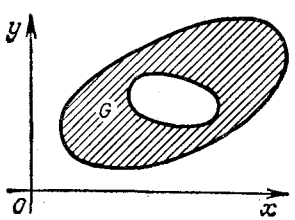

Рис. 20.

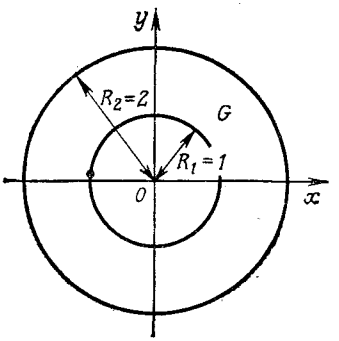

Рис. 21.

$$Fu = \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx\, dy$$

в пространстве H_A, элементы которого удовлетворяют в некотором обобщенном смысле — в смысле теории следов, см. гл. 30 — условиям (26.52), (26.53). Численное решение задачи (26.51) — (26.53) методом Ритца (метод Галёркина ведет к той же системе уравнений (26.60)) будет производиться для кольца G с центром в начале координат, с внутренним радиусом $R_1 = 1$ и внешним радиусом $R_2 = 2$ (рис. 21) и для $f(x, y) = 1$ в G.

Выберем первые шесть элементов базиса (25.8)

$$g^2(x, y), \quad xg^2(x, y), \quad yg^2(x, y), \quad x^2g^2(x, y), \quad xyg^2(x, y), \quad y^2g^2(x, y), \tag{26.54}$$

где

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2); \tag{26.55}$$

так как в (26.54) входит квадрат функции $g(x, y)$, любая линейная комбинация функций (26.54) будет удовлетворять обоим условиям (26.52), (26.53).

Поскольку область G, оператор Δ^2 и функция f симметричны относительно обеих координатных осей, достаточно (см. замечание 13.7) рассмотреть в (26.54) только члены с четными степенями x и y. С учетом симметрии задачи относительно начала координат оказывается достаточным искать приближение по Ритцу $u_6(x, y)$ в виде

$$u_6 = g^2(x, y)[a_1 + a_2(x^2 + y^2)], \tag{26.56}$$

или в полярных координатах r и ψ—в виде

$$u_6 = a_1\varphi_1(r, \psi) + a_2\varphi_2(r, \psi), \tag{26.57}$$

где

$$\varphi_1 = g^2 = (r^2 - 1)^2(4 - r^2)^2, \tag{26.58}$$

$$\varphi_2 = (x^2 + y^2)\, g^2 = r^2(r^2 - 1)^2(4 - r^2)^2. \tag{26.59}$$

Так как функции φ_1 и φ_2 очевидно принадлежат к области определения рассматриваемого оператора, систему уравнений Ритца можно написать в виде (13.29):

$$\begin{aligned}(\Delta^2\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 + (\Delta^2\varphi_1, \varphi_2)\, a_2 &= (f, \varphi_1),\\ (\Delta^2\varphi_1, \varphi_2)\, a_1 + (\Delta^2\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 &= (f, \varphi_2).\end{aligned} \tag{26.60}$$

Далее, так как обе функции φ_1 и φ_2 зависят только от переменной r (и не зависят от ψ), можно написать

$$\Delta^2\varphi_1 = \Delta(\Delta\varphi_1) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dr}\right) =$$

$$= \frac{d^4\varphi_1}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\varphi_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\varphi_1}{dr} = 2304r^4 - 5760r^2 + 2112$$

и, аналогично,

$$\Delta^2\varphi_2 = 6400r^6 - 23\,040r^4 + 19\,008r^2 - 2560.$$

Следовательно, получаем

$$(\Delta^2\varphi_1, \varphi_1) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2304r^4 - 5760r^2 + 2112)(r^2 - 1)^2 \times$$

$$\times (4 - r^2)^2\, r\, dr\, d\psi = 72\,588.95 \tag{26.61}$$

и, далее,

$$(\Delta^2\varphi_1, \varphi_2) = 228434.71, \quad (\Delta^2\varphi_2, \varphi_2) = 805459.24. \tag{26.62}$$

Аналогично находим

$$(f, \varphi_1) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} 1 \cdot (r^2-1)^2 (4-r^2)^2 r\, dr\, d\psi = 25.447, \quad (f, \varphi_2) = 63.617.$$

Таким образом, система (26.60) принимает вид

$$\begin{aligned} 72588.95a_1 + 228434.71a_2 &= 25.447, \\ 228434.71a_1 + 805459.24a_2 &= 63.617. \end{aligned} \tag{26.63}$$

Ее решение — это $a_1 \approx 0.0009485$, $a_2 \approx -0.0001900$, так что приближенное решение данной задачи

$$u_6 = (0.0009485 - 0.0001900r^2)(r^2-1)^2 (4-r^2)^2. \tag{26.64}$$

Замечание 26.3. Как уже отмечалось в предыдущей главе, системы типа (26.54) являются «слабо ортогональными». Это хорошо видно на примере системы (26.63), в которой левая часть второго уравнения почти в точности кратна левой части первого уравнения. Поэтому вычисление коэффициентов системы должно производиться с большой точностью.

Замечание 26.4. В нашем случае можно сравнить приближенное решение (26.64) рассматриваемой задачи с точным. На самом деле в случае, когда область G — кольцо и $f(x, y) = 1$ в G, уравнение (26.51) в силу симметрии задачи сводится [33] к обыкновенному дифференциальному уравнению Эйлера

$$\frac{d^4u}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{du}{dr} = 1. \tag{26.65}$$

Его общий интеграл

$$u = (C_1 + C_2 r^2) \ln r + C_3 + C_4 r^2 + \frac{r^4}{64}.$$

Из условий (26.52), (26.53) следует тогда, что

$$C_1 = \frac{15 \ln 2 - 9}{64 \ln^2 2 - 36} \approx -0.266104,$$

$$C_2 = \frac{45 - 48 \ln 2}{32 (16 \ln^2 2 - 9)} \approx -0.279217,$$

$$C_3 = \frac{1}{64} + \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \approx -0.257036,$$

$$C_4 = -\frac{1}{32} - \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \approx 0.241411,$$

так что решение рассматриваемой задачи (точное, если пренебречь ошибкой округления коэффициентов $C_1, \ldots, C_4$)—это

$$u = (-0.266104 - 0.279217r^2)\ln r - 0.257036 + 0.241411r^2 + r^4/64.$$

В частности,

$$u(1) = 0, \quad u\left(\frac{5}{4}\right) = 0.001590, \quad u\left(\frac{6}{4}\right) = 0.002612,$$
$$u\left(\frac{7}{4}\right) = 0.001381, \quad u(2) = 0,$$

в то время как из (26.64) имеем

$$u_6(1) = 0, \quad u_6\left(\frac{5}{4}\right) = 0.001225, \quad u_6\left(\frac{6}{4}\right) = 0.002493,$$
$$u_6\left(\frac{7}{4}\right) = 0.001371, \quad u_6(2) = 0.$$

Приближенное и точное решения изображены на рис. 22 штриховой и сплошной линией соответственно. Видно, что аппроксимация u_6 вполне удовлетворительно совпадает с точным решением.

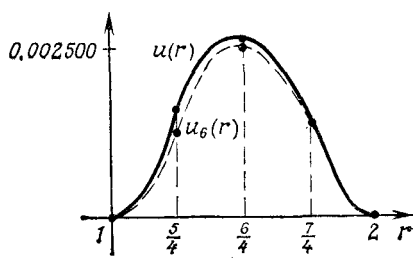

Рис. 22.

Замечание 26.5. (*Оценка погрешности.*) Что касается оценки погрешности в метрике пространства H_A, то для всех примеров этой главы можно использовать неравенство (11.21)

$$\|u_n - u_0\|_A \leqslant \frac{\|Au_n - f\|}{C}. \quad (26.66)$$

Для иллюстрации оценим погрешность в случае задачи (26.21), (26.22) для $a = \pi$, $b = \pi$, т. е. погрешность результата u_{33}, даваемого формулой (26.31). В этом случае можно использовать (18.48), что при $l = \pi$ дает

$$(-\Delta u, u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

так что $C = \sqrt{2}/2$.

Тогда для оценки погрешности по норме $\|u\|_A$ пространства H_A получаем, согласно (26.66),

$$\|u_{33} - u_0\|_A \leqslant \sqrt{2}\,\|-\Delta u_{33} - 1\| \approx \sqrt{2} \cdot 1.364 \approx 1.93, \quad (26.67)$$

так как

$$\|-\Delta u_{33}-1\|^2=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left\{-\Delta\left[\frac{8}{\pi^2}\left(\sin x\sin y+\frac{1}{15}\sin x\sin 3y+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{15}\sin 3x\sin y+\frac{1}{81}\sin 3x\sin 3y\right)\right]-1\right\}^2 dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{16}{\pi^2}\left(\sin x\sin y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}\sin x\sin 3y+\frac{1}{3}\sin 3x\sin y+\frac{1}{9}\sin 3x\sin 3y\right)-1\right]^2 dx\,dy=$$

$$=\frac{16^2}{\pi^4}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin^2 x\sin^2 y+\frac{1}{9}\sin^2 x\sin^2 3y+\frac{1}{9}\sin^2 3x\sin^2 y+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{81}\sin^2 3x\sin^2 3y+\frac{\pi^4}{256}-\frac{2\pi^2}{16}\left(\sin x\sin y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}\sin x\sin 3y+\frac{1}{3}\sin 3x\sin y+\frac{1}{9}\sin 3x\sin 3y\right)\right]dx\,dy\ ^{1)}=$$

$$=\frac{16^2}{\pi^4}\left[\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{36}+\frac{\pi^2}{36}+\frac{\pi^2}{324}+\frac{\pi^2}{256}-\frac{2\pi^2}{16}\left(4+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{81}\right)\right]=$$

$$=\frac{16}{\pi^4}\left(\frac{100\pi^2}{324}+\frac{\pi^6}{256}-\frac{2\pi^2}{16}\cdot\frac{400}{81}\right)=\frac{16}{\pi^4}\left(\frac{\pi^6}{256}-\frac{100\pi^2}{324}\right)=$$

$$=\pi^2-\frac{6400}{81\pi^2}\approx 1.86,$$

так что, действительно,

$$\|-\Delta u_{33}-1\|\approx\sqrt{1.86}\approx 1.364. \tag{26.68}$$

Замечание 26.6. Оценка $\|-\Delta u_{33}-1\|^2\approx 1.86$ интересна сама по себе. Действие оператора $-\Delta$ на тригонометрические функции (26.29) дает снова функции того же типа. Эти функции равны нулю на границе Γ. Если правая часть рассматриваемого уравнения не равна нулю на Γ (в нашем случае дело обстоит именно так, поскольку $f(x, y)\equiv 1$), то приближенное решение не может хорошо удовлетворять рассматриваемому дифференциальному уравнению во всей области G. Разница между левой и правой частями уравнения будет значительной по крайней мере в непосредственной близости от границы. Эта окрестность зависит от числа рассматриваемых элементов базиса. Оценка $\|-\Delta u_{33}-1\|^2\approx 1.86$ действительно не очень хороша (и не может быть хорошей при малом числе элементов базиса), так как с учетом того, что площадь квадрата равна π^2, „средняя“ разность между функциями $-\Delta u_{33}$ и 1 получается равной

$$h=\sqrt{\frac{1.86}{\pi^2}}\approx 0.43,$$

[1)] Интегралы от остальных членов равны нулю ввиду ортогональности синусоидальных функций в интервале $[0, \pi]$.

а про эту величину нельзя сказать, что она пренебрежимо мала по сравнению с единицей.

Это нежелательное явление можно устранить только учетом большого числа элементов базиса. Часто по различным причинам хорошее согласие приближенного решения с точным в пространстве H_A оказывается недостаточным: необходимо также удовлетворить с достаточной точностью рассматриваемому дифференциальному уравнению. В этом случае (где $f(x, y) \not\equiv 0$ на границе рассматриваемого квадрата или первоначального прямоугольника $(0, a)\times(0, b)$) удобно использовать вместо тригонометрического базиса полиномиальный, т. е. искать приближенное решение в виде

$$g(x, y)(a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + \ldots),$$

где (в случае прямоугольника) достаточно выбрать

$$g(x, y) = xy(a - x)(b - y).$$

См. также оценку погрешности в примере 21.3.

Глава 27

Краткое содержание глав 18—26

В предыдущей части книги были изложены наиболее часто встречающиеся вариационные методы, основанные на теореме о минимуме квадратичного функционала или на рассмотрениях, непосредственно связанных с этим вопросом. В третьей части книги мы показали некоторые приложения указанных методов к решению краевых задач в случае обыкновенных дифференциальных уравнений и в случае дифференциальных уравнений в частных производных. Первый шаг проверки применимости этих методов — это проверка положительной определенности рассматриваемых дифференциальных операторов на соответствующих линеалах. Ее удобно проводить с помощью неравенств Фридрихса и Пуанкаре (18.1) и (18.50), т. е. неравенств

$$\|u\|^2_{L_2(G)} = \int_G u^2\,dx \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_2 \int_\Gamma u^2(S)\,dS \qquad (27.1)$$

и

$$\|u\|^2_{L_2(G)} = \int_G u^2\,dx \leqslant c_3 \sum_{k=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx + c_4 \left[\int_G u(x)\,dx\right]^2 \qquad (27.2)$$

соответственно. Они справедливы для функций, непрерывно дифференцируемых в области $\bar{G}$ с липшицевой границей Γ (при $N = 1$ — непрерывно дифференцируемых на интервале $[a, b]$).

Мы получили подходящие оценки постоянных c_1, c_2, c_3, c_4. В частности, были установлены оценки типа (18.22) и (18.40) и их следствия (18.28), (18.46), которые значительно точнее, чем встречающиеся обычно в литературе. Это важно главным образом при получении оценок погрешности, основанных на неравенстве (11.21) (см. примеры в гл. 21 и 26).

Затем в гл. 19 исследовалось обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-(pu')' + ru = f, \tag{27.3}$$

где $f \in L_2(a, b)$, $p(x)$, $p'(x)$ и $r(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $r(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, с граничными условиями

$$\alpha u'(a) - \beta u(a) = 0, \quad \gamma u'(b) + \delta u(b) = 0, \tag{27.4}$$

где α, β, γ, δ — неотрицательные постоянные, $\alpha + \beta > 0$, $\gamma + \delta > 0$. Частными случаями (27.4) являются условия (19.5)—(19.8). На них было обращено особое внимание, поскольку они аналогичны типичным граничным условиям для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Было найдено, что, за исключением случая

$$r(x) \equiv 0, \quad u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0, \tag{27.5}$$

соответствующий дифференциальный оператор A, рассматриваемый на линеале M функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям (27.4), положительно определен. Были приведены функционалы (19.85)—(19.88) (соответствующие отдельным рассматриваемым граничным условиям), которые минимизируются обобщенным решением задачи (27.3), (27.4) в соответствующем пространстве H_A. В случае (27.5) было показано, что рассматриваемый оператор положительно определен на линеале $\tilde{M}_2$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и удовлетворяющих не только условиям $u'(a) = u'(b) = 0$, но также и условию $\int_a^b u(x)\,dx = 0$. Необходимым и достаточным условием существования обобщенного решения служит тогда равенство $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Соответствующий функционал имеет тот же вид, что и в случае граничных условий $u(a) = u(b) = 0$. В этой связи была указана разница между устойчивыми и неустойчивыми граничными условиями и различная структура пространства H_A. Устойчивые граничные условия (условия, в которые входят производные порядка не выше, чем $k-1$, где $2k$ — порядок данного дифференциального уравнения) удовлетворяются — возможно, в некотором обобщенном смысле, так называемом смысле теории следов, см. гл. 30 — всеми функциями H_A, в то время как в случае неустойчивых условий (в которые входят производные порядка k и выше) это не так. При выборе базиса в соответствующем пространстве

H_A, в котором мы минимизируем рассматриваемый функционал, необходимо заботиться о том, чтобы любая функция базиса удовлетворяла всем устойчивым граничным условиям, в то время как неустойчивым граничным условиям удовлетворять не нужно. Неустойчивые граничные условия „содержатся" в рассматриваемом функционале и автоматически удовлетворяются (возможно, в некотором обобщенном смысле) обобщенным решением, которое минимизирует этот функционал в пространстве H_A. В связи с этим была выяснена разница между методами Ритца и Галёркина. Эти вопросы будут подробно обсуждены в гл. 32, 34 и 35, где мы сможем намного глубже исследовать структуру рассматриваемых пространств.

В гл. 19 также обсуждалась (для случая уравнений второго порядка) равномерная сходимость минимизирующей последовательности $\{u_n(x)\}$ к обобщенному решению $u_0(x)$ при условии, что элементы базиса выбираются из D_A (откуда, конечно, немедленно следует непрерывность функции $u_0(x)$ на $[a, b]$). Далее были приведены функционалы (19.105)—(19.108) для неоднородных граничных условий. В конце гл. 19 мы обсудили уравнение порядка $2k$ с граничными условиями Дирихле. Взяв уравнение четвертого порядка с граничными условиями $u(a) = u''(a) = u(b) = u''(b) = 0$, мы показали, как действовать в случае уравнений более высоких порядков, когда заданы граничные условия, отличные от условий Дирихле.

Аналогичный круг задач обсуждался и для дифференциальных уравнений в частных производных. В гл. 22 было рассмотрено однородно эллиптическое уравнение второго порядка

$$Au = -\sum_{i,\,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + cu = f, \tag{27.6}$$

где $f \in L_2(G)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными в $\bar{G}$,

$$\sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \geqslant p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2, \quad p > 0, \tag{27.7}$$

$c(x)$ — непрерывная функция в $\bar{G}$, $c(x) \geqslant 0$. Для приведенного уравнения были рассмотрены граничные условия Дирихле, Неймана, Ньютона и смешанные, которые по природе своей соответствуют граничным условиям (19.5)—(19.8) для обыкновенного дифференциального уравнения (19.1). Результаты полностью аналогичны. Если $c(x) \equiv 0$ в G, в случае граничных условий Неймана $Nu = 0$ необходимо рассматривать данный дифференциальный оператор на линеале $\tilde{M}_2$ функций, непрерывных вместе со своими частными производными вплоть до второго порядка включительно в $\bar{G}$ и удовлетворяющих не только условию $Nu = 0$, но также ус-

ловию $\int_G u\,dx = 0$. На этом множестве данный оператор положительно определен. Для существования обобщенного решения необходимо и достаточно, чтобы $\int_G f(x)\,dx = 0$. Это решение минимизирует тогда в соответствующем пространстве H_A функционал (22.53) (функции этого пространства, вообще говоря, не удовлетворяют условию $Nu = 0$, но удовлетворяют условию $\int_G u\,dx = 0$). Остальные случаи не вызывают трудностей, и положительная определенность данного оператора на соответствующих линеалах легко доказывается. При этом нужно рассматривать функционалы (22.27), (22.33), (22.38), (22.63) и (22.66). В конце этой главы приводятся функционалы (22.70)—(22.72), отвечающие неоднородным граничным условиям. (См. также таблицу функционалов в конце книги.)

В гл. 23 исследовался бигармонический оператор с граничными условиями

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{27.8}$$

$$u = 0, \quad Mu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{27.9}$$

$$Mu = 0, \quad Nu = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{27.10}$$

где операторы M и N задаются соотношениями (23.23). Эти соотношения включают также постоянную Пуассона σ, которая важна для применений в теории упругости. Граничные условия (27.10) неустойчивы для бигармонического оператора и соответствуют граничным условиям Неймана для уравнений второго порядка. Эта задача довольно сложна и будет обсуждена в гл. 35. В случае граничных условий (27.8), (27.9) положительная определенность бигармонического оператора на соответствующих множествах функций была доказана без труда. Подходящими функционалами будут тогда функционалы (23.40), (23.49). В случае неоднородных граничных условий рекомендуется использовать метод наименьших квадратов на границе (гл. 43).

Гл. 24 посвящена математической теории упругости. Уравнения равновесия были записаны в виде $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$, где A — оператор теории упругости. (Его конкретный вид был показан в (24.14) для случая однородного изотропного тела.) Применяя неравенство Корна, мы доказали положительную определенность этого оператора на линеалах векторных функций, непрерывных вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в $\overline{G}$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma \tag{27.11}$$

(нулевое перемещение на границе), или

$$\mathbf{t} = 0 \text{ на } \Gamma \tag{27.12}$$

(нулевая нагрузка на границе), или смешанным граничным условиям

$$\mathbf{u}=0 \text{ на } \Gamma_1,\ \mathbf{t}=0 \text{ на } \Gamma_2. \tag{27.13}$$

В случае условий (27.12), которые являются граничными условиями Неймана для уравнения $A\mathbf{u}=\mathbf{f}$, векторные функции рассматриваемого линеала удовлетворяют условиям статического и моментного равновесия

$$\int_G \mathbf{u}\,dx=0, \quad \int_G \mathbf{r}\times\mathbf{u}\,dx=0. \tag{27.14}$$

Удовлетворение этих же условий для функции $\mathbf{f}$ является необходимым и достаточным условием существования решения задачи $A\mathbf{u}=\mathbf{f}$ в G, $\mathbf{t}=0$ на Γ.

Во всех этих случаях обобщенное решение минимизирует „функционал потенциальной энергии“ $\int_G W(\mathbf{u})\,dx-\int_G \mathbf{f}\mathbf{u}\,dx$ в соответствующем пространстве H_A, элементы которого (векторные функции) удовлетворяют — может быть, в смысле теории следов — соответствующим устойчивым граничным условиям $\mathbf{u}=0$ на Γ или на Γ_1. В случае (27.12) они, вообще говоря, не удовлетворяют условию $\mathbf{t}=0$ на Γ; однако они должны удовлетворять условиям (27.14). В конце гл. 24 были упомянуты неоднородные граничные условия.

Главы 20 и 25 были посвящены выбору базиса, преимущественно для метода Ритца. Непосредственно из определения базиса следует, что он является:

а) полным в H_A;

б) линейно независимым в H_A.

С вычислительной точки зрения важно, что базис обеспечивал:

в) численную устойчивость процесса;

г) равномерную ограниченность чисел обусловленности матриц Ритца;

д) сходимость Au_n к f при $n\to\infty$.

В гл. 20 были приведены две полезные теоремы (теоремы 20.1 и 20.2). Первая из них, при вполне естественных предположениях, утверждает, что полнота последовательности $\{A\varphi_n\}$ в пространстве H означает полноту последовательности $\{\varphi_n\}$ в пространстве H_A. Вторая теорема гласит, что ортонормированная (в пространстве H_B) система собственных функций оператора B образует в пространстве H_A базис, обладающий всеми свойствами а)—д) при условии, что самосопряженные расширения операторов A, B являются родственными операторами.

На основе этих теорем мы ввели по существу два типа удобных базисов:

1. Рассматриваем в плоскости ($N=2$) систему функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ \ldots\ . \tag{27.15}$$

(Можно рассмотреть подобные системы с аналогичными свойствами и при $N > 2$; для $N = 1$ мы получим, конечно, систему функций $1, x, x^2, \ldots$.) В случае задачи Дирихле для уравнения (27.6) в качестве базиса в H_A можно взять систему функций

$$g,\ xg,\ yg,\ x^2g,\ xyg,\ y^2g,\ \ldots, \tag{27.16}$$

где $g(x, y)$—достаточно гладкая функция в $\bar{G}$, положительная в G и равная нулю на Г. Примеры таких базисов были приведены в гл. 20 и 25. Базисы такого типа можно использовать также и в случае уравнений более высоких порядков с граничными условиями, возможно отличными от условий Дирихле (см. задачу (25.9)—(25.12)). Эти системы имеют то преимущество, что они очень просты, даже в случае многосвязной области. Однако в общем случае они не удовлетворяют условиям в), г), д). В частности, левые части уравнений в системе Ритца лишь „слабо" независимы, и как при нахождении коэффициентов системы, так и при ее решении необходимы вычисления с большой точностью. Как правило, удается рассмотреть только несколько первых членов базиса.

2. Указанную теорему 20.2 можно с успехом применить следующим образом: находим ортонормированную систему собственных функций относительно простого оператора, самосопряженное расширение которого и самосопряженное расширение рассматриваемого оператора являются родственными операторами. Особенно просто найти такой оператор для уравнений второго порядка, поскольку, за исключением граничных условий Неймана при $c(x) \equiv 0$, операторы (27.6) и $-\Delta u$ обладают таким свойством; в случае граничных условий Неймана и $c(x) \equiv 0$ достаточно исследовать операторы (27.6) и $-\Delta u$ на линеале достаточно гладких функций, которые удовлетворяют данным граничным условиям и условию $\int_G u\,dx = 0$. Упомянутая ортонормированная система собственных функций обладает тогда всеми требуемыми свойствами а)—д). В гл. 25 приведены примеры некоторых удобных базисов, в частности для круга и прямоугольника, и, кроме того, показано, как использовать эти системы в случае других областей, применяя простые преобразования. Коэффициенты отдельных членов этих базисов зависят от n. Мы отметили, что часто вид этих коэффициентов можно сильно упростить; однако нужно помнить, что необходимо сохранять по крайней мере порядок зависимости этих коэффициентов от n. В противном случае элементы в „правом нижнем углу" матрицы Ритца будут сильно превосходить (по абсолютной величине) элементы, находящиеся в „левом верхнем углу" матрицы Ритца, что приведет к вычислительным трудностям. Однако мы также заметили, что можно положить эти коэффициенты равными единице, если использовать специальные численные процедуры, например решая систему Ритца методом

исключения с использованием арифметики с плавающей запятой, а также когда рассматривается лишь небольшое число элементов базиса. Свойства систем первого и второго типов были показаны на примерах, приведенных в гл. 21 и 26. Мы выбрали эти примеры так, чтобы, с одной стороны, они были наглядными (см. особенно два первых примера в гл. 20), а с другой стороны, чтобы они показывали, как решать численно задачи, с которыми сталкиваются в приложениях инженеры-теоретики и научные работники. Вопросы, связанные с эффективным выбором базиса, подробно проанализированы в книгах [28] и [5].

Специальный выбор базиса для метода конечных элементов будет обсуждаться в гл. 42.

Часть IV

Теория краевых задач для дифференциальных уравнений, основанная на идее слабого решения и на теореме Лакса — Мильграма

Во второй части настоящей книги мы разработали теорию, которую затем, в третьей части, применили к решению задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Эта теория опирается на теорему о минимуме квадратичного функционала, сводящую данную задачу к задаче минимизации некоторого функционала. Для нахождения (или аппроксимации) элемента, минимизирующего этот функционал, можно использовать соответствующие методы, рассматриваемые во второй части книги.

В этой части мы постараемся обобщить разработанную нами ранее теорию в случае дифференциальных операторов. Это обобщение позволит лучше понять суть задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа с граничными условиями и изучить более глубокие связи, о которых не говорилось раньше. Кроме того, эта теория позволяет существенно обобщить некоторые предположения относительно, например, симметрии рассматриваемых операторов, непрерывности или гладкости коэффициентов рассматриваемых уравнений и дает подходящую формулировку неоднородных граничных условий. Она позволяет представить дополнительные методы приближенных решений вышеупомянутых задач и продемонстрировать некоторые новые свойства рассмотренных ранее методов. В общем эта теория дает целостное представление обо всем классе задач, связанных с дифференциальными операторами рассматриваемого типа, позволяет глубже понять структуру обобщенных решений и т. д. И наконец, она в известной мере облегчает анализ задач на собственные значения для дифференциальных уравнений (см. ч. V этой книги), исследование которых без применения этой теории сопряжено обычно со значительными трудностями.

Прежде чем перейти к изложению вопроса (гл. 32) и основных результатов этой части нашей книги, дадим в кратком обзоре определение интеграла Лебега, а также определение и основные свойства так называемых пространств $W_2^{(k)}$. Читатели, желающие

продвигаться в работе над книгой более быстрыми темпами, могут на данном этапе опустить гл. 28 при условии, что они предварительно ознакомились с пространством L_2 из гл. 3.

Глава 28

Интеграл Лебега; области, имеющие границу Липшица

В этой главе, не развивая теории интеграла Лебега, мы познакомим читателя с определением этого интеграла и его основными свойствами (опуская соответствующие доказательства). Теория интеграла Лебега подробно излагается, например, в книге [31].

Интеграл Лебега будет определен прежде всего для функций от одной переменной, т. е. для функций, определенных на некотором множестве из E_1 (т. е. на некотором множестве вещественных чисел). В конце главы это определение будет обобщено — как будет видно, без каких-либо затруднений — для N-мерного случая. В соответствии с этим будут сначала рассмотрены множества из E_1. Как обычно, речь часто будет идти не о числе $x \in E_1$, а о точке $x \in E_1$.

Вспомним некоторые основные определения.

Точка P называется *внутренней точкой множества* M, если существует ее окрестность, принадлежащая M. Непосредственно из этого определения следует, что внутренняя точка множества M принадлежит этому множеству.

Множество M называется *открытым*, если каждая из его точек является внутренней. Простейшим примером открытого множества является открытый интервал. Объединение произвольного числа открытых множеств является открытым множеством.

Множество M называется *ограниченным*, если оно лежит на интервале $(-R, R)$, где R — достаточно большое число.

Имеет место следующая важная теорема (см., например, [31]):

Теорема 28.1. *Каждое непустое ограниченное открытое множество M можно представить как объединение конечного или счетного числа* [1] *открытых непересекающихся* [2] *интервалов I_k, конечные точки которых не принадлежат данному множеству.*

Пример 28.1. Рассмотрим открытый интервал (0, 1) и обозначим через N множество, получаемое в результате изъятия точек $1/n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, из этого интервала. Ясно, что множество N, непустое и ограниченное, будет одновременно и открытым, по-

[1] То есть либо конечное число, либо некоторая счетная последовательность этих интервалов.

[2] То есть пересечение любых двух таких интервалов является пустым множеством; такие интервалы называются *дизъюнктными*.

скольку для каждой точки $x \in N$ можно найти достаточно малую окрестность, полностью принадлежащую N. Например, точка $x = 0.19$ принадлежит N; «соседними» точками, не принадлежащими N, являются 1/5 и 1/6. Следовательно, в качестве подходящей окрестности точки 0.19 достаточно взять, например, открытый интервал (0.18, 0.20). Здесь интервалы, о которых говорится в теореме 28.1,— это интервалы вида $(1/(n+1), 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество которых, очевидно, счетно.

Точка P называется *предельной точкой* (или *точкой накопления*) *множества* M, если в любой ее (произвольно малой) окрестности имеется бесконечное число точек множества M.

Предельная точка M может принадлежать, а может и не принадлежать данному множеству.

Множество M' всех предельных точек из M называется *производной* (или *производным множеством*) множества M. Если $M' \subset M$, т. е. если все предельные точки данного множества принадлежат этому множеству, то множество M называется *замкнутым*. Простым примером замкнутого множества может служить замкнутый интервал $[a, b]$.

Пересечение произвольного конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Интервал $(-\infty, +\infty)$ является одновременно и открытым, и замкнутым множеством: он содержит все свои предельные точки, и в то же время каждая его точка является внутренней точкой этого интервала.

Теорема 28.2 (см. [31]). *Всякое непустое ограниченное замкнутое множество N либо является замкнутым интервалом, либо может быть получено удалением из подходяще выбранного замкнутого интервала I конечного или счетного множества открытых непересекающихся интервалов I_k, концы которых принадлежат данному множеству.*

Определение интеграла Лебега основано на идее *меры Лебега*, которая является не чем иным, как соответствующим обобщением концепции длины. Для некоторых множеств, называемых измеримыми по Лебегу, введена так называемая мера Лебега (сокращенно просто мера), обладающая свойствами, аналогичными свойствам длины (аддитивностью и т. д.). Здесь эти свойства подробно не рассматриваются. Обычно мера обозначается через mM, μM или $\operatorname{mes} M$. Мера пустого множества равна нулю по определению. Мера ограниченного интервала (открытого, замкнутого или полуоткрытого) равна его длине, т. е. $m(a, b) = m[a, b] = m[a, b) = m(a, b] = b - a$. Если M — открытое множество из теоремы 28.1 и если I_k — интервалы, определенные в этой же теореме, мы имеем

$$mM = \sum_k mI_k. \tag{28.1}$$

Из (28.1) следует, что мера Лебега произвольного непустого ограниченного открытого множества определяется (однозначно, что можно показать) как сумма длин соответствующих открытых интервалов, образующих это множество. (Согласно теореме 28.1, число этих интервалов может быть как конечным, так и бесконечным, поэтому суммирование выполняется либо от $k=1$ до некоторого числа, либо до $+\infty$.) Далее, если N — замкнутое множество, определенное в теореме 28.1, а I и I_k суть замкнутый интервал и открытые интервалы соответственно, из этой же самой теоремы имеем

$$mN = mI - \sum_k mI_k. \tag{28.2}$$

(Если $N=I$ есть замкнутый интервал с концами a, b, то второй член в правой части обращается в нуль, а $mN=mI=b-a$, что соответствует данному выше определению меры интервала.) Итак, мы определили меру Лебега произвольного непустого ограниченного замкнутого множества, причем можно показать, что наше определение не зависит от выбора интервалов I и I_k.

Теперь пусть M — произвольное непустое ограниченное множество, не обязательно открытое или замкнутое.

Определение 28.1. Под *внешней* и *внутренней мерами Лебега* непустого ограниченного множества M понимаются соответственно нижняя грань (т. е. наибольшая нижняя граница) мер всех ограниченных открытых множеств, содержащих M, и верхняя грань (т. е. наименьшая верхняя граница) мер всех ограниченных замкнутых множеств, содержащихся в M. Обозначаются эти меры через

$$m^*M \text{ и } m_*M \tag{28.3}$$

соответственно. Таким образом,

$$m^*M = \inf_N mN \text{ и } m_*M = \sup_N mN; \tag{28.4), (28.5}$$

в случае (28.4) рассматривается система всех ограниченных открытых множеств N, таких что $M \subset N$, а в случае (28.5) — система всех ограниченных замкнутых множеств N, таких что $N \subset M$. Обе рассматриваемые системы непусты: в первом случае одно из множеств N — это открытый интервал $(-R, R)$ с достаточно большим «радиусом» R, таким что $M \subset (-R, R)$ (такое R всегда можно найти, поскольку множество M ограничено по определению). Во втором случае одним из замкнутых множеств N может быть произвольная точка $x \in M$ (поскольку M не пусто по определению). Таким образом, формулы (28.4) и (28.5) имеют смысл. Для каждого непустого ограниченного множества M выполняется соотношение $0 \leqslant m_*M \leqslant m^*M$.

Определение 28.2. Если $m^*M = m_*M$, говорят, что множество M *измеримо по Лебегу* (*L-измеримо* или просто *измеримо*), а под его

мерой mM понимается общее значение внешней и внутренней мер, т. е.

$$mM = m^*M = m_*M. \tag{28.6}$$

Пример 28.2. Пусть M — множество (счетное) точек

$$1/n,\ n = 1,\ 2, \ldots. \tag{28.7}$$

Докажем, что $mM = 0$. Поскольку $m_*M \geqslant 0$, а $m_*M \leqslant m^*M$, достаточно доказать, что $m^*M = 0$. Возьмем произвольную положительную постоянную $\varepsilon < 1/6$ и представим открытое множество N_ε (подобное тем, которые рассматривались в определении 28.1) как объединение открытых интервалов

$$(1/n - \varepsilon/n^2,\ 1/n + \varepsilon/n^2), \quad n = 1,\ 2, \ldots, \tag{28.8}$$

«центры» которых находятся в точках $1/n$, т. е. интервалов

$$(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon), \quad \left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{9},\ \frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{9}\right), \ldots.$$

Совершенно очевидно, что $M \subset N_\varepsilon$. Поскольку интервалы (28.8) не пересекаются [1], то

$$mN_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{n^2},\ \frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{n^2} = 2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{28.9}$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, согласно (28.9), то, взяв достаточно малое ε, можно меру множества N_ε сделать меньше произвольно малой величины. Поэтому $\inf_{\varepsilon>0} mN_\varepsilon = 0$, откуда, согласно определению 28.1, $m^*M = 0$, а следовательно, $mM = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно показать, что если M — произвольное ограниченное *счетное* множество, то *его мера равна нулю.* (Это утверждение справедливо также и для счетных неограниченных множеств.) Можно показать, что существуют множества, неизмеримые по Лебегу. Пока, правда, ни одно из таких множеств эффективно построено не было (т. е. до сих пор не предложен эффективный принцип построения такого множества) [2]. Все множества, с которыми приходится иметь дело в инженерных или научных приложениях, измеримы. Напомним, что понятие измери-

---

[1] Для каждого положительного целого числа n выполняется соотношение $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{3n^2}$. Принимая во внимание, что $\varepsilon < 1/6$, получим

$$\left(\frac{1}{n}-\frac{\varepsilon}{n^2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{\varepsilon}{(n+1)^2}\right) > \frac{1}{3n^2}-\frac{2\varepsilon}{n^2} > 0.$$

[2] Известные примеры неизмеримых по Лебегу множеств строятся с помощью аксиомы Цермело.— *Прим. ред.*

мости было введено (см. определение 28.2) только для ограниченных множеств. Поэтому всегда предполагается, что рассматриваемые нами множества ограничены.

В дальнейшем мы опять будем применять выражение «*почти всюду*» вместо довольно длинной фразы «возможно, за исключением точек, образующих множество меры нуль». Например, утверждение, что функция $f(x)$ имеет производную почти всюду на интервале (a, b), означает, что эта функция имеет производную во всех точках указанного интервала, за возможным исключением точек, образующих множество меры нуль.

Определение 28.3. Пусть $f(x)$ — функция (вещественная), определенная на (ограниченном) измеримом множестве M. Если множество всех $x \in M$, для которых $f(x) < C$ измерима при любом числе C, то функция $f(x)$ *измерима (по Лебегу) на множестве* M.

Замечание 28.1. Измеримые функции обладают целым рядом важных свойств, см. [31]. Например, если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые функции на множестве M, то функции $af(x)+bg(x)$ (где a, b — произвольные вещественные числа) и $f(x)g(x)$ измеримы на M; если $f(x)$ измерима на M, то $|f(x)|$ также измерима на M (но обратное утверждение неверно), и т. д. Можно сказать, что все функции, с которыми читатель — инженер или научный работник — сталкивается в приложениях, измеримы. В частности, все функции, непрерывные или кусочно-непрерывные на интервале $[a, b]$, измеримы.

Теперь можно перейти к определению интеграла Лебега. Отметим существенное различие между определением интеграла Римана, когда, грубо говоря, строя интегральные суммы, мы делим на «малые части» область определения функции, и определением интеграла Лебега, когда на «малые части» делится множество значений функции. Определение интеграла Лебега здесь дается для случая ограниченных областей, что вполне достаточно для той цели, которую мы преследуем в нашей книге.

Определение интеграла Лебега для ограниченных функций

Пусть на (ограниченном) измеримом множестве M дана ограниченная измеримая функция $f(x)$ [1], причем $k < f(x) < K$ для $x \in M$ (см. рис. 23, где для простоты $M = [a, b]$). На интервале (k, K) рассмотрим точки $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1}$ и положим $y_0 = k$, $y_n = K$. Рассматриваемые точки разбивают интервал $[k, K]$ на n подынтервалов $[y_i, y_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (на рис. 23 $n = 5$).

---

[1] В определении функции, измеримой на множестве M, уже указывается, что M — ограниченное измеримое множество (см. определение 28.3). Поэтому, говоря о функции, измеримой на M, мы повторно не указываем, что M ограничено и измеримо.

Обозначим это разбиение через d. Далее обозначим множество всех $x \in M$, для которых $y_{j-1} \leqslant f(x) < y_j$, через M_j, $j = 1, \ldots, n$, и построим для выбранного нами разбиения d интервала $[k, K]$ так называемые *верхнюю* и *нижнюю суммы* (*Лебега*)

$$S(d) = \sum_{j=1}^{n} y_j m M_j \quad \text{и} \quad s(d) = \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} m M_j \tag{28.10}$$

соответственно, где mM_j — мера множества M_j [1]. (На рис. 23 множество M_2, состоящее из четырех интервалов, изображено жирной

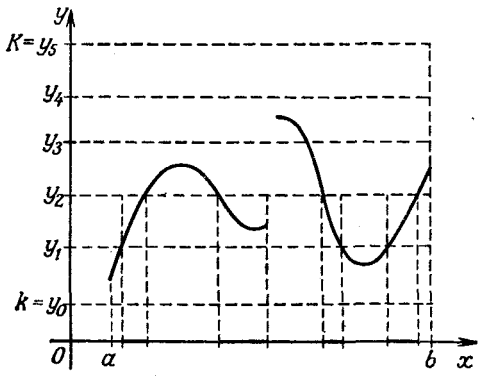

Рис. 23.

линией на оси x.) Рассматривая все возможные разбиения d интервала $[k, K]$, мы получаем множество верхних сумм и множество нижних сумм. Оба этих множества являются множествами вещественных чисел, поскольку каждая верхняя сумма и каждая нижняя сумма есть число вещественное. Можно показать, что для каждой ограниченной функции, измеримой на (ограниченном измеримом) множестве M, нижняя грань множества верхних сумм Лебега равна верхней грани множества нижних сумм Лебега, т. е.

$$\inf_d S(d) = \sup_d s(d). \tag{28.11}$$

Это один из основных результатов теории Лебега.

Определение 28.4. Общее значение нижней грани множества верхних сумм Лебега и верхней грани множества нижних сумм Лебега, т. е. общее значение чисел (28.11), называется *интегралом Лебега ограниченной измеримой функции* $f(x)$ *на* (ограниченном измеримом) *множестве* M.

---

[1] Поскольку $f(x)$ измерима на M по определению, можно легко показать, что M_j — измеримое множество.

Обозначается этот интеграл через

$$\int\limits_M f(x)\,dx \tag{28.12}$$

или, чтобы избежать опасности смешения этого интеграла с какими-либо другими интегралами, например с интегралом Римана, его обозначают через $L\int_M f(x)\,dx$. В частных случаях интеграл Лебега обозначается через $\int_a^b f(x)\,dx$ и т. д. Кроме того, речь здесь идет о функции, *интегрируемой в смысле Лебега* (*L-интегрируемой*), в отличие от функции, интегрируемой в смысле Римана (*R*-интегрируемой).

Для ограниченных функций интеграл Лебега является существенным обобщением интеграла Римана. С одной стороны, он обобщает интеграл Римана в том смысле, что область интегрирования является произвольным (ограниченным) измеримым множеством. С другой стороны, можно показать, что *каждая ограниченная функция, интегрируемая в смысле Римана на интервале* $[a, b]$, *измерима на этом интервале и, следовательно, интегрируема в смысле Лебега* (а два указанных интеграла равны). Однако обратное утверждение, вообще говоря, не верно: примером функции, интегрируемой в смысле Лебега, но не в смысле Римана на интервале $[0, 1]$, является функция, определяемая на этом интервале следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &f(x)=1, \quad \text{если } x\text{—рациональное число,}\\ &f(x)=0, \quad \text{если } x\text{—иррациональное число.}\end{aligned} \tag{28.13}$$

Интеграл Римана для этой функции не существует, а интеграл Лебега равен нулю. Функции, встречающиеся в технических и научных приложениях, обычно интегрируемы (в известных простых областях, чаще на интервалах) как в смысле Лебега, так и в смысле Римана. Отсюда следует, что значения обоих интегралов, а также методы их вычисления тождественны.

Неограниченные функции

Рассмотрим сначала неограниченную неотрицательную функцию $f(x)$, измеримую на (ограниченном измеримом) множестве M. Возьмем некоторое число $C>0$ и определим функцию $f_C(x)$ на множестве M следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &f_C(x)=f(x), \quad \text{если } f(x)\leqslant C,\\ &f_C(x)=C, \quad \text{если } f(x)>C.\end{aligned} \tag{28.14}$$

(См. рис. 24, где $M=[a, b]$.) Поскольку $f(x)$ измерима на множестве M, функция $f_C(x)$ также измерима. Поскольку $f_C(x)$ ограничена, интеграл Лебега (см. определение 28.4) $\int_M f_C(x)\,dx$ су-

ществует. Мы полагаем

$$\int_M f(x)\,dx = \lim_{C\to\infty} \int_M f_C(x)\,dx. \tag{28.15}$$

Предел (28.15) существует, так как $\int_M f_C(x)\,dx$ — неубывающая функция параметра C, и, следовательно, интеграл $\int_M f(x)\,dx$ имеет смысл. Предел в (28.15) может быть или конечным, или бесконечным. В первом случае мы говорим, интеграл Лебега $\int_M f(x)\,dx$ *сходится* (*конечен*, или имеет *конечное значение*), в последнем случае мы говорим, что он *расходится* (*бесконечен*, или имеет *бесконечное значение*), т. е.

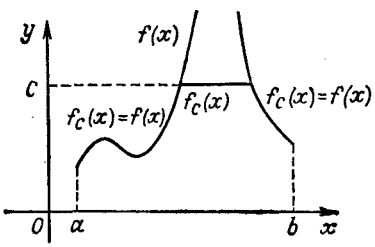

Рис. 24.

$$\int_M f(x)\,dx = +\infty. \tag{28.16}$$

Теперь пусть $f(x)$ — неограниченная функция, не обязательно неотрицательная, измеримая на множестве M. Разобьем ее на «положительную» и «отрицательную» части, т. е. определим на M функции

$$f_+(y) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \geqslant 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases} \tag{28.17}$$

Можно записать, что $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ на M. Как функция $f_+(x)$, так и функция $f_-(x)$ неотрицательны и, очевидно, измеримы на M. Согласно (28.15), интегралы

$$\int_M f_+(x)\,dx, \qquad \int_M f_-(x)\,dx \tag{28.18}$$

существуют, причем каждый интеграл может быть как конечным, так и бесконечным. Если хотя бы один из интегралов (28.18) конечен, то мы говорим, что интеграл $\int_M f(x)\,dx$ *существует* и определяется соотношением

$$\int_M f(x)\,dx = \int_M f_+(x)\,dx - \int_M f_-(x)\,dx. \tag{28.19}$$

Если оба интеграла в (28.18) равны плюс бесконечности, то правая часть соотношения (28.19) не имеет смысла. В этом случае говорят, что интеграл $\int_M f(x)\,dx$ *не существует*.

Замечание 28.2. В первом примере возможны три случая:

1. Оба интеграла (28.18) конечны. Тогда, согласно (28.19), интеграл $\int_M f(x)\,dx$ также конечен. Мы говорим, что этот интеграл *сходится*[1]).

2. Если первый интеграл (28.18) бесконечен, а второй конечен, то из (28.19) следует, что $\int_M f(x)\,dx = +\infty$. В этом случае мы говорим, что рассматриваемый интеграл *расходится*.

3. Если первый интеграл (28.18) конечен, а второй бесконечен, то, согласно (28.19), $\int_M f(x)\,dx = -\infty$. В этом случае мы также говорим, что интеграл $\int_M f(x)\,dx$ *расходится*.

Замечание 28.3. Интеграл Лебега обладает целым рядом «естественных» свойств, подобных свойствам интеграла Римана. Например (предполагается, конечно, что рассматриваемые интегралы существуют),

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ на } M \Rightarrow \int\limits_M f(x)\,dx \leqslant \int\limits_M g(x)\,dx, \tag{28.20}$$

$$\left|\int\limits_M f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_M |f(x)|\,dx, \tag{28.21}$$

$$\int\limits_M [af(x)+bg(x)]\,dx = a\int\limits_M f(x)\,dx + b\int\limits_M g(x)\,dx, \tag{28.22}$$

где a, b — вещественные постоянные (при условии, что правая часть (28.22) имеет смысл, т. е. при том условии, что в правой части мы не получаем суммы типа $+\infty+(-\infty)$ или $-\infty+(+\infty)$. Однако некоторые свойства интеграла Лебега существенным образом отличаются от свойств интеграла Римана, и поэтому в современных математических дисциплинах используется почти исключительно интеграл Лебега. Это касается прежде всего теории функциональных пространств, простым примером которых является пространство $L_2(G)$ (см. также пространства $W_2^{(k)}(G)$, определяемые в следующей главе). В этой теории важная роль отводится приложению именно интеграла Лебега в вопросе о полноте таких пространств, который лежит в основе фундаментальных теоретических исследований, а следовательно, и их приложений. Но даже в задачах классического интегрального исчисления интеграл Лебега является эффективным инструментом. Это относится, например, к соотношениям вида

$$\int\limits_M \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f_n(x)\,dx \tag{28.23}$$

[1]) В этом случае функция $f(x)$ обычно называется *суммируемой*.

(теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла), где использование интеграла Римана приводит к довольно громоздким формулировкам, обеспечивающим справедливость этих теорем. См. [31], а также [33].

Определение интеграла, данное Лебегом, легко распространяется на N-мерное пространство E_N. Ниже мы покажем, как это делается для $N=2$. Читатель может легко понять, как расширить соответствующие определения и результаты для произвольного положительного целого N.

Для $N=2$ открытый квадрат $Q=(a, b)\times(a, b)$ играет роль открытого интервала (a, b) (в N-мерном случае это открытый N-мерный куб $(a, b)\times(a, b)\times\ldots\times(a, b)$). Окрестность точки, которая является интервалом в одномерном случае, здесь представлена соответствующим открытым квадратом. Определения внутренней точки и точки накопления, а следовательно, и определения открытого и замкнутого множеств, остаются без изменения. Здесь необходимо несколько видоизменить определение меры (непустого) ограниченного открытого множества: дело в том, что для $N=2$ нельзя (в отличие от соответствующего утверждения теоремы 28.1) представить такое множество в виде объединения конечного или счетного множества открытых непересекающихся квадратов; однако все эти множества можно представить в виде объединений конечных или счетных множеств замкнутых квадратов, не имеющих общих внутренних точек (см. [31]). Если мерой (по Лебегу) квадрата, которому принадлежит часть его границы либо вся его граница полностью, считать квадрат длины его стороны, то мерой непустого ограниченного открытого множества M будет сумма мер замкнутых квадратов, из которых это множество состоит.

Можно показать, что эта мера не зависит от того, какое разбиение выбрано для множества M (возможен целый ряд таких разбиений). (В действительности подобный подход применим для случая $N=1$.) Тогда мера непустого ограниченного замкнутого множества M будет определяться как разность мер некоторого открытого квадрата M_1, включающего M, и (открытого) множества M_1-M. Эта мера также не зависит от выбора квадрата M_1. Определяя меры ограниченного открытого и ограниченного замкнутого множеств, можно дать определение — точно так же, как в случае $N=1$, — внешней и внутренней мер произвольного непустого ограниченного множества и подойти к рассмотрению понятия ограниченного измеримого по Лебегу множества.

Далее, если дано ограниченное измеримое множество, можно определить, как мы это уже делали, измеримые функции и для каждой измеримой функции (сначала ограниченной, затем неограниченной) определить интеграл Лебега точно так же, как в одномерном случае. Все вышесказанное справедливо и для $N\geqslant 2$.

Здесь следует добавить те же замечания, которые были сделаны для определения интеграла Лебега в случае $N=1$.

В случае когда $N \geqslant 2$, для вычисления интеграла Лебега можно применить, например, теорему Фубини, которую можно сформулировать в более общем виде, чем в случае интеграла Римана (см. [31]).

Уже из первых глав настоящей книги можно видеть, что функции, интегрируемые с квадратом по Лебегу, представляют особый интерес.

Определение 28.5. Говорят, что функция (вещественная) $f(x)$, *измеримая на множестве* M, *интегрируемая с квадратом* (в смысле Лебега) на M, если интеграл

$$\int_M f^2(x)\,dx \tag{28.24}$$

конечен.

Замечание 28.4. В гл. 3, когда в нашем распоряжении еще не было понятий, введенных в данной главе, мы предложили определение более частного характера, для формулировки которого были подобраны иные термины. Чтобы внести определенность в этот вопрос, рассмотрим следующее.

Из соотношения $0 \leqslant (|a|-|b|)^2 = a^2 - 2|ab| + b^2$ (a, b — вещественные числа) непосредственно получаем

$$|ab| \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}. \tag{28.25}$$

Следовательно, если $f(x)$ — функция, интегрируемая с квадратом на M, то из (28.20) и (28.25) (полагая $a=1$, $b=f(x)$, где $x \in M$) имеем

$$\int_M |f(x)|\,dx \leqslant \int_M \frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\int_M f^2(x)\,dx. \tag{28.26}$$

Оба интеграла в правой части этого неравенства конечны. Следовательно, интеграл $\int_M |f(x)|\,dx$, как и (на основании (28.21)) интеграл $\int_M f(x)\,dx$, конечен. Таким образом, если считать, что $f(x)$ измерима на M, то первое условие из (3.1) в определении 3.1 можно опустить.

Подобным же образом из (28.20) и (28.25) (полагая $a=f(x)$, $b=g(x)$ для каждого $x \in M$) получаем

$$\int_M |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \int_M \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}\,dx. \tag{28.27}$$

Следовательно, если $f(x)$, $g(x)$ — функции, интегрируемые с квадратом на M, то интеграл $\int_M |f(x)\,g(x)|\,dx$, а также (на основании

(28.21)) интеграл $\int_M f(x)\,g(x)\,dx$ конечны. Это утверждение было необходимо в гл. 3. Отсюда непосредственно следует второе утверждение, необходимое в указанной выше главе: если $f(x)$, $g(x)$ — функции, интегрируемые с квадратом на множестве M, то функция $af(x)+bg(x)$, где a, b — произвольные вещественные числа, также интегрируема с квадратом на M, поскольку $\int_M [af(x)+bg(x)]^2\,dx = a^2\int_M f^2(x)\,dx + 2ab\int_M f(x)\,g(x)\,dx + b^2\int_M g^2(x)\,dx$, и все интегралы правой части этого соотношения конечны. На основании этого утверждения после несложных рассуждений мы приходим к выводу, что каждая линейная комбинация функций, интегрируемых с квадратом на M, является также функцией, интегрируемой с квадратом на M.

Замечание 28.5. (*Области с границей Липшица.*) В отношении областей, в которых будут проводиться наши исследования дифференциальных уравнений в частных производных, следует заметить, что это области с так называемой границей Липшица, с которыми, кстати сказать, мы уже имели дело.

Определение 28.6. Говорят, что G — область с границей Липшица [1]), если она ограничена (она может быть, вообще говоря, многосвязной) и если существуют положительные постоянные α, β, конечное число m декартовых систем координат $x_1^{(r)}, \ldots, x_N^{(r)}$; $r=1, \ldots, m$, и m функций $a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$, непрерывных в $N-1$-мерных кубах $K^{(r)}$,

$$|x_i^{(r)}| < \alpha, \quad i=1, \ldots, N-1, \tag{28.28}$$

такие что:

а) каждую точку x границы Γ можно представить по крайней мере в одной из рассматриваемых систем координат в виде

$$x = [(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}),\ a.\ (x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})]; \tag{28.29}$$

(б) точки $x=(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}, x_N^{(r)})$, для которых выполняются условия $|x_i^{(r)}| < \alpha$, $i=1, \ldots, N-1$, и

$$a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}) < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}) + \beta \tag{28.30}$$

или

$$a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}) - \beta < x_N^{(r)} < a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}), \tag{28.31}$$

лежат в G или за пределами $\bar{G}$ соответственно.

(в) каждая функция $a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$, $r=1, \ldots, m$, удовлетворяет условию Липшица на кубе $K^{(r)}$, т. е. существует такая постоянная L, что для двух точек $(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$, $(y_1^{(r)}, \ldots, y_{N-1}^{(r)})$

[1]) Говорят также, что граница Γ области G *липшицева*.

из этого куба выполняется неравенство

$$|a_r(y_1^{(r)}, \ldots, y_{N-1}^{(r)}) - a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})| \leqslant$$
$$\leqslant L[(y_1^{(r)} - x_1^{(r)})^2 + \ldots + (y_{N-1}^{(r)} - x_{N-1}^{(r)})^2]^{1/2}\ ^{1}). \quad (28.32)$$

Пример двумерной области с границей Липшица приведен на рис. 25. На этом рисунке можно видеть две «смежные» системы координат (для $r=1$ и $r=2$), а также соответствующие «β-окрестности» границы области. Здесь $N-1$-мерный куб $K^{(r)}$, упоминаемый в определении 28.6, сведен к открытому интервалу $-\alpha < x_1^{(r)} < \alpha$. Из определения очевидным образом следует, что точки границы можно представить в виде (28.29) в нескольких из рассматриваемых m систем координат, и это можно четко видеть на рис. 25.

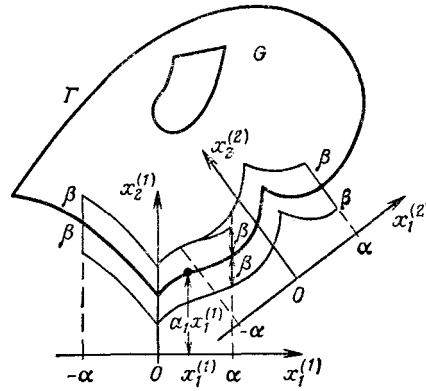

Рис. 25

Примерами областей с границей Липшица может служить окружность, плоское круговое кольцо, треугольник, сфера, куб и т. д. Из определения ясно, что области даже значительно более общего вида могут быть липшицевыми. Следует заметить, что к этому семейству областей не принадлежат, например, двумерные области, имеющие точки возврата (или области с соответствующими сингулярными точками в случае бо́льших размерностей), см. рис. 26, поскольку в этом случае нельзя найти декартовых систем координат, которые обладали бы свойствами, перечисленными в определении 28.6: либо нельзя удовлетворить условию (б) относительно конструкции «β-окрестности» (28.30) и (28.31), либо нельзя удовлетворить условию (28.32) относительно свойства Липшица функций a_r. В самом деле, некоторые приведенные ниже результаты не имеют силы для областей с точками возврата (либо с соответствующими сингулярными точками, когда $N > 2$).

Области вроде показанных на рис. 27 также не являются областями с границей Липшица.

---

[1]) Геометрический смысл этого условия состоит (грубо говоря) в том, что в рассматриваемой r-й системе координат N-е координаты точек границы отличаются «не слишком сильно», если между другими $N-1$ координатами имеется не очень большое различие. Если, в частности, функция $a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$ имеет частные производные первого порядка, ограниченные постоянной L на кубе $K^{(r)}$, то она удовлетворяет условию Липшица (с этой постоянной L) на этом кубе.

Можно показать, что [32] каждая функция $a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$, рассматриваемая в определении 28.6, имеет почти всюду на $(N-1)$-мерном кубе $K^{(r)}$ частные производные первого порядка по всем переменным $x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}$, измеримые и ограниченные постоянной

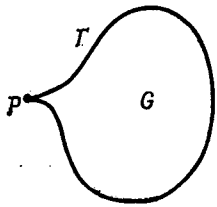

Рис. 26.

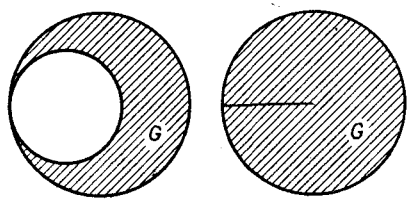

Рис. 27.

L из (28.32). Граница Липшица Г почти всюду имеет (внешнюю) нормаль v. Компоненты $\nu_1(S), \ldots, \nu_N(S)$ единичного вектора внешней нормали являются ограниченными функциями, измеримыми на Г.

Тот факт, что функции a_r имеют почти всюду ограниченные частные производные первого порядка, позволяет ввести простым способом на Г интеграл по площади поверхности и функциональное пространство $L_2(\Gamma)$. Так, рассмотрим одну из систем координат, скажем r-ю, о которых говорится в определении 28.6, и соответствующий $(N-1)$-мерный куб $K^{(r)}$, $|x_i^{(r)}| < \alpha$, $i = 1, \ldots, N-1$, на котором данная функция $a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$ удовлетворяет условию Липшица (28.32). Значения этой функции описывают «часть» $\Gamma^{(r)}$ границы «над кубом $K^{(r)}$». Элемент поверхности dS, лежащий над элементом $dx_1^{(r)} \ldots dx_{N-1}^{(r)}$, определяется соотношением

$$dS = \left[1 + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_1^{(r)}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{N-1}^{(r)}}\right)^2\right]^{1/2} dx_1^{(r)} \ldots dx_{N-1}^{(r)}.$$

Если на $\Gamma^{(r)}$ дана функция $u(S) = u(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}))$, измеримая на $K^{(r)}$, то

$$\int\limits_{\Gamma^{(r)}} u(S)\, dS = \int\limits_{K^{(r)}} u(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})) \times$$
$$\times \left[1 + \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_1^{(r)}}\right)^2 + \ldots + \frac{\partial a_r}{\partial x_{N-1}^{(r)}}\right)^2\Bigg]^{1/2} dx_1^{(r)}, \ldots, dx_{N-1}^{(r)}, \quad (28.33)$$

где интеграл в правой части должен пониматься в смысле Лебега. (Для непрерывных функций это определение совпадает с определением поверхностного интеграла по $\Gamma^{(r)}$, знакомого читателю из классического курса математического анализа.) Если к тому же интеграл

$$\int\limits_{\Gamma^{(r)}} u^2(S)\, dS \quad (28.34)$$

конечен, говорят, что функция $u(S)$ *интегрируема с квадратом* (в смысле Лебега) *на* $\Gamma^{(r)}$. Если $u(S)$ интегрируема с квадратом для всех $r=1, \ldots, m$, то она *интегрируема с квадратом на границе* Γ.

Естественно, мы не можем представить интеграл $\int_\Gamma u(S)\,dS$ как сумму интегралов $\int_{\Gamma^{(r)}} u(S)\,dS$ для всех $r=1, \ldots, m$, поскольку, как мы уже упоминали, некоторые части границы Γ в отдельных системах координат перекрываются. Определение $\int_\Gamma u(S)\,dS$ можно усовершенствовать следующим образом. Обозначим через V_r ($r=1, \ldots, m$) множество всех точек x, для которых (см. (28.28), (28.30) и (28.31)) выполняются соотношения

$$|x_i^{(r)}|<\alpha, \quad i=1, 2, \ldots, N-1,$$
$$a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})-\beta<x_N^{(r)}<a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})+\beta.$$

(Сравните с рис. 25; таким образом, V_r является «β-окрестностью» границы Γ над кубом $K^{(r)}$.) Множества V_r, $r=1, \ldots, m$, образуют систему открытых множеств на E_N, покрывая, что очевидно, границу Γ. Можно показать (см. [32]), что в этом случае можно найти функции $\varphi_r(x)$ с компактными носителями в V_r, такие что соотношение

$$\sum_{r=1}^{m}\varphi_r(x)=1 \tag{28.35}$$

будет выполняться в каждой точке $x\in\Gamma$. Пусть $u_r(S)=u(S)\,\varphi_r(S)$. Из (28.35) следует, что

$$\sum_{r=1}^{m}u_r(S)=u(S)$$

на Γ. Тогда $\int_\Gamma u(S)\,dS$ будет определяться соотношением

$$\int_\Gamma u(S)\,dS=\sum_{r=1}^{m}\int_{\Gamma^{(r)}}u_r(S)\,dS.$$

С точки зрения (28.35) мы *определили* интеграл $\int_\Gamma u(S)\,dS$ посредством *разбиения единицы*. Можно показать, что представленный таким образом интеграл не зависит ни от того, какая из m систем координат выбирается, ни от выбора функций $\varphi_r(x)$ (конечно, пока эти функции удовлетворяют условию (28.35)). Эти и смежные с ними вопросы рассматриваются в книге [32], гл. 3, § 1.

С помощью интеграла $\int_\Gamma u(S)\,dS$ можно определить меру произвольной части Γ_1 границы. А именно, мы определяем ее с помощью интеграла $\int_\Gamma u(S)\,dS$, где в точках рассматриваемой

части границы $u(S)=1$ и $u(S)=0$ в остальных точках границы (естественно, при условии, что Γ_1 такова, что $u(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}))$ измерима на K^r для всех $r=1, \ldots, m$). Если для функций $u(S)$, $v(S)$, интегрируемых с квадратом на границе Γ, скалярное произведение, норму и метрику определить, как обычно, соотношениями

$$(u, v)_\Gamma = \int_\Gamma u(S)\, v(S)\, dS \tag{28.36}$$

$$\|u\|_\Gamma = ((u, u)_\Gamma)^{1/2}, \tag{28.37}$$

$$\rho_\Gamma(u, v) = \|u-v\|_\Gamma \tag{28.38}$$

соответственно, мы получим (как легко показать) гильбертово пространство, которое обозначим через $L_2(\Gamma)$.

Замечание 28.6. Рассмотренная выше граница Липшица является границей довольно общего вида. В приложениях, как правило, встречаются границы, обладающие ко всему прочему определенными свойствами гладкости.

Граница Липшица Γ называется *регулярной в окрестности точки* $x_0 \in \Gamma$, если можно найти такую систему координат (см. определение 28.6), что $x_0 = ({}_0x_1^{(r)}, \ldots, {}_0x_{N-1}^{(r)}, a_r({}_0x_1^{(r)}, \ldots, {}_0x_{N-1}^{(r)}))$, где $({}_0x_1^{(r)}, \ldots, {}_0x_{N-1}^{(r)})$ является точкой (внутренней) куба $K^{(r)}$, $|x_i^{(r)}| < \alpha$, $i=1, \ldots, N-1$ (ср. с (28.28)), а функция $a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})$ имеет непрерывные производные всех порядков в некоторой окрестности точки $({}_0x_1^{(r)}, \ldots, {}_0x_{N-1}^{(r)})$.

Если граница Липшица Γ регулярна в окрестности каждой точки (или почти каждой точки), то говорят, что она *регулярна* (или *регулярна почти всюду*). Примером границы, регулярной почти всюду, является граница куба; ясно, что это липшицева граница, и она регулярна в окрестности каждой точки куба, за исключением точек, лежащих на вершинах и на ребрах куба. Естественно, проекции этих точек образуют множество меры нуль в каждом из соответствующих кубов $K^{(r)}$.

Глава 29

Пространство $W_2^{(k)}(G)$

Как и в предыдущей главе, мы будем рассматривать здесь ограниченную область G с границей Липшица Γ.

Обозначим через $C^{(\infty)}(\overline{G})$ линейное множество всех функций $u(x)$, непрерывных с их производными всех порядков в замкнутой области $\overline{G}$ (в обычном смысле непрерывного расширения на границе). Через $C_0^{(\infty)}(G)$ обозначим линейное множество всех функций *с компактным носителем в области* G, т. е. множество таких

функций $u \in C^{(\infty)}(\bar{G})$, для которых $u(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности (как правило, различной для разных функций из $C_0^{(\infty)}(G)$) границы. Из гл. 8 известно, что замыкание точек области G, для которых $u(x) \neq 0$, называется *носителем* функции $u(x)$ и обозначается через $\operatorname{supp} u$. Для каждой функции $u \in C_0^{(\infty)}(G)$ $\operatorname{supp} u$ является замкнутым множеством, а поскольку $\operatorname{supp} u \subset G$, он удален от границы Γ на некоторое положительное расстояние.

Если $N=2$, а G — квадрат $-2 < x_1 < 2$, $-2 < x_2 < 2$, пример функции с компактным носителем из G дается следующим образом:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-1/(1-x_1^2-x_2^2)}, & \text{когда } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0 \text{ во всех других точках } \bar{G}. \end{cases} \tag{29.1}$$

(Пересечение «поверхности» (29.1) плоскостью $x_2 = 0$ представлено на рис. 28.) Прямым вычислением можно легко показать (см. пример, проиллюстрированный рис. 6, из гл. 8), что функция (29.1) имеет в G производные всех порядков, следовательно, $u \in C^{(\infty)}(\bar{G})$.

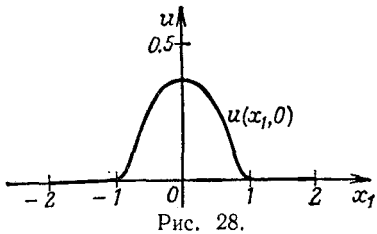

Рис. 28.

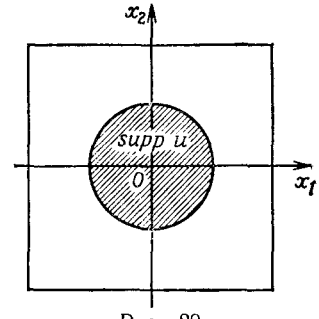

Рис. 29.

Кроме того, $\operatorname{supp} u$ — замкнутый круг, центр которого находится в начале координат и радиус которого равен единице; ясно, что расстояние от этого круга до границы квадрата G положительно и равно единице (см. рис. 29).

Как известно, скалярное произведение функций из пространства $L_2(G)$ определяется соотношением

$$(u, v) = \int_G u(x) v(x)\, dx. \tag{29.2}$$

Более подробное обозначение это — $(u, v)_{L_2(G)}$. Для некоторых функций из $L_2(G)$ можно ввести еще одно скалярное произведение, которое окажется очень полезным в последующих главах и с помощью которого мы строим так называемое пространство $W_2^{(k)}(\bar{G})$, вкратце $W_2^{(k)}$. Свойства этого пространства настолько удобны для исследования рассматриваемых в дальнейшем задач, что мы будем оперировать почти исключительно в этом пространстве.

Рассмотрим прежде всего вышеуказанное множество $C^{\infty}(\bar{G})$, т. е. линейное множество функций, непрерывных со своими производными всех порядков в $\bar{G}$. Пусть k — неотрицательное целое число. Через

$$(u,\ v)_{W_2^{(k)}(G)},\quad u\in C^{(\infty)}(\bar{G}),\quad v\in C^{(\infty)}(G), \tag{29.3}$$

обозначим сумму скалярных произведений (в $L_2(G)$) функций $u(x)$ и $v(x)$ и их производных (всегда от одних и тех же переменных) вплоть до k-го порядка включительно. (Точное значение этого символа дается в (29.10).) Если $N=1$, то

$$(u,\ v)_{W_2^{(1)}(a,\ b)}=(u,\ v)_{L_2(a,\ b)}+(u',\ v')_{L_2(a,\ b)}=\int\limits_a^b uv\,dx+\int\limits_a^b u'v'\,dx \tag{29.4}$$

(ср. с примером 6.4),

$$(u,\ v)_{W_2^{(2)}(a,\ b)}=(u,\ v)_{L_2(a,\ b)}+(u',\ v')_{L_2(a,\ b)}+(u'',\ v'')_{L_2(a,\ b)}=$$

$$=\int\limits_a^b uv\,dx+\int\limits_a^b u'v'\,dx+\int\limits_a^b u''v''\,dx. \tag{29.5}$$

Если $N=2$, то (для краткости вместо $L_2(G)$ и $W_2^{(k)}(G)$ мы пишем L_2 и $W_2^{(k)}$)

$$(u,\ v)_{W_2^{(1)}}=(u,\ v)_{L_2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{L_2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L_2}=$$

$$=\int\limits_G uv\,dx+\int\limits_G\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx+\int\limits_G\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,dx, \tag{29.6}$$

$$(u,\ v)_{W_2^{(2)}}=(u,\ v)_{L_2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial v}{\partial x_1}\right)_{L_2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial v}{\partial x_2}\right)_{L_2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)_{L_2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\ \frac{\partial v^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{L_2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)_{L_2}=$$

$$=\int\limits_G uv\,dx+\int\limits_G\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx+\int\limits_G\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\,dx+\int\limits_G\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\,dx+$$

$$+\int\limits_G\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\,dx+\int\limits_G\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\,dx \tag{29.7}$$

и т. д.

Перейдем к общему случаю. Обозначим через i вектор — так называемый *мультииндекс*, — координаты которого $i_1,\ \ldots,\ i_N$ являются неотрицательными целыми числами,

$$i=(i_1,\ \ldots,\ i_N). \tag{29.8}$$

Далее, пусть $D^i u=\dfrac{\partial^{i_1+\ldots+i_N}}{\partial x_1^{i_1},\ \ldots,\ \partial x_N^{i_N}}$ или, используя обозначение

$|i| = i_1 + \ldots + i_N$,

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1}, \ldots, \partial x_N^{i_N}}. \tag{29.9}$$

Здесь не исключен тот случай, когда некоторые координаты вектора i являются нулями. Если, например, $N=2$ и $i=(3, 0)$, то мы напишем не $D^i u = \partial^3 u/\partial x_1^3 \partial x_2^0$, а $D^i u = \partial^3 u/\partial x_1^3$. Если $|i|=0$, то $D^i u = u$. Заметим, что в (29.9) выполнение условия $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ не обязательно. Достаточно, чтобы u была достаточно гладкой функцией, для которой (29.9) имеет смысл. Однако здесь этот факт существенного значения не имеет.

Согласно сказанному выше, определим

$$(u, v)_{W_2^{(k)}} = \sum_{|i| \leqslant k} \int_G D^i u D^i v \, dx, \quad u \in C^{(\infty)}(\overline{G}), \ v \in C^{(\infty)}(G), \tag{29.10}$$

где суммирование по $|i| \leqslant k$ означает, что необходимо учитывать все векторы (29.8), для которых $|i| = i_1 + \ldots + i_N \leqslant k$. В частности, когда мы строим произведение $(u, v)_{W_2^{(2)}}$ в случае $N=2$, мы должны рассматривать все двумерные векторы

$$(0, 0),$$
$$(1, 0), \ (0, 1),$$
$$(2, 0), \ (1, 1), \ (0, 2),$$

как и в (29.7). Легко показать, что соотношение (29.10) определяет скалярное произведение на линейном множестве $C^{(\infty)}(\overline{G})$. Свойства (6.3) и (6.4) скалярного произведения очевидны. Согласно (29.10),

$$(u, u)_{W_2^{(k)}} = \sum_{|i| \leqslant k} \int_G (D^i u)^2 \, dx, \tag{29.11}$$

откуда следует, что $(u, u)_{W_2^{(k)}} \geqslant 0$ для любой функции $u \in C^{\infty}(\overline{G})$. Если $u(x) \equiv 0$ в G, то $(u, u)_{W_2^{(k)}} = 0$; в то же время из (29.11) следует, что если $(u, u)_{W_2^{(k)}} \geqslant 0$, то каждое из слагаемых равно нулю. Отсюда следует, что $\int_G u^2 \, dx = 0$ и (поскольку $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$) что $u(x) \equiv 0$ в G. Поскольку соотношение (29.10) определяет скалярное произведение на $C^{(\infty)}(\overline{G})$, можно с помощью соотношений

$$\|u\|_{W_2^{(k)}} = \sqrt{(u, u)_{W_2^{(k)}}}, \quad u \in C^{(\infty)}(\overline{G}), \tag{29.12}$$

$$\rho(u, v)_{W_2^{(k)}} = \|u - v\|_{W_2^{(k)}}, \quad u, v \in C^{(\infty)}(\overline{G}), \tag{29.13}$$

ввести обычным способом на этом множестве норму и расстояние. Таким образом, линейное множество $C^{(\infty)}(\overline{G})$ становится метриче-

ским пространством. Обозначим его через $S_2^{(k)}$, или, более подробно, через $S_2^{(k)}(G)$. Итак, $S_2^{(k)}(G)$ является предгильбертовым пространством, скалярное произведение в котором дается формулой (29.10), норма — формулой (29.12) и расстояние — формулой (29.13).

Замечание 29.1. Из (29.12) и (29.10) получаем соотношение

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(G)} = \sum_{|i|\leqslant k} \int_G (D^i u)^2 dx = \sum_{|i|\leqslant k} \|D^i u\|^2_{L_2(G)}. \tag{29.14}$$

Квадрат нормы функции $u \in C^{(\infty)}(\bar{G})$ в $S_2^{(k)}(G)$ равен сумме квадратов норм в $L_2(G)$ самой функции u и всех ее частных производных до порядка k включительно. Отсюда немедленно получаем

$$\rho^2(u, v)_{W_2^{(k)}(G)} = \|u - v\|^2_{W_2^{(k)}(G)} = \sum_{|i|\leqslant k} \|D^i u - D^i v\|^2_{L_2(G)} =$$
$$= \sum_{|i|\leqslant k} \rho^2(D^i u, D^i v)_{L_2(G)}. \tag{29.15}$$

Следовательно, сходимость в $S_2^{(k)}(G)$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } S_2^{(k)}(G) \tag{29.16}$$

означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|^2_{W_2^{(k)}(G)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|i|\leqslant k} \|D^i u_n - D^i u\|^2_{L_2(G)} = 0, \tag{29.17}$$

откуда немедленно получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } S_2^{(k)}(G) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} D^i u_n = D^i u \text{ в } L_2(G) \text{ для всех } |i| \leqslant k, \tag{29.18}$$

т. е. последовательность $\{u_n\}$ сходится в пространстве $S_2^{(k)}(G)$ к элементу u тогда и только тогда, когда последовательность $\{u_n\}$ и последовательности соответствующих производных $\{D^i u_n\}$ ($|i| \leqslant k$) сходятся в $L_2(G)$ к функции u и ее производным $D^i u$ соответственно.

Точно таким же способом можно показать (мы здесь на этом подробно не останавливаемся), что *последовательность* $\{u_n\}$ *фундаментальна в* $S_2^{(k)}(G)$ *тогда и только тогда, когда все последовательности* $\{D^i u_n\}$, $|i| \leqslant k$, *фундаментальны в* $L_2(G)$, т. е.

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|u_m - u_n\|_{W_2^{(k)}(G)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|D^i u_m - D^i u_n\|_{L_2(G)} = 0 \text{ для всех } |i| \leqslant k. \tag{29.19}$$

Замечание 29.2. При $k = 0$ мы получаем скалярное произведение, норму и расстояние пространства $L_2(G)$, т. е.

$$(u, v)_{W_2^{(0)}} = (u, v)_{L_2}, \quad u, v \in C^{(\infty)}(\bar{G}) \tag{29.20}$$

и т. д.

Замечание 29.3. Здесь следует отметить следующее свойство производных функций из $S_2^{(k)}(G)$, которое будет полезно для нас в дальнейшем. Пусть $u \in S_2^{(k)}(G)$ и пусть φ — произвольная функция с компактным носителем в G. Согласно теореме Грина (теорема 8.7), для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant N$, выполняется

$$\int_G \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx = \int_\Gamma u\varphi \nu_j \, dS - \int_G u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = -\int_G u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx, \quad (29.21)$$

поскольку $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ и интеграл вдоль границы Γ равен нулю. Повторяя эту процедуру, мы получаем в общем случае для $1 \leqslant |i| \leqslant k$ соотношение

$$\int_G D^i u \varphi \, dx = (-1)^{|i|} \int_G u D^i \varphi \, dx, \quad \varphi \in C_0^{(\infty)}(G). \quad (29.22)$$

Итак, *для каждой функции* $u \in S_2^{(k)}(G)$ *и для каждой* $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ *выполняется интегральное тождество* (29.22)[1]).

Вернемся к вопросу о «пополнении» пространства $S_2^{(k)}(G)$ и построении пространства $W_2^{(k)}(G)$. Нетрудно показать (см. аналогичные рассуждения на с. 119), что пространство $S_2^{(k)}$ не полное. При $k=0$ полным пространством, которое содержит в себе $S_2^{(k)}(G)$ и в котором линейное множество $C^{(\infty)}(\overline{G})$ плотное, является пространство $L_2(G)$. В этом случае скалярное произведение (29.10) расширяется «естественным образом» из линеала $C^{(\infty)}(\overline{G})$ до функций из пространства $L_2(G)$, которое является полным. При $k>0$ скалярное произведение (29.10) нельзя расширить на все пространство $L_2(G)$, так как не все элементы последнего имеют требуемые производные (хотя бы в некотором «разумном» смысле). Однако мы покажем, как можно построить соответствующее полное пространство и для этого случая[2]). Рассмотрим произвольную последовательность $\{u_n\}$, фундаментальную в $S_2^{(k)}(G)$. Возможны два случая:

(i) Последовательность $\{u_n\}$ сходится в пространстве $S_2^{(k)}(G)$, т. е. $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ в $S_2^{(k)}(G)$. Тогда $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$. Согласно (29.18), последовательность $\{u_n\}$ и последовательности $\{D^i u_n\}$ сходятся в $L_2(G)$ к функции u и ее производным $D^i u$ ($|i| \leqslant k$) соответственно.

(ii) Последовательность $\{u_n\}$ не сходится в пространстве $S_2^{(k)}(G)$. Но поскольку она фундаментальна в $S_2^{(k)}(G)$ по предположению, то

[1]) Ясно, что это тождество выполняется для более широкого класса функций, нежели $S_2^{(k)}(G)$, для которого мы предполагали, что его элементы принадлежат линейному множеству $C^{(\infty)}(\overline{G})$, т. е. имеют непрерывные производные всех порядков даже в замкнутой области $\overline{G}$. на данном этапе вдаваться в детали этой проблемы не имеет смысла.

[2]) Для тех читателей, которые занимаются функциональным анализом, достаточно сказать, что мы строим полную оболочку пространства в норме (29.12); см. аналогичную конструкцию в гл. 10.

согласно (29.19) каждая из последовательностей $\{D^i u_n\}$ $(|i| \leqslant k)$ будет фундаментальной в $L_2(G)$. Поскольку $L_2(G)$ — полное пространство, каждая из этих последовательностей имеет определенный предел в этом пространстве, который мы обозначим через $v^{(i)}$,

$$\lim_{n\to\infty} D^i u_n = v^{(i)} \text{ в } L_2(G). \tag{29.23}$$

Для $|i|=0$ соответствующий предел обозначим через u:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } L_2(G). \tag{29.24}$$

Как мы увидим, требуемое полное пространство будет построено с помощью именно этих предельных элементов u. Что касается функций $v^{(i)}$, $|i| \geqslant 1$, мы пока не можем утверждать, что они являются производными предельной функции u, поскольку об этой функции нам известно лишь то, что она принадлежит пространству $L_2(G)$. Однако мы покажем, что эти функции удовлетворяют тому же интегральному тождеству (29.22), что и производные функций из $S_2^{(k)}(G)$. Поэтому функции $v^{(i)}$ мы назовем *обобщенными производными функции* u. Поскольку $u_n \in S_2^{(k)}(G)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то согласно (29.22), соотношение

$$\int_G D^i u_n \varphi \, dx = (-1)^{|i|} \int_G u_n D^i \varphi \, dx \tag{29.25}$$

справедливо для всех i, $1 \leqslant |i| \leqslant k$, и $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$. Устремляя $n \to \infty$ и учитывая формулы (29.23) и (29.24) (мы поступаем так на основании теоремы 5.13), получаем

$$\int_G v^{(i)} \varphi \, dx = (-1)^{|i|} \int_G u D^i \varphi \, dx, \quad 1 \leqslant |i| \leqslant k, \quad \varphi \in C_0^{(\infty)}(G), \tag{29.26}$$

что подтверждает указанное выше утверждение. Как уже говорилось, функции $v^{(i)}$ называются обобщенными производными функции u. Возникает следующий вопрос: возможно ли, чтобы две последовательности $\{u_n\}$, $\{\tilde{u}_n\}$, фундаментальные в $S_2^{(k)}(G)$, имели один и тот же предел (29.24), но разные пределы (29.23)? Если бы это было так, то одна и та же функция u имела бы различные обобщенные производные, что свидетельствовало бы по крайней мере об некорректности введенного нами понятия. Мы покажем, что если u имеет обобщенные производные $v^{(i)}$, $1 \leqslant |i| \leqslant k$, то эти производные определяются этой функцией однозначным образом. Итак, пусть $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в $S^{(k)}(G)$, для которой выполняются соотношения (29.23), (29.24), и пусть $\{\tilde{u}_n\}$ — некоторая иная фундаментальная последовательность в $S_2^{(k)}(G)$, для которой также выполняется соотношение (29.24) и для которой имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} D^i \tilde{u}_n = \tilde{v}^{(i)} \text{ в } L_2(G), \quad 1 \leqslant |i| \leqslant k. \tag{29.27}$$

Рассуждая таким же образом, как и выше (см. 29.25), (29.26)), находим, что для функций $\tilde{v}^{(i)}$ имеет место соотношение

$$\int_G \tilde{v}^{(i)}\varphi\,dx=(-1)^{|i|}\int_G uD^i\varphi\,dx,\quad 1\leqslant|i|\leqslant k,\quad \varphi\in C_0^{(\infty)}(G). \tag{29.28}$$

Беря произвольное фиксирование i, $1\leqslant|i|\leqslant k$, и вычитая (29.28) из (29.26), мы получаем

$$\int_G (v^{(i)}-\tilde{v}^{(i)})\,\varphi\,dx=0,\quad \varphi\in C_0^{(\infty)}(G). \tag{29.29}$$

Поскольку (29.29) выполняется для любой функции $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$ и множество $C_0^{(\infty)}(G)$ плотно в $L_2(G)$ (см. теорему 8.6), то, согласно теореме 5.15,

$$\tilde{v}^{(i)}=v^{(i)} \tag{29.30}$$

для любого i, $1\leqslant|i|\leqslant k$, что и требовалось доказать. Таким образом, обобщенные производные функции u определяются этой функцией однозначно. Обозначим их так же, как обозначаются производные в классическом смысле (см. (29.9)), через D^iu. Таким образом, в дальнейшем под символом D^iu следует понимать обобщенные производные функции u в смысле конструкции (29.24), (29.23). Как одно из следствий этого определения мы имеем, что $D^iu\in L_2(G)$. Поскольку обобщенные производные однозначно определяются функцией u, то простым рассуждением мы приходим к выводу, что если u — достаточно гладкая функция (в частности, если $u\in S_2^{(k)}(G)$), то понятие обобщенных производных совпадает с понятием производных в классическом смысле. См. также замечание 29.5.

Если к элементам пространства $S_2^{(k)}(G)$ (т. е. к элементам линеала $C^{(\infty)}(\bar{G})$) прибавить все предельные элементы (29.24), соответствующие вышеописанной конструкции, мы получим некоторое линейное множество E_k, аналогичное линеалу D, построенному в гл. 10. Нетрудно показать (так же, как мы делали это в гл. 10), что:

(i) соотношение

$$(u,\ v)_{W_2^{(k)}}=\sum_{|i|\leqslant k}\int_G D^iuD^iv\,dx,\quad u\in E_k,\quad v\in E_k \tag{29.31}$$

определяет на E_k некоторое скалярное произведение, которое является расширением скалярного произведения, определенного ранее соотношением (29.10) только для элементов u, v линеала $C^{(\infty)}(\bar{G})$, на все элементы линеала E_k;

(ii) соответствующее предгильбертово пространство (норма и метрика которого определены обычным способом на основе этого скалярного произведения) — полное, т. е. оно является гильбертовым пространством.

Определение 29.1. Гильбертово пространство, элементы которого являются элементами линеала E_k и скалярное произведение в котором определяется соотношением (29.31), называется *пространством* $W_2^{(k)}(G)$. Из конструкции пространства $W_2^{(k)}(G)$ вытекает прежде всего (см. гл. 10), что множество $C^{(\infty)}(\overline{G})$ плотно в этом пространстве. Далее, ясно, что выполняются соотношения (29.14), (29.15), а также выполняются вытекающие из них соотношения (29.18), (29.19), установленные нами первоначально только для элементов множества $S_2^{(k)}$. Можно показать, что пространство $W_2^{(k)}(G)$ *сепарабельно* (см. [32]). Примером счетного плотного множества в $W_2^{(k)}(G)$ может служить множество всех полиномов от N переменных с рациональными коэффициентами.

Замечание 29.4. Элементы пространства $W_2^{(k)}(G)$ являются, с одной стороны, функциями из линеала $C^{(\infty)}(\overline{G})$ и, с другой стороны, функциями из $L_2(G)$, имеющими обобщенные производные вида (29.23), которые, следовательно, можно аппроксимировать с произвольной точностью в метрике, определяемой скалярным произведением (29.31), функциями из $C^{(\infty)}(\overline{G})$. В частности, пространству $W_2^{(k)}(G)$ принадлежат функции, имеющие в $\overline{G}$ непрерывные производные до порядка $k-1$ включительно и непрерывные или кусочно-непрерывные производные порядка k.

Пространство $W_2^{(k)}(G)$ можно построить и иным способом. Прежде всего, обобщенные производные можно определить соотношением (29.22). Говорят, что функция $v^{(i)} \in L_2(G)$ является *обобщенной производной* (порядка $|i|$) *функции* $u \in L_2(G)$, если для каждой $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_G u^{(i)} \varphi \, dx = (-1)^{|i|} \int\limits_G u D^i \varphi \, dx, \tag{29.32}$$

что мы записываем в виде

$$v^{(i)} = D^i u. \tag{29.33}$$

Заметим, что само определение обобщенных производных предполагает интегрируемость с квадратом в области G. Поэтому скалярное произведение $(u, v)_k$ на линеале всех функций u, имеющих обобщенные производные[1]) до порядка k включительно, можно определить соотношением

$$(u, v)_k = \sum_{|i| \leqslant k} \int\limits_G D^i u D^i v dx. \tag{29.34}$$

Предгильбертово пространство, построенное с помощью этого скалярного произведения, является полным[2]). Если рассматриваемая

[1]) Эти производные однозначно определяются функциями u, см. замечание 29.1.

[2]) В литературе пространство, построенное таким образом, часто обозна-

область имеет границу Липшица, это предгильбертово пространство тождественно пространству $W_2^{(k)}(G)$ (см. [32]). При $k=0$, разумеется, $W_2^{(0)}(G)=L_2(G)$. При $k>0$ элементы пространства $W_2^{(k)}(G)$ являются теми элементами из $L_2(G)$, которые имеют обобщенные производные (интегрируемые с квадратом в G) в смысле одного из двух представленных выше определений до порядка k включительно.

Замечание 29.5. Легко установить следующие соотношения (вытекающие почти непосредственно из определений). Если $u \in W_2^{(k)}(G)$, то

1. $u \in W_2^{(l)}(G)$ для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant k$;
2. ее обобщенные производные $D^i u$, $|i| < k$, принадлежат пространству $W_2^{(k-|i|)}(G)$, причем выполняется ряд условий, аналогичных условиям для функций из $C^{(\infty)}(\bar{G})$, например $D^i(D^j u) = D^{i+j}u$, где $i+j$ — сумма векторов i и j, и т. д.

Замечание 29.6. Если $u \in C^{(\infty)}(\bar{G})$, то обобщенные производные являются производными в обычном (классическом) смысле. Само собой разумеется, что если u только из $W_2^{(k)}(G)$, то это не так. Если $N=1$, то условие $u \in W_2^{(1)}(a, b)$ гарантирует абсолютную непрерывность функции u на интервале $[a, b]$. (Более точно: поскольку речь идет о функции из $u \in L_2(a, b)$, то, меняя соответствующим образом значения этой функции на множестве меры нуль, можно сделать эту функцию абсолютно непрерывной на интервале $[a, b]$. Например, функция, имеющая скачок в некоторой точке $x \in (a, b)$, не может принадлежать $W_2^{(1)}(a, b)$, так как изменение значений этой функции в точках, образующих множество меры нуль, не сделает ее непрерывной.) Производная $u'(x)$ существует почти всюду на $[a, b]$, и при этом она равна обобщенной производной функции u почти всюду на $[a, b]$. Это утверждение справедливо и для $N>1$. Например, если функция u имеет в G обобщенную частную производную по x_1 (при условии, что значения u соответствующим образом заменены в G на множестве меры нуль), то u абсолютно непрерывна почти на всех прямых, параллельных оси x_1. Производная $\partial u/\partial x_1$ существует почти всюду, и почти всюду она тождественна обобщенной производной функции u. Более подробное изложение этих вопросов см. в [32].

Замечание 29.7. Более общим понятием, нежели обобщенная производная, является понятие так называемого *распределения*, см. [32].

чается через $H^k(G)$. Это обозначение не является общепринятым (многие авторы через $H^k(G)$ обозначают пространство $W_2^{(k)}(G)$, определяемое вышеприведенной конструкцией расширения пространства $S_2^{(k)}(G)$). Причина этого станет ясна из дальнейшего.

Глава 30

Следы функций из пространства $W_2^{(k)}(G)$. Пространство $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$. Обобщенные неравенства Фридрихса и Пуанкаре

Как следует из предыдущей главы, пространство $W_2^{(k)}(G)$ образовано функциями из линеала $C^{(\infty)}(\overline{G})$, которые имеют, следовательно, непрерывные производные всех порядков в $\overline{G}$, и его «пополнением» по метрике (29.13), т. е., грубо говоря, теми функциями из $L_2(G)$, для которых можно говорить (в некотором обобщенном смысле) об их производных до порядка k включительно.

На границе значения $u(S)$ каждой функции, непрерывной в $\overline{G}$ и, следовательно, тем более значения каждой функции $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ однозначно определены. Будем называть функцию $u(S)$ *следом функции* $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ на Г. Ясно, что след функции $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ непрерывен на Г, а следовательно, и интегрируем с квадратом на Г. Поэтому можно записать, что $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{G}) \Rightarrow$ $\Rightarrow u(S) \in L_2(\Gamma)$. (Относительно пространства $L_2(\Gamma)$ см. в конце гл. 28.) Следующая теорема позволяет расширить концепцию следа на все функции из $W_2^{(k)}(G)$, $k \geqslant 1$, т. е. и на те функции, которые не принадлежат $C^{(\infty)}(\overline{G})$ и которые в определенных случаях не имеют непрерывного продолжения на границу.

Теорема 30.1 [1]). *Пусть G — область с границей Липшица. Тогда имеется единственный ограниченный линейный оператор T, который отображает* пространство $W_2^{(1)}(G)$ *в пространство* $L_2(\Gamma)$. *Если* $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$, то $Tu(x) = u(S)$.

Теорема 30.1 заслуживает нескольких более подробных замечаний.

Из этой теоремы следует, что каждой функции $u \in W_2^{(1)}(G)$ соответствует некоторая функция $u(S) \in L_2(\Gamma)$ — ее след на границе. Это соответствие, обозначенное в теореме 30.1 через T, прежде всего таково, что оно для каждой функции $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ определяет ее след в том смысле, как было указано выше [2]), и (поскольку оператор T линейный и ограниченный, а следовательно, и непрерывный — в соответствии с теоремой 8.3) таково, что каждой паре функций, «близких» в $W_2^{(1)}(G)$, соответствует на Г пара функций, «близких» в $L_2(\Gamma)$. Поскольку $C^{(\infty)}(\overline{G})$ — множество, плотное в $W_2^{(1)}(G)$, то след $u(S)$ каждой функции $u \in W_2^{(1)}(S)$, $u \notin C^{(\infty)}(\overline{G})$, можно рассматривать как предел в $L_2(\Gamma)$ последова-

---

[1]) Доказательства см. в [32].

[2]) В теореме 30.1 этот факт отмечен словами «для каждой функции $u(x) \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ имеет место соотношение $Tu(x) = u(S)$».

тельности следов $\{u_n(S)\}$ функций $u_n(x)$, принадлежащих $C^{(\infty)}(\overline{G})$ и сходящихся в $W_2^{(1)}(G)$ к рассматриваемой функции u[1]). Нетрудно показать, что если $u \in W_2^{(1)}(G)$ — непрерывная функция в замкнутой области $\overline{G}$, то ее след $u(S)$ задается ее значениями на границе в обычном смысле. Таким образом, оператор T имеет «естественные» свойства.

Замечание 30.1. У читателя может возникнуть вопрос, почему мы не определили следы непосредственно для функций из $L_2(G)$ и почему нам для этой цели понадобились функции из $W_2^{(1)}(G)$. Если бы все функции $u \in L_2(G)$ были непрерывны в $\overline{G}$, задача была бы простой: след функции было бы достаточно определить ее значением на границе. Однако не каждая функция из $L_2(G)$ непрерывна в $\overline{G}$. Возникает вопрос, что же следует понимать под следом такой функции. Известно, что функция $u \in L_2(G)$ не меняется как элемент пространства $L_2(G)$, если изменить ее значения на множестве меры нуль, например на границе Г. Чтобы определить след функции $u(x)$, мы должны охарактеризовать каким-либо образом поведение этой функции в окрестности границы Г. Таким образом, в основу теоремы 30.1 положена вполне естественная мысль: аппроксимировать функцию $u(x)$ в области G последовательностью функций $u_n(x)$, достаточно гладких (или по крайней мере непрерывных) в $\overline{G}$, и определить след $u(S)$ функции $u(x)$ как предел соответствующей последовательности следов $u_n(S)$ этих функций. Если $u \in W_2^{(1)}(G)$, то теорема 30.1 обеспечивает сходимость в $L_2(\Gamma)$ последовательности $\{u_n(S)\}$ к некоторому пределу $u(S)$, а также, как уже говорилось, независимость этого предела от того, какая из последовательностей $\{u_n(x)\}$, сходящихся к $u(x)$ в $W_2^{(1)}(G)$, была взята. И наоборот, если последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к $u(x)$ только в пространстве $L_2(G)$ (когда $u(x)$ принадлежит только пространству $L_2(G)$, нельзя требовать большего), то, как видно из следующего простого примера, соответствующая последовательность $\{u_n(S)\}$ может вообще не сходиться в $L_2(\Gamma)$. Рассмотрим последовательность функций $u_n(x)$, определенных на интервале $[0, 3]$ следующим образом:

$$u_n(x) = \begin{cases} (1-nx)(-1)^{n+1} & \text{для } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{для } x \in \left[\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right], \\ [1+n(x-3)](-1)^{n+1} & \text{для } x \in \left[3-\frac{1}{n}, 3\right]. \end{cases} \qquad (30.1)$$

Первые два члена этой последовательности показаны на рис. 30. Легко показать, что последовательность функций (30.1) сходится

[1]) Можно показать (поскольку оператор T ограничен), что рассматриваемый предел не зависит от выбора этой последовательности.

в пространстве $L_2(0, 3)$ к функции $u(x) \equiv 0$, т. е.

$$\|u_n - 0\|^2 = \int_0^3 u_n^2 dx = 2\int_0^{1/n} (1-nx)^2 dx =$$

$$= -\frac{2}{3n}[(1-nx)^3]_0^{1/n} = \frac{2}{3n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Однако последовательность следов функций $u_n(x)$ (что совершенно очевидно, непрерывных на [0, 3]), т. е. последовательность

$$1, -1, 1, -1, \ldots \tag{30.2}$$

ее значений в концевых точках этого интервала, не сходится. Мы надеемся, что читатель сможет построить аналогичный пример для $N = 2$, а возможно и для большей размерности.

В нашем примере $u(x) \equiv 0$, т. е. функция $u(x)$ непрерывна на интервале [0, 3] и для определения ее следа не было, естественно, необходимости строить какую-либо последовательность. В общем случае, например, когда $N > 1$, функция $u(x)$ может быть такова, что вопрос о ее следе будет далеко не простым. Упражнение 30.1 показывает, что след такой функции не всегда можно определять как предел последовательности следов функций, сходящихся к $u(x)$ в метрике только пространства $L_2(G)$. Согласно теореме 30.1, случай, подобный тому, который рассматривается в упражнении 30.1, не может возникнуть, если последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к функции в метрике пространства $W_2^{(1)}(G)$. Заметим, что последовательность (30.1) в действительности не сходится к функции $u(x) \equiv 0$ в пространстве $W_2^{(1)}(0, 3)$: в самом деле (см. (29.15)),

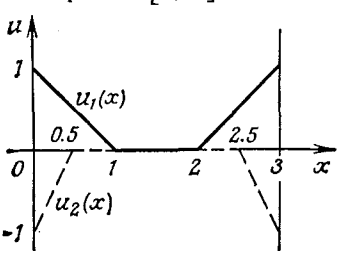

Рис. 30.

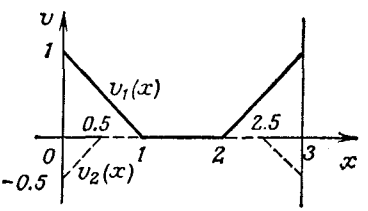

Рис. 31.

$$\|u_n - 0\|^2_{W_2^{(1)}(0,3)} = \|u_n - 0\|^2 + \|u_n' - 0\|^2 = \frac{2}{3n} + 2n \to \infty$$

$\left(\text{поскольку } \|u_n' - 0\|^2 = 2\int_0^{1/n} n^2 dx = 2n\right)$. Рассматривая вместо (30.1) последовательность $\{v_n(x)\}$:

$$v_n(x) = \frac{1}{n} u_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{30.3}$$

(первые два члена этой последовательности показаны на рис. 31), можно легко показать, что эта последовательность сходится к функции $u(x) \equiv 0$ в пространстве $W_2^{(1)}(0, 3)$. Для определения следов функций $v_n(x)$ мы получаем в концевых точках интервала $[0, 3]$ последовательность $1, -1/2, 2/3, -3/4, \ldots$, сходящуюся в соответствии с теоремой 30.1 к нулевым следам функции $u(x) \equiv 0$. В дальнейшем, *когда речь идет о следах, всегда имеются в виду следы функций из* $W_2^{(1)}(G)$ *в смысле теоремы* 30.1. Поэтому, если мы говорим, что *функция* $u(x)$ *удовлетворяет условию* $u = g(S)$ *на границе в смысле теории следов*, где $h \in L_2(\Gamma)$ — заданная функция, то имеется в виду, что $u(x)$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(G)$, а $g(S)$ — ее след на границе.

Если $u(x)$ принадлежит пространству $W_2^{(k)}(G)$, где $k > 1$, то она, согласно гл. 29, также принадлежит и пространству $W_2^{(1)}(G)$. Отсюда следует, что любая функция $u(x) \in W_2^{(k)}(G)$ имеет след на границе Γ (в смысле теоремы 30.1).

Если $u \in W_2^{(2)}(G)$, то u, как и ее обобщенные производные $\partial u/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, N$, принадлежит пространству $W_2^{(1)}(G)$ (согласно замечанию 28.5). Тогда из теоремы 30.1 следует, что не только функция u, но и функции $\partial u/\partial x_j$ имеют следы на границе Γ. Более общо: если $u \in W_2^{(k)}(G)$, то $D^i u \in W_2^{(1)}(G)$ для всех $i = (i_1, \ldots, i_N)$, для которых выполняется соотношение $|i| \leqslant k-1$. Каждой из этих производных $D^i u$ на границе Γ заданной области соответствует в смысле теоремы 30.1 функции $D^i u(S)$. Так же как и выше, функция $D^i u(S)$ называется *следом функции* $D^i u(x)$. Если $|i| = 0$, мы обязательно получим след заданной функции $u(x)$.

Поскольку граница Γ является липшицевой по предположению, следовательно, почти всюду существует нормаль ν (см. с. 328), и поэтому, используя концепцию следа, можно ввести для $k \geqslant 2$ производную функции $u \in W_2^{(k)}(G)$ по нормали (более общо: в заданном направлении). Согласно вышесказанному, при $k \geqslant 2$ существуют следы функций u, $\partial u/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, N$; поэтому, если ν_j — направляющие косинусы внешней нормали, то

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j}(S)\,\nu_j(S), \quad u \in W_2^{(k)}(G),\ k \geqslant 2. \tag{30.4}$$

Подобным образом можно определить производные $\partial^2 u/\partial \nu^2$ для функций из пространства $W_2^{(k)}(G)$, когда $k \geqslant 3$, и т. д.

Замечание 30.2. В гл. 28 было введено пространство $L_2(\Gamma)$. Если граница Γ достаточно гладкая, можно ввести пространство $W_2^{(k)}(\Gamma)$, подобное в определенном смысле пространству $W_2^{(k)}(G)$. Как и в гл. 28, обозначим через $K^{(r)}$ $(N-1)$-мерный куб $|x_i^{(r)}| < \alpha$, $i = 1, \ldots, N-1$. Если на границе Γ дана функция $f(S)$, то говорят, что она принадлежит $W_2^{(k)}(\Gamma)$, если для каждого

$r=1, \ldots, m$ (здесь используются обозначения гл.28)

$$f(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)}, a_r(x_1^{(r)}, \ldots, x_{N-1}^{(r)})) \in W_2^{(k)}(K^{(r)}).$$

При $k=0$ имеет место уже знакомый нам случай $f \in L_2(\Gamma)$. Более подробно этот вопрос излагается в [32].

Замечание 30.3. Согласно теореме 30.1, каждой функции $u \in W_2^{(1)}(G)$ соответствует функция $u(S) \in L_2(\Gamma)$, т. е. ее след. Возникает вопрос: каждая ли функция $v(S) \in L_2(\Gamma)$ является следом некоторой функции $v \in W_2^{(1)}(G)$? Ответ отрицательный. Уже при $N=2$ была построена функция $v(S)$, непрерывная даже на границе единичного круга G, которая не являлась следом какой бы то ни было функции $v \in W_2^{(1)}(G)$ (см. [32]). Но можно показать (см. [32]), что *следы функций, принадлежащих пространству* $W_2^{(1)}(G)$, *плотны в* $L_2(\Gamma)$. Пространства функций с дробными производными (пространства $W_2^{(1/2)}(G)$ и т. д., см. [32], гл. 2) позволяют произвести более углубленный анализ проблемы следов.

Приведем без доказательства ряд теорем, аналогичных теоремам 18.1, 18.2. Следующие ниже теоремы получаются из указанных теорем либо в результате предельного процесса (в значительной степени видоизмененного), либо способом, рассматриваемым в [32].

Теорема 30.2. (Неравенство Фридрихса.) *Пусть* G *— область с границей Липшица. Тогда существует некоторая постоянная* $k_1 > 0$, *зависящая только от данной области, такая что для каждой* $u \in W_2^{(1)}(G)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant k_1 \left\{ \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_\Gamma u^2(S)\, dS \right\}. \tag{30.5}$$

Здесь $\partial u/\partial x_j$ в первом интеграле (30.5) обозначает обобщенные производные функции $u(x)$ в G; $u(S)$ во втором интеграле обозначает след функции $u(x)$ на Γ. Если рассматривать только некоторую часть границы с положительной мерой Лебега, то неравенство (30.5) можно записать в более общем виде.

Теорема 30.3. *Пусть* G *— область с границей Липшица* Γ, *и пусть* Γ_1 *— ее (открытая) часть с положительной мерой Лебега,* $m\Gamma_1 > 0$. *Тогда существует постоянная* $k_2 > 0$, *зависящая только от заданной области и от* Γ_1, *такая что для каждой функции* $u \in W_2^{(1)}(G)$ *имеет место соотношение*

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant k_2 \left\{ \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_1} u^2(S)\, dS \right\}. \tag{30.6}$$

Кроме этого, часто полезной бывает следующая теорема (см. [32]):

Теорема 30.4. *Пусть G — область с границей Липшица. Тогда существует постоянная $k_3 > 0$, зависящая только от данной области, такая что для каждой функции $u \in W_2^{(2)}(G)$*

$$\|u\|^2_{W_2^{(2)}(G)} \leqslant k_3 \left\{ \sum_{|i|=2} \int_G (D^i u)^2 dx + \int_\Gamma u^2(S)\, dS \right\}. \qquad (30.7)$$

Теорема 30.5. (Неравенство Пуанкаре.) *Пусть G — область с границей Липшица*[1]*. Тогда существует постоянная $k_4 > 0$, зависящая только от данной области, такая что для каждой функции $u \in W_2^{(k)}(G)$*

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant k_4 \left\{ \sum_{|i|=k} \int_G (D^i u)^2 dx + \sum_{|i|<k} \left(\int_G D^i u\, dx \right)^2 \right\}. \qquad (30.8)$$

В частности, для $k=1$ получаем соотношение

$$\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant k_4 \left\{ \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \left(\int_G u\, dx \right)^2 \right\}, \qquad (30.9)$$

аналогичное (18.50).

Замечание 30.4. (*Пространство $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$.*) В гл. 29 мы определили пространство $S_2^{(k)}(G)$, или для краткости $S_2^{(k)}$, элементы которого являются функциями из линеала $C^{(\infty)}(\bar{G})$ и метрика которого вводится скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{(k)}(G)} = \sum_{|i|\leqslant k} \int_G D^i u D^i v\, dx, \quad u, v \in C^{(\infty)}(\bar{G}). \qquad (30.10)$$

Аналогичным образом обозначим через $D_2^{(k)}(G)$ пространство с тем же самым скалярным произведением, а следовательно, и с той же метрикой, но элементы которого являются функциями из линеала $C_0^{(\infty)}(G)$. «Пополняя» пространство $S_2^{(k)}(G)$, т. е. построив его полную оболочку в рассматриваемой метрике, мы получам гильбертово пространство $W_2^{(k)}(G)$. Если аналогичным образом и в той же метрике «пополнить» пространство $D_2^{(k)}(G)$, мы снова получим гильбертово пространство, которое, что очевидно, является подпространством пространства $W_2^{(k)}(G)$[2]. Обозначим это пространство через $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$, или для краткости через $\mathring{W}_2^{(k)}$. Нуль над $W_2^{(k)}(G)$ означает, что функции, принадлежащие $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$, равны нулю на границе Γ со своими производными до порядка $k-1$ включительно, т. е.

$$D^i u(S) = 0 \text{ на } \Gamma, \text{ если } |i| \leqslant k-1, \; u \in \mathring{W}_2^{(k)}(G). \qquad (30.11)$$

---

[1]) Можно рассматривать также более слабое условие, см. [32].

[2]) Множество $C_0^{(\infty)}(G)$ является линейным подмножеством множества $C^{(\infty)}(G)$.

В самом деле, если $u \in C_0^{(\infty)}(G)$, то, как известно, $u(x)$ тождественно равна нулю в некоторой окрестности границы Γ и, следовательно, $D^i u(S) = 0$ на Γ даже при произвольном i. Если $u \in \mathring{W}_2^{(k)}(G)$, но $u \notin C_0^{(\infty)}(G)$, то соотношения (30.11) нужно понимать в смысле теории следов: согласно рассуждениям, следующим за теоремой 30.1, соотношение (30.11) получается, если мы рассматриваем $u \in \mathring{W}_2^{(k)}(G)$ как предел (в метрике пространства $W_2^{(k)}(G)$) последовательности $\{u_n\}$ функций из $C_0^{(\infty)}(G)$. Но для каждого n мы имеем в смысле теории следов (и даже в обычном смысле) $D^i u_n(S) = 0$ в $L_2(\Gamma)$ и, переходя к пределу при $n \to \infty$ (что возможно на основании теоремы 30.1 и последующих рассуждений для каждого $|i| \leqslant k-1$), мы получаем

$$D^i u(S) = 0 \text{ в } L_2(\Gamma), \quad |i| \leqslant k-1 \text{ (в смысле теории следов).} \tag{30.12}$$

В этом смысле и должны пониматься соотношения (30.11): функция $u \in \mathring{W}_2^{(k)}(G)$ и ее производные до $k-1$ порядка включительно равны нулю на границе Γ.

Остается невыясненным вопрос о том, справедливо ли «обратное» утверждение, а именно каждая ли функция из $W_2^{(k)}(G)$, для которой выполняется (30.12), принадлежит пространству $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$? Можно показать (см. [32]), что ответ на этот вопрос положительный, если только граница Γ области G достаточно гладкая. При $k=1$ и $k=2$ достаточно [32], чтобы граница была липшицевой. Принимая во внимание (30.11) и используя обозначения, введенные на с. 580, последнее утверждение можно сформулировать следующим образом:

Теорема 30.6. *Если G — область с границей, удовлетворяющей условию Липшица, то*

$$\{v:\ v \in W_2^{(1)}(G),\ v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\} = \mathring{W}_2^{(1)}(G). \tag{30.13}$$

$$\{v:\ v \in W_2^{(2)}(G),\ D^i v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов для } |i| \leqslant 1\} = \mathring{W}_2^{(2)}(G). \tag{30.14}$$

Аналогичный результат для $k > 2$ можно найти в [32].

Замечание 30.5. Если $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(G)$, мы имеем $u = 0$ на Γ в смысле теории следов и неравенство (30.5) принимает вид

$$\|u\|^2_{\mathring{W}_2^{(1)}(G)} \leqslant k_1 \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx. \tag{30.15}$$

Подобным же образом для $u \in \mathring{W}_2^{(2)}(G)$ на основании (30.7) получаем

$$\|u\|^2_{\mathring{W}_2^{(2)}(G)} \leqslant k_3 \sum_{|i|=2} \int_G (D^i u)^2 dx. \tag{30.16}$$

Эти неравенства будут полезны в последующих главах.

Глава 31

Эллиптические дифференциальные операторы порядка $2k$. Слабые решения эллиптических уравнений

В гл. 29 символ D^i, где $i=(i_1, \ldots, i_N)$,— это N-мерный вектор, координаты которого являются целыми неотрицательными числами, был определен соотношением

$$D^i=\frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_N^{i_N}}; \tag{31.1}$$

здесь $|i|=i_1+\ldots+i_N$.

Пусть $a_{ij}(x)$ — функции, определенные в области G, и пусть $i=(i_1, \ldots, i_N)$, $j=(j_1, \ldots, j_N)$ суть N-мерные векторы с целочисленными неотрицательными координатами. Тогда выражение

$$A=\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^j) \tag{31.2}$$

определяет дифференциальный оператор порядка $2k$. В этой формуле суммирование по $|i|$, $|j|\leqslant k$ означает, что сложение выполняется по всем N-мерным векторам i, j, для которых $i_1+\ldots+i_N\leqslant k$ и $j_1+\ldots+j_N\leqslant k$. Как обычно, под производной порядка нуль функции u понимается сама функция u. Если коэффициенты a_{ij} оператора A, а также функция $u(x)$ достаточно гладкие в области G (если, например, $a_{ij}(x)\in C^{|i|}(G)$ и $u\in C^{(2k)}(G)$[1]), то, применяя оператор A к функции u в классическом смысле, мы получаем (в подробной записи)

$$Au=\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^ju)=$$
$$=\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}(-1)^{|i|}\frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_N^{i_N}}\left[a_{i_1,\ldots,i_N;\,j_1,\ldots,j_N}(x)\frac{\partial^{|j|}u}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_N^{j_N}}\right]. \tag{31.3}$$

Более общая теория оператора A излагается ниже.

Замечание 31.1. Коэффициент $(-1)^{|i|}$ в формуле для оператора A можно опустить, однако в последующих главах станет очевидной его полезность.

Пример 31.1. Рассмотрим оператор (31.2) при $k=1$, т. е. оператор второго порядка. Предполагая, что функция $u(x)$ и коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие в G, и подробно выписывая

---

[1]) Мы пользуемся принятым обозначением: $u\in C^{(l)}(G)$ или $u\in C^l(\overline{G})$ означает, что функция u непрерывна с ее производными вплоть до l-го порядка в G, либо в $\overline{G}$ соответственно. Вместо $C^0(G)$ и $C^0(\overline{G})$ мы пишем $C(G)$ и $C(\overline{G})$ соответственно.

сумму (31.3), мы получаем

$$Au = -\sum_{|i|=1,\ |j|=1} D^i(a_{ij}D^j u) - \sum_{|i|=1,\ |j|=0} D^i(a_{ij}D^j u) + \\ + \sum_{|i|=0,\ |j|=1} D^i(a_{ij}D^j u) + D^0(a_{00}D^0 u). \tag{31.4}$$

Если, например, $N=2$ (т. е. задача плоская), то первая сумма содержит всего четыре члена, а именно для пар векторов

$$\begin{array}{llll} i=(1,\ 0), & j=(1,\ 0); & i=(0,\ 1), & j=(1,\ 0); \\ i=(1,\ 0), & j=(0,\ 1); & i=(0,\ 1), & j=(0,\ 1); \end{array} \tag{31.5}$$

вторая сумма содержит два члена, отвечающие парам векторов

$$i=(1,\ 0), \quad j=(0,\ 0); \quad i=(0,\ 1), \quad j=(0,\ 0); \tag{31.6}$$

третья сумма содержит также два члена, отвечающие парам векторов

$$i=(0,\ 0), \ j=(1,\ 0); \qquad i=(0,\ 0), \ j=(0,\ 1). \tag{31.7}$$

В последнем члене в (31.4) возможна лишь одна пара векторов, а именно

$$i=(0,\ 0), \quad j=(0,\ 0). \tag{31.8}$$

Следовательно, например, первой паре в (31.5), т. е. векторам $i=(1,\ 0)$, $j=(1,\ 0)$, соответствует член (координаты векторов i, j обозначены индексами) $-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[a_{1,0;1,0}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right]$[1], второй паре соответствует член $-\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[a_{1,0;0,1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right]$, ...; второй паре в (31.7), т. е. векторам $i=(0,\ 0)$, $j=(0,\ 1)$, соответствует член $a_{0,0;\ 0,1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ и т. д. И наконец, паре (31.8) соответствует член $a_{0,0;\ 0,\ 0}u$. Таким образом, дифференциальный оператор (31.2) второго порядка от двух переменных x_1, x_2 имеет, вообще говоря, девять членов. Некоторые из них могут, конечно, обращаться в нуль (если соответствующие коэффициенты a_{ij} равны нулю).

Пример 31.2. Пусть $a_{ij}=1$, если $i=(1,\ 0)$, $j=(1,\ 0)$ или $i=(0,\ 1)$, $j=(0,\ 1)$, и $a_{ij}=0$ в остальных семи случаях. Тогда,

---

[1]) В подробной записи мы имеем в этом случае

$$(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^j u) = (-1)^{1+0}D^{(1,\ 0)}(a_{1,0;\ 1,\ 0}D^{(1,\ 0)}u) = \\ = (-1)^1\frac{\partial^1}{\partial x_1^1 x_2^0}\left(a_{1,0;\ 1,0}\frac{\partial^1 u}{\partial x_1^1 \partial x_2^0}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{1,0;\ 1,0}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right).$$

Поскольку вторые координаты обоих векторов (1, 0), (1, 0) равны нулю, дифференцирование по переменной x_2 ни в скобках, ни за пределами скобок не проводится.

предполагая, что $u \in C^{(2)}(G)$, мы получаем

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = -\Delta u. \quad (31.9)$$

Итак, в этом случае оператор A является известным оператором Лапласа от двух переменных.

Замечание 31.2. Обратите внимание, что i и j в (31.2) и (31.3) суть мультииндексы, т. е. векторы имеют иной смысл, чем, скажем, индексы в сумме (22.7). Оператор (31.2), естественно, можно записать также и в «классическом» виде

$$\sum_{i_1+\ldots+i_N=m=0}^{k} \sum_{j_1+\ldots+j_N=n=0}^{k} (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}} \times \times \left[a_{i_1, \ldots, i_N;\, j_1, \ldots, j_N}(x) \frac{\partial_n}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_N^{j_N}}\right]. \quad (31.10)$$

Преимущества более компактной записи (31.2) станут очевидны из дальнейшего.

Здесь следует отметить, что в отличие от дифференциальных операторов, рассмотренных в ч. III настоящей книги, мы не налагаем никаких условий на симметрию коэффициентов a_{ij}. Ниже станет ясно, что при соответствующей постановке задачи можно избежать и каких-либо условий, касающихся их гладкости.

Пример 31.3. Если $k=2$ и $N=2$, т. е. если рассматривается оператор четвертого порядка от двух переменных, и если положить

$$a_{ij} = 1, \quad (31.11)$$

когда $i=(2, 0)$, $j=(2, 0)$ или $i=(0, 2)$, $j=(0, 2)$,

$$a_{ij} = 2, \quad (31.12)$$

когда $i=(1, 1)$, $j=(1, 1)$

(иными словами, если положить

$$a_{2,0;\,2,0} = a_{0,2;\,0,2} = 1 \quad (31.13)$$

$$a_{1,1;\,1,1} = 2), \quad (31.14)$$

и $a_{ij}=0$ в остальных случаях, то мы получим для $u \in C^{(4)}(G)$

$$Au = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right), \quad (31.15)$$

или, иначе,

$$Au = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \Delta^2 u. \quad (31.16)$$

Таким образом, в этом случае оператор A является бигармоническим.

Пример 31.4. Если в (31.3) положить $k=1$, $N=2$, $a_{1,0;\,1,0}=1+x_1^2$, $a_{0,1;\,0,1}=-3$, и $a_{ij}=0$ в остальных случаях, мы получим уравнение

$$Au=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1+x_1^2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]+3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0.$$

Пример 31.5. Оператор Лапласа $-\Delta$ при $N=2$ получается не только в случае, рассмотренном в примере 31.2; его можно также получить, если положить $a_{1,0;\,1,0}=1$, $a_{0,1;\,0,1}=1$, $a_{1,0;\,0,1}=c$, $a_{0,1;\,1,0}=-c$ (где c — произвольная постоянная) и $a_{ij}=0$ в остальных случаях. В самом деле, мы получаем (предполагая, что $u\in C^{(2)}(G)$)

$$Au=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(1\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(1\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(c\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-c\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)=-\Delta u.$$

Подобным же образом, полагая в примере 31.3 $a_{2,0;\,2,0}=a_{0,2;\,0,2}=1$, $a_{1,1;\,1,1}=2(1-\sigma)$, $a_{2,0;\,0,2}=a_{0,2;\,2,0}=\sigma$, где σ — некоторая постоянная, мы получаем бигармонический оператор вида (23.21):

$$\Delta^2 u=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right]+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right). \tag{31.17}$$

Замечание 31.3. Из приведенных выше примеров видно, что один и тот же дифференциальный оператор вида (31.2) можно получить, вообще говоря, различными способами. Эта возможность получать различные «разложения» рассматриваемого оператора часто оказывается полезной, см. пример 32.8. Впоследствии мы всегда будем брать определенное разложение рассматриваемого оператора (подходящее для исследуемой задачи) с тем, чтобы коэффициенты $a_{ij}(x)$ заданного оператора были определены однозначно. (В вариационной формулировке задач математической физики разложение рассматриваемого оператора однозначно определяется уравнением Эйлера — Лагранжа, известным из курса вариационного исчисления.)

Определение 31.1. Если для каждого вещественнозначного ненулевого вектора $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_N)$

$$\sum_{|i|,\ |j|=k} a_{ij}(P)\,\xi_i\xi_j\neq 0, \tag{31.18}$$

где $\xi_i=\xi_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_N^{i_N}$, $\xi_j=\xi_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot\xi_N^{j_N}$, то говорят, что оператор (31.2) *эллиптический в точке* $P(x)=P(x_1,\ \ldots,\ x_N)$. Если существует некоторое число $c>0$, зависящее только от заданной области

G и от коэффициентов a_{ij} данного оператора, такое что почти для каждой точки $P(x_1, \ldots, x_N) \in G$ и каждого вещественного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$

$$\sum_{|i|, |j|=k} a_{ij}(P)\, \xi_i \xi_j \geqslant c\, |\xi|^{2k}, \tag{31.19}$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2$, то говорят, что этот оператор *равномерно эллиптический в области* G.

Замечание 31.4. В (31.18) и (31.19) суммирование ведется по $|i| = k$ и $|j| = k$ (не по $|i| \leqslant k$, $|j| \leqslant k$). Следовательно, эллиптичность или равномерная эллиптичность данного оператора зависит только от коэффициентов производных наивысшего порядка (т. е. от производных порядка $2k$). Позднее (в гл. 33) будет введено понятие так называемой V-эллиптичности заданного оператора, которая определяется по всем коэффициентам этого оператора (и, кроме того, по заданным граничным условиям).

Пример 31.6. Оператор Лапласа $-\Delta$, см. пример 31.2, равномерно эллиптический в каждой области G, поскольку

$$a_{1,0;1,0} = 1, \quad a_{0,1;0,1} = 1 \tag{31.20}$$

и $a_{ij} = 0$ в остальных случаях; для каждого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$\sum_{|i|, |j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = 1 \cdot \xi_1^1\xi_2^0 \cdot \xi_1^1\xi_2^0 + 1 \cdot \xi_1^0\xi_2^1 \cdot \xi_1^0\xi_2^1 = \\ = \xi_1 \cdot \xi_1 + \xi_2 \cdot \xi_2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |\xi|^2 \tag{31.21}$$

(верхние индексы являются обычными показателями степеней), поэтому достаточно в (31.19) положить $c = 1$. Подобным же образом, взяв для оператора $-\Delta$ разложение, рассмотренное в примере 31.5, получаем

$$\sum_{|i|, |j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = 1 \cdot \xi_1^1\xi_2^0 \cdot \xi_1^1\xi_2^0 + 1 \cdot \xi_1^0\xi_2^1 \cdot \xi_1^0 \cdot \xi_2^1 + \\ + c\xi_1^1\xi_2^0 \cdot \xi_1^0\xi_2^1 - c\xi_1^0\xi_2^1 \cdot \xi_1^1\xi_2^0 = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |\xi|^2. \tag{31.22}$$

Аналогичным образом для N-мерного оператора Лапласа $-\Delta$ мы получаем

$$\sum_{|i|, |j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = \xi_1^2 + \ldots + \xi_N^2 = |\xi|^2. \tag{31.23}$$

Однако оператор Δ не является равномерно эллиптическим в какой-либо области G, поскольку его коэффициенты в (31.2) имеют вид $a_{1,0;1,0} = a_{0,1;0,1} = -1$, и мы получаем $\sum_{|i|, |j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = -|\xi|^2 = -\xi_1^2 - \xi_2^2$; соответственно $\sum_{|i|, |j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = -|\xi|^2$ для N-мерного оператора. И тем не менее мы обычно говорим, что уравнение $\Delta u = f$ является эллиптическим (и даже равномерно эллиптическим) в G, поскольку его можно написать в виде $-\Delta u = -f$, где оператор $A = -\Delta$ равномерно эллиптический в G.

Пример 31.7. Бигармонический оператор из примера 31.3 (а также, что легко показать, его N-мерный аналог) является равномерно эллиптическим в произвольной области G. Действительно, для каждого вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ мы имеем (см. (31.13))

$$\sum_{|i|,\,|j|=2} a_{ij}\xi_i\xi_j = 1\cdot\xi_1^2\xi_2^0\cdot\xi_1^2\xi_2^0 + 1\cdot\xi_1^0\xi_2^2\cdot\xi_1^0\xi_2^2 + 2\xi_1^1\xi_2^1\cdot\xi_1^1\xi_2^1 =$$
$$= \xi_1^4 + \xi_2^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 = (\xi_1^2+\xi_2^2)^2 = |\xi|^4. \qquad (31.24)$$

Таким образом, достаточно в (31.19) положить $c=1$. (Тот же результат можно получить, рассматривая разложение (31.17).) Оператор $\Delta^2+(x_1^2+1)\Delta-4$ тоже равномерно эллиптический в G, так как на основании определения 31.1 эллиптичность и равномерная эллиптичность оператора зависят только от коэффициентов производных наивысшего порядка.

Пример 31.8. Оператор

$$A = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1+x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\right] + 3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \qquad (31.25)$$

(см. пример 31.4) не является эллиптическим ни в одной точке P области G. Как утверждается в указанном примере, для этого оператора $a_{1,0;1,0}=(1+x_1^2)$, $a_{0,1;0,1}=-3$ и $a_{ij}=0$ в остальных случаях. Таким образом, для произвольного вектора $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ мы получаем в точке $P(b_1, b_2)$

$$\sum_{|i|,\,|j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = (1+b_1^2)\cdot\xi_1^1\xi_2^0\cdot\xi_1^1\xi_2^0 - 3\cdot\xi_1^0\xi_2^1\cdot\xi_1^0\xi_2^1 = (1+b_1^2)\xi_1^2 - 3\xi_2^2.$$

Полагая $\xi=(\sqrt{3}, \sqrt{1+b_1^2})=\eta$, получаем

$$\sum_{|i|,\,|j|=1} a_{ij}\xi_i\xi_j = 0. \qquad (31.26)$$

Согласно определению 31.1, оператор (31.25) не может быть эллиптическим в точке $P(b_1, b_2)$, поскольку η — ненулевой вектор, но в то же время выполняется соотношение (31.26). Но $P(b_1, b_2)$ — произвольная точка G, и наш вывод справедлив для любой точки рассматриваемой области.

Введем очень важное понятие; определим *слабое решение эллиптического уравнения*. Рассмотрим для начала очень простой случай уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f. \qquad (31.27)$$

Пусть $u\in C^{(2)}(G)$, $f\in C(G)$, и пусть уравнение (31.27) удовлетворяется в области G; тогда функция $u(x)$ — классическое решение этого уравнения в области G. Умножим (31.27) на произвольную функцию $\varphi(x)$ с компактным носителем в G [1]) и проинтегрируем

[1]) В этой главе мы рассматриваем не решения краевых задач, а слабые решения дифференциальных уравнений. Поэтому мы используем функции с компактным носителем, так как они равны нулю в окрестности границы и позволяют исключить из нашего анализа граничные условия.

полученное равенство по области G:

$$-\int_G \varphi \Delta u dx = \int_G \varphi f dx. \tag{31.28}$$

Преобразуем уравнение (31.28) с помощью формулы Грина (см. теорему 8.7), которую представим здесь в следующем виде:

$$\int_G b \frac{\partial c}{\partial x_l} dx = \int_\Gamma bc\nu_l dS - \int_G \frac{\partial b}{\partial x_l} c\, dx, \quad b, c \in W_2^{(1)}(G). \tag{31.29}$$

Заметим, что в данном случае достаточно потребовать, чтобы функции $b(x)$ и $c(x)$ принадлежали только пространству $W_2^{(1)}(G)$; в (8.31) мы требовали, чтобы эти функции принадлежали $C^{(1)}(\bar{G})$. Справедливость (31.29) при таких более слабых условиях доказывается без особого труда: пользуясь формулой (8.31), переходим к пределу (см. теорему 5.12); см. также [32]. В формуле (31.29) $\partial b/\partial x_l$ и $\partial c/\partial x_l$ — обобщенные производные; b и c в интеграле вдоль границы Γ суть соответствующие следы этих функций на Γ, а ν_l — как и прежде, координаты единичного вектора внешней нормали (и, следовательно, ограниченные измеримые функции на Γ). Обобщение условий, обеспечивающих справедливость теоремы Грина, будет особенно полезно в следующей главе. Мы же считаем, что это обобщение следует ввести уже здесь.

Положив в (31.29) $b = \varphi$, $c = \partial u/\partial x_l$ [1]), получим

$$-\int_G \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} dx = \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx.$$

Поскольку $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$, то в некоторой окрестности границы Γ $\varphi(x) \equiv 0$ и второй интеграл в (31.29) обращается в нуль. Суммируя полученные выше уравнения при $l = 1, 2, \ldots, N$, мы получаем

$$-\int_G \varphi \Delta u dx = \sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx, \tag{31.30}$$

так что формулу (31.28) можно записать в виде

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G \varphi f dx. \tag{31.31}$$

Функция $\varphi \in C_0^{(\infty)}$ произвольная. Поэтому если функция u — классическое решение уравнения (31.27) в G, то

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G \varphi f dx \quad \text{выполняется для всех } \varphi \in C_0^{(\infty)}(G), \tag{31.32}$$

[1]) Поскольку $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$, подынтегральные выражения в следующих интегралах равны нулю в некоторой окрестности границы Γ, поэтому требования $u \in C^{(2)}(G)$ (заметьте, что мы не требуем, чтобы $u \in C^{(2)}(\bar{G})$) вполне достаточно для выполнения условий теоремы Грина.

т. е. *для функции $u(x)$ удовлетворяется интегральное тождество* (31.32), или короче — *функция $u(x)$ удовлетворяет условию* (31.32).

Если условие $f \in C(G)$ не выполняется, то ясно, что уравнение (31.27) не имеет классического решения, т. е. решения из класса $C^{(2)}(G)$. (Если бы (31.27) имело классическое решение, то функция в левой части этого уравнения была бы непрерывна в G, а функция в правой части — нет.) Остается решить вопрос, как обобщить понятие решения уравнения (31.27) для таких случаев, например когда f принадлежит только $L_2(G)$. Заметим, что для $f \in L_2(G)$ правая часть (31.32) всегда имеет смысл. (Ясно, что она также имеет смысл для более общих функций, так как $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$, но в данном случае это не существенно.) Левая часть интегрального тождества (31.32) имеет смысл, например, в случае, когда каждая функция $\partial u/\partial x_l$ принадлежит $L_2(G)$. Ясно, что это условие удовлетворяется, если $u \in W_2^{(1)}(G)$ и если производные $\partial u/\partial x_l$ рассматриваются в обобщенном смысле, поскольку непосредственно из определения функций из $W_2^{(1)}(G)$ (см. гл. 29) вытекает, что $\partial u/\partial x_l \in L_2(G)$ для $l = 1, \ldots, N$. Это позволяет ввести следующее определение (достаточно общее для наших целей) так называемого слабого решения уравнения (31.27) (это определение является частным случаем определения (31.2), данного ниже).

Пусть $u \in W_2^{(1)}(G)$, $f \in L_2(G)$. Если условие (31.32) *удовлетворяется для функции $u(x)$, то эта функция называется слабым решением уравнения* (31.27).

Понятие слабого решения уравнения (31.27), таким образом, является значительно более общим, чем понятие классического решения этого уравнения: согласно определению, слабое решение является функцией из $W_2^{(1)}(G)$, которая не обязательно должна иметь в G производные второго порядка (она, вообще говоря, имеет только обобщенные производные первого порядка). Однако если $u \in C^{(2)}(G)$ и $f \in C(G)$ и если $u(x)$ — слабое решение уравнения (31.27), то $\varphi \in C_0^{\infty}(G)$ является классическим решением уравнения (31.27). Согласно процедуре, обратной той, что приводит от уравнения (31.27) к интегральному тождеству (31.32), мы получаем, используя теорему Грина, соотношение (31.28), т. е. тождество

$$\int_G (\Delta u + f)\,\varphi\,dx = 0 \quad \text{для любой } \varphi \in C_0^{(\infty)}(G). \tag{31.33}$$

Поскольку функции из $C_0^{(\infty)}G$ образуют плотное множество в $L_2(G)$, то, согласно теореме 5.15,

$$\Delta u + f = 0 \text{ в } L_2(G). \tag{31.34}$$

Если $u \in C^2(G)$ и $f \in C(G)$, то функция $\Delta u + f$ непрерывна в G, и мы получаем из (31.34) соотношение

$$\Delta u + f \equiv 0, \text{ или } -\Delta u \equiv f \text{ в } G, \tag{31.35}$$

которое доказывает наше предположение. Заметим, что если уравнение (31.27) записать в виде $\sum_{|i|,\,|j|\leqslant 1}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^j u)=f$, где $a_{1,0;1,0}=1$, $a_{0,1;0,1}=1$ и $a_{ij}=0$ в остальных случаях (см. пример 31.2), то тождество (31.32) можно представить в виде

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant 1}\int_G a_{ij}D^i\varphi D^j u\,dx=\int_G \varphi f\,dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(G) \tag{31.36}$$

либо, используя принятое обозначение (φ, f) для скалярного произведения в правой части (31.36), в виде

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant 1}\int_G a_{ij}D^i\varphi D^j u\,dx=\int_G(\varphi,\ f),\quad \varphi\in C_0^{(\infty)}(G). \tag{31.37}$$

Прежде чем перейти к определению слабого решения для общего случая, выпишем бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u=\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}=f. \tag{31.38}$$

Пусть в (31.38) $f\in C(G)$, а $u\in C^4(G)$ — классическое решение этого уравнения в области G. Так же как и в предыдущем случае, умножая (31.38) на $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$ с последующим интегрированием по G, мы получаем

$$\int_G \varphi\Delta^2 u\,dx=\int_G \varphi f\,dx. \tag{31.39}$$

Поскольку

$$\int_G \varphi\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\,dx=\int_G \varphi\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)\right]dx$$

и $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$, то интегралы вдоль границы равны нулю, поэтому, применяя последовательно теорему Грина, мы получаем

$$\int_G \varphi\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\,dx=-\int_G \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)dx=\int_G \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,dx.$$

Преобразовывая таким же образом другие члены в левой части данного уравнения и складывая все полученные результаты, получаем (см. (23.20), где мы брали $v=\varphi$ с тем, чтобы все интегралы вдоль Γ обращались в нуль)

$$\int_G \varphi\Delta^2 u\,dx=\int_G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)dx. \tag{31.40}$$

Из (31.39) мы таким образом получаем

$$\int_G\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)dx=\int_G \varphi f\,dx,\ \varphi\in C_0^{(\infty)}(G). \tag{31.41}$$

Обозначая опять через (φ, f) скалярное произведение в правой части этого интегрального тождества и записывая (31.38) в виде

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant 2}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^ju)=f,$$

где $a_{2,0;2,0}=1$, $a_{0,2;0,2}=1$, $a_{1,1;1,1}=2$ и $a_{ij}=0$ в остальных случаях (см. пример 31.3), полученный результат можно представить в сходном с (31.37) виде

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant 2}\int_G a_{ij}D^i\varphi D^ju\,dx=(\varphi,\ f),\quad \varphi\in C_0^{(\infty)}(G). \tag{31.42}$$

Точно таким же способом, применяя формулу (31.29) к уравнению

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^ju)=f \tag{31.43}$$

и предполагая, что $f\in C(G)$, $a_{ij}\in C^{|i|}(G)$ и $u\in C^{(2k)}(G)$, можно сделать вывод, что соотношение

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}\int_G a_{ij}D^i\varphi D^ju\,dx=(\varphi,\ f) \tag{31.44}$$

выполняется для каждой $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$.

Здесь следует заметить, что если в (31.43) необходимым условием является определенная гладкость функции u, а также коэффициентов рассматриваемого уравнения (поскольку нужно выполнить дифференцирование, на которое указывает оператор D^i), то в (31.44) необходимо лишь обеспечить существование соответствующих интегралов. Для этого вполне достаточно, чтобы, например, $f\in L_2(G)$ и $u\in W_2^{(k)}(G)$ (так как $|j|\leqslant k$ и произвольная функция из $W_2^{(k)}(G)$ имеет обобщенные производные до порядка k включительно, то оператор D^j можно применить) и чтобы коэффициенты a_{ij} были ограниченными измеримыми функциями.

Определение 31.2. Пусть $f\in L_2(G)$, и пусть a_{ij} — ограниченная измеримая по Лебегу функция в G. Функция $u\in W_2^{(k)}(G)$ называется *слабым решением уравнения*

$$Au=f, \tag{31.45}$$

где

$$A=\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^j), \tag{31.46}$$

если

$$\sum_{|i|,\,|j|\leqslant k}\int_G a_{ij}D^i\varphi D^ju\,dx=(\varphi,f) \tag{31.47}$$

выполняется для любой $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$.

Замечание 31.5. Если функция $u(x)$ — слабое решение уравнения (31.45) и если функции u, f и коэффициенты a_{ij} удовлетворяют условиям, сформулированным в тексте, предшествующем (31.44), то $u(x)$ является классическим решением данного уравнения. Это легко показать тем же «обратным» способом, с помощью которого мы от интегрального тождества (31.32) пришли к уравнению (31.27). Ясно, что определение 31.2 существенно обобщает понятие слабого решения уравнения (31.45). Согласно этому определению, мы заранее не требуем ни гладкости искомого решения, ни гладкости коэффициентов данного уравнения (что, естественно, было бы необходимо, если бы мы применяли операции $D^i(a_{ij}D^j)$ в классическом смысле). Таким образом понятие решения уравнения (31.43) расширяется на уравнения с коэффициентами более общего вида [1]). Можно также доказать, см. гл. 33, существование слабого решения уравнения $Au=f$ (удовлетворяя в соответствующем смысле рассматриваемые граничные условия) при сравнительно очень общих предположениях. В этом случае для отыскания слабого решения можно применять те же методы, которые мы рассмотрели в гл. 12—15. Кроме того, можно также показать (см. гл. 46), что если коэффициенты a_{ij} и правая часть f данного уравнения достаточно гладкие в области G, то рассматриваемое слабое решение будет также гладким в области G, а точнее сказать, оно будет классическим решением данного уравнения. Итак, понятие слабого решения является «разумным» обобщением понятия классического решения дифференциального уравнения.

Глава 32

Формулировка краевых задач

а) Устойчивые и неустойчивые граничные условия

В гл. 30 мы ввели понятие следа для функций из пространства $W_2^{(k)}(G)$: каждой функции $u \in W_2^{(1)}(G)$ соответствует некоторая функция $u(S) \in L_2(\Gamma)$ на границе рассматриваемой области, называемая следом этой функции. Это отображение непрерывно (если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ отличаются «незначительно» в метрике пространства $W_2^{(1)}(G)$, то их следы $u_1(S)$, $u_2(S)$ отличаются «незначительно» в метрике пространства $L_2(\Gamma)$, см. теорему 30.1) и таково, что каждой функции $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ [2]) соответствует ее след

[1]) Условия на эти коэффициенты можно еще более ослабить, см. [32], гл. 3, § 2.

[2]) Напомним, что $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ означает, что $u(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков в $\overline{G}$; в частности, $u \in C^{(\infty)}(\overline{G})$ является непрерывной функцией в $\overline{G}$. Ясно, что $u \in C^{(\infty)}(\overline{G}) \Rightarrow u \in W_2^{(1)}(G)$.

в обычном смысле, т. е. функция $u(S)$, где $S \in \Gamma$. Следовательно, функция $u \in W_2^{(1)}(G)$, имеющая на Γ след $u(S)$, удовлетворяет «граничному условию» $u = u(S)$ на Γ в смысле теории следов. Концепция обобщенного решения дифференциального уравнения, введенная в предыдущей главе, позволяет рассматривать уравнения с коэффициентами относительно очень общего вида. Как будет видно, концепция следа позволит получить удобные формулы для достаточно общих граничных условий. Например, решением уравнения $Au = f$ с граничным условием $u = g(S)$ на Γ, где A — дифференциальный оператор (см. предыдущую главу) второго порядка, а $g \in L_2(\Gamma)$, было бы естественно считать такую функцию $u \in W_2^{(1)}(G)$, которая является слабым решением рассматриваемого уравнения в G в смысле определения 31.2 и которая имеет след $g(S)$ на Γ. Однако мы предлагаем познакомиться с дальнейшим текстом данной главы, в особенности со следующим ее разделом.

Если $u \in W_2^{(2)}(G)$, то (см. гл. 30) не только $u(S) \in L_2(\Gamma)$, но и (обобщенные) производные $\partial u/\partial x_l$, $l = 1, \ldots, N$, принадлежащие $W_2^{(1)}(G)$ (см. гл. 29), также имеют следы $\partial u/\partial x_l(S) \in L_2(\Gamma)$. Кроме того, поскольку граница Γ области G является липшицевой, то она почти всюду имеет внешнюю нормаль $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$. Отсюда следует, что мы можем говорить о производной по внешней нормали

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(S) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(S)\,\nu_1(S) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_N}(S)\,\nu_N(S) \qquad (32.1)$$

и о граничном условии $\partial u/\partial \nu = h(S)$ на Γ (рассматриваемом тем самым в смысле теории следов). Можно продолжить наши рассуждения и рассмотреть для $u \in W_2^{(k)}(G)$ следы функции u и ее (обобщенных) производных до порядка $k-1$ включительно и граничные условия (в смысле теории следов), выраженные через эти производные, т. е. условия вида

$$u = g_0(S), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1(S), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1}(S) \text{ на } \Gamma$$

и т. д. Отметим здесь следующий важный факт: знакомое из предыдущей главы слабое решение уравнения $Au = f$ порядка $2k$ является функцией из $W_2^{(k)}(G)$. Например, слабое решение уравнения второго порядка есть функция из $W_2^{(1)}(G)$. Отображение, ставящее в соответствие следы $u(S)$ функциям $u \in W_2^{(1)}(G)$, как мы знаем, непрерывно. Отсюда непосредственно следует, что если последовательность функций $u_n \in W_2^{(1)}(G)$ сходится в $W_2^{(1)}(G)$ к функции $u \in W_2^{(1)}(G)$, то последовательность $u_n(S) \in L_2(\Gamma)$ соответствующих следов сходится к следу функции u в $L_2(\Gamma)$, т. е. $u_n(x) \to u(x)$ в $W_2^{(1)}(G) \Rightarrow u_n(S) \to u(S)$ в $L_2(\Gamma)$. В частности, если все функции $u_n(x)$ удовлетворяют одному и тому же граничному условию $u_n(S) = g(S)$ на Γ (в смысле теории следов), то

предельная функция $u(x)$ также удовлетворяет этому граничному условию

$$u(S) = g(S) \text{ на } \Gamma. \tag{32.2}$$

Поэтому условие вида (32.2) мы называем *устойчивым граничным условием для уравнения второго порядка*. Аналогичным образом граничные условия, содержащие искомую функцию и ее производные (обобщенные) не более чем первого порядка (точнее, следы этих функций на Γ), называются *устойчивыми граничными условиями для данного уравнения четвертого порядка*. Например, граничные условия $u = g_0(S)$, $du/d\nu = g_1(S)$ на Γ устойчивы для уравнения четвертого порядка. Вообще под *устойчивыми граничными условиями для уравнения порядка* $2k$ мы понимаем такие граничные условия, которые содержат данную функцию и ее производные, порядок которых не превышает $k-1$. Например, для уравнения порядка $2k$ граничные условия

$$u = g_0(S), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1(S), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1}(S) \text{ на } \Gamma$$

устойчивы. Условия, содержащие производные более высоких порядков, чем $k-1$, называются *неустойчивыми для уравнения порядка* $2k$. Причина станет ясна, если мы рассмотрим следующий простой пример — функцию от одной переменной, т. е. $N = 1$. Пусть даны функция

$$u(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1] \tag{32.3}$$

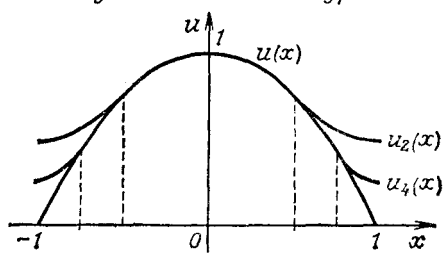

Рис. 32.

и последовательность функций $u_n(x)$, четных на интервале $[-1, 1]$ и определяемых на интервале $[0, 1]$ соотношениями

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [0,\ 1 - 1/n], \\ \dfrac{1}{n} + (n-1)(1-x)^2, & x \in \left[1 - \dfrac{1}{n},\ 1\right] \end{cases} \tag{32.4}$$

(см. рис. 32). Функции $u(x)$ и $u_n(x)$ непрерывны с их первыми производными на замкнутом интервале $[-1, 1]$ (в точках $x_1 = 1 - n^{-1}$ и $x_2 = -(1 - n^{-1})$ значения функций $u_n(x)$ равны $2n^{-1} - n^{-2}$, а значения их первых производных равны $-2 + 2n^{-1}$ и $2 - 2n^{-1}$ соответственно), поэтому совершенно очевидно, что они принадлежат $W_2^{(1)}(-1, 1)$. Легко показать, что соотношение

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x) \text{ справедливо в } W_2^{(1)}(-1, 1). \tag{32.5}$$

Требуется доказать, что $\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{W_2^{(1)}(-1,\,1)}=0$, что равносильно утверждению

$$\lim_{n\to\infty}\|u-u_n\|^2_{W_2^{(1)}(-1,\,1)}=0. \tag{32.6}$$

Согласно определению нормы в пространстве $W_2^{(1)}(-1,\,1)$, имеем

$$\|u-u_n\|^2_{W_2^{(1)}(-1,\,1)}=\|u-u_n\|^2_{L_2(-1,\,1)}+\|u'-u_n'\|^2_{L_2(-1,\,1)}=$$
$$=\int_{-1}^{1}(u-u_n)^2\,dx+\int_{-1}^{1}(u'-u_n')^2\,dx. \tag{32.7}$$

Но функции $u(x)$ и $u_n(x)$ четны на интервале $[-1,\,1]$. Кроме того, $u(x)$ и $u_n(x)$ совпадают на интервале $[-1+n^{-1},\,1-n^{-1}]$. Поэтому, согласно (32.7),

$$\|u-u_n\|^2_{W_2^{(1)}(-1,\,1)}=2\int_{1-n^{-1}}^{1}(u-u_n)^2\,dx+2\int_{1-n^{-1}}^{1}(u'-u_n')^2\,dx=$$
$$=2\int_{1-n^{-1}}^{1}\left\{(1-x^2)-\left[\frac{1}{n}+(n-1)(1-x^2)\right]\right\}^2dx+$$
$$+2\int_{1-n^{-1}}^{1}[-2x+2(n-1)(1-x)]^2\,dx. \tag{32.8}$$

Однако на интервале $[1-n^{-1},\,1]$ имеют место неравенства $0\leqslant 1-x\leqslant n^{-1}$, $0\leqslant 1+x\leqslant 2$, поэтому

$$\left\{(1-x^2)-\left[\frac{1}{n}+(n-1)(1-x)^2\right]\right\}^2\leqslant\left[\frac{2}{n}+\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n^2}\right)\right]^2<\left(\frac{4}{n}\right)^2,$$
$$[-2x+2(n-1)(1-x)]^2\leqslant\left[2+\frac{2(n-1)}{n}\right]^2<4^2,$$

и, следовательно, на основании (32.8)

$$\|u-u_n\|^2_{W_2^{(1)}(-1,\,1)}<2\int_{1-n^{-1}}^{1}\frac{16}{n^2}\,dx+2\int_{1-n^{-1}}^{1}4^2\,dx=\frac{32}{n^3}+\frac{32}{n}\to 0$$

при $n\to\infty$, откуда непосредственно вытекает соотношение (32.6) и, следовательно, (32.5), что и требовалось доказать.

Последовательность функций $u_n(x)$ сходится в пространстве $W_2^{(1)}(-1,\,1)$ к функции $u(x)$. В нашем примере $k=1$, следовательно, $k-1=0$; условие, связанное со значениями функций в конечных точках заданного интервала, является устойчивым, условие же, связанное со значениями первых производных в этих же точках, неустойчиво. В соответствии с тем, что было сказано об устойчивом граничном условии, соотношение $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u(x)$

выполняется в точках $x=-1$ и $x=1$: $u_n(-1)=u_n(1)=n^{-1}$ и $u(-1)=u(1)=0$. Но аналогичное утверждение не имеет силы для первых производных. Мы имеем $u_n'(-1)=u_n'(1)=0$ для произвольного n, но $u'(-1)=2$, $u'(1)=-2$.

Мы надеемся, что аналогичные примеры для бо́льших размерностей, т. е. для $N>1$, читатель сможет построить самостоятельно. Можно также построить аналогичные примеры для $k>1$. Эти примеры объясняют, почему граничные условия, содержащие производные более высокого порядка, чем $k-1$, называются неустойчивыми: если последовательность функций $u_n(x)$ сходится к функции $u(x)$ в пространстве $W_2^{(k)}(G)$ и если все функции $u_n(x)$ удовлетворяют в смысле теории следов некоторому граничному условию, в котором содержатся производные более высокого порядка, чем $k-1$, то это *условие может и не удовлетворяться предельной функцией*.

Типичным примером неустойчивого граничного условия является условие Неймана $\partial u/\partial \nu = h(S)$ на Γ для уравнения Пуассона. Прямой аналог этого условия для $N=1$ был рассмотрен выше в нашем примере. Как уже упоминалось, так называемые *условия Дирихле* $u=g_0(S)$, $\partial u/\partial \nu = g_1(S)$, $\ldots$, $\partial^{k-1}u/\partial \nu^{k-1}=g_{k-1}(S)$ на Γ являются типичным образцом устойчивых граничных условий для уравнения порядка $2k$.

б) Слабое решение краевой задачи. Частные случаи

Прежде чем давать общую формулировку краевой задачи, рассмотрим следующие три частных случая.

Пример 32.1. Дано уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f \tag{32.9}$$

с граничными условиями

$$u = g(S) \text{ на } \Gamma. \tag{32.10}$$

Пример 32.2. Дано то же уравнение

$$-\Delta u = f \tag{32.11}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(S) \text{ на } \Gamma. \tag{32.12}$$

Пример 32.3. На плоскости дано неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u = f \tag{32.13}$$

с граничными условиями

$$u = g(s) \text{ на } \Gamma, \tag{32.14}$$

$$Mu = h(s) \text{ на } \Gamma, \tag{32.15}$$

где $Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\,\partial^2 u/\partial\nu^2$ $(0 \leqslant \sigma < 1)$ (см. (23.23)). В первом примере условие (32.10) устойчиво. Во втором условие (32.12) неустойчиво. И наконец, в третьем примере условие (32.14) устойчиво, а условие (32.15) неустойчиво.

Согласно предыдущей главе, слабое решение уравнения $Au = f$ порядка $2k$ — это некоторая функция $u(x)$ из пространства $W_2^{(k)}(G)$, обладающая свойствами, сформулированными в определении 31.2. Можно ожидать, что решение уравнения $Au = f$ с данными граничными условиями (см. ниже) будет отыскиваться среди функций из $W_2^{(k)}(G)$. Далее, как было показано выше (и как отмечалось уже в ч. III), устойчивые и неустойчивые граничные условия существенно различны по своей природе, поэтому было бы полезно выражать это различие в явном виде. Для этого введем *пространство* V, являющееся подпространством тех функций из $W_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют (в смысле теории следов) соответствующим *однородным устойчивым* условиям.

Рассмотрим задачу примера 32.1 с граничными условиями (32.10). Как уже говорилось, обозначим через V множество (точнее, пространство с метрикой пространства $W_2^{(1)}(G)$) всех функций $v \in W_2^{(1)}(G)$, удовлетворяющих (в смысле теории следов) соответствующему устойчивому однородному граничному условию, т. е. условию

$$v = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{32.16}$$

Как известно (см. замечание 30.4 и теорему 30.6), в этом случае

$$V = \mathring{W}_2^{(1)}(G), \tag{32.17}$$

где $\mathring{W}_2^{(1)}(G)$ — подпространство пространства $W_2^{(1)}(G)$, определенное в гл. 30.

Условие (32.12) в примере 32.2 неустойчиво, поэтому здесь нельзя говорить об однородном граничном условии, соответствующем некоторому устойчивому граничному условию. Если даже в этом случае необходимо ввести пространство V тех функций из $W_2^{(1)}(G)$, которые удовлетворяют «соответствующему устойчивому однородному граничному условию», то нужно положить $V = W_2^{(1)}(G)$, поскольку на функции из $W_2^{(1)}(G)$ не налагается никаких условий.

В примере 32.3

$$V = \{v:\ v \in W_2^{(2)}(G),\ v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}\ ^{1}), \tag{32.18}$$

поскольку условие (32.15) неустойчиво, и функции из V должны удовлетворять лишь однородному условию, соответствующему

---

[1]) Нетрудно доказать, рассуждая таким же образом, как и в тексте, предшествующем уравнению (32.2), что V является подпространством пространства $W_2^{(2)}(G)$, т. е. показать, что V — *полное пространство*. Это же утверждение справедливо для пространств V, рассматриваемых ниже в этой главе, так как это пространства функций, удовлетворяющих устойчивым однородным граничным условиям.

устойчивому граничному условию (32.14), т. е. условию $v=g(S)$ на Γ.

Преобразуем теперь задачи, сформулированные в примерах 32.1—32.3, к виду, более удобному для дальнейшего изучения и в некотором смысле аналогичному интегральным тождествам (31.32) и (31.41), из которых было получено определение слабого решения уравнения $Au=f$. Для этого применим формулу (31.29),

$$\int_G \frac{\partial b}{\partial x_l} c\,dx = \int_\Gamma bc\nu_l\,dS - \int_G b\frac{\partial c}{\partial x_l}\,dx, \quad b,\ c\in W_2^{(1)}(G), \tag{32.19}$$

где ν_l, $l=1,\ldots,N$ — направляющие косинусы внешней нормали. Граница Γ является липшицевой по предположению, и, следовательно, внешняя нормаль существует почти всюду на Γ, а $\nu_l(S)$ — ограниченные измеримые функции на Γ.

Рассмотрим задачу (32.9), (32.10) примера 32.1. Если $g(S)\in\mathfrak{C}(\Gamma)$, $f\in C(\bar G)$ и $u\in C^{(2)}(\bar G)$ — классическое решение данной задачи, то уравнения

$$-\Delta u=f \text{ в } G \tag{32.20}$$

и

$$u=g(S) \text{ на } \Gamma \tag{32.21}$$

удовлетворяют в обычном смысле. Пусть $v\in V$ — произвольная функция (согласно (32.17), $V=\mathring{W}_2^{(1)}(G)$). Умножив уравнение (32.20) на эту функцию и проинтегрировав по области G, мы получаем соотношение

$$-\int_G v\Delta u\,dx=\int_G vf\,dx. \tag{32.22}$$

Поскольку $v\in W_2^{(1)}(G)$, а также $\partial u/\partial x_l\in W_2^{(1)}(G)$, $l=1,\ldots,N$, то можно использовать формулу (32.19), где $c=v$ и $b=-\partial u/\partial x_l$. В результате получаем

$$-\int_G v\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}\,dx=-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial x_l}\nu_l\,dS+\int_G \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\,dx. \tag{32.23}$$

Поскольку функция $\partial u/\partial x_l\in W_2^{(1)}(G)$, то ее след $\partial u/\partial x_l(S)\in L_2(\Gamma)$. Кроме того, $\nu_l(S)$ — ограниченная измеримая функция на Γ (следовательно, и $\partial u/\partial x_l\nu_l\in L_2(\Gamma)$), а $v=0$ в $L_2(\Gamma)$ (в смысле теории следов), поскольку $v\in V$. Отсюда следует, что

$$\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial x_l}\nu_l\,dS=0.$$

Складывая равенства (32.23), полученные последовательно для $l=1,\ldots,N$, находим, что

$$-\int_G v\Delta u\,dx=\sum_{l=1}^N\int_G \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\,dx.$$

Таким образом, (32.22) можно представить в виде

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G vf\, dx,$$

где $v \in V$ — произвольная функция. Следовательно, если функция $u(x)$ является классическим решением задачи (32.20), (32.21), то

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G vf\, dx \text{ для каждой } v \in V. \tag{32.24}$$

Так же как в гл. 31, мы скажем, что *интегральное тождество* (32.24) *справедливо для функций* $u(x)$, или короче, что *функция* $u(x)$ *удовлетворяет условию* (32.24).

Чтобы получить интегральное тождество (32.24), мы наложили на функции $u(x)$ и $f(x)$ целый ряд весьма специфических условий. Теперь существенно ослабим эти условия (например, интегралы в (32.24) имеют смысл, если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$ и $f \in L_2(G)$) и придем к понятию слабого решения данной задачи, формально аналогичному слабому решению уравнения $Au = f$, рассмотренному в предыдущей главе.

Пусть $g(S)$ *— след функции* $w \in W_2^{(1)}(G)$, *и пусть* $f \in L_2(G)$. *Пусть* $V = \{v:\ v \in W_2^{(1)}(G),\ v = 0$ *на* Γ *в смысле теории следов*$\}$ [1]). *Функция* $u \in W_2^{(1)}(G)$ *называется слабым решением задачи*

$$-\Delta u = f \quad \text{в } G, \tag{32.25}$$

$$u = g(S) \text{ на } \Gamma, \tag{32.26}$$

если

$$u - w \in V \tag{32.27}$$

и если

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G vf\, dx \text{ выполняется для всех } v \in V. \tag{32.28}$$

Замечание 32.1. Данное выше определение, хотя и сформулированное для очень частного случая, заслуживает более подробного обсуждения, так как оно уже содержит характерные черты общего понятия о слабом решении краевой задачи.

Ясно, что слабое решение задачи (32.25), (32.26) является слабым решением уравнения (32.25) в смысле определения 31.2. Действительно, каждая функция $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ (с компактным носителем) принадлежит пространству V, так что (32.28) справедливо для

[1]) Как уже указывалось, мы имеем в этом случае $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$.

каждой $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$,

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G \varphi f \, dx; \tag{32.29}$$

именно это условие определяет слабое решение уравнения (32.25).

Если $u(x)$ — слабое решение задачи (32.25), (32.26) (а следовательно, и слабое решение уравнения (32.25)) и если функции $f(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют некоторым условиям непрерывности или гладкости, мы получаем в результате «обратного» преобразования с помощью теоремы Грина, что $u(x)$ является классическим решением данного уравнения в G. Условие (32.28) можно представить в виде интегрального тождества

$$\sum_{|i|, |j| \leqslant 1} \int_G a_{ij} D^i v D^j u \, dx = \int_G v f \, dx, \tag{32.30}$$

аналогичного (31.36). Ниже левые части интегральных тождеств, аналогичных (32.30), будут обозначаться через $A(v, u)$. Тогда условие (32.28) примет вид $A(v, u) = \int_G vf \, dx$ для каждой $g(S)$.

Выполнение граничного условия (32.26) обеспечивается условием (32.27). По предположению функция $w(x)$ имеет след $g(S)$ на границе Г. Поскольку, согласно (32.27), $u - w \in V$, функция $u(x) - w(x)$ имеет след, равный нулю, на границе Г и, следовательно, функция $u(x)$ также имеет след $g(S)$ на границе Г. Итак, граничное условие здесь выражено через функцию $w \in W_2^{(1)}(G)$. У читателя наверняка возникнет вопрос, почему нельзя сформулировать решение данной задачи следующим образом: дана задача (32.25), (32.26), где $f \in L_2(G)$ и $g \in L_2(\Gamma)$; слабое решение этой задачи — такая функция $u \in W_2^{(1)}(G)$, следом которой на Г является функция $g(S)$, для которой удовлетворяется условие (32.28). Такая формулировка возможна. Но здесь мы сталкиваемся со следующей трудностью: дело в том, что, как указывалось в замечании 30.3, не каждая функция $g \in L_2(\Gamma)$ может быть следом функции $u(x)$ из пространства $W_2^{(1)}(G)$. Если функция $g(S)$ не является следом ни для какой функции и $W_2^{(1)}(G)$, то наша задача не может иметь решения в смысле данного определения. В следующей главе мы покажем «обратное»: если $g(S)$ — след некоторой функции $w \in W_2^{(1)}(G)$, то существование (и даже единственность) слабого решения рассматриваемой задачи в смысле выполнения интегрального тождества (32.28) и условия (32.27) гарантировано.

Мы уже сталкивались с подобной проблемой в гл. 11, с. 139. Там мы предполагали существование достаточно гладкой функции $w(x)$ (такой что $Aw \in L_2(G)$), удовлетворяющей данному граничному условию. С помощью этой функции рассматриваемая задача сводилась к задаче с однородными граничными условиями. Здесь мы налагаем аналогичное, но значительно более слабое

условие: функция f не обязана быть очень гладкой для применимости к ней рассматриваемого оператора A, в нашем случае оператора Лапласа; требуется лишь принадлежность ее пространству $W_2^{(1)}(G)$, что намного естественнее, поскольку речь идет о понятии решения как таковом.

Что касается формулировки граничного условия в смысле данного выше определения слабого решения задачи (32.25), (32.26), заметим следующее. В приложениях почти всегда дается именно функция $g(S)$, а не функция $w \in W_2^{(1)}(G)$, следом которой должна быть $g(S)$. В гл. 46 рассматриваются относительно простые условия, обеспечивающие существование такой функции w. (Там же обсуждаются условия, при которых слабое решение данной задачи является также ее классическим решением.) Ясно, что в случае, когда функция $g(S)$ не является следом какой бы то ни было функции из $W_2^{(1)}(G)$, наш подход не годится. В таких случаях избирается какой-либо иной метод. Один из возможных способов состоит в использовании, по существу, идеи классического решения данного дифференциального уравнения и обобщении только формулировки граничных условий (см. работы автора [34—36]). Этот способ полезен, например, в случае уравнений второго порядка. Другой способ, пригодный также для уравнений более высоких порядков, состоит в отыскании решения в *соболевских пространствах с весами* (см. работы [21—23]), либо в обобщении понятия слабого решения введением так называемого очень слабого решения. Эти проблемы рассматриваются в [32]; см. также гл. 43, 45, с. 529 и 556.

Вернемся теперь к примеру 32.2, т. е. к задаче

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad G, \tag{32.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h(S) \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{32.32}$$

Мы видели, что в этом случае $V = W_2^{(1)}(G)$. Пусть $h(S) \in C(\Gamma)$, $f \in C(\bar{G})$ и $u \in C^{(2)}(\bar{G})$ — классическое решение рассматриваемой задачи, и, следовательно, функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (32.31) и граничному условию (32.32) в классическом смысле. Умножая уравнение (32.31) на произвольную функцию $v \in W_2^{(1)}(G)$ и интегрируя полученный результат по области G, мы получаем соотношение

$$-\int_G v \Delta u \, dx = \int_G v f \, dx. \tag{32.33}$$

Применяя теорему Грина, мы получаем, как и в (32.23),

$$-\int_G v \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} \, dx = -\int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial x_l} \nu_l \, dS + \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} \, dx, \tag{32.34}$$

где $l = 1, \ldots, N$. Здесь интеграл вдоль границы, вообще говоря, не равен нулю. Складывая равенства (32.34) и учитывая, что

$\sum_{l=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_l} \nu_l = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, мы получаем

$$-\int_G v\Delta u\, dx = -\int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS + \sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx.$$

Заменяя левую часть в (32.33) полученным выражением, в котором на основании (32.23) мы пишем $h(S)$ вместо $\partial u/\partial \nu$, получаем

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx = \int_G vf\, dx + \int_\Gamma vh(S)\, dS, \quad v \in W_2^{(1)}(G). \quad (32.35)$$

Итак, если $h(S) \in L_2(\Gamma)$, $f \in L_2(\Gamma)$, то *слабым решением задачи* (32.31), (32.32) *является функция* $u \in W_2^{(1)}(G)$, *такая что для всех* $v \in W_2^{(1)}(G)$ *имеет место соотношение* (32.35), причем сформулированные ранее условия на непрерывность и гладкость функций h, f и u не следует принимать во внимание.

Замечание 32.2. Основное отличие рассматриваемого здесь случая от предыдущего заключается в форме граничного условия (32.32), неустойчивого в настоящем случае, причем неустойчивость возникает из-за функции $h(S)$ непосредственно в интегральном тождестве (32.35). Здесь, формулируя граничное условие, нельзя предполагать существование такой функции $w \in W_2^{(1)}(G)$, что $\partial w/\partial \nu = h(S)$ на Γ, и требовать, чтобы слабое решение удовлетворяло условию $\partial u/\partial \nu = \partial w/\partial \nu$ на Γ. Действительно, первые производные функций из $W_2^{(1)}(G)$ в общем случае не имеют следов на Γ, и, следовательно, выражения $\partial u/\partial \nu$, $\partial w/\partial \nu$ не имеют смысла на Γ в общем случае. Но как выяснится позднее, различие определений для устойчивого и неустойчивого граничных условий зависит не только от этого обстоятельства.

Вернемся к примеру 32.3, т. е. к плоской задаче

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } G, \quad (32.36)$$

$$u = g(s) \quad \text{на } \Gamma, \quad (32.37)$$

$$Mu = h(s) \quad \text{на } \Gamma, \quad (32.38)$$

где $Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\,\partial^2 u/\partial \nu^2$ и $0 \leqslant \sigma < 1$. В этом случае пространство V образовано такими функциями из $W_2^{(2)}(G)$, которые равны нулю на Γ, т. е. $V = \{v\colon v \in W_2^{(2)}(G),\ v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}$. Предположим, что функции $g(s)$, $h(s)$ непрерывны на Γ, функция $f(x)$ непрерывна в G и что $u(x) \in C^{(4)}(\bar{G})$ — классическое решение задачи (32.36)—(32.38). Умножив уравнение (32.36) на произвольную функцию $v \in V$ и проинтегрировав результат по G, мы получаем

$$\int_G v\Delta^2 u\, dx = \int_G vf\, dx. \quad (32.39)$$

Если для бигармонического оператора взять разложение примера 31.5, то стандартное применение теоремы Грина (см. (23.22)) в предположении, что граница достаточно гладкая, дает

$$\int_G v\Delta^2 u\,dx = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]dx-\int_\Gamma vNu\,ds-\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}Mu\,ds, \quad (32.40)$$

где

$$Nu=-\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u)+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}(\nu_1^2-\nu_2^2)-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right].$$

Поскольку $v\in V$, мы имеем $v=0$ в $L_2(\Gamma)$, и, следовательно, первый интеграл вдоль границы в правой части тождества (32.40) равен нулю. Во втором интеграле вдоль Γ вместо Mu подставим $h(s)$ согласно (32.38). Тогда равенство (32.39) примет вид

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]dx=\int_G vf\,dx+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}h(s)\,ds, \quad v\in V, \quad (32.41)$$

Это соотношение [1]) удовлетворяется любым достаточно гладким решением задачи (32.36)—(32.38). Так же как и в предыдущем случае, понятие классического решения рассматриваемой задачи обобщается следующим образом.

Пусть $g(s)$—след функции $w\in W_2^{(2)}(G)$. Обозначим

$$V=\{v\in W_2^{(2)}(G)\colon\ v=0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле следов}\}. \quad (32.42)$$

Пусть $h(s)\in L_2(\Gamma)$, $f\in L_2(\Gamma)$. Функция $u\in W_2^{(2)}(G)$ называется слабым решением задачи (32.36)—(32.38), если

$$u-w\in V \quad (32.43)$$

и если для каждой функции $v\in V$ удовлетворяется условие (32.41).

В случае задачи (32.36)—(32.38) должно удовлетворяться только одно из условий Дирихле $u=g_1(s)$ на Γ, $\partial u/\partial \nu=g_2(s)$ на Γ, а именно первое условие

$$u=g_1(s)=g(s) \quad \text{на } \Gamma. \quad (32.44)$$

Второе условие $\partial u/\partial \nu=g_2(s)$ на Γ удовлетворяться не должно. Оно заменяется в этом случае условием

$$Mu=h(s) \text{ на } \Gamma. \quad (32.45)$$

---

[1]) С физической точки зрения это не что иное, как принцип виртуальных перемещений (или прогибов) в теории пластин.

Выполнение граничного условия (32.44) в смысле теории следов отражено в условии (32.43). Второе (неустойчивое) граничное условие (32.45) содержится непосредственно в интегральном тождестве (32.41) (с «коэффициентом» $\partial v/\partial \nu$).

в) Определение слабого решения краевой задачи. Общий случай

Несмотря на то что данная краевая задача все еще не сформулирована для общего случая, уже при анализе примеров 32.1—32.3 мы отметили характерные черты в определении так называемого слабого решения этой задачи. Теперь перейдем к формулировке рассматриваемой задачи для общего случая [1]).

В начале этой главы граничные условия для дифференциального уравнения порядка $2k$ были разделены на устойчивые, содержащие производные искомого решения порядка не более $k-1$, и неустойчивые, содержащие производные большего порядка, чем $k-1$. В вышеприведенных примерах из устойчивых граничных условий были рассмотрены только условия Дирихле, имеющие вид

$$u = g_0(S), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1(S), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = g_{k-1}(S) \text{ на } \Gamma. \quad (32.46)$$

Остановимся пока на этих условиях. Если среди заданных граничных условий встречаются также и неустойчивые, то ясно, что оставшиеся условия включают не все условия (32.46), а только некоторые из них. В примере 32.2 условие Дирихле отсутствовало; в примере 32.3 для уравнения четвертого порядка имело место лишь первое из условий (32.46). Пусть для рассматриваемого уравнения порядка $2k$ даны μ устойчивых граничных условий Дирихле и $k-\mu$ неустойчивых граничных условий. *Итак, среди заданных граничных условий имеется только* μ *условий вида* (32.46). Запишем их в виде

$$\frac{\partial^{s_1} u}{\partial \nu^{s_1}} = g_{s_1}, \quad \frac{\partial^{s_2} u}{\partial \nu^{s_2}} = g_{s_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{s_\mu} u}{\partial \nu^{s_\mu}} = g_{s_\mu}. \quad (32.47)$$

---

[1]) Формулировка граничных условий для уравнений более высокого порядка не проста. Она должна быть достаточно общей, чтобы охватить все «корректные» граничные условия, встречающиеся в прикладных краевых задачах для дифференциальных уравнений.

В то же время необходимо исключить «некорректные» граничные условия вроде описанных ниже. Пусть $k=2$, $N=2$, т. е. рассматривается уравнение четвертого порядка в плоской области. Обозначим через s параметр длины дуги на Γ и зададим граничные условия $u = g_0(s)$ на Γ, $\partial u/\partial s = g_1(s)$ на Γ. Ясно, что данные граничные условия не относятся к «корректным», поскольку функции u и $\partial u/\partial s$ не независимы на Γ.

Пусть опять $k=2$, $N=2$, и граничные условия имеют вид $u = g_0(s)$ на Γ, $\partial u/\partial \nu - \alpha u = g_1(s)$ на Γ. Эти граничные условия также не являются «корректными», поскольку из первого условия следует, что второе имеет вид $\partial u/\partial \nu = g_2(s)$, где $g_2(s)$ — известная функция.

Остальные $k-\mu$ условий, записанные в виде

$$\frac{\partial^{t_1}u}{\partial\nu^{t_1}}=g_{t_1},\quad \frac{\partial^{t_2}u}{\partial\nu^{t_2}}=g_{t_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{t_{k-\mu}}u}{\partial\nu^{t_{k-\mu}}}=g_{t_{k-\mu}},\tag{32.48}$$

среди данных граничных условий *не* встречаются. В примере 32.1, т. е в случае задачи $-\Delta u=f$ в G, $u=g(S)$ на Γ, мы имеем $k=1$, $\mu=1$, $s_1=0$ (под производной порядка нуль мы, как всегда, понимаем саму функцию u), $k-\mu=0$ (следовательно, (32.48) — пустое множество). В примере 32.2, т. е. в задаче $-\Delta u=f$ в G, $\partial u/\partial\nu=h(S)$ на Γ, мы имеем $k=1$, $\mu=0$ (здесь (32.47) — пустое множество), $k-\mu=1$, $t_1=0$. В примере 32.3, т. е. в задаче $\Delta^2u=f$ в G, $u=g(s)$ на Γ, $Mu=h(s)$ на Γ, мы имеем $k=2$, $\mu=1$, $s_1=0$, $k-\mu=1$, $t_1=1$ (поскольку условие $\partial u/\partial\nu=h(S)$, устойчивое для оператора Δ^2, не встречается среди заданных граничных условий, то оно принадлежит к условиям вида (32.48)). Чтобы рассмотреть условия более общего вида, нежели условия Дирихле, предположим, что граница Γ имеет определенную гладкость, и исследуем не условия (32.47), а условия вида

$$B_1u\equiv\frac{\partial^{s_1}u}{\partial\nu^{s_1}}+F_1u=g_1(S),$$

. . . . . .

$$B_\mu u\equiv\frac{\partial^{s_\mu}u}{\partial\nu^{s_\mu}}+F_\mu u=g_\mu(S)\ ^{1}).\tag{32.49}$$

Здесь операторы F_l, $l=1,\ \ldots,\ \mu$, суть линейные операторы порядков не более чем $k-1$, члены которых содержат «в локальных координатах» только те производные по направлению внешней нормали, порядки которых соответствуют числам $t_1,\ \ldots,\ t_{k-\mu}$ [2]). Кроме того, отдельные слагаемые этих операторов могут также содержать производные вдоль направления касательной [3]); более подробно это изложено в [32].

[1]) Вместо $g_{s_1}(S)$ для упрощения обозначений мы будем писать $g_1(S)$ и т. д.

[2]) Если предположить, что эти операторы содержат также те производные вдоль внешней нормали, порядки которых соответствуют числам $s_1,\ \ldots,\ s_\mu$, то возникают различные «некорректные» граничные условия, так для $s_1=0$ возникает условие $u+\partial u/\partial s=g(s)$ на Γ (здесь u — производная порядка нуль функции вдоль внешней нормали; второй член слева также содержит производную порядка нуль вдоль внешней нормали), т. е. мы имеем дифференциальное уравнение для функции u на границе, и т. д.

[3]) То есть в $(N-1)$-мерной гиперплоскости, перпендикулярной вектору нормали. Иными словами: если $\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{N-1}$, ν — «локальные координаты», мы рассматриваем операторы F_l вида

$$\sum_{|i|\leqslant k-1} b_{t_i}\frac{\partial^{|i|}u}{\partial\sigma_1^{i_1}\ldots\partial\sigma_{N-1}^{i_{N-1}}\partial\nu^{t_j}},$$

где b_{t_i} — ограниченные измеримые функции на Γ, а j — одно из чисел $1,\ \ldots,\ k-\mu$.

Пример 32.4. Для оператора четвертого порядка ($k=2$) заданы следующие условия: $\partial u/\partial \nu + 3u = g(S)$ на Γ, $\Delta u = h(S)$ на Γ. Первое условие является устойчивым для данного оператора, а второе — нет. Таким образом, $\mu = 1$. Далее, если $s_1 = 1$, $k - \mu = 1$, $t_1 = 0$, то $B_1 u = \partial u/\partial \nu + F_1 u$, где $F_1 u = 3u$ — это умноженная на три производная вдоль внешней нормали, соответствующая $t_1 = 0$, $\partial^{t_1} u/\partial \nu^{t_1} = \partial^0 u/\partial \nu^0 = u$. Отсюда следует, что оператор B_1 является оператором рассматриваемого вида, а оператор из примечания 2, см. предыдущую страницу, — нет.

Обозначим через V подпространство [1]) *всех функций $v \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющих однородным условиям* (32.49), *т. е. условиям*

$$B_1 = 0, \ \ldots, \ B_\mu = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{32.50}$$

Прежде чем перейти к определению слабого решения краевой задачи для рассматриваемого уравнения $Au = f$, т. е. для уравнения

$$\sum_{|i|,\ |j| \leqslant k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j u) = f, \tag{32.51}$$

введем следующие условные обозначения. В предыдущей главе, а также в этой главе нам уже встречалось выражение

$$\sum_{|i|,\ |j| \leqslant k} \int_G a_{ij} D^i v D^j u \, dx, \tag{32.52}$$

где a_{ij} — коэффициенты данного оператора A, а D^i, D^j — линейные дифференциальные операторы, введенные на с. 332. Как уже говорилось, с. 365, для выражения (32.52), с которым нам придется часто иметь дело в дальнейшем, вводится обозначение $A(v, u)$:

$$A(v, u) = \sum_{|i|,\ |j| \leqslant k} \int_G a_{ij} D^i v D^j u \, dx. \tag{32.53}$$

Ясно, что это выражение линейно относительно u и v,

$$\begin{aligned} A(v, c_1 u_1 + c_2 u_2) &= c_1 A(v, u_1) + c_2 A(v, u_2), \\ A(c_1 v_1 + c_2 v_2, u) &= c_1 A(v_1, u) + c_2 A(v_2, u). \end{aligned} \tag{32.54}$$

Поэтому мы называем его *билинейной формой, соответствующей оператору*

$$A = \sum_{|i|,\ |j| \leqslant k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j). \tag{32.55}$$

Здесь следует добавить следующее. Мы уже видели, см. пример 31.5, что оператор $-\Delta$ можно «построить» несколькими способами в зависимости от того, какое из «разложений» этого опера-

[1]) Доказательство, что это подпространство, т. е. доказательство его полноты, следует из рассуждений, проведенных на с. 358. См. также прим. на с. 362.

тора нами выбрано. Таким образом, в зависимости от выбранного разложения можно получить, вообще говоря, один и тот же оператор A, но с разным набором коэффициентов a_{ij}. От выбора разложения зависит и вид билинейной формы. Ясно, что если дана форма (32.53), оператор A определен однозначно, поскольку функции a_{ij} в (32.53) фиксированы. Поэтому было бы точнее говорить, что оператор A соответствует форме $A(v, u)$, а не что форма $A(v, u)$ соответствует оператору A. В дальнейшем, однако, рассматривая оператор A и соответствующую билинейную форму $A(v, u)$, мы будем предполагать, что нам уже дано некоторое фиксированное разложение оператора A. Следовательно, его коэффициенты, определенные благодаря сделанному выбору однозначно, однозначным образом определяют и соответствующую форму $A(v, u)$ (см. также с. 350). Беря, например, стандартное разложение оператора $-\Delta$ в плоскости ($N=2$),

$$a_{1,0;1,0}=1, \qquad a_{0,1;0,1}=1 \tag{32.56}$$

и $a_{ij}=0$ в остальных случаях, мы получаем

$$A(v, u)=\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx. \tag{32.57}$$

При этом (для $N=2$) интегральное тождество (32.38) примет вид

$$\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx=\int_G vf\,dx, \quad v\in V$$

или

$$A(v, u)=\int_G vf\,dx, \quad v\in V. \tag{32.58}$$

Аналогичным образом, рассматривая бигармонический оператор в плоскости и беря разложение примера 31.5, интегральное тождество (32.41) можно представить в форме

$$A(v, u)=\int_G vf\,dx+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}h(s)\,ds. \tag{32.59}$$

Заметим, что коэффициенты a_{ij} оператора A и, следовательно, формы (32.53) являются по предположению ограниченными измеримыми по Лебегу функциями. Таким образом, для того чтобы интегралы в (32.53) имели смысл, достаточно, чтобы функции $v(x)$ и $u(x)$ принадлежали пространству $W_2^{(k)}(G)$. (Поскольку $|i|\leqslant k$, $|j|\leqslant k$, производные D^iv, D^ju принадлежат $L_2(G)$.) Учитывая вывод формы $A(v, u)$ и детальный анализ формулировки граничных условий, проведенный в начале этой главы, можно дать следующее предварительное[1]) определение слабого решения уравнения $Au=f$ с граничными условиями.

[1]) Предварительные потому, что некоторые обобщения будут сделаны только в определении 32.2. Тем не менее определение 32.1 важно.

Определение 32.1. (*Предварительное определение слабого решения краевой задачи.*) Дано:

область G с границей Липшица (возможно, удовлетворяющая определенным требованиям гладкости соответственно природе задачи); (32.60)

оператор

$$A=\sum_{|i|,\ |j|\leqslant k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}D^j) \tag{32.61}$$

с ограниченными измеримыми по Лебегу коэффициентами a_{ij}; соответствующая билинейная форма

$$A(v,\ u)=\sum_{|i|,\ |j|\leqslant k}\int\limits_G a_{ij}D^iv D^ju\,dx; \tag{32.62}$$

функция

$$f\in L_2(G); \tag{32.63}$$

операторы (32.49)

$$B_1,\ \ldots,\ B_\mu,\quad \mu\leqslant k; \tag{32.64}$$

подпространство

$$V=\{v\in W_2^{(k)}(G):\ B_1v=0,\ \ldots,\ B_\mu v=0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}; \tag{32.65}$$

функции $g_1,\ \ldots,\ g_\mu\in L_2(\Gamma)$ и функция $w\in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющая условию

$$B_1w=g_1(S),\ \ldots,\ B_\mu w=g_\mu(S) \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}; \tag{32.66}$$

функции

$$h_1(S),\ \ldots,\ h_{k-\mu}(S)\in L_2(\Gamma). \tag{32.67}$$

Функция $u\in W_2^{(k)}(G)$ называется *слабым решением краевой задачи* (32.60)—(32.67), если

$$u-w\in V \tag{32.68}$$

и если формула

$$A(v,\ u)=\int\limits_G vf\,dx+\sum_{t=1}^{k-\mu}\int\limits_\Gamma \frac{\partial^t t_v}{\partial\nu^t}h_t\,dS, \tag{32.69}$$

где $t_1,\ \ldots,\ t_{k-\mu}$ определены в (32.48), справедлива для каждого $v\in V$.

Замечание 32.3. К данному выше определению можно сделать замечание, аналогичное замечанию 32.1. Прежде всего из (32.69) следует, что $u(x)$ есть слабое решение уравнения $Au=f$ в смысле определения 31.2: каждая функция φ с компактным носителем в G принадлежит V, и, следовательно, (32.69) справедливо для φ;

далее, φ тождественно равна нулю в некоторой окрестности границы, поэтому все интегралы в (32.69) вдоль границы равны нулю, откуда получаем

$$A(\varphi,\ u)=\int\limits_G \varphi f\,dx \quad \text{для каждой } \varphi\in C_0^{(\infty)}(G). \tag{32.70}$$

Отсюда следует, что $u(x)$ — слабое решение уравнения $Au=f$.

К формулировке устойчивых граничных условий можно добавить замечание, аналогичное замечанию 32.1. В частности, из (32.68) и (32.66) следует, что слабое решение данной задачи удовлетворяет (в смысле теории следов) устойчивым граничным условиям

$$B_1(u)=g_1(S),\ \ldots,\ B_\mu u=g_\mu(S) \text{ на } \Gamma. \tag{32.71}$$

Неустойчивые граничные условия определяются [1]) членом

$$\sum_{l=1}^{k-\mu}\int\limits_\Gamma \frac{\partial^{t_l} v}{\partial \nu^{t_l}}\,h_l\,dS \tag{32.72}$$

в условии (32.69). Вид этих граничных условий находится с помощью «обратного» приложения теоремы Грина к (32.69) при формальном предположении, что рассматриваемые функции и, возможно, граница Γ имеют достаточную гладкость. И наоборот, если дано уравнение $Au=f$ с граничными условиями рассмотренного выше вида, то, применяя теорему Грина (и, возможно, выполняя дальнейшие стандартные выкладки, см. [32]; см. также преобразование последних интегралов (23.14)), мы получаем (по крайней мере формально) выражение вида (32.72). В задаче (32.31), (32.32) применение теоремы Грина дает нам при заданном граничном условии (32.32) соответствующий член в интегральном тождестве (32.35), в задаче (32.36) — (32.38) мы при заданном граничном условии (32.38) получаем соответствующий член в тождестве (32.41). См. также примеры, приводимые в конце этой главы.

Замечание 32.4. Как следует из определения 32.1, слабое решение данной краевой задачи определено довольно общо. В случае дифференциальных уравнений мы получаем здесь значительно более общее определение, нежели рассматриваемое в третьей части данной книги. Это прежде всего касается предположений относительно коэффициентов рассматриваемого уравнения, согласно которым непрерывность их не обязательна (достаточно, что они были ограничены и измеримы по Лебегу; требование ограниченности можно даже ослабить, см. [32]). Симметрия коэффициентов ($a_{ij}=a_{ji}$) здесь также не требуется. Формулировка, определяющая

[1]) Введенные на с. 370 операторы F_l играют соответствующую роль. Так как вид этих операторов известен, мы можем сказать, что выражение (32.72) или функции $h_l(S)$ характеризуют неустойчивые граничные условия.

устойчивые граничные условия, также существенно удобнее. Напомним, что причиной многих значительных трудностей, с которыми нам пришлось столкнуться в третьей части книги, явились задачи с неоднородными граничными условиями. Это относится также и к неустойчивым условиям.

Слабое решение $u(x)$ является обобщением классического решения в следующем смысле. Если слабое решение $u(x)$ рассматриваемой задачи, а также исходные данные (коэффициенты a_{ij} и т. д.) достаточно гладкие, то «обратным» применением теоремы Грина к интегральному тождеству (32.69) можно показать, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $Au = f$ и граничным условиям в классическом смысле.

Естественно возникает вопрос, а можно ли при таких общих условиях доказать существование и единственность решения, определенного подобным образом. Следующая глава дает (в предположении так называемой V-эллиптичности формы $A(v, u)$) положительный ответ на этот вопрос. Если к тому же исходные данные рассматриваемой задачи достаточно гладкие, то можно показать (см. гл. 46), что слабое решение также достаточно гладкое и, следовательно, удовлетворяет, как только что было отмечено, рассматриваемому уравнению и данным граничным условиям (либо, возможно, лишь некоторым из них, что зависит от степени гладкости) в классическом смысле.

В гл. 34 мы также увидим, что слабое решение краевой задачи можно получить, в довольно естественных предположениях, с помощью современных вариационных методов. Мы также увидим, что, используя представленные выше формулировки рассматриваемой задачи, а также формулировки следующего ниже определения 32.2, можно сравнительно просто построить соответствующий функционал и определить класс функций, на котором этот функционал должен быть минимизирован, даже в тех случаях, которые представляли значительные трудности в предыдущей теории.

Но, как будет видно из следующего замечания и из примера 32.6, определение 32.1 требует некоторого дополнения.

Замечание 32.5. До сих пор мы рассматривали случай, когда на всей границе Γ задаются условия одного и того же вида. В приложениях же часто встречаются условия смешанного типа, например, для уравнения Пуассона на участке Γ_1 границы Γ дано граничное условие Дирихле

$$u|_{\Gamma_1} = g(S), \tag{32.73}$$

а на другом участке Γ_2 этой границы дано граничное условие Неймана

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = h(S). \tag{32.74}$$

В общем случае предположим, что граница Γ состоит из r непересекающихся открытых связных частей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ с положительными мерами, $\operatorname{mes}[\Gamma-(\Gamma_1+\ldots+\Gamma_r)]=0$ [1]). Пусть на Γ_1 даны μ_1 операторов $B_{11}, \ldots, B_{1\mu_1}$, определяющих устойчивые граничные условия, и $k-\mu_1$ функций $h_{1l}\in L_2(\Gamma_1)$, $l=1, \ldots, k-\mu_1$, определяющих неустойчивые граничные условия. И аналогичным образом пусть на Γ_2 даны операторы $B_{21}, \ldots, B_{2\mu_2}$ и функции $h_{21}\in L_2(\Gamma_2), \ldots, h_{2,\,k-\mu_2}\in L_2(\Gamma_2)$ и т. д. Формулировка краевой задачи в этом случае будет аналогична представленной в определении 32.1. Вместо условий (32.66) на Γ мы имеем (в смысле теории следов)

$$\begin{aligned} &B_{11}w=g_{11}(S), \ \ldots, \ B_{1\mu_1}w=g_{1\mu_1}(S) \quad \text{на } \Gamma_1\ [2]),\\ &B_{21}w=g_{21}(S), \ \ldots, \ B_{2\mu_2}w=g_{2\mu_2}(S) \quad \text{на } \Gamma_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

V — пространство тех функций $v\in W_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям

$$\begin{aligned} &B_{11}v=0, \ \ldots, \ B_{1\mu_1}v=0 \quad \text{на } \Gamma_1,\\ &B_{21}v=0, \ \ldots, \ B_{2\mu_2}v=0 \quad \text{на } \Gamma_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

интегральное тождество (32.69) принимает вид

$$A(v,\ u)=\int\limits_G vf\,dx+\sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\int\limits_{\Gamma_p}\frac{\partial^{t_{pl}}}{\partial\nu^{t_{pl}}}h_{pl}\,dS \quad \text{для каждого } v\in V. \tag{32.75}$$

Пример 32.5. Для уравнения Пуассона и граничных условий (32.73), (32.74) легко получить обычным применением теоремы Грина (см. гл. 22, случай $Nu=\partial u/\partial\nu$) интегральное тождество (32.75) вида

$$A(v,\ u)=\int\limits_G\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\,dx=\int\limits_G vf\,dx+\int\limits_{\Gamma_2}vh\,dS, \quad \text{для каждого } v\in V, \tag{32.76}$$

где $V=\{v\in W_2^{(1)}(G)\colon\ v=0 \text{ на } \Gamma_1\}$; условие (32.73) определяется функцией $w\in W_2^{(1)}(G)$, для которой выполняется соотношение $w=g(S)$ (в смысле теории следов) на Γ_1.

В следующем примере показано, что обобщение определения 32.1 можно проводить и в ином направлении.

---

[1]) Таким образом, если из Γ убрать все Γ_p, $p=1, \ldots, r$, то мы получим множество меры нуль.

[2]) Под следом функции $u\in W_2^{(1)}(G)$ на Γ_1 следует понимать ограничение следа (функции) $u(S)\in L_2(\Gamma)$. Таким образом, рассматривается лишь та «часть» функции $u(S)$, которая «принадлежит» Γ_1.

Пример 32.6. Рассмотрим *задачу Ньютона* для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \quad \text{в } G, \tag{32.77}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = h \quad \text{на } \Gamma. \tag{32.78}$$

Поскольку (32.78) — неустойчивое граничное условие, мы полагаем $V = W_2^{(1)}(G)$. Умножая уравнение (32.77) на произвольную функцию $v \in V$ и применяя теорему Грина (см. (32.18), случай $Nu = \partial u/\partial \nu$), мы получаем

$$\int_G vf\,dx = -\int_G v\,\Delta u\,dx = -\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS + \sum_{l=1}^{N}\int_G \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\,dx =$$

$$= \int_\Gamma \sigma vu\,dS - \int_\Gamma vh\,dS + \sum_{l=1}^{N}\int_G \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\,dx,$$

или, заменив последний интеграл введенным выше обозначением $A(v, u)$,

$$A(v, u) + \int_\Gamma \sigma vu\,dS = \int_G vf\,dx + \int_\Gamma vh\,dS, \quad v \in W_2^{(1)}(G). \tag{32.79}$$

Второй член в левой части интегрального тождества (32.79) содержит неизвестную функцию u и в нашей предварительной формулировке рассматриваемой задачи аналогов не имеет. Заметим, что v и u в интеграле $\int_\Gamma \sigma vu\,dS$ суть следы функций $v \in W_2^{(1)}(G)$, $u \in W_2^{(1)}(G)$ на границе Γ. Поскольку, согласно теореме 30.1, отображение пространства $W_2^{(1)}(G)$ в пространство $L_2(\Gamma)$ ограничено, то существует такая постоянная $c > 0$ (не зависящая от функций v, u), что для каждой пары функций v, u из $W_2^{(1)}(G)$

$$\|v\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant c\|v\|_{W_2^{(1)}(G)}, \quad \|u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant c\|u\|_{W_2^{(1)}(G)}. \tag{32.80}$$

В частности, если $\sigma(S)$ — ограниченная измеримая функция на Γ, $|\sigma(S)| \leqslant m$, то отсюда, а также из неравенства Шварца следует, что

$$\left|\int_\Gamma \sigma vu\,dS\right| \leqslant mc^2\|v\|_{W_2^{(1)}(G)}\|u\|_{W_2^{(1)}(G)} = c_1\|v\|_{W_2^{(1)}(G)}\|u\|_{W_2^{(1)}(G)}\ ^{1}), \tag{32.81}$$

где $c_1 = mc^2$.

Приведенный пример ясно показывает, что для анализа задач подобного типа интегральное тождество (32.69) определения 32.1

---

[1]) Подробнее: $\left|\int_\Gamma \sigma vu\,dS\right| \leqslant m\int_\Gamma |v||u|\,dS$; $\left(\int_\Gamma |v||u|\,dS\right)^2 \leqslant \int_\Gamma v^2\,dS \times$ $\times \int_\Gamma u^2\,dS = \|v\|^2_{L_2(\Gamma)}\|u\|^2_{L_2(\Gamma)} \leqslant c^2\|v\|^2_{W_2^{(1)}(G)}c^2\|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)}$.

необходимо дополнить еще одним членом. Обозначим этот член через $a(v, u)$ и — согласно рассмотренному примеру, а также последующим подобным случаям — будем считать, что:

1. $a(v, u)$ — билинейная форма от переменных v, u, т. е. функция, линейная по v и по u;

2. существует такая постоянная $c_1 > 0$, не зависящая от функций v, u из $W_2^{(k)}(G)$, что выполняется соотношение

$$|a(v, u)| \leqslant c_1 \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \quad [1]). \tag{32.82}$$

Выражение $a(v, u)$ называется *граничной билинейной формой*. Введем дополнительно обозначение

$$A(v, u) + a(v, u) = ((v, u)). \tag{32.83}$$

Ясно, что выражение $((v, u))$ является билинейной формой от переменных v, u. Легко показать, что при данных предположениях относительно формы $a(v, u)$, а также в предположении ограниченности [2]) коэффициентов $a_{ij}(x)$ оператора A существует такая постоянная K, не зависящая от функций v, u из $W_2^{(k)}(G)$, что выполняется неравенство

$$|((v, u))| \leqslant K \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)}, \quad v, u \in W_2^{(k)}(G). \tag{32.84}$$

Действительно, для формы $a(v, u)$ выполняется неравенство (32.82). Далее, если коэффициенты $a_{ij}(x)$ ограничены в G, $|a_{ij}(x)| \leqslant \overline{m}$, то, согласно неравенству Шварца, мы получаем для каждого члена формы $A(v, u)$ оценку

$$\left| \int_G a_{ij} D^i v D^j u \, dx \right| \leqslant \overline{m} \int_G |D^i v| \, |D^j u| \, dx \leqslant \overline{m} \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \quad [3]).$$

Из этой оценки немедленно следует существование такой постоянной $c_2 > 0$, что для каждой пары функций u, v из $W_2^{(k)}(G)$ выполняется неравенство

$$|A(v, u)| \leqslant c_2 \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)}. \tag{32.85}$$

Тогда из (32.82) и (32.85) мы получаем (32.84).

Определение 32.2. (*Определение слабого решения краевой задачи.*) Дано:

область G с границей Γ, удовлетворяющей условию Липшица (возможно, удовлетворяющей некоторым требованиям гладко-

---

[1]) Условия, достаточные для выполнения этого неравенства, рассматриваются в [32].

[2]) Это условие можно ослабить, см. [32].

[3]) Так как

$$\left(\int_G |D^i v| \, |D^j u| \, dx \right)^2 \leqslant \int_G (D^i v)^2 \, dx \cdot \int_G (D^j u)^2 \, dx \leqslant \|v\|^2_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)}.$$

сти, отвечающим природе рассматриваемой задачи)[1]; (32.86) оператор

$$A=\sum_{|i|,\ |j|\leqslant k}(-1)^{|i|}D^{i}\left(a_{ij}D^{j}\right) \tag{32.87}$$

с ограниченными измеримыми коэффициентами и билинейной формой (32.83)

$$((v,\ u))=A(v,\ u)+a(v,\ u), \tag{32.88}$$

для которой выполняется (32.84)

$$|(v,\ u)|\leqslant K\|v\|_{W_2^{(k)}(G)}\ \|u\|_{W_2^{(k)}(G)},\quad v,\ u\in W_2^{(k)}(G),\quad K>0; \tag{32.89}$$

функция

$$f\in L_2(G); \tag{32.90}$$

операторы

$$\begin{matrix} B_{11},\ \ldots,\ B_{1\mu_1},\\ \ldots\ldots\ldots\\ B_{r1},\ \ldots,\ B_{r\mu_r}\end{matrix} \tag{32.91}$$

на отдельных частях $\Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_r$ (ненулевой меры) границы Γ (см. замечание 32.5); пространство

$$V=\{v\in W_2^{(k)}(G):\ B_{11}v=0,\ \ldots,\ B_{r\mu_r}v=0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}\ ^{2}); \tag{32.92}$$

функции

$$g_{p1}\in L_2(\Gamma_p),\ \ldots,\ g_{p\mu_p}\in L_2(\Gamma_p),\quad p=1,\ \ldots,\ r \tag{32.93}$$

и функция $w\in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющая на Γ_p, $p=1,\ \ldots,\ r$, соотношениям

$$B_{p1}=g_{p1}(S),\ \ldots,\ B_{p\mu_p}w=g_{p\mu_p}(S) \tag{32.94}$$

в смысле теории следов; функции

$$h_{pl}(S)\in L_2(\Gamma_p),\quad p=1,\ \ldots,\ r,\quad l=1,\ \ldots,\ k-\mu_p. \tag{32.95}$$

Функция $u\in W_2^{(k)}(G)$ называется *слабым решением краевой задачи* (32.86)—(32.95), если

$$u-w\in V, \tag{32.96}$$

$$((v,\ u))=(v,\ f)+\sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\int_{\Gamma_p}\frac{\partial^{t_{pl}}v}{\partial\nu^{t_{pl}}}\,h_{pl}\,dS \quad \text{для каждого } v\in V, \tag{32.97}$$

где на каждой части Γ_p $t_{p1},\ \ldots,\ t_{p,\ k-\mu_p}$ — числа, определяемые (32.48) (см. (32.75)).

---

[1]) Сравните, например, с условием гладкости границы при выводе интегрального тождества (23.20).

[2]) То есть $B_{11}v=0$ на Γ_1 в смысле примечания 2 на с. 376 и т. д.

Определение 32.2 уже достаточно общее, чтобы охватить обширный класс краевых задач в теории дифференциальных уравнений. Что касается некоторых задач, не подпадающих под это определение, а также относительно некоторых модификаций задач, позволяющих применить к ним это определение, см. [32].

Слабое решение, определяемое условиями (32.96) и (32.97),— подобно обобщенному решению, основанному на теореме о минимуме квадратичного функционала,— является значительным обобщением классического решения дифференциального уравнения с граничными условиями. Однако слабое решение является значительно более сильным обобщением как в отношении диапазона задач, так и в отношении условий, налагаемых на исходные данные рассматриваемой задачи (коэффициенты дифференциального уравнения и т. д., см. замечание 32.4). Как уже отмечалось и как будет видно из последующих двух глав, можно при довольно естественных предположениях доказать существование и единственность слабого решения и, используя современные методы вариационного исчисления, найти это решение.

В заключение этой главы рассмотрим несколько примеров, дополняющих примеры 32.1—32.3 и 32.5, в которых мы хотим показать, как «классическая» постановка задачи преобразовывается в «слабую» и наоборот. Но прежде заметим следующее.

Понятие слабого решения «разумно» в том смысле, что классическое решение рассматриваемой задачи при достаточной его гладкости в замкнутой области $\overline{G}$ является одновременно и слабым решением этой задачи, и наоборот, если слабое решение достаточно гладко и если исходные данные при «слабой» постановке задачи (коэффициенты рассматриваемого оператора и т. д., возможно, также и граница Γ) достаточно гладки, то слабое решение является и классическим решением. Часто «классическую» и «слабую» постановки одной задачи мы рассматриваем как разные задачи [1]). Как было показано выше, в предположении достаточной гладкости функции $u(x)$ и исходных данных, эти две задачи «преобразуются» одна в другую. Например, задача (32.36) — (32.38) была «преобразована» в соответствующую задачу (32.43), (32.41). Мы определили соответствующее пространство V, умножили уравнение (32.36) на функцию $v \in V$, преобразовали интеграл в левой части полученного равенства с помощью теоремы Грина и, наконец, используя свойства функции v и граничные условия (32.38), получили интегральное тождество (32.41). Условие (32.37) было представлено с помощью условия (32.43). И наоборот, если нужно перейти от задачи (32.43), (32.41) к соответствующей за-

[1]) Как будет показано в гл. 36, слабое решение тесно связано с обобщенным решением, получаемом на основе теоремы о минимуме квадратичного функционала. Таким образом, слабое решение «разумно» даже с физической точки зрения, см. замечание на с. 135.

даче (32.36)—(32.38), мы отправляемся от интегрального тождества (32.41). «Обратным» приложением теоремы Грина к его первому члену мы получаем равенство (32.40)

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]dx=\int_G v\Delta^2 u\,dx+\int_\Gamma v\,Nu\,ds+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}Mu\,ds,\quad v\in V. \tag{32.98}$$

Принимая во внимание тот факт, что первый интеграл вдоль границы Γ равен нулю, так как $v\in V$ и для рассматриваемого случая

$$V=\{v\in W_2^{(2)}(G),\ v=0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}, \tag{32.99}$$

и подставляя затем левую часть соотношения (32.98) в (32.41), мы получаем соотношение

$$\int_G v\Delta^2 u\,dx+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}Mu\,ds=\int_G vf\,dx+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}h(s)\,ds,\quad v\in V. \tag{32.100}$$

Далее, ясно, что каждая функция $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$ (т. е. каждая функция с компактным носителем в G) принадлежит также V. Подставляя φ вместо v в (32.100), мы получаем $\int_G \varphi\Delta^2 u\,dx=\int_G \varphi f\,dx$. Поскольку $\varphi(x)\equiv 0$ в некоторой окрестности границы Γ, то оба интеграла вдоль Γ обращаются в нуль. Поэтому

$$\int_G \varphi(\Delta^2 u-f)\,dx=0. \tag{32.101}$$

Это равенство справедливо для каждой $\varphi\in C_0^{(\infty)}(G)$. Поскольку линейное множество $C_0^{(\infty)}(G)$ плотно в $L_2(G)$, из (32.101) вытекает, что $\Delta^2 u-f=0$ в $L_2(G)$ (см. теорему 5.15). Так как по предположению рассматриваемые функции достаточно гладкие, то

$$\Delta^2 u=f \text{ в } G. \tag{32.102}$$

Отсюда следует, что $\int_G v\Delta^2 u\,dx=\int_G vf\,dx$ для каждой функции $v\in V$, и таким образом интегральное тождество (32.100) «сводится» к тождеству

$$\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}Mv\,ds=\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}h(s)\,ds,\quad v\in V$$

или

$$\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}[Mu-h(s)]\,ds=0,\quad v\in V. \tag{32.103}$$

Отсюда следует, что[1])

$$Mu - h(s) = 0$$

почти всюду на Γ, откуда в предположении достаточной гладкости рассматриваемых функций

$$Mu = h(s) \quad \text{на } \Gamma. \tag{32.104}$$

И наконец, из условия (32.43), $u - w \in V$, вытекает, что

$$u = g(s) \text{ на } \Gamma. \tag{32.105}$$

Итак, мы свели задачу (32.43), (32.41) к «классической» задаче (32.102), (32.104), (32.105). Безусловно, не следует забывать, что рассмотренные преобразования, т. е. приведение классической задачи к слабой и наоборот, формальны, так как они выполняются в дополнительном предположении достаточной гладкости всех исходных данных.

Теперь рассмотрим несколько дополнительных примеров, чтобы познакомиться с некоторыми искусственными приемами, часто используемыми при решении различных типов задач (см. также [32]). Здесь всюду предполагается достаточная гладкость исходных данных, что в дальнейшем указываться не будет. Не приводится также подробное доказательство некоторых этапов анализа (таких, например, как вывод (32.102) из (32.101) и т. д.), как это делалось в настоящем замечании.

Пример 32.7. (См. [32].) Пусть $u \in W_2^{(1)}(G)$ — слабое решение следующей краевой задачи. Область G с границей, удовлетворяющей условию Липшица, разделена на две области G_1, G_2 с границами Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющими тому же условию. Общую

---

[1]) В замечании 30.3 было отмечено, что следы $v(S)$ функций $v(x)$ из пространства $W_2^{(1)}(G)$ плотны в $L_2(\Gamma)$. Следы функций $v(x)$ из $W_2^{(2)}(G)$ плотны (см. [32], а также гл. 43, с. 529) в пространстве $W_2^{(1)}(\Gamma) \times L_2(\Gamma)$ в следующем смысле. Каждой паре функций $g_0(S) \in W_2^{(1)}(\Gamma)$ и $g_1(S) \in L_2(\Gamma)$ и каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такая функция $v \in W_2^{(2)}(G)$, что

$$\|v - g_0\|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial v}{\partial \nu} - g_1\right\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon,$$

откуда в результате несложных рассуждений (либо непосредственно, соответствующе модифицировав доказательство из [32]) в предположении, что данная граница имеет определенную гладкость, мы получаем указанное в тексте утверждение. (Если же граница является всего лишь липшицевой, ситуация значительно сложнее.)

Из этого утверждения естественным образом вытекает, что следы $v(S)$ и $\partial v/\partial \nu$ (S) для функций $v \in W_2^{(2)}(G)$ плотны в $L_2(\Gamma)$, чем мы воспользуемся в примере 32.9. Следует отметить, что плотность в $L_2(\gamma)$ следов $v(S)$ функций из $\mathring{W}_2^{(1)}(G)$, где γ — дуга, удовлетворяющая условию Липшица (или, возможно, поверхность, удовлетворяющая условию Липшица, либо гиперповерхность в случае, когда $N \geqslant 2$) из примера 32.7, доказывается сравнительно просто.

часть этих границ обозначим через γ. Таким образом, G есть объединение областей G_1, G_2 и внутренних точек границы γ (см. рис. 33, где $N=2$). Пусть a, b — положительные постоянные, причем $a \neq b$,

$$f \in L_2(G), \tag{32.106}$$

$$w \in W_2^{(1)}(G), \tag{32.107}$$

$$V = \{v \in W_2^{(1)}(G)\text{: } v=0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\} = \mathring{W}_2^{(1)}(G), \tag{32.108}$$

и пусть функция $u(x)$ удовлетворяет условиям

$$u - w \in V, \tag{32.109}$$

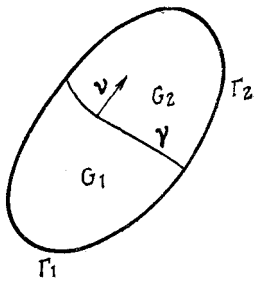

Рис. 33.

$$A(v, u) \equiv \sum_{l=1}^{N} \int_{G_1} a \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx + \sum_{l=1}^{N} \int_{G_2} b \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx = \int_G vf\, dx \tag{32.110}$$

для каждой функции $v \in V$. Представим соответствующее решение в виде дифференциального уравнения и граничных условий.

Обозначим через $u_1 \in W^{(1)}(G)$ и $u_2 \in W_2^{(1)}(G)$ ограничения функции $u(x)$ на G_1 и G_2 соответственно (т. е. функцию $u(x)$, рассматриваемую только в области G_1 или G_2). Пусть нормаль $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ на γ ориентирована таким образом, что она является внешней нормалью области G_1 (рис. 33). Стандартное применение теоремы Грина дает

$$\sum_{l=1}^{N} \int_{G_1} a \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx = \sum_{l=1}^{N} \int_{G_1} a \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u_1}{\partial x_l}\, dx = \int_\Gamma av \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\, dS - \int_{G_1} av \Delta u_1\, dx.$$

Но на основании (32.108) $v=0$ на $\Gamma_1 \setminus \gamma$ и, следовательно, интеграл вдоль границы Γ_1 сводится к интегралу вдоль γ. Для второго интеграла в (32.110) рассуждения аналогичны, но интеграл вдоль γ следует брать со знаком минус в соответствии с выбранной ориентацией внешней нормали на γ. Таким образом, из (32.110) получаем

$$\int_\gamma av \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\, dS - \int_{G_1} av\, \Delta u_1\, dx - \int_\gamma bv \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\, dS - \int_{G_2} bv\, \Delta u_2\, dx = \int_{G_1} vf\, dx + \int_{G_2} vf\, dx \tag{32.111}$$

для любой $v \in V$. Полагая $v = \varphi_1 \in C_0^{(\infty)}(G_2)$ или $v = \varphi_2 \in C_0^{(\infty)}(G_2)$, мы получаем

$$-\int_{G_1} a\varphi_1\, \Delta u_1\, dx = \int_{G_1} \varphi_1 f\, dx \text{ для любой } \varphi_1 \in C_0^{(\infty)}(G_1)$$

или

$$-\int_{G_2} b\varphi_2 \Delta u_2\, dx = \int_{G_2} \varphi_2 f\, dx \text{ для любой } {}_2 \in C_0^{(\infty)}(G_2),$$

откуда, рассуждая так же, как и на с. 381, мы получаем, что

$$-a\Delta u_1 = f \text{ в } G_1, \tag{32.112}$$

$$-b\Delta u_2 = f \text{ в } G_2. \tag{32.113}$$

Из (32.111) следует равенство

$$\int_\gamma av \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\, dS - \int_\gamma bv \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\, dS = 0 \text{ для любой } v \in V$$

и, следовательно (см. примечание на с. 382),

$$a\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = b\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \text{ на } \gamma \tag{32.114}$$

(это так называемое *условие перехода*).

Далее, поскольку мы предполагаем гладкость функции u,

$$u_1 = u_2 \text{ на } \gamma. \tag{32.115}$$

Наконец, из (32.109) следует

$$u = w(S) \text{ на } \Gamma. \tag{32.116}$$

Итак, задаче (32.106)—(32.110) соответствует задача (32.112)—(32.116).

Пример 32.8. Пусть $N = 2$, c — вещественная постоянная, $f \in L_2(G)$, $h \in L_2(\Gamma)$, $V = W_2^{(1)}(G)$, и пусть

$$\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + c\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - c\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx =$$

$$= \int_G vf\, dx + \int_\Gamma vh\, dS \quad \text{для любой } v \in V. \tag{32.117}$$

Найдем соответствующую «классическую» задачу.

Читатель, очевидно, уже заметил, что билинейная форма в (32.117) соответствует разложению (32.117) оператора Лапласа в примере 31.5. Стандартное применение теоремы Грина в левой части интегрального тождества (32.117) дает

$$-\int_G v\Delta u\, dx + \int_\Gamma v\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + c\frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_1 - c\frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\nu_2 \right) ds =$$

$$= \int_G vf\, dx + \int_\Gamma vh\, ds \text{ для любой } v \in V,$$

где ν_1 и ν_2 — направляющие косинусы внешней нормали к Γ; отсюда следует, так же как и раньше, что

$$-\Delta u = f \text{ в } G,$$
$$(\nu_1 - c\nu_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + (c\nu_1 + \nu_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} = h \text{ на } \Gamma,$$

а это *задача с косой производной* для уравнения Пуассона. При $c = 0$ эта задача сводится к задаче Неймана. В этом примере видно, как различные граничные условия можно представить в виде соответствующих разложений данного оператора. Это же показано и в следующем примере, где используется соответствующее разложение бигармонического оператора, о котором уже говорилось выше.

Пример 32.9. Пусть $0 \leqslant \sigma < 1$, $f \in L_2(G)$, $h_1 \in L_2(\Gamma)$, $h_2 \in L_2(\Gamma)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(G)$, и пусть интегральное тождество (32.97) имеет вид

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] dx = \int_G vf\, dx + \int_\Gamma vh_1\, ds + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\, ds \qquad (32.118)$$

для любой $v \in V$. Найти формулировку соответствующей классической задачи.

Применение теоремы Грина в этом случае дает (см. (32.40))

$$\int_G v\Delta^2 u\, dx + \int_\Gamma vNu\, ds + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} Mu\, ds = \int_G vf\, dx + \int_\Gamma vh_1\, ds + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\, ds,$$

где

$$Mu = \sigma \Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2},$$
$$Nu = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2 \right],$$

откуда соответствующая задача в классической постановке имеет следующий вид (см. примечание на с. 368):

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } G,$$
$$Nu = h_1(s) \quad \text{на } \Gamma,$$
$$Mu = h_2(s) \quad \text{на } \Gamma.$$

Оба граничных условия в этом случае неустойчивы. Для $\sigma = 0$ мы имеем, как частный случай, условия

$$-\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2 \right] = h_1(s) \text{ на } \Gamma,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = h_2(s) \text{ на } \Gamma.$$

Глава 33

Существование слабого решения краевой задачи. V-эллиптичность. Теоремы Лакса—Мильграма

В предыдущей главе было введено понятие «слабое решение краевой задачи». Здесь же мы докажем существование и единственность этого слабого решения, предполагая при этом, что билинейная форма $((v, u))$ имеет так называемый V-эллиптический тип. Рассуждения этой главы опираются на следующую теорему, которая является обобщением теоремы Рисса 8.8 [1]).

Теорема 33.1. (Теорема Лакса—Мильграма.) *Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (v, u). Далее, пусть $B(v, u)$ — билинейная форма* (т. е. форма, линейная и по v, и по u, см. (32.54)), *определенная для $v \in H$, $u \in H$ и такая, что существуют постоянные $K > 0$, $\alpha > 0$, не зависящие от v и u, такие что для всех v, $u \in H$*

$$|B(v, u)| \leqslant K \|v\| \|u\|, \tag{33.1}$$

$$B(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2. \tag{33.2}$$

Тогда каждый линейный функционал F, ограниченный на H, можно представить в виде

$$Fv = B(v, z), \quad v \in H, \tag{33.3}$$

где z — элемент пространства H, однозначно определяемый функционалом F, причем выполняется неравенство

$$\|z\| \leqslant \alpha^{-1} \|F\|, \tag{33.4}$$

где $\|F\|$ — норма функционала F.

Доказательство теоремы 33.1 основано на теореме Рисса 8.8. Согласно этой теореме, каждый линейный ограниченный функционал Fv в H можно представить в виде

$$Fv = (v, t), \quad v \in H, \tag{33.5}$$

где элемент $t \in H$ однозначно определяется функционалом F и где

$$\|t\| = \|F\|. \tag{33.6}$$

Следовательно, если мы докажем, что каждому $t \in H$ соответствует единственный элемент $z \in H$, такой что для любого $v \in H$ имеет место соотношение

$$(v, t) = B(v, z), \tag{33.7}$$

причем

$$\|z\| \leqslant \alpha^{-1} \|t\|, \tag{33.8}$$

---

[1]) Если $B(v, u) = (v, u)$, теорема Рисса является частным случаем теоремы Лакса—Мильграма.

то доказательство теоремы 33.1 будет завершено, поскольку (33.3) следует из (33.5) и (33.7), а (33.4) следует из (33.6) и (33.8).

Итак, докажем (33.7). В качестве первого шага легко доказать в некотором смысле обратное утверждение: если $z \in H$ фиксировано, то форма $B(v, z)$ является линейным функционалом в пространстве H (поскольку по предположению $B(v, z)$ линейна по переменной v). Этот линейный функционал ограничен, так как, согласно (33.1),

$$|B(v, z)| \leqslant K \|v\| \|z\|. \tag{33.9}$$

На основании теоремы Рисса существует единственный элемент $t \in H$, такой что для любого $v \in H$ выполняется соотношение

$$B(v, z) = (v, t), \tag{33.10}$$

и, как следствие (33.9),

$$\|t\| \leqslant K \|z\|. \tag{33.11}$$

Согласно (33.10), каждому элементу $z \in H$ однозначно соответствует $t \in H$. Это соответствие определяет оператор C, $t = Cz$, в пространстве H, который, разумеется, линеен, поскольку

$$B(v, z_1) = (v, t_1), \quad B(v, z_2) = (v, t_2) \Rightarrow B(v, c_1 z_1 + c_2 z_2) = \\ = (v, c_1 t_1 + c_2 t_2).$$

Согласно (33.11), оператор C ограничен. Область значений этого оператора (т. е. множество всех элементов t, отвечающих произвольным элементам z пространства H) есть некоторый линеал в H; обозначим его через L. Точнее, L — это метрическое пространство, элементами которого служат элементы этого линеала, а метрика совпадает с метрикой пространства H. Докажем, что отображение C из H в L взаимно однозначно. Для этого достаточно доказать (см. теорему 8.1), что нулевому элементу пространства L соответствует нулевой элемент пространства H. Итак, пусть $t = Cz$, т. е. выполняется соотношение (33.10), и пусть $t = 0$. Тогда из (33.10) имеем

$$B(v, z) = 0 \text{ для любого } v \in H. \tag{33.12}$$

Для $v = z$, например, (33.12) дает

$$B(z, z) = 0. \tag{33.13}$$

Вследствие (33.2) мы имеем $\|z\|^2 = 0$, откуда вытекает, что $z = 0$ в H. Итак, если $t = 0$, то $z = 0$, откуда следует, что наше утверждение о взаимно однозначном соответствии между H и L справедливо. Следовательно, оператор C имеет обратный оператор C^{-1}, отображающий — взаимно однозначно — пространство L в пространство H согласно соотношению

$$z = C^{-1} t. \tag{33.14}$$

Оператор C^{-1} линеен, так как это обратный оператор линейного оператора (замечание 8.4), и ограничен, так как $\alpha\|z\|^2 \leqslant |B(z, z)| = |(z, t)| \leqslant \|z\|\|t\|$, откуда

$$\|z\| \leqslant \alpha^{-1}\|t\| \tag{33.15}$$

и, следовательно, $\|C^{-1}\| \leqslant \alpha^{-1}$.

Теперь докажем, что L — подпространство пространства H, т. е. что L — полное пространство. Пусть $\{t_n\}$ — фундаментальная последовательность в L (а следовательно, и в H). Поскольку H — полное пространство, эта последовательность имеет предел $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ в H. Нужно доказать, что $t \in L$, т. е. что существует такое $z \in H$, что

$$t = Cz. \tag{33.16}$$

Из (33.14) и из ограниченности оператора C^{-1} следует, что $\|z_m - z_n\| \leqslant \|C^{-1}\|\|t_m - t_n\|$. Поэтому если $\{t_n\}$ — фундаментальная последовательность в H, то и $\{z_n\}$ также будет фундаментальной последовательностью в H. Следовательно, $\{z_n\}$ имеет предел в пространстве H, который мы обозначим через z. Итак, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ в H, и, следовательно, $Cz = \lim_{n\to\infty} Cz_n$, поскольку C — линейный ограниченный, а значит, непрерывный оператор (см. теорему 8.3). Отсюда, ввиду того что $t = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} Cz_n = Cz$, легко получаем соотношение (33.16). Итак, L является подпространством пространства H. Мы даже докажем, что $L = H$. Доказательство ведется от обратного. Предположим, что $L \neq H$. Тогда существует такой элемент $w \neq 0$ в H, ортогональный к подпространству L (с. 72), что для каждого $t \in L$ выполняется соотношение

$$(w, t) = 0. \tag{33.17}$$

Поскольку $w \in H$, то на основании (33.10) существует такой единственный элемент $t_0 \in L$, что для каждого $v \in H$ выполняется соотношение $B(v, w) = (v, t_0)$ В частности, для $v = w$ $B(w, w) = (w, t_0)$. Но из (33.2) и (33.17) следует, что $\alpha\|w\|^2 \leqslant |B(w, w)| = |(w, t_0)| = 0$, откуда $w = 0$ в H, что противоречит предположению $w \neq 0$. Следовательно, $L = H$. Это доказывает, что оператор C взаимно однозначно отображает пространство H на все пространство H. Отсюда немедленно вытекает, что не только каждому $z \in H$ соответствует единственный элемент $t = Cz$, для которого выполняется соотношение (33.10), но и наоборот, каждому $t \in H$ соответствует единственный элемент z, для которого выполняется соотношение (33.10). Итак, утверждение (33.7) доказано. Справедливость (33.8) устанавливается в (33.15). Как было сказано в начале доказательства, из (33.7) и (33.8) вытекает утверждение теоремы 33.1. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании слабого решения краевой задачи, описанного в определении 32.2. Согласно этому определению, слабым решением такой задачи является функция

$u \in W_2^{(k)}(G)$, для которой

$$u - w \in V \tag{33.18}$$

и

$$((v,\ u)) = (v,\ f) + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}\, dS \tag{33.19}$$

справедливо для всех $v \in V$ (здесь используются обозначения указанного определения). Вводя обозначение

$$\varkappa(v,\ h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}\, dS,$$

(33.19) можно записать в следующем виде:

$$((v,\ u)) = (v,\ f) + \varkappa(v,\ h) \text{ для всех } v \in V. \tag{33.20}$$

Определение 33.1. Пусть даны билинейная форма $((v,\ u))$ и пространство V, см. определение 32.2. Форма $((v,\ u))$ называется V-эллиптической, если существует такая постоянная $\alpha > 0$, что для каждого $v \in V$

$$((v,\ v)) \geqslant \alpha \| v \|_V^2. \tag{33.21}$$

Простые способы и приемы доказательства V-эллиптичности заданной формы рассматриваются в примерах 33.1—33.4. См. также замечания 33.3. и 33.4.

Используя определение 33.1 и теорему 33.1, можно доказать существование и единственность слабого решения.

Теорема 33.2. *Рассмотрим краевую задачу в смысле определения* 32.2. *Если форма* $((v,\ u))$ *является* V*-эллиптической, то данная задача имеет (и только одно) слабое решение* $u \in W_2^{(k)}(G)$; *существует такая положительная постоянная* c, *не зависящая от функций* f, w *и* h_{pl}, *для которой выполняется соотношение*

$$\| u \|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant c \left[\| f \|_{L_2(G)} + \| w \|_{W_2^{(k)}(G)} + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \| h_{pl} \|_{L_2(\Gamma_p)} \right]. \tag{33.22}$$

Доказательство. а) *Существование.* Доказывается на основании теоремы 33.1, причем вместо пространства H рассматривается пространство V. Это возможно, поскольку V — подпространство пространства $W_2^{(k)}(G)$ и, следовательно, само является гильбертовым пространством (с метрикой пространства $W_2^{(k)}(G)$. На некоторых этапах доказательства вместо обозначения $\| v \|_{W_2^{(k)}(G)}$ будет использоваться более короткая запись $\| v \|_V$, конечно, при условии, что $v \in V$. Прежде всего заметим, что из (32.89) и усло-

вия V-эллиптичности вытекает, что форма $((v, z))$ при $v \in V$, $z \in V$ удовлетворяет условиям теоремы 33.1, т. е. существуют постоянные $K > 0$, $\alpha > 0$, такие что для каждого $v \in V$, $z \in V$

$$|((v, z))| \leqslant K \|v\|_V \|z\|_V, \tag{33.23}$$

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v\|_V^2. \tag{33.24}$$

Рассмотрим в пространстве V функционал

$$F v = (v, f) + \varkappa (v, h) - ((v, w)) =$$

$$= \int_G v f \, dx + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^l p_l v}{\partial \nu^l p_l} h_{pl} \, dS - ((v, w)), \quad v \in V, \tag{33.25}$$

где $f \in L_2(G)$, $h_{pl} \in L_2(\Gamma)$ и $w \in W_2^{(k)}(G)$ суть данные функции из определения 32.2. Ясно, что этот функционал аддитивен в пространстве V. Если мы докажем, что он к тому же и ограничен в этом пространстве, то, учитывая (33.23), (33.24), мы получим на основании теоремы Лакса—Мильграма, что существует и притом только один элемент $z \in V$, для которого соотношение

$$((v, z)) = Fv \tag{33.26}$$

удовлетворяется для всех $v \in V$. Подставляя вместо Fv его значение, см. (33.25), мы получаем, что для всех $v \in V$

$$((v, z)) = (v, f) + \varkappa (v, h) - ((v, w)). \tag{33.27}$$

Кроме того, на основании (33.4)

$$\|z\|_V \leqslant \alpha^{-1} \|F\|_V. \tag{33.28}$$

Из линейности рассматриваемой формы по обеим переменным следует, что $((v, z)) + ((v, w)) = ((v, z + w))$. Таким образом, если положить

$$u(x) = w(x) + z(x), \tag{33.29}$$

то из (33.27) получим, что

$$((v, u)) = (v, f) + \varkappa (v, h) = (v, f) + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^l p_l v}{\partial \nu^l p_l} h_{pl} \, dS$$

для произвольного $v \in V$. (33.30)

Поскольку на основании (33.29)

$$u - w = z \in V, \tag{33.31}$$

функция $u(x)$ должна удовлетворять условиям (33.18) и (33.19), а следовательно, она является слабым решением рассматриваемой задачи. Если мы теперь докажем, что функционал (33.25) ограничен в пространстве V, мы завершим тем самым доказательство существования слабого решения данной краевой задачи (в смысле

определения 32.2). Как будет видно, (33.28) дает искомую оценку (33.22). Итак, докажем, что функционал F ограничен в пространстве V. Согласно определению ограниченного функционала, нам нужно доказать, что существует постоянная $\beta > 0$, такая что соотношение

$$|Fv| \leqslant \beta \|v\|_V \quad \text{выполняется для произвольного элемента } v \in V. \tag{33.32}$$

Для этого достаточно доказать, что каждый из трех членов в правой части (33.25) ограничен (в пространстве V). Рассмотрим первый из этих трех членов. Согласно неравенству Шварца (3.14),

$$\left|\int_G vf\,dx\right| \leqslant \|v\|_{L_2(G)} \|f\|_{L_2(G)}. \tag{33.33}$$

Поскольку $\|v\|_{L_2(G)} \leqslant \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} = \|v\|_V$, то из (33.33) получаем

$$\left|\int_G vf\,dx\right| \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \|v\|_V. \tag{33.34}$$

Для третьего члена правой части (33.25) аналогичным образом получаем

$$|-((v, w))| \leqslant K\|w\|_{W_2^{(k)}(G)} \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} = K\|w\|_{W_2^{(k)}(G)} \|v\|_V$$
$$\text{для произвольного } v \in V. \tag{33.35}$$

Рассмотрим второй член правой части соотношения (33.25), т. е.

$$\varkappa(v, h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}\,dS. \tag{33.36}$$

В подынтегральных выражениях отдельных слагаемых этой суммы обязательно встречается одна из функций

$$v(S), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}(S), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}(S) \tag{33.37}$$

в зависимости от значения t_{pl}, равного одному из чисел $0, 1, \ldots, k-1$.

Вспомним сначала теорему 30.1, согласно которой оператор T, сопоставляющий каждой функции $v(x)$ из $W_2^{(1)}(G)$ ее след $v(S)$ из пространства $L_2(\Gamma)$, ограничен, и, следовательно, для каждой $v \in W_2^{(1)}(G)$

$$\|v(S)\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|T\| \|v(x)\|_{W_2^{(1)}(G)}, \tag{33.38}$$

где $\|T\|$ — норма оператора T, причем эта норма зависит только от области G и ее границы Γ. Поскольку $\|v(S)\|_{L_2(\Gamma)} = \left(\int_{\Gamma_p} v^2(S)\,dS\right)^{1/2}$, то

$$\left(\int_{\Gamma_p} v^2(S)\,dS\right)^{1/2} \leqslant \|T\| \|v\|_{W_2^{(1)}(G)}. \tag{33.39}$$

Далее, согласно этой же теореме,

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \|T\| \left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant \|T\| \|v\|_{W_2^{(2)}(G)} \tag{33.40}$$

для $j=1, \ldots, N$. Кроме того, как известно, $\partial v/\partial \nu = \sum_{j=1}^{N} \partial v/\partial x_j \nu_j$, и, следовательно, как и в (33.39), выполняется соотношение

$$\left(\int_{\Gamma_p} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dS\right)^{1/2} \leqslant \gamma_1 \| v\|_{W_2^{(2)}(G)}. \tag{33.41}$$

Поскольку, далее, на Γ справедливо $\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2} = \sum_{i,\, j=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \nu_i \nu_j$, мы аналогичным образом для любой $v \in W_2^{(3)}(G)$ получаем оценку

$$\left(\int_{\Gamma_p} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\right)^2 dS\right)^{1/2} \leqslant \gamma_2 \| v\|_{W_2^{(3)}(G)}. \tag{33.42}$$

И наконец,

$$\left(\int_{\Gamma_p} \left(\frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\right)^2 dS\right)^{1/2} \leqslant \gamma_{k-1} \| v\|_{W_2^{(k)}(G)}. \tag{33.43}$$

Однако если $v \in V$, то $v \in W_2^{(k)}(G)$. Кроме того, ясно, что

$$\|v\|_{W_2^{(j)}(G)} \leqslant \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} = \|v\|_V, \quad 0 \leqslant j \leqslant k. \tag{33.44}$$

Но поскольку $0 \leqslant t_p \leqslant k-1$, то из (33.39) и (33.41)—(33.44) получаем соотношение

$$\left(\int_{\Gamma_p} \left(\frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}}\right)^2 dS\right)^{1/2} \leqslant \gamma_{t_{pl}} \|v\|_V,$$

справедливое для всех t_{pl}. (Для $t_{pl}=0$, согласно (33.39), $\gamma_{t_{pl}} = \|T\|$. Применяя к каждому члену суммы (33.36) неравенство Шварца, получаем

$$\left|\int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}\, dS\right| \leqslant \left(\int_{\Gamma_p} \left(\frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}}\right)^2 dS\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_p} h_{pl}^2\, dS\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{t_{pl}} \left(\int_{\Gamma_p} h_{pl}^2\, dS\right)^{1/2} \|v\|_V. \tag{33.45}$$

Вводя обозначения

$$\max_{t_{pl}} \gamma_{t_{pl}} = \gamma, \tag{33.46}$$

$$\left(\int_{\Gamma_p} h_{pl}^2\, dS\right)^{1/2} = \|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)}, \tag{33.47}$$

получаем из (33.45) оценку для второго члена функционала (33.25):

$$|\varkappa(v,\ h)| = \left|\sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\int_{\Gamma_p}\frac{\partial^l p_l\, v}{\partial \nu^l p_l}\, h_{pl}\, dS\right| \leqslant \gamma \sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p} \|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)}\|v\|_V. \tag{33.48}$$

Из (33.34), (33.35) и (33.48) получаем оценку (33.32), т. е.

$$|Fv| \leqslant \beta \|v\|_V \text{ для любого } v \in V, \tag{33.49}$$

где

$$\beta = \|f\|_{L_2(G)} + K\|w\|_{W_2^{(k)}(G)} + \gamma \sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)}. \tag{33.50}$$

Этим доказывается ограниченность функционала (33.25) в пространстве V; следовательно, слабое решение данной краевой задачи, соответствующее определению 32.2, существует.

б) *Доказательство единственности.* Предположим, что существуют два слабых решения рассматриваемой задачи

$$u_1 - w \in V, \tag{33.51}$$

$$u_2 - w \in V, \tag{33.52}$$

и для каждого

$$((v,\ u_1)) = \int_G vf\, dx + \varkappa(v,\ h), \tag{33.53}$$

$$((v,\ u_2)) = \int_G vf\, dx + \varkappa(v,\ h). \tag{33.54}$$

Вычитая (33.53) из (33.54), получаем

$$((v,\ u_2 - u_1)) = 0 \text{ для любого } v \in V. \tag{33.55}$$

Из (33.51) и (33.52) следует, что $u_2 - u_1 \in V$ [1]). Полагая $v = u_2 - u_1$ в (33.55), получаем

$$((u_2 - u_1,\ u_2 - u_1)) = 0. \tag{33.56}$$

Поскольку $u_2 - u_1 \in V$, на основании (33.24) имеем $0 = ((u_2 - u_1,\ u_2 - u_1)) \geqslant \alpha \|u_2 - u_1\|_V^2$, откуда $\|u_2 - u_1\|_V = 0$, т. е. $\|u_2 - u_1\|_{W_2^{(k)}(G)} = 0$; следовательно, в $W_2^{(k)}(G)$ мы имеем $u_2 = u_1$. Теперь остается доказать неравенство (33.22). Из (33.49) имеем $\|F\|_V \leqslant \beta$, и, следовательно, на основании (33.28)

$$\|z\|_V \leqslant \beta\alpha^{-1}. \tag{33.57}$$

[1]) К тому же заключению можно прийти, рассматривая вместо (33.51), (33.52) условия $u_1 - w_1 \in V$, $u_2 - w_2 \in V$, где w_1, w_2 — функции из $W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющие данным устойчивым граничным условиям, и, следовательно, $w_2 - w_1 \in V$. Это показывает независимость слабого решения от выбора функции w.

Далее, поскольку $\|z\|_{W_2^{(k)}(G)} = \|z\|_V$, согласно (33.29),

$$\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant \|z\|_{W_2^{(k)}(G)} + \|w\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant \beta\alpha^{-1} + \|w\|_{W_2^{(k)}(G)}. \tag{33.58}$$

Подставляя в (33.58) значение β из (33.50), получаем

$$\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant \alpha^{-1}\|f\|_{L_2(G)} + (K\alpha^{-1}+1)\|w\|_{W_2^{(k)}(G)} + \\ + \gamma\alpha^{-1}\sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)}. \tag{33.59}$$

Для получения неравенства (33.22)

$$\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant c\left(\|f\|_{L_2(G)} + \|w\|_{W_2^{(k)}(G)} + \sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\|h_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)}\right) \tag{33.60}$$

достаточно положить

$$c = \max(\alpha^{-1},\ K\alpha^{-1}+1,\ \gamma\alpha^{-1}). \tag{33.61}$$

Это завершает доказательство теоремы 33.2.

Замечание 33.1. В предыдущей главе мы показали, что краевая задача в слабой постановке является весьма общей и что слабое решение является значительным обобщением не только классического решения, но и обобщенного решения, введенного в гл. 11. Это обобщение касается предположений относительно симметрии рассматриваемых операторов и гладкости коэффициентов данного дифференциального уравнения, а также вида граничных условий. Теорема 33.2 отвечает утвердительно на вопрос о существовании и единственности слабого решения в предположении, что форма $((v, u))$ является V-эллиптической[1]). В следующей главе будет показано, что для нахождения этого слабого решения или его приближения можно пользоваться теми же методами, которые применялись во II части для нахождения обобщенного решения. (В VI части этой книги мы рассмотрим еще несколько способов нахождения слабого решения данной задачи.) В гл. 46 мы кратко перечислим условия, при которых слабое решение рассматриваемой задачи является классическим.

Замечание 33.2. Неравенство (33.60) или более развернутое неравенство (33.59) подтверждает «корректность» слабой постановки краевой задачи, т. е. *непрерывную зависимость слабого решения от исходных данных задачи*: если имеются «малые» изменения функции f в метрике пространства $L_2(G)$, «малые» измене-

[1]) Это требование в определенном смысле соответствует требованию положительной определенности, рассматриваемому в ч. II нашей книги. См. также примеры 33.1—33.4.

ния функции $w(x)$, характеризующей устойчивые граничные условия, в метрике пространства $W_2^{(k)}(G)$ и «малые» изменения функций $h_{pl}(S)$, $p=1, \ldots, r$, $l=1, \ldots, k-\mu_p$, характеризующих неустойчивые граничные условия, в пространстве $L_2(\Gamma_p)$, то наблюдаются «малые» изменения слабого решения в метрике пространства $W_2^{(k)}(G)$. Так, если $u(x)$ и $\tilde{u}(x)$ — слабые решения данной задачи, отвечающие функциям $f(x)$, $w(x)$, $h_{pl}(S)$ и $\tilde{f}(x)$, $\tilde{w}(x)$, $\tilde{h}_{pl}(S)$ соответственно, то из линейности задачи и (33.60) получаем

$$\|u-\tilde{u}\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant c\left[\|f-\tilde{f}\|_{L_2(G)}+\|w-\tilde{w}\|_{W_2^{(k)}(G)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{p=1}^{r}\sum_{l=1}^{k-\mu_p}\|h_{pl}-\tilde{h}_{pl}\|_{L_2(\Gamma_p)}\right].$$

Числа K и α в (33.59) — постоянные из неравенств (33.23) и (33.24), γ определено в (33.46). Таким образом, эти постоянные зависят от билинейной формы $((v, z))$ (и, следовательно, от коэффициентов данного дифференциального уравнения), от координат $\nu_1(S)$, ..., $\nu_N(S)$ внешней нормали к границе Γ (ясно, что эту зависимость, поскольку $|\nu_j| \leqslant 1$, можно легко устранить) и от нормы $\|T\|$ оператора T из теоремы 30.1 (а следовательно, от области G и ее границы). Помимо зависимости слабого решения от функций f, w и h_{pl}, можно исследовать зависимость данного решения от изменений коэффициентов a_{ij} оператора A, от изменений заданной области и т. д. Довольно общие результаты подобных исследований приводятся в работе [32].

Ниже мы даем несколько примеров приложения теоремы 33.2.

Пример 33.1. В случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \quad \text{в } G,$$
$$u = g \quad \text{на } \Gamma$$

мы имеем (см. пример 32.1 и текст перед замечанием 32.1)

$$((v, u)) = A(v, u) \sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\,dx, \tag{33.62}$$

$$f \in L_2(G), \tag{33.63}$$

$$V = \mathring{W}_2^{(1)}(G), \tag{33.64}$$

$$w \in W_2^{(1)}(G),\ w = g \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов.} \tag{33.65}$$

Форма (33.62) является V-эллиптической, поскольку, согласно неравенству (30.15),

$$((v, v)) = \sum_{l=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_l}\right)^2 dx \geqslant \frac{1}{k_1}\|v\|^2_{\mathring{W}_2^{(1)}(G)}.$$

А это соотношение не что иное, как неравенство (33.21) при $\alpha = 1/k_1$. Таким образом, из теоремы 33.2 следует существование и единственность слабого решения данной задачи, определяемой условиями

$$u - w \in \mathring{W}_2^{(1)}(G),$$

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx = \int_G vf\, dx \text{ для всех } v \in \mathring{W}_2^{(1)}(G).$$

Итак, в (33.59) достаточно положить $K = 1$, $1/\alpha = k_1$, $\gamma = 0$.

Пример 33.2. Дана задача Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \text{ в } G,$$
$$\partial u/\partial \nu = h \text{ на } \Gamma.$$

Имеем (см. пример 32.2 и текст перед замечанием 32.2)

$$((v, u)) = A(v, u) = \sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx, \tag{33.66}$$

$$f \in L_2(G), \tag{33.67}$$

$$V = W_2^{(1)}(G), \tag{33.68}$$

$$h(S) \in L_2(\Gamma). \tag{33.69}$$

Форма (33.66) не является V-эллиптической. Ясно, что функция $v \equiv a \neq 0$, где a — некоторая постоянная, принадлежит пространству $V = W_2^{(1)}(G)$. Из (33.66) легко получить, что $((v, v)) = 0$, а $v \neq 0$ в V. Следовательно, неравенство (32.21) не удовлетворяется. Напомним, что с подобным затруднением мы уже встречались в гл. 22. Эти задачи в достаточно общем виде рассматриваются в гл. 35.

Пример 33.3. Рассмотрим задачу Ньютона для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f \text{ в } G,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = h \text{ на } \Gamma.$$

Дано (см. пример 32.6):

$$((v, u)) = A(v, u) + a(v, u) = \sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx + \int_\Gamma \sigma v u\, dS, \tag{33.70}$$

$$f \in L_2(G), \tag{33.71}$$

$$V = W_2^{(1)}(G). \tag{33.72}$$

Пусть на Γ удовлетворяется соотношение

$$\sigma(S) \geqslant \sigma_0 = \text{const} > 0. \tag{33.73}$$

Далее, обозначая $\tau = \min(1, \sigma_0)$, имеем

$$((v, v)) \geqslant \sum_{l=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_l}\right)^2 dx + \sigma_0 \int_\Gamma v^2\, dS \geqslant$$

$$\geqslant \tau \left[\sum_{l=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_l}\right)^2 dx + \int_\Gamma v^2\, dS\right] \geqslant \frac{\tau}{k_1} \|v\|^2_{W_2^{(1)}(G)}, \quad (33.74)$$

где k_1 — постоянная из неравенства (30.5). При условии (33.73) форма $((u, v))$ является V-эллиптической, причем $\alpha = \tau/k_1$, и, следовательно, задача Ньютона, описываемая условием (32.79),

$$\sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx + \int_\Gamma \sigma v u\, dS =$$

$$= \int_G vf\, dx + \int_\Gamma vh\, dS \text{ для произвольной } v \in W_2^{(1)}(G),$$

имеет при этом условии в точности одно слабое решение $u \in W_2^{(1)}(G)$.

Таким же способом, но применяя теперь неравенство (30.6), докажем V-эллиптичность формы

$$((v, u)) = \sum_{l=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}\, dx + \int_{\Gamma_1} \sigma v u\, dS$$

в случае смешанной задачи для уравнения Пуассона, где граничное условие Ньютона задается на части Γ_1 границы Γ, причем $\sigma(S) \geqslant \sigma_0 > 0$, а на части Γ_2 задано граничное условие Неймана $\partial u/\partial \nu = h$ (либо граничное условие Дирихле $u = g$. В этом случае ситуация даже более проста. Почему?).

Пример 33.4. Рассмотрим задачу из примера 32.3:

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } G, \quad (33.75)$$

$$u = g \quad \text{на } \Gamma, \quad (33.76)$$

$$Mu = h \quad \text{на } \Gamma, \quad (33.77)$$

где

$$Mu = \sigma \Delta u + (1 - \sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \quad (33.78)$$

(прогиб горизонтальной вертикально нагруженной пластины с заданной деформацией опор и с заданными моментами вдоль границы). При слабой постановке этой задачи мы имеем (с. 368):

$$((v, u)) = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - 2(1 - \sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] dx \quad (33.79)$$

$$f \in L_2(G), \tag{33.80}$$

$$V = \{v \in W_2^{(2)}(G),\ v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}, \tag{33.81}$$

$$w \in W_2^{(2)}(G),\ w = g \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}. \tag{33.82}$$

Если $0 \leqslant \sigma < 1$, то на основании неравенства (30.7) форма (33.79) является V-эллиптической

$$\begin{aligned}((v, v)) &= \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] dx = \\ &= \int_G \sigma\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx + \\ &\quad + \int_G (1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx = \\ &= \sigma \int_G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 dx + (1-\sigma)\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx \geqslant \frac{1-\sigma}{k_3}\|v\|^2_{W_2^{(2)}(G)} = \frac{1-\sigma}{k_3}\|v\|^2_V,\end{aligned} \tag{33.83}$$

поскольку, согласно (33.81), в указанном неравенстве $\int_\Gamma v^2\, ds = 0$. Таким образом, согласно (33.83), при $0 \leqslant \sigma < 1$ и $\alpha = (1-\sigma)/k_3$ форма (33.79) является V-эллиптической. На основании теоремы 33.2 это влечет за собой существование и единственность слабого решения данной задачи, описываемого условиями

$$u - w \in V,$$

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] dx =$$

$$= \int_G vf\, dx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial x} h\, dS \text{ для всех } v \in V.$$

Замечание 33.3. Пусть вместо условий (33.76), (33.77) даны условия

$$u = g_1 \text{ на } \Gamma, \tag{33.84}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2 \text{ на } \Gamma \tag{33.85}$$

(если $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, мы имеем задачу о прогибе защемленной горизонтальной пластины под вертикально приложенной нагрузкой). Тогда $V = \mathring{W}_2^{(2)}(G)$, и соответствующая форма, согласно неравенству (30.7), является V-эллиптической. В этом случае достаточно рассмотреть форму (33.79) в более простой модификации

$$((v, u)) = \int_G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) dx, \tag{33.86}$$

что в силу условия (33.77) невозможно сделать в примере 33.4, если $\sigma \neq 0$; сравните с разложением бигармонического оператора в гл. 23, которое позволяет нам включить условие (33.77) в интегральное тождество обычного вида. В случае граничных условий $Nu = h_1$, $Mu = h_2$ на Γ, где Nu — оператор из гл. 23, с. 273, оба граничных условия неустойчивы, а $V = \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(G)$. Легко показать, так же как и в примере 33.2, что форма (33.79) в этом случае не является V-эллиптической. Более подробно эта задача рассматривается в примере 35.1.

Замечание 33.4. Пусть в примере 33.1 вместо уравнения Пуассона нам дано уравнение ($N = 2$)

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1+x_2^2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f \text{ в } G. \tag{33.87}$$

Соответствующая форма

$$((v, u)) = \int_G \left[(1+x_2^2)\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + 3\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right]dx \tag{33.88}$$

является V-эллиптической, поскольку

$$((v, v)) = \int_G \left[(1+x_2^2)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right]dx \geqslant \int_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right]dx, \tag{33.89}$$

и можно опять применить неравенство (30.15).

Подобным же образом, если в примере 33.1 вместо уравнения Пуассона мы рассматриваем уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1+x_2^2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 4u = f, \tag{33.90}$$

соответствующая форма является V-эллиптической, поскольку

$$((v, u)) = \int_G \left[(1+x_2^2)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 + 4v^2\right]dx \geqslant$$
$$\geqslant \int_G \left[(1+x_2^2)\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right]dx. \tag{33.91}$$

Но если вместо уравнения Пуассона мы возьмем уравнение

$$-\Delta u - \lambda u = f \tag{33.92}$$

либо уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[(1+x_2^2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \lambda u = f, \tag{33.93}$$

где $\lambda > 0$, то соответствующая форма в общем случае уже не будет V-эллиптической вообще. См. рассматриваемую в гл. 39 задачу на собственные значения.

Замечание 33.5. Как известно, скалярное произведение двух функций v, u определяется в пространстве V соотношением (29.31), или, точнее, соотношением (29.34),

$$(v,\ u)_V=(v,\ u)_{W_2^{(k)}(G)}=\sum_{|i|=k}\int\limits_G D^iu\,D^iv\,dx. \tag{33.94}$$

Однако скалярное произведение функций из этого пространства можно определять и иным способом, который будет полезен в следующей главе. Пусть билинейная форма $((v,\ u))$ и пространство V такие же, как в определении 32.2; тогда для каждой пары функций v, u из пространства $W_2^{(k)}(G)$

$$|((v,\ u))|\leqslant K\|v\|_{W_2^{(k)}(G)}\cdot\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \tag{33.95}$$

(см. (33.23)). Поскольку $V\subset W_2^{(k)}(G)$, соотношение

$$|((v,\ u))|\leqslant K\|v\|_V\cdot\|u\|_V \tag{33.96}$$

тем более выполняется для каждой пары функций v, u из пространства V. Предположим, что форма $((v,\ u))$ является V-эллиптической, т. е.

$$((v,\ v))\geqslant\alpha\|v\|_V^2,\quad v\in V,\quad \alpha>0, \tag{33.97}$$

и что она к тому же симметрична в пространстве V, т. е. что соотношение

$$((v,\ u))=((u,\ v)) \tag{33.98}$$

справедливо для каждой пары функций v, u из пространства V. Утверждается, что в этом случае соотношение

$$(v,\ u)^V=((v,\ u)) \tag{33.99}$$

определяет новое скалярное произведение в пространстве V. Доказательство несложное: достаточно проверить, что аксиомы (6.3) — (6.6) удовлетворяются. Выполнение первых двух следует непосредственно из (33.98) и из факта билинейности формы $((v,\ u))$; из соотношения (33.97) получаем $((v,\ v))\geqslant 0$, где $((v,\ v))=0$ только тогда, когда $\|v\|_V=0$. Утверждение доказано. Обозначим норму и метрику, соответствующие скалярному произведению (33.99), через $\|v\|^V$ и ρ^V, т. е. положим

$$\|v\|^V=\sqrt{(v,\ v)^V}=\sqrt{((v,\ v))}, \tag{33.100}$$

$$\rho^V(v,\ u)=\|v-u\|^V \tag{33.101}$$

(тогда как $\|v\|_V$ и $\rho_V(v,\ u)$ имеют аналогичный смысл в V, т. е. в метрике пространства $W_2^{(k)}(G)$). Из (33.96) и (33.97) получаем

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_V\leqslant\|v\|^V\leqslant\sqrt{K}\|v\|_V \tag{33.102}$$

и, следовательно, на основании (33.101)

$$\sqrt{\alpha}\rho_V(v,\ u)\leqslant\rho^V(v,\ u)\leqslant\sqrt{K}\rho_V(v,\ u). \tag{33.103}$$

Отсюда немедленно вытекает, что каждая последовательность элементов из пространства V, сходящаяся (или фундаментальная) в метрике ρ_V, сходится (или является фундаментальной) в метрике ρ^V, и наоборот. В этом случае мы говорим, что рассматриваемые метрики эквивалентны. Итак, скалярные произведения (33.94) и (33.99) порождают эквивалентные метрики на элементах пространства V. Далее, из определения линейной зависимости элементов, с. 68, вытекает, что если элементы

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{33.104}$$

линейно независимы (или линейно зависимы) в пространстве V, то они также линейно независимы (или соответственно линейно зависимы) в соответствующем пространстве с метрикой ρ^V, так как если выполняется соотношение $\|c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n\|_V = 0$, где $c_1, \ldots, c_n$ — постоянные, не все равные нулю, то, согласно (33.102), соотношение $\|c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n\|^V = 0$ выполняется с теми же постоянными, и наоборот. Более того, ясно, что если последовательность

$$\varphi_1(x),, \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{33.105}$$

является базисом в V, то она является базисом и в соответствующем пространстве с метрикой ρ^V, и наоборот. Достаточно показать, что полнота последовательности (33.105) влечет за собой ее полноту в метрике ρ^V, и наоборот. И вообще, как вытекает из неравенств (33.103), если элементы $v \in V$ аппроксимируются с произвольной точностью с помощью соответствующей линейной комбинации элементов последовательности (33.105) в метрике ρ_V, то же самое можно выполнить и в метрике ρ^V, и наоборот.

Глава 34

Приложение прямых вариационных методов для приближенного построения слабого решения

В гл. 33 было доказано существование и единственность слабого решения краевой задачи, см. определение 32.2, при условии, что билинейная форма $((v, u)) = A(v, u) + a(v, u)$ является V-эллиптической. В этой главе рассматривается приложение вариационных методов для построения этого слабого решения или его достаточно близкой аппроксимации. Как будет видно, эти методы очень схожи с теми, которые применялись в гл. 12—15 для приближенного решения существенно более частных задач с дифференциальными уравнениями.

Итак, пусть, согласно определению 32.2, мы имеем следующие данные: билинейную форму $((v, u))$, функцию $f \in L_2(G)$, функцию $w \in W_2^{(k)}(G)$, определяющую устойчивые граничные условия,

пространство V тех функций из $W_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют соответствующим однородным устойчивым граничным условиям, и функции $h_{pl}(S) \in L_2(\Gamma_p)$, определяющие неустойчивые граничные условия. Напомним, что под слабым решением данной краевой задачи понимается такая функция $u \in W_2^{(k)}(G)$, для которой

$$u - w \in V, \tag{34.1}$$

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx + \varkappa(v, h) \text{ для всех } v \in V, \tag{34.2}$$

где $\varkappa(v, h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}}}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}(S)\,dS.$

а) Однородные граничные условия

Рассмотрим сначала однородную краевую задачу, для чего положим $w = 0$ в $W_2^{(k)}(G)$ и $h_{pl}(S) = 0$ в $L_2(\Gamma_p)$, $p = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots k - \mu_p$. Тогда слабое решение определяется условиями

$$v \in V, \tag{34.3}$$

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx \quad \text{для всех } v \in V. \tag{34.4}$$

Теперь мы будем говорить не о слабом решении однородной краевой задачи вообще, а о слабом решении задачи (34.3), (34.4). Согласно предположениям (см. определение 32.2), форма $((v, u))$ удовлетворяет неравенству

$$|((v, u))| \leqslant K \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)}, \quad v, u \in W_2^{(k)}(G). \tag{34.5}$$

Если v и u оба принадлежат V, последнее неравенство можно представить в виде

$$|((v, u))| \leqslant K \|v\|_V \|u\|_V, \quad v, u \in V. \tag{34.6}$$

Далее, предположим, что форма $((v, u))$ является *V-эллиптической*, т. е. что существует такая постоянная $\alpha > 0$, что соотношение

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \text{ справедливо для всех } v \in V, \tag{34.7}$$

и что она к тому же *симметрична* в пространстве V, т. е. что для произвольной пары функции v, u выполняется соотношение

$$((v, u)) = ((u, v)). \tag{34.8}$$

Тогда (см. замечание 33.5) на множестве функций из пространства V новое скалярное произведение определяется соотношением

$$(v, u)^V = ((v, u)). \tag{34.9}$$

Кроме того, как указывалось в упомянутом выше замечании, если функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы в пространстве V,

то они также линейно независимы и в пространстве со скалярным произведением (34.9). В частности, их определитель Грама

$$\begin{vmatrix} ((\varphi_1, \varphi_1)) & \dots & ((\varphi_1, \varphi_n)) \\ \dots & \dots & \dots \\ ((\varphi_n, \varphi_1)) & \dots & ((\varphi_n, \varphi_n)) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Теорема 34.1. *Дана задача* (34.3), (34.4). *Пусть форма* $((v, u))$ *удовлетворяет предположениям* (34.6), (34.7), (34.8), *функции*

$$v_1(x), \dots, v_n(x), \dots \tag{34.10}$$

образуют базис в пространстве V. *Для каждого положительного целого числа* n *составим систему уравнений*

$$\begin{gathered} ((v_1, v_1))\, c_{n1} + \dots + ((v_1, v_n))\, c_{nn} = \int_G v_1 f\, dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ((v_n, v_1))\, c_{n1} + \dots + ((v_n, v_n))\, c_{nn} = \int_G v_n f\, dx \end{gathered} \tag{34.11}$$

с n *неизвестными* $c_{n1}, \dots, c_{nn}$. *Тогда последовательность функций*

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x) \tag{34.12}$$

сходится в пространстве V *к слабому решению* $u(x)$ *задачи* (34.3), (34.4), *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \text{ в } V. \tag{34.13}$$

Доказательство. Система (34.11) имеет единственное решение для произвольного фиксированного n, так как ее определитель — это определитель Грама, состоящий из скалярных произведений функций (34.10), и, следовательно, он отличен от нуля (см. текст перед теоремой 34.1). Таким образом, последовательность $\{u_n\}$ определена однозначно. Легко показать, что уравнения (34.11) для неизвестных $c_{n1}, \dots, c_{nn}$ получаются из условия, согласно которому выражение

$$\left(\left(u - \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i, \quad u - \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i\right)\right) \tag{34.14}$$

является минимальным среди выражений вида

$$\left(\left(u - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i, \quad u - \sum_{i=1}^{n} b_i v_i\right)\right), \tag{34.15}$$

где b_i, $i = 1, \dots, n$ — произвольные вещественные числа, а $u(x)$ — слабое решение задачи (34.3), (34.4). Действительно, раскрывая

выражение (34.15), мы получаем

$$((u,\ u))-\sum_{i=1}^{n} b_i\left[((u,\ v_i))+((v_i,\ u))\right]+\sum_{i,\ l=1}^{n} b_i b_l\,((v_i,\ v_l)),$$

и принимая во внимание симметрию формы $((v,\ u))$, имеем

$$((u,\ u))-2\sum_{i=1}^{n} b_i\,((u,\ v_i))+\sum_{i,\ l=1}^{n} b_i b_l\,((v_i,\ v_l)). \qquad (34.16)$$

Выражение (34.16) является квадратичной функцией от n переменных $b_1,\ \ldots,\ b_n$. Для того чтобы это выражение приняло экстремальное значение при $b_i=c_{ni},\ i=1,\ \ldots,\ n$, необходимо, чтобы его частные производные по b_i были равны нулю при $b_i=c_{ni}$, т. е. чтобы

$$-2\,((v_i,\ u))+2\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\,((v_i,\ v_l))=0,\quad i=1,\ \ldots,\ n.^{1}) \qquad (34.17)$$

Поскольку $u(x)$ — слабое решение задачи (34.3), (34.4), то из (34.4) вытекает, что

$$((v_i,\ u))=\int_G v_i f\,dx \text{ для всех } i=1,\ \ldots,\ n. \qquad (34.18)$$

Подставляя этот результат в (34.17), мы получаем (после деления на 2) уравнения (34.11). Поскольку система (34.11) имеет однозначное решение, то в силу условия, согласно которому выражение (34.14) является минимальным среди выражений вида (34.15), коэффициенты c_{ni} определяются однозначно. Нетрудно показать, что для величин, определенных таким образом, выражение (34.14) действительно принимает наименьшее значение[2]). Отсюда следует, что условия (34.11) и (34.14) эквивалентны. Далее, из (34.6) следует, что для всех $v\in V$

$$((v,\ v))\leqslant K\|v\|_V^2. \qquad (34.19)$$

Кроме того, функции (34.10) образуют базис в пространстве V. Следовательно, выбрав подходящую линейную комбинацию этих функций, можно аппроксимировать функцию $u(x)$ в этом пространстве с произвольной точностью. Отсюда и из (34.19) следует, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое n_0, что для каждого $n>n_0$ можно найти соответствующие постоянные b_{ni}, для которых

$$\left(\left(u-\sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i,\quad u-\sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i\right)\right)\leqslant\varepsilon.$$

---

[1]) Коэффициент 2 при втором члене в процессе дифференцирования появляется таким же образом, как мы это уже наблюдали при выводе системы уравнений Ритца на с. 153.

[2]) Это следует из того факта, что вследствие V-эллиптичности формы $((v,\ u))$ форма $\sum_{i,\ l=1}^{n} b_i b_l\,((v_i,\ v_l))$ является положительно определенной.

Поскольку постоянные c_{ni} в (34.12) определяются условием, согласно которому выражение (34.14) является наименьшим среди выражений вида (34.15), то тем более

$$\left(\left(u-\sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i,\quad u-\sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i\right)\right)<\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(u-\sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i,\quad u-\sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i\right)\right)=0.$$

Отсюда в силу (34.7) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|u-\sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i\right\|_V^2=0,$$

т. е. утверждение (34.13). Таким образом, теорема 34.1 доказана.

Замечание 34.1. Если функции v_i ортонормированы относительно скалярного произведения (34.9), т. е. если

$$((v_i,\ v_l))=\begin{cases}0 & \text{для } l\neq i,\\ 1 & \text{для } l=i,\end{cases} \tag{34.20}$$

то система (34.11) сводится к системе

$$c_{ni}=\int_G v_i f\,dx,\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{34.21}$$

Ясно, что эта система имеет очень простое решение, так как каждое неизвестное c_{ni} дается в явном виде формулой (34.21). Из этой формулы видно, что в данном случае коэффициенты c_{ni} не зависят от n, и, следовательно, их можно обозначить просто через c_i:

$$c_i=\int_G v_i f\,dx. \tag{34.22}$$

Результат (34.22) получен *методом ортогональных рядов*, который мы уже рассматривали в гл. 12. Если скалярное произведение для элементов пространства V определяется соотношением (34.9), т. е.

$$(v,\ u)^V=((v,\ u)),\quad u\in V,\ v\in V, \tag{34.23}$$

и если слабое решение $u(x)$ задачи (34.3), (34.4) представлено рядом Фурье

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i(x),$$

где функции $v_i(x)$ ортонормированы относительно скалярного произведения (т. е. удовлетворяют (34.20)), то, согласно (6.31), коэф-

фициенты c_i определяются формулой

$$c_i = ((v_i, u)). \tag{34.24}$$

Но $u(x)$ — слабое решение задачи (34.3), (34.4), и, следовательно, для каждого $i = 1, 2, \ldots$ мы в силу (34.4) имеем $((v_i, u)) = \int_G v_i f\,dx$. Отсюда (34.22) справедливо для всех $i = 1, 2, \ldots$ [1]).

Уже в гл. 12 мы обращали внимание читателя на тот факт, что, несмотря на свою исключительную простоту, метод ортогональных рядов часто бывает непригоден для численных расчетов. Действительно, как правило, нетрудно найти функции v_i, образующие базис в пространстве V. Но ортонормирование этого базиса относительно скалярного произведения $((v, u))$ — обычно процесс очень трудоемкий. Поэтому в численных расчетах обычно удобнее применять процедуру, описанную в теореме 34.1, в основе которой лежит система (34.11). Мы покажем, что эта система получается методом Ритца, но сначала докажем следующую теорему:

Теорема 34.2. *Если форма* $((v, u))$ *удовлетворяет условиям* (34.6) — (34.8), *то функция* $u(x)$ *будет слабым решением задачи* (34.3), (34.4) *тогда и только тогда, когда она минимизирует в пространстве* V *функционал*

$$((v, v)) - 2\int_G vf\,dx. \tag{34.25}$$

Доказательство. Существование и единственность слабого решения $u(x)$ задачи (34.3), (34.4) следует из V-эллиптичности формы $((v, u))$. Рассмотрим произвольную функцию $v(x) \in V$. Необходимо доказать, что если $v \neq u$ в V, то имеет место соотношение

$$((v, v)) - 2\int_G vf\,dx > ((u, u)) - 2\int_G uf\,dx. \tag{34.26}$$

Пусть $v = u + h$, так что $h \in V$. Мы имеем

$$((v, v)) = 2\int vf\,dx = ((u+h, u+h)) - 2\int_G (u+h) f\,dx =$$

$$= ((u, u)) + ((u, h)) + ((h, u)) + ((h, h)) - 2\int_G (u+h) f\,dx. \tag{34.27}$$

Но в силу (34.8) $((u, h)) = ((h, u))$, поскольку $u \in V$, $h \in V$. Далее, $u(x)$ — слабое решение задачи (34.3), (34.4) по предположению, поэтому для всех $h \in V$ выполняется соотношение

$$((u+h, u)) = \int_G (u+h) f\,dx. \tag{34.28}$$

[1]) В гл. 12 пространству V соответствует пространство H_A со скалярным произведением $(v, u)_A$, «соответствующим» произведению (34.23).

Таким образом, из (34.27) вытекает соотношение

$$((v,\ v))-2\int\limits_G vf\,dx=((u,\ u))+2((h,\ u))+((h,\ h))-2((u+h,\ u))=$$
$$=((u,\ u))+((h,\ h)). \qquad (34.29)$$

В то же время, полагая $h=0$ в (34.28), мы получаем

$$((u,\ u))-2\int\limits_G uf\,dx=2\left\{((u,\ u))-\int\limits_G uf\,dx\right\}-((u,\ u))=-((u,\ u)). \qquad (34.30)$$

Из соотношений (34.29) и (34.30) вытекает соотношение (34.26), поскольку $((h,\ h))\geqslant\alpha^2\|h\|_V^2$, и если $v\neq u$ в V, то $h\neq 0$ в V и, следовательно, $((h,\ h))>0$. Это доказывает, что функционал (34.25) принимает минимальное значение в пространстве V, когда $v=u$, где u — слабое решение задачи (34.3), (34.4), что и утверждает теорема 34.2.

Замечание 34.2. Итак, теорема 34.2 позволяет переформулировать (в предположениях (34.6)—(34.8)) задачу нахождения слабого решения данной задачи, т. е. нахождения такой функции $u\in V$, что удовлетворяются условия (34.3), (34.4), в эквивалентную задачу нахождения среди функций пространства V такой функции, для которой функционал (34.25) принимает наименьшее значение в V. Заметим, что теорема 34.2 не носит условный характер, в отличие от теоремы 9.2: существование (и единственность) слабого решения гарантировано теоремой 33.2 в предположении V-эллиптичности формы $((v,\ u))$. Следовательно, согласно теореме 34.2, существование (и единственность) элемента $u\in V$, минимизирующего функционал (34.25) в пространстве V, гарантировано. Следует, однако, заметить, что оба предположения (34.7) и (34.8) существенны для утверждения теоремы 34.2.

Как уже известно из гл. 13, метод Ритца состоит в том, что элемент $u(x)$, минимизирующий функционал

$$Fv=((v,\ v))-2\int\limits_G vf\,dx \qquad (34.31)$$

в пространстве V, аппроксимируется элементами

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{ni}v_i(x). \qquad (34.32)$$

Здесь $v_i(x)$ — элементы базиса в пространстве V, а коэффициенты c_{ni} определяются из того условия, что функционал Γ принимает минимальное значение на функции u_n среди всех функций вида

$$\sum_{i=1}^{n}b_{ni}v_i(x), \qquad (34.33)$$

где b_{ni} — вещественные числа, т. е. из того условия, что на линеале функций (34.33) $Fu_n = ((u_n, u_n)) - 2\int_G u_n f\,dx = \min$. Пусть

$$v_1(x), \ldots, v_n(x), \ldots \tag{34.34}$$

— базис в пространстве V. Для того чтобы выражение

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i, \sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i\right)\right) - 2\int_G \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i\right) f\,dx =$$

$$= \sum_{i,\,l=1}^{n} b_{ni}b_{nl}((v_i, v_l)) - 2\sum_{i=1}^{n} b_{ni}\int_G v_i f\,dx \tag{34.35}$$

приняло минимальное значение на функции (34.32) из всех функций вида (34.33), необходимо (а также, как можно легко показать в нашем случае, достаточно), чтобы частные производные по переменным b_{ni} равнялись нулю при $b_{ni} = c_{ni}$, т. е. чтобы уравнения

$$2\sum_{l=1}^{n} ((v_i, v_l))\, c_{nl} - 2\int_G v_i f\,dx = 0 \tag{34.36}$$

удовлетворялись для $i = 1, \ldots, n$. В подробной записи мы получаем

$$\begin{aligned}
&((v_1, v_1))\, c_{n1} + \ldots + ((v_1, v_n))\, c_{nn} = \int_G v_1 f\,dx,\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&((v_n, v_1))\, c_{n1} + \ldots + ((v_n, v_n))\, c_{nn} = \int_G v_n f\,dx.
\end{aligned} \tag{34.37}$$

Но эта система является не чем иным, как системой (34.11)[1]. Тогда сходимость метода Ритца следует непосредственно из теоремы 34.1 в предположении, что удовлетворяются условия (34.6)—(34.8) и что (34.34) является базисом пространства V. *Система* (34.37) *решается однозначно и для последовательности Ритца функций* $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i(x)$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } V, \tag{34.38}$$

где u — слабое решение задачи (34.3), (34.4) (и, согласно теореме 34.2, также элемент, минимизирующий функционал (34.31) в V).

---

[1]) К такому же заключению можно прийти, рассуждая следующим образом. Поскольку в (34.15) $u(x)$ — слабое решение данной задачи, мы имеем

$$\left(\left(u, \sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i\right)\right) = \left(f, \sum_{i=1}^{n} b_{ni}v_i\right)$$

и, следовательно, функционал (34.15) отличается от функционала (34.35) лишь членом $((u, u))$, который в процессе минимизации остается неизменным.

Систему (34.37) можно также формально получить с помощью метода Галёркина. Отыскиваем приближенное решение $u_n(x)$ нашей задачи $Au=f$ с однородными граничными условиями, которое опять имеет вид

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{ni}v_i(x).$$

Запишем формально условие, согласно которому выражение $Au-f$ ортогонально в пространстве $L_2(G)$ функциям $v_1, \ldots, v_n$:

$$\int_G v_1(Au_n-f)\,dx=0, \ \ldots, \ \int_G v_n(Au_n-f)\,dx=0. \qquad (34.39)$$

Выполняя с учетом данных граничных условий стандартные преобразования с использованием теоремы Грина в сочетании с некоторыми дополнительными приемами, мы получаем уравнения вида

$$((v_1, u_n))=\int_G v_1 f\,dx, \ \ldots, \ ((v_n, u_n))=\int_G v_n f\,dx, \qquad (34.40)$$

совпадающие с уравнениями (34.37).

Замечание 34.3. Заметим, что, пользуясь методом Ритца, мы выбираем последовательность функций $\{v_i(x)\}$, такую что она образует базис в пространстве V, т. е. в подпространстве тех функций из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют однородным устойчивым граничным условиям. Таким образом, применяя метод Ритца, мы работаем в пространстве V, и нас совсем «не интересует», выполняются или нет данные (в рассматриваемом случае однородные) неустойчивые граничные условия. Эти условия автоматически удовлетворяются (в слабом смысле) предельной функцией $u(x)$ последовательности Ритца $\{u_n(x)\}$, так как эта функция является, как только что было показано, искомым слабым решением, в определении которого уже учтены неустойчивые граничные условия.

Ход предыдущих рассуждений этой главы становится очень ясным, если мы проследим за каждым шагом доказательства теоремы 34.2. Согласно (34.29) и (34.30), для слабого решения $u(x)$ мы имеем $Fu=((u, u))-2\int_G uf\,dx=-((u, u))$ и $Fv=F(u+h)=$ $=((u+h, u+h))-2\int_G (u+h)f\,dx=-((u, u))+((h, h))>F(u)$ для каждой функции $v=u+h$, отличной от функции u в пространстве V. Следовательно, функция $u(x)$ является слабым решением данной задачи тогда и только тогда, когда она минимизирует в пространстве V функционал F (что как раз и является утверждением теоремы 34.2). Итак, если мы найдем последовательность $\{u_n(x)\}$, т. е. последовательность Ритца, минимизирующую в пространстве V функционал F, т. е. такую последовательность, что $\lim_{n\to\infty} Fu_n=\min_{v\in V} Fv$, то ее предел в V будет слабым решением

нашей задачи, удовлетворяющим (в слабом смысле) даже соответствующим (однородным) неустойчивым граничным условиям (которые в нашем анализе, проводимом в пространстве V, не участвуют вообще).

Из этого замечания вовсе не следует, что «запрещено» выбирать базисные функции $v_n(x)$ в V таким образом, чтобы эти функции удовлетворяли также данным неустойчивым граничным условиям. Если мы используем такой базис, то данные неустойчивые граничные условия будут удовлетворяться не только предельной функцией $u(x)$, но и каждым членом последовательности Ритца $\{u_n(x)\}$ либо минимизирующей последовательности, полученной каким-либо иным способом. В этом случае каждая функция последовательности $\{u_n(x)\}$ удовлетворяет всем заданным граничным условиям и не удовлетворяет, вообще говоря, только данному дифференциальному уравнению [1]). Типичным примером, демонстрирующим вышесказанное, может быть задача из примера 32.3 с однородными граничными условиями,

$$\Delta^2 u = f \text{ в } G, \tag{34.41}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{34.42}$$

$$Mu = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{34.43}$$

Условие (34.42) устойчиво, условие (34.43) неустойчиво. Пространство V поэтому образовано теми функциями из пространства $W_2^{(k)}(G)$, следы которых на границе Γ равны нулю,

$$V = \{v \in W_2^{(2)}(G): v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\}. \tag{34.44}$$

Слабое решение $u(x)$ этой задачи описывается условиями (см. с. 368)

$$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] dx \text{ для всех } v \in V.$$

Поэтому, минимизируя соответствующий функционал

$$Fv = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right] dx -$$

$$- 2 \int_G v f \, dx \tag{34.45}$$

методом Ритца (либо иным методом, дающим минимизирующую последовательность для функционала F), базисные функции необходимо выбирать из пространства (34.44); излишне (несмотря

[1]) Данное утверждение требует уточнения: в случае слабого решения, согласно определению 32.2, выполнение данного уравнения, а также граничных условий, рассматриваются в слабом смысле.

на то, что это удобно) требовать, чтобы эти функции удовлетворяли условию (34.43).

В отношении метода Галёркина нужно заметить следующее: пользуясь этим методом в его первоначальном виде, т. е. отправляясь от уравнений (34.39), мы должны требовать, чтобы функции $v_i(x)$ удовлетворяли всем граничным условиям. Если же мы заблаговременно выполним „интегрирование по частям", используя при этом теорему Грина с функциями, удовлетворяющими всем граничным условиям, мы получим уравнения (34.40), совпадающие с уравнениями, получаемыми методом Ритца. Теперь, учитывая то, что было сказано относительно выбора базиса для метода Ритца, уже не нужно требовать, чтобы функции $v_i(x)$ в уравнениях (34.40) удовлетворяли неустойчивым граничным условиям. Как мы увидим, все высказанные здесь замечания справедливы и для случая неоднородных граничных условий.

б) Неоднородные граничные условия

Исследуем более тщательно задачу с неоднородными граничными условиями, т. е. задачу (34.1), (34.2):

$$u - w \in V, \tag{34.46}$$

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx + \varkappa(v, h) \text{ для всех } v \in V, \tag{34.47}$$

где

$$\varkappa(v, h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int \frac{\partial^l{}_{pl} v}{\partial v^l{}_{pl}} h_{pl}(S)\,dS. \tag{34.48}$$

Форма $((v, u))$ по предположению удовлетворяет неравенству (34.5), и, следовательно, она также удовлетворяет неравенству (34.6). Предположим, что, как и выше, эта форма является V-эллиптической и симметричной в пространстве V, т. е. удовлетворяет соотношениям

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v^2\|_V^2, \ \alpha > 0 \text{ для всех } v \in V, \tag{34.49}$$

$$((v, u)) = ((u, v)) \text{ для каждой пары функции } v,\ u \in V. \tag{34.50}$$

Как известно, из предположения (34.49) следует существование единственного слабого решения данной задачи, т. е. единственной функции $u \in W_2^{(k)}(G)$, такой что (34.46) и (34.47) имеют силу. Положим

$$u = w + z. \tag{34.51}$$

Подставляя значение $u(x)$ из (34.51) в (34.46) и (34.47) и используя линейность формы $((v, u))$ по второй переменной, легко

видеть, что функция $z(x)$ удовлетворяет условиям

$$z \in V, \tag{34.52}$$

$$((v, z)) = \int_G vf\,dx + \varkappa(v, h) - ((v, w)) \text{ для всех } v \in V. \tag{34.53}$$

Короче говоря, *функция $z(x)$ является слабым решением задачи* (34.52), (34.53). Поскольку существует только одно слабое решение $u(x)$ задачи (34.46), (34.47), то ясно, что существует только одно слабое решение $z(x)$ задачи (34.52), (34.53). (См. также доказательство теоремы 33.2, где мы отыскивали слабое решение данной задачи именно в виде (34.51) и, следовательно, в действительности доказали теорему существования для задачи (34.52), (34.53).) Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 34.1:

Теорема 34.3. *Дана задача* (34.46), (34.47). *Пусть форма* $((v, u))$ *удовлетворяет предположениям* (34.5), (34.49), (34.50), *и пусть* $\{v_i(x)\}$ *— базис в пространстве* V. *Пусть, далее, постоянные* c_{ni}, $i = 1, \ldots, n$, *для любого положительного целого* n *являются решением системы*

$$((v_1, v_1))\,c_{1n} + \ldots + ((v_1, v_n))\,c_{nn} = \int_G v_1 f\,dx + \varkappa(v_1, h) - ((v_1, w)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$((v_n, v_1))\,c_{1n} + \ldots + ((v_n, v_n)c_{nn} = \int_G v_n f\,dx + \varkappa(v_n, h) - ((v_n, w)). \tag{34.54}$$

Обозначим $z_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x) \text{ в пространстве } V. \tag{34.55}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 34.1. Поэтому мы не будем подробно рассматривать каждый этап доказательства. Постоянные c_{ni} однозначно определяются системой (34.54), поскольку определитель этой системы является определителем Грама функций $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ и, следовательно, отличен от нуля. Условие, согласно которому выражение

$$\left(\left(z - \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i,\quad z - \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i\right)\right)$$

имеет наименьшее значение среди выражений вида

$$\left(\left(z - \sum_{i=1}^{n} b_{ni} v_i,\quad z - \sum_{i=1}^{n} b_{ni} v_i\right)\right),$$

эквивалентно условию

$$-2((v_i, z)) + 2\sum_{l=1}^{n} ((v_i, v_l))\,c_{nl} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{34.56}$$

Однако функция $z(x)$ является слабым решением задачи (34.52), (34.53), и поэтому из (34.53) следует, что для каждой функции $v_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, выполняется соотношение

$$((v_i, z)) = \int_G v_i f\,dx + \varkappa (v_i, h) - ((v_i, w)).$$

Подставляя это соотношение в (34.56), мы получаем систему (34.54). Сходимость последовательности $\{z_n(x)\}$ к слабому решению $z(x)$ устанавливается так же, как и сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к функции $u(x)$ в доказательстве теоремы 34.1.

Замечание 34.4. Если функции $v_i(x)$ ортонормированы относительно скалярного произведения (34.9), то мы получаем, как частный случай системы (34.54), „систему"

$$c_{ni} = \int_G v_i f\,dx + \varkappa (v_i, h) - ((v_i, w)), \tag{34.57}$$

которую можно также получить методом ортогональных рядов. Если функции w и h_{pl} равны нулю (однородные граничные условия), мы получаем, как частный случай системы (34.54), либо (34.57), систему (34.11), либо (34.21) соответственно.

Теорема 34.4. *Пусть предположения* (34.5), (34.49), (34.50) *удовлетворяются. Функция* $z(x)$ *будет слабым решением задачи* (34.52), (34.53) *тогда и только тогда, когда она будет минимизировать в пространстве* V *функционал*

$$Fv = ((v, v)) - 2\int_G vf\,dx - 2\varkappa (v, h) + 2((v, w))\ ^{1}). \tag{34.58}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 34.2. Для $v=z(x)$, где $z(x)$—слабое решение задачи (34.52), (34.53), мы имеем

$$Fz = ((z, z)) - 2\int_G zf\,dx - 2\varkappa (z, h) + 2((z, w)). \tag{34.59}$$

Но $z \in V$, и поэтому, согласно (34.53),

$$\int_G zf\,dx + \varkappa (z, h) - ((z, w)) = ((z, z)). \tag{34.60}$$

Подставляя это соотношение в (34.59), получаем $Fz = -((z, z))$. Для $v \neq z$ в V, т. е. для $v = z + \tilde{h}$, $\tilde{h} \neq 0$, аналогичным образом

---

[1]) Для читателей, знакомых с вариационными методами, заметим, что условие (34.53) указывает на тот факт, что первая вариация функционала F равна нулю, т. е. что функционал F принимает в этом случае стационарное значение.

получаем

$$F(z+\tilde{h}) = ((z+\tilde{h},\ z+\tilde{h})) - 2\int_G (z+\tilde{h})\, f\, dx - 2\varkappa(z+\tilde{h},\ \tilde{h}) +$$

$$+ 2((z+\tilde{h},\ w)) = ((z+\tilde{h},\ z)) + ((z+\tilde{h},\ \tilde{h})) - 2\int_G (z+\tilde{h})\, f\, dx -$$

$$- 2\varkappa(z+\tilde{h},\ \tilde{h}) + 2((z+\tilde{h},\ w)). \quad (34.61)$$

Но $z+\tilde{h} \in V$, и, следовательно, на основании (34.53) снова имеем

$$\int_G (z+\tilde{h})\, f\, dx + \varkappa(z+\tilde{h},\ \tilde{h}) - ((z+\tilde{h},\ w)) = ((z+\tilde{h},\ z)), \quad (34.62)$$

откуда, подставив это выражение в (34.61), мы получаем $F(z+\tilde{h}) = ((z+\tilde{h},\ z)) + ((z+\tilde{h},\ \tilde{h})) - 2((z+\tilde{h},\ z)) = -((z+\tilde{h},\ z)) + ((z+\tilde{h},\ \tilde{h})) = -((z,\ z)) + ((\tilde{h},\ \tilde{h}))$. Следовательно, фактически мы имеем

$$Fv - Fz = F(z+\tilde{h}) - Fz = ((\tilde{h},\ \tilde{h})) > 0 \text{ для любого } \tilde{h} \in V,\ \tilde{h} \neq 0. \quad (34.63)$$

Теорема 34.4 доказана.

Понятие слабого решения и теорема 34.4 являются эффективными средствами решения широкого класса краевых задач для дифференциальных уравнений довольно общего вида. Сведение рассматриваемой задачи к задаче минимизации некоторого функционала опять позволяет воспользоваться при решении данной задачи *методом Ритца.*

Пусть удовлетворяются предположения (34.5), (34.49), (34.50), и пусть $\{v_i(x)\}$ — базис в V. Допустим, что приближенное решение задачи (34.52), (34.53) имеет вид

$$z_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x). \quad (34.64)$$

Определяя коэффициенты c_{ni} из условия минимальности значения функционала

$$Fv = ((v,\ v)) - 2\int_G vf\, dx - 2\varkappa(v,\ h) + 2((v,\ w))$$

на функциях (34.64) среди функций вида

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni} v_i(x), \quad (34.65)$$

мы получим с помощью процедуры, аналогичной рассмотренной в замечании 34.2, и используя равенства вида (34.60), (34.62), систему (34.54). Тогда сходимость последовательности Ритца (34.64) в пространстве V к слабому решению $z(x)$ задачи (34.52), (34.53) следует непосредственно из (34.55).

Замечание 34.5. Напомним, что в отношении функций $v_i(x)$ мы предъявляем единственное требование, чтобы они являлись базисом пространства V, т. е. пространства тех функций из $W_2^{(k)}$, которые удовлетворяют (в смысле теории следов) однородным *устойчивым* граничным условиям. И совсем несущественно, удовлетворяют они неустойчивым граничным условиям или нет (см. замечание 34.3). Что касается практического выбора базиса, то в случае дифференциальных операторов с достаточно гладкими коэффициентами следует руководствоваться выводами гл. 20 и 25 [1]).

Замечание 34.6. Как мы только что показали, слабое решение $z(x)$ задачи (34.52), (34.53) получается как предел последовательности Ритца (34.64) в пространстве V. Тогда из (34.51) следует, что

$$u(x) = z(x) + w(x) \tag{34.66}$$

есть искомое слабое решение исходной задачи (34.46), (34.47). Далее, из (34.66) и (34.64) следует, что функцию $u(x)$ можно отыскивать сразу в виде

$$u(x) = w(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x), \tag{34.67}$$

где коэффициенты c_{ni} определяются системой (34.54). Этот же результат можно получить и иначе. Вместо минимизации функционала

$$Fv = ((v, v)) - 2\int_G vf\,dx - 2\varkappa(v, h) + 2((v, w)) \tag{34.68}$$

на линеале функций (34.65), т. е. вместо нахождения минимального значения функционала F среди функций вида (34.65), можно искать минимальное значение функционала

$$F(t-w) \tag{34.69}$$

среди функций вида

$$w(x) + \sum_{i=1}^{n} b_{ni} v_i(x), \tag{34.70}$$

т. е. минимизировать функционал

$$F(t-w) = ((t-w,\ t-w)) - 2\int_G (t-w) f\,dx - 2\varkappa(t-w,\ h) + \\ + 2((t-w,\ w)) \tag{34.71}$$

---

[1]) В случае разрывных коэффициентов при производных высшего порядка необходима определенная осторожность. Например, собственные функции оператора из упражнения 32.7 (при $b \neq a$) отличны от собственных функций оператора Лапласа (т. е. в случае $b = a$).

на множестве функций (34.70). Из (34.71) мы получаем

$$F(t-w)=((t,\ t))-((t,\ w))-((w,\ t))+((w,\ w))-$$
$$-2\int_G tf\,dx+2\int_G wf\,dx-2\varkappa(t,\ h)+2\varkappa(w,\ h)+2((t,\ w))-2((w,\ w)).$$

Поскольку члены $((w, w))$, $\int_G wf\,dx$ и $\varkappa(w, h)$ не зависят от t и, следовательно, не изменяются в процессе минимизации функционала $F(t-w)$, мы их опускаем и минимизируем на множестве функций (34.70) функционал

$$\tilde{F}t=((t,\ t))+((t,\ w))-((w,\ t))-2\int_G tf\,dx-2\varkappa(t,\ h). \quad (34.72)$$

Если, кроме того, форма $((v, u))$ симметрична не только в пространстве V, но и во всем пространстве $W_2^{(k)}(G)$, что часто встречается в приложениях, мы имеем $((v, u))=((u, v))$. В этом случае мы минимизируем на множестве функций (34.70) функционал

$$((t,\ t))-2\int_G tf\,dx-2\varkappa(t,\ h). \quad (34.73)$$

(„*Принцип минимума потенциальной энергии*“; в механике функционал (34.73) обозначает удвоенную энергию.) Эта процедура так же часто используется в приложениях, как и процедура, описанная перед замечанием 34.5. Например, используя метод Ритца при решении задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u=f \quad \text{в } G, \quad (34.74)$$
$$u=g \quad \text{на } \Gamma, \quad (34.75)$$

можно найти функцию $w\in W_2^{(1)}(G)$, удовлетворяющую (в смысле теории следов) условию $w=g$ на Γ, и затем минимизировать либо функционал

$$((v,\ v))-2\int_G vf\,dx+2((v,\ w))=$$
$$=\int_G\sum_{j=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2-2\int_G vf\,dx+2\int_G\sum_{j=1}^N\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,dx \quad (34.76)$$

на множестве функций вида $\sum_{i=1}^n b_{ni}v_i(x)$, либо функционал

$$((t,\ t))-2\int_G tf\,dx=\int_G\sum_{j=1}^N\left(\frac{\partial t}{\partial x_j}\right)^2dx-2\int_G tf\,dx \quad (34.77)$$

на множестве функций вида $w(x)+\sum_{i=1}^n b_{ni}v_i(x)$, где v_i удовлетворяет (в смысле теории следов) условию $v_i=0$ на Γ. В обоих случаях мы получаем одни и те же уравнения (34.54) для неиз-

вестных постоянных c_{ni}, и ясно, что

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left\{ w(x) + \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x) \right\}$$

в $W_2^{(k)}(G)$ (при условии, конечно, что функции $v_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, образуют базис в V).

в) Метод наименьших квадратов

Для аппроксимации слабого решения краевой задачи можно использовать и другие методы, аналогичные тем, которые мы рассмотрели во второй части этой книги. Более подробно мы остановимся здесь на методе наименьших квадратов.

Рассмотрим слабое решение задачи (34.3), (34.4) с однородными граничными условиями. (Это ограничение не имеет существенного значения. Читатель может легко обобщить следующие ниже рассуждения на случай неоднородных граничных условий.) Пусть форма $((v, u))$ удовлетворяет условию (34.5) или (34.6), и пусть она будет V-эллиптической (что гарантирует существование и единственность слабого решения рассматриваемой задачи), но не обязательно симметричной (в этом и состоит заметное преимущество данного метода). Выберем такую последовательность функций $v_i(x)$ из области определения оператора A, $v_i \in D_A$, $i = 1, 2, \ldots$, чтобы функции

$$Av_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{34.78}$$

образовали базис в пространстве $L_2(G)$. Найдем приближенное решение нашей задачи в виде

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x), \tag{34.79}$$

где постоянные c_{ni} определяются из условия

$$\int_G (Au_n - f)^2 \, dx = \min \tag{34.80}$$

на линеале всех функций вида

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ni} v_i(x). \tag{34.81}$$

В этом случае простым вычислением мы получаем систему (см. (15.9))

$$\begin{aligned}
&(Av_1, Av_1)\, c_{n1} + \ldots + (Av_1, Av_n)\, c_{nn} = \int_G Av_1 f \, dx, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(Av_n, Av_1)\, c_{n1} + \ldots + (Av_n, Av_n)\, c_{nn} = \int_G Av_n f \, dx.
\end{aligned} \tag{34.82}$$

Определитель этой системы является определителем Грама линейно независимых (в пространстве $L_2(G)$) функций Av_i; следовательно, он отличен от нуля, система (34.82) решается однозначно. Утверждается, что *последовательность функций* (34.79), *полученная с помощью этого метода, сходится в метрике пространства* $W_2^{(k)}(G)$ *к слабому решению* $u(x)$ *задачи* (34.3), (34.4).

Доказательство простое. По предположению функции (34.78) образуют базис в $L_2(G)$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число n_0, что для каждого $n > n_0$ можно найти постоянные b_{ni}, при которых справедливо

$$\int_G \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni} Av_i - f \right)^2 dx < \varepsilon. \tag{34.83}$$

Тогда и подавно при $n > n_0$ выполняется соотношение

$$\int_G \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ni} Av_i - f \right)^2 dx < \varepsilon, \tag{34.84}$$

поскольку постоянные c_{ni} определены таким образом, что интеграл (34.83) принимает минимальное значение при заданном n. Соотношение (34.84) непосредственно дает

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_{ni} Av_i = f \text{ в } L_2(G),$$

откуда (в обозначениях (34.79)) мы получаем соотношение

$$\lim_{n \to \infty} Au_n = f \text{ в } L_2(G). \tag{34.85}$$

Обозначим

$$Au_n = f_n. \tag{34.86}$$

Итак, функция u_n является для всех n слабым[1]) решением уравнения $Au = f_n$ с однородными граничными условиями, поскольку для всех $v \in V$ (даже для всех $v \in L_2(G)$) мы имеем

$$\int_G vAu_n\, dx = \int_G vf\, dx, \tag{34.87}$$

т. е. (поскольку граничные условия однородны)

$$((v,\ u_n)) = \int_G vf_n\, dx, \tag{34.88}$$

Но в случае однородных граничных условий неравенство (33.22) дает для слабого решения оценку

$$\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant c \|f\|_{L_2(G)}, \tag{34.89}$$

[1]) Это даже классическое решение, поскольку $v_i \in D_A$, а следовательно, и $u_n \in D_A$.

где постоянная c не зависит от f. Отсюда для слабых решений $u_n(x)$ и $u_m(x)$ вадач $Au=f_n$ и $Au=f_m$ соответственно вытекает оценка

$$\|u_n-u_m\|_{W_2^{(k)}(G)}\leqslant c\|f_n-f_m\|_{L_2(G)}. \tag{34.90}$$

Согласно (34.85), теперь $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ в $L_2(G)$. Таким образом, последовательность $\{u_n(x)\}$ является фундаментальной в $W_2^{(k)}(G)$. Далее, поскольку пространство $W_2^{(k)}(G)$ полное, последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится в этом пространстве к некоторой функции $\overline{u}(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=\overline{u}(x) \text{ в } W_2^{(k)}(G). \tag{34.91}$$

Переходя к пределу в (34.88), мы видим, что эта функция есть слабое решение рассматриваемой задачи. Единственность этого слабого решения дает равенство $\overline{u}(x)=u(x)$, и, следовательно, на основании (34.91) мы имеем $\lim_{n\to\infty} u_n(x)=u(x)$ в $W_2^{(k)}(G)$. Этим доказана сходимость метода наименьших квадратов в пространстве $W_2^{(k)}(G)$.

Глава 35

Задача Неймана для уравнений порядка $2k$ (случай, когда форма $((v, u))$ не является V-эллиптической)

Как было показано на с. 367, задаче Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u=f \text{ в } G, \tag{35.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=h \text{ на } \Gamma \tag{35.2}$$

соответствует в смысле определения 32.2 слабого решения задача

$$u\in V=W_2^{(1)}(G), \tag{35.3}$$

$$((v, u))=\int_G vf\,dx+\int_\Gamma vh\,dS \text{ для всех } v\in V, \tag{35.4}$$

где

$$((v, u))=\int_G \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx. \tag{35.5}$$

В примере 33.2 мы показали, что в этом случае, когда $V=W_2^{(1)}(G)$, форма (35.5) не является V-эллиптической, поскольку, например, для $v(x)\equiv 1$ в G мы имеем $\|v\|_{W_2^{(1)}(G)}\neq 0$, но $((v, v))=0$. Следовательно, доказательство существования и единственности слабого решения задачи (35.3), (35.4) не может проводиться с помощью

теоремы Лакса—Мильграма. Вообще говоря, задача (35.3), (35.4) фактически неразрешима. Предположим, что решение $u(x)$ этой задачи существует. Рассмотрим произвольную функцию $v \in W_2^{(1)}(G)$. Тогда для функции $v(x)$ должно выполняться условие

$$((v,\ u)) = \int\limits_G vf\,dx + \int\limits_\Gamma vh\,dS. \tag{35.6}$$

Но функция $v(x) \equiv k$, где k — произвольное (вещественное) число, также принадлежит пространству $W_2^{(1)}(G)$, и, следовательно, согласно (35.6), должно в то же время выполняться соотношение

$$((v+k,\ u)) = \int\limits_G (v+k)\,f\,dx + \int\limits_\Gamma (v+k)\,h\,dS. \tag{35.7}$$

Но из вида (35.5) для $((v,\ u))$ следует, что $((v+k,\ u)) = ((v,\ u))$, поскольку k — постоянная. Сравнивая (35.6) и (35.7), мы получаем

$$k\left[\int\limits_G f\,dx + \int\limits_\Gamma h\,dS\right] = 0$$

и, поскольку k — произвольное число,

$$\int\limits_G f\,dx + \int\limits_\Gamma h\,dS = 0. \tag{35.8}$$

Таким образом, если слабое решение задачи (35.3), (35.4) существует, то условие (35.8) обязательно выполняется.

Далее, из (35.5) следует, что если (35.4) выполняется для некоторой функции $u \in W_2^{(1)}(G)$, то оно также должно выполняться для функции $u(x) + C$, где C — произвольная (вещественная) постоянная. Следовательно, если задача (35.3), (35.4) разрешима, то она имеет бесконечно много решений.

Как мы увидим, в этом довольно простом случае можно легко преодолеть описанные выше затруднения [1]). Рассмотрим линейное подпространство [2]) Q (с метрикой пространства $W_2^{(1)}(G)$) тех функций $v(x)$ из $W_2^{(1)}(G)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\int\limits_G v(x)\,dx = 0. \tag{35.9}$$

Для $v \in Q$ вместо $\|v\|_{W_2^{(1)}(G)}$ будем писать кратко $\|v\|_Q$. Используя неравенство (30.9), мы получаем

$$((v,\ v)) = \int\limits_G \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx \geqslant \frac{1}{k_4}\|v\|^2_{W_2^{(1)}(G)} = \frac{1}{k_4}\|v\|^2_Q \tag{35.10}$$

[1]) По существу это уже было показано в гл. 22. Несмотря на это, мы даем здесь подробный анализ этого частного случая, поскольку этот анализ почти без изменения приложим к значительно более общему случаю, рассматриваемому во второй части этой главы.

[2]) Полнота этого подпространства легко доказывается непосредственно, однако она будет следовать из простого рассмотрения на с. 423.

для всех $v \in Q$, где k_4 — постоянная из упомянутого выше неравенства.

Неравенство (35.10) показывает, что форма (35.5) является V-эллиптической. Поэтому, очевидно, предпочтительнее отыскивать сначала такое решение $u(x)$ задачи (35.3), (35.4), которое принадлежит Q. Если выполняется условие (35.8), задачу (35.3), (35.4) можно сформулировать следующим образом: найти функцию $u(x)$, такую что

$$u \in Q \tag{35.11}$$

и

$$((v,\ u)) = \int\limits_G vf\,dx + \int\limits_\Gamma vh\,dS \quad \text{для всех } v \in W_2^{(1)}(G). \tag{35.12}$$

Как было уже показано, если условие (35.8) не выполняется, то слабого решения задачи (35.3), (35.4) не существует. В этом случае также не существует функции, обладающей свойствами (35.11), (35.12). Поэтому случай, когда условие (35.8) не выполняется, будет из наших дальнейших рассуждений исключен. Наша первоочередная задача состоит в том, чтобы показать, что условие (35.8) является не только необходимым, но и достаточным для существования слабого решения данной задачи. Для этого достаточно показать, что в предположении (35.8) задача (35.11), (35.12) имеет решение.

Обозначим через P_0 линейное подпространство пространства $W_2^{(1)}(G)$, элементами которого являются все функции, постоянные на G. (Здесь, как обычно, мы отождествляем функции, постоянные почти всюду на G, с функциями, постоянными на G.) Легко показать, что P_0 — действительно подпространство в $W_2^{(1)}(G)$, т. е. что оно полно. Действительно, пусть

$$u_1(x) \equiv k_1,\ \ldots,\ u_n(x) \equiv k_n,\ \ldots \tag{35.13}$$

— фундаментальная последовательность в P_0 (а следовательно, и в $W_2^{(1)}(G)$). Как известно, скалярное произведение двух функций $v_1(x)$, $v_2(x)$ из пространства $W_2^{(1)}(G)$ определяется формулой

$$(v_1,\ v_2)_{W_2^{(1)}(G)} = \int\limits_G v_1 v_2\,dx + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_G \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\,dx. \tag{35.14}$$

Тогда для элементов последовательности (35.13) мы имеем соотношение

$$\rho^2(u_m,\ u_n)_{W_2^{(1)}(G)} = \int\limits_G (u_m - u_n)^2\,dx + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_G \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} - \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right)^2 dx =$$
$$= \int\limits_G (k_m - k_n)^2\,dx,$$

поскольку $u_m(x) \equiv k_m$, $u_n(x) \equiv k_n$ и, следовательно, производные этих функций равны нулю. Отсюда простым рассуждением (см. также пример 5.7) мы получаем, что последовательность (35.13) фундаментальна в $W_2^{(1)}(G)$ тогда и только тогда, когда последовательность чисел $\{k_n\}$ фундаментальна. Обозначим через k предел этой последовательности чисел, $k = \lim_{n\to\infty} k_n$. Тогда пределом последовательности (35.13) в пространстве $W_2^{(1)}(G)$ будет функция $u(x) \equiv k$. Действительно, производные функций (35.13), а также функции $u(x)$ равны нулю, поэтому $\lim_{n\to\infty} \rho^2(u_n, u)_{W_2^{(1)}(G)} = \lim_{n\to\infty} \int_G (k_n - k)^2\, dx = 0$. Ясно, что $u \in P_0$. Это доказывает полноту пространства P_0.

Как известно (см. замечание 6.10), множество элементов, ортогональных в $W_2^{(1)}(G)$ к P_0, является линейным подпространством пространства $W_2^{(1)}(G)$. Элементы этого подпространства легко характеризуются следующим образом: поскольку производные функций из P_0 равны нулю, то из (35.14) вытекает, что функция $v_2 \in W_2^{(1)}(G)$ ортогональна функции $v_1 \in P_0$ в пространстве $W_2^{(1)}(G)$ тогда и только тогда, когда она ортогональна этой функции в пространстве $L_2(G)$, т. е. короче

$$v_1 \in P_0, \quad v_2 \in W_2^{(1)}(G), \quad v_1 \perp v_2 \text{ в } L_2(G) \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \text{ в } L_2(G). \tag{35.15}$$

Предположим, что $v_2 \perp P_0$ в $W_2^{(1)}(G)$, т. е. (см. с. 72) предположим, что функция $v_2(x)$ ортогональна каждой функции $v_1 \in P_0$. Из (35.15) следует, что

$$v_2 \perp P_0 \text{ в } W_2^{(1)}(G) \Leftrightarrow v_2 \perp P_0 \text{ в } L_2(G). \tag{35.16}$$

Но все функции $v_1 \in P_0$ имеют вид $v_1(x) = c = \text{const}$ и, следовательно,

$$v_2 \perp P_0 \text{ в } L_2(G) \Leftrightarrow \int_G c v_2\, dx = 0 \text{ для всех } c. \tag{35.17}$$

Из этого условия мы получаем

$$\int_G v_2(x)\, dx = 0. \tag{35.18}$$

Таким образом, если $v_2 \perp P_0$ в $W_2^{(1)}(G)$, то удовлетворяется уравнение (35.18), т. е. $v_2 \in Q$ (ср. с (35.9)). Обратно, если $v_2 \in Q$, то выполняется уравнение (35.18), откуда, согласно (35.17) и (35.16), следует, что $v_2 \perp P_0$ в $W_2^{(1)}(G)$. Следовательно, ортогональным дополнением пространства P_0 в пространстве $W_2^{(1)}(G)$ является пространство Q.

Следовательно, из теоремы 6.14 и замечания 6.10 непосредственно следует тот факт, что каждая функция $v \in W_2^{(1)}(G)$ однозначно разлагается в пространстве $W_2^{(1)}(G)$ в сумму

$$v = v_1 + v_2, \quad \text{где } v_1 \in P_0,\ v_2 \in Q. \tag{35.19}$$

Теперь покажем, что задача (35.11), (35.12) эквивалентна (в предположении (35.8)) задаче нахождения такой функции $u(x)$, что

$$u \in Q \tag{35.20}$$

и что соотношение

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx + \int_\Gamma vh\,dS \quad \text{выполняется для всех } v \in Q \tag{35.21}$$

(в отличие от задачи (35.11), (35.12) в (35.21) рассматриваются не все функции из пространства $W_2^{(1)}(G)$, а только функции $v(x)$ из пространства Q).

На самом деле если задача (35.11), (35.12) имеет слабое решение $u \in Q$, то и задача (35.20), (35.21) имеет то же решение, поскольку выполнение условия (35.12) для всех $v \in W_2^{(1)}(G)$ влечет за собой выполнение этого условия и для всех $v \in Q$. Обратно, если задача (35.20), (35.21) имеет слабое решение $u \in Q$, то и задача (35.11), (35.12) имеет это же решение: в самом деле, пусть условие (35.21) удовлетворяется для всех $v \in Q$. Необходимо показать, что оно удовлетворяется и для всех $v \in W_2^{(1)}(G)$. Для этого рассмотрим произвольную функцию $v(x) \in W_2^{(1)}(G)$. Согласно (35.19), $v(x)$ можно однозначно разложить в сумму

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in P_0, \quad v_2 \in Q. \tag{35.22}$$

Поскольку $v_1 \in P_0$, то

$$v_1(x) \equiv c = \text{const}. \tag{35.23}$$

Далее, так как $v_2 \in Q$ и по предположению для всех функций из Q выполняется (35.21), то

$$((v_2, u)) = \int_G v_2 f\,dx + \int_\Gamma v_2 h\,dS. \tag{35.24}$$

В то же время для произвольной постоянной c

$$((c, u)) = \int_G cf\,dx + \int_\Gamma ch\,dS, \tag{35.25}$$

поскольку левая часть равна нулю в силу того, что $dc/dx_j = 0$, а правая часть равна нулю, потому что выполняется (35.8). Складывая (35.8) и (35.25), мы получаем соотношение

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx + \int_\Gamma vh\,dS,$$

откуда следует, что (35.21) действительно выполняется для рассматриваемого v. А поскольку v — произвольная функция из пространства $W_2^{(1)}(G)$, то (35.21) выполняется для всех $v \in W_2^{(1)}(G)$.

Итак, в предположении (35.8), задачи (35.11), (35.12) и (35.20), (35.21) эквивалентны.

Пользуясь соотношением (35.10), легко доказать теперь существование и единственность решения задачи (35.20), (35.21) (а следовательно, и задачи (35.11), (35.12)). Форма $((v, u))$ ограничена в пространстве $W_2^{(1)}(G)$, а следовательно, и в пространстве Q:

$$|((v, u))| \leqslant K \|v\|_Q \|u\|_Q \tag{35.26}$$

(в нашем случае достаточно положить $K = 1$) и, согласно (35.10), является Q-эллиптической, т. е.

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v\|^2, \tag{35.27}$$

где $\alpha = 1/k_4$ (см. (35.10)). Доказательство теоремы существования проводится так же, как и доказательство теоремы 33.2 в гл. 33. Функционал

$$\int_G vf\,dx + \int_\Gamma vh\,dS \tag{35.28}$$

ограничен в пространстве Q. На основании теоремы Лакса — Мильграма существует единственная функция $u \in Q$, для которой выполняется соотношение (35.21); кроме того,

$$\|u\|_Q = \|u\|_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_2(G)} + \|h\|_{L_2(\Gamma)}), \tag{35.29}$$

где c — постоянная из (33.22).

Итак, мы ответили на вопрос о существовании и единственности слабого решения задачи (35.20), (35.21) в пространстве Q.

Поскольку форма (35.5) является Q-эллиптической и, что совершенно очевидно, симметричной в пространстве Q, т, е.

$$((v, u)) = ((u, v)), \quad v, u \in Q, \tag{35.30}$$

можно почти дословно повторить рассмотрения, проведенные в гл. 34. Таким образом, из теоремы 34.1 и 34.2 вытекает, что рассматриваемое слабое решение $u \in Q$ минимизирует в Q функционал

$$Fv = ((v, v)) - 2\int_G vf\,dx - 2\int_\Gamma vh\,dS = \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx - 2\int_G vf\,dx - 2\int_\Gamma vh\,dS. \tag{35.31}$$

Для минимизации этого функционала можно использовать метод Ритца. Если $v_1, v_2 \ldots$ — базис пространства Q и если мы ищем приближенное решение в виде

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{N} c_{ni} v_i(x), \tag{35.32}$$

то соответствующая система Ритца (34.54) имеет вид

$$((v_1, v_1))\, c_{n1} + ((v_1, v_2))\, c_{n2} + \ldots + ((v_1, v_n))\, c_{nn} = \int\limits_G v_1 f\, dx + \int\limits_\Gamma v_1 h\, dS,$$

$$((v_2, v_1))\, c_{n1} + ((v_2, v_2))\, c_{n2} + \ldots + ((v_2, v_n))\, c_{nn} = \int\limits_G v_2 f\, dx + \int\limits_\Gamma v_2 h\, dS,$$

. . . . . .

$$((v_n, v_1))\, c_{n1} + ((v_n, v_2))\, c_{n2} + \ldots + ((v_n, v_n))\, c_{nn} = \int\limits_G v_n f\, dx + \int\limits_\Gamma v_n h\, dx, \tag{35.33}$$

где

$$((v_l, v_k)) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_G \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dx,$$

и в Q, а значит, и в $W_2^{(1)}(G)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x). \tag{35.34}$$

Из эквивалентности задач (35.20), (35.21) и (35.11), (35.12) вытекает тот факт, что слабое решение $u(x)$ задачи (35.20), (35.21) является также слабым решением задачи (35.11), (35.12), а следовательно, и слабым решением исходной задачи (35.3), (35.4). Когда мы имеем форму вида (35.5), то, как уже отмечалось, слабым решением задачи (35.3), (35.4) является также функция вида $u(x) + C$, где C — постоянная. Но задача (35.3), (35.4) не может иметь иных слабых решений, кроме функций вида $u(x) + C$, где $u(x)$ — слабое решение задачи (35.20), (35.21). В самом деле, пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$ — два слабых решения задачи (35.3), (35.4), тогда

$$u_1 \in W_2^{(1)}(G), \quad u_2 \in W_2^{(1)}(G), \tag{35.35}$$

$$((v, u_1)) = \int\limits_G vf\, dx + \int\limits_\Gamma vh\, dS \text{ для любой } v \in W_2^{(1)}(G), \tag{35.36}$$

$$((v, u_2)) = \int\limits_G vf + \int\limits_\Gamma vh\, dS \text{ для любой } v \in W_2^{(1)}(G). \tag{35.37}$$

Положим $u_3 = u_2 - u_1$, откуда $u_3 \in W_2^{(1)}(G)$. Вычитая (35.36) из (35.37), мы получаем $((v, u_3)) = 0$ для произвольной функции $v \in W_2^{(1)}(G)$. Для $v = u_3$, в частности, это влечет за собой равенство

$$((u_3, u_3)) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_G \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 dx = 0,$$

откуда следует, что $\frac{\partial u_3}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, \ldots, N$, почти всюду в G и $u_3 = \text{const}$ почти всюду в G.

Следовательно, все слабые решения задачи (35.3), (35.4) различаются почти всюду в G на некоторую постоянную. Поскольку рассматриваемое слабое решение $u \in Q$ задачи (35.20), (35.21) принадлежит к их числу, то все эти решения имеют вид $u(x) + \text{const}$ почти всюду в G.

Обобщим результаты приведенного анализа в следующую теорему:

Теорема 35.1. *Пусть дана задача* (35.3), (25.4), *т. е. задача нахождения функции* $u(x)$, *такой что*

$$u \in W_2^{(1)}(G), \tag{35.38}$$

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx + \int_\Gamma vh\,dS \text{ для любой } v \in W_2^{(1)}(G), \tag{35.39}$$

где

$$((v, u)) = \sum_{j=1}^{N} \int_G \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx. \tag{35.40}$$

Для существования слабого решения этой задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_G f\,dx + \int_\Gamma h\,dS = 0. \tag{35.41}$$

Если это условие выполняется, то существует бесконечное множество слабых решений данной задачи, причем любые два решения отличаются друг от друга на постоянную почти всюду в G.

Обозначим через Q *подпространство таких функций* $v(x)$ *из пространства* $W_2^{(1)}(G)$, *для которых*

$$\int_G v(x)\,dx = 0. \tag{35.42}$$

Согласно условию $u \in Q$, *слабое решение* $u(x)$ *задачи* (35.38), (35.39) *определяется однозначно и справедлива оценка*

$$\|u\|_Q = \|u\|_{W_2^{(1)}(G)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_2(G)} + \|h\|_{L_2(\Gamma)}), \tag{35.43}$$

где c *не зависит ни от* f, *ни от* h. *Это решение минимизирует в пространстве* Q *функционал*

$$Fv = ((v, v)) - 2\int_G vf\,dx - 2\int_\Gamma vh\,dS =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2 dx - 2\int_G vf\,dx - 2\int_\Gamma vh\,dS. \tag{35.44}$$

Предполагая, что приближенное решение имеет вид

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i, \tag{35.45}$$

где $\{v_i(x)\}$ *— базис пространства* Q, *и используя для минимизации функционала* (35.44) *метод Ритца, мы получаем для неизвестных коэффициентов в* (35.45) *систему* (35.33). *Мы имеем* $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ *в пространстве* Q (*а следовательно, и в* $W_2^{(1)}(G)$).

Замечание 35.1. Напомним, что базис $v_i(x)$ выбирается в пространстве Q таким образом, чтобы каждая из функций $v_i(x)$ обязательно удовлетворяла условию (35.42) (но они могут не удовлетворять условию (35.2)).

Столь значительное внимание, которое мы уделили задаче (35.3), (35.4), объясняется тем, что описанная выше процедура, в незначительной степени видоизмененная, как будет показано ниже, применима к гораздо более общему случаю уравнений более высокого порядка.

В гл. 32 мы уже сталкивались с задачей Неймана на плоскости для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } G, \tag{35.46}$$

$$Nu = h_1, \quad Mu = h_2 \text{ на } \Gamma, \tag{35.47}$$

где

$$Mu = \sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2},$$

$$Nu = -\frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta u) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\nu_1\nu_2\right],$$

$0 \leqslant \sigma < 1$; $\nu_1(s)$, $\nu_2(s)$ — направляющие косинусы внешней нормали. В слабой постановке задачи мы находим функцию $u(x)$, такую что

$$u \in V = W_2^{(2)}(G) \tag{35.48}$$

и

$$((v, u)) = \int_G vf\,dx + \int_\Gamma vh_1\,dS + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\,dS \text{ для всех } v \in V, \tag{35.49}$$

где

$$((v, u)) = \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] dx. \tag{35.50}$$

В гл. 33, с. 399, мы обнаружили, что, как и в случае задачи (35.3), (35.4), форма $((v, u))$ не является V-эллиптической и, следовательно, для доказательства теоремы существования нельзя воспользоваться теоремой Лакса — Мильграма. Задачи такого типа (где рассматриваемая форма не является V-эллиптической) встречаются довольно часто.

Заметим, что задачи (35.3), (35.4) и (35.48), (35.49) имеют следующие три общих свойства:

а) Для обеих задач

$$V = W_2^{(k)}(G) \tag{35.51}$$

($k=1$ в первом случае и $k=2$ во втором). Это обстоятельство является причиной значительных сложностей. В случае задачи Дирихле мы имеем $V = \mathring{W}_2^{(1)}(G)$, либо $V = \mathring{W}_2^{(2)}(G)$ и никаких затруднений, связанных с V-эллиптичностью не возникает, потому что выполняются неравенства (35.15) и (30.16) соответственно.

б) Обозначив через P_l линеал всех многочленов степени не более чем l, мы получаем

$$((v+p, u)) = ((v, u)) \text{ и } ((v, u+p)) = ((v, u))$$
$$\text{для произвольных } u,\ v \in W_2^{(k)}(G) \text{ и } p \in P_{k-1}. \tag{35.52}$$

А именно, в первом случае $P_{k-1} = P_0$ является линеалом функций, постоянных в области G, и соотношения (35.52) следуют непосредственно из вида формы (35.5). Во втором случае $P_{k-1} = P_1$ является линеалом функций вида $a+bx_1+cx_2$ в области G, и соотношения (35.52) следуют из вида формы (35.50).

в) Обе формы удовлетворяют неравенству

$$((v, v)) \geqslant \beta \sum_{|i|=k} \int_G (D^i v)^2\, dx, \tag{35.53}$$

где $v \in W_2^{(k)}(G)$ — произвольная функция, а $\beta > 0$. В первом случае мы имеем непосредственно

$$((v, v)) = \sum_{l=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_l}\right)^2 dx,$$

следовательно, в (35.53) $\beta = 1$. Во втором случае мы имеем (см. (33.83))

$$((v, v)) \geqslant (1-\sigma) \int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx, \tag{35.54}$$

а значит, в (35.53) можно положить $\beta = 1-\sigma$.

С перечисленными выше свойствами довольно часто приходится сталкиваться в задачах, где форма $((v, u))$ не является V-эллиптической. По этой причине [1]) в дальнейшем в этой главе мы будем иметь дело исключительно с этим случаем. Анализ несколько более общего случая дается в [32] и в [19], где, в частности, рассматриваются также системы эллиптических уравнений.

Итак, дана задача найти функцию $u(x)$, такую что

$$u \in W_2^{(k)}(G), \tag{35.55}$$

[1]) Другая причина состоит в том, что мы пытаемся в нашей книге рассматривать этот тип задач, не вводя понятия *факторпространства*. С математической точки зрения эти пространства являются исключительно эффективным инструментом, и в то же время они создают значительные затруднения для тех из читателей, кто не является профессиональным математиком.

и для произвольной функции $v \in W_2^{(k)}(G)$ справедливо соотношение

$$((v, u) = \int_G vf\,dx + \varkappa(v, h). \tag{35.56}$$

Здесь

$$\varkappa(v, h) = \int_\Gamma vh_1\,dS + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\,dS + \ldots + \int_\Gamma \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}} h_k\,dS, \tag{35.57}$$

$h_l \in L_2(\Gamma)$, $l = 1, \ldots, k$. Предположим, что форма $((v, u))$ удовлетворяет неравенству

$$|((v, u))| \leqslant K \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)}, \quad v, u \in W_2^{(k)}(G), \tag{35.58}$$

из определения 32.2 и условиям (35.52), (35.53).

Прежде всего выпишем следующее неравенство, доказательство которого можно найти, например, в [32]:

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant \gamma \left[\|u\|^2_{L_2(G)} + \sum_{|i|=k} \int_G (D^i u)^2\,dx \right], \tag{35.59}$$

где G — область с липшицевой границей, а $\gamma > 0$ — постоянная, независимая от функций $u(x)$ из пространства $W_2^{(k)}(G)$.

Теперь для элементов пространства $W_2^{(k)}(G)$ введем новое скалярное произведение

$$(v, u)_{W_2^{(k)}(G)} = \int_G vu\,dx + \sum_{|i|=k} \int_G D^i v D^i u\,dx. \tag{35.60}$$

Это скалярное произведение отличается от скалярного произведения в пространстве $W_2^{(k)}(G)$ тем, что в нем присутствуют производные только наивысшего, т. е. k-го, порядка. Справедливость аксиом (6.3)—(6.6) для этого скалярного произведения очевидна. Пространство, элементы которого являются элементами пространства $W_2^{(k)}(G)$ и в котором метрика порождается скалярным произведением (35.60), обозначим через $\overline{W}_2^{(k)}(G)$. В частности, для нормы функции $u(x)$ в пространстве $\overline{W}_2^{(k)}(G)$ мы получаем формулу

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(G)} = \|u\|^2_{L_2(G)} + \sum_{|i|=k} \int_G (D^i u)^2\,dx, \tag{35.61}$$

и, таким образом, неравенство (35.59) можно записать в более краткой форме

$$\|u\|^2_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant \gamma \|u\|^2_{W_2^{(k)}(G)}, \quad u \in W_2^{(k)}(G). \tag{35.62}$$

Из определения нормы в пространстве $W_2^{(k)}(G)$ очевидным образом следует, что

$$\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \geqslant \|u\|_{\overline{W}_2^{(k)}(G)}. \tag{35.63}$$

Из последнего неравенства и неравенства (35.62) вытекает эквивалентность норм $\|u\|_{W_2^{(k)}(G)}$ и $\|u\|_{\overline{W}_2^{(k)}(G)}$ (с. 401). Произвольная последовательность $\{v_n\}$, $v_n \in W_2^{(k)}(G)$, сходится или расходится одновременно в обоих пространствах. Этот же факт справедлив и для фундаментальности последовательностей. Значит, полнота пространства $\overline{W}_2^{(k)}(G)$ следует из полноты пространства $W_2^{(k)}(G)$.

Обозначим через P_{k-1} (см. с. 428) линеал полиномов, имеющих степень не выше $k-1$. Поскольку в пространстве $W_2^{(k)}(G)$ функции, равные почти всюду в G, считаются тождественными, то полиномами будут считаться и те функции, которые в G отличаются от полиномов на множестве меры нуль. Введем на линеале P_{k-1} метрику пространства $\overline{W}_2^{(k)}(G)$. Полученное пространство обозначим вновь через P_{k-1}. В частности, если $k=1$, мы получаем пространство P_0, определенное на с. 421. Как и в случае пространства P_0, легко доказать [1]), что P_{k-1} — полное пространство и при $k>1$; таким образом, оно является линейным подпространством в $\overline{W}_2^{(k)}(G)$. В пространстве $\overline{W}_2^{(k)}(G)$ рассмотрим линейное подпространство $\overline{Q}$ функций, ортогональных в метрике пространства $\overline{W}_2^{(k)}(G)$ к подпространству P_{k-1}. Если $p \in P_{k-1}$, то очевидно, что $D^i p = 0$ для $|i| = k$. Из этого факта и (35.60) вытекает, что

$$(p, v)_{\overline{W}_2^{(k)}(G)} = 0 \Leftrightarrow \int_G pv\,dx = 0 \tag{35.64}$$

для любого элемента $v \in \overline{W}_2^{(k)}(G)$. Таким образом, $v \in \overline{W}_2^{(k)}(G)$ принадлежит подпространству $\overline{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_G pv\,dx = 0 \text{ для любого } p \in P_{k-1}, \tag{35.65}$$

т. е. если этот элемент ортогонален к P_{k-1} в $L_2(G)$.

Перейдем теперь к вопросу о разрешимости задачи (35.55), (35.56). Поскольку здесь целый ряд вопросов аналогичен тем, которые были подробно рассмотрены перед теоремой 35.1, мы будем кратки.

Прежде всего из первого соотношения (35.52) следует, что если слабое решение задачи (35.55), (35.56) существует, то будет выполнено условие

$$\int_G pf\,dx + \varkappa(p, h) = 0 \quad \text{для любого } p \in P_{k-1}. \tag{35.66}$$

Тогда из второго соотношения (35.52) следует, что если рассматриваемая задача имеет слабое решение $u(x)$, то тогда любая

[1]) Линеал P_{k-1} имеет конечную размерность.

функция $u(x)+p(x)$, где $p\in P_{k-1}$, также будет слабым решением данной задачи.

Пусть условие (35.66), необходимое для существования слабого решения рассматриваемой задачи, выполнено. Докажем его достаточность. Таким же способом, каким мы перешли от задачи (35.3), (35.4) к задаче (35.20), (35.21), мы приходим к заключению, что для доказательства существования решения достаточно рассмотреть задачу нахождения функции $u(x)$, для которой выполняются условия

$$u\in\overline{Q} \tag{35.67}$$

и

$$((v, u))=\int\limits_G vf\,dx+\varkappa(v, h) \text{ для всех } v\in\overline{Q}. \tag{35.68}$$

(Достаточно учесть, что элементами пространств $W_2^{(k)}(G)$ и $\overline{W}_2^{(k)}(G)$ являются одни и те же функции и что каждая функция $v\in\overline{W}_2^{(k)}(G)$ представляется единственным образом в виде суммы $v=v_1+v_2$, где $v_1\in P_{k-1}$, $v_2\in\overline{Q}$, см. с. 423.) Наша ближайшая цель — доказательство $\overline{Q}$-эллиптичности формы $((v, u))$. Установив это, можно перенести почти буквально результаты гл. 33 и 34 на рассматриваемый случай, как это было сделано при обсуждении задачи (35.20), (35.21).

Для доказательства $\overline{Q}$-эллиптичности формы $((v, u))$ достаточно показать, что существует постоянная $\delta>0$, такая, что для любой функции $v\in\overline{Q}$

$$\sum_{|i|=k}\int\limits_G (D^iv)^2\,dx\geqslant\delta\|v\|^2_{\overline{Q}}, \tag{35.69}$$

откуда в силу (35.53) получаем

$$((v, v))\geqslant\beta\delta\|v\|^2_{\overline{Q}}, \tag{35.70}$$

что и доказывает $\overline{Q}$-эллиптичность формы $((v, u))$.

Чтобы доказать (35.69), напомним сначала неравенство (30.8), согласно которому существует постоянная $k_4>0$, такая что для любой функции $v\in\overline{W}_2^{(k)}(G)$

$$\|v\|^2_{W_2^{(k)}(G)}\leqslant k_4\left[\sum_{|i|=k}\int\limits_G (D^iv)^2\,dx+\sum_{|i|<k}\left(\int\limits_G D^iv\,dx\right)^2\right]. \tag{35.71}$$

А в силу (35.63) отсюда следует, что

$$\|v\|^2_{\overline{W}_2^{(k)}(G)}\leqslant k_4\left[\sum_{|i|=k}\int\limits_G (D^iv)^2\,dx+\sum_{|i|<k}\left(\int\limits_G D^iv\,dx\right)^2\right],\quad v\in\overline{W}_2^{(k)}(G). \tag{35.72}$$

Выберем произвольный элемент $v\in\overline{Q}$ и рассмотрим класс функций вида $v(x)+p(x)$, где $p\in P_{k-1}$. Поскольку $v(x)$ фиксирована,

то возможно найти (единственный) полином $p_1 \in P_{k-1}$, такой что

$$\int_G D^i (v + p_1)\, dx = 0, \tag{35.73}$$

для $|i| < k$ [1]). Для функции $v(x) + p_1(x)$ из (35.72) следует, что

$$\|v + p_1\|^2_{\overline{W}_2^{(k)}(G)} \leqslant k_4 \sum_{|i|=k} \int_G [D^i (v + p_1)]^2\, dx = k_4 \sum_{|i|=k} \int_G (D^i v)^2\, dx, \tag{35.74}$$

так как $D^i p_1 = 0$ для $|i| = k$. Но функции v, p_1 ортогональны в $\overline{W}_2^{(k)}(G)$, и поэтому

$$\begin{aligned}
\|v + p_1\|^2_{\overline{W}_2^{(k)}(G)} &= \int_G (v + p_1)^2\, dx + \sum_{|i|=k} \int_G [D^i (v + p_1)]^2\, dx = \\
&= \int_G v^2\, dx + 2 \int_G v p_1\, dx + \int_G p_1^2\, dx + \sum_{|i|=k} \int_G (D^i v)^2\, dx = \\
&= \int_G v^2\, dx + \sum_{|i|=k} \int_G (D^i v)^2\, dx + \int_G p_1^2\, dx = \|v\|^2_{\overline{W}_2^{(k)}(G)} + \\
&+ \int_G p_1^2\, dx,
\end{aligned} \tag{35.75}$$

а отсюда, согласно (35.70), получаем

$$\|v\|^2_Q \leqslant k_4 \sum_{|i|=k} \int_G (D^i v)^2\, dx. \tag{35.76}$$

Но это искомое неравенство вида (35.69), где $\delta = 1/k_4$. Отсюда, согласно (35.70),

$$((v, v)) \geqslant \bar{\alpha} \|v\|^2_Q, \tag{35.77}$$

где $\bar{\alpha} = \beta/k_4$. Поскольку функция $v \in \overline{Q}$ выбирается произвольно, (35.77) должно выполняться для каждой $v \in \overline{Q}$. Этим доказывается $\overline{Q}$-эллиптичность формы $((v, u))$.

Как уже упоминалось выше, $\overline{Q}$-эллиптичность влечет за собой целый ряд следствий. Мы не собираемся здесь останавливаться на них подробно, поскольку подобный анализ уже предшествовал формулировке теоремы 35.1, и суммируем их в приведенной теореме. Однако мы хотим добавить следующее короткое замечание.

Обозначим через Q пространство, элементы которого являются элементами пространства $\overline{Q}$ (т. е. множество всех функций

[1]) По условию, согласно которому (35.73) выполняется для каждого i, $|i| = k-1$, коэффициенты членов порядка $k-1$ полинома p_1 определяются единственным образом; найдя их и полагая, что (35.73) выполняется для каждого i, $|i| = k-2$, мы однозначным образом определяем коэффициенты членов порядка $k-2$ и т. д.

$v \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющих условию $\int_G pv\,dx = 0$ для каждого $p \in P_{k-1}$), но с метрикой пространства $W_2^{(k)}(G)$ (т. е. не с метрикой пространства $\overline{W}_2^{(k)}(G)$). Поскольку, как мы видели, метрики в пространствах $W_2^{(k)}(G)$ и $\overline{W}_2^{(k)}(G)$ и соответственно в пространствах $\overline{Q}$ и Q эквивалентны[1]) и поскольку $\overline{Q}$ — полное пространство, Q также является полным пространством, а следовательно, подпространством пространства $W_2^{(k)}(G)$. Если соотношение

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \tag{35.78}$$

выполняется в пространстве $\overline{Q}$, то оно будет выполняться и в пространстве Q, и наоборот. Если неравенство (35.76) выполняется для функций $u(x)$ из одного из этих двух пространств, то оно также выполняется (вообще говоря, с другой постоянной) для функций из второго пространства и т. д. Учитывая сказанное, в следующей теореме мы формулируем некоторые результаты непосредственно для пространства Q, хотя они были доказаны, а следовательно, и должны быть сформулированы для пространства $\overline{Q}$.

Теорема 35.2. *Рассмотрим задачу нахождения функции* $u(x)$, *такой что*

$$u \in W_2^{(k)}(G), \tag{35.79}$$

и

$$((v,\ u)) = \int_G vf\,dx + \varkappa(v,\ h) \text{ для каждой функции } v \in W_2^{(k)}(G), \tag{35.80}$$

где

$$\varkappa(v,\ h) = \int_\Gamma \sum_{j=1}^{k} h_j \frac{\partial^{j-1} v}{\partial \nu^{j-1}}\, h_j \frac{\partial^{j-1} v}{\partial \nu^{j-1}}\, dS,$$

$$h_l(S) \in L_2(\Gamma), \quad l = 1,\ \ldots,\ k. \tag{35.81}$$

Пусть форма $((v,\ u))$, *см. определение 32.2, помимо условия*

$$|((v,\ u))| \leqslant K \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \text{ для любых } v,\ u \in W_2^{(k)}(G), \tag{35.82}$$

удовлетворяет также условиям

(а) $$((v+p,\ u)) = ((v,\ u)),\ ((v,\ u+p)) = ((v,\ u)) \tag{35.83}$$

для любых $v,\ u \in W_2^{(k)}(G)$ и $p \in P_{k-1}$ (P_{k-1} — линеал всех полиномов в G, имеющих порядок не более чем $k-1$) и

б) $$((v,\ v)) \geqslant \beta \sum_{|l|=k} \int_G (D^l v)^2 \text{ для любой } v \in W_0^{(k)}(G), \tag{35.84}$$

[1]) Отсюда и из (35.77) следует, помимо всего прочего, что форма $((v,\ u))$ не только $\overline{Q}$-, но и Q-эллиптична.

где K и β — положительные постоянные, не зависящие от функций v и u из пространства $W_2^{(k)}(G)$. Для существования слабого решения задачи (35.79), (35.80) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_G pf\,dx + \varkappa(p, h) = 0 \text{ для любого } p \in P_{k-1},$$

или в подробной записи

$$\int_G pf\,dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{k} h_j \frac{\partial^{j-1} p}{\partial \nu^{j-1}}\,dS = 0 \text{ для каждого } p \in P_{k-1}. \quad (35.85)$$

Если это условие удовлетворяется, то существует бесконечное множество слабых решений рассматриваемой задачи, и для каждой пары $u_1(x)$, $u_2(x)$ этих решений (возможно, за исключением множества меры нуль в G) $u_2 - u_1 = p$, где $p \in P_{k-1}$.

Обозначим через Q подпространство тех функций $v(x)$ из пространства $W_2^{(k)}(G)$, которые ортогональны в $L_2(G)$ к P_{k-1}, т. е. для которых

$$\int pv\,dx = 0 \quad \text{для любого } p \in P_{k-1}. \quad (35.86)$$

Тогда условие $u \in Q$ единственным образом определяет слабое решение задачи (35.79), (35.80), и имеет место оценка

$$\|u\|_Q = \|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant C\left[\|f\|_{L_2(G)} + \sum_{l=1}^{k-1} \|h_l\|_{L_2(\Gamma)}\right], \quad (35.87)$$

где C не зависит ни от f, ни от h_l. Если к тому же форма $((v, u))$ симметрична в Q, т. е. если $((v, u)) = ((u, v))$ для всех $v \in Q$, $u \in Q$, то это решение минимизирует в Q функционал

$$Fv = ((v, v)) - 2\int_G vf\,dx - 2\varkappa(v, h) =$$

$$= ((v, v)) - 2\left[\int_G vf\,dx + \int_\Gamma \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^{l-1} v}{\partial \nu^{l-1}}\,dS\right]. \quad (35.88)$$

Если в Q отыскивается приближенное решение вида $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i$, где $\{v_i\}$ — базис пространства Q, метод Ритца дает систему уравнений

$$\begin{aligned}
&((v_1, v_1))\,c_{n1} + ((v_1, v_2))\,c_{n2} + \ldots + ((v_1, v_n))\,c_{nn} = \int_G v_1 f\,dx + \varkappa(v_1, h),\\
&((v_2, v_1))\,c_{n1} + ((v_2, v_2))\,c_{n2} + \ldots + ((v_2, v_n))\,c_{nn} = \int_G v_2 f\,dx + \varkappa(v_2, g),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&((v_n, v_1))\,c_{n1} + ((v_n, v_2))\,c_{n2} + \ldots + ((v_n, v_n))\,c_{nn} = \int_G v_n f\,dx + \varkappa(v_n, h),
\end{aligned} \quad (35.89)$$

где

$$\varkappa(v_i, h)=\int_\Gamma \sum_{l=1}^{k} h_l \frac{\partial^{l-1} v_i}{\partial \nu^{l-1}}\, dS, \quad i=1, \ldots, n,$$

и мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ в } Q \tag{35.90}$$

(а следовательно, и в $W_2^{(k)}(G)$).

Замечание 35.2. Базисные функции $v_i(x)$ принадлежат Q, и поэтому они обязательно удовлетворяют условию (35.86),

$$\int_G p v_i\, dx = 0, \quad i=1, 2, \ldots, \text{ для любого } p \in P_{k-1};$$

они не должны удовлетворять рассмотренным неустойчивым граничным условиям (см. аналогичное замечание 35.1).

Замечание 35.3. Ясно, что теорема 35.1 является частным случаем теоремы 35.2.

Подобно теоремам 34.1 и 34.2, теорема 35.2 дает возможность ответить на вопрос относительно разрешимости широкого класса задач, а также выбрать путь отыскания приближенного решения этих задач.

Пример 35.1. Рассмотрим задачу (35.46), (35.47), т. е. в слабой формулировке задачу отыскания функции $u(x)=u(x_1, x_2)$, такой что

$$u \in W_2^{(2)}(G) \tag{35.91}$$

и что

$$((v, u))=\int_G vf\, dx+\int_\Gamma vh_1\, ds+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\, ds \text{ для каждой } v \in W_2^{(2)}(G), \tag{35.92}$$

где $h_1 \in L_2(\Gamma)$, $h_2 \in L_2(\Gamma)$ и

$$((v, u))=\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+2(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\,\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right] dx, \quad 0\leqslant\sigma<1. \tag{35.93}$$

В этом случае $N=2$, $k=2$, следовательно, $P_{k-1}=P_1$ является линеалом полиномов вида

$$p=a+bx_1+cx_2. \tag{35.94}$$

Элементами Q являются те функции из $W_2^{(2)}(G)$, которые удовлетворяют условию

$$\int_G p v\, dx=0 \text{ для каждого } p \in P, \tag{35.95}$$

эквивалентному, что очевидно, условиям

$$\int_G v\,dx=0,\quad \int_G x_1 v\,dx=0,\quad \int_G x_2 v\,dx=0. \tag{35.96}$$

Форма (35.93) удовлетворяет условиям (35.82) (поскольку она имеет ограниченные измеримые коэффициенты) и (35.83) (вторые производные функции p тождественно равны нулю); согласно (35.54), она также удовлетворяет условию (35.84), поскольку

$$((v,\ v))\geqslant(1-\sigma)\sum_{|i|=2}\int_G (D^i v)^2\,dx. \tag{35.97}$$

Далее, ясно, что эта форма симметрична относительно переменных v и u.

Итак, согласно теореме 35.2, для существования слабого решения необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись условия (на основании (35.96) мы берем в (35.85) последовательно $p=1$, $p=x_1$, $p=x_2$)

$$\int_G f\,dx+\int_\Gamma h_1\,ds=0,$$

$$\int_G x_1 f\,dx+\int_\Gamma x_1 h_1\,ds+\int_\Gamma \frac{\partial x_1}{\partial \nu}h_2\,ds=0,$$

$$\int_G x_2 f\,dx+\int_\Gamma x_2 h_1\,ds+\int_\Gamma \frac{\partial x_2}{\partial \nu}h_2\,ds=0,$$

или, в более подробной записи,

$$\iint_G f(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma h_1(s)\,ds=0,$$

$$\iint_G x_1 f(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma x_1(s)\,h_1(s)\,ds+\int_\Gamma \nu_1(s)\,h_2(s)\,ds=0,$$

$$\iint_G x_2 f(x_1,\ x_2)\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma x_2(s)\,h_1(s)\,ds+\int_\Gamma \nu_2(s)\,h_2(s)\,ds=0,$$

где $\nu_1(s)$ и $\nu_2(s)$ — направляющие косинусы внешней нормали[1]). Если указанные условия удовлетворяются, то рассматриваемая задача имеет бесконечное множество слабых решений. Поскольку

[1]) Если, например, область G является прямоугольником, стороны которого параллельны осям координат x_1, x_2, причем a_1 и a_3 — «нижняя» и «верхняя» границы соответственно, а a_2 и a_4 — соответственно «правая» и «левая» боковые стороны, то

$$\begin{aligned}
&\nu_1=0, && \nu_2=-1 && \text{на } a_1,\\
&\nu_1=1, && \nu_2=0 && \text{на } a_2,\\
&\nu_1=0, && \nu_2=1 && \text{на } a_3,\\
&\nu_1=-1, && \nu_2=0 && \text{на } a_4.
\end{aligned}$$

$u \in Q$, т. е. согласно условиям

$$\iint_G u(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0, \quad \iint_G x_1 u(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

$$\iint_G x_2 u(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

слабое решение $u(x) = u(x_1, x_2)$ определяется однозначно; все остальные решения имеют вид $u(x) + p(x)$, где $p(x)$ — функция вида (35.94). Функция $u(x)$ непрерывно зависит от правой части дифференциального уравнения и от граничных условий

$$\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} \leqslant c\left(\|f\|_{L_2(G)} + \|h_1\|_{L_2(\Gamma)} + \|h_2\|_{L_2(\Gamma)}\right)$$

и минимизирует в Q функционал

$$Fv = ((v, v)) - 2\int_G vf\,dx - 2\int_\Gamma vh_1\,ds - 2\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\,ds =$$

$$= \iint_G \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] dx_1\,dx_2 =$$

$$= -2\iint_G vf\,dx_1\,dx_2 - 2\int_\Gamma vh_1\,ds - 2\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} h_2\,ds.$$

Минимизируя этот функционал методом Ритца, мы получаем систему (35.89), если же $\{v_i(x)\}$ — базис в Q, мы имеем $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ в Q. Выбирая базис, необходимо учитывать, что функции $v_i(x)$ принадлежат пространству Q, т. е. что они удовлетворяют условиям

$$\iint_G v_i(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0, \quad \iint_G x_1 v_i(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0,$$

$$\iint_G x_2 v_i(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 = 0.$$

Замечание 35.4. Существует целый ряд иных способов добиться Q-эллиптичности. Например, вместо условий (35.96) можно наложить условия $v(P_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, где точки P_i принадлежат области G и не лежат на прямой линии. С этими вопросами читатель может ознакомиться в работе [19].

Глава 36

Резюме и некоторые замечания к главам 28—35

В четвертой части нашей книги, т. е. в главах 28—35, мы значительно обобщили полученные ранее результаты, касающиеся дифференциальных уравнений с граничными условиями. Попытаемся подвести итоги указанных глав.

В гл. 28 мы определили интеграл Лебега сначала для функций от одной переменной. Мы отправлялись от понятия меры Лебега, которое обобщает понятие длины, и от понятий множества и функции, измеримых по Лебегу. Определение интеграла по Лебегу было дано сначала для ограниченных функций (на ограниченном множестве, что вполне достаточно для преследуемых в настоящей книге целей). Это определение интеграла основано, так же как и риманово определение, на построении интегральных сумм. Однако в отличие от риманова определения в данном случае на «мелкие части» делится область изменения, а не область определения функции.

Затем определение интеграла Лебега было распространено на случай неограниченных функций и на случай функций от многих переменных. Были кратко рассмотрены основные свойства интеграла Лебега. В частности, была отмечена полнота пространства L_2 квадратично интегрируемых (на рассматриваемом множестве) функций. Это пространство играет весьма важную роль в функциональном анализе и его приложениях.

В конце гл. 28 мы определили область с липшицевой границей, «поверхностный интеграл» по границе Г, а также пространство $L_2(\Gamma)$.

В гл. 29 рассматривалось построение пространства $W_2^{(k)}(G)$. Это пространство является пополнением линейного пространства $S_2^{(k)}$ (его элементы суть функции, непрерывные вместе с их производными всех порядков в $\overline{G}$) по метрике, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^{(k)}(G)} = \int_G \sum_{|i|, |j| \leqslant k} D^i u D^i v \, dx. \tag{36.1}$$

Пространство $W_2^{(k)}(G)$, таким образом, состоит из функций, принадлежащих $C^{(\infty)}(\overline{G})$, и, кроме того, из функций, служащих пределами некоторых последовательностей функций из $C^{(\infty)}(\overline{G})$ в метрике, порождаемой приведенным выше скалярным произведением (36.1). Функции из $W_2^{(k)}(G)$ имеют так называемые обобщенные (частные) производные до порядка k включительно, квадратично интегрируемые в G. В частности, каждая функция, непрерывная в $\overline{G}$ вместе с ее частными производными вплоть до порядка $k-1$ включительно и с кусочно-непрерывными в $\overline{G}$ частными производными порядка k, принадлежит $W_2^{(k)}(G)$.

В гл. 30 было введено понятие следов функций из $W_2^{(1)}(G)$, определенных с помощью ограниченного (и поэтому непрерывного) отображения этого пространства в $L_2(\Gamma)$. Каждой функции $u(x) \in W_2^{(1)}(G)$ ставится в соответствие некоторая функция $u(S) \in L_2(\Gamma)$, называемая ее следом; если $u(x) \in C^{(\infty)}(\bar{G})$, то ее след $u(S)$ определяется значениями этой функции на границе Γ в обычном смысле. Если $u \in W_2^{(k)}(G)$, $k > 1$,— положительное целое число, то не только сама эта функция имеет след на Γ, но и все ее частные производные вплоть до порядка $k-1$ включительно. На основании этого свойства можно определить производную (или производные высших порядков) по направлению внешней нормали на границе Γ. Пространство $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$ было определено как пополнение множества $C_0^{(\infty)}(G)$ функций с компактным носителем в G по метрике, основанной на скалярном произведении (36.1), т. е. по метрике пространства $W_2^{(k)}(G)$. Функции из этого пространства характеризуются соотношениями $D^i u(S) = 0$ на Γ (в смысле теории следов) для $\|i\| \leqslant k-1$. Далее были изложены обобщения — или, скорее, некоторые модификации — неравенств Фридрихса и Пуанкаре.

В гл. 31 исследовались уравнения вида

$$Au = f, \tag{36.2}$$

где

$$A = \sum_{\|i\|,\,\|j\| \leqslant k} D^i (a_{ij} D^j) \tag{36.3}$$

— дифференциальный оператор порядка 2. Там были определены эллиптические и равномерно эллиптические в рассматриваемой области операторы. Отмечалась возможность различных «разложений» дифференциальных операторов, и была введена форма

$$A(v, u) = \sum_{\|i\|,\,\|j\| \leqslant k} \int_G a_{ij} D^i v D^j u \, dx, \tag{36.4}$$

соответствующая данному оператору. Под слабым решением уравнения (36.2) в области G мы понимаем тогда любую функцию $u \in W_2^{(k)}(G)$, такую что равенство

$$A(\varphi, u) \equiv \sum_{\|i\|,\,\|j\| \leqslant k} \int_G a_{ij} D^i \varphi D^j u \, dx =$$

$$= \int_G f\varphi \, dx \text{ выполняется для всех } \varphi \in C_0^{\infty}(G) \tag{36.5}$$

(тем самым для каждой функции с компактным носителем в G). Было показано, что если коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора A достаточно гладкие в области G и функция $f(x)$ непрерывна в G, то слабое решение $u(x)$ уравнения (36.2) при условии, что оно само достаточно гладкое в G, является классическим решением этого уравнения в G.

В гл. 32 мы после обширного введения дали определение слабого решения дифференциального уравнения с граничными условиями. Прежде всего были четко разграничены устойчивые и неустойчивые граничные условия, определены операторы $B_1, \ldots$ $\ldots, B_\mu$ (или $B_{p1}, \ldots, B_{p\mu_p}$, если на разных частях границы заданы граничные условия разных типов), характеризующие устойчивые граничные условия, и введено пространство V как подпространство функций из $W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющих (в смысле теории следов) соответствующим однородным устойчивым граничным условиям. Чтобы включить в формулировку решения задачи с граничными условиями Ньютона, мы ввели граничную форму $a(v, u)$ и определили билинейную форму

$$((v, u)) = A(v, u) + a(v, u), \tag{36.6}$$

свойства которой затем были проанализированы. Лишь после этого мы приступили к определению слабого решения краевой задачи (определение 32.2) как функции $u \in W_2^{(k)}(G)$, характеризуемой, во-первых, условием

$$u - w \in V, \tag{36.7}$$

где $w \in W_2^{(k)}(G)$ — это функция, удовлетворяющая (в смысле теории следов) заданным устойчивым граничным условиям, а во-вторых, интегральным тождеством

$$((v, u)) = (v, f) + \varkappa(v, h) \text{ для всех } v \in V. \tag{36.8}$$

Здесь

$$\varkappa(v, h) = \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}\, dS, \tag{36.9}$$

а $h_{pl}(S) \in L_2(\Gamma)$ суть заданные на границе функции, описывающие неустойчивые граничные условия.

В гл. 33 представлена теорема Лакса—Мильграма, и с ее помощью доказано существование и единственность слабого решения из определения 32.2 в предположении, что форма $((v, u))$ V-эллиптическая, т. е. что существует $\alpha > 0$, такое что

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \text{ для всех } v \in V. \tag{36.10}$$

Слабое решение непрерывно зависит от правой части рассматриваемого уравнения и от граничных условий (неравенство (32.22)).

В гл. 34 на основании полученных результатов было показано, что если, кроме того, форма $((v, u))$ симметрична, то в случае однородных граничных условий слабое решение минимизирует в пространстве V функционал

$$Fv = ((v, v)) - 2(v, f). \tag{36.11}$$

Для его минимизации часто используется метод Ритца. Применяя его, мы ищем минимум функционала (36.11) не в V, а в его

n-мерном подпространстве, образованном первыми n элементами $v_1, \ldots, v_n$ подходящего базиса. Поэтому мы ищем приближенное решение вида

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i. \tag{36.12}$$

Метод Ритца тогда приводит к решению системы (34.11) для неизвестных постоянных c_{ni}.

Другие методы, обсуждаемые в части II (метод Галёркина, наименьших квадратов и т. д.), также можно применять для нахождения приближенного решения.

В случае неоднородных граничных условий можно искать слабое решение в виде

$$u = w + z, \tag{36.13}$$

где $w(x)$ — это функция из (36.7), описывающая неоднородные граничные условия, так что $v \in V$. Функция $z(x)$ минимизирует в пространстве V функционал

$$Gv = ((v, v)) - 2(v, f) - 2\varkappa(v, h) + 2((v, w)). \tag{36.14}$$

Снова можно искать приближение $z_n(x)$ для $z(x)$ в виде

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i \tag{36.15}$$

и применять для нахождения постоянных c_{ni} один из методов, рассмотренных в части II. Например, используя метод Ритца, получаем систему (34.54), частным случаем которой является (34.11).

Можно сразу искать приближенное решение в виде

$$u = w + \sum_{i=1}^{n} C_{ni} v_i \tag{36.16}$$

и минимизировать на множестве функций вида

$$w + \sum_{i=1}^{n} b_{ni} v_i \tag{36.17}$$

функционал (34.72) или (34.73). Используя метод Ритца для отыскания неизвестных постоянных в (36.16), получаем ту же систему (34.54), что и в случае процедуры (36.13), (36.15). Далее, мы подробно разобрали (см., в частности, замечание 34.3), почему, применяя метод Ритца, необязательно добиваться выполнения неустойчивых граничных условий при выборе базиса, хотя и полезно делать это.

В гл. 35 были решены задачи, в которых форма $((v, u))$ не была V-эллиптической. Примером такой задачи для уравнения второго порядка служила задача Неймана для уравнения Лапласа.

Мы ограничились случаем, когда $V = W_2^{(k)}(G)$ и форма $((v, u))$ удовлетворяла условиям

$$((v+p, u)) = ((v, u)), \quad ((v, u+p)) = ((v, u)) \text{ для всех } p \in P_{k-1} \quad (36.18)$$

и для любой пары функции $v \in V$, $u \in V$;

$$((v, v)) \geqslant \beta \int_G \sum_{|i|=k} (D^i v)^2 \, dx, \ \beta > 0, \text{ для всех } v \in V, \quad (36.19)$$

где P_{k-1} — это линеал полиномов с наибольшей степенью $k-1$. Обозначив через Q подпространство пространства $W_2^{(k)}(G)$, состоящее из функций, ортогональных в $L_2(G)$ функциям линеала P_{k-1}, мы показали, что форма $((v, u))$ на этом подпространстве Q-эллиптична; можно провести рассуждения, совершенно аналогичные представленным в гл. 34. Если выполнены условия, необходимые для разрешимости рассматриваемой задачи, то слабое решение существует и единственно в Q. Если, кроме того, форма $((v, u))$ симметрична, то можно снова применять стандартные вариационные методы. Здесь, конечно, нужно позаботиться, чтобы элементы базиса принадлежали пространству Q. Например, в случае задачи Неймана для уравнения Пуассона необходимо, чтобы эти элементы были ортогональны в $L_2(G)$ линеалу постоянных, т. е. удовлетворяли условию

$$\int_G v \, dx = 0. \quad (36.20)$$

Подводя итоги, мы можем заключить, что в этой части книги была развита весьма общая теория эллиптических дифференциальных уравнений с граничными условиями, охватывающая как теоретические (существование, единственность), так и практические (методы построения приближенного решения) вопросы. По сравнению с исходной теорией, основанной на теореме о минимуме квадратичного функционала, мы существенно ослабили требования, налагаемые на коэффициенты рассматриваемого дифференциального оператора, и предложили удобную формулировку задач с неоднородными граничными условиями. Последние были источником многочисленных трудностей в исходной теории (особенно для случая задачи Неймана), основанной на теореме о минимуме квадратичного функционала и поэтому опирающейся на понятия линеалов функций и операций с ними.

Если данная задача симметрична, коэффициенты рассматриваемого оператора достаточно гладкие и граничные условия однородны, то обе теории приводят в сущности к одинаковым результатам. Мы покажем это на простом примере уравнения Пуассона с однородным граничным условием

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \quad (36.21)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (36.22)$$

Читатель может легко распространить приведенные ниже рассуждения на более общие случаи.

Вспомним, что в «слабой» постановке задача (36.21), (36.22) выражается условиями

$$u \in V, \tag{36.23}$$

$$((v, u)) = ((v, f)) \text{ для всех } v \in V, \tag{36.24}$$

где

$$V = \mathring{W}_2^{(1)}(G), \tag{36.25}$$

$$((v, u)) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx. \tag{36.26}$$

Как мы знаем, форма $((v, u))$ является V-эллиптической, т. е.

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v\|_V^2, \quad \alpha > 0, \quad \text{для всех } v \in V. \tag{36.27}$$

Рассматривая задачу (36.21), (36.22) с точки зрения теории, основанной на теореме о минимуме квадратичного функционала, мы начнем с линеала M функций, непрерывных в $\bar{G}$ вместе с их частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющих условию (36.22). В обозначениях гл. 10 имеем

$$(v, u)_A = (u, v)_A = (Au, v) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx. \tag{36.28}$$

Применяя неравенство Фридрихса (18.1), мы показали в гл. 22, что

$$(v, v)_A = (Av, v) = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant C^2 \|v\|^2, \quad C > 0, \ v \in M. \tag{36.29}$$

Однако из (36.29) следует, что

$$(v, v)_A = \frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx + \frac{C^2}{2} \|v\|^2 \geqslant \beta \|v\|^2_{W_2^{(1)}(G)}, \quad v \in M, \tag{36.30}$$

где $\beta = \min(1/2, C^2/2) > 0$.

В то же время, естественно, имеем

$$(v, v)_A = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \|v\|^2_{W_2^{(1)}(G)}. \tag{36.31}$$

Соотношение (36.28) определяет скалярное произведение на M. Метрическое пространство, элементами которого служат функции из M, а метрика порождается формулой (36.28), обозначается,

как и в гл. 10, символом S_A. Мы утверждаем, что соответствующее пространство H_A, построенное в гл. 10 и являющееся пополнением пространства S_A, образовано теми же элементами, что и пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$.

Действительно, как мы знаем, пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$ является пополнением линеала $C_0^{(\infty)}(G)$ функций с компактным носителем в G по метрике пространства $W_2^{(1)}(G)$. Из (36.30) и (36.31) следует, что метрики пространств S_A и $W_2^{(1)}(G)$ эквивалентны. Поэтому из пространства S_A мы получаем то же самое пространство H_A (точнее, те же элементы этого пространства) его пополнением как по метрике S_A, так и по метрике $W_2^{(1)}(G)$. Поскольку, далее, для любого элемента $u \in C_0^{(\infty)}(G)$ с очевидностью выполняется $u \in M$, то $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G) \subset H_A$ [1]). Но в то же время $H_A \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$. Действительно, пространство H_A не может быть шире, чем пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$, что мы легко докажем.

Каждый элемент из S_A принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$, поскольку он удовлетворяет условию $u = 0$ на Γ (даже в классическом смысле). Пусть $u \in H_A$, но $u \notin \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$. Мы покажем, что это допущение ведет к противоречию. Согласно определению пространства H_A, $u(x)$ есть предел (в метрике S_A, и поэтому в силу эквивалентности двух метрик также и в метрике пространства $W_2^{(1)}(G)$) последовательности $\{u_n\}$ элементов S_A, фундаментальной в H_A (а следовательно, и в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$). В то же время предполагалось, что $u \notin \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$. Но это невозможно, поскольку $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$ — полное пространство. Итак, $H_A \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$.

Следовательно, пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$ и H_A состоят из одних и тех же элементов. (Кроме того, (36.30) означает $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G)$-эллиптичность формы $(v, u)_A$, расширенной на все H_A.) Из (36.24) и из (11.7) тогда следует, что слабое решение задачи (36.21), (36.22) совпадает с обобщенным решением этой задачи, определенным в гл. 11.

Итак, в рассматриваемом смысле обе изложенные теории приводят к одним и тем же функциональным пространствам (точнее, к пространствам, образованным из одних и тех же элементов и с эквивалентными метриками) и к одной и той же концепции решения. Как отмечалось, весь ход рассуждений легко приспособить к более общим случаям, постольку поскольку речь идет о задачах, рассмотренных в третьей части настоящей книги (т. е. в предположении симметрии, достаточной гладкости коэффициентов, однородности граничных условий), являющихся частными случаями задач из четвертой ее части.

Хотя мы можем быть удовлетворенными результатами этой части книги, поскольку они существенно более общие, чем

[1]) Это включение следует понимать в смысле теории множеств.

в предыдущей, и здесь была развита в определенном смысле законченная теория, но остаются некоторые не вполне решенные вопросы. Первый из них таков: при каких предположениях можно утверждать, что полученное слабое решение является классическим, или «классическим» в некотором смысле? Второй вопрос касается функции w, входящей в (36.7). В определении 32.2 существование этой функции предполагалось, и устойчивые граничные условия тогда описывались или задавались посредством этой функции. В приложениях граничные условия задаются на границе Г, и необходимо построить такую функцию или хотя бы доказать существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$ с требуемыми свойствами.

Ответы на оба этих вопроса отложены до гл. 46. В следующей части книги мы изложим теорию задач на собственные значения, в которой будут существенно использованы полученные здесь приемы и результаты.

Часть V

Задача на собственные значения

Глава 37

Введение

Уже в гл. 20 на с. 230 мы ввели понятие задачи на собственные значения, хотя лишь в краткой форме. В соответствии с замыслом этой книги, базирующейся на теории гильбертова пространства, можно предложить следующую предварительную формулировку такой задачи [1]). Пусть A — линейный оператор в гильбертовом пространстве H (определенный, возможно, лишь на некотором линеале этого пространства.) Число λ называется *собственным значением этого оператора*, если существует ненулевой элемент $u \in H$, такой что в H выполняется равенство

$$Au - \lambda u = 0. \tag{37.1}$$

Элемент u называется *собственным элементом оператора* A (а также *собственным элементом уравнения* (37.1)), соответствующим рассматриваемому собственному значению λ.

Поскольку оператор A линейный, каждый элемент вида ku, где k не равно нулю, также является собственным элементом A, соответствующим тому же самому λ.

Если u — функция, мы часто говорим о *собственной функции*, а не о собственном элементе данного оператора. Многие физические, инженерные, а также чисто математические задачи приводят к задаче определения собственных значений данного оператора. Предложим по крайней мере следующие два простых примера.

Пример 37.1. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения в области G $(0 < x < l,\ t > 0)$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ в } G, \quad a > 0, \tag{37.2}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \tag{37.3}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{37.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{37.5}$$

[1]) См., однако, гл. 39.

Уравнение (37.2) совместно с условиями (37.3)—(37.5) описывает *колебания однородной совершенно гибкой струны* длины l с закрепленными концами (условия (37.3)), отклоненной в момент $t=0$ в положение, описываемое функцией $\varphi(x)$ (условие (37.4)) и имеющей нулевую начальную скорость (условие (37.5)).

Решаю эту задачу *методом Фурье*, мы получаем решение в виде

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t), \tag{37.6}$$

где каждая функция $u_n(x, t)$ имеет вид

$$u_n(x, t)=X_n(x)\cdot T_n(t), \tag{37.7}$$

удовлетворяет уравнению (37.2) и условиям (37.3) и (37.5) и не равна тождественно нулю в G. Постоянные a_n пока что не определены (чтобы их определить, будет применено условие (37.4)).

Подставляя (37.7) в (37.2), получим (более подробно см., например, [33], гл. 26)

$$a^2\frac{T_n''}{T_n}=\frac{X_n''}{X_n} \text{ в } G. \tag{37.8}$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от x (она является функцией только переменной t) и так как уравнение (37.2)—а значит, и (37.8)—должно выполняться всюду в G, т. е. для всех $x\in(0, l)$ и всех $t>0$, то и правая часть этого уравнения также не зависит от x. Следовательно, она равна некоторой постоянной для всех $x\in(0, l)$. Обозначая эту постоянную через $-\lambda_n$, получим равенство $X_n''/X_n=-\lambda_n$. Таким образом, для функции $X_n(x)$ мы получим следующее дифференциальное уравнение:

$$-X_n''-\lambda_n X_n=0, \quad 0<x<l. \tag{37.9}$$

Каждая из функций $u_n(x, t)$ должна удовлетворять условиям (37.3) для любого $t>0$ и не должна тождественно равняться нулю. Так, равенство $T_n(t)\equiv 0$ не может иметь места. Тогда обязательно

$$X_n(0)=0, \quad X_n(l)=0. \tag{37.10}$$

Следовательно, метод Фурье решения задачи (37.2)—(37.5) приводит в первую очередь к задаче определения ненулевых решений для (37.9), (37.10). А это задача на собственные значения для оператора $-u''$, рассмотренного на линеале (достаточно гладких) функций, удовлетворяющих условиям (37.10).

Как уже показано в гл. 20 (с. 232), собственные значения этого оператора составляют счетное множество

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n=1, 2, \ldots; \tag{37.11}$$

при этом соответствующие собственные функции представляются в виде

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{37.12}$$

где A_n — произвольные ненулевые постоянные.

После нахождения собственных функций (37.12) дальнейший ход решения задачи (37.2)—(37.5) несложен. См. упоминавшуюся книгу [33].

Пример 37.2. Похожим способом (см. гл. 20) мы выясняем, что собственные значения оператора Δ на линеале функций $u \in C^{(2)}(\bar{G})$ (где G — прямоугольник $0 < x < a$, $0 < y < b$), удовлетворяющих граничному условию $u = 0$ на границе Γ, представляются в виде

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Соответствующие собственные функции — это

$$u_{m,n}(x, y) = A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

где $A_{m,n}$ — произвольные ненулевые постоянные. Эти функции удовлетворяют также уравнению $-\Delta u_{m,n} - \lambda_{m,n} u_{m,n} = 0$ в рассматриваемом прямоугольнике и условию $u_{m,n} = 0$ на его границе.

Эта задача на собственные значения возникает, например, при применении метода Фурье для решения задачи о *колебаниях мембраны*, закрепленной по периметру рассматриваемого прямоугольника и отклоненной в момент $t = 0$ в определенное положение, описываемое функцией $\varphi(x, y)$. Последняя играет здесь роль, аналогичную той, которую функция $\varphi(x)$ играет для задачи (37.2)—(37.5).

Чтобы получить хотя бы приблизительное представление о том, чего следует ожидать в случаях, которые нас больше всего интересуют, отметим два типичных свойства собственных элементов для некоторых специальных операторов, прежде чем мы продолжим систематическое исследование задачи на собственные значения.

Теорема 37.1. *Собственные значения положительного оператора положительны.*

Доказательство просто. Пусть A — положительный оператор (на некотором линеале M гильбертова пространства H). Пусть λ — одно из собственных значений и $v \neq 0$ — соответствующий собственный элемент, для которого в H выполняется соотношение $Av - \lambda v = 0$. Скалярное умножение этого равенства справа на элемент v дает $(Av, v) - \lambda(v, v) = 0$. Поскольку числа (Av, v) и (v, v) положительны, λ также положительно.

Замечание 37.1. Из теоремы 37.1 следует, в частности, что все собственные значения положительно определенного оператора положительны.

Теорема 37.2. *Пусть* λ_1 *и* λ_2 *— два различных собственных значения симметричного оператора* A. *Тогда соответствующие собственные элементы* v_1, v_2 *ортогональны как в смысле скалярного произведения, так и в смысле «энергетического» произведения* (Au, v), *т. е. выполняются соотношения*

$$(v_1, v_2) = 0, \tag{37.13}$$
$$(Av_1, v_2) = 0. \tag{37.14}$$

Доказательство опять просто. По предположению верны соотношения

$$Av_1 - \lambda_1 v_1 = 0, \tag{37.15}$$
$$Av_2 - \lambda_2 v_2 = 0. \tag{37.16}$$

Умножим скалярно справа равенство (37.15) на элемент v_2 и вычтем полученное равенство из равенства (37.16), умноженного скалярно справа на элемент v_1. Получим

$$(Av_2, v_1) - (Av_1, v_2) = \lambda_2 (v_2, v_1) - \lambda_1 (v_1, v_2). \tag{37.17}$$

Однако, согласно предположению, A — симметричный оператор, поэтому $(Av_1, v_2) = (Av_2, v_1)$ и, кроме того, $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. Значит, из (37.17) следует, что $(\lambda_2 - \lambda_1)(v_1, v_2) = 0$,
откуда

$$(v_1, v_2) = 0, \tag{37.18}$$

так как по предположению $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Далее, умножив справа (37.15) на v_2 и применяя уже доказанное соотношение (37.18), получим $(Av_1, v_2) = 0$, т. е. второе утверждение теоремы 37.2.

Замечание 37.2. Разумеется, оба утверждения теоремы 37.2 справедливы как для положительных, так и для положительно определенных операторов, поскольку и те и другие симметричны по определению.

Заметим, что обе предыдущие теоремы носят условный характер, поскольку они доказываются исходя из предположения о существовании собственных значений и собственных функций рассматриваемых операторов. Для доказательства основной теоремы существования, представленной в гл. 39, мы используем некоторые результаты теории вполне непрерывных операторов.

Глава 38

Вполне непрерывные операторы

Теория вполне непрерывных операторов возникла в результате интенсивного изучения интегральных уравнений Фредгольма и превратилась в одну из «классических» тем функционального анализа. Как указывает само название, вполне непрерывные операторы являются непрерывными и, таким образом, в отличие от дифференциальных операторов, ограниченными операторами. А поскольку это так, читателя может удивить то, что мы собираемся здесь заняться этими операторами, если именно дифференциальные операторы интересуют нас больше всего. Ответ ясен: исключительно простые свойства вполне непрерывных операторов позволили развить законченную теорию, которая в сущности полностью решает вопросы, касающиеся задач на собственные значения этих операторов. В гл. 39 (с. 473) будет показано, что в значительной степени эти результаты можно распространить на случай дифференциальных операторов, для которых непосредственное исследование подобных проблем было бы довольно сложным.

В нашей книге мы не собираемся развивать теорию вполне непрерывных операторов систематически; это тема для учебника по функциональному анализу. Мы ограничимся формулировкой лишь нескольких — в основном наиболее существенных — результатов этой теории в гильбертовом пространстве, которые непосредственно необходимы для следующих глав. Однако в некоторых местах, где это окажется уместным, мы наметим основные шаги доказательств приведенных утверждений, чтобы читатель приобрел по крайней мере некоторое представление об основных идеях этой теории.

Прежде чем определить вполне непрерывные операторы, введем следующие понятия:

Определение 38.1. Множество M метрического пространства P с метрикой ρ_P называется *ограниченным* в этом пространстве, если существуют элемент $a \in P$ и число $R > 0$, такие что для любого элемента $x \in M$ справедливо соотношение

$$\rho_P(x, a) < R.$$

(Геометрическая интерпретация: если каждый элемент $x \in M$ лежит в «сфере» с центром в «точке» a достаточно большого радиуса R.)

Определение 38.2. Множество M' метрического пространства P называется *предкомпактным* в этом пространстве, если из каждой последовательности $\{u_n\}$ элементов этого пространства [1]) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в P.

[1]) Стационарные последовательности (т. е. последовательности, состоящие из одинаковых элементов) также допустимы. В этом смысле каждое множество $M' \subset P$, имеющее конечное число элементов, предкомпактно (даже компактно) в P.

Если, кроме того, предельные элементы всех этих последовательностей принадлежат M', то M' называется *компактным в пространстве* P.

Пример 38.1. Каждое ограниченное множество точек в N-мерном евклидовом пространстве E_N (со стандартным определением расстояния между двумя точками) является предкомпактным в E_N. Так, по теореме Больцано—Коши из каждой бесконечной последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в E_N. Если, кроме того, рассматриваемое множество замкнуто (так что все его точки накопления ему принадлежат), то это множество компактно в E_N.

Пример 38.2. Пусть $P=C(0, 1)$—пространство непрерывных вещественных функций на интервале $[0, 1]$, в котором норма функции $x(t)$ определена формулой

$$\|x\|_C=\rho_C(x, 0)=\max_{t\in[0, 1]}|x(t)|, \tag{38.1}$$

а расстояние между двумя функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, принадлежащими этому пространству,—формулой

$$\rho_C(x_1, x_2)=\max_{t\in[0, 1]}|x_1(t)-x_2(t)|; \tag{38.2}$$

сходимость последовательности функций $x_n(t)$, принадлежащих этому пространству, означает равномерную сходимость этой последовательности на интервале $[0, 1]$.

Мы утверждаем, что любое множество $M'\subset C(0, 1)$ функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на $[0, 1]$[1]), компактно в $C(0, 1)$. Прежде всего множество M' предкомпактно в $C(0, 1)$, так как—в согласии с теоремой Арцела (см., например, [33])—из каждой последовательности равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций на интервале $[0, 1]$ можно выбрать последовательность функций, равномерно сходящуюся на $[0, 1]$ и, таким образом, сходящуюся в пространстве $C(0, 1)$. В то же время предельная функция этих подпоследовательностей не только непрерывна на $[0, 1]$ (как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций), так что она принадлежит $C(0, 1)$, но—как можно легко установить переходом к пределу—она также принадлежит M' (т. е. обладает свойствами (i) и (ii) из предыдущего примечания). Следовательно, множество M' компактно в пространстве $C(0, 1)$.

---

[1]) Следовательно, множество M' состоит из функций $C(0, 1)$ со следующими свойствами:

(i) существует постоянная $K>0$, не зависящая от функции из множества M', такая что импликация $x\in M'\Rightarrow|x(t)|\leqslant K$ выполняется для всех $t\in[0, 1]$;

(ii) для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, не зависящее от функций из M', такое что $x\in M'$, t_1, $t_2\in[0, 1]$, $|t_1-t_2|<\delta\Rightarrow|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$.

Определение 38.3. Линейный оператор T, определенный в линейном метрическом пространстве P и отображающий пространство P в линейное метрическое пространство P_1, называется *вполне непрерывным оператором (из P в P_1)*, если он каждое множество M, ограниченное в P, отображает в множество M', предкомпактное в P_1 [1]).

Если $P_1=P$, *мы имеем вполне непрерывный оператор в пространстве* P.

Пример 38.3. В пространстве $C(0, 1)$ рассмотрим оператор T, определяемый соотношением

$$y=Tx=\int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds, \tag{38.4}$$

где $K(t, s)$ — функция, непрерывная на квадрате $\bar{Q}(0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant s\leqslant 1)$. Из непрерывности функции $K(t, s)$ следует, что соотношение (38.4) каждой функции $x(t)$, непрерывной на интервале $[0, 1]$, ставит в соответствие функцию $y(t)$, также непрерывную на интервале $[0, 1]$. Таким образом, оператор T отображает пространство $C(0, 1)$ в пространство $C(0, 1)$. Следовательно, в этом случае $P=P_1=C(0, 1)$.

Очевидно, что оператор T линейный. Докажем, что он вполне непрерывен в пространстве $C(0, 1)$.

Рассмотрим произвольное множество $M\subset C(0, 1)$, ограниченное в пространстве $C(0, 1)$; тогда существует постоянная $K_1>0$, такая что

$$\|x\|_C=\max_{t\in[0, 1]}|x(t)|\leqslant K_1 \text{ для любого } x\in M. \tag{38.5}$$

Обозначим через M' образ множества M, т. е. множество всех функций $y(t)$, для которых

$$y=Tx, \quad x\in M. \tag{38.6}$$

Мы должны доказать, что это множество предкомпактно в пространстве $C(0, 1)$, так что из каждой последовательности

$$\{y_n(t)\}, \quad y_n\in M', \tag{38.7}$$

можно выбрать последовательность, сходящуюся в $C(0, 1)$, т. е. подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[0, 1]$. По теореме Арцела (ср. пример 38.2) достаточно доказать, что функции из M' равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[0, 1]$.

Равномерная ограниченность. Функция $K(t, s)$ непрерывна на квадрате $\bar{Q}$ и потому ограничена: $|K(t, s)|\leqslant K_2$. Для функций

---

[1]) Итак: M ограничено в P, T — вполне непрерывный оператор из P в P_1, $M'=TM \Rightarrow M'$ предкомпактно в P_1. (38.3)

из множества M справедливо неравенство (38.5), таким сбразом, $|x(t)| \leqslant K_1$ для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, для любой функции $y \in M'$ справедливы неравенства

$$|y(t)| \leqslant \left| \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant \int_0^1 |K(t, s)|\, |x(s)|\, ds \leqslant K_1 K_2. \quad (38.8)$$

Равностепенная непрерывность. Функция $K(t, s)$ непрерывна на замкнутом квадрате $\overline{Q}$. Поэтому она равномерно непрерывна на $\overline{Q}$: для любого $\eta > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любого $s \in [0, 1]$ и для любой пары точек t_1, t_2 из $[0, 1]$, для которой выполняется неравенство

$$|t_1 - t_2| < \delta, \quad (38.9)$$

выполняется и неравенство

$$|K(t_1, s) - K(t_2, s)| < \eta. \quad (38.10)$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\eta = \varepsilon / K_1 > 0$ и определим δ [см. (38.9)] так, чтобы выполнялось (38.10). Для каждой функции $y \in M'$ и для каждой пары точек t_1, $t_2 \in [0, 1]$, для которых справедливо неравенство (38.9), получаем

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left| \int_0^1 [K(t_1, s) - K(t_2, s)]\, x(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |K(t_1, s) - K(t_2, s)|\, |x(s)|\, ds < \eta K_1 = \varepsilon.$$

Это доказывает равностепенную непрерывность функций $y \in M'$ на интервале $[0, 1]$.

Таким образом, доказана вполне непрерывность оператора T в пространстве $C(0, 1)$.

В дальнейшем в этой главе мы рассмотрим *вполне непрерывные операторы в некотором гильбертовом пространстве* H, которые отображают H в то же самое пространство H. Скалярное произведение элементов u, v в этом пространстве и норма элемента u будут обозначаться обычными символами (u, v) и $\|u\|$ соответственно. Мы приведем краткий обзор наиболее важных результатов и, как отмечалось выше, дадим набросок доказательств тем, где это целесообразно.

Теорема 38.1. *Вполне непрерывный оператор T ограничен в H* [1]).

Вспомним (см. определение 8.13), что оператор T называется ограниченным в пространстве H, если существует число K, такое

[1]) И потому непрерывен в H, см. теорему 8.3.

что для любого $u \in H$ справедливо неравенство

$$\|Tu\| \leqslant K\|u\|. \tag{38.11}$$

Наименьшее из чисел K, для которых выполняется условие (38.11), называется нормой оператора T (см. с. 91) и обозначается через $\|T\|$.

Определение 38.4. Пусть в гильбертовом пространстве H заданы последовательность операторов T_n и оператор T. Скажем, что последовательность операторов T_n сходится по норме к оператору T, если

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0. \tag{38.12}$$

Согласно определению нормы оператора, (38.12) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти n_0, такое что для всех $n > n_0$ и для любого $u \in H$ справедливо неравенство $\|Tu - T_n u\| \leqslant \varepsilon \|u\|$.

Теорема 38.2. (см., например, [39]). *Пусть последовательность $\{T_n\}$ вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве H сходится по норме к некоторому оператору T. Тогда T — вполне непрерывный оператор в H.*

Замечание 38.1. Мы рекомендуем читателю доказать на основе предыдущей теоремы свойство вполне непрерывности оператора (38.4) в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, 1)$ в предположении, что $K \in L_{\bar{2}}(Q)$, т. е. в предположении, что функция $K(t, s)$ квадратично интегрируема на квадрате Q. [*Указание.* Докажите прежде всего, что оператор (38.4) вполне непрерывен в $L_{\bar{2}}(0, 1)$ если $K(t, s)$ — непрерывная функция на $\bar{Q}$. (Здесь следует обратить внимание на тот факт, что имеется разница в определениях сходимости в $L_{\bar{2}}(0, 1)$ и $C(0,1)$). Далее, множество функций, непрерывных на $\bar{Q}$, плотно в $L_{\bar{2}}(Q)$. Если $K(t, s) \in L_{\bar{2}}(Q)$, то она является пределом в $L_{\bar{2}}(Q)$ некоторой последовательности $\{K_n(t, s)\}$ функций, непрерывных в $\bar{Q}$. Каждый из соответствующих операторов T_n вполне непрерывен в $L_{\bar{2}}(0, 1)$. Тогда достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0,$$

где T есть оператор, соответствующий функции $K(t, s)$ согласно (38.4).]

Определение 38.5. Пусть H — гильбертово пространство. Скажем, что оператор T *конечномерен* (или *вырожден*) в H, если существуют положительное целое n, элементы $z_1, \ldots, z_n$ пространства H и n линейно независимых элементов $v_1, \ldots, v_n$ того же пространства, такие что для любого элемента $u \in H$ выполняется

соотношение

$$Tu = \sum_{j=1}^{n} (u,\ z_j)\, v_j. \tag{38.13}$$

Пример 38.4. Рассмотрим оператор из 38.3 в гильбертовом пространстве $L_2(0,\ 1)$ и допустим, что

$$K(t,\ s) = t + s. \tag{38.14}$$

Мы утверждаем, что этот оператор имеет размерность 2 в пространстве $L_2(0,\ 1)$ и что достаточно положить

$$z_1(t) \equiv 1, \quad z_2(t) \equiv 1, \quad v_1(t) \equiv t, \quad v_2(t) \equiv 1 \text{ на } [0,\ 1]. \tag{38.15}$$

В самом деле, простым вычислением для произвольного $u \in L_2(0,\ 1)$ получим

$$Tu = \int_0^1 (t + s)\, u(s)\, ds = t \int_0^1 u(s)\, ds + \int_0^1 su(s)\, ds, \tag{38.16}$$

откуда, сравнив с (38.13), приходим к (38.15).

В дальнейшем в этой главе условимся считать (не оговаривая это каждый раз), что рассматриваемое гильбертово пространство H сепарабельно (так что в этом пространстве существует не более чем счетный базис).

Теорема 38.3 (см., например, [39]). *Пусть T — вполне непрерывный оператор в H, а ε — произвольное положительное число. Тогда существуют операторы T_1 и T_2, такие что*

$$T = T_1 + T_2, \tag{38.17}$$

где T_1 — конечномерный оператор, а для нормы оператора T_2 выполняется условие

$$\|T_2\| < \varepsilon. \tag{38.18}$$

Замечание 38.2. Можно показать, что справедливо также и обратное утверждение: если для любого $\varepsilon > 0$ можно представить оператор T в гильбертовом пространстве H в форме (38.17), где T_1 и T_2 обладают свойствами, указанными в теореме 38.3, то T — вполне непрерывный оператор в H.

Конечно, отсюда прямо следует, что любой конечномерный оператор в H вполне непрерывен в H.

Теперь рассмотрим линейный ограниченный (однако не обязательно вполне непрерывный) оператор T в гильбертовом пространстве H. Тогда для любого фиксированного $v \in H$ функционал $fu = (Tu,\ v)$ ограничен и, согласно теореме Рисса 8.8, существует элемент $v^* \in H$, однозначно определяемый элементом v, такой что для всех $u \in H$ выполняется равенство $(Tu,\ v) = (u,\ v^*)$. Оператор T^*, определяемый соотношением $v^* = T^*v$, где $v \in H$, или,

что эквивалентно, справедливостью условия $(Tu, v) = (u, T^*v)$ для всех пар элементов u, v из пространства H, называется *сопряженным оператором оператора* T (ср. со с. 234).

Если $T^* = T$ (это означает, что $(Tu, v) = (u, Tv)$ для всех $u, v \in H$), то оператор T называется *самосопряженным в* H.

Теорема 38.4. *Если* T *— вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве* H, *то сопряженный оператор* T^* *также вполне непрерывен.*

Пусть T (а значит, и T^*) — вполне непрерывный оператор в (вещественном) гильбертовом пространстве H. Рассмотрим уравнения

$$Tu - \mu u = v, \tag{38.19}$$

$$T^*x - \mu x = y \tag{38.20}$$

и соответствующие однородные уравнения

$$Tu - \mu u = 0, \tag{38.21}$$

$$T^*x - \mu x = 0, \tag{38.22}$$

где μ — вещественный параметр. Разрешимость предыдущих уравнений в зависимости от значения параметра μ обсуждается в следующей теореме.

Теорема 38.5. *Пусть* $\mu \neq 0$. *Тогда уравнение (38.19) однозначно разрешимо для произвольного* $v \in H$, *если и только если уравнение* (38.21) *имеет лишь нулевое решение. То же утверждение справедливо для уравнений* (38.20) *и* (38.22). *Если уравнение* (38.21) *имеет ненулевое решение* (так что соответствующее μ является собственным значением оператора T), *то уравнение* (38.22) *также имеет ненулевое решение* (так что то же самое μ является и собственным значением оператора T^*), *и наоборот. В этом случае уравнение* (38.19) *разрешимо (но не однозначно) только для тех* $v \in H$, *которые ортогональны в* H *всем решениям* (т. е. всем собственным элементам) *уравнения* (38.22), *соответствующим рассматриваемому собственному значению* μ. *Аналогичное утверждение справедливо для уравнений* (38.20), (38.21). *Числа линейно независимых собственных элементов* (соответствующих рассматриваемому значению параметра μ) *уравнений* (38.21) *и* (38.22) *совпадают.*

Замечание 38.3. Таким образом, имеются лишь две следующие возможности, зависящие от значения параметра μ ($\mu \neq 0$): *либо уравнение* (38.19) *однозначно разрешимо для любого* $v \in H$, *либо соответствующее однородное уравнение* (38.21) *имеет ненулевое решение.* То же справедливо для уравнений (38.20) и (38.22). Этот результат, известный из теории интегральных уравнений, называется *альтернативой Фредгольма.*

Доказательство теоремы 38.5 основывается на теореме 38.3. Оператор T вполне непрерывен, что может быть записано в форме (38.17). То же справедливо для оператора T^*. Если $\mu \neq 0$, то подходящая процедура (см., например, [39]) сводит уравнения (38.19), (38.20) к уравнениям, включающим операторы конечной размерности n, и эти уравнения сводятся затем дальнейшей процедурой (по существу сравнением коэффициентов при линейно независимых элементах) к системам n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Для этих уравнений утверждения, подобные утверждениям теоремы 38.5, известны из линейной алгебры. Коэффициенты этих уравнений содержат параметр μ. В зависимости от значения этого параметра определитель системы либо отличен от нуля, либо равен нулю. Тогда либо система однозначно разрешима для любой правой части, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение и т. д.

Замечание 38.4. Если, кроме того, оператор T самосопряженный[1]), т. е. $T^* = T$, то задачи (38.19) и (38.20), так же как и задачи (38.21) и (38.22), совпадают. Если тогда уравнение (38.21) имеет ненулевое решение, уравнение (38.19) разрешимо в точности для таких значений правой части $v \in H$, которые ортогональны в H всем собственным элементам уравнения (38.21), соответствующим рассматриваемому собственному значению μ.

Проиллюстрируем предыдущее утверждение следующим простым примером.

Пример 38.5. В гильбертовом пространстве $H = L_2(0, 1)$ рассмотрим уравнение

$$Tu - \mu u = v, \tag{38.23}$$

где T — оператор из примера 38.4,

$$Tu = \int_0^1 (t + s)\, u(s)\, ds, \tag{38.24}$$

откуда получим уравнение

$$\int_0^1 (t + s)\, u(s)\, ds - \mu u(t) = v(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{38.25}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\int_0^1 (t + s)\, u(s)\, ds - \mu u(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{38.26}$$

---

[1]) То есть если равенство $(Tu, v) = (u, Tv)$ справедливо для любой пары элементов u, v из H. Заметим, что в нашем случае, когда оператор T определен на всем пространстве H, понятия самосопряженного и симметричного оператора совпадают. С другой стороны, не любой симметричный оператор обязан быть самосопряженным, ср. с. 234.

Оператор (38.24) вполне непрерывен в $L_2(0, 1)$ (вследствие замечания 38.1, либо замечания 38.2 и примера 38.4). Кроме того, этот оператор, очевидно, самосопряженный, поскольку для любых двух функций $u(t)$, $v(t)$ из $L_2(0, 1)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}(Tu, v) &= \left(\int_0^1 (t+s)\, u(s)\, ds,\ v(t)\right) = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (t+s)\, u(s)\, v(t)\, ds\, dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (s+t)\, u(t)\, v(s)\, dt\, ds = \\ &= \left(u(t), \int_0^1 (t+s)\, v(s)\, ds\right) = (u, Tv). \end{aligned} \tag{38.27}$$

Далее,

$$\int_0^1 (t+s)\, u(s)\, ds = t\int_0^1 u(s)\, ds + \int_0^1 su(s)\, ds = At + B, \tag{38.28}$$

где числа A и B определяются интегралами

$$\int_0^1 u(s)\, ds, \quad \int_0^1 su(s)\, ds.$$

Если $\mu \neq 0$, из (38.28) следует, что решение $u(t)$ уравнения (38.25) обязательно имеет вид

$$u(t) = -\frac{v(t)}{\mu} + at + b, \tag{38.29}$$

где a, b — (пока неизвестные) постоянные. Подставляя (38.29) в (38.25), получим

$$-\frac{1}{\mu}\int_0^1 (t+s)\, v(s)\, ds + \frac{a}{2}t + bt + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + v(t) - \mu\, at - \mu\, b = v(t),$$

или, иначе,

$$\left[-\frac{1}{\mu}\int_0^1 v(s)\, ds + \frac{a}{2} + b - \mu\, a\right]t + \left[-\frac{1}{\mu}\int_0^1 sv(s)\, ds + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \mu b\right] = 0 \tag{38.30}$$

для всех $t \in [0, 1]$. Однако (38.30) удовлетворяется для всех $t \in [0, 1]$, если и только если оба выражения в квадратных скобках равны нулю. Отсюда получаем следующую систему уравнений

для неизвестных постоянных a, b:

$$\left(\frac{1}{2}-\mu\right)a+b=\frac{1}{\mu}\int_0^1 v(s)\,ds,\quad \frac{1}{3}a+\left(\frac{1}{2}-\mu\right)b=\frac{1}{\mu}\int_0^1 sv(s)\,ds \quad (38.31)$$

с определителем $D=\mu^2-\mu-1/12$.

Если $\mu\neq 0$ таково, что $D\neq 0$, то система (38.31) однозначно разрешима. Подставляя ее решение в (38.29), мы получаем единственное решение уравнения (38.25). В частности, уравнение (38.26) в этом случае имеет лишь нулевое решение.

Для $\mu_1=1/2+\sqrt{3}/3\approx 1.07$, $\mu_2=1/2-\sqrt{3}/3\approx -0.07$ получаем, что $D=0$. Подставляя значение μ_1 или μ_2 в (38.31), получаем систему

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}a+b=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}}\int_0^1 v(s)\,ds,\quad \frac{1}{3}a-\frac{\sqrt{3}}{3}b=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}}\int_0^1 sv(s)\,ds \quad (38.32)$$

или систему

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a+b=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}}\int_0^1 v(s)\,ds,\quad \frac{1}{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}b=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}}\int_0^1 sv(s)\,ds \quad (38.33)$$

соответственно.

Если $v(s)\equiv 0$ (уравнение (38.26)), то система (38.32) имеет решение $a=\sqrt{3}\,b$, где b произвольно. Таким образом, из (38.29) следует, что функции

$$b[\sqrt{3}\,t+1],\quad b\neq 0, \quad (38.34)$$

являются собственными функциями оператора T, соответствующими собственному значению μ_1. Аналогично функции

$$b[\sqrt{3}\,t-1],\quad b\neq 0, \quad (38.35)$$

являются собственными функциями оператора T, соответствующими собственному значению μ_2.

В соответствии с теоремой 38.5 (так как T — самосопряженный оператор) уравнение (35.25) разрешимо для $\mu=\mu_1$ или $\mu=\mu_2$ тогда и только тогда, когда функция $v(t)$ ортогональна в $L_2(0, 1)$

функциям (38.34) или (38.35) соответственно. Если, например, в случае $\mu=\mu_2$

$$v(t)=t^{[\sqrt{3}-1]/2}, \tag{38.36}$$

то

$$\int_0^1 [\sqrt{3}\,t-1]\,t^{[\sqrt{3}-1]/2}\,dt=0,$$

так что функция (38.36) ортогональна функции (38.35). Система (38.33) в этом случае принимает вид

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a+b=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}}[\sqrt{3}-1],\quad \frac{1}{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}b=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}; \tag{38.37}$$

второе уравнение получено из первого умножением на постоянную, поэтому система (38.37) и вместе с ней уравнение (38.25) имеют бесконечное множество решений. Если функция $v(t)$ такова (например, ненулевая постоянная на интервале $[0, 1]$), что рассматриваемое условие ортогональности не выполняется, то в системе, получающейся в этом случае из системы (38.33), левая и правая части второго уравнения равны соответствующим частям первого уравнения, умноженным на разные постоянные; поэтому ни эта система, ни уравнение (38.25) не разрешимы.

Отметим, далее, следующий факт. Для любого $b\neq 0$ функции (38.34) и (38.35), очевидно, линейно независимы в $L_2(0, 1)$. Таким образом, их линейные комбинации составляют в $L_2(0, 1)$ двумерное подпространство; обозначим это подпространство через K. Легко охарактеризовать функции из его ортогонального дополнения L: подпространство можно также получить с помощью двух линейно независимых функций $f(t)=t$ и $g(t)\equiv 1$. Функция $u\in L_2(0, 1)$ ортогональна подпространству K тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 u(s)\,ds=0,\quad \int_0^1 su(s)\,ds=0. \tag{38.38}$$

До сих пор мы рассматривали случай $\mu\neq 0$. Если в уравнении (38.25) положить $\mu=0$, то получим

$$\int_0^1 (t+s)\,u(s)\,ds=v(t) \tag{38.39}$$

и соответствующее однородное уравнение будет

$$\int_0^1 (t+s)u(s)\,ds = 0, \tag{38.40}$$

т. е. уравнение

$$t\int_0^1 u(s)\,ds + \int_0^1 su(s)\,ds = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при всех $t \in [0, 1]$, если и только если соотношения

$$\int_0^1 u(s)\,ds = 0, \quad \int_0^1 su(s)\,ds = 0 \tag{38.41}$$

или если и только если функция $u(t)$ ортогональна в $L_2(0, 1)$ подпространству K, или, что то же самое, если она принадлежит его ортогональному дополнению L. Число $\mu = 0$ является, таким образом, собственным значением оператора T; все функции из L являются собственными функциями, соответствующими этому собственному значению [1]).

Относительно уравнения (38.39) можно сказать следующее: из его вида вытекает [ср. аналогичное рассмотрение в (38.28)], что для выполнимости этого уравнения необходимо, чтобы функция $v(t)$ представлялась в виде

$$v(t) = at + b, \tag{38.42}$$

т. е. принадлежала K, или, что эквивалентно, была ортогональна подпространству L. Это, конечно, согласуется с теоремой 38.5. Очевидно, что условие (38.42) является также и достаточным. Пусть в (38.42) заданы числа a и b. В уравнении (38.39), т. е. в нашем случае в уравнении

$$t\int_0^1 u(s)\,ds + \int_0^1 su(s)\,ds = at + b,$$

тогда достаточно определить u таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_0^1 u(s)\,ds = a, \quad \int_0^1 su(s)\,ds = b.$$

Этого можно достичь многими способами.

---

[1]) Тот факт, что собственные функции, соответствующие собственному значению $\mu = 0$, составляют в точности подпространство, являющееся ортогональным дополнением в $L_2(0, 1)$ к подпространству K (собственных функций, соответствующих ненулевым собственным значениям), не случаен, как будет показано ниже.

Из самой теоремы 38.5 совсем не следует, имеет ли вообще вполне непрерывный оператор собственные значения. В самом деле, можно построить вполне непрерывные операторы, которые не имеют собственных значений. Однако если, кроме того, оператор является самосопряженным, то собственные значения существуют (см., например, [39]).

Теорема 38.6. *Пусть T — вполне непрерывный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, отличный от нулевого оператора. Тогда существует по крайней мере одно собственное значение этого оператора, отличное от нуля. Если $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, то существует лишь конечное число собственных значений, для которых $|\mu| > \varepsilon$* [1]. *Для любого собственного значения $\mu \neq 0$ существует лишь конечное число линейно независимых собственных элементов. Ортонормированная* [2] *система собственных элементов рассматриваемого оператора T полна в H.*

Замечание 38.5. Обрисуем вкратце доказательство предыдущей теоремы (детально доказательство см., например, в [10] и [39]), которое в то же время указывает метод получения собственных значений оператора T.

Обозначим через L подпространство пространства H, элементами которого являются нулевой элемент пространства и все собственные элементы, соответствующие собственному значению $\mu = 0$, т. е. ненулевые элементы $u \in H$, которые удовлетворяют уравнению $Tu = 0$. (Если $\mu = 0$ не является собственным значением оператора T, то L содержит лишь нулевой элемент пространства H.) Рассмотрим функционал $Qv = (Tv, v)$ на множестве M всех элементов $v \in H$, которые ортогональны подпространству L и норма которых равна единице, т. е. множество

$$M = \{v;\ v \in H,\ \|v\| = 1,\ v \perp L\}.$$

T — вполне непрерывный оператор, поэтому это ограниченный оператор, и, значит, прежде всего

$$|Qv| = |(Tv, v)| \leqslant \|Tv\|\,\|v\| \leqslant \|T\|\,\|v\|^2 = \|T\|,$$

поскольку $\|v\| = 1$. Далее, так как T — самосопряженный ненулевой оператор в H, несложно показать, что функционал Qv ненулевой. Следовательно, существует элемент $t \in M$, такой что $(Tt, t) \neq 0$. Допустим сначала, что $(Tt, t) > 0$. В этом случае

---

[1]) Отсюда следует, что у собственных значений рассматриваемого оператора возможна лишь одна точка накопления — точка 0.

[2]) Поскольку речь идет о полноте, нас интересует лишь линейная независимость элементов. Они могут быть ортонормированы известным способом, см. с. 53. См. также замечание 38.6.

положим

$$\mu_1 = \sup_{v \in M} (Tv, v) > 0.$$

Используя подходящим образом построенную последовательность, можно показать, что в M существует такой элемент v_1, на котором функционал Qv принимает максимальное значение

$$(Tv_1, v_1) = \mu_1 = \max_{\substack{v \in H, \| v \| = 1, \\ v \perp L}} (Tv, v), \tag{38.43}$$

и такой, что в то же время μ_1 является собственным значением (а именно, наибольшим) оператора T и v_1 — соответствующий собственный элемент, так что $Tv_1 - \mu_1 v_1 = 0$.

Таким образом, в предположении, что для некоторого элемента $t \in M$ выполняется соотношение $(Tt, t) > 0$, доказывается существование по крайней мере одного собственного значения $\mu_1 \neq 0$.

Этим способом можно и дальше искать собственные значения оператора T. Обозначим через N множество таких элементов из M, которые ортогональны элементу v_1,

$$N = \{v;\ v \in H,\ \| v \| = 1,\ v \perp L,\ v \perp v_1\}.$$

Если неравенство $(Tt, t) > 0$ верно по крайней мере для одного $t \in N$, рассуждениями, подобными предыдущим, можно показать, что существует $v_2 \in N$, такой что

$$(Tv_2, v_2) = \mu_2 = \max_{\substack{v \in H,\ \| v \| = 1, \\ v \perp L,\ v \perp v_1}} (Tv, v), \tag{38.44}$$

в то время как $Tv_2 - \mu_2 v_2 = 0$.

В то же время $v_2 \perp v_1$ и очевидно, что $\mu_1 \geqslant \mu_2$, поскольку максимальное значение функционала Qv не может быть на N больше, чем на M.

Таким способом мы получим все положительные собственные значения оператора T

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots > 0, \tag{38.45}$$

а также соответствующие им нормированные и попарно ортогональные собственные элементы $v_1, v_2, v_3, \ldots$.

Если в M не существует элементов t, таких что $(Tt, t) > 0$, то существует по крайней мере один элемент z, для которого $(Tz, z) < 0$ (поскольку функционал Q является ненулевым на M). Используя процедуру, совершенно аналогичную предыдущей, получим совокупность отрицательных собственных значений оператора T вместе с соответствующими им собственными элементами; естественно, символы sup и max должны быть заменены в соответствующих местах на символы inf и min. Таким образом, существование хотя бы одного ненулевого собственного значения оператора T доказано и в этом случае.

Далее доказывается, что только что построенная невозрастающая последовательность (конечно, в том случае, если она бесконечна) положительных собственных значений, или неубывающая последовательность отрицательных собственных значений, не может иметь предел, отличный от нуля, так что единственной точкой накопления множества собственных значений оператора T может быть точка 0. Следовательно, для фиксированного собственного значения $\mu \neq 0$ может существовать лишь конечное число линейно независимых собственных элементов, поскольку это собственное значение может встретиться в только что построенной последовательности положительных или отрицательных собственных значений только конечное число раз. Скажем кратко, что каждое собственное значение $\mu \neq 0$ имеет *конечный порядок* [1]).

Наконец, предложим идею доказательства полноты ортонормированной системы собственных элементов оператора T. Из соображений простоты допустим, что все ненулевые собственные значения оператора T положительны (это ограничение не существенно). Допустим, далее, что они составляют неубывающую последовательность $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots$ (не исключено, что эта последовательность конечна), и пусть $v_1, v_2, v_3, \ldots$ ортонормированная система соответствующих им собственных элементов. Пусть u — произвольный элемент из H. Можно доказать, что для элемента

$$z = u - \sum_k (u, v_k) v_k \tag{38.46}$$

выполняется равенство $Tz = 0$, так что $z \in L$. Поскольку по предположению пространство H сепарабельно, L также сепарабельно, так что в нем существует (не более чем счетный) ортонормированный базис (состоящий из собственных элементов оператора T, соответствующих собственному значению $\mu = 0$, поскольку L — это подпространство таких элементов). Элемент z может быть представлен в L как сумма соответствующего ряда Фурье. Отсюда, а также из соотношения (38.46) $u = z + \sum_k (u, v_k) v_k$, следует утверждение о полноте ортонормированной системы собственных элементов оператора T.

Замечание 38.6. Для собственного значения $\mu = 0$ может существовать бесконечное число линейно независимых собственных элементов. Это хорошо видно из примера 38.5, где собственные функции, соответствующие собственному значению $\mu = 0$, составляют в $L_2(0, 1)$ подпространство L, ортогональное подпространству K

---

[1]) Более подробно: скажем, что собственное значение имеет *порядок* p (или *кратность* p), если существуют в точности p линейно независимых собственных элементов, соответствующих μ.

конечной размерности 2, так что размерность L бесконечна и, таким образом, L содержит бесконечно много линейно независимых элементов.

Из примера 38.5 также хорошо видно, что если система (ортонормированных) собственных элементов полна в H, то в нее не могут не входить элементы, соответствующие собственному значению $\mu = 0$ (если, конечно, $\mu = 0$ есть собственное значение рассматриваемого оператора).

Замечание 38.7. Пусть теперь H — сепарабельное гильбертово пространство бесконечной размерности [1]). К этому типу пространств относятся в точности те пространства, которые находятся в центре наших интересов, т. е. пространства $L_2(G)$, $\mathbf{L}_2(G)$, $W_2^{(k)}(G)$, их подпространства бесконечной размерности, т. е. различные подпространства V пространств $W_2^{(k)}(G)$, с которыми мы сталкивались при формулировке и рассмотрении слабого решения краевых задач и т. д.

Рассмотрим в H вполне непрерывный и положительный [2]) ненулевой оператор T. По теореме 38.6 этот оператор имеет по крайней мере одно собственное значение μ. Покажем прежде всего, что он имеет бесконечное (более точно счетное) множество собственных значений.

Доказательство просто. Все собственные значения рассматриваемого оператора положительны (ср. теорему 37.1), значит, они отличны от нуля. Таким образом, каждому собственному значению соответствует по теореме 38.6 конечное число линейно независимых собственных элементов. Если бы у оператора T было только конечное число собственных значений, то у этого оператора было бы также только конечное число линейно независимых собственных элементов. Тогда было бы невозможно построить из этих элементов ортонормированную систему, плотную в H, как утверждалось в теореме 38.6, поскольку пространство H является по предположению бесконечномерным.

Так как пространство H по предположению сепарабельно, множество линейно независимых элементов и, следовательно, также число собственных значений оператора T не может быть несчетно.

Предыдущее заключение может быть, конечно, получено непосредственно применением метода, описанного в замечании 38.5. Достаточно принять во внимание, что нуль не является в этом случае собственным значением оператора T, так что пространство L (используются обозначения из замечания 38.5) не содержит ненулевых элементов, и, далее, учесть, что оператор T положи-

---

[1]) Эти пространства характеризуются существованием счетного базиса.

[2]) Наиболее ценны полученные результаты будут для положительно определенных операторов.

тельный, так что всегда существует (в множестве M, в множестве N и т. д.) элемент t, такой что $(Tt,\ t) > 0$ и т. д.

Расположим, как и в замечании 38.5, (положительные) собственные значения оператора T в виде невозрастающей последовательности

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots > 0, \tag{38.47}$$

и пусть $v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots$ — нормированные попарно ортогональные собственные элементы, взаимно однозначно соответствующие этим собственным значениям. Поскольку только точка 0 может быть точкой накопления собственных значений оператора T (см. с. 462) и поскольку в нашем случае существует бесконечное число собственных значений (и, кроме того, (38.47) — неубывающая последовательность), число 0 действительно является их пределом.

Из этих простых рассуждений и конструкции, описанной в замечании 38.5, вытекает следующая теорема, весьма полезная в гл. 39.

Теорема 38.7. *Пусть T — вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор в сепарабельном гильбертовом бесконечномерном пространстве H. Тогда он имеет счетное множество собственных значений, все они положительны и каждому из них соответствует конечное число линейно независимых собственных элементов. Ортонормированная система*

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots \tag{38.48}$$

собственных элементов, соответствующих системе

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots > 0 \tag{38.49}$$

собственных значений в смысле замечания 38.7 [1]), *полна в H. Далее,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0. \tag{38.50}$$

Для первого собственного значения μ_1 справедливо соотношение

$$\mu_1 = \max_{v\in H,\ \|v\|=1} (Tv,\ v) = (Tv_1,\ v_1), \tag{38.51}$$

а для n-го ($n \geqslant 2$) собственного значения имеет место равенство

$$\mu_n = \max_{\substack{v\in H,\ \|v\|=1,\\ (v,\ v_1)=0,\ \ldots,\ (v,\ v_{n-1})=0}} (Tv,\ v) = (Tv_n,\ v_n). \tag{38.52}$$

Замечание 38.8. Из теоремы 38.5 следует далее, что если $0 \neq \mu \neq \mu_k\ (k = 1,\ 2,\ \ldots)$, то уравнение

$$Tu - \mu u = v \tag{38.53}$$

[1]) Таким образом, соответствие между собственными значениями (38.49) и собственными элементами (38.48) взаимно однозначное, см. упомянутое замечание.

однозначно разрешимо для любого $v \in H$. В частности, для $v = 0$ оно имеет лишь нулевое решение. Если μ — собственное значение оператора T, то уравнение (38.53) имеет решение (и не единственное) только для тех $v \in H$, которые ортогональны всем собственным элементам, соответствующим этому собственному значению.

Замечание 38.9. По теореме 38.7 функционал (Tv, v) достигает своего максимального значения на множестве элементов пространства H с единичной нормой. Этот максимум достигается на первом собственном элементе v_1 оператора и равен первому собственному значению μ_1.

Второе собственное значение μ_2 снова является максимумом функционала (Tv, v), однако на этот раз на нормированных элементах пространства H, ортогональных первому собственному элементу. Этот максимум достигается на втором собственном элементе v_2 оператора T [1]). Для определения n-го собственного значения оператора T опять используем функционал (Tv, v) и найдем его максимум на нормированных элементах пространства H, ортогональных первым $n-1$ собственным элементам этого оператора.

Поскольку оператор T линейный, вместо соотношений (38.51) (38.52) можно использовать соотношения

$$\mu_1 = \max_{v \in H,\ v \neq 0} \frac{(Tv, v)}{(v, v)}, \tag{38.54}$$

$$\mu_n = \max_{\substack{v \in H,\ v \neq 0 \\ (v, v_1) = 0, \ldots, (v, v_{n-1}) = 0}} \frac{(Tv, v)}{(v, v)} \tag{38.55}$$

соответственно, где не требуется нормированности элементов v.

Замечание 38.10. Чтобы иметь возможность применить (38.52) или (38.55) для определения n-го ($n \geqslant 2$) собственного значения оператора T, требуется знать первые $n-1$ собственных элементов этого оператора. Обычно предпочтительно из практических (а часто также из теоретических) соображений применить метод, принцип которого формулируется в следующей теореме.

Теорема 38.8. (Минимаксный принцип Куранта.) *Пусть T — вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве H. Пусть n — произвольное положительное целое число, и пусть $u_1, \ldots u_{n-1}$ — произвольная система из $n-1$ линейно независимых элементов в H* [2]). *Положим*

$$\max_{\substack{v \in H,\ v \neq 0 \\ (v, u_1) = 0, \ldots, (v, u_{n-1}) = 0}} \frac{(Tv, v)}{(v, v)} = m(u_1, \ldots, u_{n-1}). \tag{38.56}$$

[1]) Здесь, если порядок наибольшего собственного значения больше 1 [что не может быть исключено заранее, см. (38. 47)], описанная процедура дает, естественно, $\mu_2 = \mu_1$.

[2]) Для $n = 1$ эта система пуста.

Тогда n-е собственное значение оператора T равно минимуму среди этих максимумов, когда минимум ищется среди всех линейно независимых систем $u_1, \ldots, u_{n-1}$ пространства H, т. е.

$$\mu_n = \min_{u_1, \ldots, u_{n-1} \in H} m(u_1, \ldots, u_{n-1}). \qquad (38.57)$$

Доказательство теоремы 38.8 довольно просто. Выбирая, в частности, в качестве элементов $u_1, \ldots u_{n-1}$ первые $n-1$ собственных элементов оператора T, выводим из (38.55) следующее соотношение:

$$m(v_1, \ldots v_{n-1}) = \mu_n.$$

Этого достаточно, чтобы доказать, что для любой другой линейно независимой системы из элементов $u_1, \ldots u_{n-1}$ верно соотношение

$$m(u_1, \ldots u_{n-1}) \geqslant \mu_n.$$

Детально это доказано, например, в [10].

Теорема 38.8 дает способ определения n-го собственного значения оператора T без определения первых $n-1$ собственных элементов этого оператора. Для $n=1$ этот способ сводится к использованию соотношения (38.54). Если требуется, например, определить собственное значение μ_3, то выберем в H произвольную пару u_1, u_2 линейно независимых элементов и найдем максимум $m(u_1, u_2)$ функционала $(Tv, v)/(v, v)$ на множестве ненулевых элементов $v \in H$, ортогональных выбранной паре u_1, u_2. Если взять другую систему $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, то получим, вообще говоря, другой максимум $m(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ и т. д. Число μ_3 — это тогда минимум среди всех максимумов для всех возможных пар линейно независимых элементов пространства H.

Простые следствия теоремы 38.8 будут использованы в гл. 40 и 41. В заключение данной главы сформируем такой результат:

Число μ называется *регулярным значением* оператора T в гильбертовом пространстве H, если для оператора $A = T - \mu I$ (I — тождественный оператор, с. 90) существует ограниченный обратный оператор $A^{-1} = (T - \mu I)^{-1}$. Таким образом, если μ регулярно, то уравнение $Tu - \mu u = f$ имеет в точности одно решение $u = (T - \mu I)^{-1} f$ для любого $f \in H$, и это решение непрерывно зависит от правой части рассматриваемого уравнения.

Числа μ, не являющиеся регулярными, составляют так называемый *спектр оператора* T. Если μ не является собственным значением вполне непрерывного оператора T, то оно не обязано (см., например, [24]) быть регулярным для T. Однако можно, например, показать, что если T, кроме того, самосопряжен, то любое $\mu \neq 0$, не являющееся собственным значением этого оператора, регулярно для этого оператора.

Справедлива следующая теорема (см., например, [27]), которая будет нужна в гл. 40.

Теорема 38.9. *Пусть T_n — последовательность вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве H, сходящихся по норме к вполне непрерывному оператору T,*

$$\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0. \tag{38.58}$$

Тогда, если значение μ регулярно для оператора T, оно также регулярно для всех операторов T_n при достаточно большом n. Если, кроме того, $\lim_{n\to\infty}f_n=f$ в H, то $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ в H, где u — решение уравнения $Tu-\mu u=f$ и u_n — решение уравнения $Tu_n-\mu u_n=f_n$ (для достаточно большого n).

Далее, любое ненулевое собственное значение μ_k оператора T может быть получено из собственных значений μ_k^n операторов T_n предельным переходом при $n\to\infty$:

$$\mu_k=\lim_{n\to\infty}\mu_k^{(n)}. \tag{38.59}$$

Теорема 38.9 полезна для численного решения различных задач (например, когда приближенно решаются интегральные уравнения заменой данного ядра на более простое вырожденное ядро). Вторая часть теоремы будет использована в гл. 40 для доказательства сходимости метода Ритца в приложении к приближенному решению задач на собственные значения.

Глава 39

Задача на собственные значения для дифференциальных операторов

В этой главе представлены основные теоремы, касающиеся задач на собственные значения для дифференциальных операторов с однородными граничными условиями.

Напомним прежде всего (подробности см. в гл. 32, в особенности определение 32.2), что под слабым решением дифференциального уравнения

$$Au=f \tag{39.1}$$

с однородными граничными условиями понимается функция $u\in W_2^{(k)}(G)$, такая что

$$u\in V \tag{39.2}$$

и что

$$((v,\ u))=(v,\ f) \tag{39.3}$$

для любого $v\in V$. Здесь $(\cdot,\ \cdot)$ есть скалярное произведение в $L_2(G)$, $f\in L_2(G)$, V — подпространство таких функций пространства $W_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют (в смысле теории следов) рассмат-

риваемым однородным устойчивым граничным условиям, и

$$((v,\ u)) = A(v,\ u) + a(v,\ u) \tag{39.4}$$

есть билинейная форма из определения 32.2, определяемая дифференциальным оператором A и граничной формой $a(v,\ u)$ (которая нам встречалась, например, в случае ньютоновских граничных условий, см. пример 32.6).

Замечание 39.1. Читателю, мало знакомому с понятиями, введенными в ч. IV этой книги, не следует теряться перед упомянутыми выше обозначениями. Пространство $W_2^{(k)}(G)$ состоит из функций, имеющих в области G производные в некотором обобщенном смысле до порядка k включительно (более детально см. гл. 29). В частности, эти функции могут иметь непрерывные производные в $\overline{G}$ до порядка $k-1$ и непрерывные либо кусочно-непрерывные производные в $\overline{G}$ порядка k, принадлежащие $W_2^{(k)}(G)$. Символом V мы обозначаем подпространство таких функций пространства $W_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют — опять-таки в некотором обобщенном смысле теории следов — однородным граничным условиям, в которых встречаются производные порядка не более чем $k-1$. Далее, когда идет речь об уравнениях, обсуждавшихся в ч. III этой книги, допустимо, не опасаясь недоразумений, заменить в этой и двух следующих главах форму $((v,\ u))$ на скалярное произведение $(v,\ u)_A$, определенное в гл. 10, с. 117. См., в частности, формулы (39.40) и (39.41), уравнение (39.39) и т. д.

Замечание 39.2. В данной главе, равно как и в двух последующих, будем считать, что форма $((v,\ u))$ не только удовлетворяет условию

$$|((v,\ u))| \leqslant K \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} \cdot \|u\|_{W_2^{(k)}(G)}$$

из определения 32.2, но и, кроме того, *симметрична* в пространстве V, т. е. что

$$((v,\ u)) = ((u,\ v)) \text{ для всех пар функций } v,\ u \in V, \tag{39.5}$$

а также что пространство V *эллиптическое*, т. е. существует положительная постоянная α, такая что неравенство

$$((v,\ v)) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \tag{39.6}$$

справедливо для всех $v \in V$. (Эти требования соответствуют, грубо говоря, требованию положительной определенности оператора A, когда речь идет об уравнениях типа рассмотренных в ч. III этой книги.)

Случай, когда форма $((v,\ u))$ не является V-эллиптической (например, в задаче Неймана для уравнения Пуассона), может быть преобразован к описанному выше случаю, по крайней мере

для достаточно широкого класса задач, исследованных в гл. 35, рассмотрением этой формы лишь на подходящем подпространстве пространства V, обозначенном в гл. 35 символом Q. Элементы из Q ортогональны в $L_2(G)$ подпространству всех полиномов степени не более $k-1$. (В случае задачи Неймана для уравнения Пуассона элементами пространства Q являются такие функции из $V=W_2^{(1)}(G)$, которые ортогональны в $L_2(G)$ линеалу постоянных, т. е. такие функции, что $\int_G u(x)\,dx=0$.) Таким образом, в дальнейшем мы ограничимся случаем V-эллиптической формы $((v, u))$. См. также [32], гл. 3.

Замечание 39.3. Поскольку эта книга ориентирована в первую очередь на исследование краевых задач для дифференциальных уравнений, эта часть книги также в основном посвящена тому же кругу задач. Предлагаемую теорию можно без существенных трудностей модифицировать для применения и в других случаях. Если, например, рассматриваются собственные значения симметричной положительно определенной матрицы, то полученные результаты, конечно, с соответствующими изменениями вполне применимы (не будет бесконечного числа собственных значений, поскольку n-мерное векторное пространство имеет конечную размерность, и т. д.)

Учитывая эти вводные замечания, продолжим решение самой задачи.

Поскольку форма $((v, u))$ V-эллиптична, из гл. 33 следует, что задача (39.2), (39.3) имеет в точности одно слабое решение $u(x)$ и что существует постоянная $c>0$ для $f\in L_2(G)$, такая что справедливо неравенство

$$\|u\|_V\leqslant c\|f\|_{L_2(G)}. \tag{39.7}$$

Таким образом, любой функции $f\in L_2(G)$ соответствует только одно слабое решение $u\in V$ рассматриваемой задачи, такое что имеет место неравенство (39.7). Тогда на пространстве $L_2(G)$ можно определить некоторый оператор, очевидно линейный. Обозначим его через T

$$u=Tf,\quad f\in L_2(G),\quad u\in V. \tag{39.8}$$

Тогда можно интегральное тождество (39.3) представить в виде

$$((v, Tf))=(v, f)\text{ для любого }f\in L_2(G),\ v\in V, \tag{39.9}$$

а неравенство (39.7)—в виде

$$\|Tf\|_V\leqslant c\|f\|_{L_2(G)}. \tag{39.10}$$

Это неравенство показывает, что оператор T (рассматриваемый как оператор из $L_2(G)$ в V) ограничен.

В этой главе будут подробно рассмотрены свойства оператора T, когда он применяется к специальным функциям из $L_2(G)$,

а именно к функциям из V. Покажем, что оператор T, отображающий V в V, вполне непрерывен на пространстве V. Доказательство этого утверждения основано на следующей теореме (см. [32], с. 17).

Теорема 39.1. *Тождественное отображение пространства $W_2^{(1)}(G)$ в пространство $L_2(G)$ вполне непрерывно.*

Таким образом, если множество $M \subset W_2^{(1)}(G)$ ограничено в пространстве $W_2^{(1)}(G)$, то множество тех же самых функций предкомпактно в $L_2(G)$.

Замечание 39.4. Из предыдущей теоремы легко следует, что тождественное отображение пространства $W_2^{(k)}(G)$ в пространство $W_2^{(l)}(G)$, где $l < k$, также вполне непрерывно. В частности, тождественное отображение пространства $W_2^{(k)}(G)$ в пространство $L_2(G) = W_2^{(0)}(G)$ вполне непрерывно для любого целого положительного k. (Этот вывод непосредственно следует из теоремы 39.1, поскольку если множество M ограничено в $W_2^{(k)}(G)$, $k > 1$, то оно ограничено и в $W_2^{(1)}(G)$.)

Теорема 39.2. Оператор T (см. (39.8)), *рассматриваемый как оператор из пространства V в пространство V, вполне непрерывен на этом пространстве.*

Доказательство. Нужно доказать следующее: если M — ограниченное множество в V, то его образ $M' = TM$ предкомпактен в V.

Итак, пусть M ограничено в V. Рассмотрим произвольную последовательность элементов $v_n' \in M'$. Поскольку $M' = TM$, можно записать $v_n' = Tv_n$ для любого n, где $\{v_n\}$ — последовательность соответствующих прообразов из множества M. Но V — это подпространство пространства $W_2^{(k)}(G)$ ($k \geqslant 1$), так что множество M, ограниченное в V, предкомпактно в $L_2(G)$ в соответствии с замечанием 39.4. Из рассматриваемой последовательности $\{v_n\}$ можно, таким образом, выбрать подпоследовательность v_{n_i}, сходящуюся, а поэтому и фундаментальную в $L_2(G)$. Тогда из (39.10) следует, что

$$\|v_{n_i}' - v_{n_j}'\|_V = \|Tv_{n_i} - Tv_{n_j}\|_V = \|T(v_{n_i} - v_{n_j})\|_V \leqslant$$
$$\leqslant c\|v_{n_i} - v_{n_j}\|_{L_2(G)},$$

так что последовательность $\{v_{n_i}'\} = \{Tv_{n_i}\}$ фундаментальна в V. Поскольку V — полное пространство, $\{v_{n_i}'\}$ сходится в V. Таким образом, из каждой последовательности элементов $v_n' \in M'$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в V, что доказывает свойство вполне непрерывности оператора T на пространстве V.

А теперь займемся исследованием задачи на собственные значения для формы $((v, u))$. Уравнению (39.1) соответствует «слабая»

задача (39.2), (39.3). Аналогично, уравнению

$$Au-\lambda u=f \tag{39.11}$$

с однородными граничными условиями соответствует проблема определения функции $u(x)$, такой что

$$u\in V \tag{39.12}$$

и что равенство

$$((v,\ u))-\lambda(v,\ u)=(v,\ f) \tag{39.13}$$

верно для любого $v\in V$. Вспомним наши предположения, что $f\in L_2(G)$ и что форма $((v,\ u))$ симметрична и V-эллиптична (см. (39.5) и (39.6)).

Задача определения числа λ и функции $u(x)$, таких что

$$u\in V,\quad u\neq 0, \tag{39.14}$$

и что равенство

$$((v,\ u))-\lambda(v,\ u)=0 \text{ для любого } v\in V, \tag{39.15}$$

называется *задачей на собственные значения рассматриваемой формы* $((v,\ u))$.

Теорема 39.3. *Функция $u\in V$ является слабым решением задачи* (39.12), (39.13), *если и только если равенство*

$$u-\lambda Tu=Tf \tag{39.16}$$

справедливо в V. Число λ есть собственное значение формы $((v,\ u))$, а функция $u(x)$ — соответствующая собственная функция, если и только если равенство

$$u-\lambda Tu=0,\quad u\neq 0, \tag{39.17}$$

справедливо в V.

Доказательство непосредственно следует из определения (39.8) или (39.9) оператора T. Если $u(x)$ — слабое решение задачи (39.12), (39.13), записанное в виде

$$u\in V,\ ((v,\ u))=(v,\ \lambda u+f) \text{ для любого } v\in V,$$

то в соответствии с определением оператора T получим, что $u=T(\lambda u+f)$, т. е. выполняется (39.16). Обратное также справедливо.

Если задача (39.14), (39.15) имеет ненулевое слабое решение $u(x)$, опять же из определения оператора T следует, что $u=T(\lambda u)$, т. е. справедливо (39.17), и наоборот.

Теорема (39.3) дает возможность свести вопрос о разрешимости задачи (39.12), (39.13) или вопрос о существовании собственных значений и собственных функций рассматриваемой формы к исследованию уравнения (39.16) или (39.17) соответственно

с вполне непрерывным оператором T и, таким образом, позволяет использовать результаты, полученные в предыдущей главе. Поскольку оператор λ — это коэффициент оператора T в уравнениях (39.16) и (39.17), а не тождественного оператора (т. е. самой функции u в этих уравнениях), введем обозначение

$$1/\lambda = \mu. \tag{39.18}$$

Уравнение (39.17) примет тогда вид

$$Tu - \mu u = 0, \tag{39.19}$$

а уравнение такого вида исследовалось в гл. 38.

Согласно (39.18), значение $\lambda = 0$, разумеется, исключено из рассмотрения. Однако в нашем случае это неважно: если $\lambda = 0$, то задача (39.12), (39.13) сводится к задаче (39.2), (39.3), которая однозначно разрешима вследствие V-эллиптичности формы $((v, u))$. В частности, соответствующая однородная задача имеет лишь нулевое решение. Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением рассматриваемой формы.

Прежде чем использовать результаты предыдущей главы, сделаем следующее замечание.

Как уже отмечалось в гл. 33, в том случае, когда форма $((v, u))$ симметрична и V-эллиптична, можно ввести новое скалярное произведение в пространстве V:

$$(v, u)^{\mathrm{V}} = ((v, u)), \quad v, u \in V. \tag{39.20}$$

Это скалярное произведение порождает метрику в V, которая эквивалентна исходной метрике в V. Обозначим через $\overline{V}$ пространство, элементы которого совпадают с элементами пространства V, но в котором скалярное произведение определяется соотношением (39.20). Переход к эквивалентной метрике ничего не меняет, когда рассматриваются вопросы сходимости, полноты и т. д. Следовательно, пространство $\overline{V}$ полное, каждая последовательность, сходящаяся в V, сходится в $\overline{V}$, и наоборот, оператор T вполне непрерывен на $\overline{V}$ и т. д.

Теорема 39.4. *Оператор T самосопряжен и положителен на пространстве V.*

Доказательство просто. Поскольку соотношение (39.9) справедливо для любого $v \in V$ (а потому и для любого $v \in \overline{V}$) и для любого $f \in L_2(G)$, верно и соотношение

$$((v, Tu)) = (v, u) \text{ для любых } v, u \in \overline{V}. \tag{39.21}$$

Однако для всех $v, u \in \overline{V}$

$$((v, Tu)) = (v, u) = (u, v) = ((u, Tv)) = ((Tv, u)), \tag{39.22}$$

откуда следует самосопряженность оператора T. Далее,

$$((Tu, u)) = ((u, Tu)) = (u, u) \geqslant 0 \text{ для любого } u \in \overline{V}, \quad (39.23)$$

в то время как $((Tu, u)) = (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ в $\overline{V}$.

Таким образом, оператор T положителен на $\overline{V}$.

Поскольку T — вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор на $\overline{V}$, ряд утверждений о его свойствах, равно как и свойствах уравнений (39.16), (39.17), следует из теоремы 38.7 (см. также замечание 38.9). Эти утверждения касаются также свойств задач (39.12), (39.13) и (39.14), (39.15), которые эквивалентны по теореме 39.3 упомянутым выше уравнениям в вопросах разрешимости, существования собственных значений и т. д. Прежде чем выводить теорему 39.5 из упомянутой теоремы 38.7, сделаем несколько замечаний.

1. В нашем случае $H = \overline{V}$ в теореме 38.7 и замечании 38.9 скалярное произведение в $\overline{V}$ определяется соотношением (39.20) (так что и в теореме 38.7, и в замечании 38.9 следует писать $((Tv, u))$ вместо (Tv, u), $((v, v))$ вместо (v, v) и т. д.).

2. В соотношениях (38.51) и (38.52) либо (38.54) и (38.55) достаточно писать $v \in V$ (т. е. не обязательно писать $v \in \overline{V}$) вместо $v \in H$, поскольку V и $\overline{V}$ имеют одно и то же множество элементов.

3. Так как $\lambda = 1/\mu$, согласно (39.18), то, например, соотношение (38.54) принимает вид

$$\lambda_1 = \min_{v \in V,\ v \neq 0} \frac{((v, v))}{((Tv, v))} = \min_{v \in V\ v \neq 0} \frac{((v, v))}{(v, v)} \quad (39.24)$$

[поскольку $((Tv, v)) = ((v, Tv)) = (v, v)$, согласно с (39.9)] и т. д.

Сформулируем следующую теорему, являющуюся следствием теорем 38.7 и 39.3.

Теорема 39.5. *Рассмотрим задачу* (39.12), (39.13) *или задачу* (39.14), (39.15), *т. е. задачу определения функции* $u(x)$ *или числа* λ *и функции* $u(x)$, *таких что*

$$u \in V, \quad (39.25)$$

$$((v, u)) - \lambda (v, u) = (v, f) \text{ для любого } v \in V \quad (39.26)$$

или

$$u \in V, \quad u \neq 0, \quad (39.27)$$

$$((v, u)) - \lambda (v, u) = 0 \text{ для любого } v \in V\ ^{1}). \quad (39.28)$$

Пусть $f \in L_2(G)$, *и пусть форма* $((v, u))$ *из определения* 32.3 *симметрична и* V*-эллиптична в* V [2]). *Тогда форма* $((v, u))$ *имеет счетное множество собственных значений, каждое из которых поло-*

[1]) Ср. также замечание 39.1.

[2]) Ср. замечание 39.2.

жительно,

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \text{ [1]} \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{39.29}$$

Соответствующая ортонормированная система

$$v_1(x),\ v_2(x),\ v_3(x),\ \ldots \tag{39.30}$$

собственных функций составляет базис пространства $\overline{V}$ [2]).

Далее,

$$\lambda_1 = \min_{v\in V,\ v\neq 0} \frac{((v, v))}{(v, v)} = \frac{((v_1, v_1))}{(v_1, v_1)}, \tag{39.32}$$

$$\lambda_n = \min_{\substack{v\in V,\ v\neq 0,\\ (v, v_1)=0,\ \ldots,\ (v, v_{n-1})=0 \text{ [3]}}} \frac{((v, v))}{(v, v)} = \frac{((v_n, v_n))}{(v_n, v_n)}, \quad n=2, 3, 4, \ldots. \tag{39.33}$$

Для $\lambda \neq \lambda_n$, $n=1, 2, 3, \ldots$, *задача* (39.25), (39.26) *имеет в точности одно слабое решение для любого* $f \in L_2(G)$ (*и это решение непрерывно зависит от правой части* f *рассматриваемого уравнения*). *В частности, для* $f=0$ *в* $L_2(G)$ *оно имеет только нулевое решение.*

Если $\lambda=\lambda_n$, *то задача* (39.25), (39.26) *разрешима* (*но неоднозначно*), *если и только если функция* $f(x)$ *ортогональна в* $L_2(G)$ [4]) *каждой собственной функции, соответствующей этому собственному значению* λ.

Замечание 39.5. В этом случае можно легко показать, что если $u(x)$ — одно из этих решений, то все остальные отличаются от $u(x)$ только на кратное собственной функции, соответствующей рассматриваемому собственному значению λ или, возможно, на линейную комбинацию соответствующих собственных функций, если кратность λ больше 1.

Замечание 39.6. Поскольку функции пространства V составляют множество, являющееся плотным в $L_2(G)$ [5]), система собст-

---

[1]) Равенства в (32.29) означают, что возможны собственные значения кратности больше 1, ср. (38.47) или замечание 38.5. Кратность собственного значения всегда конечна, как следует из теоремы 38.7.

[2]) Естественно, она также составляет и базис пространства V. Под ортонормированностью мы имеем в виду здесь ортонормированность в пространстве $\overline{V}$, в котором оператор T самосопряженный, так что

$$((v_i, v_j)) = \begin{cases} 0 \text{ для } i \neq j, \\ 1 \text{ для } i = j. \end{cases} \tag{39.31}$$

[3]) А именно, из тождества $((v, v_j)) = \lambda_j (v, v_j)$, справедливого для любого $v\in V$, вытекает, что $((v, v_j))=0 \Leftrightarrow (v, v_j)=0$, поскольку $\lambda_j \neq 0$. Поэтому можно писать $(v, v_1)=0$ вместо $((v, v_1))=0$ и т. д.

[4]) Действительно, правая часть уравнения (39.16) равна Tf и $((v_j, Tf)) = (v_j, f)$.

[5]) Каждая функция $v(x)$ с компактным носителем принадлежит V; функции с компактным носителем плотны в $L_2(G)$, см. теорему 8.6, откуда непосредственно следует это утверждение.

венных функций (39.30) полна в пространстве $L_2(G)$. Кроме того, функции (39.30) попарно ортогональны и в $L_2(G)$, как следует из тождества $((v, v_j)) = \lambda_j (v, v_j)$ (см. примечание 3 на с. 476), если подставить $v = v_i$. Однако они не ортонормированы в $L_2(G)$; подставляя $v = v_j$, получим из предыдущего тождества

$$((v_j, v_j)) = \lambda_j (v_j, v_j). \tag{39.34}$$

Принимая во внимание, что $((v_j, v_j)) = 1$ для любого $j = 1, 2, \ldots$, получим, что система функций

$$\sqrt{\lambda_1} v_1, \sqrt{\lambda_2} v_2, \ldots \tag{39.35}$$

ортонормирована в $L_2(G)$.

Как отмечалось, эта система полна в $L_2(G)$, так что для любой функции $f \in L_2(G)$ справедливо равенство

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \sqrt{\lambda_j} v_j) \sqrt{\lambda_j} v_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, v_j) \text{ в } L_2(G). \tag{39.36}$$

Далее, имеет место следующая теорема.

Теорема 39.6. *Пусть* (39.30) *— система собственных функций рассматриваемой формы* $((v, u))$, *ортонормированная в* $\overline{V}$. *Пусть* $u \in V$ *— слабое решение уравнения* $Au = f$ *с однородными граничными условиями, т. е. решение задачи* (39.2), (39.3). *Тогда*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (f, v_j) v_j. \tag{39.37}$$

Доказательство. Ряд Фурье для функции $u = Tf$ в пространстве $\overline{V}$ (с метрикой, эквивалентной метрике в V) имеет вид

$$u = Tf \sum_{j=1}^{\infty} ((Tf, v_j)) v_j = \sum_{j=1}^{\infty} (f, v_j) v_j.$$

Замечание 39.7. Из теоремы 39.5 следует так называемая *альтернатива Фредгольма* (в соответствии с тем, является ли λ собственным значением формы $((v, u))$ [1]): *либо задача* (39.25), (39.26) *однозначно разрешима для любого* $f \in L_2(G)$ (в частности, для $f = 0$ в $L_2(G)$ она имеет единственное решение $u = 0$ в V), *либо соответствующая однородная задача* (т. е. задача (39.25), (39.26) для $f = 0$ в $L_2(G)$) *имеет ненулевое решение*).

Замечание 39.8. Если существует счетное множество положительных собственных значений со свойством (39.29) и если в то же время система (39.30) полна, мы часто говорим, что спектр рассматриваемой формы *дискретен*. Следовательно, если форма

[1]) Заметим, что вследствие (39.18) $\mu \neq 0$; случай $\lambda = 0$ обсуждался после уравнения (39.19).

$((v, u))$ V-эллиптична и симметрична, она обладает дискретным спектром.

Замечание 39.9. Обратимся еще раз к «классическим» задачам дифференциальных уравнений, рассмотренных в ч. III настоящей книги. Там мы искали обобщенное решение уравнения

$$Au = f, \tag{39.38}$$

где A был дифференциальным оператором с достаточно гладкими коэффициентами, положительно определенным на некотором подходящем линеале D_A. Заметим, что, доказывая положительную определенность, мы обычно устанавливаем нечто большее. Например, в случае задачи Дирихле (с однородными граничными условиями) для уравнения второго порядка было доказано прежде всего неравенство типа

$$(Au, u) \geqslant C^2 \sum_{j=1}^{N} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 dx$$

и только затем, на его основе, неравенство $(Au, u) \geqslant C^2 \|u\|^2$. Таким образом, на D_A доказаны неравенства вида $(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2_{W_2^{(1)}(G)}$. Как уже отмечалось выше (гл. 36, с. 444), несложно показать, что элементы пространства H_A, на которые в гл. 10 было распространено скалярное произведение $(v, u)_A$, совпадают в рассматриваемом случае с элементами пространства V, в то время как форма $(v, u)_A$ совпадает с формой $((v, u))$. Таким образом, в теореме 39.5 можно при желании использовать символы из ч. III данной книги, чтобы заменить, например, интегральное тождество (39.28) на тождество

$$(v, u)_A - \lambda (v, u) = 0, \tag{39.39}$$

соотношение (39.32) — на соотношение

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_A,\ v \neq 0} \frac{(v, v)_A}{(v, v)} \tag{39.40}$$

или, если рассматриваются только функции из области D_A для оператора A, на соотношение

$$\lambda_1 = \inf_{v \in D_A,\ v \neq 0} \frac{(Av, v)}{(v, v)} \text{ [1]} \tag{39.41}$$

и т. д.

Заметим далее, что если собственные функции (39.30) принадлежат области D_A оператора A, то соотношение $(Av_j, v) =$

[1]) Функции из множества D_A плотны в H_A. Однако минимум выражения (39.41) не обязательно достигается, вообще говоря, на функции из D_A. Поэтому здесь вместо min использован inf.

$=\lambda_j(v_j, v)$, $v \in V$, влечет за собой классическое соотношение

$$Av_j = \lambda_j v_j. \tag{39.42}$$

(Функции $v \in V$ плотны в $L_2(G)$, см. примечание 5 на с. 476.) Тот факт, что собственные функции оператора A удовлетворяют соотношению (39.42) при условии, что они принадлежат области этого оператора, может быть успешно использован, если мы возьмем их в качестве базиса пространства H_A, когда применяются методы аппроксимации, в особенности метод Ритца. Как известно из гл. 12 и 13 или гл. 34, метод ортонормированных рядов дает в случае ортонормированности базисных функций $v_j(x)$ в пространстве H_A (т. е. в $\overline{V}$) для n-го приближения $u_n(x)$ искомого решения выражение

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (f, v_j) v_j.$$

Если собственные функции $v_j(x)$ ортонормированы в H_A (т. е. в $\overline{V}$) и если они в то же время принадлежат D_A, из (39.42) следует, что

$$Au_n = A \sum_{j=1}^{n} (f, v_j) v_j = \sum_{j=1}^{n} (f, v_j) Av_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f, v_j) v_j \longrightarrow f \text{ в } L_2(G), \tag{39.43}$$

как легко видеть из (39.36). В случае такого выбора базиса

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = f \text{ в } L_2(G).$$

То же верно для метода Ритца (где мы не предполагаем ортонормированности базисных функций), поскольку приближение Ритца $u_n(x)$ совпадает с приближением, полученным методом ортонормированных рядов (здесь базисные функции нормируются заранее).

То же самое справедливо и для метода Галёркина, который в линейном случае совпадает с методом Ритца.

Как известно из второй части этой книги, не каждый базис в H_A обладает этим свойством.

Замечание 39.10. Теория, разрабатываемая в этой главе, предполагает V-эллиптичность рассматриваемой формы $((v, u))$, т. е. существование постоянной α, такой что соотношение

$$((v, v)) \geqslant \alpha \|v\|_V^2 \text{ верно для всех } v \in V. \tag{39.44}$$

Рассмотрим теперь форму $((v, u))$, обладающую указанными выше свойствами с той лишь разницей, что она сама не V-эллиптична, но существует постоянная γ, такая, что форма $((v, u))+$

$+\gamma(v, u)$ будет V-эллиптичной. Значит,

$$((v, v))+\gamma(v, v)\geqslant\alpha\|v\|_V^2,\ \alpha>0,\ \text{для всех } v\in V. \quad (39.45)$$

В качестве примера такой формы рассмотрим форму

$$((v, u))=\int_G\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx,$$

не являющуюся $W_2^{(1)}$-эллиптичной. Здесь при $\gamma>0$ форма $((v, u))+\gamma(v, u)$ уже будет $W_2^{(1)}(G)$-эллиптичной.

Для формы $((v, u))$ мы рассматриваем задачи, аналогичные (39.12)—(39.15), т. е. задачи, для которых

$$u\in V, \quad (39.46)$$

$$((v, u))-\lambda(v, u)=(v, f)\ \text{для любого } v\in V \quad (39.47)$$

и

$$u\in V,\ u\neq 0, \quad (39.48)$$

$$((v, u))-\lambda(v, u)=0\ \text{для любого } v\in V \quad (39.49)$$

соответственно.

Покажем, что эти задачи легко преобразуются в аналогичные задачи для V-эллиптичной формы. Введем обозначение $(((v, u)))=((v, u))+\gamma(v, u)$. В соответствии с (39.45) форма $(((v, u)))$ V-эллиптична. Положим далее $\lambda+\gamma=\eta$. Задачи (39.46) — (39.49) можно тогда записать в форме

$$u\in V, \quad (39.50)$$

$$(((v, u)))-\eta(v, u)=(v, f)\ \text{для любого } v\in V \quad (39.51)$$

и

$$u\in V,\ u\neq 0, \quad (39.52)$$

$$(((v, u)))-\eta(v, u)=0\ \text{для любого } v\in V \quad (39.53)$$

соответственно. Теперь к обеим этим задачам можно применить теорему 39.5. В частности, существует счетное множество положительных собственных значений

$$\eta_1\leqslant\eta_2\leqslant\eta_3\leqslant\cdots$$

формы $(((v, u)))$. Соответствующие собственные значения формы $((v, u))$ (т. е. исходного оператора A)—это $\lambda_1=\eta_1-\gamma$, $\lambda_2=\eta_2-\gamma$, ... (Ясно, что некоторые из них могут быть отрицательны.) Альтернатива Фредгольма справедлива и для задачи (39.46), (39.47):

либо задача (39.46), (39.47) *имеет единственное решение для произвольного* $f\in L_2(G)$, *либо задача* (39.48), (39.49) *имеет ненулевое решение.*

Замечание 39.11. Рассмотрим *задачи типа*

$$Au-\lambda Bu=f \quad (39.54)$$

с однородными граничными условиями, где A и B — дифференциальные операторы порядков $2k$ и $2l$ соответственно, $l<k$.

Обозначим символом V_A подпространство пространства $W_2^{(k)}(G)$ таких функций, которые удовлетворяют (в смысле теории следов) рассматриваемым однородным граничным условиям, устойчивым для оператора A. Аналогично, символом V_B ($V_A \subset V_B$) [1] обозначим подпространство пространства $W_2^{(l)}(G)$ таких функций, которые удовлетворяют однородным граничным условиям, устойчивым для оператора B (т. е. содержащим производные порядка не более $l-1$). Допустим, что соответствующие формы $((v, u))_A$ и $((v, u))_B$ [2] (см. гл. 32) симметричны и что форма $((v, u))_A$ V_A-эллиптична, а форма $((v, u))_B$ V_B-эллиптична. Кроме того, пусть обе эти формы удовлетворяют требованиям определения 32.2:

$$|((v, u))_A| \leqslant K \|v\|_{V_A} \|u\|_{V_A}, \quad |((v, u))_B| \leqslant K \|v\|_{V_B} \|u\|_{V_B}. \tag{39.55}$$

Приведем простой, но типичный пример. Рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 u + \lambda \Delta u = f \tag{39.56}$$

в двумерной области G с липшицевой границей и с однородными граничными условиями

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{39.57}$$

$$\partial u/\partial \nu = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{39.58}$$

В этом случае справедливы равенства

$$V_A = \mathring{W}_2^{(2)}(G), \quad V_B = \mathring{W}_2^{(1)}(G).$$

Очевидно, $V_A \subset V_B$. Далее (см. гл. 33), форма

$$((v, u))_A = \int\int_G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 \tag{39.59}$$

V_A-эллиптична, а форма

$$((v, u))_B = \int\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \tag{39.60}$$

V_B-эллиптична. Ясно, что обе эти формы симметричны и удовлетворяют предположениям (39.55).

Чтобы найти слабое решение уравнения (39.54) с однородными граничными условиями, нужно найти функцию $u(x)$, такую что

$$u \in V_A, \tag{39.61}$$

$$((v, u))_A - \lambda ((v, u))_B = (v, f) \text{ для любого } v \in V_A. \tag{39.62}$$

---

[1] Включение понимается в смысле теории множеств.

[2] Формально эти формы получены умножением уравнения (39.54) на достаточно гладкую функцию v, удовлетворяющую рассматриваемым граничным условиям, и стандартным применением теоремы Грина (см. 39.62).

Для решения соответствующей задачи на собственные значения нужно найти числа λ и соответствующие функции $u(x)$, такие что справедливы соотношения

$$u \in V_A, \quad u \neq 0, \tag{39.63}$$

$$((v, u))_A - \lambda ((v, u))_B = 0 \text{ для любого } v \in V_A. \tag{39.64}$$

Форма $((v, u))_B$ по предположению V_B-эллиптична, поэтому (см. гл. 33) для любого $f \in L_2(G)$ существует в точности одно $u \in V_B$, удовлетворяющее условию

$$((v, u))_B = (v, f) \text{ для любого } v \in V_B, \tag{39.65}$$

тогда как

$$\|u\|_{V_B} \leqslant c_1 \|f\|_{L_2(G)}. \tag{39.66}$$

Так можно определить оператор C в пространстве $L_2(G)$,

$$u = Cf, \quad f \in L_2(G), \ u \in V_B \tag{39.67}$$

(этот оператор линейный и вследствие (39.66) ограниченный), такой что для любого $v \in V_B$ и любого $f \in L_2(G)$

$$((v, Cf))_B = (v, f).$$

Теперь можно переформулировать задачу (39.61), (39.62): требуется найти функцию $u(x)$, такую что

$$u \in V_A, \tag{39.68}$$

$$((v, u))_A - \lambda ((v, u))_B = ((v, Cf))_B \text{ для любого } v \in V_A. \tag{39.69}$$

Теперь зададим произвольное $g \in V_B$ и рассмотрим следующую задачу:

$$u \in V_A, \tag{39.70}$$

$$((v, u))_A = ((v, g))_B \text{ для всех } v \in V_A. \tag{39.71}$$

Функционал $((v, g))_B$ ограничен в пространстве V_A, поскольку из (39.55) следует

$$|((v, g))_B| \leqslant K \|g\|_{V_B} \|v\|_{V_B} = K_1 \|v\|_{W_2^{(l)}(G)} \leqslant K_1 \|v\|_{W_2^{(k)}(G)} = K_1 \|v\|_{V_A};$$

здесь $K\|g\|_{V_B}$ обозначено через K_1. Далее, форма $((v, u))_A$ V_A-эллиптична, и потому справедливо неравенство (39.55). Это значит, что выполнены условия теоремы Лакса—Мильграма, а потому можно показать совершенно таким же способом, что и в гл. 33, что существует в точности одно слабое решение задачи (39.70), (39.71), если

$$\|u\|_{V_A} \leqslant c_2 \|g\|_{V_B}, \tag{39.72}$$

где c_2 не зависит от функции g из V_B. На этом пути можно определить и оператор T, сопоставляющий каждому $g \in V_B$ слабое решение $u \in V_A$ задачи (39.70), (39.71), $u = Tg$, $g \in V_B$, $u \in V_A$.

Поскольку $l < k$, то тем же способом, что и выше, можно доказать, что этот оператор из V_A в V_A вполне непрерывен [см. (39.69)] и что $u \in V_A$ является слабым решением задачи (39.61), (39.62) или что λ есть собственное значение, а $u \in V_A$ — соответствующая собственная функция задачи (39.63), (39.64), если и только если справедливы равенства

$$u - \lambda T u = TCf \tag{39.73}$$

или

$$u - \lambda T u = 0, \quad u \neq 0 \tag{39.74}$$

соответственно. Если здесь ввести пространство $\overline{V}$, элементы которого совпадают с элементами пространства V, а скалярное произведение задается соотношением $((v, u))_{\overline{V}} = ((v, u))_A$, то легко доказывается, как и на с. 474, что оператор T симметричный и положительный в пространстве $\overline{V}$. Следовательно, как и в предыдущем случае, к этой задаче применимы результаты теоремы 39.5. В частности, задача (39.63), (39.64) имеет, таким образом, счетное множество положительных собственных значений

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \longrightarrow +\infty,$$

а соответствующая ортонормированная система собственных функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, ... полна как в V_A, так и в V_B. Для задачи (39.61), (39.62) справедлива и альтернатива Фредгольма: либо задача однозначно разрешима для любого $f \in L_2(G)$, либо соответствующая однородная задача имеет ненулевое решение. Далее,

$$\lambda_1 = \min_{v \in V_A,\ v \neq 0} \frac{((v, v))_A}{((v, v))_B}, \tag{39.75}$$

или, в смысле замечания 39.9,

$$\lambda_1 = \inf_{v \in D_A,\ v \neq 0} \frac{(Av, v)}{(Bv, v)} \tag{39.76}$$

и

$$\lambda_n = \min_{\substack{v \in V_A,\ v \neq 0 \\ ((v, v_1))_B = 0, \ \ldots, \ ((v, v_{n-1}))_B = 0}} \frac{((v, v))_A}{((v, v))_B} \tag{39.77}$$

и т. д.

Замечание 39.12. *(Минимаксный принцип Куранта.)* Из теоремы (38.8) и только что приведенных рассуждений непосредственно вытекает следующее утверждение, если в этой теореме положить $H = \overline{V}$.

Пусть задано уравнение $Au - \lambda Bu = 0$ *с однородными граничными условиями, и пусть соответствующие формы* $((v, u))_A$, $((v, u))_B$ *удовлетворяют предположениям, сформулированным в предыдущем замечании* (с. 480). *Пусть* n *— произвольное положительное*

целое число, и пусть $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ *— произвольная система из* $n-1$ *линейно независимых функций пространства* V_A (эта система пуста при $n=1$). Положим

$$\min_{\substack{v \in V_A,\ v \neq 0 \\ ((v,\ u_1))_A = 0, \ldots, ((v,\ u_{n-1}))_A = 0}} \frac{((v,\ v))_A}{((v,\ v))_B} = l(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}). \tag{39.78}$$

Тогда

$$\lambda_n = \max_{u_1, \ldots, u_{n-1} \in V_A} l(u_1,\ \ldots,\ u_n). \tag{39.79}$$

Следовательно (см. с. 468), n-е собственное значение рассматриваемой задачи можно определить так: выбираем систему $n-1$ функций, линейно независимых в пространстве V_A (а поэтому и в пространстве $\overline{V}$) и находим минимум (39.78); максимум этих минимумов, взятый по всем возможным линейно независимым системам $n-1$ элементов из V_A, равен собственному значению λ_n.

В частности, при $n=1$ рассматриваемая система пуста, и мы получаем λ_1 в соответствии с (39.75).

Исходя из (39.76), можно написать

$$\inf_{\substack{v \in D_A,\ v \neq 0 \\ (Av,\ u_1)=0, \ldots, (Av,\ u_{n-1})=0}} \frac{(Av,\ v)}{(Bv,\ v)} = l(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}) \tag{39.80}$$

вместо (39.78).

В случае уравнения $Au - \lambda u = 0$, конечно, справедливо равенство $((v,\ v))_A = ((v,\ v))$ и B — тождественный оператор, так что $((v,\ v))_B = (Bv,\ v) = (v,\ v)$. Тогда соотношения (39.78) и (39.80) превращаются в

$$l(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}) = \min_{\substack{v \in V,\ v \neq 0 \\ ((v,\ u_1))=0, \ \ldots, \ ((v,\ u_{n-1}))=0}} \frac{((v,\ v))}{(v,\ v)} \tag{39.81}$$

или

$$l(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}) = \inf_{\substack{v \in D_A,\ v \neq 0 \\ (Av,\ u_1)=0, \ \ldots, \ (Av,\ u_{n-1})=0}} \frac{(Av,\ v)}{(v,\ v)} \tag{39.82}$$

соответственно.

Замечание 39.13. В (39.81) входят функции $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, принадлежащие пространству V, а ортогональность понимается в смысле метрики пространства $\overline{V}$. Иногда бывает полезно рассмотреть минимаксный принцип Куранта в несколько иной формулировке (см., например, [27]), в которой функции $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ принадлежат пространству $L_2(G)$ (так что в этом случае таких функций «больше») и соответствующее скалярное произведение также рассматривается в $L_2(G)$.

Пусть задано уравнение $Au - \lambda u = 0$ *с однородными граничными условиями, и пусть соответствующая форма* $((v,\ u))$ *удов-*

летворяет предположениям, сформулированным в замечании (39.2). *Пусть* n — *произвольное положительное целое число, и пусть* $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ — *произвольная система* $n-1$ *линейно независимых функций из пространства* $L_2(G)$ *(эта система пуста при* $n=1$*). Положим*

$$\inf_{\substack{v\in V,\ v\neq 0\\ (v,\ u_1)=0,\ \ldots,\ (v,\ u_{n-1})=0}} \frac{((v,\ v))}{(v,\ v)} = l(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}). \tag{39.83}$$

Тогда

$$\lambda_n = \max_{u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}\in L_2(G)} l(u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}). \tag{39.84}$$

Можно сформулировать аналогичную модификацию принципа Куранта для уравнений типа $Au-\lambda Bu=0$.

Глава 40

Метод Ритца в задаче на собственные значения

а) Метод Ритца

Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения

$$Au-\lambda u=0 \tag{40.1}$$

с однородными граничными условиями, т. е.— в слабой формулировке — задачу

$$u\in V, \quad u\neq 0, \tag{40.2}$$

$$((v,\ u))-\lambda(v,\ u)=0 \quad \text{для любого } v\in V. \tag{40.3}$$

Допустим, что форма $((v,\ u))$ удовлетворяет условию

$$|((v,\ u))|\leqslant K\|v\|_V\|u\|_V \quad \text{для любого} \quad v\in V, \tag{40.4}$$

где K — постоянная, не зависящая от функций u и v из пространства V. Допустим, более того, что эта форма симметричная и V-эллиптическая. Тогда, как следует из предыдущей главы, задача (40.2), (40.3) обладает счетным множеством положительных собственных значений

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots, \tag{40.5}$$

и соответствующая ортонормированная система собственных функций

$$v_1(x),\ v_2(x),\ v_3(x),\ \ldots \tag{40.6}$$

полна в V, равно как и в $L_2(G)$. В то же время справедливы соотношения

$$\lambda_1 = \min_{v \in V,\ v \neq 0} \frac{((v, v))}{(v, v)}, \tag{40.7}$$

$$\lambda_n = \min_{\substack{v \in V,\ v \neq 0 \\ (v, v_1)=0, \ldots (v, v_{n-1})=0}} \frac{((v, v))}{(v, v)}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots . \tag{40.8}$$

Поскольку форма $((v, u))$ билинейна по переменным v и u, можно написать

$$\lambda_1 = \min_{v \in V,\ \|v\|=1} ((v, v)), \tag{40.9}$$

$$\lambda_n = \min_{\substack{v \in V,\ \|v\|=1, \\ (v, v_1)=0, \ldots (v, v_{n-1})=0}} ((v, v)) \tag{40.10}$$

вместо (40.7), (40.8).

В данной главе будет показано, как можно применить метод Ритца для приближенного вычисления собственных значений.

Как известно, метод Ритца состоит в определении минимума функционала не на рассматриваемом пространстве, а лишь на его n-мерном подпространстве.

Прежде всего рассмотрим случай первого собственного значения λ_1. Аналогично предыдущей главе, введем в пространстве V скалярное произведение

$$(v, u)^V = ((v, u)); \tag{40.11}$$

символом $\overline{V}$ обозначим новое пространство, элементы которого суть элементы пространства V, а скалярное произведение в нем вводится согласно (40.11).

В пространстве $\overline{V}$ выберем базис

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \varphi_3(x), \ \ldots, \tag{40.12}$$

ортонормированный в $\overline{V}$, так что

$$((\varphi_i, \varphi_j)) = \begin{cases} 1 & \text{для } j = i, \\ 0 & \text{для } j \neq i. \end{cases} \tag{40.13}$$

Обозначим через $\overline{V}_n$ подпространство пространства $\overline{V}$, составленное из линейных комбинаций элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, и будем искать минимум функционала (40.9) не в $\overline{V}$, а в $\overline{V}_n$, т. е. будем искать

$$\min_{v \in V_n,\ \|v\|=1} ((v, v)). \tag{40.14}$$

Произвольный элемент пространства $\overline{V}_n$ представляется в виде

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ni} \varphi_i. \tag{40.15}$$

Вследствие (40.14) нужно тем самым найти минимум функции

$$((u_n, u_n)), \quad u_n \in \overline{V}_n, \tag{40.16}$$

от n переменных $b_{n1}, \ldots, b_{nn}$ при дополнительном условии

$$\|u_n\|^2 = (u_n, u_n) = 1. \tag{40.17}$$

Введем обозначение

$$F(b_{n1}, \ldots, b_{nn}, \Lambda) = ((u_n, u_n)) - \Lambda(u_n, u_n), \tag{40.18}$$

где Λ — это пока не определенный коэффициент (так называемый множитель Лагранжа). Как известно, если функция (40.16) достигает своего минимума в $\overline{V}_n$ при условии (40.17) на элементе $u_{n0} = a_{n1}\varphi_1 + \ldots + a_{nn}\varphi_n$, то существует $\Lambda = \lambda$, такое что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial b_{n1}}(a_{n1}, \ldots, a_{nn}, \lambda) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial F}{\partial b_{nn}}(a_{n1}, \ldots, a_{nn}, \lambda) = 0 \end{aligned} \tag{40.19}$$

(и, естественно,

$$(u_{n0}, u_{n0}) = 1). \tag{40.20}$$

Ввиду (40.13) легко вычисляем

$$F = \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2 - \Lambda \sum_{i,\, j=1} (\varphi_i, \varphi_j) b_{ni} b_{nj},$$

так что уравнения (40.19) после деления на 2 примут вид

$$\begin{aligned} &a_{n1} - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(\varphi_1, \varphi_j) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{nn} - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(\varphi_n, \varphi_j) = 0. \end{aligned} \tag{40.21}$$

Вследствие условия (40.20) система (40.21) должна иметь ненулевое решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda(\varphi_1, \varphi_1), & -\lambda(\varphi_1, \varphi_2), & \ldots, & -\lambda(\varphi_1, \varphi_n) \\ -\lambda(\varphi_2, \varphi_1), & 1 - \lambda(\varphi_2, \varphi_2), & \ldots, & -\lambda(\varphi_2, \varphi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda(\varphi_n, \varphi_1), & -\lambda(\varphi_n, \varphi_2), & \ldots & 1 - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{40.22}$$

Функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ортонормированы в $\overline{V}$, поэтому они линейно независимы в $\overline{V}$. Следовательно, они также линейно независимы и в пространстве V, а стало быть, и в пространстве

$L_2(G)$. Поэтому коэффициент при старшей n-й степени параметра λ отличен от нуля, поскольку это в точности определитель Грама для функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ в пространстве $L_2(G)$. Таким образом, уравнение (40.22)—это уравнение в точности степени n, имеющее ровно n корней (некоторые из них могут, естественно, совпадать). Как известно из алгебры, все корни рассматриваемого уравнения вещественны, так как соответствующая матрица вещественна и симметрична. Легко показать, что эти корни положительны. Возьмем произвольный корень и обозначим его через λ_0. Подставляя λ_0 вместо λ в уравнение (40.21), получим однородную систему уравнений с нулевым определителем. Пусть $a_{n1}, \ldots, a_{nn}$ — некоторое (вещественное) ненулевое решение этой системы. Его можно выбрать так (умножив на подходящую постоянную), чтобы выполнялось соотношение (40.20), т. е. чтобы

$$\|u_{n0}\| = \|a_{n1}\varphi_1 + \ldots + a_{nn}\varphi_n\| = 1.$$

Теперь, умножая первое из уравнений (40.21) (после замены λ на λ_0) на число a_{n1}, второе—на a_{n2}, n-е—на a_{nn} и складывая полученные уравнения, придем к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 = \lambda_0 \sum_{j=1}^{n} a_{ni}a_{nj}(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_0 (u_{n0}, u_{n0}) = \lambda_0.$$

Следовательно, $\lambda_0 > 0$, поскольку вектор $(a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ вещественный и по предположению ненулевой.

Следовательно, уравнение (40.22) имеет только положительные корни. Обозначим их через

$$\lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^{(n)}. \tag{40.23}$$

Интуитивно можно ожидать, что эти корни являются приближениями первых собственных значений из (40.5) для рассматриваемой формы $((v, u))$. Конкретно, можно ожидать, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)} = \lambda_1, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_2^{(n)} = \lambda_2 \tag{40.24}$$

и т. д. Мы покажем, что при рассматриваемых предположениях это действительно так.

Рассмотрим оператор T из предыдущей главы (см. (39.8)), вполне непрерывный из V в V и поэтому также вполне непрерывный из $\overline{V}$ в $\overline{V}$. Следовательно, $Tu \in \overline{V}$ для любого $u \in \overline{V}$, а поскольку $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированный базис в $\overline{V}$, то справедливо соотношение

$$Tu = \sum_{i=1}^{\infty} ((Tu, \varphi_i))\varphi_i \quad \text{в} \quad \overline{V} \tag{40.25}$$

для любого $u \in \overline{V}$.

Определим в пространстве $\overline{V}$ оператор T_n по формуле

$$T_n u = \sum_{i=1}^{n} ((Tu,\ \varphi_i))\,\varphi_i, \quad u \in \overline{V}. \tag{40.26}$$

Оператор (40.26) конечномерен, т. е. он может быть представлен в виде (38.13). В самом деле, оператор T вполне непрерывен и поэтому ограничен в пространстве $\overline{V}$. Следовательно, для любого фиксированного i, $i = 1, \ldots, n$, функционал $((Tu, \varphi_i))$ ограничен в пространстве $\overline{V}$. По теореме Рисса для любого φ_i, $i = 1, \ldots, n$, существует в точности один элемент $\tilde{\varphi}_i \in \overline{V}$, такой что

$$((Tu,\ \tilde{\varphi}_i)) = (u,\ \tilde{\varphi}_i)^V = ((u,\ \tilde{\varphi}_i)) \quad \text{для любого} \quad u \in \overline{V}.$$

Оператор (40.26) тогда можно записать в виде

$$T_n u = \sum_{i=1}^{n} ((u,\ \tilde{\varphi}_i))\,\varphi_i, \quad u \in \overline{V},$$

т. е. в нужном нам виде (38.13).

Поскольку T_n конечномерен в пространстве $\overline{V}$, он вполне непрерывен из $\overline{V}$ в $\overline{V}$. Докажем следующие два утверждения:

1) $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ в $\overline{V}$,

2) числа $\mu_i^{(n)} = 1/\lambda_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$, суть первые n собственных значений оператора T_n. (Тогда из теоремы (38.9) будет, поскольку все λ_i, λ_i^n положительны, следовать соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_i^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \mu_i^{(n)} = \mu_i \frac{1}{\lambda_i} \quad \text{для} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{40.27}$$

а отсюда — доказываемое соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_i^{(n)} = \lambda_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots.)$$

Докажем сначала утверждение 1. Согласно определению 38.4, нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0, такое что соотношение

$$\|Tu - T_n u\|_V \leqslant \varepsilon \|u\|_V \tag{40.28}$$

справедливо для любого $n > n_0$ и для любого $u \in \overline{V}$. Итак, пусть задано $\varepsilon > 0$. Из (40.25), (40.26) следует прежде всего соотношение

$$\|Tu - T_n u\|_V = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} ((Tu,\ \varphi_i))\,\varphi_i \right\|_V. \tag{40.29}$$

Оператор T вполне непрерывен, поэтому по теореме 38.3 для числа $\varepsilon/2$ можно найти такие два оператора R и S, что $T = R + S$. Здесь S — конечномерный оператор (значит, он может быть пред-

ставлен в виде

$$Su = \sum_{i=1}^{k} ((u, \psi_i))\, \chi_i \quad \text{для любого } u \in \overline{V}, \tag{40.30}$$

а норма оператора R в $\overline{V}$ меньше, чем $\varepsilon/2$, т. е.

$$\|Ru\|_V \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_V \quad \text{для любого } u \in \overline{V}. \tag{40.31}$$

В соответствии с (40.29) справедливо соотношение

$$\|Tu - T_n u\|_V = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (([Su + Ru],\ \varphi_i))\, \varphi_i \right\|_V. \tag{40.32}$$

Однако вследствие (40.13) прежде всего

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} ((Ru,\ \varphi_i)) \right\|_V^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} ((Ru,\ \varphi_i))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} ((Ru,\ \varphi_i))^2. \tag{40.33}$$

Но последняя часть в (40.33) — это сумма квадратов коэффициентов Фурье функции Ru относительно ортонормированной системы функций $\varphi_i(x)$. Согласно неравенству Бесселя (6.33), отсюда следует (ввиду (40.31))

$$\sum_{i=1}^{\infty} ((Ru,\ \varphi_i))^2 \leqslant \|Ru\|_V^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} \|u\|_V^2. \tag{40.34}$$

Но тогда из (40.33), (40.34) вытекает, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} ((Ru,\ \varphi_i))\, \varphi_i \right\|_V \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_V. \tag{40.35}$$

Далее, в силу (40.30) справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} ((Su,\ \varphi_i)),\ \varphi_i \right\|_V &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} ((u,\ \psi_j))\, ((\chi_j,\ \varphi_i))\, \varphi_i \right\|_V = \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{k} ((u,\ \psi_j)) \sum_{i=n+1}^{\infty} ((\chi_j,\ \varphi_i))\, \varphi_i \right\|_V {}^{1}) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{k} |((u,\ \psi_j))| \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} ((\chi_j,\ \varphi_i))\, \varphi_i \right\|_V \leqslant \\
&\leqslant \|u\|_V \sum_{j=1}^{k} \|\psi_j\|_V \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} ((\chi_j,\ \varphi_i))^2}.
\end{aligned} \tag{40.36}$$

Однако для любого $j = 1, \ldots, k$ ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} ((\chi_j,\ \varphi_i))^2$$

[1]) Изменение порядка суммирования допустимо здесь вследствие сходимости ряда $\sum_{i=n+1}^{\infty} ((\chi_j, \varphi_i))\, \varphi_i$ для любого j.

сходится, так как это сумма квадратов коэффициентов Фурье функции χ_j. Но тогда из (40.36) следует соотношение

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} ((Su, \varphi_i))\, \varphi_i \right\|_V \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \| u \|_V \tag{40.37}$$

для всех достаточно больших n. Поэтому из (40.32), (40.35) и (40.37) следует (40.28).

Теперь докажем утверждение 2, которое гласит, что числа $\mu_i^{(n)} = 1/\lambda_i^{(n)}$ суть первые n собственных значений оператора T_n, т. е. первые n собственных значений уравнения

$$\mu u^{(n)} - T_n u^{(n)} = 0. \tag{40.38}$$

Пусть $\mu \neq 0$. Обозначая $1/\mu = \lambda$, можно сформулировать задачу на собственные значения для оператора T_n следующим образом.

Найти такое (положительное) λ, для которого существуют ненулевые решения (в пространстве V, или, что то же самое, в пространстве $\overline{V}$) уравнения

$$u^{(n)} - \lambda T_n u^{(n)} = 0. \tag{40.39}$$

Как и выше, обозначим через $\overline{V}_n$ подпространство пространства $\overline{V}$, в котором функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют базис. Каждый элемент $v \in \overline{V}$ можно тогда представить в виде

$$v(x) = a_1 \varphi_1(x) + \ldots + a_n \varphi_n(x), \tag{40.40}$$

где $a_1 = ((v, \varphi_1)), \ldots, a_n = ((v, \varphi_n))$. В частности, отсюда следует, что в пространстве $\overline{V}_n$ имеет место $v = 0$, если и только если

$$((v, \varphi_1)) = 0, \ \ldots, \ ((v, \varphi_n)) = 0. \tag{40.41}$$

Поскольку T_n — это оператор вида (40.26), функции $T_n u^{(n)}$ принадлежат $\overline{V}_n$. Вследствие (40.39) функции $u^{(n)}$ также принадлежат $\overline{V}_n$, поэтому любое решение уравнения (40.39) можно представить в виде

$$u^{(n)}(x) = c_{n1} \varphi_1(x) + \ldots + c_{nn} \varphi_n(x). \tag{40.42}$$

Тем самым уравнение (40.39) можно рассматривать в конечномерном пространстве $\overline{V}_n$. Согласно (40.41), это уравнение удовлетворяется, если и только если удовлетворяются уравнения

$$((u^{(n)} - \lambda T_n u^{(n)}, \varphi_1)) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$((u^{(n)} - \lambda T_n u^{(n)}, \varphi_n)) = 0.$$

Вследствие (40.13) это означает, что удовлетворяются уравнения

$$c_{n1} - ((\lambda T u^{(n)}, \varphi_1)) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{nn} - ((\lambda T u^{(n)}, \varphi_n)) = 0,$$

или (поскольку $((Tu^{(n)}, \varphi_k)) = (u^{(n)}, \varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$) уравнения

$$\begin{aligned} c_{n1} - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} (\varphi_j, \varphi_1) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{nn} - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} c_{nj} (\varphi_j, \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \tag{40.43}$$

Однако система (40.43) тождественна системе (40.21). Уравнение (40.39) имеет ненулевое решение в точности для тех λ, для которых система (40.43) имеет ненулевое решение, т. е. в точности для тех λ, для которых соответствующий определитель (а значит, и определитель системы (40.22)) равен нулю.

Второе утверждение со с. 489 доказано. Тем самым мы доказали обоснованность соотношений (40.24), т. е. сходимость метода Ритца, выражаемую следующей теоремой.

Теорема 40.1. *Пусть форма* $((v, u))$ *удовлетворяет неравенству* (40.4), *и пусть она симметричная и V-эллиптическая* (так что имеют место все посылки теоремы 39.5). *Пусть*

$$\lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^{(n)}$$

— приближения собственных значений формы $((v, u))$, *полученные методом Ритца*, т. е. *корни уравнения* (40.22). *Тогда для любого собственного значения* λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *формы* $((v, u))$ *справедливо соотношение*

$$\lambda_i = \lim_{n \to \infty} \lambda_i^{(n)}.$$

Замечание 40.1. Нетрудно доказать (см., например, [27]), что эта сходимость монотонна, так что при фиксированном i $\lambda_i^{(n+1)} \leqslant \lambda_i^n$. Следовательно, последовательность $\{\lambda_i^{(n)}\}$ сходится сверху к собственному значению λ_i формы $((v, u))$.

Замечание 40.2. Если система (40.12) не ортонормирована в пространстве $\overline{V}$ (что необязательно для применимости метода Ритца, см. гл. 13), то метод Ритца приводит к уравнению

$$\begin{vmatrix} ((\varphi_1, \varphi_1)) - \lambda (\varphi_1, \varphi_1), & \\ ((\varphi_1, \varphi_2)) - \lambda (\varphi_1, \varphi_2), & \ldots, ((\varphi_1, \varphi_n)) - \lambda (\varphi_1, \varphi_n) \\ ((\varphi_2, \varphi_1)) - \lambda (\varphi_2, \varphi_1), & \\ ((\varphi_2, \varphi_2)) - \lambda (\varphi_2, \varphi_2), & \ldots, ((\varphi_2, \varphi_n)) - \lambda (\varphi_2, \varphi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ ((\varphi_n, \varphi_1)) - \lambda (\varphi_n, \varphi_1), & \\ ((\varphi_n, \varphi_2)) - \lambda (\varphi_n, \varphi_2), & \ldots, ((\varphi_n, \varphi_n)) - \lambda (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{40.44}$$

Если мы выберем базис в пространстве $\overline{V}$ таким образом, чтобы функции (40.12) были ортонормированы в $L_2(G)$, то получим

уравнение

$$\begin{vmatrix} ((\varphi_1, \varphi_1))-\lambda, & ((\varphi_1, \varphi_2)), & \ldots, & ((\varphi_1, \varphi_n)) \\ ((\varphi_2, \varphi_1)), & ((\varphi_2, \varphi_2))-\lambda, & \ldots, & ((\varphi_2, \varphi_n)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ ((\varphi_n, \varphi_1)), & ((\varphi_n, \varphi_2)), & \ldots, & ((\varphi_n, \varphi_n))-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{40.45}$$

вместо уравнения (40.44). Что касается дифференциальных операторов из третьей части этой книги, то вместо $((\varphi_i, \varphi_j))$ можно писать $(\varphi_i, \varphi_j)_A$, или, возможно, $(A\varphi_i, \varphi_j)$, если базис выбран из области определения оператора A (см. замечание 39.9). Уравнение (40.44) примет тогда вид

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1)-\lambda(\varphi_1, \varphi_1), & & & \\ (A\varphi_1, \varphi_2)-\lambda(\varphi_1, \varphi_2), & \ldots, & (A\varphi_1, \varphi_n)-\lambda(\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1)-\lambda(\varphi_2, \varphi_1), & & & \\ (A\varphi_2, \varphi_2)-\lambda(\varphi_2, \varphi_2), & \ldots, & (A\varphi_2, \varphi_n)-\lambda(\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ (A\varphi_n, \varphi_1)-\lambda(\varphi_n, \varphi_1)), & & & \\ (A\varphi_n, \varphi_2)-\lambda(\varphi_n, \varphi_2), & \ldots, & (A\varphi_n, \varphi_n)-\lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0, \tag{40.46}$$

который, возможно, упростится при специальном выборе базиса (см., например, (40.45)).

Замечание 40.3. Уравнение (40.46) получается также при использовании метода Галёркина. Аналогично методу Ритца, мы ищем ненулевое решение уравнения

$$Au-\lambda u=0 \tag{40.47}$$

в виде

$$u_n(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\varphi_j(x) \quad (\varphi_j \in D_A) \tag{40.48}$$

и умножаем уравнение (40.47), в котором подставляем u_n вместо u, последовательно на функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в пространстве $L_2(G)$. Таким образом, получаем систему уравнений, определитель которой в точности совпадает с определителем (40.46). Дальнейший анализ в этом случае аналогичен проведенному выше.

Замечание 40.4. В случае уравнения $Au-\lambda Bu=0$ (см. замечание 39.11) получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} ((\varphi_1, \varphi_1))_A-\lambda((\varphi_1, \varphi_1))_B, & \ldots, & ((\varphi_1, \varphi_n))_A-\lambda((\varphi_1, \varphi_n))_B \\ ((\varphi_2, \varphi_1))_A-\lambda((\varphi_2, \varphi_1))_B, & \ldots, & ((\varphi_2, \varphi_n))_A-\lambda((\varphi_2, \varphi_n))_B \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ ((\varphi_n, \varphi_1))_A-\lambda((\varphi_n, \varphi_1))_B, & \ldots, & ((\varphi_n, \varphi_n))_A-\lambda((\varphi_n, \varphi_n))_B \end{vmatrix} = 0 \tag{40.49}$$

или уравнение

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1)-\lambda(B\varphi_1, \varphi_2), & \ldots, & (A\varphi_1, \varphi_n)-\lambda(B\varphi_1, \varphi_n) \\ (A\varphi_2, \varphi_1)-\lambda(B\varphi_2, \varphi_1), & \ldots, & (A\varphi_2, \varphi_n)-\lambda(B\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\

Рассмотрим в этой области следующую (подобную исходной) задачу на собственные значения:

$$-\Delta u - \nu u = 0 \text{ в } G_2, \tag{40.54}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_2. \tag{40.55}$$

Утверждается, что собственные значения $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \dots$ задачи (40.54), (40.55) не превышают соответствующих собственных значений $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$ задачи (40.52), (40.53).

Обозначим через V_1 и V_2 пространства, соответствующие рассматриваемым задачам (аналогично введенному выше пространству V). Очевидно, что здесь $V_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G_1)$, $V_2 = \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(G_2)$. Формы

$$((v,\ u))_1 = \int\limits_{G_1}\int \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\,dx_1\,dx_2 \tag{40.56}$$

и

$$((v,\ u))_2 = \int\limits_{G_2}\int \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_1\,dx_2, \tag{40.57}$$

рассмотренные на пространствах V_1 и V_2 соответственно, очевидно, обладают всеми свойствами, требуемыми в теореме 39.5. Поэтому для этих форм справедливы все утверждения теоремы. В частности, справедливы соотношения

$$\lambda_1 = \min_{\substack{v \in V_1,\\ v \neq 0}} \frac{((v,\ v))_1}{(v,\ v)_1}, \tag{40.58}$$

$$\nu_1 = \min_{\substack{v \in V_2,\\ v \neq 0}} \frac{((v,\ v))_2}{(v,\ v)_2}, \tag{40.59}$$

где

$$(v,\ v)_1 = \int\limits_{G_1}\int v^2\,dx, \quad (v,\ v)_2 = \int\limits_{G_2}\int v^2\,dx.$$

Простыми вычислениями можно показать, что если $v_1 \in V_1$, то функция $v_2(x)$, равная $v_1(x)$ в G_1 и равная нулю во всех точках G_2, не принадлежащих G_1, принадлежит V_2. Так как интегралы (40.56) и (40.57) (если в них заменить функцию $u(x)$ на функцию $v(x)$) совпадают при условии, что $v(x) \equiv 0$ вне G_1, очевидно, что для рассматриваемой пары функций v_1, v_2 две дроби (40.58), (40.59) принимают одни и те же значения. Но пространство V_2 содержит не только функции $v_2(x)$ рассматриваемого типа; очевидно, что оно шире. Поэтому минимум функционала (40.59) может быть достигнут, вообще говоря, на функции $v \in V_2$, отличной от функций только что рассмотренного типа. В любом случае верно, что $\nu_1 \leqslant \lambda_1$.

Аналогичным способом (здесь с успехом можно применить минимаксный принцип Куранта) показывается, что то же соотно-

шение справедливо и для последующих пар собственных значений ν_2, λ_2; ν_3, λ_3; ... .

Поскольку область G_2—прямоугольник, мы знаем, как простым путем определить собственные значения задачи (40.54), (40.55). Если a и b—стороны G_2, то собственные значения представляются в виде (см. пример 37.2)

$$\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad m=1, 2, \ldots, \quad n=1, 2, \ldots . \tag{40.60}$$

Поэтому первое собственное значение—это

$$\nu_1=\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}. \tag{40.61}$$

Таким образом, (40.60) непосредственно дает нижние оценки для собственных значений задачи (40.52), (40.53). В частности, справедливо соотношение

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}. \tag{40.62}$$

Обозначая через r радиус полукруга G_1, получаем, что $a=2r$, $b=r$, и потому $\lambda_1 \geqslant 5\pi^2/(4r^2)$.

Аналогично, основываясь на (40.60), можно получить нижние оценки для последующих собственных значений. Ясно, что эти рассуждения, представленные здесь для специального случая, можно легко распространить на более общие случаи. При использовании этого метода существенны следующие два обстоятельства. Во-первых, необходимо найти задачу, соответствующую исходной задаче таким образом, что $\lambda_i \geqslant \nu_i$ для любого целого положительного i (или по крайней мере для тех i, которые представляют интерес). Процедура поиска такой соответствующей задачи была продемонстрирована в предыдущем примере; ее идея основана на соотношениях (40.58), (40.59) или на аналогичных соотношениях для $i>1$ (с возможным использованием минимаксного принципа Куранта). Во-вторых, необходимо иметь простой метод вычисления собственных значений соответствующей задачи. В нашем примере мы в качестве подходящей задачи выбрали исходную задачу, рассмотренную на прямоугольнике.

Идея предложенного метода, равно как и его реализация, довольно проста. Как и следовало ожидать, лишь весьма грубые оценки можно получить столь легко.

Второй метод, описанный ниже, особенно удобен для двусторонних оценок первого собственного значения (но не только для них). По существу рассматриваются оценки типа (40.83). Для случая обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений в частных производных специального типа этот метод был разработан Л. Коллатцем. Соответствующий результат сформулирован, например, в [9], см. также [33]. В на-

стоящей книге мы распространим этот результат на случай более общих дифференциальных уравнений, основываясь на наших рассмотрениях из гл. 39 и на так называемой теореме Темпля.

Теорема 40.2. (Теорема Темпля, см., например, Коллатц [10].) *Пусть T — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Пусть g_0 и g_1 — два ненулевых элемента из H, таких что*

$$Tg_1 = g_0. \tag{40.63}$$

Определим последовательно так называемые коэффициенты Шварца, частное Шварца и частное Темпля соотношениями

$$\alpha_0 = (g_0, g_0), \quad \alpha_1 = (g_0, g_1), \quad \alpha_2 = (g_1, g_1), \tag{40.64}$$

$$\nu_1 = \alpha_1/\alpha_2, \tag{40.65}$$

$$\varphi(t) = \frac{\alpha_0 - t\alpha_1}{\alpha_1 - t\alpha_2}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad t \neq \nu_2. \tag{40.66}$$

Пусть число ν_2 лежит в некотором интервале $[b_1, b_2]$, и пусть известно, что внутри этого интервала лежит в точности одно изолированное собственное значение μ оператора T, в то время как никакая другая точка спектра этого оператора не лежит в $[b_1, b_2]$. Тогда имеет место оценка

$$\varphi(b_2) \leqslant \mu \leqslant \varphi(b_1). \tag{40.67}$$

Доказательство теоремы Темпля основано на том факте, что при рассматриваемых предположениях операторы $R = (T - b_1 I)(T - (\mu - \varepsilon) I)$ и $S = (T - (\mu + \varepsilon) I)(T - b_2 I)$, где I — тождественный оператор, положительны для всех достаточно малых положительных ε. Поэтому скалярные произведения (Rg_1, g_1) и (Sg_1, g_1) положительны. Оба неравенства (40.67) выводятся отсюда несложными вычислениями и переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$.

В [10] указано, как на основании (40.67) получить оценки типа (40.83) для самосопряженных операторов.

Теорему Темпля можно без серьезных трудностей модифицировать для случая дифференциальных (и, таким образом, неограниченных) операторов, получая тем самым двусторонние оценки типа (40.83) для дифференциальных уравнений вида $Au - \lambda u = 0$. Дальше мы покажем, как получить оценки этого типа для дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных) вида $Au - \lambda Bu = 0$. Для этой цели используем оператор T, введенный в гл. 39.

Прежде всего рассмотрим уравнение

$$Au - \lambda u = 0 \tag{40.68}$$

с однородными граничными условиями. Обозначим через V, как обычно, подпространство пространства $W_2^{(k)}(G)$, составленное из таких элементов $W_2^{(k)}(G)$, которые удовлетворяют (в смысле тео-

рии следов) рассматриваемым однородным устойчивым граничным условиям. Пусть соответствующая форма $((v, u))$ удовлетворяет условию

$$|((v, u))| \leqslant K\|v\|_V \|u\|_V \text{ для любых пар элементов } v, u \in V, \quad (40.69)$$

и пусть она V-эллиптична и симметрична [1]) в пространстве V. Тогда, как нам известно из гл. 39, эта форма имеет счетное множество положительных собственных значений

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \quad (40.70)$$

Любое $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$, регулярно для формы $((v, u))$. Тогда спектр этой формы составлен только из собственных значений (40.70).

Обозначим символом $\overline{V}$ гильбертово пространство, элементы которого совпадают с элементами V, а скалярное произведение в нем имеет вид $((v, u))$.

В гл. 39 мы определили оператор T из пространства $L_2(G)$ в пространство V (и тем самым, конечно, и в пространство $L_2(G)$) соотношением

$$((v, Tf)) = (v, f), \quad f \in L_2(G), \quad v \in V. \quad (40.71)$$

Было показано, что этот оператор, рассмотренный как оператор из $\overline{V}$ в $\overline{V}$, вполне непрерывен, самосопряжен и положителен и что его собственные значения

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots \quad (40.72)$$

обратны значениям (40.70), т. е. $\mu_i = 1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Нетрудно доказать, что оператор T обладает теми же самыми свойствами, если его рассмотреть как оператор из $L_2(G)$ в $L_2(G)$.

Вполне непрерывность. Из неравенства $\|Tf\|_V \leqslant c\|f\|_{L_2(G)}$ следует, что образ каждого множества M, ограниченного в $L_2(G)$, ограничен в V, а поэтому (в соответствии с теоремой 39.1) предкомпактен в $L_2(G)$.

Самосопряженность. Из определения оператора T следует, что для каждой пары элементов v, $u \in L_2(G)$ справедливы соотношения

$$(Tv, u) = ((Tv, Tu)) = ((Tu, Tv)) = (Tu, v) = (v, Tu).$$

Положительность. Если $z \in L_2(G)$, $z \neq 0$, то прежде всего $Tz \neq 0$ (так как иначе задача $((v, u)) = (v, z)$, $v \in V$ имела бы нуле-

[1]) Что касается операторов того типа, который рассмотрен в гл. 3, достаточно, чтобы оператор A имел достаточно гладкие коэффициенты и был положительно определен на линеале D_A функций, непрерывных вместе с их частными производными до порядка $2k$ включительно и удовлетворяющих заданным граничным условиям.

вое решение $u=Tz$ для ненулевого z). А если $z\neq 0$, то $(Tz,\ z)=((Tz,\ Tz))>0$, откуда следует положительность рассматриваемого оператора.

Поскольку число $\mu=0$ не является собственным значением оператора T, то из

$$Tu-\mu u=0,\quad u\in L_2(G)$$

следует, что $u=(1/\mu)\,Tu\in V$ и, таким образом, $u\in V$; оператор T, рассматриваемый как оператор из $L_2(G)$ в $L_2(G)$, имеет в точности те же собственные значения (40.72), что и этот же оператор, рассматриваемый как оператор из $\overline{V}$ в $\overline{V}$. Следовательно, в теореме 40.2 будет достаточно рассмотреть этот оператор в пространстве $H=L_2(G)$. (Поэтому нет необходимости выбирать для H пространство V, что существенно с численной точки зрения.)

Пусть теперь $f_1\in V$ и $f_2\in L_2(G)$ — две ненулевые функции, удовлетворяющие уравнению

$$((v,\ f_1))=(v,\ f_0)\ \text{для всех}\ v\in V. \tag{40.73}$$

(Для этого достаточно — в смысле примечания 1 на с. 498 — выбрать

$$f_1\in D_A\ \text{и}\ f_0=Af_1.) \tag{40.74}$$

Обозначим

$$a_0=(f_0,\ f_0),\quad a_1=(f_1,\ f_0),\quad a_2=(f_1,\ f_1). \tag{40.75}$$

Числа a_0, a_1, a_2 положительны. Для a_0 и a_2 это следует непосредственно из (40.75), а для a_1 — из соотношения

$$a_1=(f_1,\ f_0)=((f_1,\ f_1))>0\ \text{для}\ f_1\neq 0.$$

Обозначим далее

$$\varkappa_1=a_0/a_1,\quad \varkappa_2=a_1/a_2. \tag{40.76}$$

Из (39.32) мы в первую очередь получим, что $\varkappa_2\geqslant\lambda_1$, поскольку в силу (40.75) и (40.73)

$$\varkappa_2=\frac{a_1}{a_2}=\frac{(f_1,\ f_0)}{(f_1,\ f_1)}=\frac{((f_1,\ f_1))}{(f_1,\ f_1)}\geqslant\lambda_1. \tag{40.77}$$

Одновременно из соотношения $\|f_0-kf_1\|^2\geqslant 0$, где k — произвольное целое число, следует, что дискриминант квадратичного по k выражения

$$\|f_0-kf_1\|^2=(f_0-kf_1,\ f_0-kf_1)=$$
$$=(f_0,\ f_0)-2\,(f_1,\ f_0)\,k+(f_1,\ f_1)\,k^2=a_0-2a_1k+a_2k^2$$

не может быть положителен, так что $a_1^2\leqslant a_0a_2$ и, следовательно,

$$\varkappa_2\leqslant\varkappa_1. \tag{40.78}$$

Теперь допустим, что собственное значение λ_1 — простое (так что $\lambda_1<\lambda_2$) и что нам удалось найти такую нижнюю оценку l_2

для второго собственного значения λ_2, которая больше, чем $\varkappa_1$ (и поэтому также больше, чем $\varkappa_2$). Отсюда и из (40.77) и (40.78) следует, что

$$\lambda_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \varkappa_1 < l_2 < \lambda_2. \tag{40.79}$$

Теперь покажем, как применить теорему 40.2 и неравенства (40.79) для простого построения нижней оценки для λ_1. Вся процедура может быть модифицирована на случай высших собственных значений.

Из определения оператора T и из (40.73) получаем $f_1 = Tf_0$. В (40.63) положим $g_1 = f_0$, $g_0 = f_1$. Тогда

$$\alpha_0 = (f_1, f_1) = a_2, \quad \alpha_1 = (f_1, f_0) = a_1, \quad \alpha_2 = (f_0, f_0) = a_0$$

и

$$\nu_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{\varkappa_1}, \quad \varphi(t) = \frac{a_2 - ta_1}{a_1 - ta_0}. \tag{40.80}$$

Поскольку $\mu_1 = 1/\lambda_1$, $\mu_2 = 1/\lambda_2$, из (40.79) следует (все рассматриваемые числа положительны), что

$$\mu_1 \geqslant \nu_2 > 1/l_2 > \mu_2. \tag{40.81}$$

Из (40.72) тогда следует, что в теореме 40.2 можно выбрать в качестве $[b_1, b_2]$ интервал $[1/l_2, \mu_1 + c]$, где c — произвольное положительное число. Это возможно, поскольку число ν_2 лежит внутри интервала, и в то же время в точности одна точка спектра оператора T — а именно точка μ_1 — лежит в этом интервале. Из второго из неравенств (40.67) и из (40.80) тогда следует, что

$$\frac{1}{\lambda_1} = \mu_1 \leqslant \varphi\left(\frac{1}{l_2}\right) = \frac{a_2 - a_1/l_2}{a_1 - a_0/l_2},$$

или, иначе,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{a_1 l_2 - a_0}{a_2 l_2 - a_1} = \frac{a_1}{a_2}\,\frac{l_2 - \varkappa_1}{l_2 - \varkappa_2} = \varkappa_2\left(1 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{l_1 - \varkappa_2}\right) = \varkappa_2 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{l_2/\varkappa_2 - 1}. \tag{40.82}$$

Из (40.79) и (40.82) тогда получим двустороннюю оценку для λ_1:

$$\varkappa_2 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\frac{l_2}{\varkappa_2} - 1} \leqslant \lambda_1 \leqslant \varkappa_2. \tag{40.83}$$

Прежде чем формулировать соответствующую теорему, отметим, что условие (см. (40.79)) $\varkappa_1 < l_2$ является в некотором смысле «излишним». В действительности достаточно неравенства $\varkappa_2 < l_2$. Если одновременно справедливо и неравенство $\varkappa_1 < l_2$, то (40.83) верно в соответствии с только что доказанным утверждением. Однако если $\varkappa_1 \geqslant l_2$, то (40.83) все равно справедливо вследствие неравенства $\varkappa_2 \leqslant \varkappa_1$, поскольку в этом случае выполняются соот-

ношения

$$\varkappa_2 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\frac{l_2}{\varkappa_2} - 1} = \varkappa_2\left(1 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{l_2 - \varkappa_2}\right) \leqslant 0.$$

Поэтому мы снова получаем

$$\varkappa_2 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\frac{l_2}{\varkappa_2} - 1} \leqslant \lambda_1,$$

поскольку $\lambda_1 > 0$. Для справедливости формулы (40.83) тогда достаточно справедливости неравенства $\varkappa_2 < l_2$.

Суммируем результаты предыдущих рассуждений в следующей теореме.

Теорема 40.3. *Рассмотрим уравнение*

$$Au - \lambda u = 0 \tag{40.84}$$

с однородными граничными условиями. Пусть форма $((v, u))$, *соответствующая оператору* A, *удовлетворяет неравенству* (*40.69*), *и пусть она* V*-эллиптична и симметрична в пространстве* V. (См. также примечание 1 на с. 489.) *Пусть* $f_1 \in V$ *и* $f_0 \in L_2(G)$ — *две ненулевые функции, для которых имеет место* (40.73). (Для этого достаточно, чтобы выполнялось (40.74), в смысле упомянутого примечания.) *Выберем постоянные* a_0, a_1, a_2, $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *в соответствии с* (40.75) и (40.76). *Пусть собственное значение* λ_1 *формы* $((v, u))$ *простое* $(\lambda_1 < \lambda_2)$, *и пусть* l_2 — *нижняя оценка второго собственного значения* $(l_2 < \lambda_2,)$, *превышающая* $\varkappa_2$. *Тогда справедлива оценка* (40.83).

См. численный пример на с. 509.

Замечание 40.6. Предположение о простоте собственного значения λ_1 несущественно. Наши рассуждения основаны на теореме Темпля, которая предполагает только лишь изолированность, а не простоту рассматриваемого собственного значения. Конечно, если λ_1 — кратное собственное значение, мы должны понимать под λ_2 в теореме 40.3 первое (по величине) собственное значение, больше, чем λ_1.

Замечание 40.7. Всю эту процедуру можно модифицировать для случая следующих собственных значений. Например, если нам удалось найти функции $f_1 \in V$ и $f_0 \in L_2(G)$, такие что $\lambda_2 \leqslant \varkappa_2$, и нижнюю оценку l_2 третьего собственного значения λ_3, такую что $\varkappa_2 < l_2$, то мы получим оценку (40.83) для собственного значения λ_2. Аналогично для λ_3 и т. д.

Предыдущие рассуждения, проведенные для уравнения $Au - \lambda u = 0$, можно перенести почти буквально на уравнение $Au - \lambda Bu$ с однородными граничными условиями. Здесь A и B — дифференциальные операторы порядков $2k$ и $2l$ $(l < k)$ соответственно (см.

замечание 39.11). Обозначим через V_A и V_B подпространства соответствующих пространств $W_2^{(k)}(G)$ и $W_2^{(l)}(G)$, элементы которых — это такие функции из рассматриваемых пространств, которые удовлетворяют (в смысле теории следов) рассматриваемым (однородным) граничным условиям, устойчивым для операторов A и B. Пусть формы $((v, u))_A$ и $((v, u))_B$, соответствующие операторам A и B, удовлетворяют условиям

$$|((v, u))_A| \leqslant K_1 \|v\|_{V_A} \cdot \|u\|_{V_A} \quad \text{и}$$
$$|((v, u))_B| \leqslant K_2 \|v\|_{V_B} \cdot \|u\|_{V_B}.$$

Пусть также эти формы V_A- и V_B-эллиптичны и симметричны в пространствах V_A и V_B соответственно. (Для этого достаточно, чтобы операторы A и B имели достаточно гладкие коэффициенты и были положительно определенными на множествах D_A и D_B соответственно. Здесь через D_A и D_B обозначены линеалы функций, непрерывных вместе с их производными в $\overline{G}$ до порядков $2k$ и $2l$ включительно и удовлетворяющих рассматриваемым граничным условиям и условиям, «принадлежащим» операторам A и B соответственно.)

Обозначим, далее, через $\overline{V}$ и $\overline{V}_B$ соответственно гильбертовы пространства, элементы которых суть элементы пространств V_A и V_B, но со скалярными произведениями $((v, u))_A$ и $((v, u))_B$.

В замечании 39.11 был определен оператор T, сопоставляющий каждому $g \in V_B$ решение $u \in V$ задачи

$$((v, u))_A = ((v, g))_B \text{ для всех } v \in V_A.$$

В этих предположениях мы показали, что этот оператор, рассмотренный как оператор из $\overline{V}$ в $\overline{V}$, вполне непрерывен, самосопряжен и положителен в пространстве $\overline{V}$. Точно так же, как и для уравнения (40.68), можно показать, что оператор T обладает теми же свойствами, если его рассматривать как оператор из $\overline{V}_B$ в V_B. В теореме 40.2 мы, таким образом, возьмем $H = \overline{V}_B$.

Пусть $f_1 \in \overline{V}$, $f_0 \in \overline{V}_B$ — две ненулевые функции, удовлетворяющие равенству

$$((v, f_1))_A = ((v, f_0))_B \text{ для всех } v \in \overline{V}. \tag{40.85}$$

(Для этой цели достаточно в смысле предыдущего замечания найти две функции: $f_1 \in D_A$, $f_0 \in D_B$, такие что

$$Af_1 = Bf_0.) \tag{40.86}$$

Определим постоянные a_0, a_1, a_2 и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ соотношениями

$$a_0 = ((f_0, f_0))_B, \; a_1 = ((f_1, f_0))_B,$$
$$a_2 = ((f_1, f_1))_B. \tag{40.87}$$

Если выбрать функции $f_1(x)$, $f_0(x)$ в соответствии с (40.86), то справедливы равенства

$$a_0=(f_0,\ Bf_0),\ a_1=(f_1,\ Bf_0),\ a_2=(f_1,\ Bf_1), \tag{40.88}$$

$$\varkappa_1=\frac{a_0}{a_1},\ \varkappa_2=\frac{a_1}{a_2}. \tag{40.89}$$

Итак, если первое собственное значение λ_1 рассматриваемой задачи просто и если мы найдем нижнюю оценку l_2 второго собственного значения ($l_2<\lambda_2$), такую что $l_2>\varkappa_2$, тогда те же соображения, что и выше, дают оценку (40.83).

Следовательно, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 40.4. *Рассмотрим уравнение*

$$Au-\lambda Bu=0 \tag{40.90}$$

с однородными граничными условиями. Пусть формы $((v,\ u))_A$, $((v,\ u))_B$ *удовлетворяют условиям, сформулированным после замечания* 40.7. *Выберем функции* $f_1(x)$ *и* $f_0(x)$, *такие что справедливы соотношения* (40.85) (или (40.86)), *и вычислим постоянные* (40.87) *и* (40.89). *Пусть первое собственное значение* λ_1 *рассматриваемой задачи простое, и пусть* l_2 *— нижняя оценка второго собственного значения* λ_2 ($l_2<\lambda_2$), *превышающая число* $\varkappa_2$. *Тогда для собственного значения* λ_1 *справедлива оценка*

$$\varkappa_2-\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\frac{l_2}{\varkappa_2}-1}\leqslant\lambda_1\leqslant\varkappa_2. \tag{40.91}$$

Замечание 40.8. К теореме 40.4 можно добавить комментарий, аналогичный замечаниям 40.6 и 40.7, относящимся к утверждению о простоте λ_1 и применимости оценки (40.91) к следующим по порядку собственным значениям.

Замечание 40.9. Нижнюю оценку l_2 второго собственного значения часто можно найти сравнением рассматриваемой задачи с некоторой более простой задачей и применением принципа минимакса аналогично тому, как это было сделано на с. 496 (см. пример 41.2). Если при этом найденное l_2 таково, что $\varkappa_2<l_2<\lambda_2$, тогда в соответствии с неравенствами (40.79) λ_1 — простое собственное значение (эти неравенства имеют место и в случае задачи на собственные значения для уравнения (40.90)).

Замечание 40.10. Для выбора функций $f_1(x)$ и $f_0(x)$ необходим определенный опыт даже в простом случае (40.73) (и тем более в случае (40.85)). Если, например, выбрать $f_1(x)=u_2(x)$ (здесь $u_2(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_2, т. е. функция, для которой справедливо равенство $((v,\ u_2))=\lambda_2(v,\ u_2)$), то отсюда и из (40.73) следует равенство $f_0(x)=\lambda_2 u_2$.

Значит, справедливы равенства

$$a_0 = \lambda_2^2 (u_2, u_2), \quad a_1 = \lambda_2 (u_2, u_2), \quad a_2 = (u_2, u_2),$$

так что $\varkappa_1 = \lambda_2$, $\varkappa_2 = \lambda_2$. Конечно, тогда невозможно найти такое l_2, что $\varkappa_2 < l_2 < \lambda_2$. Поэтому необходимо выбирать функцию $f_1(x)$ в определенном смысле «вблизи» первого собственного значения рассматриваемой задачи.

Замечание 40.11. Оценка (40.83) для случая обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторого специального класса дифференциальных уравнений в частных производных дана в книге Л. Коллатца [9]. Его подход основан на несколько иной идее, а именно на построении функции Грина, соответствующей рассматриваемой задаче, и на изучении ее свойств. Этот подход выгоден в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако в более сложных случаях дифференциальных уравнений в частных производных, особенно в случае уравнений типа (40.90), он наталкивается на определенные трудности. В этих случаях наш подход, основанный на анализе из гл. 39 и на теореме Темпля, оказывается существенно более эффективным.

С другой стороны, для обыкновенных дифференциальных уравнений метод Коллатца разработан в его книге [9] в деталях. Модификация этого метода, которую мы здесь не рассматриваем, дает относительно лучшие оценки, чем (40.83). Относительная грубость нашей оценки связана с тем, что не всегда удается сделать число $l_2/\varkappa_2$ «существенно» больше единицы. По этой причине Коллатц строит некоторую последовательность функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ вместе с соответствующей последовательностью чисел $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \varkappa_3 \ldots$. Таким путем он получает существенно лучшие оценки, очевидно, ценой усилий по построению функций $f_i(x)$. См. примеры, представленные в его книге [9]. См. также [33].

Замечание 40.12. В дополнение мы отсылаем читателя к статье [30], авторы которой получают с помощью эффективных теоретических средств вполне удовлетворительные оценки методом наименьших квадратов.

Глава 41

Численные примеры

В этой главе мы продемонстрируем применение метода Ритца к численному решению задач на собственные значения. Мы также покажем применение двух простых методов, предложенных в конце предыдущей главы, для получения нижних оценок собственных значений.

Пример 41.1. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора Лапласа $-\Delta$, т. е. для уравнения

$$-\Delta u-\lambda u=0, \tag{41.1}$$

в области E, лежащей в первом квадранте и ограниченной осями x и y и дугой эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(рис. 35) с граничным условием Дирихле

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{41.2}$$

Определим верхнюю и нижнюю оценки первого собственного значения λ_1.

Прежде всего здесь верно равенство $V=\mathring{W}_2^{(1)}(E)$. Форма

$$((v, u))=A(v, u)=\iint\limits_E\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \tag{41.3}$$

симметрична и $\mathring{W}_2^{(1)}$-эллиптична. Очевидно, что выполняются предположения теоремы 40.1, поэтому можно применить выкладки предыдущей главы.

Чтобы получить верхнюю оценку для λ_1, используем метод Ритца. В качестве базиса пространства $\mathring{W}_2^{(1)}(E)$ выберем систему функций

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ldots, \tag{41.4}$$

умноженных на функцию

$$g(x, y)=xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{41.5}$$

положительную в области E и равную нулю на границе Γ (см. с. 229).

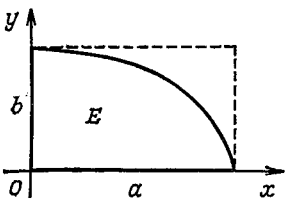

Рис. 35.

Чтобы получить простую, хотя и довольно грубую верхнюю оценку величины λ_1, рассмотрим для начала только первую функцию системы (41.4). В этом случае функция u_n со с. 486 сводится к функции

$$u_1(x, y)=a_{11}\varphi_1(x, y)=a_{11}xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{41.6}$$

в то время как уравнение (40.46) сводится к

$$(A\varphi_1, \varphi_1)-\lambda(\varphi_1, \varphi_1)=0. \tag{41.7}$$

Как известно из предыдущей главы, отсюда можно получить верхнюю оценку $\lambda_1^{(1)}$ первого собственного значения λ_1 рассматри-

ваемого оператора. Прежде всего вычислим

$$A\varphi_1 = -\Delta\varphi_1 = \frac{6xy}{a^2} + \frac{6xy}{b^2}, \tag{41.8}$$

$$(A\varphi_1, \varphi_1) = \iint\limits_E \left(\frac{6xy}{a^2} + \frac{6xy}{b^2}\right) xy \left(1 - \frac{x^2}{a_2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/2} 6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) a^2 b^2 r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\,(1 - r^2)\, abr\, dr\, d\varphi =$$

$$= 6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) a^3 b^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{64} a^3 b^3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Мы использовали подстановку $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, см. [33]. Аналогично вычислим

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \iint\limits_E x^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy = \frac{\pi}{960} a^3 b^3. \tag{41.9}$$

Для верхней оценки $\lambda_1^{(1)}$ соотношения (41.7)—(41.9) дают значение

$$\lambda_1^{(1)} = 15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \tag{41.10}$$

Заменяя четверть эллипса E прямоугольником со сторонами a и b (как изображено на рис. 35), получим вследствие соотношения (40.62) следующую оценку:

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \approx 9.869\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \tag{41.11}$$

Для первого собственного значения λ_1 рассматриваемой задачи из соотношений (41.10) и (41.11) следуют неравенства

$$9.869\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \leqslant \lambda_1 \leqslant 15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right). \tag{41.12}$$

В частности, для четверти круга единичного радиуса ($a = 1$, $b = 1$) получим

$$19.73 \leqslant \lambda_1 \leqslant 30. \tag{41.13}$$

Чтобы улучшить эту оценку и одновременно получить оценки второго и третьего собственных значений, рассмотрим первые три функции системы (41.4). Функция $u_3(x, y)$ представится тогда в виде

$$u_3(x, y) = a_{31}\varphi_1(x, y) + a_{32}\varphi_2(x, y) + a_{33}\varphi_3(x, y),$$

где

$$\varphi_1(x, y) = xy\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$
$$\varphi_2(x, y) = x^2y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$
$$\varphi_3(x, y) = xy^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right). \qquad (41.14)$$

Уравнение (40.46) принимает вид

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1), & (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2), & (A\varphi_1, \varphi_3) - \lambda(\varphi_1, \varphi_3) \\ (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1), & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2), & (A\varphi_2, \varphi_3) - \lambda(\varphi_2, \varphi_3) \\ (A\varphi_3, \varphi_1) - \lambda(\varphi_3, \varphi_1), & (A\varphi_3, \varphi_2) - \lambda(\varphi_3, \varphi_2), & (A\varphi_3, \varphi_3) - \lambda(\varphi_3, \varphi_3) \end{vmatrix} = 0. \qquad (41.15)$$

Справедливы следующие равенства

$$A\varphi_1 = -\Delta\varphi_1 = 6xy\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right),$$
$$A\varphi_2 = -\Delta\varphi_2 = 2\left[-y + \frac{y^3}{b^2} + \left(\frac{6}{a^2} + \frac{3}{b^2}\right)x^2y\right],$$
$$A\varphi_3 = -\Delta\varphi_3 = 2\left[-x + \frac{x^3}{a^2} + \left(\frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2}\right)xy^2\right]. \qquad (41\ 16)$$

Применяя подстановку $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, легко вычисляем скалярное произведение в (41.15). Например,

$$(A\varphi_1, \varphi_2) = 6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_E x^3y^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy =$$
$$= 6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\int_0^1\int_0^{\pi/2} a^3b^2r^5\cos^3\varphi\sin^2\varphi\,(1 - r^2)\,abr\,dr\,d\varphi =$$
$$= 6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)a^4b^3\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right)\frac{2}{15} = \frac{8a^4b^3}{315}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

и т. д. В левой части уравнения (41.15) получим, таким образом, следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi a^3b^3}{64}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{\pi a^3b^3}{960}, & \frac{8a^4b^3}{315}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{16a^4b^3}{10395}, & \\ & \frac{8a^3b^4}{315}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{16a^3b^4}{10395} & \\ \frac{8a^4b^3}{315}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{16a^4b^3}{10395}, & \pi\left(\frac{11a^3b^3}{1920} + \frac{3a^5b}{640}\right) - \lambda\frac{\pi a^5b^3}{3840}, & \\ & \frac{a^4b^4}{80}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{a^4b^4}{1440} & \\ \frac{8a^3b^4}{315}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{16a^3b^4}{10395}, & \frac{a^4b^4}{80}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - \lambda\frac{a^4b^4}{1440}, & \\ & \pi\left(\frac{11a^3b^3}{1920} + \frac{3ab^5}{640}\right) - \lambda\frac{\pi a^3b^5}{3840} & \end{vmatrix} = 0. \qquad (41.17)$$

В частности, для случая четверти круга единичного радиуса ($a=1$, $b=1$) получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi}{32}-\frac{\pi}{960}\lambda, & \frac{16}{315}-\frac{16}{10395}\lambda, & \frac{16}{315}-\frac{16}{10395}\lambda \\ \frac{16}{315}-\frac{16}{10395}\lambda, & \frac{\pi}{96}-\frac{\pi}{3840}\lambda, & \frac{1}{40}-\frac{1}{1440}\lambda \\ \frac{16}{315}-\frac{16}{10395}\lambda, & \frac{1}{40}-\frac{1}{1440}\lambda, & \frac{\pi}{96}-\frac{\pi}{3840}\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{41.18}$$

Проведем для этого случая численные расчеты. Простой модификацией определителя левой части уравнения (41.18) (мы вычитаем третий столбец из второго и в полученном таким образом определителе прибавляем третью строку ко второй) получим следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi}{32}-\frac{\pi}{960}\lambda, & 0, & \frac{16}{315}-\frac{16}{10395}\lambda \\ \frac{32}{315}-\frac{32}{10395}\lambda, & 0, & \left(\frac{1}{40}+\frac{\pi}{96}\right)-\left(\frac{1}{1440}+\frac{\pi}{3840}\right)\lambda \\ \frac{16}{315}-\frac{16}{10395}\lambda, & \left(\frac{1}{40}-\frac{\pi}{96}\right)-\left(\frac{1}{1440}-\frac{\pi}{3840}\right)\lambda, & \frac{\pi}{96}-\frac{\pi}{3840}\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{41.19}$$

или после разложения определителя по элементам второго столбца:

$$(0.00012368\lambda-0.0077250)\,(0.00000021157\lambda^2-0.000024675\lambda+ \\ +0.00050716)=0,$$

корни которого $\lambda_1\approx 24.90$, $\lambda_2\approx 62.46$, $\lambda_3\approx 91.73$ [1]). Таким образом, мы получили верхние оценки для первых трех собственных значений задачи (41.1), (41.2) в случае четверти круга единичного радиуса.

Соотношение (40.60) позволяет найти нижние оценки для первых трех собственных значений задачи (41.1), (41.2) (см. (41.11); мы полагаем здесь $m=1$, $n=1$ или $m=2$, $n=1$, или $m=1$, $n=2$ в предположении, что $b\leqslant a$), а именно

$$\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2},\qquad \frac{4\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\quad\text{и}\quad \frac{\pi^2}{a^2}+\frac{4\pi^2}{b^2}$$

соответственно. В частности, для $a=b=1$ получаем $2\pi^2$, $5\pi^2$ и $5\pi^2$.

Таким образом, в случае четверти круга единичного радиуса мы получаем для первых трех собственных значений задачи (41.1), (41.2) неравенства

$$19.73\leqslant\lambda_1^{(3)}\leqslant 24.90,\qquad 49.34\leqslant\lambda_2^{(3)}\leqslant 62.46,\qquad 49.34\leqslant\lambda_3^{(3)}\leqslant 91.73. \tag{41.20}$$

[1]) Заметим, что при использовании базиса типа (41.14), элементы которой лишь „слабо ортогональны", вычисление коэффициентов рассматриваемого уравнения (т. е. элементов определителя (41.19)) следует производить с большей точностью.

В сравнении с оценкой (41.13) эта оценка для первого собственного значения лучше; оценки второго и третьего собственных значений очень грубы.

Тот же самый результат мог бы быть получен методом Галёркина (см. гл. 40). См. также пример, касающийся устойчивости эллиптической пластины, в [33].

Пример 41.2. Рассмотрим *изгиб просто опертого бруса переменного кругового сечения* длины l с постоянным коэффициентом упругости E. Радиус r кругового сечения бруса в интервале $[0, l]$ определяется функцией $r = \sqrt{(a+x)}$, $a > 0$ (рис. 36).

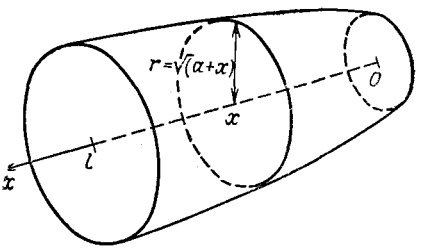

Рис. 36.

Момент инерции кругового бруса по отношению к осям, проходящим через центр круга, определяется (см. [33]) функцией $I(x) = (\pi/4)\, r^4(x) = (\pi/4)\,(a+x)^2$. В рассматриваемой задаче изгиба бруса мы, таким образом, должны определить или оценить первое собственное значение задачи ($u(x)$ — прогиб бруса):

$$E(\pi/4)(a+x)^2 u'' + \lambda u = 0, \tag{41.21}$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{41.22}$$

Мы переписываем уравнение (41.21) в более подходящем виде

$$-u'' - \lambda \frac{4}{E\pi (a+x)^2} u = 0, \tag{41.23}$$

т. е. в виде $Au - \lambda Bu = 0$, где

$$Au = -u'', \quad Bu = \frac{4u}{E\pi (a+x)^2} = q(x)\, u, \tag{41.24}$$

$$q(x) = \frac{4}{E\pi (a+x)^2}. \tag{41.25}$$

Оба оператора имеют достаточно гладкие коэффициенты. Более того, очевидно, что оператор A положительно определен на линеале D_A дважды непрерывно дифференцируемых функций в интервале $[0, l]$, удовлетворяющих условиям (41.22), а оператор B положительно определен на линеале D_B функций, непрерывных в $[0, l]$. Таким образом, оба оператора удовлетворяют предположениям теоремы 40.4. В соответствии с соотношением (40.86) выберем, например, функции f_1 и f_0 в виде

$$f_1(x) = lx - x^2, \quad f_0(x) = \frac{E\pi (a+x)^2}{2} \frac{2}{q(x)}. \tag{41.26}$$

Это возможно ввиду следующих очевидных соотношений:

$$Af_1 = -f_1'' = 2, \quad Bf_0 = q(x) \frac{2}{q(x)} = 2.$$

Отсюда вычисляем (см. (40.88)) постоянные a_0, a_1, a_2:

$$a_0 = (f_0, Bf_0) = \int_0^l q(x) f_0^2(x)\,dx = 4\int_0^l \frac{dx}{q(x)} =$$

$$= E\pi \int_0^l (a+x)^2\,dx = \frac{E\pi}{3}[(a+l)^3 - a^3], \tag{41.27}$$

$$a_1 = (f_1, Bf_0) = \int_0^l q(x) f_0(x) f_1(x)\,dx = 2\int_0^l (lx - x^2)\,dx = \frac{l^3}{3}, \tag{41.28}$$

$$a_2 = (f_1, Bf_1) = \int_0^l q(x) f_1^2(x)\,dx = \frac{4}{E\pi}\int_0^l \frac{(lx-x^2)^2}{(a+x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{E\pi}\left[(4a^2l + 4al^2 + \frac{1}{3}l^3) - (4a^3 + 6a^2l + 2al^2)\ln\frac{a+l}{a}\right]. \tag{41.29}$$

Простым рассуждением (используя минимаксный принцип, см. замечания 39.12 и 39.13; см. также текст вслед за уравнением (40.59)) мы выясняем, далее, что собственные значения задачи

$$-u'' - \lambda \frac{4}{E\pi a^2} u = 0, \tag{41.30}$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \tag{41.31}$$

с коэффициентом $4/E\pi a^2$, „большим", чем функция $q(x)$, не могут быть больше (они даже должны быть меньше) соответствующих собственных значений задачи (41.23), (41.22) [1]). Однако собственные функции задачи (40.30), (40.31) — это $\sin(n\pi x/l)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, откуда получаем нижнюю оценку второго собственного значения λ_2 для нашей задачи

$$l_2 = \frac{E\pi^3 a^2}{l^2}\ ^2). \tag{41.32}$$

Проведем численные расчеты для случая $a = l$. Получим

$$a_0 = \frac{7E\pi l^3}{3}, \quad a_1 = \frac{l^3}{3}, \quad a_2 = \frac{4l^3}{E\pi}\left(\frac{25}{3} - 12\ln 2\right), \quad l_2 = E\pi^3,$$

[1]) Физически это означает, что брус с меньшим сечением сломается раньше, чем брус с большим сечением.

[2]) Аналогичным способом можно получить нижнюю оценку l_1 для первого собственного значения λ_1 задачи (41.21), (41.22), $l_1 = E\pi^3 a^2/4l^2$. Заменяя функцию $q(x)$ в (41.23) на „меньшую" функцию $4/E\pi(a+l)^2$, мы получим для λ_1 верхнюю оценку $L_1 = E\pi^3(a+l)^2/4l^2$. В частности, для $a = l$ мы тогда получим оценку $7.75\,E \leqslant \lambda_1 \leqslant 31.01\,E$, существенно более грубую, чем окончательная оценка (41.33).

так что

$$\varkappa_1 = \frac{a_0}{a_1} = 7E\pi, \quad \varkappa_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{E\pi}{12\left(\frac{25}{3} - 12\ln 2\right)} \approx 5.376\, E\pi.$$

Ясно, что $\varkappa_2 < l_2 < \lambda_2$. Таким образом, все предположения теоремы 40.4 удовлетворены, поэтому для двусторонней оценки первого собственного значения мы можем использовать оценку (40.91), $\varkappa_2 - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\frac{l_2}{\varkappa_2} - 1} \leqslant \lambda_1 \leqslant \varkappa_2$. Для нашего случая получаем

$$5.376E\pi - \frac{1.624\, E\pi}{0.836} \leqslant \lambda_1 \leqslant 5.376E\pi, \text{ т. е. } 10.78E \leqslant \lambda_1 \leqslant 16.89E. \tag{41.33}$$

Полученная оценка относительно груба. См., однако, замечание 40.11. См. также [33].

Часть VI

Некоторые специальные методы. Регулярность слабого решения

Глава 42

Метод конечных элементов

Метод конечных элементов — это по существу метод Ритца, для которого выбран очень специальный базис. К этой, без сомнения верной, но несколько упрощенной характеристике метода, мы позже добавим некоторые уточнения.

Поскольку метод конечных элементов в последнее время стал очень привлекательным, в особенности для инженеров и теоретиков, изложение материала в начале этой главы будет таковым, чтобы он был доступен читателю, не изучившему в деталях четвертую часть этой книги. Мы покажем основную идею метода на простом примере, проясняющем сущность метода и его связь с методом конечных разностей. После этого мы обсудим применения этого метода с несколько более общей точки зрения и отметим некоторые его достоинства и недостатки.

Итак, рассмотрим следующую задачу: нужно найти решение уравнения

$$-\sum_{i,\,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+cu=f \tag{42.1}$$

на прямоугольнике G со сторонами a, b, параллельными осям x_1, x_2, и с нулевым граничным условием

$$u=0 \text{ на } \Gamma. \tag{42.2}$$

Для простоты примем следующие предположения: $f\in L_2(G)$, функции $a_{ij}(x)=a_{ij}(x_1, x_2)$ непрерывно дифференцируемы в $\bar{G}$, кроме того, $a_{ij}(x_1, x_2)=a_{ji}(x_1, x_2)$, функция $c(x_1, x_2)$ непрерывна в $\bar{G}$ и

$$c(x_1\, x_2)\geqslant 0. \tag{42.3}$$

Как известно, однородная эллиптичность уравнения (42.1) в $\bar{G}$ означает, что существует постоянная $k>0$, такая что неравенство

$$\sum_{i,\,j=1}^{2}a_{ij}(x_1, x_2)\,\xi_i\xi_j\geqslant k\,(\xi_1^2+\xi_2^2) \tag{42.4}$$

справедливо для любого вещественного вектора (ξ_1, ξ_2) и любой точки $(x_1, x_2) \in \bar{G}$.

Например, уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f, \quad f \in L_2(G) \tag{42.5}$$

обладает этими свойствами. Для этого уравнения

$$\begin{aligned} &a_{11}(x_1, x_2) = a_{22}(x_1, x_2) \equiv 1, \\ &a_{12}(x_1, x_2) = a_{21}(x_1, x_2) \equiv 0, \quad c(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{42.6}$$

(и, следовательно,

$$\sum_{i,\, j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2)\, \xi_i \xi_j = \xi_1^2 + \xi_2^2). \tag{42.7}$$

Как мы знаем из второй и четвертой частей книги, эта задача при заданных предположениях сводится к задаче нахождения функции $u(x_1, x_2)$, минимизирующей функционал

$$Fu = \int_G \sum_{i,\, j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 + \int_G cu^2\, dx_1\, dx_2 - 2\int_G fu\, dx_1\, dx_2 \tag{42.8}$$

в пространстве V функций из $W_2^{(1)}(G)$, равных нулю (в смысле теории следов) на Γ. В частности, функции, непрерывные и кусочно гладкие в $\bar{G}$ и равные нулю на Γ, принадлежат пространству V. Эти функции будут особенно важны в данной главе.

Выберем в пространстве V некоторый базис $\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \ldots$; далее выберем фиксированное n и решим соответствующую задачу методом Ритца, т. е. минимизируем функционал (42.8) на подпространстве V_n функций вида

$$v_n(x_1, x_2) = b_1^{(n)} \varphi_1(x_1, x_2) + \ldots + b_n^{(n)} \varphi_n(x_1, x_2)\ ^{1}). \tag{42.9}$$

Обозначая, как обычно, минимизирующую функцию через

$$u_n(x_1, x_2) = c_1^{(n)} \varphi_1(x_1, x_2) + \ldots + c_n^{(n)} \varphi_n(x_1, x_2), \tag{42.10}$$

мы получим для неизвестных постоянных $c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$ знакомую систему Ритца

$$\begin{aligned} &((\varphi_1, \varphi_1))\, c_1^{(n)} + ((\varphi_1, \varphi_2))\, c_2^{(n)} + \ldots + ((\varphi_1, \varphi_n))\, c_n^{(n)} = (f, \varphi_1), \\ &((\varphi_2, \varphi_1))\, c_1^{(n)} + ((\varphi_2, \varphi_2))\, c_2^{(n)} + \ldots + ((\varphi_2, \varphi_n))\, c_n^{(n)} = (f, \varphi_2), \\ &\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ &((\varphi_n, \varphi_1))\, c_1^{(n)} + ((\varphi_n, \varphi_2))\, c_2^{(n)} + \ldots + ((\varphi_n, \varphi_n))\, c_n^{(n)} = (f, \varphi_n), \end{aligned} \tag{42.11}$$

---

[1]) Здесь мы используем обозначения, несколько отличающиеся от примененных в гл. 13. В частности, вместо второго нижнего индекса мы используем верхний индекс, поскольку двузначные обозначения появятся также среди значений нижних индексов в последующем примере. Следовательно, принятые обозначения будут более ясными.

где

$$(f, \varphi_r) = \iint\limits_G f\varphi_r\, dx_1, dx_2, \quad r = 1, \ldots, n, \tag{42.12}$$

$$((\varphi_s, \varphi_t)) = \iint\limits_G \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}\, dx_1\, dx_2 + \iint\limits_G c\varphi_s\varphi_t\, dx_1\, dx_2,$$
$$s = 1, \ldots, n, \quad t = 1, \ldots, n. \tag{42.13}$$

В частности, в случае уравнения Пуассона справедливо равенство (см. (42.6))

$$((\varphi_s, \varphi_t)) = \iint\limits_G \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2. \tag{42.14}$$

Теперь выберем функции

$$\varphi_1(x_1, x_2), \ \ldots, \ \varphi_n(x_1, x_n), \tag{42.15}$$

составляющие базис подпространства V_n, следующим специальным образом. Покроем прямоугольник G прямоугольной сеткой с шагами h_1 и h_2 вдоль осей x_1 и x_2 соответственно. Разделим

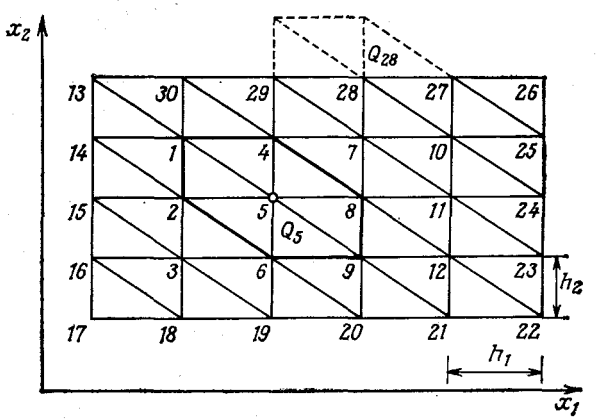

Рис. 37.

каждый из полученных прямоугольников диагональю на два треугольника, как показано на рис. 37, и получим, таким образом, сетку из треугольников. Теперь пронумеруем внутренние узловые точки *(внутренние узлы)* этой сетки; пусть их число равно n (эти точки обозначены числами от 1 до 12 на рис. 37). Далее, пронумеруем узловые точки, лежащие на границе прямоугольника G (так называемые *граничные узлы* сетки); пусть их число равно m (эти точки обозначены числами от 13 до 30 на рис. 37).

Рассмотрим произвольный внутренний узел сетки, пусть это будет узел с номером r; в примере на рис. 37 это узел 5. Построим пирамиду J_r с высотой, равной единице, и основанием (обозначенным через Q_r) в виде шестиугольника, составленного

из шести треугольников, имеющих общую вершину в узле r. На рис. 37 отмечено основание Q_5 пирамиды J_5. Вершины этого основания — узлы 1, 2, 6, 9, 8, 4.

Если мы обозначим через z третью координату декартовой системы $(0; x_1, x_2, z)$ и если x_1^0, x_2^0 — координаты рассматриваемого узла r, то легко получим уравнения граней соответствующей пирамиды:

$$
\begin{aligned}
z &= 1 + \frac{x_1 - x_1^0}{h_1}, \\
z &= 1 + \frac{x_1 - x_1^0}{h_1} + \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}, \\
z &= 1 \qquad\quad + \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}, \\
z &= 1 - \frac{x_1 - x_1^0}{h_1}, \\
z &= 1 - \frac{x_1 - x_1^0}{h_1} - \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}, \\
z &= 1 \qquad\quad - \frac{x_2 - x_2^0}{h_2}.
\end{aligned}
\tag{42.16}
$$

Эти уравнения выписаны соответственно для треугольников $T_{r,1}, \ldots, T_{r,6}$ (составляющих основание Q_r), с которыми смежны грани пирамиды. Это видно из рис. 38, где отмечены треугольники $T_{5,1}, \ldots, T_{5,6}$ с вершинами 1, 2, 5, ..., 4, 1, 5.

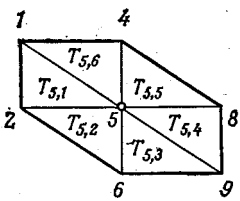

Рис. 38.

Определим функцию $\varphi_r(x_1, x_2)$ (т. е. в нашем случае функцию $\varphi_5(x_1, x_2)$) в $\bar{G}$ таким образом, что для точек, принадлежащих Q_r, она определяется соотношениями (42.16), в то время как во всех остальных точках прямоугольника $\bar{G}$ она полагается равной нулю. Следовательно, поверхность $z = \varphi_r(x_1, x_2)$ лежит на плоскости x_1, x_2, исключая шестиугольник Q_r, над которым она имеет вид шестигранной пирамиды единичной высоты.

Каждая из функций $\varphi_r(x_1, x_2)$, $r = 1, \ldots, n$ (в нашем случае $r = 1, \ldots, 12$), непрерывна в $\bar{G}$ и имеет в $\bar{G}$ кусочно-непрерывные (даже кусочно-постоянные) частные производные первого порядка. Следовательно, эти функции принадлежат пространству $W_2^{(1)}(G)$, и вследствие равенства нулю на Γ (согласно их определению) они принадлежат также пространству V. Можно легко доказать (это следует почти непосредственно из описанной конструкции), что функции $\varphi_r(x_1, x_2)$ линейно независимы в V.

Каждая линейная комбинация (42.9) этих функций, очевидно, принадлежит пространству V, так как каждая из функций $\varphi_r(x_1, x_2)$ принадлежит V. Далее, из определения функций $\varphi_r(x_1, x_2)$ следует, что на внутреннем узле r функция (42.9) принимает значения $b_r^{(m)}$. В частности, для функции (42.10), коэффициенты кото-

рой заданы системой Ритца (42.11), справедливо равенство $u_n(x_1, x_2) = c_r^{(n)}$ для любого внутреннего узла r.

Функции (42.9) и (42.10) принадлежат к так называемым *сплайн-функциям*. В литературе это название обычно используется для функций, непрерывных и кусочно-полиномиальных в $\overline{G}$ (например, кусочно-линейных, как в нашем примере). Функции $\varphi_r(x_1, x_2)$, построенные выше, будут называться *элементарными сплайн-функциями*.

Эти функции не равны нулю только на шести элементах выбранной сетки из треугольников, т. е. только на малой части прямоугольника G (при условии, что эта сеть достаточно мелкая).

Рассмотрим подробнее обсуждавшийся выше случай (см. рис. 37) и исследуем для него более тщательно систему (42.11). В качестве иллюстрации составим пятое уравнение (из двенадцати уравнений) этой системы для случая уравнения Пуассона при $h_1 = h_2 = h$. В этом случае коэффициенты системы заданы формулой (42.14), а в (42.16) мы имеем $h_1 = h_2 = h$.

Вычислим прежде всего произведения $((\varphi_r, \varphi_5))$ $r = 1, \ldots, 12$, определенные согласно (42.14). Вследствие (42.16) для функций $\partial\varphi_5/\partial x_1$ и $\partial\varphi_5/\partial x_2$ мы получим постоянные значения в рассматриваемых треугольниках $T_{5,1}, \ldots, T_{5,6}$, а именно, по порядку,

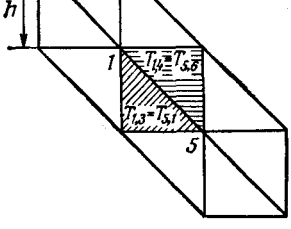

Рис. 39.

$$\frac{1}{h}, \frac{1}{h}, 0, -\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}, 0, \quad (42.17)$$

$$0, \frac{1}{h}, \frac{1}{h}, 0, -\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}. \quad (42.18)$$

Поскольку все функции $\varphi_r(x_1, x_2)$ тождественно равны нулю в Q_5, за исключением функции $\varphi_5(x_1, x_5)$ и «соседних» с ней функций $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$, $\varphi_6(x_1, x_2)$, $\varphi_9(x_1, x_2)$, $\varphi_8(x_1, x_2)$, $\varphi_4(x_1, x_2)$, производные которых по x_1 и x_2 также принимают значения (42.17) и (42.18) соответственно (конечно, в соответствующих треугольниках $T_{1,1}$, $T_{1,2}$, ...), то все произведения $((\varphi_r, \varphi_5))$ равны нулю, за исключением тех, для которых r принимает одно из значений 5, 1, 2, 6, 9, 8, 4. См. также рис. 39.

Площади рассматриваемых треугольников равны $h^2/2$. Вследствие равенства

$$\iint_G \left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2 =$$

$$= \iint_{T_{5,1}} \left[\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)^2 \right] dx_1\, dx_2 + \ldots +$$

$$+ \iint_{T_{5,6}} \left[\left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}\right)^2 \right] dx_1\, dx_2$$

из соотношений (42.14) и (42.17), (42.18) следует, что

$$((\varphi_5,\ \varphi_5)) = \frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{1}{h^2}+0^2\right)+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^2}\right)+\left(0^2+\frac{1}{h^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{h^2}+0^2\right)+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h^2}\right)+\left(0^2+\frac{1}{h^2}\right)\right]=4. \quad (42.19)$$

Тем же способом вычислим (см. также рис. 39)

$$((\varphi_1,\ \varphi_5)) = \iint\limits_{T_{5,6}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)dx_1\,dx_2+$$
$$+\iint\limits_{T_{5,1}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_5}{\partial x_2}\right)dx_1\,dx_2=$$
$$=\frac{h^2}{2}\left[\left(-\frac{1}{h}\right)\cdot 0+0\cdot\left(-\frac{1}{h}\right)+0\cdot\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\cdot 0\right]=0.$$

Аналогично,

$$((\varphi_2,\ \varphi_5))=\frac{h^2}{2}\cdot\left(-\frac{2}{h^2}\right)=-1,\quad ((\varphi_6,\ \varphi_5))=-1,$$
$$((\varphi_9,\ \varphi_5))=0,\quad ((\varphi_8,\ \varphi_5))=-1,\quad ((\varphi_4,\ \varphi_5))=-1.$$

Таким образом, пятое уравнение примет следующий вид:

$$-c_2^{(12)}+4c_5^{(12)}-c_6^{(12)}-c_8^{(12)}-c_4^{(12)}=\iint\limits_{Q_5} f\varphi_5\,dx_1\,dx_2. \quad (42.20)$$

Левая часть этого уравнения, конечно, напоминает левую часть аналогичного уравнения в методе конечных разностей. Уравнение (42.20) содержит только пять ненулевых коэффициентов для неизвестных $c_r^{(12)}$. Как видно из способа получения этого уравнения, другие уравнения этой системы также будут содержать не более пяти ненулевых коэффициентов для неизвестных $c_r^{(12)}$. В случае метода Ритца мы, вообще говоря, не встречаемся с таким явлением. Для метода конечных элементов это свойство матрицы системы является характерным. См. также замечания 42.1 и 42.2.

Как уже отмечалось, функции $\varphi_1(x_1, x_2),\ \ldots\ \varphi_{12}(x_1, x_2)$ линейно независимы в пространстве V[1]). Таким образом, система (42.11) (в нашем случае такая система имеет двенадцать уравнений с двенадцатью неизвестными) однозначно разрешима. Следовательно, мы получим приближение $u_{12}(x_1, x_2)$ (см. (42.10)) искомого решения. Можно показать, что функции вида (42.9) плотны в пространстве V в следующем смысле. Если $u(x_1, x_2)$ — произвольная функция из V и если $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то можно найти такое положительное целое n (т. е. такое малое h, или h_1, h_2 в случае $h_1 \neq h_2$) и такие постоянные $b_r^{(n)}$ $(r = 1, \ldots, n)$, что

[1]) По существу это пространство H_A, если мы следуем терминологии второй и третьей частей этой книги, см. гл. 36.

(см. (42.9))

$$\|u(x_1, x_2) - v_n(x_1, x_2)\|_V < \varepsilon. \qquad (42.21)$$

Отсюда несложными рассуждениями можно доказать сходимость метода конечных элементов (см. доказательство теоремы 34.1; см. также теорему 4.1, [32]). Если $u(x_1, x_2)$ есть слабое решение (или обобщенное решение, если пользоваться терминологией второй части этой книги) рассматриваемой задачи, то в смысле только что приведенного определения близости справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x_1, x_2) = u(x_1, x_2) \text{ в } V. \qquad (42.22)$$

Замечание 42.1. Задача Дирихле для уравнения (42.1) была рассмотрена при однородном граничном условии $u = 0$ на Γ. Оказывается, однородность этого условия несущественна. Для этого случая вернемся к рис. 37 и построим для узловых точек 13, ..., 30, лежащих на границе Γ, пирамиды с основаниями $Q_{13}, \ldots, Q_{30}$, аналогичные построенным для внутренних узловых точек (на рис. 37 показано основание Q_{28}), и элементарные сплайн-функции $\varphi_i(x_1, x_2)$, $i = 13, \ldots, 30$, тождественно равные нулю в $\bar{G}$, за исключением таких частей областей Q_i, которые принадлежат $\bar{G}$ и над которыми график этих функций задан частью соответствующей пирамиды, построенной над Q_i.

Если на границе задано неоднородное граничное условие, то мы знаем значения искомого решения в точках границы, т. е. тем самым и в узловых точках 13, ..., 30. Обозначим эти значения через $u^{(13)}, \ldots, u^{(30)}$ и вместо функций вида (42.9) рассмотрим функции

$$w(x_1, x_2) = b_1^{(12)}\varphi_1(x_1, x_2) + \ldots + b_{12}^{(12)}\varphi_{12}(x_1, x_2) + \\ + u^{(13)}\varphi_{13}(x_1, x_2) + \ldots + u^{(30)}\varphi_{30}(x_1, x_2), \qquad (42.23)$$

где $b_1^{(12)}, \ldots, b_{12}^{(12)}$ — переменные параметры. Каждая из этих функций принимает значения $b_r^{(12)}$ $(r = 1, \ldots, 12)$ на внутренних узловых точках и значения $u^{(r)}$ $(r = 13, \ldots, 30)$ на граничных узловых точках. Как следует из построения функций $\varphi_{13}(x_1, x_2), \ldots$ $\ldots, \varphi_{30}(x_1, x_2)$, функция (42.23) линейна на любом интервале между соседними узлами на границе. В этом смысле заданное граничное условие на Γ является приближенным. (Более подробно об этом см., например, [20].)

Метод Ритца ведет в этом случае к системе, аналогичной (42.11). Уравнения для неизвестных $c_1^{(12)}, \ldots, c_{12}^{(12)}$ с функциями φ_5 и φ_8 в их правых частях, т. е. уравнения, составленные в узлах 5 и 8, остаются без изменений. Уравнения с функциями φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_6, φ_7, φ_9, φ_{10}, φ_{11} и φ_{12} в их правых частях изменятся, так как произведения $((\,,\,))$ этих сплайн-функций с функциями $\varphi_{13}, \ldots, \varphi_{30}$ не равны нулю, как в предыдущем случае, где $u^{(13)} = \ldots = u^{(30)} = 0$

и где функции $\varphi_{13}, \ldots, \varphi_{30}$ вообще не появлялись в процессе вычислений. Например, уравнение, соответствующее узлу 7 (в котором функция φ_7 появляется в правой части), имело вид

$$-c_4^{(12)} + 4c_7^{(12)} - c_8^{(12)} - c_{10}^{(12)} = \iint\limits_{Q_7} f\varphi_7\, dx_1\, dx_2 \qquad (42.24)$$

в случае однородных граничных условий. А сейчас это уравнение принимает вид

$$-c_4^{(12)} + 4c_7^{(12)} - c_8^{(12)} - c_{10}^{(12)} - u^{(28)} = \iint\limits_{Q_7} f\varphi_7\, dx_1\, dx_2. \qquad (42.25)$$

Каждое уравнение, соответствующее узлу, соседнему с некоторым узлом на границе Г, будет включать тогда член, характеризующий значение сплайн-функции, соответствующей этому узлу на границе. (Уравнения, соответствующие узлам 1, 3, 10, 12, будут содержать по два таких члена.) Однако поскольку числа $u^{(13)}, \ldots, u^{(30)}$ известны, их можно перенести в правые части соответствующих уравнений. Таким образом, матрица системы будет одинаковой как для случая однородных, так и для случая неоднородных граничных условий, так что рассматриваемая система будет разрешима и в последнем случае. Аналогично предыдущему случаю можно также доказать плотность множества функций (42.23) в пространстве таких функций из $W_2^{(1)}(G)$, которые удовлетворяют (в смысле следов) заданному граничному условию (естественно, в предположении, что функция, появляющаяся в этом граничном условии, является в точности следом некоторой функции из $W_2^{(1)}(G)$). Из этого следует сходимость метода конечных элементов даже в случае заданного неоднородного граничного условия. (См., например, [20].)

Замечание 42.2. Выше мы показали на одном примере основную идею метода конечных элементов. Источником этого относительно нового метода являются задачи из теории упругости, в частности теории плоской упругости (оболочки, пластины и т. д.). (См., например, [45], [46].) В общем случае тело разделяется на «конечные элементы» (в плоском случае, как правило, на треугольники), и искомая функция (например, смещение) составляется из функций специального вида, так что некоторые условия (например, непрерывность, если искомой функцией является смещение) заведомо выполняются на границах этих треугольников. Если функции над отдельными треугольниками линейны, мы по существу приходим к функциям вида (42.9) или (42.23), являющимся линейными комбинациями кусочно-линейных элементарных сплайн-функций, построенных выше. Часто сетка выбирается нерегулярной в соответствии с формой границы рассматриваемого тела. Но даже в случае регулярных сеток выбор их вида обычно меняется в соответствии с преследуемой целью.

Заметим, что в случае уравнений четвертого порядка (к которым относятся уравнения пластин и оболочек) невозможно использовать кусочно-линейные сплайн-функции в методе конечных элементов, поскольку эти функции имеют в G разрывные частные производные первого порядка и не принадлежат, таким образом, «энергетическому пространству» $W_2^{(2)}(G)$, в котором мы ищем решение. В этом случае и, конечно, также в случае уравнений более высоких порядков мы ищем функции, аналогичные функциям (42.9), (42.23). Эти функции не являются кусочно-линейными, но являются кусочно-полиномиальными с достаточно высокими степенями соответствующих полиномов. При этом надежно выполняется условие, что на границе соответствующих треугольников не только сами функции, но и их частные производные до порядка $k-1$ включительно непрерывны (соответствующее уравнение имеет порядок $2k$). Более подробно см. [20]; см. также [2] и т. д.

Читатель возможно возразит, что в случае уравнений высоких порядков и тем более нерегулярных сеток построение системы Ритца будет слишком утомительно. Эту трудность можно обойти с помощью подходящих преобразований и использования так называемых *кодовых чисел* ([20]) и т. д.). Тогда все вычисления могут быть существенно автоматизированы, и для некоторых относительно общих случаев могут быть непосредственно разработаны программы, но этот путь даже кратко не может быть освещен в данной книге. Нужно отметить, что указанное свойство является одним из главных преимуществ метода конечных элементов.

Метод конечных элементов в сущности является вариационным методом. Мы также уже отмечали его непосредственную связь с методом конечных разностей. Это обстоятельство дает известные преимущества наряду с некоторыми неудобствами. Метод конечных элементов ведет к решению систем с так называемыми *ленточными матрицами* (ненулевые элементы такой матрицы лежат только в определенной «полосе»), либо с матрицами некоторых связанных с этим типов, для решения которых необходимо существенно меньшее число операций, чем для решения «полных» матриц. (Этот факт тесно связан с численной устойчивостью этого метода.) Еще одно преимущество метода конечных элементов состоит в том, что его без существенных затруднений можно применить к решению задач на достаточно «произвольных» областях; например, области могут содержать «дыры» различных типов и т. д. В таких случаях «классический» выбор базиса, согласно гл. 25, часто труден и приводит, как правило, к необходимости рассмотрения только относительно малого числа элементов базиса при использовании классического метода Ритца. С другой стороны, желая получить удовлетворительные результаты методом конечных элементов, необходимо выбирать достаточно мелкую сетку (так как, например, в случае уравнения второго порядка и кусочно-линейных сплайн-

функций имеется разрывность первых производных, которая может быть сделана достаточно малой только при выборе достаточно мелкой сетки). Это ведет к построению и решению большого числа уравнений с большим числом неизвестных (порядка сотен и тысяч). Таким образом, ясно, что этот метод нельзя практически использовать, если не иметь в своем распоряжении достаточно мощной ЭВМ. Определенные трудности возникают также в случае искривленной границы, так как метод конечных элементов исходно задуман для прямоугольников, многоугольников и т. д. Для задач, рассматриваемых на областях с искривленными границами, была разработана теория так называемых *искривленных (изопараметрических) элементов.* Вопросы оптимального выбора полиномиальных функций над конечными элементами (треугольниками и т. д.) рассматриваемой области также составляют широкое поле исследований. Все эти вопросы остаются весьма интересными как для инженеров, так и для математиков. См., например, [3], [47], [20] и т. д. См. также книги [1], [41].

Глава 43

Метод наименьших квадратов на границе для бигармонического уравнения. Метод Треффтца решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Ранее рассмотренные в этой книге методы основывались, грубо говоря, на том, что искомое приближенное решение $u_n(x)$ изучаемой задачи удовлетворяло (по крайней мере в некотором обобщенном смысле) граничным условиям, но не удовлетворяло, вообще говоря, заданному дифференциальному уравнению. В этой главе мы покажем некоторые методы, основанные в некотором смысле на обратном процессе: мы ищем приближенное решение $u_n(x)$ задачи в виде

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} z_i(x), \tag{43.1}$$

где функция $u_n(x)$ удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению для произвольных значений постоянных a_{ni}. Эти постоянные определяются так, чтобы граничные условия удовлетворялись в некотором смысле наилучшим образом. Очевидно, что такие методы используются, когда заданное уравнение линейно и однородно. (Если уравнение не однородно, то нужно сначала найти подходящее частное решение.) Таким образом, если мы выбираем функции $z_i(x)$ так, что каждая из них является решением данного уравнения, то любая линейная комбинация (43.1) также есть решение этого уравнения.

Рассмотрим сначала так называемый *метод наименьших квадратов на границе*, исследованный и детально описанный в [38]. Идея метода весьма проста и будет проиллюстрирована на решении так называемой первой краевой задачи для бигармонического уравнения на плоскости:

$$\Delta^2 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad \text{в } G, \tag{43.2}$$

$$U = g_0(s) \text{ на } \Gamma, \tag{43.3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = g_1(s) \text{ на } \Gamma. \tag{43.4}$$

Это типичная задача на применение этого метода[1]). Поэтому мы сначала кратко обсудим саму задачу и только потом продолжим описание метода.

а) Первая краевая задача для бигармонического уравнения (задача о пластинах и оболочках)

К решению задачи (43.2)—(43.4) ведут, например, задачи о пластинах и оболочках, т. е. задачи так называемой плоской теории упругости. Как известно (см., например, [6]), если плоское односвязное тело находится в состоянии напряжения, характеризуемом компонентами тензора напряжения σ_x, σ_y, σ_{xy}, удовлетворяющими уравнениям равновесия и уравнению совместности, то существует бигармоническая функция $U(x, y)$, так называемая *функция Эйри*, производными которой являются эти компоненты:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{43.5}$$

Напротив, если $U(x, y)$ — произвольная функция, бигармоническая в G, то функции (43.5) удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности, так что они характеризуют определенное состояние напряжения в G. Бигармоническая функция $U(x, y)$ однозначно определяет компоненты тензора напряжения через соотношение (43.5), которые в свою очередь однозначно определяют бигармоническую функцию $U(x, y)$ с точностью до линейной функции вида $ax + by + c$.

Пусть нагрузка на границе Γ характеризуется вектором напряжения $\mathbf{X}_n(s)$ (s — параметр длины дуги границы) с координатами $X_n(s)$, $Y_n(s)$. Для производных $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ функции Эйри справедливы соотношения [6]

$$X_n(s) = \frac{d}{ds}\frac{\partial U}{\partial y}(s), \quad Y_n(s) = -\frac{d}{ds}\frac{\partial U}{\partial x}(s). \tag{43.6}$$

[1]) В этом случае наш метод имеет относительные преимущества в сравнении с обычно используемыми методами (метод конечных разностей, метод конечных элементов, методы, основанные на применении функций комплексного переменного и т. д.). См. [38].

Здесь мы предполагаем, что параметр s возрастает при движении вдоль границы в положительном направлении (так что тело остается с левой стороны по направлению этого движения). Таким образом, на границе Γ производные $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ задаются интегралами от компонент $X_n(s)$, $Y_n(s)$ вектора напряжения. Как правило, мы выбираем значение этих производных равным нулю в некоторой фиксированной точке P границы. Тогда, если известны функции $\partial U/\partial x(s)$, $\partial U/\partial y(s)$ на границе, мы определяем функции $U(s)$ и $\partial U/\partial \nu(s)$ известным способом, выбирая, как правило, $U(P)=0$. Таким образом, мы приходим к задаче (43.2)—(43.4) [1].

Пример 43.1. Рассмотрим прямоугольник $G=(0, a)\times(0, b)$ (пластины и оболочки обычно имеют форму прямоугольника), нагруженный как показано на рис. 40. В качестве точки P

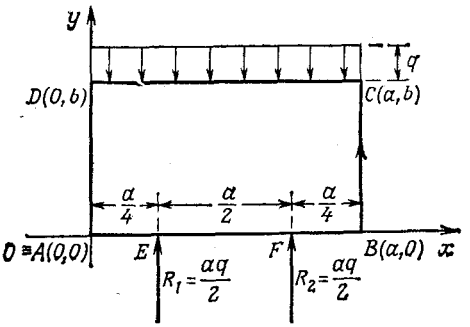

Рис. 40.

выберем точку B и положим в этой точке $s=0$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &0\leqslant s\leqslant b && \text{на } BC,\\ &b\leqslant s\leqslant a+b && \text{на } CD,\\ &a+b\leqslant s\leqslant a+2b && \text{на } DA,\\ &a+2b\leqslant s\leqslant 2a+2b && \text{на } AB, \end{aligned}$$

а из (43.6) следует

$$\frac{\partial U}{\partial x}(s)=-\int_0^s Y_n(t)\,dt, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(s)=\int_0^s X_n(t)\,dt. \tag{43.7}$$

Из рис. 40 видно прежде всего, что на Γ справедливы соотношения

$$X_n(s)\equiv 0, \quad \text{так что} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(s)\equiv 0. \tag{43.8}$$

[1]) Можно также включить в рассмотрение некоторые особенности нагрузки (сосредоточенные силы, см. следующий пример и т. д.) в конечном числе граничных точек. Тогда в этих точках производные $\partial U/\partial x(s)$, $\partial U/\partial y(s)$ будут иметь, вообще говоря, скачок. В таких случаях мы выбираем точку P так, чтобы нагрузка не имела особенности в этой точке.

Далее, в соответствии с первым из соотношений (43.7) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x}(s) \equiv 0 && \text{для } 0 \leqslant s \leqslant b, && \text{т. е. на } BC,\\
&= q(s-b)\ ^{1}) && \text{для } b \leqslant s \leqslant a+b, && \text{т. е. на } CD,\\
&= qa && \text{для } a+b \leqslant s \leqslant a+2b, && \text{т. е. на } DA,\\
&= qa && \text{для } a+2b \leqslant s \leqslant \tfrac{5a}{4}+2b, && \text{т. е. на } AE,\\
&= \frac{qa}{2} && \text{для } \tfrac{5a}{4}+2b \leqslant s \leqslant \tfrac{7a}{4}+2b, && \text{т. е. на } EF,\\
&= 0 && \text{для } \tfrac{7a}{4}+2b \leqslant s \leqslant 2a+2b, && \text{т. е. на } FB.
\end{aligned} \tag{43.9}$$

Далее, $\partial U/\partial s$ равно $\partial U/\partial y$ на BC, $-\partial U/\partial x$ на CD, $-\partial U/\partial y$ на DA, $\partial U/\partial x$ на AB. Таким образом, интегрирование полученных выражений для $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$ по s дает следующие соотношения (записанные здесь кратко):

$$\begin{aligned}
&U(s) \equiv 0 && \text{на } BC,\\
&= -\frac{q(s-b)^2}{2} && \text{на } CD,\\
&= -\frac{qa^2}{2} && \text{на } DA,\\
&= -\frac{qa^2}{2} + qa(s-a-2b) && \text{на } AE,\\
&= -\frac{qa^2}{2} + \frac{qa^2}{4} + \frac{qa}{2}\left(s-\frac{5a}{4}-2b\right) && \text{на } EF,\\
&\equiv 0 && \text{на } FB.
\end{aligned} \tag{43.10}$$

Далее, справедливы соотношения

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial U}{\partial x} \text{ на } BC, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial U}{\partial y} \text{ на } CD,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{\partial U}{\partial x} \text{ на } DA, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ на } AB.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial \nu}(s) \equiv 0 \text{ на } BC,\\
&\equiv 0 \text{ на } CD,\\
&= -qa \text{ на } DA,\\
&\equiv 0 \text{ на } AB.
\end{aligned} \tag{43.11}$$

---

[1]) На CD справедливо соотношение $Y_n = -q$, поскольку рассматривается сжатие. Таким образом, согласно второй из формул (43.6), получаем $d/ds\,(\partial U/\partial x) = +q$. Далее для $s = b$ функция $\partial U/\partial x\,(s)$ непрерывна (как интеграл от функции $Y_n(s)$, имеющей лишь конечный скачок в точке $s = b$). Поэтому должно выполняться соотношение $\partial U/\partial x\,(b) = 0$, поскольку в интервале $[0, b]$ справедливо $\partial U/\partial x = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае нам требуется найти функцию $U(x, y)$, бигармоническую в прямоугольнике G и такую, что U и $\partial U/\partial \nu$ принимают на границе значения (43.10) и (43.11) соответственно. Но это задача типа (43.2)—(43.4). Заметим далее, что функция $U(s)$ принадлежит, очевидно, пространству $W_2^{(1)}(\Gamma)$, поскольку она является интегралом кусочно-непрерывных функций на Γ (эти функции имеют разрывы только в точках E, F, где действуют сосредоточенные нагрузки). Очевидно, что для функции $\partial U/\partial \nu(s)$ справедливо, что $\partial U/\partial \nu \in L_2(\Gamma)$.

б) Понятие метода наименьших квадратов на границе

Пусть задача (43.2)—(43.4) задана на односвязной плоской области G с границей Липшица, и пусть $g_0 \in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $g_1 \in L_2(\Gamma)$ [1]). Рассмотрим систему *бигармонических полиномов* (см. [7])

$$H_1^{(m)}(x, y) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \binom{m}{2i} x^{m-2i} y^{2i} \quad \text{для } m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{43.12}$$

$$H_2^{(m)}(x, y) = \sum_{i=0}^{l+r-1} (-1)^i \binom{m}{2i+1} x^{m-2i-1} y^{2i+1} \quad \text{для } m = 1, 2, \ldots, \tag{43.13}$$

$$H_3^{(m)}(x, y) = \sum_{i=1}^{l} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{m}{2i} x^{m-2i} y^{2i} \quad \text{для } m = 2, 3, \ldots, \tag{43.14}$$

$$H_4^{(m)}(x, y) = \sum_{i=1}^{l+r-1} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{m}{2i+1} x^{m-2i-1} y^{2i+1} \quad \text{для } m = 3, 4, \ldots. \tag{43.15}$$

Здесь m представляет собой степень соответствующего полинома, l—это целая часть числа $m/2$, а r обозначает удвоенную дробную часть этого числа, т. е.

$$l = \left[\frac{m}{2}\right], \quad r = 2\left\{\frac{m}{2}\right\} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ четно}, \\ 1, & \text{если } m \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{43.16}$$

Рассмотрим сначала полиномы (43.12). Для $m = 0$ справедливо равенство

$$H_1^{(0)} = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i \binom{0}{2i} x^{-2i} y^{2i} = (-1)^0 \cdot 1 \cdot x^0 \cdot y^0 = 1; \tag{43.17}$$

[1]) Эти предположения позволяют нам рассмотреть относительно общие нагрузки на границе. В частности, функции (43.10) и (43.11) из предыдущего примера удовлетворяют этим предположениям.

для $m=1$ выполняется равенство

$$H_1^{(1)}=\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{1}{2i}x^{1-2i}y^{2i}=(-1)^0x^1y^0=x; \tag{43.18}$$

аналогично

$$H_1^{(2)}=\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{2}{2i}x^{2-2i}y^{2i}=x^2-y^2, \tag{43.19}$$

$$H_1^{(3)}=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{3}{2i}x^{3-2i}y^{2i}=x^3-3xy^2. \tag{43.20}$$

Подобным образом вычисляем

$$H_2^{(1)}=\sum_{i=0}^{0+1-1}(-1)^i\binom{1}{2i+1}x^{1-2i-1}y^{2i+1}=(-1)^0\cdot 1\cdot x^0\cdot y^1=y,$$

$$H_2^{(2)}=\sum_{i=0}^{1+0-1}(-1)^i\binom{2}{2i+1}x^{2-2i-1}y^{2i+1}=2xy,$$

$$H_2^{(3)}=3x^2y-y^3,$$

$$H_3^{(2)}=-y^2,\quad H_3^{(3)}=-3xy^2,\quad H_4^{(3)}=-y^3 \tag{43.21}$$

и т. д.

Полиномы $H_3^{(m)}$, $H_4^{(m)}$ являются бигармоническими, а полиномы $H_1^{(m)}$, $H_2^{(m)}$ — даже гармоническими. Каждый из полиномов (43.12) — (43.15) является решением бигармонического уравнения (43.2) во всей xy-плоскости. Можно показать (см. [7]), что полиномы (43.12) — (43.15) линейно независимы в G и что любой бигармонический полином (т. е. полином, удовлетворяющий бигармоническому уравнению) может быть однозначно выражен как линейная комбинация бигармонических полиномов (43.12) — (43.15).

Для нашей цели расположим полиномы (43.12) — (43.15) согласно возрастанию их степеней вместе с полиномами тех же степеней, расположенными по возрастанию нижнего индекса. Мы получим тем самым следующую последовательность полиномов (см. (43.17) — (43.21)):

$$z_1(x,\ y)=1,$$

$$z_2(x,\ y)=x,\quad z_3(x,\ y)=y,$$

$$z_4(x,\ y)=x^2-y^2,\quad z_5(x,\ y)=2xy,\quad z_6(x,\ y)=-y^2,$$

$$z_7(x,\ y)=x^3-3xy^2,\quad z_8(x,\ y)=3x^2y-y^3,\quad z_9(x,\ y)=-3xy^2,$$

$$z_{10}(x,\ y)=-y^3,$$

. . . . . (43.22)

Из предыдущей конструкции видно, что для $n>2$ имеется в точности $4n-2$ бигармонических полиномов (43.12) — (43.15)

степени $\leqslant n$. В частности, если мы выберем $n=3$, мы получим в точности 10 полиномов (43.22).

Теперь выберем положительное целое n и будем искать приближенное решение задачи (43.2)—(43.4) в виде

$$V_n(x,\ y)=\sum_{i=1}^{4n-2} b_{ni}z_i(x,\ y).$$

Функция $V_n(x,\ y)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению (43.2) для произвольных значений постоянных b_{ni}. Определим эти постоянные из следующего условия:

$$\int_\Gamma (V_n-g_0)^2\,ds+\int_\Gamma\left(\frac{\partial V_n}{\partial s}-\frac{dg_0}{ds}\right)^2 ds+\int_\Gamma\left(\frac{\partial V_n}{\partial \nu}-g_1\right)^2 ds=\min\ ^{1}) \quad (43.23)$$

(т. е. из условия, что на границе функция $V_n(x,\ y)$ приближает рассматриваемые граничные условия наилучшим возможным способом в смысле наименьших квадратов).

Для коэффициентов a_{ni} функции

$$U_n(x,\ y)=\sum_{i=1}^{4n-2} a_{ni}z_i(x,\ y), \quad (43.25)$$

на которой этот минимум достигается, несложным вычислением получаем систему

$$\sum_{k=1}^{4n-2}\left[(z_i,\ z_k)_{L_2(\Gamma)}+\left(\frac{\partial z_i}{\partial s},\ \frac{\partial z_k}{\partial s}\right)_{L_2(\Gamma)}+\left(\frac{\partial z_i}{\partial \nu},\ \frac{\partial z_k}{\partial \nu}\right)_{L_2(\Gamma)}\right]a_{nk}=$$
$$=(g_0,\ z_i)_{L_2(\Gamma)}+\left(\frac{dg_0}{ds},\ \frac{\partial z_i}{\partial s}\right)_{L_2(\Gamma)}+\left(g_1,\ \frac{\partial z_i}{\partial \nu}\right)_{L_2(\Gamma)},\quad i=1,\ \ldots,\ 4n-2 \quad (43.26)$$

(здесь $(z_i,\ z_k)_{L_2(\Gamma)}=\int_\Gamma z_i z_k\,ds$ и т. д.).

---

[1]) По предположению справедливо, что $g_0\in W_2^{(1)}(\Gamma)$, так что $dg_0/ds\in L_2(\Gamma)$ (в смысле обобщенных производных). Таким образом, все интегралы в (43.23) имеют смысл.

Чтобы определить коэффициенты b_{ni}, можно также использовать условие (43.23), в котором опущен второй интеграл:

$$\int_\Gamma (V_n-g_0)^2\,ds+\int_\Gamma\left(\frac{\partial V_n}{\partial \nu}-g_1\right)^2 ds=\min. \quad (43.24)$$

Однако в этом случае сходимость метода, вообще говоря, не гарантируется. Численные расчеты дают совершенно неудовлетворительные результаты даже в весьма «разумных» случаях.

Заметим, однако, что условие (43.23) может быть записано в виде

$$\|V_n-g_0\|^2_{W_2^{(1)}(\Gamma)}+\left\|\frac{\partial V}{\partial \nu}-g_1\right\|^2_{L_2(\Gamma)}=\min.$$

Решая эту систему (более детально см. последующий текст), мы определяем неизвестные коэффициенты a_{nk} и получаем таким способом бигармоническую функцию (43.25), являющуюся приближением решения данной задачи [1]).

в) Сходимость метода

В этом разделе мы кратко рассмотрим основные идеи доказательства сходимости обсуждаемого метода. Более подробно читатель может ознакомиться с этим доказательством в статье [38].

Разрешимость системы (43.26)

Обозначим через M множество линейных комбинаций функций $z_1(x, y), \ldots, z_{4n-2}(x, y)$, т. е. линеал функций вида

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{4n-2} \alpha_i z_i(x, y), \tag{43.27}$$

где α_i $(i = 1, \ldots, 4n-2)$ — вещественные числа, и обозначим

$$(u, v)_\Gamma = (u, v)_{L_2(\Gamma)} + \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}\right)_{L_2(\Gamma)} + \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu}\right)_{L_2(\Gamma)}, \quad u, v \in M. \tag{43.28}$$

Если мы обозначим далее

$$c_i = (g_0, z_i)_{L_2(\Gamma)} + \left(\frac{dg_0}{ds}, \frac{\partial z_i}{\partial s}\right)_{L_2(\Gamma)} + \left(g_1, \frac{\partial z_i}{\partial \nu}\right)_{L_2(\Gamma)}, \quad i = 1, \ldots, 4n-2,$$

то систему (43.26) можно записать в более простом виде

$$\sum_{k=1}^{4n-2} (z_i, z_k)_\Gamma a_{nk} = c_i, \quad i = 1, \ldots, 4n-2. \tag{43.29}$$

Легко показать (подробно см. [38]), что соотношение (43.28) задает скалярное произведение на множестве M (т. е. на множестве функций вида (43.27)).

Очевидно, что определитель матрицы системы (43.29) есть определитель Грама для функций $z_1(x, y), \ldots, z_{4n-2}(x, y)$ в предгильбертовом пространстве S с введенным выше скалярным произведением. Функции $z_1(x, y), \ldots, z_{4n-2}(x, y)$ линейно независимы в M, и поэтому также и в S. Следовательно, определитель системы (43.29) отличен от нуля и рассматриваемая система однозначно разрешима.

---

[1]) При вычислении коэффициентов системы (43.26) необходимо соблюдать осторожность. Например, при вычислении $\partial z_i/\partial s$ на стороне CD прямоугольника на рис. 40 получим $\partial z_i/\partial s = -\partial z_i/\partial x$ и т. д. См. также численный пример в [38].

Сходимость

Ответ на вопрос, сходится ли последовательность функций (43.25), и к какой функции или в каком смысле она сходится, более труден.

В [32] даны следующие два утверждения (мы все время предполагаем, что граница Γ области G есть граница Липшица):

1. Следы элементов из пространства $W_2^{(2)}(G)$ плотны в пространстве $W_2^{(1)}(\Gamma)\times L_2(\Gamma)$ в следующем смысле: для любых двух функций $g_0\in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $g_1\in L_2(\Gamma)$ и для любого $\eta>0$ существует функция $z\in W_2^{(2)}(G)$, такая что (в смысле теории следов) справедливы соотношения

$$\|z-g_0\|_{W_2^{(1)}(\Gamma)}<\eta, \quad \left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}-g_1\right\|_{L_2(\Gamma)}<\eta. \tag{43.30}$$

На основе этого утверждения можно тогда построить для заданных функций $g_0\in W_2^{(1)}(\Gamma)$ и $g_1\in L_2(\Gamma)$ последовательность функций $v_n\in W_2^{(2)}(G)$, таких что справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n-g_0\|_{W_2^{(1)}(\Gamma)}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\partial v_n}{\partial \nu}-g_1\right\|_{L_2(\Gamma)}=0. \tag{43.31}$$

Поскольку каждая из функций $v_n(x, y)$ принадлежит пространству $W_2^{(2)}(G)$ и поскольку билинейная форма, соответствующая бигармоническому оператору, является $\mathring{W}_2^{(2)}(G)$—эллиптической (гл. 33), то для каждой из этих функций существует в точности одно слабое решение $\tilde{v}_n\in W_2^{(2)}(G)$ задачи

$$\Delta^2\tilde{v}_n=0 \text{ в } G,$$

$$\tilde{v}_n=v_n, \quad \frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial\nu}=\frac{\partial v_n}{\partial\nu} \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов.}$$

Второе из упомянутых утверждений описывает важное свойство последовательности $\{\tilde{v}_n(x, y)\}$.

2. Последовательность функции $\tilde{v}_n(x, y)$, построенная только что описанным способом, сходится в пространстве $L_2(G)$ к функции $u\in L_2(G)$ [1]), однозначно определяемой заданными функциями $g_0\in W_2^{(1)}(\Gamma)$ и $g_1\in L_2(\Gamma)$ (и, таким образом, не зависящей от выбора последовательности $\{v_n(x, y)\}$, от которой мы требуем лишь, чтобы она удовлетворяла условию (43.31)).

Функция $u(x, y)$ называется *очень слабым решением задачи* (43.2)—(43.4).

Заметим, что задача (43.2)—(43.4) не должна иметь слабого решения в смысле определения 32.2, поскольку—при заданных

[1]) Мы обращаем внимание читателя на тот факт, что мы не утверждаем ничего, относящегося к сходимости в пространстве $W_2^{(2)}(G)$.

предположениях, касающихся функций $g_0(s)$, $g_1(s)$ и границы Γ,— необходимо существование функции $u \in W_2^{(2)}(G)$, для которой справедливы равенства

$$u = g_0(s), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1(s) \text{ на } \Gamma$$

в смысле теории следов. (По этой же причине невозможно также, вообще говоря, использовать обычные вариационные методы — метод Ритца, метод конечных элементов и т. д. — для получения приближенного решения этой задачи.) В соответствии с утверждением 2 существует, однако, очень слабое решение рассматриваемой задачи (которое может быть слабым или, возможно, классическим решением в зависимости от свойств границы Γ и функций $g_0(s)$, $g_1(s)$). На основании (43.31) можно ожидать, что последовательность (43.25), построенная методом наименьших квадратов на границе, будет сходиться в пространстве $L_2(G)$ к очень слабому решению

$$\lim_{n\to\infty} \| U_n - u \|_{L_2(G)} = 0. \tag{43.32}$$

Для того чтобы доказать, что это действительно так, достаточно доказать, что следы линейных комбинаций бигармонических полиномов (43.12)—(43.15) плотны в пространстве $W_2^{(1)}(\Gamma) L_2(\Gamma)$ в упомянутом выше смысле. Действительно, пусть для каждой пары функций $g_0 \in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $g_1 \in L_2(\Gamma)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию

$$V(x, y) = \sum_{k=1}^{4n-2} b_k z_k(x, y),$$

такую что в смысле следов справедливы неравенства

$$\| V - g_0 \|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial \nu} - g_1 \right\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon.$$

Тогда ввиду (43.23) тем более будут справедливы неравенства

$$\| U_n - g_0 \|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{\partial U_n}{\partial \nu} - g_1 \right\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon, \tag{43.33}$$

где

$$U_n(x, y) = \sum_{k=1}^{4n-2} a_k z_k(x, y)$$

— линейная комбинация функций $z_k(x, y)$ с коэффициентами, определяемыми методом наименьших квадратов на границе. Таким образом, справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \| U_n - g_0 \|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\partial U_n}{\partial \nu} - g_1 \right\|_{L_2(\Gamma)} = 0,$$

откуда по утверждению 2 следует справедливость соотношения (43.32).

Каждый бигармонический полином $P(x, y)$ (т. е. полином, удовлетворяющий бигармоническому уравнению) может быть выражен, причем единственным образом (см. с. 526), как линейная комбинация бигармонических полиномов (43.12)—(43.15). Следовательно, чтобы доказать рассматриваемую плотность множества следов линейных комбинаций бигармонических полиномов (43.12)—(43.15), достаточно доказать, что для любой пары функций $g_0 \in W_2^{(1)}(\Gamma)$ и $g_1 \in L_2(\Gamma)$ можно найти бигармонический полином $P(x, y)$, такой что

$$\|P - g_0\|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial P}{\partial \nu} - g_1\right\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon \tag{43.34}$$

справедливы в смысле следов. Однако поскольку функции из $W_2^{(2)}(G)$ обладают этим свойством в соответствии с утверждением 1, достаточно доказать, наконец, следующее утверждение.

3. Для любой функции $z \in W_2^{(2)}(G)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует бигармонический полином $P(x, y)$, такой что неравенства

$$\|P - z\|_{W_2^{(1)}(\Gamma)} < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial P}{\partial \nu} - \frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|_{L_2(\Gamma)} < \varepsilon \tag{43.35}$$

справедливы в смысле теории следов.

Доказательство утверждения 3 довольно сложно. Мы продемонстрируем здесь только основные идеи этого доказательства, более подробно читатель может с ним ознакомиться в статье [38].

Итак, пусть $z \in W_2^{(2)}(G)$ — заданная функция. Обозначим через $u_0 \in W_2^{(2)}(G)$ слабое решение бигармонической задачи с граничными условиями

$$u_0 = z, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \nu} \text{ на } \Gamma \tag{43.36}$$

в смысле теории следов. Поскольку $z \in W_2^{(2)}(G)$, такое решение существует и единственно.

Пусть $\{G_j\}$ — последовательность ограниченных односвязных областей с границами Липшица Γ_j, таких что справедливы соотношения

$$\overline{G} \subset G_j, \quad \overline{G}_{j+1} \subset G_j \text{ для любого } j = 1, 2, \ldots,$$
$$\lim_{j \to \infty} m(G_j - \overline{G}) = 0, \tag{43.37}$$

где $m(G_j - \overline{G})$ — мера Лебега области $G_j - \overline{G}$. (Таким образом, область G приближена «снаружи» последовательностью областей G_j.) Такая последовательность областей обязательно существует (для ее построения мы можем использовать, например, конформное отображение внешности области G на внешность круга; см. рис. 41, где G — прямоугольник из примера 43.1).

Расширим функцию $u_0(x, y)$ на область G_1 (т. е. на «наибольшую» из областей G_j) так, чтобы для полученной таким образом

функции (обозначим ее через $U_0(x, y)$) выполнялось условие $U_0 \in \in W_2^{(2)}(G_1)$. (Это возможно, см. [32].) Рассматривая функцию $U_0(x, y)$ только на одной из меньших областей G_j (обозначим эту функцию через $U_{0j}(x, y)$), мы, очевидно, опять получим, что $U_{0j} \in W_2^{(2)}(G_j)$. Обозначим через $u_j(x, y)$ слабое решение бигармонической задачи на области G_j, удовлетворяющее в смысле теории следов условиям

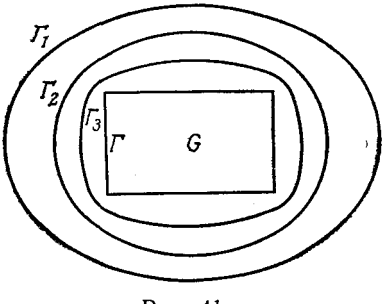

Рис. 41.

$$u_j = U_{0j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial \nu} = \frac{\partial U_{0j}}{\partial \nu} \text{ на } \Gamma_j, \tag{43.38}$$

и расширим это решение (обозначая полученную функцию через $U_j(x, y)$) на область G_1 таким образом, чтобы вне области G_j выполнялось $U_j(x, y) = U_0(x, y)$. Опять же получим $U_j \in W_2^{(2)}(G_1)$. Обозначим далее

$$U_j(x, y) - U_0(x, y) = Z_j(x, y). \tag{43.39}$$

Таким образом, $Z_j(x, y) \equiv 0$ вне области G_j.

Итак, сущность доказательства утверждения 3 состоит в проверке того факта, что из последовательности функций $Z_j(x, y)$ можно выбрать подпоследовательность $\{Z_{j_k}(x, y)\}$, сходящуюся в пространстве $W_2^{(2)}(G_1)$ к функции $Z = 0$. (Это доказательство детально проведено в цитированной статье [38].) Следовательно, согласно (43.39) и в соответствии с определениями функций $U_j(x, y)$ и $U_0(x, y)$, несложным рассуждением можно получить, что для достаточно большого значения нижнего индекса j_k величина

$$\| u_{j_k} - u_0 \|_{W_2^{(2)}(G)} \tag{43.40}$$

достаточно мала. Однако бигармоническое уравнение является уравнением с постоянными коэффициентами. Поэтому (см. замечания 46.1 и 46.2) его слабое решение $u_{j_k}(x, y)$ имеет непрерывные производные всех порядков в G_{j_k} (и, таким образом, в $\overline{G}$) и удовлетворяют заданному уравнению в классическом смысле. (Для того чтобы получить непрерывность производных в *замкнутой* области $\overline{G}$, нужно построить описанную выше последовательность областей.) Теперь используем известные результаты (см., например, [6]). Прежде всего каждая гармоническая функция в G может быть представлена в виде $\mathrm{Re}\,[\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)]$, где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — подходящие голоморфные функции комплексного переменного; далее, функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, равно как и необходимые производные этих функций, могут быть приближены с произвольной точ-

ностью полиномами от переменной z при условии, что эти функции и их соответствующие производные непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$. Поэтому из не очень сложного рассуждения следует, что существует бигармонический полином $P(x, y)$, такой что величина $\|P-u_0\|_{W_2^{(2)}(G)}$ достаточно мала при условии, что степень полинома достаточно велика. Теперь утверждение 3 немедленно следует из условий (43.36) и теоремы 30.1.

Как указывалось выше, доказательство сходимости обсуждаемого метода сводится лишь к доказательству предложенного утверждения. Следовательно, требуемый результат может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 43.1. *Пусть G — односвязная область с границей Липшица, $g_0 \in W_2^{(1)}(\Gamma)$, $g_1 \in L_2(\Gamma)$. Тогда метод наименьших квадратов на границе для задачи* (43.2)—(43.4) *сходится.*

С практической точки зрения этот результат означает, что каждая функция $U_n(x, y)$, построенная нашим методом и удовлетворяющая, таким образом, заданному уравнению в классическом смысле, удовлетворяет, грубо говоря, граничным условиям с произвольной точностью при условии, что n достаточно велико.

Модификация этого метода для случая многосвязных областей описана в работе K. Rektorys, J. Daneš ová, J. Matyska, Č. Vitner „Aplikace matematiky“ 22, 1977.

г) Метод Треффтца

В последнем разделе данной главы мы обсудим кратко так называемый *метод Треффтца* решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В действительности этот метод связан в определенной степени с предыдущим методом. Дело в том, что здесь предпринимается попытка получить приближенное решение данной задачи в виде линейной комбинации функций, удовлетворяющих заданному уравнению и не удовлетворяющих, вообще говоря, граничному условию [1]).

Итак, пусть дана задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$-\Delta u = 0 \text{ в } G, \tag{43.41}$$

$$u = g(S) \text{ на } \Gamma. \tag{43.42}$$

[1]) Некоторые авторы понимают под методом Треффтца любой метод, состоящий в определении приближенного решения в виде линейной комбинации функций, удовлетворяющих данному уравнению и приближающих граничные условия. В этой терминологии описанный выше метод наименьших квадратов на границе тоже можно назвать методом Треффтца.

Решение этой задачи можно получить, как мы знаем из гл. 34, в виде функции, минимизирующей функционал

$$Fv = \int_G \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{43.43}$$

среди всех функций из пространства $W_2^{(1)}(G)$, удовлетворяющих в смысле теории следов условию (43.42) (конечно, в предположении, что функция $g(S)$ является следом некоторой функции этого пространства).

Без потери общности можно допустить, что

$$\int_\Gamma g(S)\, dS = 0. \tag{43.44}$$

Если бы это было не так, можно было бы найти постоянную c, такую что для функции $\tilde{g}(S) = g(S) + c$ было бы справедливо свойство (43.44); если $\tilde{u}(x)$ является решением задачи с граничным условием $\tilde{u} = \tilde{g}(S)$ на Γ, то $u = \tilde{u} - c$ является решением рассматриваемой задачи с граничным условием $u = g(S)$ на Γ.

Пусть

$$v_1(x), \ \ldots, \ v_n(x), \ \ldots \tag{43.45}$$

— система функций (гармонических в G и удовлетворяющих условию (43.44)), которая линейно независима и полна в пространстве функций из $W_2^{(1)}(G)$, удовлетворяющих условию (43.44).

Выберем положительное целое n и будем искать приближенное решение задачи (43.41), (43.42) в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} v_k(x) \tag{43.46}$$

с постоянными $a_k^{(n)}$, определяемыми из условия

$$\int_G \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial (u - u_n)}{\partial x_i} \right]^2 dx = \min, \tag{43.47}$$

где $u \in W_2^{(1)}(G)$ является неизвестным решением рассматриваемой задачи.

Как можно найти простым вычислением, из условия (43.47) следует система уравнений

$$\int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial (u - u_n)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx = 0, \quad k = 1, \ \ldots, \ n, \tag{43.48}$$

для неизвестных постоянных $a_k^{(n)}$. Система (43.48) содержит, возможно, неизвестную функцию $u(x)$. Однако применяя теорему Грина и используя тот факт, что функции $v_k(x)$ являются гармо-

ническими, мы из системы (43.48) легко получаем систему

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \int_\Gamma v_k \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\, dS = \int_\Gamma g \frac{\partial v_j}{\partial \nu}\, dS, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (43.49)$$

где $\partial/\partial\nu$ — производная по внешней нормали. Можно показать (более подробно см. [27]), что при заданных условиях система (43.49) имеет в точности одно решение и что $u_n \to u$ в метрике пространства $W_2^{(1)}(G)$ равномерно в любой замкнутой области, лежащей в G.

Что касается обобщения рассматриваемого метода, некоторых его приложений и возможности их использования для получения оценки ошибки при применении метода Ритца, см. [27]. О современном подходе к вариационным задачам, касающимся этих вопросов, см. [17].

Глава 44

Метод ортогональных проекций

В этой главе мы предлагаем еще один метод, подходящий для решения однородных дифференциальных уравнений с неоднородными граничными условиями, и кратко наметим его модификацию для решения неоднородных дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями. Мы отметим также возможность его применения для получения оценки ошибки при построении приближенных решений, например методом Ритца.

Вспомним прежде всего (см. теорему 6.14), что мы понимаем под проекцией элемента в некоторое подпространство. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (v, u), а H_1 — линейное подпространство этого пространства. Мы говорим, что элемент $u \in H$ *ортогонален подпространству* H_1, и пишем $u \perp H_1$, если u ортогонален любому элементу v из этого подпространства, т. е. если для любого $v \in H_1$ верно равенство $(u, v) = 0$. Множество всех элементов $u \perp H_1$ пространства H снова составляет подпространство в H (см. гл. 6). Обозначим это подпространство через H_2. Мы пишем $H = H_1 \oplus H_2$ и говорим, что H есть *ортогональная сумма подпространств* H_1 *и* H_2. Подпространство H_2 называется *ортогональным дополнением пространства* H_1 *в пространстве* H, и наоборот. Любой $u \in H$ может быть разложен — на самом деле однозначно — в сумму $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in H_1$, $u_2 \in H_2$. Элементы u_1 и u_2 называются *ортогональными проекциями* элемента u в подпространствах H_1 и H_2 соответственно. Если

$$v_1, v_2, \ldots \qquad (44.1)$$

и

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \qquad (44.2)$$

являются ортонормированными базисами в H_1 и в H_2 соответственно, то справедливы соотношения

$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (u, v_i) v_i, \tag{44.3}$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (u, \varphi_i) \varphi_i. \tag{44.4}$$

Таким образом, построение проекции элемента u в заданное подпространство сводится к построению ортонормированного базиса в этом подпространстве и соответствующего ряда Фурье (ряда (44.3) или (44.4)).

Сейчас мы покажем, как эти понятия и результаты можно применить к решению однородных дифференциальных уравнений с неоднородными граничными условиями. Идею этого метода (так называемого *метода ортогональных проекций*) продемонстрируем сначала на двух простых примерах.

Пример 44.1. Рассмотрим задачу

$$Au \equiv -\Delta u + 4u = 0 \text{ в } G, \tag{44.5}$$

$$u = g(S) \text{ на } \Gamma. \tag{44.6}$$

Пусть $w(x)$ — функция из пространства $W_2^{(1)}(G)$, такая что

$$w = g(S) \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов.} \tag{44.7}$$

В соответствии с определением слабого решения нужно найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям

$$u - w \in V, \tag{44.8}$$

$$((v, u)) \equiv A(v, u) \equiv \int_G \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + 4vu \right) dx = 0 \text{ для любого } v \in V. \tag{44.9}$$

Здесь

$$V = \{v:\ v \in W_2^{(1)}(G),\ v = 0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле теории следов}\} = \mathring{W}_2^{(1)}(G). \tag{44.10}$$

Очевидно, что форма $A(v, u)$ V-эллиптична (отметим, что член $4vu$ даже $W_2^{(1)}(G)$-эллиптичен), так что в соответствии с гл. 33 существует в точности одно слабое решение данной задачи, характеризуемое свойствами (44.8), (44.9).

Поскольку форма $A(v, u)$, очевидно, симметрична в пространстве $W_2^{(1)}(G)$ и в то же время $W_2^{(1)}(G)$-эллиптична, в пространстве $W_2^{(1)}(G)$ можно ввести скалярное произведение $(v, u)^A$ соотношением

$$(v, u)^A = A(v, u) \tag{44.11}$$

(см. замечание 33.5). Метрика, порождаемая на элементах пространства $W_2^{(1)}(G)$ этим скалярным произведением, эквивалентна

(см. упомянутую гл.) метрике пространства $W_2^{(1)}(G)$. Обозначим это новое пространство через W; таким образом, его элементы являются элементами пространства $W_2^{(1)}(G)$, а метрика в нем порождена скалярным произведением (44.11). Далее, пусть V_1 — пространство с той же самой метрикой, но элементы которого являются элементами пространства V, т. е. функциями, равными нулю (в смысле теории следов) на Г. Поскольку V является линейным подпространством пространства $W_2^{(1)}(G)$ и метрики пространств $W_2^{(1)}(G)$ и W эквивалентны, V_1 также является линейным подпространством пространства W (т. е. это полное линейное пространство, см. определение 6.23). Обозначим через V_2 его ортогональное дополнение в W, так что $W = V_1 \oplus V_2$.

Пусть u_1 — ортогональная проекция (в метрике пространства) элемента w (см. (44.7)) в подпространство V_1, так что

$$w = u_1 + u, \quad u_1 \in V_1, \quad u \in V_2. \tag{44.12}$$

Мы утверждаем, что u является слабым решением задачи (44.8), (44.9). В самом деле, элементы v пространства V_1 являются как раз элементами пространства V. Поскольку элемент u принадлежит пространству V_2, он ортогонален (относительно скалярного произведения (44.11)) любому элементу $v \in V_1$. Поэтому он ортогонален также любому элементу $v \in V$, так что соотношение

$$((v, u)) = A(v, u) = 0 \text{ справедливо для любого } v \in V. \tag{44.13}$$

Из (44.12), далее, следует, что $u - w = -u_1 \in V_1$ и, таким образом,

$$u - w \in V. \tag{44.14}$$

Полученная функция u удовлетворяет обоим условиям (44.8), (44.9). Из единственности слабого решения теперь следует, что это и есть в точности искомое решение.

Следовательно, если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированный базис (относительно скалярного произведения (44.11)) в пространстве V_1, то справедливо соотношение

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (w, \varphi_i)^A \varphi_i. \tag{44.15}$$

Если известен ортонормированный базис $\{v_i\}$ (относительно того же самого скалярного произведения в пространстве V_1, а этот базис, как правило, легче найти), то справедливо соотношение

$$u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (w, v_i)^A v_i, \tag{44.16}$$

и $u = w - u_1$. Решение данной задачи методом ортогональных проекций, как мы видим, весьма просто, особенно с теоретической точки зрения. С практической же точки зрения построение орто-

нормированного базиса в V_1 или V_2 представляет, конечно, определенную трудность.

Отметим, что проекцию элемента w в пространство V_1 или V_2 не обязательно реализовывать с помощью ортонормированного базиса; для этой цели можно использовать произвольные базисы этих пространств. Метод ортогональных проекций в пространство V_1 или V_2 совпадет тогда с методом Ритца или Треффтца соответственно. См. также книгу [27].

Пример 44.2. Теперь будем решать задачу, аналогичную задаче в примере 44.1, но для оператора $A=-\Delta$ вместо оператора $-\Delta+4$. Таким образом, нужно найти функцию $u\in W_2^{(1)}(G)$, такую что

$$u-w\in V=\mathring{W}_2^{(1)}(G), \tag{44.17}$$

$$((v, u))\equiv A(v, u)=\int\limits_G \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx=0 \text{ для всех } v\in V. \tag{44.18}$$

Основное отличие от предыдущего случая состоит в том, что эта форма $A(v, u)$ не является здесь $\mathring{W}_2^{(1)}(G)$-эллиптичной (она лишь V-эллиптична) и что выражение $A(v, u)$, рассмотренное над элементами пространства $W_2^{(1)}(G)$, не обладает тем самым всеми необходимыми свойствами скалярного произведения.

В рассматриваемом случае эту трудность можно обойти способом, подобным описанному в гл. 35, с. 420. Разложим пространство $W_2^{(1)}(G)$ в ортогональную сумму подпространств

$$W_2^{(1)}(G)=Q\oplus P, \tag{44.19}$$

где P — подпространство всех функций, постоянных в G, а Q — подпространство всех функций $u\in W_2^{(1)}(G)$, для которых справедливо соотношение

$$\int\limits_G u(x)\,dx=0. \tag{44.20}$$

Таким образом, ортогональная проекция v_Q произвольного элемента $v\in V$ в подпространство Q является функцией вида

$$v_Q=v+k, \tag{44.21}$$

где k — постоянная (однозначно определенная), такая что функция v_Q удовлетворяет (44.20). Отметим, что если $k\neq 0$, то условие $v_Q\in V$ не выполняется, поскольку (в смысле теории следов) $v_Q\neq 0$ на Γ: из (44.21) тогда следует, что $v_Q=k$ на Γ.

Обозначим через V_Q подпространство ортогональных проекций всех элементов v из пространства V в подпространство Q (короче, ортогональную проекцию V в Q). Таким образом, каждому $v\in V$ соответствует вследствие (44.21) в точности одно $v_Q\in V_Q$, и обратно, каждому $v_Q\in V_Q$ соответствует в точности одно $v\in V$, т. е. функция $v=v_Q-k$, такая что в смысле теории следов $v=0$ на Γ.

Обозначим, далее, через w_Q ортогональную проекцию функции $w(x)$ (из (44.17)) в пространство Q, т. е. функцию

$$w_Q = w + c \tag{44.22}$$

(где c — подходящая постоянная), удовлетворяющую условию (44.20).

Как известно из гл. 35, с. 421, форма $((v, u)) = A(v, u)$, задаваемая соотношением (44.18), Q-эллиптична. Аналогично предыдущему случаю введем на Q скалярное произведение

$$(v, u)^A = A(v, u) \tag{44.23}$$

и обозначим через Q_A и V_1 пространства, метрики которых порождены скалярным произведением (44.23), а их элементы принадлежат пространствам Q и V_Q соответственно. Далее, обозначим через V_2 ортогональное дополнение пространства V_1 в пространстве Q_A:

$$Q_A = V_1 \oplus V_2 \tag{44.24}$$

и разложим w_Q в этих подпространствах:

$$w_Q = w_1 + w_2, \quad w_1 \in V_1, \quad w_2 \in V_2. \tag{44.25}$$

Вообще говоря, элемент w_2 не будет теперь слабым решением задачи (44.17)—(44.18). Проверим, что условие (44.18) удовлетворяется. В самом деле, для любого $v \in V_1$ справедливы равенства $((v, w_2)) = A(v, w_2) = 0$, поскольку $w_2 \in V_2$. Пространство V_1 состоит из тех же самых элементов, что и пространство V_Q, и вследствие (44.21) элементы пространства V_Q отличаются от элементов пространства V только постоянными слагаемыми. Следовательно, справедливо соотношение

$$A(v, w_2) = 0 \text{ для любого } v \in V, \tag{44.26}$$

что и требовалось. Однако, вообще говоря, условие (44.17) не удовлетворяется. Из построения функции w_2 следует, что на границе Γ, вообще говоря, выполняется равенство $w - w_2 = k$ (в смысле теории следов), где k — некоторая постоянная. Таким образом, функция w_2 является слабым решением рассматриваемого уравнения, но ее необходимо увеличить на подходящую постоянную, чтобы она превратилась в искомое решение.

Для практического построения функции $w_2(x)$ (и, таким образом, решения $u(x) = w_2(x) + k$) достаточно знать ортонормированный базис $\{\varphi_i\}$ (или $\{v_i\}$) (относительно скалярного произведения (44.23)) в пространстве V_2 (или V_1) и построить ряд Фурье

$$w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (w_Q, \varphi_i)^A \varphi_i \tag{44.27}$$

(или

$$w_2 = w_Q - \sum_{i=1}^{\infty} (w_Q, v_i)^A v_i, \tag{44.28}$$

где функция w_Q задана равенством (44.22)). Тем самым задача решена.

Предыдущие рассуждения можно легко распространить на более общие задачи с неоднородными граничными условиями.

Пусть (см. определение (32.2)) нужно найти функцию $u \in W_2^{(k)}(G)$, такую что

$$((v, u)) = 0 \text{ для всех } v \in V, \tag{44.29}$$

$$u - w \in V. \tag{44.30}$$

Допустим прежде всего, что форма $((v, u))$ является $W_2^{(k)}(G)$-эллиптичной и симметричной в пространстве $W_2^{(k)}(G)$. Обозначим через W пространство, элементы которого являются элементами пространства $W_2^{(k)}(G)$ и в котором скалярное произведение элементов v, u задано формой $((v, u))$. Пусть V_1 — подпространство пространства W, элементы v которого являются элементами пространства V, и пусть V_2 — его ортогональное дополнение в W, так что

$$W = V_1 \oplus V_2. \tag{44.31}$$

Таким образом, для любых двух функций $v \in V_1$ и $u \in V_2$

$$((v, u)) = 0. \tag{44.32}$$

Это как раз означает, что любая функция $u \in V_2$ является слабым решением рассматриваемого однородного дифференциального уравнения, поскольку соотношение (44.32) справедливо для любого $v \in V_1$ и тем самым для любого $v \in V$.

Функцию $w(x)$, характеризующую, согласно (44.30), рассматриваемые устойчивые неоднородные граничные условия, можно единственным образом разложить (в соответствии с (44.31)) в сумму

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x), \tag{44.33}$$

где $w_1 \in V_1$ и $w_2 \in V_2$. Простые рассуждения, аналогичные проведенным в примере 44.1, приводят к заключению, что функция $w_2(x)$ является решением задачи (44.29), (44.30). Во-первых, $w_2 \in V_2$, так что выполняется соотношение (44.29) (см. (44.32)). Во-вторых, $w_2(x) = w(x) - w_1(x)$ и $w_1 \in V_1$. Следовательно, $w_1 \in V$, равно как и $w_2 - w \in V$, что подтверждает (44.30). Таким образом, если $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве V_2, то искомое решение определяется соотношением

$$u = w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} ((w_2, \varphi_i))\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} ((w_2, \varphi_i))\varphi_i \tag{44.34}$$

(поскольку $((w, \varphi_i)) = ((w_1, \varphi_i)) + ((w_2, \varphi_i)) = ((w_2, \varphi_i))$). Если v_n — ортонормированный базис в V_1, то

$$u = w_2 = w - w_1 = w - \sum_{i=1}^{\infty} ((w, v_i))\varphi_i. \tag{44.35}$$

Замечание 44.1. Если дана задача (44.29), (44.30), так что форма $((v, u))$ не $W_2^{(k)}(G)$-эллиптична, то необходимо исследовать ее в некотором пространстве, аналогичном пространству Q из примера 44.2 (см. гл. 35)), и в этом пространстве применить метод ортогональных проекций.

Для исследования этих задач предпочтительно применить так называемые *факторпространства*. См., например, [32].

Замечание 44.2. В некоторых случаях сравнительно легко определить свойства функций, образующих базисы пространств V_1 и V_2. Рассмотрим пример 44.2. Элементами пространства Q являются функции из $W_2^{(1)}(G)$, для которых имеют место соотношения (44.20). Функции из V_2 удовлетворяют, более того, условию (44.18). Однако это означает, что они являются гармоническими в G. Следовательно, базис пространства V_2 можно образовать из функций, являющихся гармоническими в G (и принадлежащих, конечно, пространству $W_2^{(1)}(G)$, а также удовлетворяющих условию ((44.20)).

Пусть

$$z_1(x),\ z_2(x),\ \ldots \tag{44.36}$$

— такой базис. Следовательно, в качестве $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots)$ в (44.27) можно тогда выбрать функции (44.36). Отметим следующее обстоятельство. Пусть функция $w(x)$ из примера 44.2 удовлетворяет (в смысле теории следов) условию

$$\int_{\Gamma} w(S)\, dS = 0 \tag{44.37}$$

(т. е. пусть это условие удовлетворяется для функции $g(S)$, задающей значения искомого решения на Γ). Если мы к каждой функции $z_i(x)$ базиса (44.36) добавим постоянную k_i, такую что для полученной функции $\tilde{z}_i(x) = z_i(x) + k_i$ имело место соотношение (44.37), то несложно показать, что функция

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (w_Q,\ \tilde{z}_i)^A \tilde{z}_i$$

будет решением задачи (44.17), (44.18). Тем самым не нужно прибавлять к этой функции дополнительную постоянную, как в случае функции (44.27). Здесь хорошо видна тесная связь предлагаемого метода с методом Треффтца, описанным в предыдущей главе.

Метод ортогональных проекций можно также с успехом применить к решению неоднородных уравнений с однородными граничными условиями. Так, пусть нужно найти функцию $u \in W_2^{(k)}(G)$, такую что

$$((v, u)) = (v, f) \text{ справедливо для всех } v \in V, \tag{44.38}$$

$$u \in V. \tag{44.39}$$

Пусть форма $((v, u))$ является $W_2^{(k)}(G)$-эллиптичной и симметричной в пространстве $W_2^{(k)}(G)$. Как и в предыдущем примере, введем пространство W, образованное элементами пространства $W_2^{(k)}(G)$ со скалярным произведением $((v, u))$, подпространство V_1 этого пространства, составленное из элементов пространства V, а также его ортогональное дополнение V_2 в W. Таким образом,

$$W = V_1 \oplus V_2. \tag{44.40}$$

Пусть $z \in W$ — некоторая функция, удовлетворяющая соотношению (44.38), т. е.

$$((v, z)) = (v, f) \text{ для любого } v \in V \tag{44.41}$$

(таким образом, $z(x)$ есть «частное решение» заданного дифференциального уравнения). Разложим эту функцию в смысле равенства (44.40) в сумму

$$z(x) = z_1(x) + z_2(x), \quad z_1 \in V_1, \ z_2 \in V_2. \tag{44.42}$$

Утверждается, что $z_1(x)$ является искомым решением $u(x)$ задачи (44.38), (44.39). Прежде всего $z_1 \in V_1$. Следовательно, $z_1 \in V$, поэтому выполнено условие (44.39). Далее, для любого $v \in V_1$, а поэтому и для любого $v \in V$, из (44.41) и (44.42) следует

$$((v, z_1)) = ((v, z - z_2)) = ((v, z)) - ((v, z_2)) = (v, f) \tag{44.43}$$

(поскольку $v \in V_1$, $z_2 \in V_2$ и, таким образом, $((v, z_2)) = 0$). Следовательно, функция $z_1(x)$ действительно является искомым решением данной задачи.

Если

$$v_1, v_2, \ldots \tag{44.44}$$

и

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \tag{44.45}$$

— ортонормированные базисы V_1 и V_2 соответственно, то

$$u = z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} ((z_1, v_i)) v_i = \sum_{i=1}^{\infty} ((z, v_i)) v_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, v_i) v_i, \tag{44.46}$$

$$u = z - z_2 = z - \sum_{i=1}^{\infty} ((z, \varphi_i)) \varphi_i. \tag{44.47}$$

Замечание 44.3. Полученный результат можно использовать для оценки ошибки при определении приближенного решения задачи (44.38), (44.39) методом Ритца. Обозначим через u_n частичную сумму ряда (44.46):

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} ((z_1, v_i)) v_i = \sum_{i=1}^{n} ((z, v_i)) v_i. \tag{44.48}$$

Тогда $u_n \to u$ в W, а потому и в $W_2^{(k)}(G)$. Как известно (с. 405), u_n есть n-е приближение Ритца, если базис (44.44) выбран для метода

Ритца. То же справедливо, если взят некоторый другой базис при условии, что его ортонормирование в пространстве W приводит к базису (44.44) (см. с. 156). Поэтому

$$\|u-u_n\|_W^2=\|u\|_W^2+\|u_n\|_W^2-2((u, u_n)).$$

Как известно, справедливо равенство

$$((u, u_n))=\left(\left(u, \sum_{i=1}^{n}((u, v_i))\, v_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}((u, v_i))^2=\|u_n\|_W^2,$$

так что

$$\|u-u_n\|_W^2=\|u\|_W^2-\|u_n\|_W^2. \tag{44.49}$$

Обозначим, далее (см. (44.47)),

$$z_{2,\,m}=\sum_{i=1}^{m}((z, \varphi_i))\,\varphi_i$$

и $t_m=z-z_{2,\,m}$. Поскольку $z_{2,\,m}\to z_2$ в W, отсюда следует, что $t_m\to z_1=u$ в W. Далее,

$$((u, t_m))=((u, u))+((u, z_2-z_{2,\,m}))=((u, u))$$

(поскольку $u=z_1\in V_1$, $z_{2,\,m}\in V_2$), так что

$$\|u\|_W^2=((u, u))=((u, t_m))\leqslant\|u\|_W\|t_m\|_W,$$

откуда

$$\|u\|_W\leqslant\|t_m\|_W. \tag{44.50}$$

Тогда из соотношений (44.49) и (44.50) следует требуемая оценка

$$\|u-u_n\|_W\leqslant\|t_m\|_W^2-\|u_n\|_W^2. \tag{44.51}$$

Заметим здесь, что в пространстве W $u_n\to u$, $t_m\to u$, так что оценка (44.51) может быть сделана сколь угодно точной.

Из соотношения (44.49) следует, что $\|u_n\|_W^2\leqslant\|u\|_W^2$, поэтому метод Ритца дает оценку снизу для искомого решения в норме пространства W. Методом ортогональных проекций можно получить оценку сверху в норме пространства W, см. (44.50).

Метод ортогональных проекций — это эффективный метод, идея которого весьма проста. Определенные трудности возникают в более сложных случаях при построении базисов пространств V_1 и V_2, хотя даже и в этом направлении в настоящее время наметился значительный прогресс. См. также статью Вишика [42]. Теперь отметим, что ортонормированность базисов в пространствах V_1 и V_2 не существенна для наших рассуждений (мы уже видели это в случае метода Ритца). Далее, отметим следующий факт. Для получения оценки типа (44.51) не обязательно строить базис в пространстве V_2. В самом деле, достаточно заменить функцию t_m в (44.51) функцией z. Функция $u=z_1$ является ортогональной проекцией функции z в пространство V_1, так что $\|u\|_W\leqq\|z\|_W$;

отсюда и из равенства (44.49) тогда следует оценка

$$\|u-u_n\|_W \leqslant \|z\|_W^2 - \|u_n\|_W^2.$$

Конечно, оценка (44.51) лучше, поскольку $\|t_m\|_W^2 \leqslant \|z\|_W^2$.

Замечание 44.4. В книге [27] описан метод, основанный на несколько иной идее, хотя также использующий разложение подходящего пространства на два ортогональных подпространства V_1 и V_2 (поэтому этот метод также можно назвать «методом ортогональных проекций»). Продемонстрируем его идею на решении задачи

$$-\Delta u = f \text{ в } G, \tag{44.52}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma \tag{44.53}$$

в трехмерной области G.

Запишем уравнение (44.52) в виде $-\operatorname{div}\operatorname{grad} u = f$. Обозначим через $\mathbf{L}_2(G)$ пространство трехмерных векторов, координаты которых являются квадратично интегрируемыми функциями в G, а скалярное произведение определено формулой (6.7). Рассмотрим в $\mathbf{L}_2(G)$, во-первых, множество всех векторов (с метрикой $\mathbf{L}_2(G)$), которые являются градиентами скалярных функций, равных нулю на Γ, и, во-вторых, множество векторов, дивергенция которых равна нулю. «Пополняя» эти пространства, мы получим в $\mathbf{L}_2(G)$ два подпространства V_1, V_2, для которых справедливо равенство $\mathbf{L}_2(G) = V_1 \oplus V_2$. (Более детально см. [27].) Пусть $\mathbf{V}$ — произвольный вектор из $\mathbf{L}_2(G)$, удовлетворяющий (возможно, в обобщенном смысле) уравнению $-\operatorname{div}\mathbf{V} = f$. Тогда его проекция в пространстве V_1 является (вообще говоря, обобщенным) решением уравнения $-\operatorname{div}\mathbf{v} = f$. Это решает в сущности данную задачу, поскольку полученный вектор является градиентом искомой функции u.

Можно спроектировать вектор $\mathbf{V}$ в подпространство V_2, а не в подпространство V_1. Обозначим эту проекцию через $\mathbf{V}_2$; искомый вектор задан тогда разностью $\mathbf{V} - \mathbf{V}_2$. Таким образом можно получить оценку, аналогичную апостериорной оценке (44.51). Более детально см. цитированную книгу [27]. Предлагаемую процедуру можно без трудностей распространить на случай более общих уравнений, в частности когда заданный оператор может быть записан в виде $A = T^*T$ (T — оператор с подходящими свойствами, а T^* — сопряженный ему оператор), или в более общем и часто более удобном виде $A = T^*KT$. Например, в теории упругости оператор K тесно связан с матрицей коэффициентов обобщенного закона Гука. В связи с этим методом мы обычно говорим — в частности, для задач теории упругости — о так называемой *двойственной вариационной формулировке данной задачи*. Поскольку в теории упругости метод Ритца соответствует принципу Лагранжа, описываемый метод соответствует принципу Кастильяно. См. также метод гиперциклов в [40].

Глава 45

Применение метода Ритца к решению параболических краевых задач

Обсуждаемые в этой книге вариационные методы можно применить к решению краевых задач для уравнений, включающих время (см. результаты автора в [37], см. также [11], [18] и т. д.). Ниже описано применение метода Ритца к решению параболических уравнений порядка $2k$ от пространственных переменных с граничными условиями Дирихле.

Чтобы яснее продемонстрировать идею метода, мы рассмотрим сначала простой пример с уравнением второго порядка. Лишь после этого мы сформулируем задачу в общем виде и представим некоторые фундаментальные результаты, полученные в [37].

Как обычно, обозначим через G ограниченную область в E_N с границей Липшица Γ. Пусть задан интервал времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Обозначим $Q = G \times (0, T)$ и рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ в } Q, \tag{45.1}$$

где

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right], \tag{45.2}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{45.3}$$

и с граничным условием

$$u = 0 \text{ на } \Gamma \times (0, T). \tag{45.4}$$

Введем обозначения

$$((v, u)) = \int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx \tag{45.5}$$

и

$$V = \mathring{W}_2^{(1)}(G). \tag{45.6}$$

Пусть $u_0 \in L_2(G)$, $f \in L_2(G)$, $a_{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции в G (где f и a_{ij} не зависят от t), и пусть форма $((v, u))$ симметрична и V-эллиптична [1]).

Основная идея метода весьма проста. Разделим интервал $[0, T]$ на p подынтервалов длины $h = T/p$ и рассмотрим следую-

[1]) Выполнение условий, налагаемых на эллиптический оператор A в гл. 22, достаточно для того, чтобы это имело место. В этой главе пространство V соответствует пространству H_A, а форма $((v, u))$ — скалярному произведению $(v, u)_A$.

щие функционалы:

$$G_1 u = ((u, u)) + \frac{1}{h}(u, u) - 2(f, u) - \frac{2}{h}(u_0, u),$$

$$G_2 u = ((u, u)) + \frac{1}{h}(u, u) - 2(f, u) - \frac{2}{h}(u_1, u),$$

. . . . . .

$$G_p u = ((u, u)) + \frac{1}{h}(u, u) - 2(f, u) - \frac{2}{h}(u_{p-1}, u). \qquad (45.7)$$

Функции $u_1(x), \ldots, u_{p-1}(x)$ сейчас будут описаны.

При сформулированных предположениях (принимая во внимание, что $(1/h)(u, u) \geqslant 0$) существует в точности одна функция $u_1 \in V$, минимизирующая функционал G_1 в пространстве V. Как известно из гл. 34, эта функция удовлетворяет интегральному тождеству

$$((v, u)) + \frac{1}{h}(v, u) = (v, f) + \frac{1}{h}(v, u_0) \text{ для всех } v \in V \qquad (45.8)$$

и является слабым[1]) решением задачи

$$Au + \frac{1}{h}(u - u_0) = f \text{ в } G, \qquad (45.9)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \qquad (45.10)$$

Аналогично, существует в точности одна функция $u_2 \in V$, минимизирующая в V функционал $G_2 u$ (в последнем члене этого функционала нужно подставить только что полученную функцию $u_1(x)$ вместо функции $u_0(x)$, входящей в функционал $G_1 u$)) и являющаяся слабым решением задачи

$$Au + \frac{1}{h}(u - u_1) = f \text{ в } G, \qquad (45.11)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \qquad (45.12)$$

Будем продолжать аналогичные построения до тех пор, пока минимизацией функционала $G_p u$ не получим функцию $u_p \in V$, являющуюся слабым решением задачи

$$Au + \frac{1}{h}(u - u_{p-1}) = f \text{ в } G, \qquad (45.13)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma. \qquad (45.14)$$

Мы рассмотрим функции $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_p(x)$ в качестве приближений решения задачи (45.1), (45.3), (45.4) для $t = 0$, $t = h, \ldots, t = T$. Их построение относительно просто (см. пример 45.1).

Посмотрим, чего можно ожидать от этого метода в смысле его сходимости.

---

[1]) При предположениях и в терминологии гл. 22, это будет обобщенное решение.

Используя функции $u_0(x)$, ..., $u_p(x)$, определенные в G [1]), построим прежде всего функцию $u_1(x, t)$, определенную в $\overline{Q} = \overline{G} \times [0, T]$ следующим образом:

$$u_1(x, t) = u_j(x) + \frac{t - t_j}{h}[u_{j+1}(x) - u_j(x)] \text{ для } t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \quad (45.15)$$

где $t_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$,— точки, делящие интервал $[0, T]$. Таким образом, для любого фиксированного $x_1 \in G$ функция (45.15) непрерывна и кусочно-линейна по переменной t в интервале $[0, T]$. Для $t = t_j$ $(j = 0, \ldots, p)$ эта функция совпадает с функцией $u_j(x)$ в точке x_1. (См. рис. 42, на котором изображена часть графика этой функции для случая $N = 1$, т. е. если G является интервалом.)

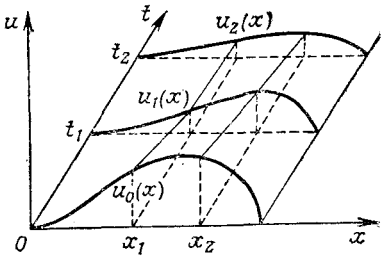

Рис. 42.

Разделим интервал $[0, T]$ не на исходное число p подынтервалов, а последовательно на $2p$, $4p$, $8p$, ..., $2^{n-1}p$, ... подынтервалов соответствующих длин $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, $h_1 = h/8$, $h_n = h/2^{n-1}$. Аналогично построению в предыдущем тексте, построим теперь функции $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, ..., $u_n(x, t)$, ...,

$$u_n(x, t) = u_j^{(n)}(x) + \frac{t - t_j^{(n)}}{h_n}[u_{j+1}^{(n)}(x) - u_j^{(n)}(x)] \text{ для } t_j^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{j+1}^{(n)}, \quad (45.16)$$

где $t_j^{(n)} = jh_n$, $j = 0, \ldots, 2^{n-1}p - 1$. Следовательно, график каждой из этих функций $u_n(x, t)$ будет иметь вид, показанный на рис. 42. Конечно, длина временных подынтервалов $[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$ [2]) убывает с ростом n. В каждом из подынтервалов $[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]$ функция $u_n(x, t)$ имеет производную по переменной t (правостороннюю производную для $t = t_j^{(n)}$ или левостороннюю производную для $t = t_{j+1}^{(n)}$), определяемую выражением

$$\frac{u_{j+1}^{(n)}(x) - u_j^{(n)}(x)}{h_n}. \quad (45.17)$$

Следовательно, в каждой точке $t = t_j^{(n)}$ производные по t, вообще говоря, справа и слева различны. Интуитивно можно ожидать, что при $n \to \infty$ этот скачок будет убывать для любого $t = t_j$. На основании уравнений (45.9), (45.11) и (45.13) можно ожидать, что предельная функция $u(x, t)$ последовательности $u_n(x, t)$ (если вообще эта функция сходится в некотором смысле к определен-

[1]) Более точно, почти всюду в G. То же самое относится, конечно, к функции (45.15), определенной почти всюду в $\overline{Q}$, и т. д.

[2]) Для $n = 1$ мы пишем кратко t_j, h и $u_j(x)$ вместо $t_j^{(1)}$, h_1 и $u_j^{(1)}(x)$ соответственно.

ной функции $u(x, t)$) будет иметь в Q производную $\partial u/\partial t$ и будет удовлетворять в Q уравнению

$$Au + \partial u/\partial t = f, \tag{45.18}$$

т. е. уравнению (45.1). Из построения функций $u_n(x, t)$ следует тогда, что функция $u(x, t)$ будет также удовлетворять (в некотором смысле) начальному и граничному условиям и что она будет, тем самым, искомым решением.

Таким образом, нужно решить следующие два вопроса:

(i) Сходится ли последовательность $\{u_n(x, t)\}$ в некотором смысле (т. е. в метрике подходящего функционального пространства) к некоторой функции $u(x, t)$ при $n \to \infty$?

(ii) Является ли предельная функция решением задачи (45.1), (45.3), (45.4) в некотором «разумном» смысле?

На эти два вопроса будет дан ответ — для более общей задачи (45.52)—(45.54) — после примера 45.1 вместе с ответом на третий вопрос, который возникает естественным образом из следующей задачи.

Функции $u_j(x)$, составляющие функцию (45.15), минимизируют функционалы (45.7) в пространстве V. Для получения их воспользуемся методом Ритца. Тем самым пусть

$$v_1(x),\ v_2(x),\ v_3(x),\ \ldots \tag{45.19}$$

— некоторый базис в пространстве V. Выберем первые r фиксированных функций

$$v_1(x),\ \ldots,\ v_r(x) \tag{45.20}$$

этого базиса и обозначим символом V_r подпространство пространства V, образованное функциями (45.20). Далее, введем обозначение

$$(((v, u))) = ((v, u)) + \frac{1}{h}(v, u) \tag{45.21}$$

и минимизируем первый из функционалов (45.7), т. е. функционал G_1 в подпространстве V_r. Система уравнений Ритца для коэффициентов $c_{11}^{(r)}, \ldots, c_{1r}^{(r)}$ функции

$$u_{r1}(x) = c_{11}^{(r)} v_1(x) + \ldots + c_{1r}^{(r)} v_r(x), \tag{45.22}$$

минимизирующей G_1, примет вид (см. гл. 13 и 34)

$$\begin{gathered}
(((v_1, v_1)))\, c_{11}^{(r)} + (((v_1, v_2)))\, c_{12}^{(r)} + \ldots + (((v_1, v_r)))\, c_{1r}^{(r)} = (v_1, f) + \frac{1}{h}(v_1, u_0),\\
(((v_2, v_1)))\, c_{11}^{(r)} + (((v_2, v_2)))\, c_{12}^{(r)} + \ldots + (((v_2, v_r)))\, c_{1r}^{(r)} = (v_2, f) + \frac{1}{h}(v_2, u_0),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(((v_r, v_1)))\, c_{11}^{(r)} + (((v_r, v_2)))\, c_{12}^{(r)} + \ldots + (((v_r, v_r)))\, c_{1r}^{(r)} = (v_r, f) + \frac{1}{h}(v_r, u_0).
\end{gathered} \tag{45.23}$$

Решая эту систему (более подробно см. ниже) и подставляя найденные значения для $c_{11}^{(r)}, \ldots, c_{1r}^{(r)}$ в (45.22), получим функцию $u_{r1}(x)$.

Далее, минимизируем в пространстве V_r функционал $\tilde{G}_2$, полученный из функционала G_2 (см. (45.7)) заменой функции $u_1(x)$ на только что построенную функцию $u_{r1}(x)$. Минимизирующая функция $u_{r2}(x)$, построенная аналогично функции $u_{r1}(x)$, подставляется тогда в функционал G_3 на место функции $u_2(x)$. Обозначим этот функционал через $\tilde{G}_3$ и минимизируем его в пространстве V_r, получая тем самым функцию $u_{r3}(x)$, и т. д. Следовательно, система уравнений Ритца для коэффициентов $c_{j1}^{(r)}, \ldots, c_{jr}^{(r)}$ функции $u_{rj}(x)$ $(j=1, \ldots, p)$ примет вид

$$\begin{aligned}
(((v_1, v_2)))\, c_{j1}^{(r)} + (((v_1, v_2)))\, c_{j2}^{(r)} + \ldots + (((v_1, v_r)))\, c_{jr}^{(r)} &= (v_1, f) + \\
&+ \frac{1}{h}(v_1, u_{r, j-1}), \\
(((v_2, v_1)))\, c_{j1}^{(r)} + (((v_2, v_2)))\, c_{j2}^{(r)} + \ldots + (((v_2, v_r)))\, c_{rj}^{(r)} &= \\
= (v_2, f) + \frac{1}{h}(v_2, u_{r, j-1}), & \\
\ldots\ldots\ldots

странстве V_r, а не V), но и благодаря тому, что сами функционалы изменяются, поскольку в их последних членах функции $u_{j-1}^{(n)}(x)$ заменены на функции $u_{r,\,j-1}^{(n)}(x)$. Если мы таким образом отвечаем на вопросы (i) и (ii), сформулированные выше, то возникает третий вопрос.

(iii) Будет ли последовательность функций (45.26) сходиться в некотором смысле к функции $u(x,\,t)$ при $n\to\infty$ и $r\to\infty$?

Прежде чем ответить (положительно) на три предложенных вопроса, проиллюстрируем обсуждаемую процедуру простым примером уравнения теплопроводности в одномерном пространстве.

Пример 45.1. Решим вышеописанным методом уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\pi x-x^2 \tag{45.27}$$

с нулевым начальным условием

$$u(x,\,0)=u_0(x)=0 \tag{45.28}$$

и с нулевыми граничными условиями

$$u(0,\,t)=0,\quad u(\pi,\,t)=0 \tag{45.29}$$

в прямоугольнике

$$Q=(0,\,\pi)\times(0,\,1). \tag{45.30}$$

Выберем $p=4$, так что $h=1/4$. Тогда получим

$$((v,\,u))=\int_0^{\pi} v'u'\,dx$$

и (см. (45.21))

$$(((v,\,u)))=\int_0^{\pi} v'u'\,dx+4\int_0^{\pi} vu\,dx. \tag{45.31}$$

Выберем в пространстве V базис

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots\text{[1]} \tag{45.32}$$

и, далее, положим $r=3$. Следовательно, рассматриваются только три первых элемента базиса (45.32):

$$v_1(x)=\sin x,\ v_2(x)=\sin 2x,\ v_3(x)=\sin 3x. \tag{45.33}$$

Построим сначала систему (45.23). Тогда получим ($i,\,k=1,\,2,\,3$)

$$(((v_i,\,v_k)))=\int_0^{\pi} i\cos ix\cdot k\cos kx\,dx+4\int_0^{\pi}\sin ix\sin kx\,dx=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(i^2+4), & \text{если } k=i,\\ 0, & \text{если } k\neq i,\end{cases} \tag{45.34}$$

[1]) Поскольку очевидно, что задача симметрична относительно точки $x=\pi/2$, было бы достаточно рассмотреть функции $\sin nx$ лишь для нечетных n, как будет ясно из решения системы (45.36).

вследствие ортогональности синуса и косинуса в интервале $[0, \pi]$. Далее получим

$$(v_i, f) = \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin ix\, dx = -\frac{1}{i}[(\pi x - x^2)\cos ix]_0^\pi +$$

$$+\frac{1}{i}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos ix\, dx = \frac{1}{i}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos ix\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{i^2}[\sin ix]_0^\pi - \frac{2}{i^2}[x \sin ix]_0^\pi + \frac{2}{i^2}\int_0^\pi \sin ix\, dx =$$

$$= \frac{2}{i^2}\int_0^\pi \sin ix\, dx = -\frac{2}{i^3}[\cos ix]_0^\pi = \begin{cases} 4 & \text{для } i = 1, \\ 0 & \text{для } i = 2, \\ 4/27 & \text{для } i = 3. \end{cases} \quad (45.35)$$

Следовательно, система (45.23) примет вид

$$\begin{gathered} \frac{5\pi}{2} c_{11}^{(3)} = 4, \\ 4\pi c_{12}^{(3)} = 0, \\ \frac{13\pi}{2} c_{13}^{(3)} = 4/27, \end{gathered} \quad (45.36)$$

откуда $c_{11}^{(3)} = 8/5\pi$, $c_{12}^{(3)} = 0$, $c_{13}^{(3)} = 8/351\pi$ и, таким образом,

$$u_{31}(x) = \frac{8}{5\pi}\sin x + \frac{8}{351\pi}\sin 3x \approx 0.509 \sin x + 0.007 \sin 3x. \quad (45.37)$$

Для $j = 2$ рассмотрим систему (45.24), подставив вместо $u_{31}(x)$ его значение из (45.37). Принимая во внимание ортогональность функций (45.32) в интервале $[0, \pi]$, простым вычислением получим

$$(v_1, u_{31}) = \int_0^\pi \sin x \left(\frac{8}{5\pi}\sin x + \frac{8}{351\pi}\sin 3x\right) dx = \frac{4}{5} \quad (45.38)$$

и, аналогично,

$$(v_2, u_{31}) = 0, \quad (v_3, u_{31}) = \frac{4}{351}. \quad (45.39)$$

Матрица системы, равно как и первые элементы правых частей, остаются теми же, что и в системе (45.36). Таким образом, получаем систему

$$\begin{gathered} \frac{5\pi}{2} c_{21}^{(3)} = 4 + \frac{16}{5}, \\ 4\pi c_2^{(3)} = 0, \\ \frac{13\pi}{2} c_{23}^{(3)} = \frac{4}{27} + \frac{16}{351}. \end{gathered}$$

Отсюда находим

$$u_{32}(x)=\frac{72}{25\pi}\sin x+\frac{136}{4563\pi}\sin 3x\approx 0.917\sin x+0.009\sin 3x. \quad (45.40)$$

Аналогично, получим

$$u_{33}(x)\approx 1.243\sin x+0.010\sin 3x, \quad (45.41)$$
$$u_{34}(x)\approx 1.503\sin x+0.011\sin 3x. \quad (45.42)$$

Приближенное решение $u_1^{(3)}(x,\ t)$ задачи (45.27)—(45.29) задается соотношением (45.26). Тогда из равенств (45.40) и (45.41) следует, что, например, в интервале $t_2\leqslant t\leqslant t_3$, т. е. в интервале $1/2\leqslant t\leqslant 3/4$, справедливо равенство

$$u_1^{(3)}(x,\ t)=u_{32}(x)+\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}[u_{33}(x)-u_{32}(x)]=$$
$$=0.917\sin x+0.009\sin 3x+(4t-2)(0.326\sin x+0.001\sin 3x). \quad (45.43)$$

Для t, лежащего в этом интервале, функция $u_1^{(3)}(x,\ t)$ имеет производные как по x, так и по t, и при этом справедливы равенства

$$\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial t}=1.304\sin x+0.004\sin 3x,$$
$$\frac{\partial^2 u_1^{(3)}}{\partial x^2}=-0.917\sin x-0.081\sin 3x-(4t-2)(0.326\sin x-0.009\sin 3x). \quad (45.44)$$

Таким образом, для $1/2<t<3/4$ получаем

$$\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_1^{(3)}}{\partial x^2}=$$
$$=2.221\sin x+0.085\sin 3x+(4t-2)(0.326\sin x+0.009\sin 3x). \quad (45.45)$$

Сравним правую часть этого уравнения с правой частью уравнения (45.27). Для $x=0$ и $x=\pi$ правые части совпадают, поскольку для любого t из рассматриваемого интервала они равны нулю. Для $x=\pi/2$ и для $t=5/8$ (т. е. для центра как пространственного, так и временного интервалов) правая часть уравнения (45.45) равна $2.221-0.085-0.5(0.326-0.009)=2.295$, а правая часть уравнения (45.27) равна

$$\pi\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}\approx 2.467.$$

Для $1/2\leqslant t\leqslant 3/4$ приближение (45.43) решения рассматриваемой задачи является, таким образом, вполне удовлетворительным.

Следуя этому простому примеру, вернемся к вопросам (i), (ii), (iii), сформулированным выше.

В работе автора [37] на все три вопроса дан положительный ответ. Чтобы сформулировать основные результаты этой работы, нужно ввести некоторые понятия.

Пусть H — гильбертово пространство, I — некоторый интервал $[0, a]$, например рассмотренный выше интервал $[0, T]$. Если любому $t \in I$ поставлен в соответствие в точности один элемент $h \in H$, то тем самым определяется конкретное отображение $W(t)$ интервала I в пространство H. Для этого отображения можно ввести понятия, аналогичные элементарным понятиям анализа [1]).

Будем говорить, что отображение $W(t)$ *непрерывно во внутренней точке* t_0 *интервала* I, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, такое что для каждой точки $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I$

$$\| W(t) - W(t_0) \|_H < \varepsilon. \tag{45.46}$$

Аналогично, можно определить *непрерывность справа и непрерывность слева* в концевых точках интервала I. Аналогично, мы можем также определить *предел* отображения $W(t)$ в точке $t_0 \in I$ (или *левосторонний* и *правосторонний пределы*).

Если отображение $W(t)$ непрерывно в любой точке интервала I (в концевых точках рассматривается левосторонняя или правосторонняя непрерывность), мы говорим, что это отображение *непрерывно на интервале* и пишем $W \in C^{(0)}(I)$, или, более детально, $W \in C^{(0)}(I, H)$.

Мы говорим, что отображение $W(t)$ имеет *производную* $W'(t_0) \in H$ в точке t_0 (для концевых точек — *правостороннюю* или *левостороннюю производную*), если существует предел (правосторонний или левосторонний предел соответственно)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{W(t_0 + \Delta t) - W(t_0)}{\Delta t} - W'(t_0) \right\|_H = 0. \tag{45.47}$$

Если отображение $W(t)$ таково, что для любого $t \in I$ и для любого фиксированного $h \in H$ существует интеграл

$$\int_0^t (h, W(\tau))_H \, d\tau \tag{45.48}$$

(где $(h, W(\tau))_H$ — скалярное произведение элементов h и $W(\tau)$), и если

$$\int_0^a \| W(t) \|_H \, dt < \infty,$$

[1]) W — это оператор, отображающий интервал I в пространство H. В таком случае в литературе принято говорить об отображении, а не об операторе и использовать символ $W(t)$ вместо W. В этой связи обычно говорят о так называемых абстрактных функциях. Данное ниже определение непрерывности, конечно, лишь модификация определения 8.12.

то мы говорим, что отображение $W(t)$ *интегрируемо в интервале* I. Интеграл

$$w(t) = \int_0^t W(\tau)\, d\tau \tag{45.49}$$

определяется соотношением

$$(h, w(t))_H = \int_0^t (h,\ W(\tau))_H\, d\tau \text{ для любого } h \in H. \tag{45.50}$$

Существование и единственность «первообразного» отображения $w(t)$ в смысле (45.50) следуют для любого фиксированного $t \in I$ из теоремы Рисса.

Для наших целей важно так называемое пространство $L_2(I, H)$ отображений, *квадратично интегрируемых в интервале* I. Элементы этого пространства — это такие отображения $W(t)$, интегрируемые в I, для которых интеграл

$$\int_0^a \| W(t) \|_H^2\, dt$$

конечен. В этом пространстве скалярное произведение определяется интегралом

$$(W_1,\ W_2)_{L_2(I, H)} = \int_0^a (W_1(t),\ W_2(t))_H\, dt. \tag{45.51}$$

Поскольку H является гильбертовым пространством, можно показать, что пространство $L_2(I, H)$ также гильбертово. Если $W(t)$ — произвольное отображение из пространства $L_2(I, H)$, то интеграл этого отображения

$$w(t) = \int_0^t W(\tau)\, d\tau$$

непрерывен в интервале I и имеет производную $w'(t) = W(t)$ почти всюду в I.

Рассмотрим теперь параболическое уравнение порядка $2k$ от пространственных переменных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f \text{ в } Q \tag{45.52}$$

с нулевым начальным условием

$$u(x,\ 0) = u_0(x) \equiv 0 \tag{45.53}$$

и с граничными условиями Дирихле

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0 \text{ на } \Gamma \times (0,\ T). \tag{45.54}$$

Введем обозначения

$$((v,\ u))=\int\limits_G \sum_{|i|,\ |j|\leqslant k} a_{ij}D^iv D^ju\,dx \tag{45.55}$$

и

$$V=\mathring{W}_2^{(k)}(G). \tag{45.56}$$

Допустим, что $f\in L_2(G)$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$ — ограниченные измеримые функции в G и что форма $((v,\ u))$ V-эллиптична [1]).

Построим теперь последовательность функций (45.16), подставляя, конечно, форму (45.55) в функционалы (45.7) вместо формы (45.5).

При рассматриваемых предположениях справедлива следующая теорема [2]).

Теорема 45.1. *Существует в точности одно решение задачи* (45.52)—(45.54) *в следующем смысле:*

$$u(t)\in L_2(I,\ V)\ ^3), \tag{45.58}$$

$$u(t)\in C^{(0)}(I,\ L_2(G))\ ^4), \tag{45.59}$$

$$u'(t)\in L_2(I,\ L_2(G)), \tag{45.60}$$

$$u(0)=0\ \text{в}\ C^{(0)}(I,\ L_2(G)), \tag{45.61}$$

$$\int_0^T((v(t),\ u(t)))\,dt+\int_0^T(v(t),\ u'(t))\,dt=$$

$$=\int_0^T(v(t),\ f)\,dt\ \text{для любого}\ v\in L_2(I,\ V), \tag{45.62}$$

---

[1]) Последнее предположение выражает, по существу, параболичность уравнения (45.52).

[2]) При построении функции (45.16) в [37] был выбран несколько иной подход, не требующий симметричности формы (45.55), т. е. не требующий выполнения условия $a_{ij}=a_{ji}$. Достаточно построить функции $u_1(x)$, $u_2(x),\ldots,$ или $u_p(x)$ как соответствующие слабые решения задач

$$\begin{aligned}
&((v,\ u))+\frac{1}{h}(v,\ u)=(v,\ f),\\
&((v,\ u))+\frac{1}{h}(v,\ u)=(v,\ f)+\frac{1}{h}(v,\ u_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&((v,\ u))+\frac{1}{h}(v,\ u)=(v,\ f)+\frac{1}{h}(v,\ u_{p-1}),
\end{aligned} \tag{45.57}$$

в пространстве V, т. е. не как функции, минимизирующие функционалы (45.7). Тогда теорема 45.1 справедлива даже в том случае, если условие $a_{ij}=a_{ji}$ не выполнено. Выполнение этого условия необходимо только для обсуждения вопроса (iii).

[3]) Мы пишем $u(t)$ вместо $u(x,\ t)$. Например, (45.58) означает, что $u(t)$ — отображение (квадратично интегрируемое в I) интервала $I=[0,\ T]$ в пространство V, поэтому функция $u(x,\ t)$ такова, что для почти всех $t\in I$ $u\in V$.

[4]) Для читателя, знакомого с этими вопросами, заметим, что отображение $u(t)$ в пространство $L_2(G)$ даже абсолютно непрерывно.

где $I=[0, T]$. *Функция* $u(t)$ *— это так называемый слабый предел последовательности* $\{u_n(t)\}$ *в пространстве* $L_2(I, V)$, *означающий, что соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T (v(t),\ u_n(t))_V\,dt=\int_0^T (v(t),\ u(t))_V\,dt$$

справедливо для любого $v\in L_2(I, V)$.

В пространстве $L_2(Q)$ *функция* $u(t)=u(x, t)$ *является пределом последовательности* $\{u_n(x, t)\}$ *в обычном смысле* (т. е. в смысле сходимости в среднем в области Q).

Замечание 45.1. Из соотношения (45.58) следует (см. примечание 3 на с. 555), что для почти всех $t\in I$ $u\in V$. В этом смысле граничные условия (45.54) выполняются. Начальное условие выполнено в смысле (45.61). Поэтому уравнение (45.52) удовлетворяется в смысле интегрального соотношения (45.62) (т. е. в слабом смысле).

Доказательство теоремы 45.1 можно найти в цитированной работе автора [37]. Идея его такова. Сначала доказывается (при указанных предположениях) равномерная ограниченность последовательности $\{u_n(x, t)\}=\{u_n(t)\}$ в пространстве $L_2(I, V)$. В таком случае можно найти подпоследовательность $\{u_{n_k}(t)\}$, слабо сходящуюся в $L_2(I, V)$ к некоторой функции $u(t)$. Далее доказывается, что предельная функция обладает свойствами (45.58)—(45.62) и что возможна только одна функция с этими свойствами. Из этой единственности следует известным способом, что не только подпоследовательность $\{u_{n_k}(t)\}$ слабо сходится в пространстве $L_2(I, V)$ к функции $u(t)$, но и вся последовательность $\{u_n(t)\}$ обладает этим свойством. Обычная сходимость последовательности $\{u_n(x, t)\}$ к функции $u(x, t)$ в пространстве $L_2(G)$ следует тогда из определенных свойств обобщенных производных функций $u_n(x, t)$, полученных в цитируемой статье.

Итак, теорема 45.1 отвечает на вопросы (i) и (ii) для случая нулевого начального условия. В дальнейшей части цитируемой работы [37] обсуждается поэтому та же задача с ненулевым начальным условием. Сначала рассматривается случай, когда функция $u_0(x)$ достаточно гладкая (тогда соответствующее решение имеет свойства, весьма похожие на свойства решения в случае нулевых граничных условий, т. е. на свойства, указанные в теореме 45.1), а затем случай, когда $u_0\in L_2(G)$. В последнем случае соответствующее решение является так называемым *очень слабым решением*. Доказана непрерывная зависимость этого решения от начального условия. Отсюда следует (здесь существенно предположение $a_{ij}=a_{ji}$) сходимость последовательности (45.26), построенной описанным методом Ритца, к очень слабому решению, по

крайней мере в метрике пространства $L_2(Q)$. Таким образом, на вопрос (iii) также можно ответить положительно.

В заключительной части работы читатель найдет ответы на некоторые дальнейшие вопросы, касающиеся свойств сходимости и гладкости соответствующего решения в том случае, когда заданные параметры задачи (граница, функции a_{ij}, f и u_0) достаточно гладкие, или на вопросы, касающиеся возможностей применения этого метода к решению более общих задач.

Глава 46

Регулярность слабого решения, выполнение заданного уравнения и граничных условий в классическом смысле. Существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям

а) Гладкость слабого решения

В гл. 32 мы определили слабое решение краевой задачи. Сама задача определяется заданием области G, билинейной формы $((v, u)) = A(v, u) + a(v, u)$, функции $f \in L_2(G)$ (правая часть заданного дифференциального уравнения), функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, характеризующей заданные устойчивые граничные условия (подпространство таких функций из $W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющих соответствующим однородным устойчивым граничным условиям, обозначено символом V), и функций $h_{pl}(S) \in L_2(\Gamma)$, характеризующих неустойчивые граничные условия.

Под слабым решением краевой задачи мы понимаем (см. определение 32.2) функцию $u \in W_2^{(k)}(G)$, для которой справедливы соотношения

$$u - w \in V, \tag{46.1}$$

$$((v, u)) = (v, f) + \sum_{p=1}^{r} \sum_{l=1}^{k-\mu_p} \int_{\Gamma_p} \frac{\partial^{t_{pl}} v}{\partial \nu^{t_{pl}}} h_{pl}\, dS \quad \text{для всех } v \in V. \tag{46.2}$$

Используя теорему Грина, легко показать (см. [37]), что если функция $u(x)$, коэффициенты a_{ij} оператора A и функция $f(x)$ достаточно гладки[1]) в области G, и если функция $u(x)$ является слабым решением рассматриваемой задачи (так что она удовлетворяет интегральному тождеству (46.2)), то для любой функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ (т. е. для любой функции с компактным носителем в G) справедливо равенство $(\varphi, Au) = (\varphi, f)$, или, иначе,

$$(\varphi, Au - f) = 0. \tag{46.3}$$

[1]) Достаточно, чтобы $u \in C^{(2k)}(G)$, $a_{ij} \in C^{(|i|)}(G)$ и $f \in C(G)$.

Поэтому вследствие плотности функций $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$ в пространстве $L_2(G)$

$$Au - f = 0 \text{ в } L_2(G). \tag{46.4}$$

При этих предположениях гладкости отсюда следует, что

$$Au = f \text{ в } G, \tag{46.5}$$

так что функция $u(x)$ является классическим решением уравнения $Au = f$.

Если, кроме того, функция $u(x)$ достаточно гладкая в замкнутой области $\overline{G}$ (например, если $u \in C^{(2k)}(\overline{G})$) и если функции $w(x)$, $h_{pl}(S)$, равно как и граница Γ, являются достаточно гладкими, можно аналогичным способом показать, что граничные условия также удовлетворяются в классическом смысле. Таким образом, функция $u(z)$ является тогда классическим решением рассматриваемой задачи.

Следовательно, если заданные параметры (коэффициенты уравнения и т. д.) рассматриваемой задачи достаточно гладкие и если слабое решение $u(x)$ достаточно гладкое, то оно является классическим решением данной задачи. Вопрос теперь состоит в том, необходимо ли при заданных достаточно гладких параметрах предполагать гладкость слабого решения, или же эта гладкость сама является следствием гладкости заданных параметров. Можно ожидать, что гладкость решения вытекает из гладкости задачи, и, действительно, так оно и есть.

Доказательство предложенного утверждения основано на следующей теореме, являющейся одной из *теорем вложения Соболева*.

Теорема 46.1. *Пусть G — область с границей Липшица в N-мерном евклидовом пространстве E_N, и пусть $2k > N$. Тогда любая функция $u \in W_2^{(k)}(G)$ непрерывна*[1]) *в $\overline{G}$*

$$u \in W_2^{(k)}(G), \quad 2k > N \Rightarrow u \in C(\overline{G}). \tag{46.6}$$

Доказательство см., например, в [32], где эта теорема предложена в гораздо более общей и строгой формулировке.

Если $u \in W_2^{(k+s)}(G)$, то обобщенные производные порядка s от этой функции принадлежат $W_2^{(k)}(G)$. Если в этом случае $2k > N$, то несложные рассуждения показывают, что эти производные непрерывны в $\overline{G}$ и что $u \in C^{(s)}(\overline{G})$.

Если, например, в трехмерном пространстве ($N = 3$) $u \in W_2^{(4)}(G)$, то $u \in C^{(2)}(G)$, поскольку вторые обобщенные производные функции $u(x)$ принадлежат пространству $W_2^{(2)}(G)$ и тем самым непрерывны в $\overline{G}$, так как $2 \cdot 2 > 3$.

[1]) Более точно, эту функцию можно отождествить с некоторой функцией, непрерывной в $\overline{G}$, т. е. существует $\tilde{u} \in C(\overline{G})$, такая, что $u = \tilde{u}$ почти всюду в $\overline{G}$.

Ниже мы придем к заключению, что если заданные параметры рассматриваемой краевой задачи являются достаточно гладкими, то слабое решение $u(x)$ принадлежит не только пространству $W_2^{(2)}(G)$, но также и некоторому пространству $W_2^{(k+s)}(G)$. Если s будет достаточно велико, то $u \in C^{(2k)}(\overline{G})$, и слабое решение данной задачи будет, тем самым, классическим решением. В этом направлении мы в первую очередь исследуем более детально слабое решение данного дифференциального уравнения.

Теорема 46.2. *Пусть G — область с границей Липшица, A — дифференциальный оператор порядка $2k$, и пусть соответствующая билинейная форма*

$$A(v, u) = \int_G \sum_{|i|, |j| \leqslant k} a_{ij} D^i v D^j u \, dx \tag{46.7}$$

является $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$-эллиптической. Далее, пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ принадлежат пространству $C^{(1)}(G)$, а $f \in L_2(G)$, и пусть $u(x)$ — слабое решение уравнения $Au = f$, т. е. пусть

$$A(\varphi, u) = (\varphi, f) \text{ для всех } \varphi \in C_0^{(\infty)}(G). \tag{46.8}$$

Тогда в любой подобласти G', такой что $\overline{G'} \subset G$,

$$u \in W_2^{(k+1)}(G'). \tag{46.9}$$

Доказательство этой теоремы не просто (см. [32], где эта теорема сформулирована в несколько более общем виде). Поэтому мы лишь кратко изложим идею этого доказательства.

Обозначим через G'' такую область, что $\overline{G'} \subset G'' \subset \overline{G''} \subset G$, и выберем функцию $\chi \in C_0^{(\infty)}(G'')$, такую что $\chi(x) \equiv 1$ в $\overline{G'}$. Обозначим

$$w(x) = u(x)\chi(x). \tag{46.10}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$w(x) = u(x) \quad \text{в} \quad G', \tag{46.11}$$

поскольку функция $w(x)$ тождественно равна нулю вне области G''. (Это позволяет не рассматривать влияние граничных условий.)

Пусть i — одно из чисел $1, \ldots, N$, и пусть $h > 0$. Обозначим через h_i такую точку, что ее i-я координата равна h, в то время как остальные координаты равны нулю. Пусть h достаточно мало, чтобы имело место соотношение $x \in \overline{G''} \Rightarrow x + h_i \in G$.

Определим $\Delta_i w$ («разностное отношение в направлении оси x_i») формулой

$$\Delta_i w = \frac{w(x+h_i) - w(x)}{h}.$$

Прежде всего доказывается, что

$$\lim_{h \to 0} \left\| \Delta_i w - \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{W_2^{(k-1)}(G')} = 0. \tag{46.12}$$

Повторным применением теоремы Грина и использованием подходящих модификаций и оценок в цитированном доказательстве приходят к неравенству

$$|A(\psi, \Delta_i w)| \leqslant c\|\psi\|_{W_2^{(k)}(G)}\left(\|u\|_{W_2^{(k)}(G)} + \|f\|_{L_2(G)}\right)$$
$$\text{для любого } \psi \in \mathring{W}_2^{(k)}(G''), \tag{46.13}$$

где величина c зависит только от выбора области G'. Используя соотношения (46.12), (46.13) и $\mathring{W}_2^{(k)}(G)$-эллиптичность формы (46.7), показано, наконец, что

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} \in W_2^{(k)}(G')$$

и, таким образом (на основании (46.11)), что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W_2^{(k)}(G').$$

Поскольку этот результат имеет место для любого $i = 1, \ldots, N$, отсюда легко следует утверждение предложенной теоремы.

Предположение о гладкости коэффициентов оператора (это предположение может быть ослаблено, существенно лишь требование, чтобы рассматриваемые коэффициенты были липшицевыми) необходимо в доказательстве для того, чтобы можно было применить теорему Грина. Вводя дальнейшие требования, касающиеся гладкости этих коэффициентов, можно получить, что слабое решение уравнения $Au = f$ принадлежит пространству $W_2^{(k+s)}(G')$ с $s > 1$. Для $s > k$ необходимо ввести определенные условия гладкости, касающиеся правой части заданного уравнения.

Если $u \in W_2^{(k+s)}(G')$ и если $s > k$, то обобщенные производные порядка $2k$ от слабого решения принадлежат пространству $W_2^{(s-k)}(G')$. Если, кроме того, $2(s-k) > N$, т. е.

$$s > k + \frac{N}{2}, \tag{46.14}$$

то в соответствии с теоремой 46.1 эти производные непрерывны в $\overline{G}'$ и поэтому $u \in C^{(2k)}(G')$. Условия для этого сформулированы в следующей теореме, являющейся модификацией теоремы 1.2 работы [32].

Теорема 46.3. *Пусть G — область с границей Липшица*[1]*, A — дифференциальный оператор порядка $2k$, а билинейная форма* (46.7) *$\mathring{W}_2^{(k)}(G)$-эллиптична. Пусть s — положительное целое, причем $s > k + N/2$. Пусть $a_{ij} \in C^{(\alpha_i)}(G)$, где $\alpha_i = s - k + |i|$, и пусть $f \in W_2^{(s-k)}(G)$. Тогда слабое решение $u(x)$ уравнения $Au = f$ является его классическим решением в G.*

[1]) Без этого условия легко обойтись.

Замечание 46.1. При тех же предположениях теорему 46.3 можно сформулировать «локально». Если $G' \subset \overline{G}' \subset G$, коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие в G', $f \in W_2^{(s-k)}(G')$ и $s > k + N/2$, то слабое решение уравнения $Au = f$ является его классическим решением в G'.

Замечание 46.2. Если $a_{ij} \in C^{(\infty)}(G)$ и $f \in C^{(\infty)}(G)$, то исходя из этих результатов легко показать, что $u \in C^{(\infty)}(G)$, т. е. что слабое решение имеет в G производные всех порядков. В частности, это заключение справедливо для однородных уравнений с постоянными коэффициентами, таких как уравнение Лапласа, бигармоническое уравнение и т. д.

Для слабого решения данной краевой задачи, т. е. для свойств слабого решения в замкнутой области $\overline{G}$, можно также получить результаты, аналогичные тем, которые были сформулированы для слабого решения уравнения $Au = f$, т. е. аналогичные результатам, касающимся свойств слабого решения внутри области G. Сформулировать эти результаты непросто, и соответствующие доказательства также сложны. Существенную роль здесь играет гладкость границы. Грубо говоря, можно сказать, что если все параметры данной задачи (включая границу) являются достаточно гладкими, то слабое решение является классическим решением этой задачи.

Можно также говорить о «локальной» форме соответствующих теорем. В частности, можно говорить о гладкости решения в области, содержащей достаточно гладкую часть границы, и т. д. Эти вопросы подробно исследованы в книге [32].

Замечание 46.3. Отметим, что весьма существенными являются теоремы Соболева о вложении, на основе которых можно сформулировать теоремы типа 46.3. В свою очередь на основании уже этих теорем можно принимать решение о том, каковы для данного уравнения (или для данной задачи) должны быть условия, достаточные для того, чтобы это уравнение (или задача) имело классическое решение. Тем не менее, чтобы на основании этих теорем вложения обеспечить существование классического решения рассматриваемой задачи, необходимы довольно сильные предположения.

Чтобы обеспечить, например, существование классического решения уравнения второго порядка, нужно в соответствии с теоремой 46.3 положить $s = 3$. Отсюда, по той же самой теореме, необходимо условие $a_{ij} \in C^{(3)}(G)$ для коэффициентов a_{ij} вторых производных и, далее, $f \in W_2^{(2)}(G)$. Как известно (см., например, [12]), можно доказать существование классического решения классическими методами, основанными на теоремах о неподвижной точке, используя для этого относительно более слабые предположения. Однако отметим, что теория, разработанная в этой книге и основанная на исследовании слабых решений в пространстве

$W_2^{(k)}(G)$, имеет совершенно иной характер и иную цель, чем анализ классических решений или, скажем, предположений, при которых гарантируется существование классического решения[1]).

б) Существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям

В определении 32.2 устойчивые граничные условия

$$B_{pl}u = g_{pl}(S) \tag{46.15}$$

характеризуются функцией $w \in W_2^{(k)}(G)$, для которой соотношения

$$B_{pl}w = g_{pl}(S), \quad p = 1, \ \ldots, \ r, \quad l = 1, \ \ldots, \ \mu_p, \tag{46.16}$$

справедливы в смысле теории следов. Существование такой функции заранее предполагается по определению; таким образом, в смысле этого определения функция $w(x)$ является заданной, в то время как функции $g_{pl}(S)$ «получены» из функции $w(x)$. Тогда выполнение граничных условий (46.15) для функции $u(x)$ следует из условия (см. упомянутое определение) $u - w \in V$, где V есть подпространство пространства $W_2^{(k)}(G)$ таких функций, для которых соотношения $B_{pl}v = 0$, $p = 1, \ \ldots, \ r$, $l = 1, \ \ldots, \ \mu_p$, справедливы в смысле теории следов.

Естественно, в приложениях возникают несколько иные задачи. Задаются функции $g_{pl}(S)$, и если нужно решить некоторую задачу в смысле определения 32.2, то необходимо построить функцию $w(x)$ или по крайней мере доказать ее существование.

Мы уже продемонстрировали построение функции $w(x)$ на простом примере перед замечанием 11.7. Что же касается существования такой функции в общем случае, мы предлагаем по крайней мере следующую теорему, связанную с граничными условиями Дирихле. (Символом $G \in \mathcal{N}^{(k),\,1}$ мы обозначим тот факт, что граница Γ области G обладает следующим свойством: производные порядка k от функций $a^{(r)}$ в определении 28.6 являются липшицевыми.)

Теорема 46.4. *Пусть* $G \in \mathcal{N}^{(k),\,1}$, *и пусть на* Γ *заданы функции* $g_l \in W_2^{(k-l)}(\Gamma)$, $l = 0, \ 1, \ \ldots, \ k-1$ (см. замечание 30.2). *Тогда существует функция* $w \in W_2^{(k)}(G)$, *такая что в смысле теории следов справедливы соотношения*

$$\frac{\partial^l w}{\partial \nu^l} = g_l(S) \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad l = 0, \ 1, \ \ldots, \ k-1. \tag{46.17}$$

Заметим, что мы требуем определенной гладкости не только для границы Γ, но также и для функций $g_l(S)$. Эта гладкость тем

---

[1]) Нужно также отметить, что предположения, даваемые в теореме 46.3, могут быть до некоторой степени ослаблены. Однако это ослабление несущественно.

больше, чем меньше порядок производной в направлении внешней нормали в соотношении (46.17).

Замечание 46.4. Имеется целый ряд задач, касающихся этих вопросов, и, вообще говоря, до сих пор удовлетворительно не решенных. В частности, вопрос гладкости границы является источником заметных трудностей. Для случая $k=1$ (задача Дирихле для уравнения второго порядка) можно показать, что любую функцию $g_0 \in W_2^{(1)}(\Gamma)$ несложно продолжить на всю область G. При этом полученная функция принадлежит пространству $W_2^{(1)}(G)$. Здесь используется лишь предположение о том, что граница Г является липшицевой (см. [32]). Однако здесь, вообще говоря, необходимо требование определенной гладкости функции $g_0(S)$, поскольку недостаточно непрерывности функции $g_0(S)$ на границе. Как уже отмечалось выше, даже на границе единичного круга была построена непрерывная функция, не являющаяся следом никакой функции из $W_2^{(1)}(G)$ (см. [32]).

Более естественные требования, касающиеся гладкости функций $g_0(S)$, ..., $g_{k-1}(S)$, можно получить введением пространств с дробными производными (пространство $W_2^{(1/2)}(\Gamma)$ и т. д.), см. [32].

В случае плоских областей с углами или областей с подобными особенностями в пространстве E_N $(N>2)$ полезно использовать так называемые *пространства Соболева с весами*. Читатель, интересующийся этим направлением исследований, может ознакомиться с ним в статьях А. Куфнера [21], [22], [23]. См. также [32], гл. 6.

Глава 47

Заключительные замечания, перспективы предложенной теории

В предыдущей главе мы исчерпали круг задач, которые хотели рассмотреть в этой книге. Уже в гл. 36 при подведении итогов ч. IV мы отметили, что разработанная теория является в определенном смысле замкнутой. Затем в ч. V мы применили эту теорию к задаче на собственные значения, а в ч. VI были предложены некоторые наиболее новые методы.

Хотя мы говорим об определенной замкнутости предложенной теории, мы ни в коем случае не имеем в виду, что в этой области все задачи решены. Взглянем на рассмотренную теорию с точки зрения задач для дифференциальных уравнений, на исследование которых в основном была ориентирована эта книга. Прежде всего видно, что был обсужден весьма узкий круг задач, а именно линейные задачи в вещественном гильбертовом пространстве. За исключением гл. 45, в основном были исследованы эллиптические

уравнения. Отметим, что даже в рамках этой темы не был затронут ряд интересных задач (так называемые априорные оценки в этой теории (см. [27]), методы Вайнштейна и Фикеры оценки собственных значений (см. также [27]) и т. д.). Метод наименьших квадратов и его приложение, включая приложение к задачам на собственные значения, можно было бы исследовать заметно глубже (см., например, [8], [30]). То же самое относится к методу Галёркина. На основе обоих этих методов можно также исследовать и задачи других типов, например нелинейные задачи, которые вообще не обсуждались в этой книге. Кроме того, существует целый ряд других методов, более или менее подходящих для приложений.

Положительные, но не положительно определенные задачи совсем не рассматривались. Эти задачи встречаются, например, в связи с дифференциальными уравнениями, для которых в заданной области или, возможно, на ее границе обращаются в нуль некоторые коэффициенты при высших производных. Такие задачи обладают свойствами, несколько отличными от свойств положительно определенных задач (например, «пополнение» пространства S_A, рассмотренное в гл. 10, не может быть произведено только лишь с помощью элементов исходного гильбертова пространства H, и т. д.). Предложим простой пример.

Рассмотрим задачу

$$Au \equiv -[p(x)u']' + q(x)u = f(x), \tag{47.1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{47.2}$$

где функции p, p', q непрерывны на $[0, 1]$,

$$p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0 \tag{47.3}$$

и $f \in L_2(0, 1)$. В гл. 19 мы показали, что оператор A является положительно определенным на линеале M дважды непрерывно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, удовлетворяющих граничным условиям (47.2). Из анализа гл. 39 тогда следует, что этот оператор имеет бесконечное, а именно счетное множество собственных значений, и т. д. Рассмотрим на том же самом линеале оператор

$$Bu = -(x^2u')', \tag{47.4}$$

который, конечно, не удовлетворяет первому из условий (47.3), поскольку функция $p(x) = x^2$ равна нулю при $x = 0$ в этом случае. Легко показать, что этот оператор не является положительно определенным на M.

Для оператора B рассмотрим задачу на собственные значения

$$-(x^2u')' - \lambda u = 0, \tag{47.5}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{47.6}$$

Очевидно, что оператор B положителен на M, поэтому он может иметь только положительные собственные значения. Мы покажем, что он вообще не имеет собственных значений. В этом отношении оператор B существенно отличается от положительно определенного оператора A (для которого условия (47.3) выполнены).

Запишем уравнения (47.5) в виде

$$x^2u'' + 2xu' + \lambda u = 0. \tag{47.7}$$

Известным методом (это уравнение типа уравнения Эйлера, поэтому мы можем положить $u = x^\alpha$, см. [33]) получаем характеристическое уравнение для α, $\alpha^2 + \alpha + \lambda = 0$. Для рассматриваемого уравнения получим общий интеграл:

$$\begin{aligned}
&u = C_1 x^{-1/2 + \sqrt{(1/4 - \lambda)}} + C_2 x^{-1/2 - \sqrt{(1/4 - \lambda)}}, && \text{если } \lambda < 1/4,\\
&u = C_1 x^{-1/2} + C_2 x^{-1/2} \ln x, && \text{если } \lambda = 1/4,\\
&u = C_1 x^{-1/2} \cos(\beta \ln x) + C_2 x^{-1/2} \sin(\beta \ln x),
\end{aligned}$$

где $\beta = (\lambda - 1/4)$, если $\lambda > 1/4$. Поскольку $1^\alpha = 1$ и $\ln 1 = 0$, второе из условий (47.6) дает в указанных случаях соответственно

$$\begin{aligned}
&u = Cx^{-1/2}\left(x^{\sqrt{(1/4 - \lambda)}} - x^{-\sqrt{(1/4 - \lambda)}}\right),\\
&u = Cx^{-1/2} \ln x,\\
&u = Cx^{-1/2} \sin(\beta \ln x),
\end{aligned}$$

однако во всех этих трех случаях можно удовлетворить оставшееся граничное условие $u(0) = 0$, только если $C = 0$. Для всех положительных (и не только положительных) λ задача (47.5), (47.6) имеет, таким образом, только нулевые решения, поэтому оператор B вообще не имеет собственных значений.

Уже из этого простого примера видно существенное различие между свойствами положительных и положительно определенных операторов.

Положительные операторы встречаются в задачах для дифференциальных уравнений на бесконечных областях (см., например, [28] или [27]). Свойства этих операторов существенно отличаются для разных «типов бесконечности» заданной области (например, в зависимости от того, рассматривается ли внешность круга или бесконечная полоса, и т. д.).

Нелинейные задачи в этой книге совсем не рассматривались. Их исследование основано по существу на теории так называемых *монотонных операторов* и находится в центре внимания выдающихся современных математиков (Ф. Браудера, Дж. Лионса, Й. Нечаса и др.); см., например, [28]. См. также книгу: A. Kufner, S. Fučik: Nonlinear Differential Equations.— Amsterdam, Elsevier. Предполагается, что эта книга является, в определенном смысле, продолжением нашей книги.

Все упомянутые проблемы могут изучаться в комплексных гильбертовых пространствах (см. с. 73). Перенос результатов, полученных для вещественного гильбертова пространства (и рассмотренных в нашей книге), на комплексный случай не представит существенных трудностей. См., например, книгу [32].

Другой, хотя относительно независимый круг проблем связан с численной устойчивостью вариационных процессов. См. в особенности книги [28] и [5]. Некоторые результаты из этих книг, хотя и в довольно упрощенном виде, были представлены в гл. 20 и 25.

К категории несколько специальных задач принадлежит быстро развивающийся метод конечных элементов, принципы которого были обсуждены в гл. 42.

Таким образом, круг задач, связанных с этой книгой, весьма обширен.

Таблица для построения наиболее распространенных функционалов и систем уравнений Ритца

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$Fu=((u,\ u))-2\int\limits_G uf\,dx-2\varkappa(u,\ h) \tag{1}$$

(см. (34.73)) методом Ритца на множестве функций вида

$$u(x)=w(x)+\sum_{i=1}^{n}b_{ni}v_i(x),$$

где b_{ni} $(i=1,\ \ldots,\ n)$ — произвольные вещественные числа. Для коэффициентов c_{ni} приближения Ритца

$$u_n(x)=w(x)+\sum_{i=1}^{n}c_{ni}v_i(x) \tag{2}$$

получим систему уравнений (34.54)

$$\begin{aligned}
&((v_1,\ v_1))\,c_{n1}+\ldots+((v_1,\ v_n))\,c_{nn}=\int\limits_G v_1 f\,dx+\varkappa(v_1,\ h)-((v_1\ w)),\\
&\qquad\qquad\qquad

виям, содержащим производные порядка не более $k-1$), и

$$v_1(x), \ldots, v_n(x) \tag{4}$$

— первые n элементов некоторого базиса в пространстве V, т. е. в подпространстве функций из $W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющих однородным граничным условиям, соответствующим заданным устойчивым граничным условиям. Если форма $((v, u))$ не является V-эллиптичной, то необходимо, чтобы базисные функции удовлетворяли некоторым дополнительным условиям (см. гл. 19, с. 203, гл. 22, с. 258, гл. 35, с. 420 и 430).

Если все граничные условия являются однородными, то $\varkappa(v, h) \equiv 0$, и в качестве $w(x)$ мы можем также выбрать нулевую функцию. Для уравнений типа изучавшихся в ч. III этой книги получим (см. гл. 36), что $V = H_A$, где H_A — пространство из гл. 10 и $((v, u)) = (v, u)_A$. Тогда из (1), (2), (3) следуют, как частный случай (см. с. 152 и 153), соотношения

$$Fu = (u, u)_A - 2\int_G uf\,dx, \tag{5}$$

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni} v_i(x), \tag{6}$$

$$(v_1, v_1)_A c_{n1} + \ldots + (v_1, v_n)_A c_{nn} = \int_G v_1 f\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(v_1, v_n)_A c_{n1} + \ldots + (v_n, v_n)_A c_{nn} = \int_G v_n f\,dx. \tag{7}$$

Если, кроме того, функции (4) принадлежат пространству D_A (что является наиболее распространенным случаем), то справедливо равенство $(v_i, v_j)_A = (Av_i, v_j)$.

В табл. 1 приведены $((v, u))$ и $\varkappa(v, h)$ для наиболее распространенных дифференциальных уравнений с граничными условиями. Эти выражения совместно с функцией $f(x)$ определяют функционал (1) и систему (3). Далее в этой таблице приведены условия, налагаемые на базисные функции (4), или, возможно, условия разрешимости данной задачи.

Что касается подходящего выбора функций (4), см. гл. 20 и 25.

Замечание 1. Условие $\int_G v\,dx = 0$, налагаемое в табл. 1 на базисные функции для задачи 16, можно заменить условием

$$\int_{\Gamma_1} w\,dS = 0,$$

где Γ_1 — это часть (положительной меры) границы (в частности, возможно $\Gamma_1 = \Gamma$). Это наиболее выгодно, например, в случае при-

Таблица 1

	Уравнение	Граничные условия	Форма $((v, u))$	Член $\varkappa (v, h)$	Условия, наложенные на функцию $w(x)$	Условия, которым должны удовлетворять базисные функции v_i	Условия разрешимости задачи
1.	$-(pu')' + ru = f$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $r(x) \geqslant 0$	$u(a) = A$, $u(b) = B$	$\int_a^b (pv'u' + rvu)\, dx$	—	$w(a) = A$, $w(b) = B$	$v(a) = 0$, $v(b) = 0$	—
2.	то же	$u(a) = A$, $u'(b) = B$	то же	$Bp(b)\, v(b)$	$w(a) = A$	$v(a) = 0$	—
3.	»	$u'(a) - \beta u(a) = A$, $u'(b) + \delta u(b) = B$, $\beta \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$, $\beta^2 + \delta^2 > 0$	$\int_a^b (pv'u' + rvu)\, dx + \beta p(a) v(a) u(a) + \delta p(b) v(b) u(b)$	$Bp(b) v(b) - Ap(a) v(a)$	—	—	—
4.	то же, где $r(x) > 0$ по крайней мере на некотором подынтервале интервала (a, b)	$u'(a) = A$, $u'(b) = B$	$\int_a^b (pv'u' + rvu)\, dx$	$Bp(b) v(b) - Ap(a) v(a)$	—	—	—
5.	$-(pu')' = f$, $p(x) \geqslant p_0 > 0$	$u'(a) = A$, $u'(b) = B$	$\int_a^b pv'u'\, dx$	$Bp(b) v(b) - Ap(a) v(a)$	—	$\int_a^b v\, dx = 0$	$\int_a^b f dx + Bp(b) - Ap(a) = 0$

Продолжение

	Уравнение	Граничные условия	Форма $((v, u))$	Член $\varkappa(v, h)$	Условия, наложенные на функцию $w(x)$	Условия, которым должны удовлетворять базисные функции v_i	Условия разрешимости задачи
6.	$(pu'')''-(qu')'+ru=f$, $p(x)\geqslant p_0>0$, $q(x)\geqslant 0$, $r(x)\geqslant 0$	$u(a)=A$, $u(b)=B$, $u'(a)=C$, $u'(b)=D$	$\int_a^b (pv''u''+qv'u'+rvu)\,dx$	—	$w(a)=A$, $w(b)=B$, $w'(a)=C$, $w'(b)=D$	$v(a)=0$, $v(b)=0$ $v'(a)=0$, $v'(b)=0$	—
7.	то же	$u(a)=A$, $u(b)=B$, $u''(a)=C$, $u''(b)=D$	то же	$Dp(b)v'(b)-Cp(a)v'(a)$	$w(a)=A$, $w(b)=B$	$v(a)=0$, $v(b)=0$	—
8.	»	$u(a)=A$, $u(b)=B$, $u'(a)=C$, $u''(b)=D$	»	$Dp(b)v'(b)$	$w(a)=A$, $w(b)=B$, $w'(a)=C$	$v(a)=0$, $v(b)=0$, $v'(a)=0$	—
9.	»	$u(a)=A$, $u''(b)=B$, $u'(a)=C$, $[-(pu'')'+qu']_{x=b}=D$	»	$Bp(b)v'(b)+Dv(b)$	$w(a)=A$, $w'(a)=C$	$v(a)=0$, $v'(a)=0$	—
10.	$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(p_iu^{(i)})^{(i)}=f$, $p_i(x)\geqslant 0$, $i=0, \ldots, k-1$, $p_k(x)\geqslant p>0$	$u(a)=A_0, \ldots, u^{(k-1)}(a)=A_{k-1}$, $u(b)=B_0, \ldots, u^{(k-1)}(b)=B_{k-1}$	$\int_a^b \sum_{i=0}^{k} p_iv^{(i)}u^{(i)}\,dx$	—	$w(a)=A_0, \ldots, w^{(k-1)}(a)=A_{k-1}$ $w(b)=B_0, \ldots, w^{(k-1)}(b)=B_{k-1}$	$v(a)=\ldots=v^{(k-1)}(a)=0$, $v(b)=\ldots=v^{(k-1)}(b)=0$	—

Продолжение

	Уравнение	Граничные условия	Форма $((v, u))$	Член $\varkappa(v, h)$	Условия, наложенные на функцию $w(x)$	Условия, которым должны удовлетворять базисные функции v_i	Условия разрешимости задачи
11.	$-\sum_{i,\ j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+ cu=f,$ $\sum_{i,\ j=1}^{N} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \geqslant p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2,$ $p>0$ (см. (22.8)), $a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ c(x)\geqslant 0$	$u=g(S)$ на Γ	$\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+ cvu\right)dx$	—	$w=g(S)$ на Γ	$v=0$ на Γ	—
12.	то же	$Nu+\sigma u=h(S)$ на Γ, где $Nu=\sum_{i,\ j=1}^{N}\times$ $\times a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i,$ $\sigma(S)\geqslant\sigma_0>0$	$\int_G\left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+ cvu\right)dx+$ $+\int_\Gamma \sigma vu\,dS$	$\int_\Gamma vh\,dS$	—	—	—

Продолжение

	Уравнение	Граничные условия	Форма $((v, u))$	Член $\varkappa(v, h)$	Условия, наложенные на функцию $w(x)$	Условия, которым должны удовлетворять базисные функции v_i	Условия разрешимости задачи
14.	»	$u=g(S)$ на Γ_1, $Nu+\sigma u=h(S)$ на Γ_2, $\sigma(S)>0$	$\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cvu \right) dx + \int_{\Gamma_2} \sigma v u \, dS$	$\int_{\Gamma_2} vh \, dS$	$w=g(S)$ на Γ_1	$v=0$ на Γ_1	—
15.	» где $c(x)>0$ хотя бы в некоторой подобласти области G	$Nu=h(S)$ на Γ	$\int_G \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + cvu \right) dx$	$\int_{\Gamma} vh \, dS$	—	—	—
16.	$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f$, $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\alpha_i\alpha_j \geqslant p\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2$, $p>0$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$	$Nu=h(S)$ на Γ	$\int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx$	$\int_{\Gamma} vh \, dS$	—	$\int_G v \, dx = 0$	$\int_G vf \, dx + \int_{\Gamma} h \, dS = 0$
17.	Для уравнения Пуассона $-\Delta u=f$, все пп. 11, 12, 13, 14 и 16 справедливы с $c(x)\equiv 0$, $\int_G \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$ и $Nu=\frac{\partial u}{\partial \nu}$						

Продолжение

	Уравнение	Граничные условия	Форма $((v, u))$	Член $\varkappa(v, h)$	Условия, наложенные на функцию $w(x)$	Условия, которым должны удовлетворять базисные функции v_i	Условия разрешимости задачи
18.	$\Delta^2 u = f$	$u = g_1(s)$ на Γ, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g_2(s)$ на Γ	$\int_G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2$	—	$w = g_1(s)$ на Γ, $\frac{\partial w}{\partial \nu} = g_2(s)$ на Γ	$v = 0$ на Γ, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ на Γ	—
19.	то же	$u = g(s)$ на Γ, $Mu = h(s)$ на Γ (о Mu см. с. 273)	$\int_G \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) \times \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2(1-\sigma) \times \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right) \times \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] dx_1 dx_2$, $0 \leqslant \sigma < 1$	$\int_G \frac{\partial v}{\partial \nu} h \, ds$	$w = g(s)$ на Γ	$v = 0$ на Γ	—

Продолжение

	Уравнение	Граничные условия	Форма $((v.\ u))$	Член $\varkappa\ (v,\ h)$	Условия, наложенные на функцию $x\ (w)$	Условия, которым должны удовлетворять базисные функции v_l	Условия разрешимости задачи
20	«	$Nu=h_1(s)$ на Γ, $Mu=h_2(s)$ на Γ (о Nu и Mu см. с. 273; см. также с. 436)	то же	$\int\left(vh_1+\frac{\partial v}{\partial \nu}h_2\right)ds$	—	$\iint_G v\,dx_1\,dx_2=0$, $\iint_G x_1 v\,dx_1\,dx_2=0$, $\iint_G x_2 v\,dx_1\,dx_2=0$	$\iint_G f\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma h_1\,ds=0$, $\iint_G x_1 f\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma x_1 h_1\,ds+\int_\Gamma v_1 h_2\,ds=0$, $\iint_G x_2 f\,dx_1\,dx_2+\int_\Gamma x_2 h_1\,ds+\int_\Gamma v_2 h_2\,ds=0$

менения метода конечных элементов (элементарные сплайн-функции из гл. 42 не удовлетворяют условию $\int_G v\,dx=0$).

Подобным образом в задаче 20 три аналогичных условия, налагаемые на базисные функции, можно заменить тем условием, что эти функции равны нулю в некоторых заданных трех точках границы Γ, не лежащих на прямой линии.

Замечание 2. Если граница Γ не является в случае задачи 20 гладкой, а содержит углы P_i $(i=1, \ldots, j)$ (например, четыре угла в случае квадрата), то необходимо приписать этим точкам числа H_i (скачки момента кручения) и добавить к члену $\varkappa(v,\ h)=\int_\Gamma [vh_1+(\partial v/\partial \nu)\,h_2]\,dS$ член $\sum_{i=1}^{j} H_i v(P_i)$. Использование табл. 1 проиллюстрировано на следующем примере, который выбран не вполне тривиальным для того, чтобы извлечь из него максимум информации.

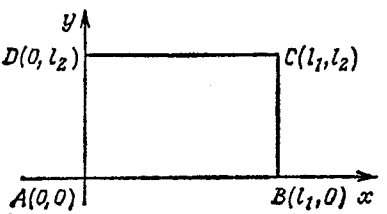

Рис. 43.

Пример. Пусть G — прямоугольник $ABCD$, изображенный на рис. 43. Рассмотрим задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+k_1x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+k_2y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+k_3(x^2+y^2)\,u=f(x,\ y) \quad \text{в } G, \tag{8}$$

$$u=0 \text{ на } AD, \quad u=4 \text{ на } BC, \tag{9}$$

$$(1+k_2l_2^2)\frac{\partial u}{\partial y}+u=3 \text{ на } DC, \quad -\frac{\partial u}{\partial y}+2u=5 \text{ на } AB. \tag{10}$$

Здесь k_1, k_2, k_3 — неотрицательные постоянные, а l_2 — высота прямоугольника. Для $k_1=k_2=k_3=0$ уравнение (8) сводится к уравнению Пуассона $-\Delta u=f(x,\ y)$.

Легко проверить, что этот случай относится к задаче 14 из табл. 1, здесь $x_1=x$, $x_2=y$. Отсюда получим

$$a_{11}(x,\ y)=1+k_1x^2, \quad a_{12}(x,\ y)=a_{21}(x,\ y)\equiv 0,$$
$$a_{22}(x,\ y)=1+k_2y^2, \quad c(x,\ y)=k_3(x^2+y^2),$$

поэтому прежде всего

$$a_{12}(x,\ y)=a_{21}(x,\ y), \quad c(x,\ y)\geqslant 0$$

и

$$\sum_{i,\ j=1}^{2} a_{ij}(x,\ y)\,\alpha_i\alpha_j=(1+k_1x^2)\,\alpha_1^2+(1+k_2y^2)\,\alpha_2^2\geqslant \alpha_1^2+\alpha_2^2 \tag{11}$$

для любого вектора $(\alpha_1,\ \alpha_2)$.

Если мы положим, далее, $g(S)=0$ на AD и $g(S)=4$ на BC, то граничные условия Дирихле (9) можно записать в виде

$$u=g(S) \text{ на } \Gamma_1, \tag{12}$$

где $\Gamma_1=AD\cup BC$. Аналогично, если мы положим $\sigma(S)=1$, $h(S)=3$ на DC и $\sigma(S)=2$, $h(S)=5$ на AB и если мы выпишем на DC и на AB выражение

$$Nu=\sum_{i,\ j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\gamma_i,$$

т. е. более подробно

$$Nu=(1+k_1x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0+(1+k_2y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\cdot 1=(1+k_2l_2^2)\frac{\partial u}{\partial y} \text{ на } DC,$$

$$Nu=(1+k_1x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\cdot 0+(1+k_2y^2)\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(-1)=-\frac{\partial u}{\partial y} \text{ на } AB,$$

то условия Ньютона (10) можно записать в виде

$$Nu+\sigma u=h \text{ на } \Gamma_2, \tag{13}$$

где $\Gamma_2=DC\cup AB$. Очевидно, что здесь справедливо неравенство $\sigma(S)>0$ на Γ_2.

Следовательно, здесь действительно идет речь о задаче 14. Из табл. 1 тогда следует, что

$$((v,\ u))=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[(1+k_1x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+(1+k_2x^2)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+k_3(x^2+y^2)vu\right]dx\,dy+$$

$$+\int_0^{l_1} v(x,\ l_2)\,u(x,\ l_2)\,dx+2\int_0^{l_1} v(x,\ 0)\,u(x,\ 0)\,dx, \tag{14}$$

$$\varkappa(v,\ h)=3\int_0^{l_1} v(x,\ l_2)\,dx+5\int_0^{l_1} v(x,\ 0)\,dx. \tag{15}$$

В нашем случае в качестве $w(x,\ y)$ можно выбрать, например, функцию

$$w(x,\ y)=\frac{4x}{l_1}, \tag{16}$$

очевидно удовлетворяющую условию (12) (т. е. обоим условиям (9))

Далее, в соответствии с табл. 1 необходимо, чтобы базисные функции удовлетворяли условию $v(S)=0$ на Γ_1.

Из соотношения (25.28) следует, что в этом случае в качестве базиса удобно выбрать систему функций

$$u_{ij}(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{\frac{i^2}{l_1^2}+\frac{j^2}{l_2^2}}}\sin\frac{i\pi x}{l_1}\cos\frac{j\pi y}{l_2},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{17}$$

Если мы примем во внимание только небольшое число элементов этого базиса, можно опустить коэффициент $1/\sqrt{i^2/l_1^2+j^2/l_2^2}$ и рассмотреть функции

$$v_1=\sin\frac{\pi x}{l_1},\quad v_2=\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2},\quad v_3=\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{2\pi y}{l_2},$$
$$v_4=\sin\frac{2\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2},\quad v_5=\sin\frac{2\pi x}{l_1}\cos\frac{2\pi y}{l_2},\ \ldots. \tag{18}$$

В табл. 1 не указано никаких условий разрешимости рассматриваемой задачи. Следовательно, эта задача разрешима для любой функции $f\in L_2(G)$.

В этом случае функционал (1) примет вид

$$Fu=((u,\ v))-2\varkappa(u,\ h)-2\iint\limits_G uf\,dx\,dy=$$
$$=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\left[(1+k_1x^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+(1+k_2y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+k_3(x^2+y^2)u^2\right]dx\,dy+$$
$$+\int\limits_0^{l_1}u^2(x,\ l_2)\,dx+2\int\limits_0^{l_1}u^2(x,\ 0)\,dx-6\int\limits_0^{l_1}u(x,\ l_2)\,dx-10\int\limits_0^{l_1}u(x,\ 0)\,dx-$$
$$-2\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}u(x,\ y)\,f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Выбирая в системе Ритца, например, $n=5$ и рассматривая первые 5 элементов этого базиса, записанные в виде (18), мы получаем для искомых коэффициентов $c_{51},\ \ldots,\ c_{55}$ приближения Ритца

$$u_5(x,\ y)=w(x,\ y)+\sum_{i=1}^{5}c_{5i}v_i(x,\ y)$$

систему уравнений (3)

$$((v_1,\ v_1))\,c_{51}+\ldots+((v_1,\ v_5))\,c_{55}=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}v_1f\,dx\,dy+\varkappa(v_1,\ h)-((v_1,\ w)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$((v_1,\ v_5))\,c_{51}+\ldots+((v_5,\ v_5))\,c_{55}=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}v_5f\,dx\,dy+\varkappa(v_5,\ h)-((v_5,\ w)),$$

где вследствие (14), (15), (16) мы получим, например,

$$((v_2,\ v_3))=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\left[(1+k_1x^2)\frac{\pi^2}{l_1^2}\cos^2\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}\cos\frac{2\pi y}{l_2}+(1+k_2y^2)\frac{2\pi^2}{l_2^2}\times\right.$$
$$\left.\times\sin^2\frac{\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}\sin\frac{2\pi y}{l_2}+k_3(x^2+y^2)\sin^2\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}\cos\frac{2\pi y}{l_2}\right]dx\,dy+$$

$$+\int_0^{l_1}\sin^2\frac{\pi x}{l_1}\cos\pi\cos 2\pi\,dx+2\int_0^{l_1}\sin^2\frac{\pi x}{l_1}\,dx,$$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}v_2 f\,dx\,dy=\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}f(x,\ y)\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}\,dx\,dy,$$

$$\varkappa(v_2,\ h)=3\int_0^{l_1}\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\pi\,dx+5\int_0^{l_1}\sin\frac{\pi x}{l_1}\,dx,$$

$$((v_2,\ w))=\frac{4}{l_1}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[(1+k_1x^2)\frac{\pi}{l_1}\cos\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}+\right.$$

$$\left.+k_3(x^2+y^2)\,x\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}\right]dx\,dy+$$

$$+\frac{4}{l_1}\int_0^{l_1}x\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\pi\,dx+\frac{8}{l_1}\int_0^{l_1}x\sin\frac{\pi x}{l_1}\,dx$$

и т. д.

В случае уравнения Пуассона, мы, очевидно, получаем, что $k_1=k_2=k_3=0$, и соответствующие выражения существенно упрощаются.

Литература

[1] Aziz A. K., Babuška I. Mathematical Foundations of the Finite Element Method.— New York—London, Academic Press 1972.

[2] Babuška I. The Finite Element Method. Lecture on Boston Regional Conference 1970.

[3] Babuška I. The Rate of Convergence for the Finite Element Method.— SIAM J. Numer. Anal., **8**, 2, 1971, p. 304—315.

[4] Babuška I. Error Bound for Finite Element Method.— Num. Math., **16**, 1971, p. 322—333.

[5] Babuška I., Práger M., Vitásek E. Numerical Processes in Differential Equations.— London—New York—Sydney, J. Wiley and Sons 1966.

[6] Babuška I., Rektorys K., Vyčichlo F. Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme.— Berlin, Akademieverlag 1960.

[7] Бондаренко Б. А. Полигармонические многочлены.— Ташкент, 1968.

[8] Bramble J. H., Schatz A. H. Least Squares Methods for $2m$-th Order Elliptic Boundary Value Problems.— Math. of Comp., **25**, 113, 1970, p. 1—33.

[9] Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, 2nd Ed.— Leipzig, Geert and Portig 1963.

[10] Collatz L. Functional Analysis and Numerical Mathematics.— New York, Academic Press 1966.

[11] Douglas J., Jr., Dupont T. Galerkin Methods for Parabolic Equations.— SIAM J. Numer. Anal., **7**, 1970, p. 575—626.

[12] Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type.— New Jersey, Prentice Hall 1964.

[13] Fučík S., Nečas J., Souček J., Souček Vl. Spectral Analysis of Nonlinear Operators.— Prague, Society of Chechoslovak Mathematicians and Physicists, 1973.

[14] Fučík S., John O, Kufner A. Functional Spaces.— Prague, Academia 1977.

[15] Hlavaček I. Derivation of Non-Classical Variational Principles in Theory of Elasticity.— Aplikace matematiky, **12**, 1967, p. 15—29.

[16] Hlaváček I. Variational Principles in the Linear Theory of Elasticity.— Aplikace matematiky, **12**, 1967, p. 425—448.

[17] Hlaváček I. On Reissner's Variational Theorem for Boundary Values in Linear Elasticity.— Aplikace matematiky, **16**, 1971, p. 109—124.

[18] Hlaváček I. On a Semi-Variational Method for Parabolic Equations.— Aplikace matematiky. I: **17**, 1972, p. 327—351. II: **18**, 1973, p. 43—64.

[19] Hlaváček I., Nečas J. On Inequalities of Korn's Type.— Archive for Ratl. Mech., Anal., **36**, 1970, p. 305—334.

[20] Kolář Vl., Kratochvil J., Zlámal M., Ženišek A. Technical, Physical and Mathematical Principles of the Finite Element Method.— Rozpravy of the Czechoslovak Academy of Sciences, Series in Technical Sciences, **81**, 1971, 2.

[21] Kufner A. Imbedding Theorems for General Sobolev Weight Spaces.— Scuola normale superiore Pisa, v. XXIII. fasc. II, 1969.

[22] Kufner A. Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion.— Czech. Math. J., **15**, 90, 1965, p. 597—620.

[23] Kufner A. Lösungen der Dirichletschen Probleme für elliptische Differentialgleichungen in Räumen mit Belegungsfunktionen.— Czech. Math. J., **15**, 90, 1965, p. 621—633.
[24] Kufner A. Geometry of the Hilbert Space.— Prague, SNTL 1973. (In Czech.)
[25] Kufner A., Kadles J. Fourier Series.— Prague, Academia 1969. (In Czech.)
[26] Lusternik L. A., Sobolev L. I. Elements of Functional Analysis.— London, Constable 1961.
[27] Вариационные методы в математической физике.— М.: Наука, 1970.
[28] Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов.— М.: Наука, 1966.
[29] Проблема минимума квадратичного функционала. М.-Л.: Гостехиздат, 1952.
[30] Najzar K. On the Method of Least Squares of Finding Eigenvalues of Some Symmetric Operators. CMUC, **9**, 1968, p. 311—323.
[31] Natanson I. P. Theory of Functions of a Real Variable.— London, Constable 1961.
[32] Nečas J. Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.— Prague, Academia 1967.
[33] Rektorys K. Survey of Applicable Mathematics.— London, Iliffe — Cambridge (Massachusetts), M.I.T. Press 1969.
[34] Rektorys K. Temperature Distribution in a Water Dam.— Rozpravy of the Czechoslovak Academy of Sciences, Series in Math. and Phys. Sciences, **66**, 1956, 14. (In Czech.)
[35] Rektorys K. Die Lösung des ersten Randwertproblems "im Ganzen" für eine nichtlineare parabolische Gleichung mit der Netzmethode.— Czech. Math. J., **12**, 87, 1962, p. 69—103.
[36] Rektorys K. Die Lösung der gemischten Randwertaufgabe und des Problems mit einer Integralbedingung "im Ganzen" für eine nichtlineare parabolische Gleichung mit der Netzmethode.— Czech. Math. J., **13**, 88, 1963, p. 189—208.
[37] Rektorys K. On Application of Direct Variational Methods to the Solution of Parabolic Boundary Value Problems of Arbitrary Order in the Space Variables.— Czech. Math. J., **21**, 96, 1971, p. 318—339.
[38] Rektorys K., Zahradnik V. Solution of the First Biharmonic Problem by the Method of Least Squares on the Boundary.— Aplikace matematiky **19**, 1974, 2, p. 101—131.
[39] Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 1. Изд. 22-е, стереотип.— М.: Наука, 1967.
[40] Synge J. L. The Hypercircle in Mathematical Physics.— Cambridge, Cambridge Univ. Press 1957.
[41] Varga R. S. Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Mathematics.— Philadelphia, Soc. for Ind. and Appl. Math. 1971.
[42] Вишик М. И. Метод ортогональных проекций для самосопряженных уравнений.— ДАН СССР, **56**, 1947, с. 115—118.
[43] Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1967.
[44] Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity.— Oxford-London-New York, Pergamon Press 1968.
[45] Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.— London, McGraw-Hill 1967.
[46] Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering.— London, McGraw-Hill 1971.
[47] Zlámal M. On Some Finite Element Procedures for Solving Second Order Boundary Value Problems.— Numerische Mathematik, **14**, 1969, p. 42—48.
[48] Kufner A., John O., Fučik S. Function Spaces.— Prague, Academia 1977.
[49] Barbu V., Precupanu Th. Convexity and Optimization in Banach Spaces.— Bucaresti, Editura Academiei; Sijthoff & Nordhoff, International Publishers, 1978.

Список обозначений

$u \in M$ (или $u \notin M$)	u принадлежит (или не принадлежит) множеству M.
E_N	N-мерное евклидово пространство с обычным определением расстояния $\rho(A, B)$ между двумя точками $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_N)$, $\rho(A, B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+\ldots+(b_N-a_N)^2}$.
G	область в E_N, т. е. открытое связное множество в E_N. В настоящей книге рассматриваются только такие ограниченные области, которые обладают так называемой границей Липшица (гл. 2, с. 14). В случае $N=1$ область G — это открытый интервал (a, b).
Γ	граница области G.
$\overline{G}$	замыкание множества G в пространстве E_N (т. е. $\overline{G} = G+\Gamma$). Вместо замыкания области G в пространстве E_N мы вкратце говорим о замкнутой области $\overline{G}$.
$u(x)$	краткое обозначение для $u(x_1, \ldots, x_N)$.
$\int_G u(x)\,dx$	краткое обозначение для $\int \ldots \int_G u(x_1, \ldots, x_N)\,dx_1 \ldots dx_N$. При $N=1$ пишем $\int_G u(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx$.
$C^{(k)}(G)$	множество функций $u(x)$, частные производные которых до k-го порядка включительно непрерывны в G. Производной порядка 0 считаем саму функцию $u(x)$. Вместо $C^{(0)}(G)$ пишем $C(G)$. Так, $u \in C(G)$ означает, что функция $u(x)$ непрерывна в G; $u \in C^{(1)}(G)$ означает, что функции $u(x)$, $\partial u/\partial x_1$, ..., $\partial u/\partial x_N$ непрерывны в G.
$C^{(k)}(\overline{G})$	множество функций $u(x)$, частные производные которых до k-го порядка включительно непрерывны в $\overline{G}$. Вместо $C^{(0)}(\overline{G})$ пишем $C(\overline{G})$.

$C^{(\infty)}(\bar{G})$ [или $\mathscr{E}(\bar{G})$]	множество функций $u(x)$, частные производные которых всех порядков непрерывны в $\bar{G}$.
$C^{(\infty)}(G)$ [или $\mathscr{D}(G)$]	множество функций с компактным носителем в G.
H	гильбертово пространство, гл. 6.
(u, v)	скалярное произведение элементов u, v в гильбертовом (или предгильбертовом) пространстве.
$u \perp v$	элементы гильбертова пространства u, v ортогональны; $u \perp v \Leftrightarrow (u, v) = 0$.
$H = H_1 \oplus H_2$	разложение гильбертова пространства в прямую сумму ортогональных подпространств H_1, H_2.
$H_2 = H \ominus H_1$	ортогональное дополнение подпространства H_1 в гильбертовом пространстве H.
$\|\| u \|\|$	норма элемента u.
$\rho(u, v)$	расстояние между элементами u, v.
$L_2(G)$	гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых в области G, гл. 3.
$W_2^{(k)}(G)$	гильбертово пространство, элементами которого служат те функции из $L_2(G)$, у которых есть обобщенные производные в G до порядка k включительно, гл. 29.
$\mathring{W}_2^{(k)}(G)$	замыкание множества $C_0^{(\infty)}(G)$ по метрике пространства $W_2^{(k)}(G)$, гл. 30.
V	см. определения 32.1, 32.2.
D_A	область определения оператора.
$(u, v)_A$	скалярное произведение, определенное в гл. 10, с. 124.
H_A	гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_A$, гл. 10.
$A(v, u)$	билинейная форма, соответствующая оператору A, гл. 32.
$((v, u)) = A(v, u) + a(v, u)$	гл. 32.
$\{v\colon P\}$	множество, элементы которого обладают свойством P. Например, выражение $M = \{v : v \in C^{(2)}(\bar{G}),\ v = 0 \text{ на } \Gamma\}$ читается следующим образом: M — это множество всех функций, принадлежащих $C^{(2)}(G)$ и равных нулю на границе Γ. Если элементы v принадлежат некоторому метрическому пространству, то под указанным символом обычно понимают множество M с метрикой этого пространства (т. е. также метрическое пространство). Так, $\left\{v\colon v \in L_2(G),\ \int_G v(x)\,dx = 0\right\}$ — это подпространство пространства $L_2(G)$, элементами которого служат те элементы $L_2(G)$, для которых выполняется условие $\int_G v(x)\,dx = 0$.

Предметный указатель

Адамара пример 10
аксиомы метрики 21
— нормы 21
— скалярного произведения 60

базис 71
— ортонормированный 71
A-базис 165
Банаха теорема 89
Бесселя неравенство 48
билинейная форма 371, 378
Больцано — Коши признак 34
Бэтти тождество 283

Вейерштрасса пример 10
вектор перемещения 278

Галеркина метод 162, 181, 182, 243, 249, 255, 493
Галеркина — Петрова метод 164
Гёльдера неравенство 29
гильбертово пространство 67, 186
Грама определитель 68
граничные условия естественные 216
— — неоднородные 138, 141, 158, 197, 219, 267, 277, 286
— — неустойчивые 216
— — однородные 362, 481
— — основные 216
— — смешанные 264
— — устойчивые 216
Грина теорема 99, 353

Дирихле граничные условия 198, 260
— задача 11, 80, 139, 141, 147, 258
— интеграл 10
— принцип 10, 11

евклидова норма 226

замыкание 37, 66, 77

изгиб бруса 509
интеграл расходящийся 322
— сходящийся 322
изображение оригинала 81
изотропное тело 279

Кастильяно принцип 544
колебания струны 447
Коллатца метод 504
компактный носитель 330
Корна неравенство 283, 285
Коши — Буняковского неравенство 29
Коши последовательность 34, 77
кручение бруса 151

Куранта метод 168
— минимаксный принцип 467, 483

Лагранжа принцип 544
Ламе постоянные 279
Лапласа оператор 289, 350
— уравнение 10, 141, 256
Лебега верхняя сумма 320
— внешняя мера 317
— внутренняя мера 317
— интеграл 91, 319, 320
— нижняя сумма 320
ленточные матрицы 520
линеал 15, 59, 94
линейная комбинация 68
— система 10
линейное подпространство 55
липшицева граница 14

мера множества 318
метод гиперциклов 544
— наибыстрейшего спуска 171
— наименьших квадратов 168, 169, 182, 244
— ортогональных проекций 536
— — рядов 405
методы прямые вариационные 12, 25
— энергетические 137
метрика 21
— порожденная скалярным произведением 21, 64
множество бесконечной размерности 68
— всех полиномов 38
— замкнутое 66, 67
— значений оператора 81, 82
— измеримое по Лебегу 318
— компактное 451
— конечной размерности 68
— меры нуль 28
— ограниченное 315, 450
— открытое 315
— плотное 38, 66, 78
— предкомпактное 450
— счетное 318
модуль упругости 279

Неймана граничные условия 198, 261, 267, 284
— задача 258, 300
непрерывность 553
неравенство треугольника 17
норма 63, 78
— матрицы 226
— оператора 91
— порожденная скалярным произведением 21
— функции 17, 22, 26
— функционала 106
— энергетическая 137
Ньютона граничные условия 198, 260
— задача 258, 377

область замкнутая 14
— определения 81, 82
— с липшицевой границей 14, 80, 326
обобщенная производная 338
обобщенное решение 117, 132
обобщенный закон Гука 279
однородное тело 279
δ-окрестность 36, 66, 77
оператор 80
— бигармонический 287, 350
— вполне непрерывный 452
— дифференциальный 80
— инъективный 85
— линейный 86, 87
— матричный 82
— монотонный 565
— обратный 86
— ограниченный 170
— отображающий 81
— положительно определенный 102
— положительный 102
— простой 85
— самосопряженный 234
— сжимающий 88
— симметричный 99
— сопряженный 234
— теории упругости 282
— эллиптический 350, 351
оператора расширение 291
операторы коммутирующие 85
— конгруэнтные 234

операторы родственные 235
оригинал 81
ортогональная проекция 73, 535
— сумма 57, 73, 535
ортогональное дополнение 73
ортогональный элемент 72, 535
отображение на 82
— сюръективное 82
очень слабое решение 522

Парсеваля равенство 50, 71
первая вариация функционала 112
пластина с отверстием 302
подпространство 72
пополнение пространства 77
последовательность минимизирующая
— сходящаяся 30, 76
— фундаментальная 34, 65, 76
почти всюду 28, 319, 330
предел 31, 64, 76, 553
предельная точка 316
— функция 31
принцип минимума потенциальной энергии 115, 286, 416
— сжимающих отображений 89
прогиб балки 116, 162
— бруса 251
— мембраны 294
— пластины 397
производная множества 316
пространство 22, 27, 69, 117, 338, 362
— банахово 79
— линейное 15, 22, 59, 78
— метрическое 21, 76
— полное 65, 77
— предгильбертово 64
— сепарабельное 39, 67, 78, 145
— со скалярным произведением 64
— типа B 79
— унитарное 64
— энергетическое 137
Пуанкаре неравенство 185, 195
Пуассона коэффициент 280
— постоянная 272
— уравнение 11, 80, 109, 139, 141, 147, 256, 268, 377

равномерная ограниченность 452
равностепенная непрерывность 458
расстояние между функциями 20, 22
— — элементами 63
регуляризующее ядро 95
регулярная граница 330
регулярное значение 468
Римана интеграл 319
Рисса теорема 179
Ритца метод 9, 162, 168, 181, 182, 216, 239, 245, 251, 294, 414
— последовательность 154, 224

Симпсона метод 255
система замкнутая 71
— линейная 59
— линейно зависимая 68
— — независимая 44, 68, 69
— ортогональная 43, 65, 69
— ортонормированная 43, 69
— полная 49, 71
скалярное произведение 16, 26, 60, 74, 75, 117, 124
слабое решение 352—357, 412, 469
след функции 340, 343
Соболева теоремы о вложении 275
— пространства с весами 366, 563
собственная функция 230, 447
собственное значение 230, 446, 463
собственный элемент 446
спектр оператора 468
сплайн-функция 516
стационарная точка 112
стационарное распределение температуры 151, 294
сумма ряда 64
суммы частные 45, 70
δ-сфера 36, 66, 76
сходимость в среднем 31
— по норме 454
сходящийся ряд 64

Темпля теорема 497
тензор деформации 278

— напряжений 279
теорема о минимуме квадратичного функционала 151, 176
точка внутренняя 315
— накопления 37, 66, 77
— неподвижная 89
— предельная 37

упругий потенциал 280
уравнение полноты 50
— равновесия 281
— эллиптическое 7, 256, 309
условие однородной эллиптичности 287
— перехода 384
— полноты 71
устойчивость численного процесса 226

факторпространство 428, 541
Фредгольма альтернатива 477
Фридрихса неравенство 185, 344
функционал 106
— вещественный 105
— интегрируемый 321
— измеримый по Лебегу 319
— квадратичный 108
— комплексный 105
— линейный 105
— энергии 137, 164
функции ортогональные 43
— с компактным носителем 94
— с метрикой 27
Фурье коэффициенты 46, 70
— метод 447
— ряд 46, 70

Шаудера базис 51, 71
Шварца неравенство 29
Шмидта ортонормирование 53

Эйлера — Лагранжа уравнение 350
Эйлера уравнение 350
элемент нулевой 60
— обратный 60
— предельный 64, 76
элементы линеала 15, 28
— ортогональные 69
— особые 66, 67
эллиптическое решение 470
энергия деформации 281
Эри функция 10, 277

Оглавление

От редакторов перевода 5
Предисловие 6
Глава 1 Введение 9

Часть I. Гильбертово пространство 14

Глава 2. Скалярное произведение функций. Норма, метрика 14
Глава 3. Пространство L_2 24

Глава 4. Сходимость в пространстве $L_2(G)$ (сходимость в среднем). Полное пространство. Сепарабельное пространство 30

а) Сходимость в пространстве $L_2(G)$ 30
б) Полнота 34
в) Плотность. Сепарабельность 36

Глава 5. Ортогональные системы в $L_2(G)$ 39

а) Линейная зависимость и независимость в $L_2(G)$ 39
б) Ортогональные и ортонормированные системы в $L_2(G)$ 43
в) Ряд Фурье. Полные системы. Ортонормирование по Шмидту . . 46
г) Разложение $L_2(G)$ на ортогональные подпространства 55
д) Некоторые свойства скалярного произведения 57

Глава 6. Гильбертово пространство 59

а) Предгильбертово пространство. Гильбертово пространство . . . 59
б) Линейная зависимость и независимость в гильбертовом пространстве. Ортогональные системы, ряды Фурье 68
в) Ортогональные подпространства. Некоторые свойства скалярного произведения 72
г) Комплексное гильбертово пространство 73

Глава 7. Некоторые замечания к предыдущим главам. Нормированное пространство, банахово пространство 75

Глава 8. Операторы и функционалы, в частности, в гильбертовых пространствах 80

а) Операторы в гильбертовом пространстве 81
б) Симметричные, положительные и положительно определенные операторы. Теоремы о плотности 91
в) Функционалы. Теорема Рисса 104

Часть II. Вариационные методы 109

Глава 9. Теорема о минимуме квадратичного функционала и ее следствия 109
Глава 10. Пространство H_A 117
Глава 11. Существование минимума функционала F в пространстве H_A. Обобщенные решения 130
Глава 12. Метод ортонормированных рядов. Пример 145
Глава 13. Метод Ритца 151
Глава 14. Метод Галёркина 160
Глава 15. Метод наименьших квадратов. Метод Куранта 165
Глава 16. Метод наибыстрейшего спуска. Пример 170
Глава 17. Итоги глав с 9 по 16 176

Часть III. Применение вариационных методов к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных 186

Глава 18. Неравенство Фридрихса. Неравенство Пуанкаре 186

Глава 19. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений 197
а) Уравнения второго порядка 197
б) Уравнения высших порядков 220

Глава 20. Проблема выбора базиса 224
а) Общие принципы 224
б) Выбор базиса для обыкновенных дифференциальных уравнений 236

Глава 21. Численные примеры. Обыкновенные дифференциальные уравнения 239
Глава 22. Краевые задачи для уравнений в частных производных второго порядка 256
Глава 23. Бигармонический оператор. (Уравнения пластин и оболочек) 269
Глава 24. Операторы математической теории упругости 278
Глава 25. Выбор базиса в случае краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных 287
Глава 26. Численные примеры. Дифференциальные уравнения в частных производных 294
Глава 27. Краткое содержание глав 18—26 307

Часть IV. Теория краевых задач для дифференциальных уравнений, основанная на идее слабого решения и на теореме Лакса — Мильграма 314

Глава 28. Интеграл Лебега; области, имеющие границу Липшица 315
Глава 29. Пространство $W_2^{(k)}(G)$ 330

Глава 30. Следы функций из пространства $W_2^{(k)}(G)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(G)$. Обобщенные неравенства Фридрихса и Пуанкаре 340
Глава 31. Эллиптические дифференциальные операторы порядка $2k$. Слабые решения эллиптических уравнений 347
Глава 32. Формулировка краевых задач 357
а) Устойчивые и неустойчивые граничные условия 357
б) Слабое решение краевой задачи. Частные случаи 361
в) Определение слабого решения краевой задачи. Общий случай 369

Глава 33. Существование слабого решения краевой задачи. V-эллиптичность. Теоремы Лакса—Мильграма 386

Глава 34. Приложение прямых вариационных методов для приближенного построения слабого решения 401
а) Однородные граничные условия 402
б) Неоднородные граничные условия 411
в) Метод наименьших квадратов 417

Глава 35. Задача Неймана для уравнений порядка $2k$ (случай, когда форма $((v, u))$ не является V-эллиптической) 419
Глава 36. Резюме и некоторые замечания к главам 28—35 438

Часть V. Задача на собственные значения 446

Глава 37. Введение 446
Глава 38. Вполне непрерывные операторы 450
Глава 39. Задача на собственные значения для дифференциальных операторов 469
Глава 40. Метод Ритца в задаче на собственные значения 485
а) Метод Ритца 485
б) Задача оценки ошибки 494
Глава 41. Численные примеры 504

Часть VI. Некоторые специальные методы. Регулярность слабого решения 512

Глава 42. Метод конечных элементов 512
Глава 43. Метод наименьших квадратов на границе для бигармонического уравнения. Метод Треффтца решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. 521
а) Первая краевая задача для бигармонического уравнения (задача о пластинах и оболочках) 522
б) Понятие метода наименьших квадратов на границе 525
в) Сходимость метода 528
г) Метод Треффтца 533
Глава 44. Метод ортогональных проекций 535
Глава 45. Применение метода Ритца к решению параболических краевых задач 545
Глава 46. Регулярность слабого решения, выполнение заданного уравнения и граничных условий в классическом смысле. Существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям 557

а) Гладкость слабого решения 557
б) Существование функции $w \in W_2^{(k)}(G)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям 562
Глава 47. Заключительные замечания, перспективы предложенной теории 563
Таблица для построения наиболее распространенных функционалов и систем уравнений Ритца 566
Литература 578
Список обозначений 580
Предметный указатель 582